Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

WEDSON NASCIMENTO PEREIRA
MIGUEL CHAQUIAM

ENSINO DE CONE CIRCULAR RETO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém-PA
2020

Wedson Nascimento Pereira

Miguel Chaquiam

PRODUTO EDUCACIONAL:
ENSINO DE CONE CIRCULAR RETO
POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém-PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

PEREIRA, Wedson Nascimento e CHAQUIAM, Miguel

Produto educacional: ensino de cone circular reto por meio de uma sequência didática ƒWedson Nascimento Pereira; Miguel Chaquiam, 2020

ISBN:

Produto educacional vinculado à dissertação "Uma sequência didática para o ensino do cone" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019

1. Geometria−Estudo e ensino 2. Cone. 3. Sequência didática. 4. Métodos de ensino. I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD. 23º ed.516.3

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: ____

Mestrando (a): ____

Data da avaliação: ____/____/______

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:
( ) Estudantes do Ensino Fundamental
( ) Estudantes do Ensino Médio
( ) Professores do Ensino Fundamental
( ) Professores do Ensino Médio
( ) Outros: ____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) Tipo de Produto Educacional
( ) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo
( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo ( ) Software ( ) Outro: ____________________
b) Possui URL:
( ) Sim, qual o URL: ____________________________________
( ) Não ( ) Não se aplica
c) É coerente com a questão-foco da pesquisa?
( ) Sim
( ) Não. Justifique? ______________________________________
d) É adequado ao nível de ensino proposto?
( ) Sim
( ) Não. Justifique? ______________________________________
e) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?
( ) Sim
( ) Não. Justifique? ______________________________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Possui sumário:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
b) Possui orientações ao professor:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

c) Possui orientações ao estudante:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
d) Possui objetivos/finalidades:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
e) Possui referências:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
f) Tamanho da letra acessível:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
g) Ilustrações são adequadas:
( ) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?
( ) Sim, onde: ____
( ) Não, justifique: ____
( ) Não se aplica
b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?
( ) Sim, onde: ____
( ) Não, justifique: ____
( ) Não se aplica
c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?
( ) Sim, onde: ____
( ) Não, justifique: _______________________________________
( ) Não se aplica
d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?
( ) na escola, como atividade regular de sala de aula
( ) na escola, como um curso extra
( ) outro: ____
e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):
( ) Alunos do Ensino Fundamental
( ) Alunos do Ensino Médio
( ) Professores do Ensino Fundamental
( ) Professores do Ensino Médio
( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____________
____
( ) outros membros da comunidade, tais como __________________
____

O produto educacional foi considerado:
( ) APROVADO
( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES
( ) REPROVADO

Data de aprovação: _____ de _______________ de 2019.

Banca examinadora

___________________________________. Orientador
Miguel Chaquiam
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará - UEPA

_________________________________. Examinador (Interno)
Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Educação Brasileira
Universidade do Estado do Pará - UEPA

________________________________. Examinador (Externo)
Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação
Escola Tenente Rêgo Barros - ETRB

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO PRODUTO EDUCACIONAL

E.E.E.M. Antônio Jesus de Oliveira
Rua Getulio Vargas, s/nº Bairro
Pombal - Itinga
Cep: 68.633-000 Dom Eliseu-PA

DECLARAÇÃO

Eu, Marcelo da Silva Sousa, vice-diretor da Escola Estadual de Ensino Médio Antônio Jesus de Oliveira, localizada na Avenida Getúlio Vargas, S/N , Vila Bela Vista – Dom Eliseu-PA e Cep 68633-000, venho por meio desta declarar que o Sr Wedson Nascimento Pereira, vinculado ao Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolveu Estágio Supervisionado e aplicou Produto Educacional Ensino de cone circular reto por meio de uma sequência didática, nesta Escola sob a supervisão do professor Samuel Alves de Araújo, na turma 2ª série do Ensino Médio, no turno da matutino, no período de 25/06/2009 a 28/06/2019, para fins de comprovação junto ao referido Programa. O Estágio Supervisionado foi desenvolvido de acordo com o Plano de Atividades apresentado inicialmente, obteve uma avaliação positiva pelo Supervisor responsável levando em consideração tanto o Relatório de Acompanhamento do Estágio Supervisionado quanto a Avaliação do Produto Educacional. O que me leva a concluir que as atividades desenvolvidas no referido Estágio contribuíram efetivamente para a melhoria de ensino e aprendizagem da Escola.

Dom Eliseu-PA, 05 de agosto de 2019

Marcelo da Silva Sousa
Vice-diretor
Marcelo da Silva Sousa
Port.nº 4169 / 19 SAGEP

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este material educacional para o ensino do Cone é resultando de um trabalho de conclusão de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolvida por Pereira (2019). A proposta da dissertação teve como objetivo avaliar as potencialidades de uma sequência didática para o ensino do Cone, construída segundo as UARC (Unidades Articulada de Reconstrução Conceitual) de Cabral (2017).

As distâncias existentes entre as potencialidades de desenvolvimentos de competências e habilidades humanas produzidas pelo ensino e aprendizagem da Matemática e a realidade concreta do contexto escolar que produzem resultados poucos satisfatórios e bastante preocupantes justificam e autenticam a importância deste estudo que aborda o ensino e aprendizagem da Matemática a partir da geometria espacial, precisamente a partir do ensino e aprendizagem do cone.

Quando decidi pela proposta de ensino a partir da sequência didática a escolha resultou por uma proposta de ensino e aprendizagem que acontece de forma processual, construtiva de espaço de protagonismos para o aluno, de exploração das interações cognitivas, subjetivas e sociais entre os alunos e entre professor e aluno.

Nessa perspectiva a proposta de sequência didática elaborada se opõem a metodologia clássica centrada no uso de definição exemplo e exercício. Contrapondo esse modelo estruturamos nossa sequência didática, como já dito, nas UARC’s de Cabral (2017) que valoriza a importância do uso de uma metodologia que aproxima o aluno do ensino discursivo-dialógico, promovido pelas interações verbais que se correspondem entre os atores envolvidos, gerando condições que possam levar o aluno a perceber e descobrir regularidades, mesmo que de forma intuitiva, provocando condições de observar a necessidade de se ter generalizações.

É importante pontuar que a elaboração da sequência didática obedeceu aos princípios e orientações das matrizes curriculares do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE).

A sequência didática elaborada e aplicada para o ensino do cone é constituída de 07 atividades. O quadro 1 a seguir apresenta os objetivos de cada uma das atividades elaboradas:

Quadro 1: Atividades que constituem a sequência didática

Atividade	Objetivos
Poesia Matemática.	Fazer leitura do poema.
	Reconhecer o uso da linguagem matemática nas representações das relações e interações humanas.
	Identificar na poesia as ambientes, personagens e etc. construídos por termos matemáticos.
	Relacionar os termos matemáticos aos seus respectivos campos.
	Identificar os termos pertencentes a geometria.
	Relacionar os termos geométricos aos campos plano e espacial.
	Identificar o cone a partir de suas características.
	Identificar o cone a partir de sua representação visual.
Conceituação do sólido geométrico cone circular e sua classificação.	Explorar conhecimentos prévios sobre geometria.
	Reconhecer os sólidos que possuem apenas um plano de apoio.
	Identificar nas figuras que tem apenas um plano de apoio os sólidos geométricos que desenham no plano de apoio um círculo.
	Indicar as características comuns que marcam os sólidos geométricos analisados.
	Indicar as características distintas que marcam os sólidos geométricos analisados.
	Identificar e caracterizar os tipos de cone considerando as análises das atividades anteriores.
Elementos de um cone.	Explorar nos alunos conhecimentos prévios sobre os elementos de um cone circular.
	Identificar nas representações gráficas dos sólidos os elementos que caracterizam o cone circular reto e oblíquo.
	Relacionar os nomes dos elementos do cone circular as suas respectivas indicações nas figuras representativas dos sólidos.
Planificação de um cone.	Reconhecer a forma planificada de um cone.
	Identificar e nomear as figuras planas que são formadas com a planificação dos sólidos e indicar os elementos dos sólidos nas figuras planificadas.
	Constatar que é possível recompor o cone circular reto a partir da planificação.
	Reconhecer segmentos e as figuras planas presentes na planificação do cone.
Área lateral e total de um cone circular reto.	Observar a figura representativa de um cone circular reto.
	Refletir sobre o raio da base e geratriz o cone.
	Indicar nos círculos construídos I e II a área da base e a geratriz do cone e nomear as figuras.
	Identificar elementos elemento do cone circular reto nas figuras construídas.
	Determinar as relações das áreas e perímetros nas figuras construídas.
	Calcular os valores da área da base, área lateral e total de um cone circular reto.
Ângulo da área lateral de um cone circular reto.	Observar os elementos do setor circular.
	Indicar medidas do raio, do comprimento do arco do setor circular representados nas imagens analisadas e calcule o valor de α.
	Descobrir uma regularidade que determine o ângulo do setor circular α.
	Fazer a correspondência dos elementos do cone em sua planificação.
	Indicar medidas do raio, do arco e ângulo central.
	Descobrir uma regularidade (fórmula) que determine o ângulo da área lateral de um cone circular reto.
	Fazer a correspondência dos elementos do cone em sua planificação e calcular o valor de α.
Volume de um cone circular reto.	Manipular materiais concreto para observação de acontecimentos.
	Perceber regularidades evidenciadas no experimento
	Descobrir uma regularidade (fórmula) de determinar o volume de um cone circular reto.
	Indicar a regularidade percebida.
	Indicar medidas de raio e altura representadas nas figuras analisadas.
	Calcular o volume do cilindro.
	Descobrir o volume do cone.
	Descrever as percepções produzidas no experimento sobre o volume do cone
	Calcular o volume do cone numa situação- problema.

Fonte: Pereira (2019).

O experimento realizado nos evidenciou que a sequência didática estruturada segundo as UARC’s de Cabral (2017) é potencialmente favorável ao apresentar significativos indícios de aprendizagens sobre o cone. A aplicação da sequência didática produziu um ambiente de aprendizagem em que os alunos de formas processual e construtiva conseguiram reconstruir os conceitos do objeto de estudo.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Conforme já mencionado, as atividades que compõem a sequência didática foram elaboradas com o objetivo de avaliar as potencialidades dessa proposta de ensino para o estudo do cone apontados nos estudos de Zabala (1998), Cabral (2017) e nas teorias das situações didática do Brousseau (2008).

Cabral (2017) compreende a proposta de ensino da sequência didática como grupos de intervenções “passo a passo” orientado pelo professor com proposito de alcançar objetivos de aprendizagem que indica a ideia dos elos de uma corrente. Em que cada elo sucessor está devidamente conectados aos elos anteriores e favorece outras articulações com elos seguintes.

Nessa perspectiva, a elaboração da sequência didática apresentada foi estruturada reconhecendo os elos, as articulações compreendidas por Cabral (2017) para promoção da aprendizagem de forma construtiva e processual.

Na elaboração e estruturação das atividades da sequência didática procuramos apoiá-las nas orientações das matrizes curriculares do ENEM, SAEB e SisPAE.

Quadro 2: Descritores do ENEM

H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Fonte: BRASIL (2009).

Quadro 3: Descritores do SAEB

D2	Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
D3	Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
D12	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D13	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Fonte: BRASIL (2008).

Quadro 4: Descritores do SisPAE

MPA 25	Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
MPA 28	Resolver problemas que envolvam as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos.
MPA 29	Resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetro e/ou área de figuras planas.
MPA 31	Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos, como a pirâmide e o cone.

Fonte: Revista SisPAE (2016).

A quantidade de aulas destinadas para o desenvolvimento de cada uma das atividades está organizada no quadro abaixo. O quadro 5 apresenta o cronograma das atividades.

Quadro 5: Proposta de cronograma de execução das atividades

Sessão	Título da Atividade	Tempo estimado
1ª	Teste de Verificação	1 aula de 45 min
2ª	Oficina de Conhecimentos Prévios	2 aulas de 45 min
3ª	Poesia Matemática	1 aula de 45 min
4ª	Cone circular e sua classificação	1 aula de 45 min
5ª	Elementos de um cone	1 aula de 45 min
6ª	Planificação de um cone.	1 aula de 45 min
7ª	Área lateral e total de um cone circular reto.	1 aulas de 45 min
8ª	Ângulo da área lateral de um cone circular reto.	1 aula de 45 min
9ª	Volume de um cone circular reto.	1 aula de 45 min

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

2.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO PROFESSOR E ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Nesta seção são apresentadas as orientações para aplicação da sequência didática e os procedimentos que a precedem. Com isso, é apresentado o teste de verificação, a justificativa, o objetivo e a forma como aconteceu a oficina, bem como a sequência didática. Os materiais usados na aplicação da sequência didáticas estão organizados por seção. Todos os alunos devem receber seu material e ao final cada grupo deve entregar uma cópia respondida ao professor. O professor tem o seu material para acompanhar os alunos no desenvolvimento das atividades.

No início de cada atividade da sequência didática, no material do professor, são apresentados o título, o objetivo da atividade, matrizes das competências e habilidades do ENEM, SAEB e SisPAE, materiais e orientações necessárias para realização da atividade. Antes da aplicação das atividades da sequência didática é interessante que o professor organize os alunos em grupos, afim de proporcionar uma aprendizagem de forma compartilhada por meio das interações entre alunos e professor.

Ao aplicar sequência didática o professor por meio de intervenções deve expor aos alunos o objetivo da atividade e explicar os comandos que orientam o desenvolvimento das atividades construindo o contrato didático.

Como a sequência didática é uma proposta diferenciada de correntes tradicionais de ensino, os papeis dos atores são bem definidos, dessa forma o modelo do aluno é de protagonista e construtor de sua aprendizagem e o professor por sua vez é de orientador, aquele que conduz o aluno a aprendizagem. Nessa perspectiva o professor deve aplicar a sequência didática com intervenções necessárias para que os alunos construam a aprendizagem proposta.

A seguir tem-se a sequência didática para o ensino do cone circular reto, modelo do professor e suas orientações.

ATIVIDADE 01

Título: Poesia Matemática.

Objetivo: Identificar o uso da linguagem matemática, especialmente elementos geométricos nas representações das relações, interações humanas e o cone.

Matriz: H7, H9.

Orientações ao professor:

- No desenvolvimento da sequência didática os alunos devem identificar os termos matemáticos apresentados no poema e fazer a correspondência com os campos realizados para chegar no objeto de estudo.
- Explorar conhecimentos prévios dos alunos.
- Dividir a turma em grupos de, no máximo, seis alunos.
- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e aluno
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.

Materiais: Poesia, roteiro, lápis, borracha.

Procedimentos: Em grupos, fazer leitura da poesia e, em seguida, responder o roteiro.

A partir da análise deste poema, responda os itens a seguir:

Poesia Matemática

Às folhas tantas
Do livro matemático
Um Quociente apaixonou-se
Um dia
Doidamente
Por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
E viu-a, do Ápice à Base.
Uma figura ímpar:
Olhos rombóides, boca trapezoide,
Corpo ortogonal, seios esferoides.
Fez da sua
Uma vida Paralela à dela
Até que se encontraram
No infinito.
"Quem és tu?" indagou ele
Com ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode chamar-me de Hipotenusa."
E de falarem descobriram que eram
-- O que, em aritmética, corresponde
A almas irmãs
-- Primos entre si.
E assim se amaram
Ao quadrado da velocidade da luz
Numa sexta potenciação
Traçando
Ao sabor do momento
E da paixão
Rectas, curvas, círculos e linhas sinusoidais.
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidianas
E os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e pitagóricas.
E, enfim, resolveram se casar
Constituir um lar.
Mais que um lar, Uma Perpendicular.
Convidaram para padrinhos
O Poliedro e a Bissectriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
Sonhando com uma felicidade
Integral
E diferencial.
E casaram-se e tiveram uma secante e três cones
Muito engraçadinhos.
E foram felizes
Até aquele dia
Em que tudo, afinal,
Vira monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
Frequentador de Círculos Concêntricos.
Viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
Uma Grandeza Absoluta,
E reduziu-a a um Denominador Comum.
Ele, Quociente, percebeu
Que com ela não formava mais
Um Todo Uma Unidade.
Era o Triângulo.
Tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era a fracção
Mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a Relatividade
E tudo que era espúrio passou a ser
Moralidade
Como, aliás, em qualquer
Sociedade.

Autor: Millôr Fernandes

Fonte: http://www.mat.uc.pt (2018).

[I_I – 01] O Poema “Poesia Matemática” retratar relações vividas por muitas pessoas, pois esse poema utiliza termos matemáticos para descrever uma relação. Qual tipo de relação é descrita no poema?

[I_R – 02] Grife os termos matemáticos que figuram nesse poema.

[I_R – 03] Sabendo-se que os documentos oficiais da educação brasileira dividem a Matemática do Ensino Médio em campos (grandezas e medidas, geometria, números e operações, estatística e probabilidade, álgebra e funções), quais campos foram abordados nesse poema?

[I_R – 04] Destaque no texto, dentre os termos grifados, os termos relacionados à geometria.

[I_E – 05] Separe os elementos geométricos destacados em dois grupos a saber, geometria plana e geometria espacial.

[I_E – 06] Dos elementos geométricos espaciais que você destacou qual possui os elementos descritos pelo verso 8 que diz: “E viu-a, do Ápice à Base”?

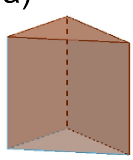
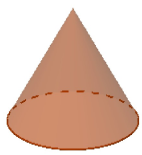
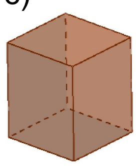
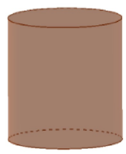
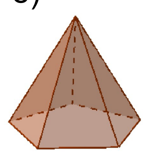
[I_F – 07] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

O elemento geométrico espacial ressaltado na Atividade 01 é denominado de CONE.

O elemento geométrico espacial ressaltado na Atividade 01 é denominado de **CONE**.

[I_{Ar} – 08] Marque abaixo o objeto que possui a forma de um cone circular.

a)	b)	c)	d)	e)
				

Resposta: b

ATIVIDADE 02

Título: Conceituação do sólido geométrico cone circular e sua classificação.

Objetivo: Definir o sólido geométrico cone circular e classificá-lo em cone circular reto e cone circular oblíquo.

Orientações ao professor:

- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Valorizar os conhecimentos prévio dos alunos.
- Identificar as semelhanças e distinções que classificam os tipos de cone circular.

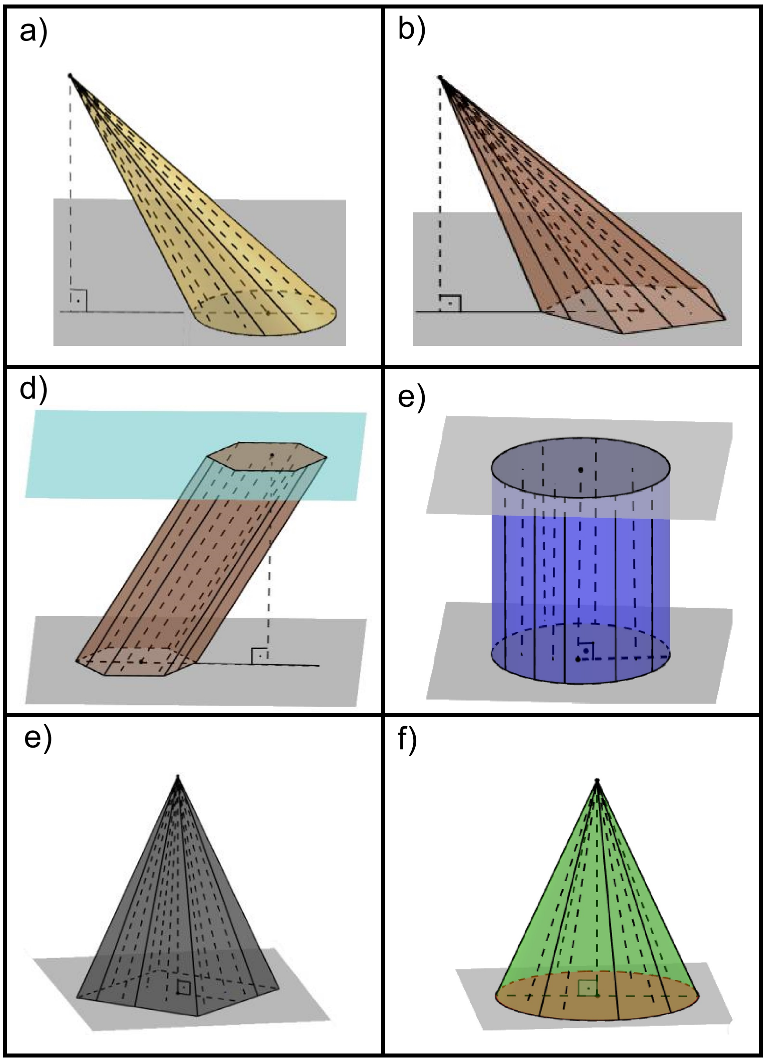
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e aluno.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.

Matriz: H7, H22, D2 e MPA 28.

Materiais: Roteiro, lápis, borracha.

Procedimentos: Em grupos observe os sólidos no quadro e responda o roteiro.

A partir da observação das imagens a seguir responda aos questionamentos:



[I_I – 01] A partir de seus conhecimentos sobre geometria, identifiquem nas figuras apresentadas elementos que possam caracterizá-las.

[I_R – 02] Observando as figuras acima, quais delas possuem apenas um plano de apoio?

[I_R – 03] Dentre as figuras selecionadas no item anterior, quais delas desenham um círculo no plano de apoio?

[I_R – 04] Quais características comuns os sólidos geométricos que desenham no plano de apoio um círculo têm em comum?

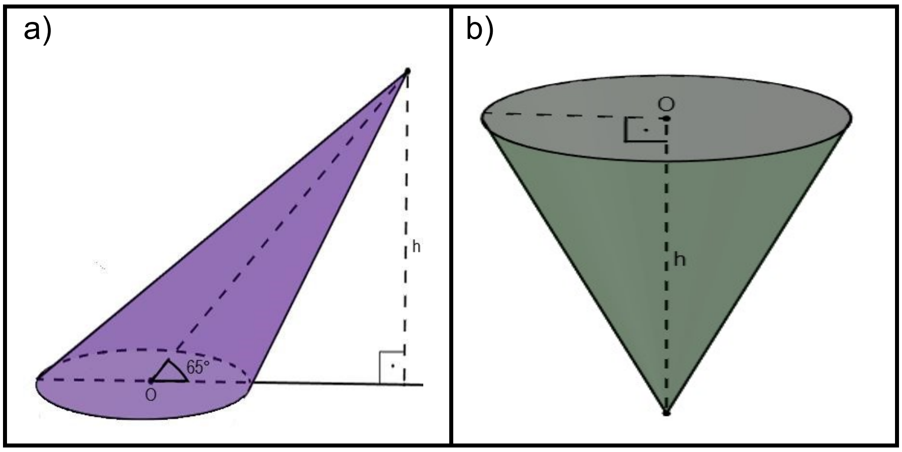
[I_E – 05] Quais diferenças entre os sólidos geométricos que desenham no plano de apoio um círculo?

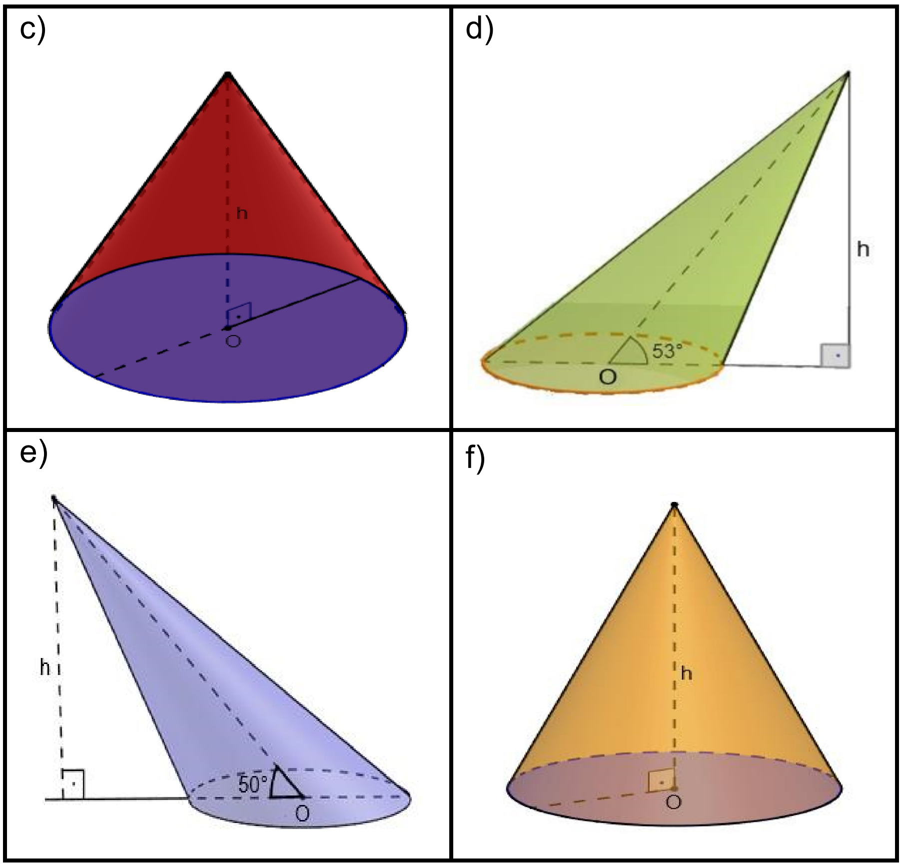
[I_F – 06] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

O objeto geométrico espacial descrito é chamado de cone circular que é formado pelo conjunto de segmentos com uma extremidade na base, sendo a base um círculo e a outra extremidade pertencente ao ponto fora da base do sólido. **O cone circular é classificado como circular reto quando um dos seus segmentos forma com o centro da base um ângulo reto, caso não se tenha um segmento do cone formando um ângulo reto com o centro da base o cone é chamado de cone circular oblíquo.**

[I_{AR} – 07] Dados os cones a seguir:





Identifique os tipos de cone circular (reto – oblíquo) e cite elementos que os caracterizam.

Resposta:

- **Cone circular reto (b, c, f).**
  Elementos que o caracterizam: Segmento h forma com o centro da base um ângulo de 90°.
- **Cone circular oblíquo (a, d , e).**
  Elementos que o caracterizam: Segmento h não forma com o centro da base um ângulo de 90°

ATIVIDADE 03

Título: Elementos de um cone.

Objetivo: Identificar os elementos de um cone.

Orientações ao professor:

- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Valorizar os conhecimentos prévio dos alunos.

- Identificar os elementos que caracterizam o cone.
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e alunos.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.

Matriz: H7, H22.

Materiais: Roteiro, lápis, borracha.

Procedimentos: Em grupos observe os sólidos no quadro e responda o roteiro.

[I_I – 01] A partir dos seus conhecimentos sobre cone circular, identifiquem nas figuras apresentadas elementos que possam caracterizá-las.

Figura I

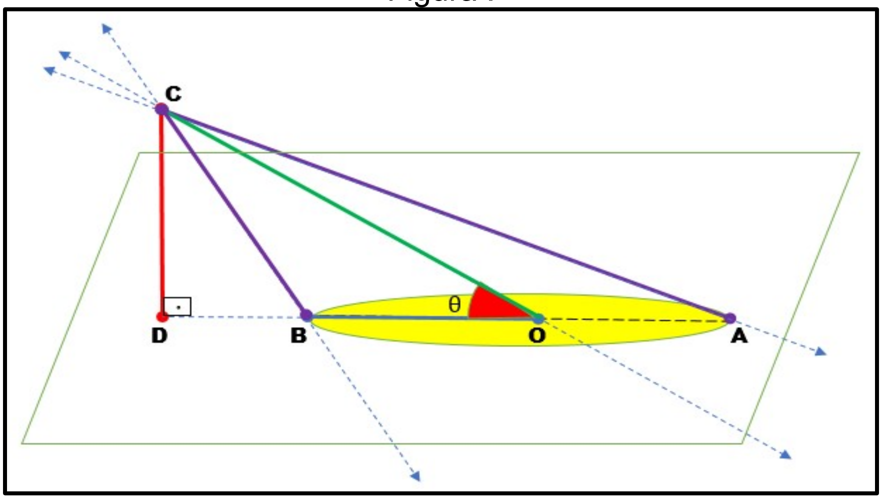
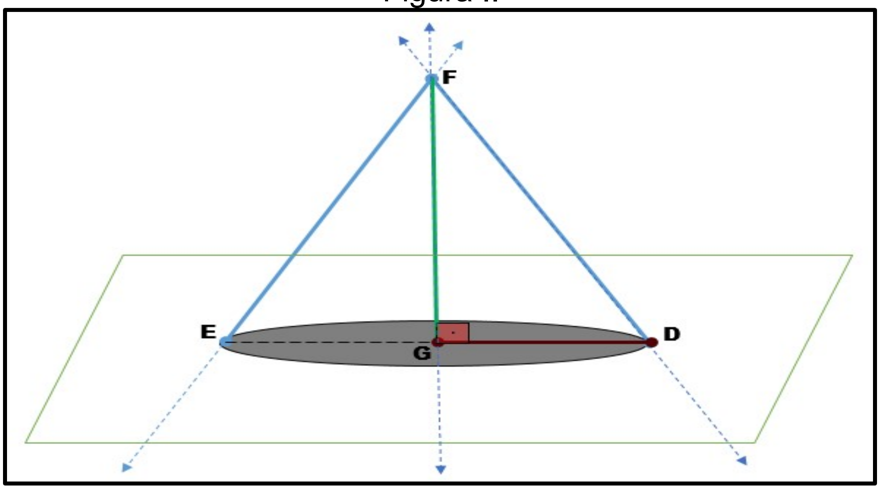


Figura II



[I_E – 02] Identifique os pontos, segmentos e áreas que podem representar em cada um dos cones circulares os seguintes elementos:

a) Vértice:

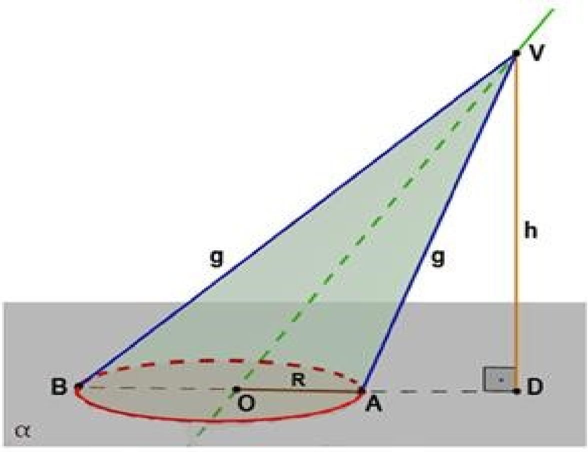
b) Altura:

c) Raio da base:
d) Área da base:
e) Eixo de um cone (reta que passa pelo vértice e centro da base):
f) Geratriz (segmento lateral que passa pelo vértice até o contorno do círculo da base):
g) Secção meridiana (figura formada pela intersecção de um plano que passa pelo vértice e pelo diâmetro da base):

[IF – 03] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

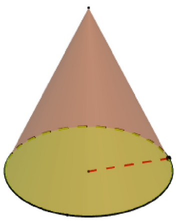
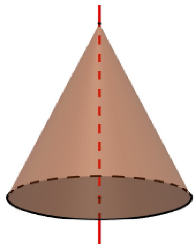
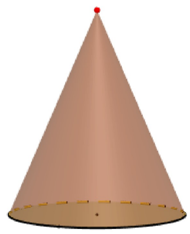
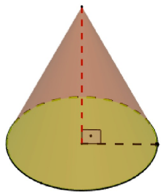
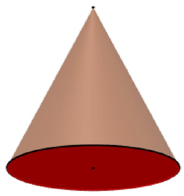
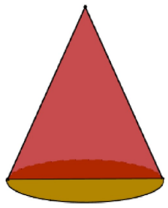
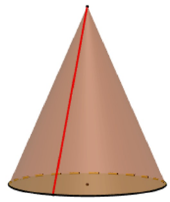
Os elementos que constituem o cone são:



Vértice (V): É o ponto fora da base que representa um dos extremos dos segmentos que constituem o cone;
Altura (h): É a distância do vértice V ao planoα, que é obtida pela projeção ortogonal de V em α;
Base: É o círculo de centro O e raio de medida R;
Eixo do cone (VO): É a reta que passa pelos pontos V e O;
Geratriz (g): É o segmento com uma extremidade em V e a outra no contorno do círculo que forma a base do cone;
Secção Meridiana: É a região representada por um triângulo que é obtido pela intersecção do cone com um plano que contenha o eixo do cone VO, exemplo (ΔVAB). Caso o cone seja circular reto, sua secção mediana formará um triângulo isósceles.

[I_{Ar} – 04] Usando a relação nominal dos elementos a direita no quadro a seguir, escreva o nome do elemento representado em vermelho indicado em cada cone:

Resposta:

a)  **Resposta: Raio**	b)  **Resposta: Eixo do cone**	c)  **Resposta: Vértice**	1 – Vértice 2 – Altura 3 – Raio da base 4 – Área da base 5 – Eixo do cone 6 – Geratriz 7 – Secção meridiana
d)  **Resposta: Altura**	e)  **Resposta: Área da base**	f)  **Resposta: Secção meridiana**	g)  **Resposta: Geratriz**

ATIVIDADE 04

Título: Planificação de um cone.

Objetivo: Reconhecer a forma planificada de um cone.

Orientações ao professor:

- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Usar material concreto para planificar sólidos geométricos.
- Indicar elementos na planificação dos sólidos.
- Recompor o cone planificado.
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e alunos.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.

Matriz: H7, H22, D3 e MPA25.

Materiais: Lápis, borracha, tesoura, cartolina, compasso, fita métrica, fita adesiva, cone, cilindro, cubo e roteiro.

Procedimentos: Em grupos use os materiais seguindo o roteiro.

[I_I – 01] Observando os sólidos (Cubo – Cilindro – Cone) faça a planificação de cada um seguindo a sequência.

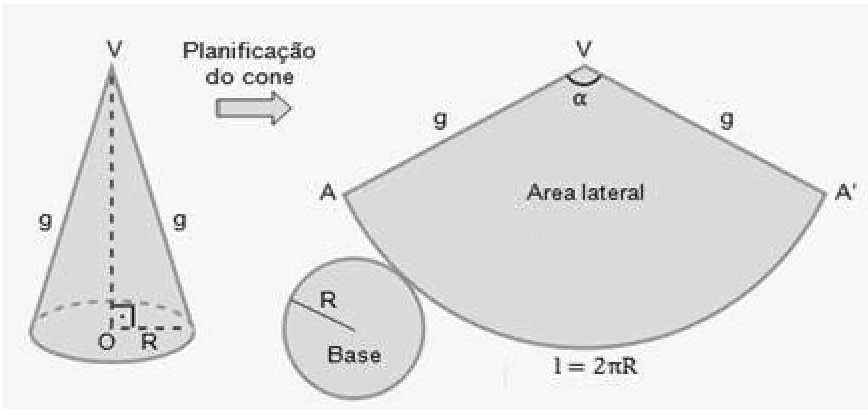
[I_R – 02] Identifique e nomeie que figuras planas são formadas com a planificação dos sólidos e indique os elementos dos sólidos nas figuras planificadas.

[I_E – 03] Verifique se é possível recompor o sólido cone circular reto a partir da planificação apresentada utilizando os materiais concretos (cartolina – compasso – tesoura – fita métrica – fita adesiva).

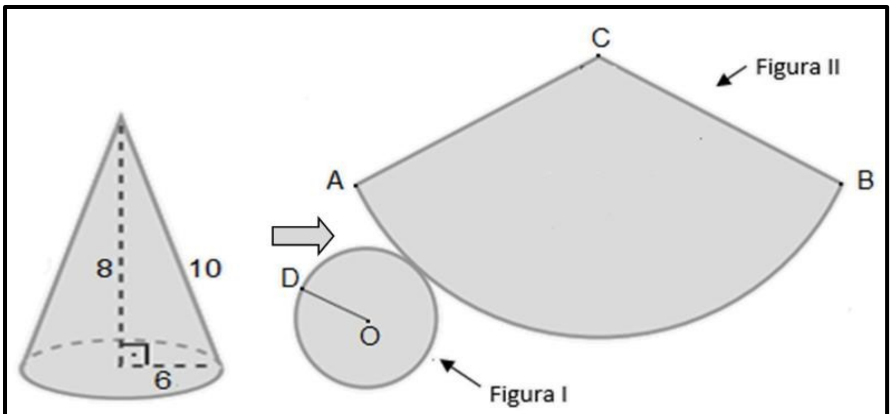
[I_F – 04] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

A planificação de um cone circular reto é formada pela superfície lateral que representa um setor circular e pela superfície da base que representa um círculo.



[I_{Ar} – 05] Observando o cone circular reto e sua planificação composta pelas figuras I e II, responda:



Qual o valor das medidas e nome das figuras a seguir:

a) Medidas do segmento$\overline{AC}$= **Resposta: 10**
b) Medidas do segmento$\overline{BC}$= **Resposta: 10**
c) Medidas do segmento$\overline{OD}$= **Resposta: 6**
d) Medidas do arco $\widehat{AB}$ = **Resposta: 12π**
e) Nome da figura I: **Resposta: Círculo**
f) Nome da figura II: **Setor circular**

ATIVIDADE 05

Título: Área lateral e total de um cone circular reto.

Objetivos: Identificar a fórmula para o cálculo da área lateral e total de um cone circular reto.

Orientações ao professor:

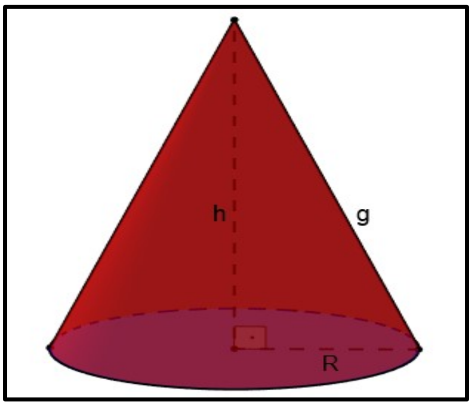
- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Usar material concreto para planificar sólidos geométricos.
- Construir representação da área da base e área lateral do cone
- Identificar e nomear área da base e área lateral do cone.
- Identificar os elementos da área da base e área lateral do cone.
- Determinar perímetro e área do cone circular reto.
- Calcular valores da área da base, areal lateral e total do cone circular reto.
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e alunos.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.
- Explorar conhecimento prévios dos alunos.

Matriz: H7, H22, D3, D12, D13, MPA25, MPA29 e MPA31.

Materiais: Lápis, borracha, compasso, régua e roteiro.

Procedimentos: Em grupos responda o roteiro.

[I_I – 01] Observe o cone circular reto a seguir:



[I_R – 02] Após observar o cone acima, construa os círculos I e II, cujas medidas dos raios correspondem às medidas do raio da base (para o círculo I) e geratriz do cone (para o círculo II), respectivamente.

[I_E – 03] Identifique nos círculos I e II a área da base e a área lateral do cone e nomeie essas figuras.

[I_R – 04] Identifique elementos do cone circular reto nas figuras nomeadas.

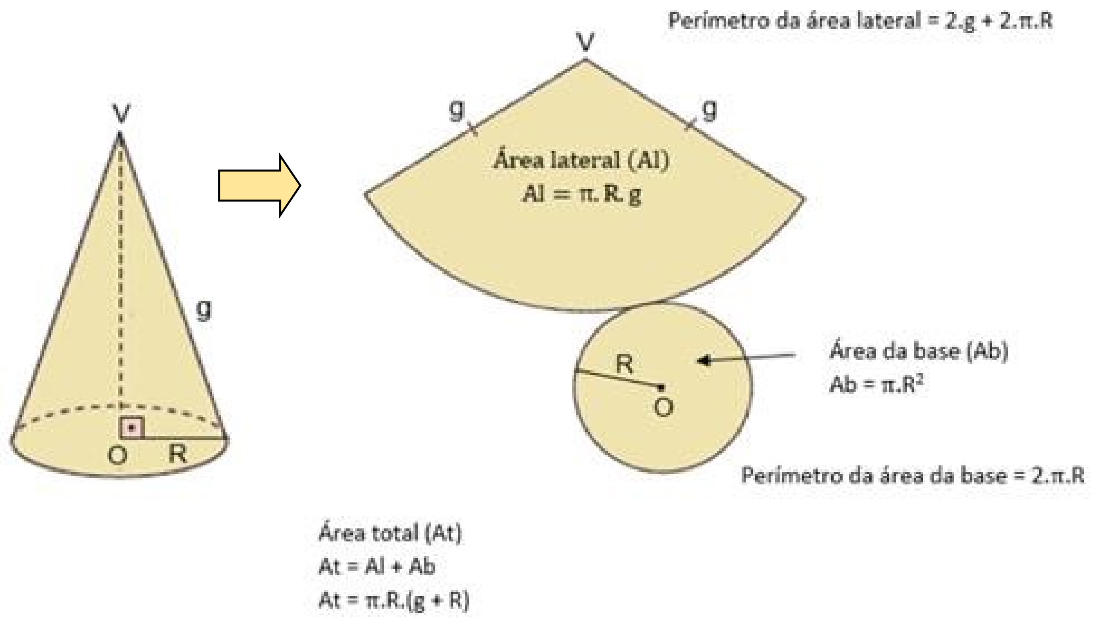
[I_E – 05] A partir dos seus conhecimentos sobre círculo e setor circular, determinar os perímetros e as áreas das figuras nomeadas no item anterior.

[I_F – 06] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

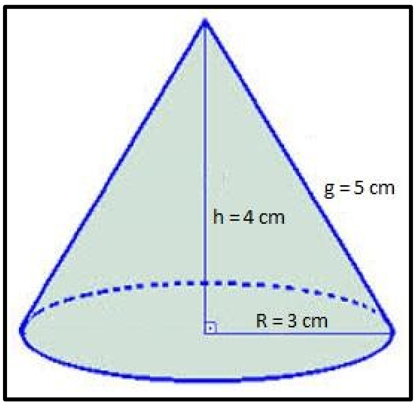
Sugestão de formalização do conceito:

Os perímetros e as áreas lateral e total da planificação de um cone circular reto estão descritos no quadro a seguir. Vejamos:

Conceituação área lateral e total de um cone circular reto



[I$_{AR}$ – 07] Dado o cone:



Para os valores dados, calcule:

a) A área da base: **Resposta: 9π cm²**

b) A área lateral: **Resposta: 15π cm²**

c) A área total: **Resposta: 24π cm²**

ATIVIDADE 06

Título: Ângulo da área lateral de um cone circular reto.

Objetivo: Descobrir uma regularidade (fórmula) de determinar o ângulo da área lateral de um cone circular reto.

Orientações ao professor:

- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Explorar conhecimento prévios dos alunos
- Indicar valores do raio e comprimento do arco presentes na sequência de figuras representativa do setor circular.
- Descobri o valor de alfa.
- Apresentar uma regularidade para o cálculo de alfa.
- Fazer a correspondência dos elementos do cone na sua planificação.
- Associar a área lateral do cone à área do setor circular e indicar elementos.
- Apresentar uma relação para o cálculo do ângulo alfa da área lateral do cone.
- Fazer a correspondência dos elementos do cone na sua planificação e calcular do ângulo alfa da área lateral do cone.
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e alunos.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.

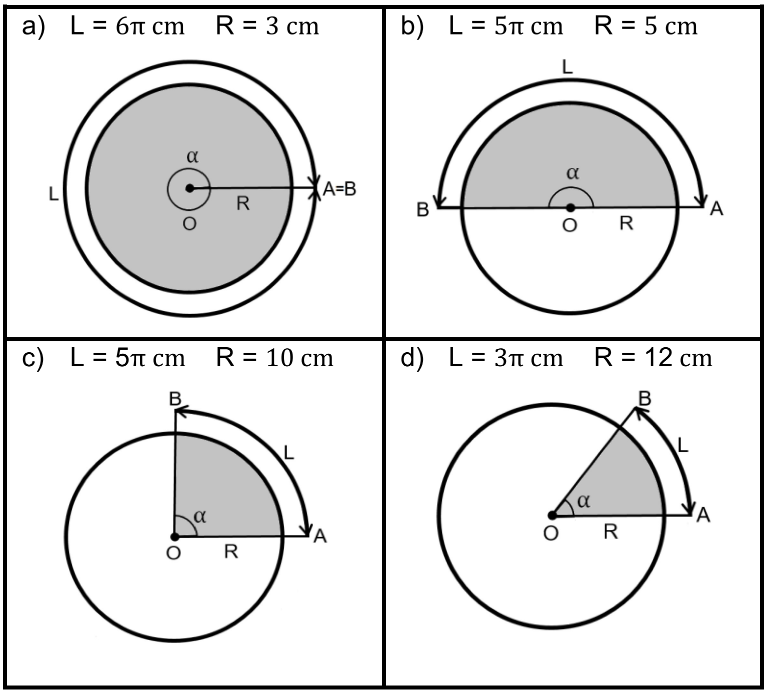
Matriz:H7, H22, D3 e MPA 25.

Materiais: Roteiro da atividade, lápis, borracha.

Procedimentos: Observe os sólidos no quadro e responda os questionamentos a seguir.

[I_I – 01] Observe as figuras abaixo e seus respectivos elementos.

Setores circulares

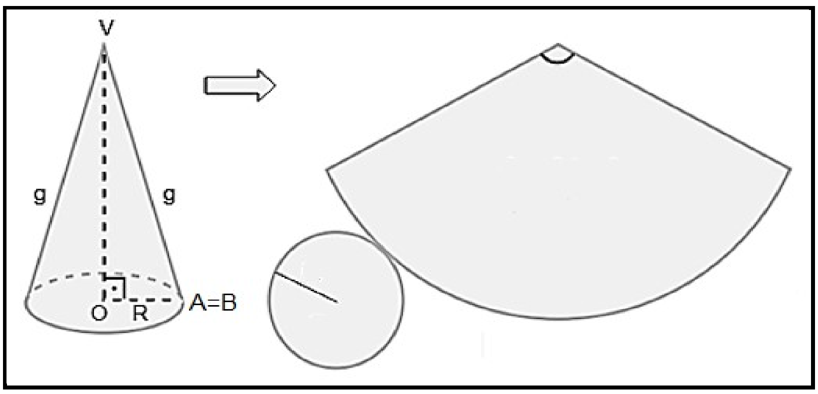


[I_E – 02] Utilizando os dados fornecidos em cada caso e seus conhecimentos de setor circular, preencha o quadro a seguir:

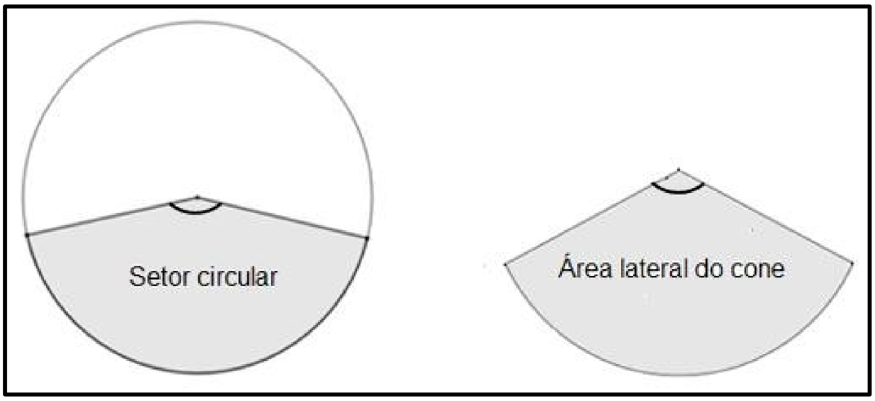
Figuras	Raio **R** (em cm)	Comprimento do arco **L** (em cm)	Valor de **α** (em radiano)
a			
b			
c			
d			

[I_R – 03] Tomando por base as informações constantes no quadro acima, apresente uma relação para o cálculo do ângulo α do setor circular de um modo geral?

[I_E – 04] Indique os elementos do cone abaixo na sua planificação, indicando as posições dos pontos A, B, V e O, além do raio, geratriz e comprimento do arco AB.



[I$_R$ – 05] Considerando a área lateral do cone como área de um setor circular a seguir, determine as medidas do raio, do arco e do ângulo central.



[I$_E$ – 06] Tomando por base as informações da área lateral do cone circular reto, apresente uma relação para o cálculo do ângulo correspondente ao ângulo α do setor circular.

[I$_F$ – 07] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

A medida do ângulo α formado pela planificação da área lateral de um cone circular reto ou cone de revolução que possuem raio (R) e geratriz (g) é dado pelas fórmulas:

- **Comprimento do arco em graus:**

$$\theta = 360°.\frac{R}{g}$$

- **Comprimento do arco em radianos:**

$$\theta = 2\pi.\frac{R}{g}$$

Podendo essas fórmulas da seguinte forma:

Em graus:

Comprimento do arco		**Ângulo**
$2\pi g$	-------	$360°$
$2\pi R$	-------	θ

$$2\pi g.\theta = 360°.2\pi R$$

$$\theta = \frac{360°.2\pi R}{2\pi g}$$

$$\theta = 360°.\frac{R}{g}$$

Em radianos:

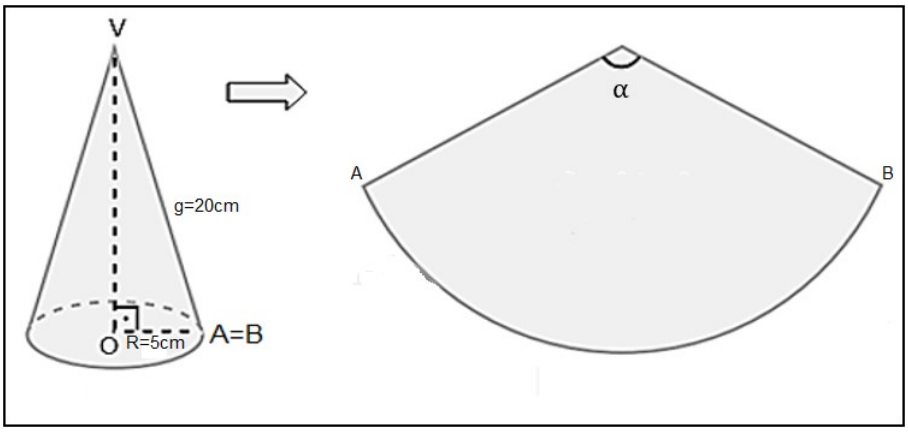
Comprimento do arco		**Ângulo**
$2\pi g$	-------	2π
$2\pi R$	-------	θ

$$2\pi g.\theta = 2\pi R 2\pi$$

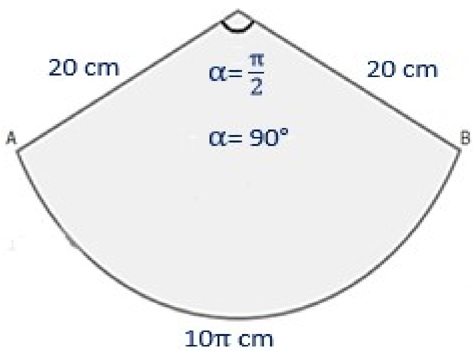
$$\theta = \frac{2\pi R 2\pi}{2\pi g}$$

$$\theta = 2\pi.\frac{R}{g}$$

[I_{Ar} – 08] Considerando o cone a seguir e a planificação da sua área lateral ao lado, represente seus elementos na sua planificação e determine o valor de α.



Resposta:



ATIVIDADE 07

Título: Volume de um cone circular reto.

Objetivo: Descobrir uma regularidade (fórmula) de determinar o volume de um cone circular reto.

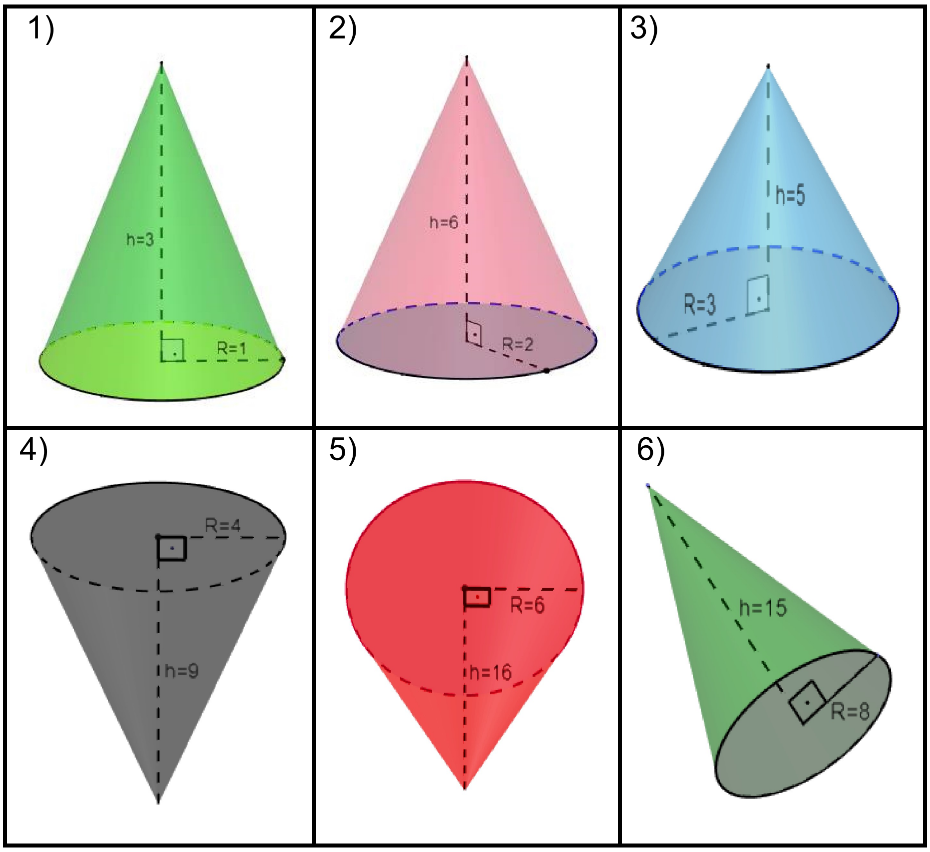
Orientações ao professor:

- Distribuir as atividades impressas da sequência didática (material do aluno).
- Expor os objetivos e a forma de desenvolvimento da atividade.
- Fazer experimento usando materiais concreto para perceber regularidade.
- Indicar regularidades.
- Analisar figuras representativas do cone e indicar medidas do raio e altura presentes nas figuras.
- Calcular área da base.
- Considerando os valores explorados nas atividades anteriores como valores do cilindro calcular o volume do cilindro.
- Descobri o volume do cone.
- Descrever o processo realizado para o cálculo do volume do cone circular reto.
- Resolver situação- problema.
- Estimular interações entre os alunos e entre professor e alunos.
- Projeção de atividade com uso de data show para intervenções coletivas.
- Explorar conhecimento prévios dos alunos.

Matriz:H7, H8, H9, H22 e H22.

Materiais: Tabela de volume, roteiro da atividade, lápis, borracha, soja e recipientes na forma de cone e cilindro.

Procedimentos: Observe os sólidos no quadro e responda os questionamentos a seguir.



[I_I – 01] Usando os materiais concretos cone, cilindro, cubo e soja, preencha totalmente o cilindro com a soja, em seguida esvazie o cilindro completamente usando o cone para retirar a soja. Feito isso, utilize o cone enchendo-o inteiramente para encher novamente o cilindro com a soja. Repita o mesmo processo usando o cone, o cubo e a soja. Refaça os processos quantas vezes julgar necessário.

[I_R – 02] Refletindo sobre os processos realizados em quais deles há uma relação de regularidade. Marque o conjunto que possui a regularidade:

a) Cone e cilindro b) Cone e cubo

[I_R – 03] Indique a regularidade que você observou na manipulação?

[I_E – 04] Analisando os cones do quadro acima preencha as colunas medida do raio (R) e medida da altura (h) na tabela abaixo.

[I_E – 05] Explorando os valores das medidas do raio dos cones indicados na coluna medida do raio (R), preencha a coluna área da base (A_b) que corresponde área da base de cada cone.

[I_E – 06] Tomando os valores das medidas das áreas da base presentes na terceira coluna da tabela e considerando-as como área da base de um cilindro e, ainda, tomando os valores das alturas presentes na quarta coluna como altura de um cilindro, calcule o volume de cada cilindro e preencha a quinta coluna volume do cilindro.

[I_E – 07] Usando os valores do quadro e as assimilações feitas em [I_R – 02] e [I_R – 03] descubra o valor do volume do cone e preencha a sexta coluna.

Cone	Medida do raio (R)	Media da altura (h)	Área da base (Ab)	Volume do cilindro (V_{CI})	Volume do cone (V_{CO})
01					
02					
03					
04					
05					
06					

[I_R – 08] Descreva como você fez para calcular o volume de cone?

[I_F – 09] Neste momento o professor faz a formalização do conceito do objeto de estudo usando as observações dos alunos realizadas ao longo do desenvolvimento das atividades.

Sugestão de formalização do conceito:

A descrição feita na [I_R – 08] identifica que o volume de cone circular reto, corresponde a terça parte do produto da área de sua base (S) pela sua altura (h).

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}Sh} \text{ , como } \mathbf{S = \pi R^2} \text{ , escrevemos } \mathbf{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

[I_{AR} – 10] Para atender uma encomenda uma confeiteira deve fazer doces no formato de cone circular reto, com 8 cm de altura e 2 cm de raio. Quantos cm³ de doce será necessário para produzir cada doce? (Use $\pi = 3$).

Reposta: 32 cm³.

2.2 TESTE DE VERIFICAÇÃO

Para nos certificarmos da possibilidade da aplicação da sequência didática proposta para o ensino e aprendizagem do cone circular reto realizamos um teste de verificação de conhecimentos prévios necessários, pois para melhor aplicação da sequência didática é importante que os alunos tenham conhecimentos que lhes permitam bom desempenho. Sendo assim, foi necessário o desenvolvimento de uma oficina que abordou os conteúdos pré-requisitos para o estudo do cone, como: Círculo, setor circular, cubo e cilindro.

O teste de verificação proposto apresenta seis questões de assuntos básicos de geometria relacionados ao cone circular reto, como exposto na seção seguinte. Para aplicação do teste indicamos o tempo de 30 a 45 minutos. Os resultados apresentados pelo teste serviram de orientação e parâmetro para elaboração da oficina que se fez necessário.

2.2.1 Teste de verificação – material aluno

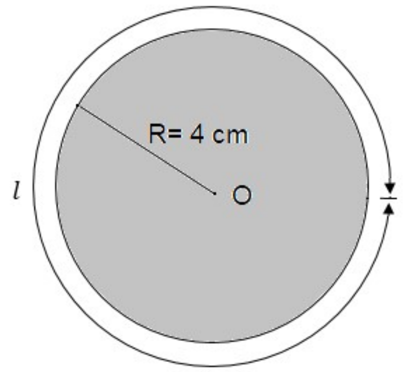
Escola: ____

Professor (a): ___________________________________

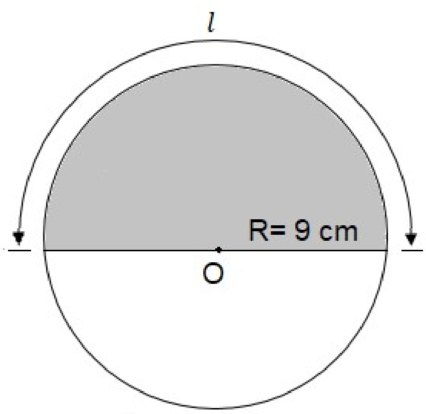
1) Calcule o valor de $A = \frac{\pi.R^2.h}{2}$, sabendo que R= 3 e h= 8.

2) Calcule o comprimento (l) dos arcos das circunferências a seguir:
Adote: $\pi = 3{,}14$.

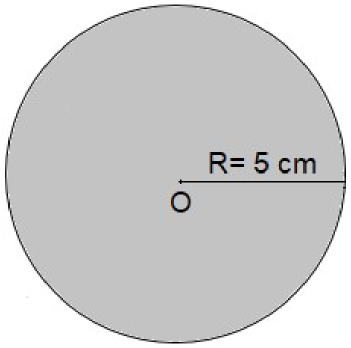
a)



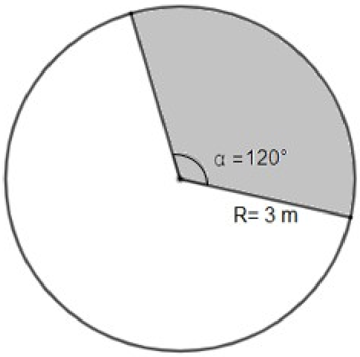
b)



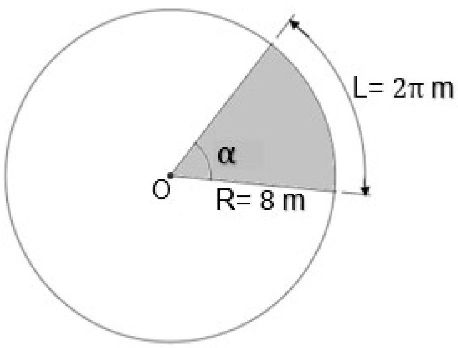
3) Calcule a área do círculo a seguir:



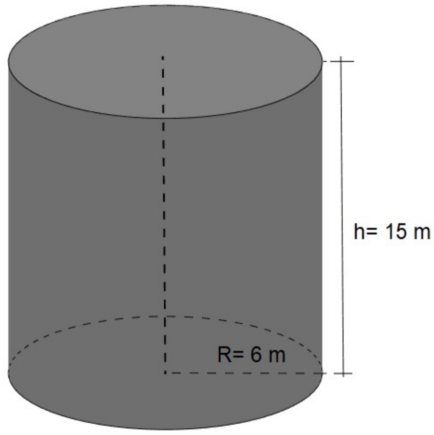
4) Calcule a área do setor circular destacado em cinza no círculo a abaixo.



5) Calcule os valores de α no setor circular a seguir:



6) Um cilindro circular reto tem raio igual a 8 cm e altura 15 cm. Calcule o volume do cilindro.



2.2.2 Teste de verificação – Material Professor

Escola: ___________________________________

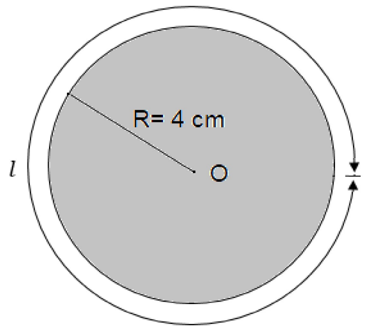
Professor (a): ______________________________

1) Calcule o valor de $A = \frac{\pi.R^2.h}{2}$, sabendo que R= 3 e h= 8.

Resposta: 36π

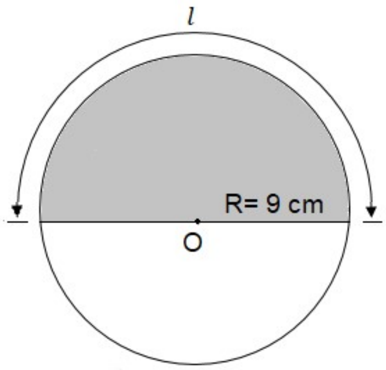
2) Calcule o comprimento (l) dos arcos das circunferências a seguir:
Adote: $\pi = 3{,}14$.

a)



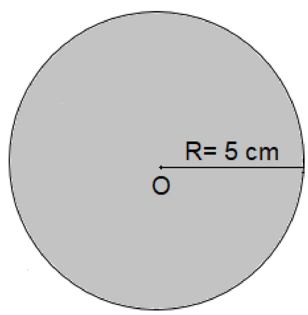
Resposta: 25,12 cm

b)



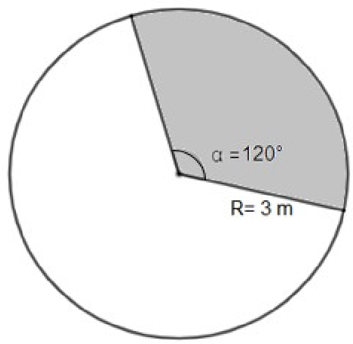
Resposta: 28,26 cm

3) Calcule a área do círculo a seguir:



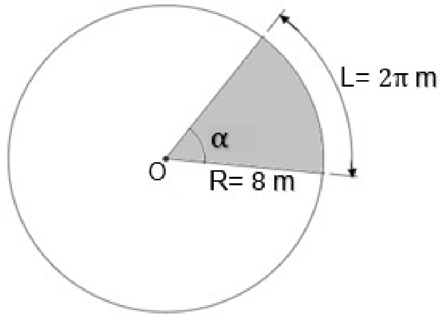
Resposta: 25π cm²

4) Calcule a área do setor circular destacado em cinza no círculo a abaixo.



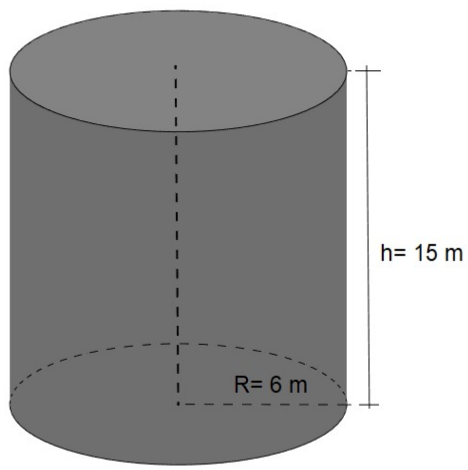
Resposta: 3π m²

5) Calcule os valores de α no setor circular a seguir:



Resposta: $\frac{\pi}{4}$ radianos m²

6) Um cilindro circular reto tem raio igual a 8 cm e altura 15 cm. Calcule o volume do cilindro.



Resposta: 960π m³

2.3 OFICINA DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

A oficina tem o objetivo de desenvolver os conhecimentos básicos necessários para que seja aplicada a sequência didática. Desse modo, a proposta da oficina foi organizada em forma de aula expositiva dialogada para revisão de conteúdo. Na oficina foram abordamos os conteúdos de círculo (área e perímetro), setor circular (área e ângulo), cubo (planificação, área e volume) e cilindro (planificação, área e volume).

2.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ALUNO

Escola: ____

Professor (a): ____________________________________

Alunos (a): ___________________________ Grupo: ____

ATIVIDADE 01

[I_I – 01] A partir da análise deste poema, responda os itens a seguir:

Poesia Matemática

Às folhas tantas
Do livro matemático
Um Quociente apaixonou-se
Um dia
Doidamente
Por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
E viu-a, do Ápice à Base.
Uma figura ímpar:
Olhos rombóides, boca trapezoide,
Corpo ortogonal, seios esferoides.
Fez da sua
Uma vida Paralela à dela
Até que se encontraram
No infinito.
"Quem és tu?" indagou ele
Com ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode chamar-me de Hipotenusa."
E de falarem descobriram que eram
-- O que, em aritmética, corresponde
A almas irmãs
-- Primos entre si.
E assim se amaram
Ao quadrado da velocidade da luz
Numa sexta potenciação
Traçando
Ao sabor do momento
E da paixão
Rectas, curvas, círculos e linhas sinusoidais.
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidianas
E os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e pitagóricas.
E, enfim, resolveram se casar
Constituir um lar.
Mais que um lar, Uma Perpendicular.
Convidaram para padrinhos
O Poliedro e a Bissectriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
Sonhando com uma felicidade
Integral
E diferencial.
E casaram-se e tiveram uma secante e três cones
Muito engraçadinhos.
E foram felizes
Até aquele dia
Em que tudo, afinal,
Vira monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
Frequentador de Círculos Concêntricos.
Viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
Uma Grandeza Absoluta,
E reduziu-a a um Denominador Comum.
Ele, Quociente, percebeu
Que com ela não formava mais
Um Todo Uma Unidade.
Era o Triângulo.
Tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era a fracção
Mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a Relatividade
E tudo que era espúrio passou a ser Moralidade
Como, aliás, em qualquer
Sociedade.

Autor: Millôr Fernandes

Fonte: http://www.mat.uc.pt (2018).

[I$_R$ – 02] O Poema “Poesia Matemática” retratar relações vividas por muitas pessoas, pois esse poema utiliza termos matemáticos para descrever uma relação. Qual tipo de relação é descrita no poema?

[I$_R$ – 03] Grife os termos matemáticos que figuram nesse poema.

[I$_R$ – 04] Sabendo-se que os documentos oficiais da educação brasileira dividem a Matemática do Ensino Médio em campos (grandezas e medidas, geometria, números e operações, estatística e probabilidade, álgebra e funções), quais campos foram abordados nesse poema?

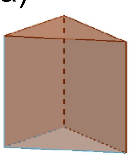
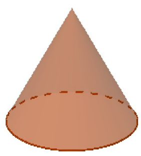
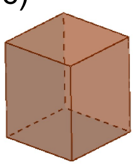
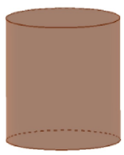
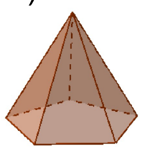
[I$_R$ – 05] Destaque no texto, dentre os termos grifados, os termos relacionados à geometria.

[I$_E$ – 06] Separe os elementos geométricos destacados em dois grupos a saber, geometria plana e geometria espacial.

[I$_E$ – 07] Dos elementos geométricos espaciais que você destacou qual possui os elementos descritos pelo verso 8 que diz: “E viu-a, do Ápice à Base”?

[I$_F$ – 08] Formalização do conceito:

[I$_{Ar}$ – 09] Marque abaixo o objeto que possui a forma de um cone circular.

a)	b)	c)	d)	e)
				

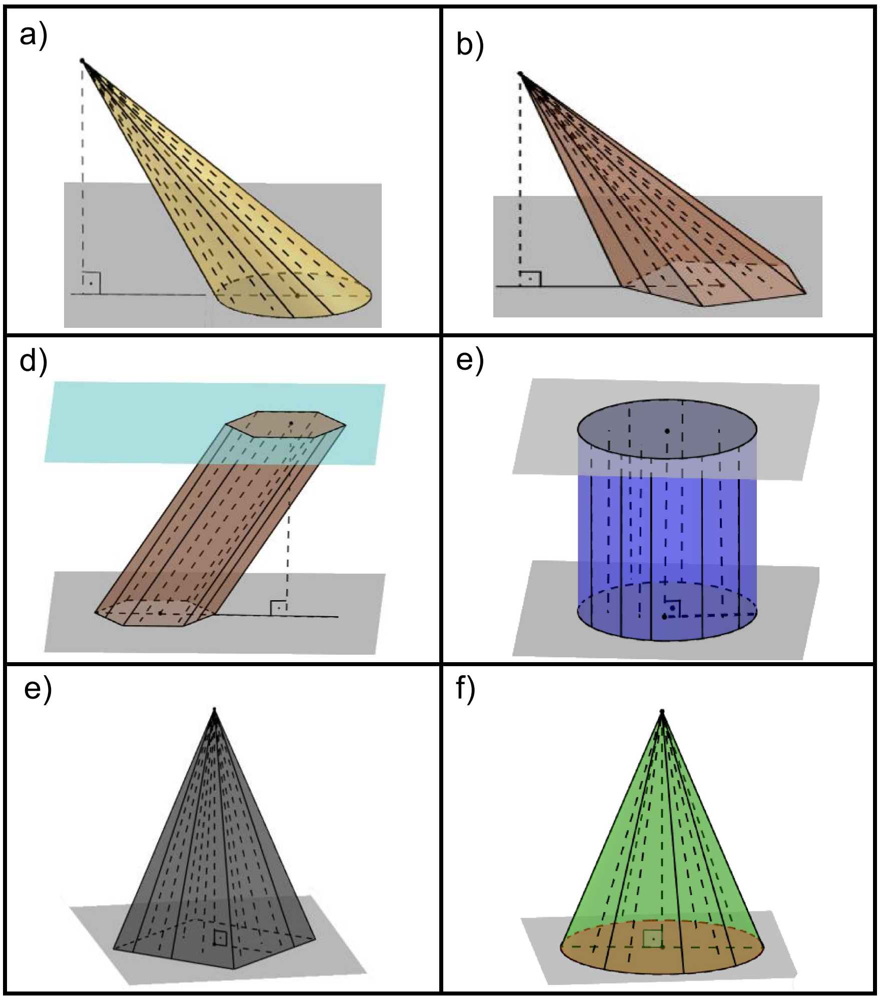
ATIVIDADE 02

Escola: ____

Professor (a): ___________________________________

Alunos (a): ____________________________ Grupo: ____

[I_I – 01] A partir da observação das imagens a seguir responda aos questionamentos:



[I_R – 02] A partir de seus conhecimentos sobre geometria, identifiquem nas figuras apresentadas elementos que possam caracterizá-las.

[I_E – 03] Observando as figuras acima, quais delas possuem apenas um plano de apoio?

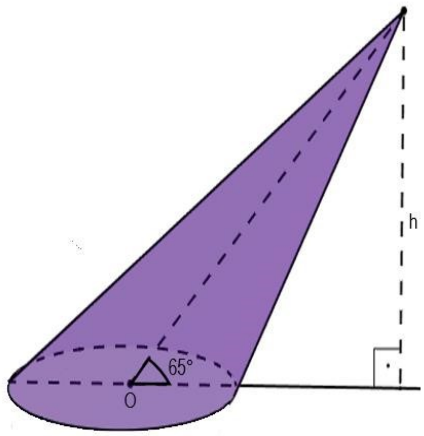
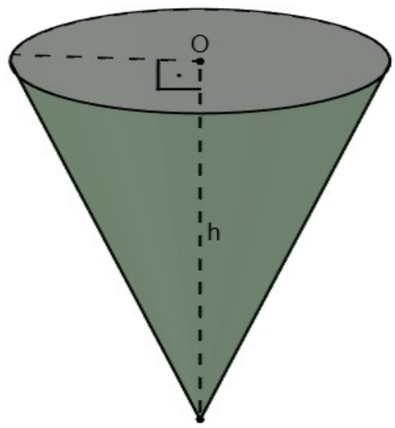
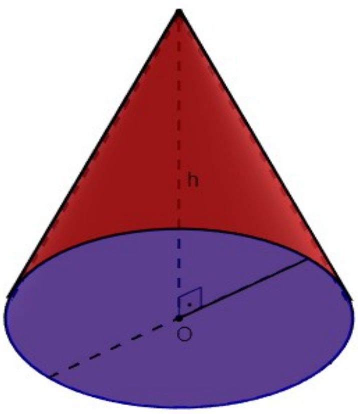
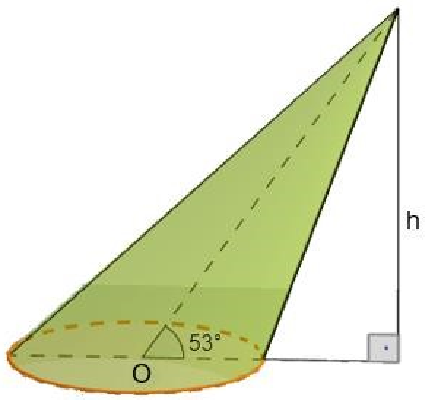
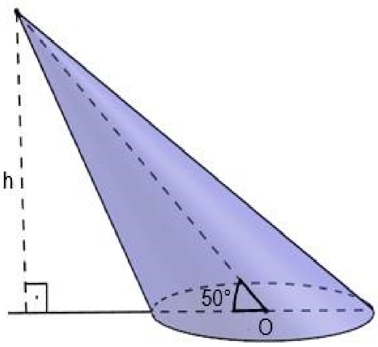
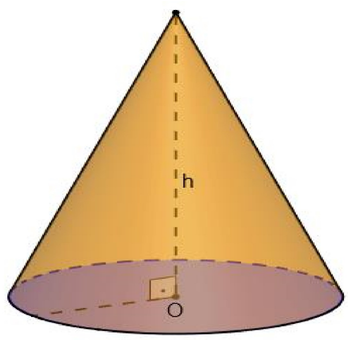
[I_R – 04] Dentre as figuras selecionadas no item anterior, quais delas desenham um círculo no plano de apoio?

[I_R – 05] Quais características comuns os sólidos geométricos que desenham no plano de apoio um círculo têm em comum?

[I$_{R}$ – 06] Quais diferenças entre os sólidos geométricos que desenham no plano de apoio um círculo?

[I$_{F}$ – 07] Formalização do conceito:

[I$_{AR}$ – 08] Dados os cones a seguir:

<table>
<tr>
<td>a)

</td>
<td>b)

</td>
</tr>
<tr>
<td>c)

</td>
<td>d)

</td>
</tr>
<tr>
<td>e)

</td>
<td>f)

</td>
</tr>
</table>

Identifique os tipos de cone circular (reto – oblíquo) e cite elementos que os caracterizam.

ATIVIDADE 03

Escola: ____

Professor (a): ___________________________________

Alunos (a): __________________________ Grupo: ____

[I$_I$ – 01] A partir dos seus conhecimentos sobre cone circular, identifiquem nas figuras apresentadas elementos que possam caracterizá-las.

Figura I

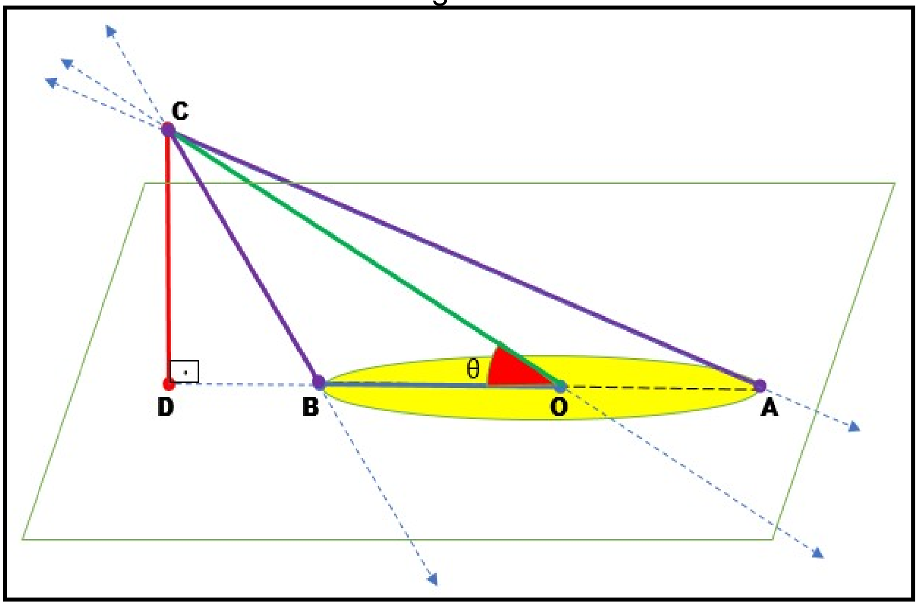
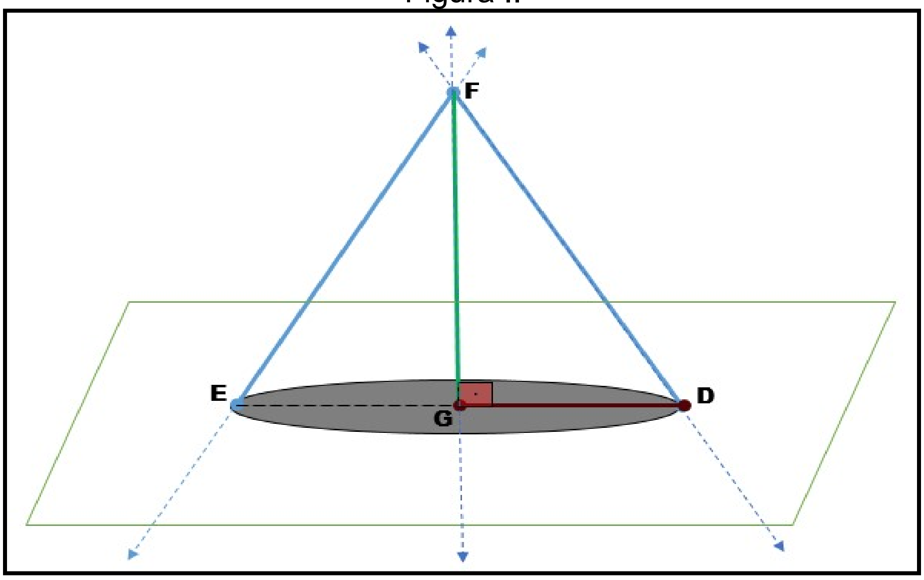


Figura II



[IE – 02] Identifique os pontos, segmentos e áreas que podem representar em cada um dos cones circulares os seguintes elementos:

a) Vértice:

b) Altura:

c) Raio da base:

d) Área da base:

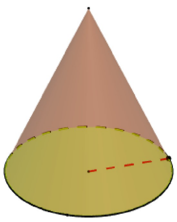
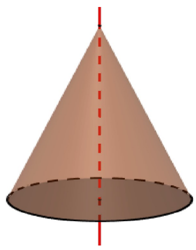
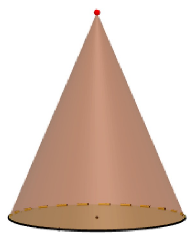
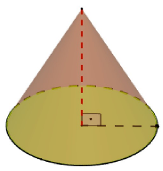
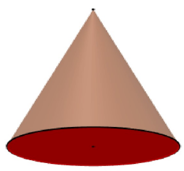
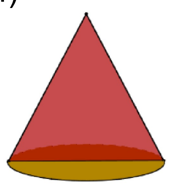
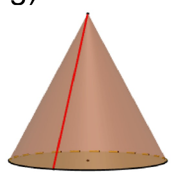
e) Eixo de um cone (reta que passa pelo vértice e centro da base):

f) Geratriz (segmento lateral que passa pelo vértice até o contorno do círculo da base):

g) Secção meridiana (figura formada pela intersecção de um plano que passa pelo vértice e pelo diâmetro da base).

[IF – 03] Formalização do conceito:

[IAr – 04] Usando a relação nominal dos elementos a direita no quadro a seguir, escreva o nome do elemento representado em vermelho indicado em cada cone:

a)  __________	b)  __________	c)  __________	1– Vértice 2– Altura 3– Raio da base 4– Área da base 5– Eixo do cone 6– Geratriz 7– Seção meridiana
d)  __________	e)  __________	f)  __________	g)  __________

ATIVIDADE 04

Escola: ____

Professor (a): ____________________________________

Alunos (a): ___________________________ Grupo: ____

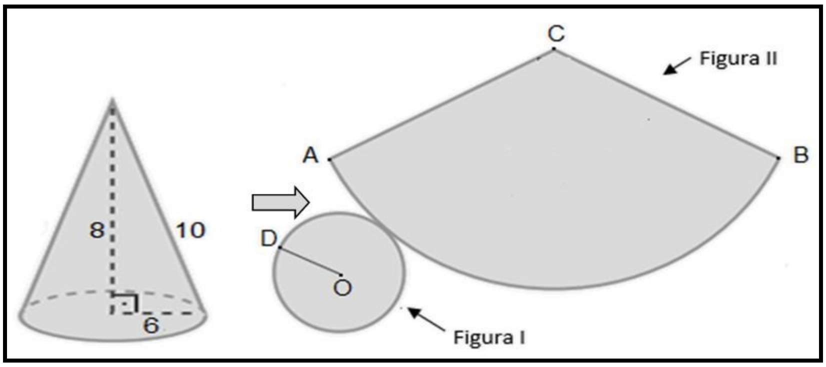
[I_I – 01] Observando os sólidos (Cubo – Cilindro – Cone) faça a planificação de cada um seguindo a sequência.

[I_R – 02] Identifique e nomeie que figuras planas são formadas com a planificação dos sólidos e indique os elementos dos sólidos nas figuras planificadas.

[I_E – 03] Verifique se é possível recompor o sólido cone circular reto a partir da planificação apresentada utilizando os materiais concretos (cartolina – compasso – tesoura – fita métrica – fita adesiva).

[I_F – 04] Formalização do conceito:

[I_{Ar} – 05] Observando o cone circular reto e sua planificação composta pelas figuras I e II, responda:



Qual o valor das medidas e nome das figuras a seguir:

a) Medidas do segmento$\overline{AC}$=______

b) Medidas do segmento$\overline{BC}$=______

c) Medidas do segmento$\overline{OD}$=______

d) Medidas do arco $\widehat{AB}$ =______

e) Nome da figura I: ____

f) Nome da figura II: ____

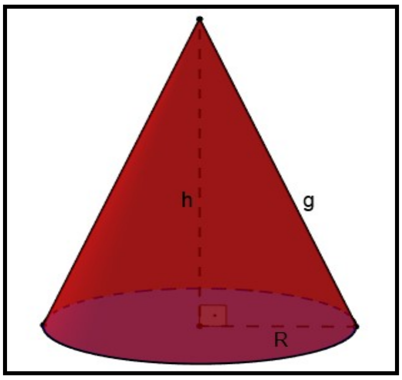
ATIVIDADE 05

Escola: ____

Professor (a): ____________________________________

Alunos (a): ______________________________ Grupo: ____

[I_I – 01] Observe o cone circular reto a seguir:



[I_R – 02] Após observar o cone acima, construa os círculos I e II, cujas medidas dos raios correspondem às medidas do raio da base (para o círculo I) e geratriz do cone (para o círculo II), respectivamente.

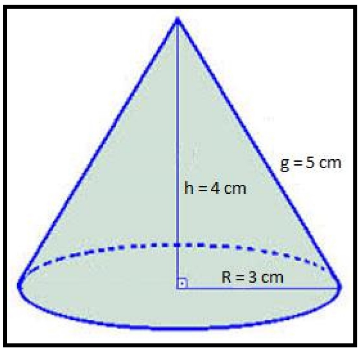
[I_E – 03] Identifique nos círculos I e II a área da base e a área lateral do cone e nomeie essas figuras.

[I_R – 04] Identifique elementos do cone circular reto nas figuras nomeadas.

[I_E – 05] A partir dos seus conhecimentos sobre círculo e setor circular, determinar os perímetros e as áreas das figuras nomeadas no item anterior.

[I_F – 06] Formalização do conceito:

[I_{AR} – 07] Dado o cone:



Para os valores dados, calcule:

a) A área da base:

b) A área lateral:

c) A área total:

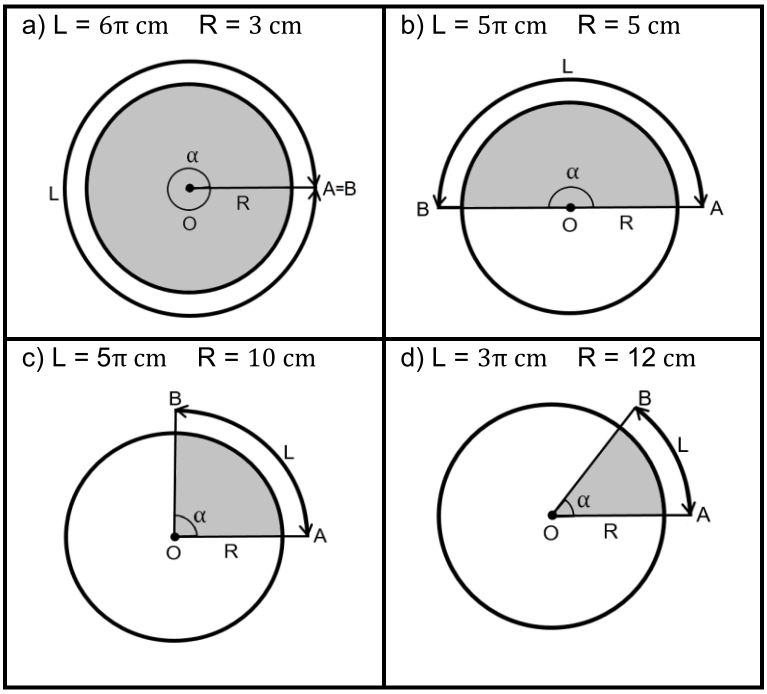
ATIVIDADE 06

Escola: ____

Professor (a): ____________________________________

Alunos (a): ____________________________ Grupo: ____

[I_I – 01] Observe as figuras abaixo e seus respectivos elementos.

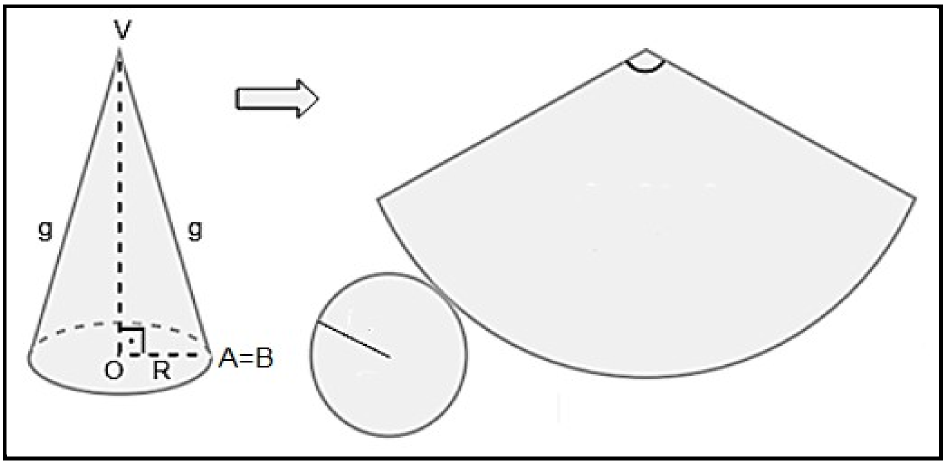


[I_E – 02] Utilizando os dados fornecidos em cada caso e seus conhecimentos de setor circular, preencha o quadro a seguir:

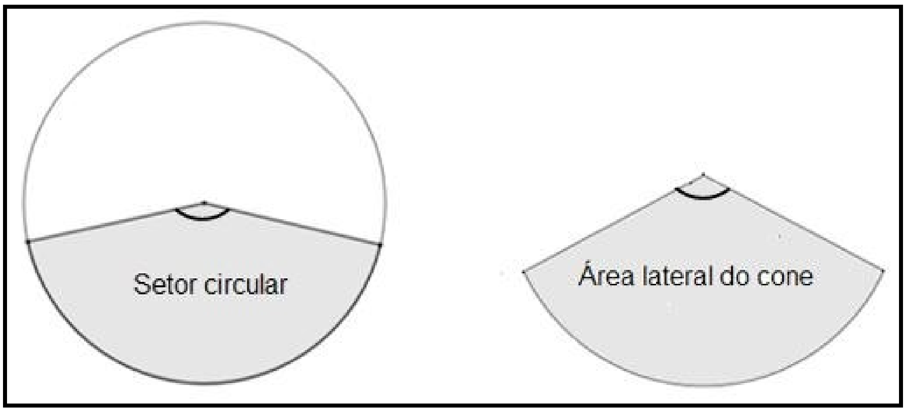
Figuras	Raio **R** (em cm)	Comprimento do arco **L** (em cm)	Valor de **α** (em radiano)
a			
b			
c			
d			

[I_R – 03] Tomando por base as informações constantes no quadro acima, apresente uma relação para o cálculo do ângulo α do setor circular de um modo geral?

[I_E – 04] Indique os elementos do cone abaixo na sua planificação, indicando as posições dos ponto A, B, V e O, além do raio, geratriz e comprimento do arco AB.



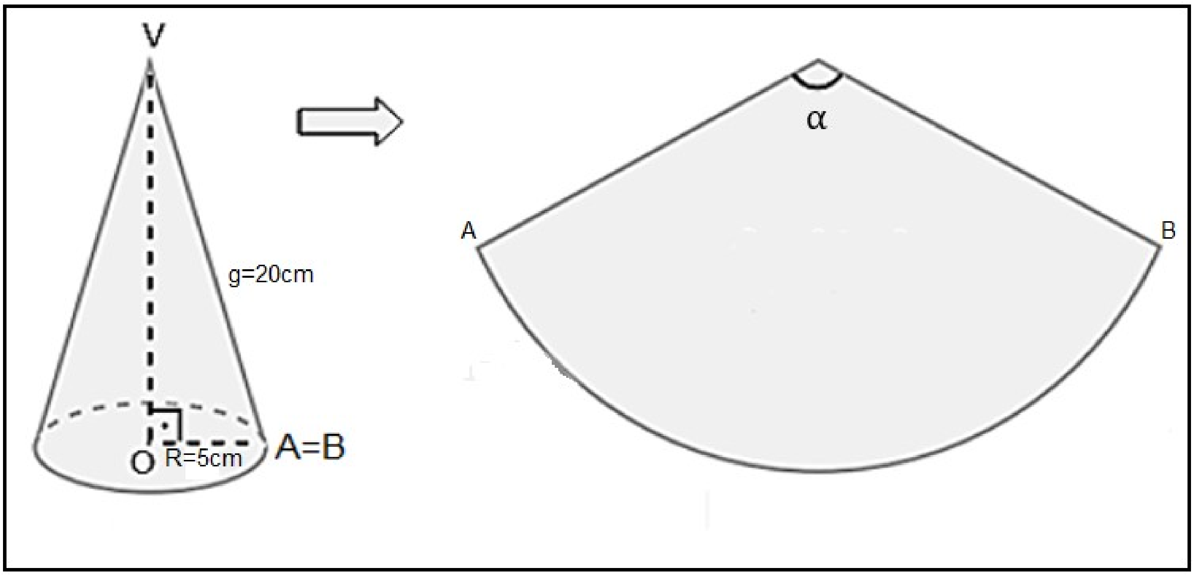
[I_R – 05] Considerando a área lateral do cone como área de um setor circular, determine as medidas do raio, do arco e do ângulo central.



[I_E – 06] Tomando por base as informações da área lateral do cone circular reto, apresente uma relação para o cálculo do ângulo correspondente ao ângulo α do setor circular.

[I_F – 07] Formalização do conceito:

[I_{Ar} – 08] Considerando o cone a seguir e a planificação da sua área lateral ao lado, represente seus elementos na sua planificação e determine o valor de α.

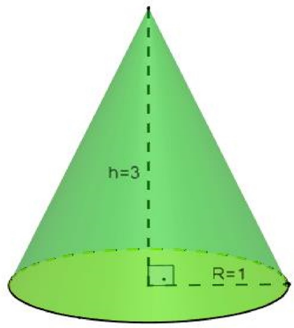
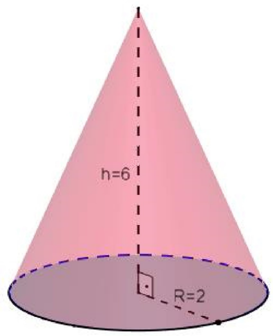
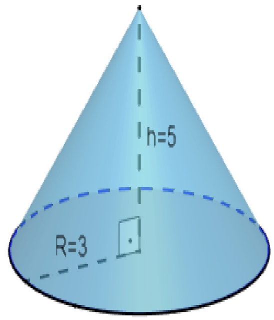
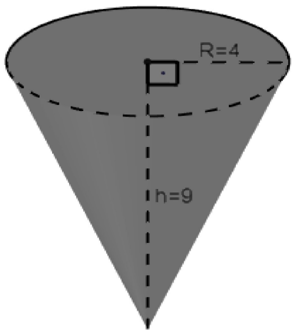
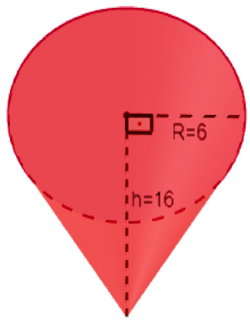
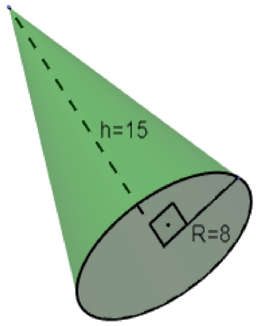


ATIVIDADE 07

Escola: ____

Professor (a): ___________________________________

Alunos (a): ___________________________ Grupo: ____

 1)	 2)	 3)
 4)	 5)	 6)

[I_I – 01] Usando os materiais concretos cone, cilindro, cubo e soja, preencha totalmente o cilindro com a soja, em seguida

esvazie o cilindro completamente usando o cone para retirar a soja. Feito isso, utilize o cone enchendo-o inteiramente para encher novamente o cilindro com a soja. Repita o mesmo processo usando o cone, o cubo e a soja. Refaça os processos quantas vezes julgar necessário.

[I_R – 02] Refletindo sobre os processos realizados em quais deles há uma relação de regularidade. Marque o conjunto que possui a regularidade:

a) Cone e cilindro b) Cone e cubo

[I_R – 03] Indique a regularidade que você observou na manipulação?

[I_E – 04] Analisando os cones do quadro acima preencha as colunas medida do raio (R) e medida da altura (h) na tabela abaixo.

[I_E – 05] Explorando os valores das medidas do raio dos cones indicados na coluna medida do raio (R), preencha a coluna área da base (A_b) que corresponde área da base de cada cone.

[I_E – 06] Tomando os valores das medidas das áreas da base presentes na terceira coluna da tabela e considerando-as como área da base de um cilindro e, ainda, tomando os valores das alturas presentes na quarta coluna como altura de um cilindro, calcule o volume de cada cilindro e preencha a quinta coluna volume do cilindro.

[I_E – 07] Usando os valores do quadro e as assimilações feitas em [I_R – 02] e [I_R – 03] descubra o valor do volume do cone e preencha a sexta coluna.

Cone	Medida do raio (R)	Media da altura (h)	Área da base (Ab)	Volume do cilindro (V_{CI})	Volume do cone (V_{CO})
01					
02					
03					
04					
05					
06					

[I_R – 08] Descreva como você fez para calcular o volume de cone?

[I_F – 09] Formalização do conceito:

[I_{AR} – 10] Para atender uma encomenda uma confeiteira deve fazer doces no formato de cone circular reto, com 8 cm de altura e 2 cm de raio. Quantos cm^3 de doce será necessário para produzir cada doce? (Use $\pi = 3$).

3 ESTUDO DO CONE

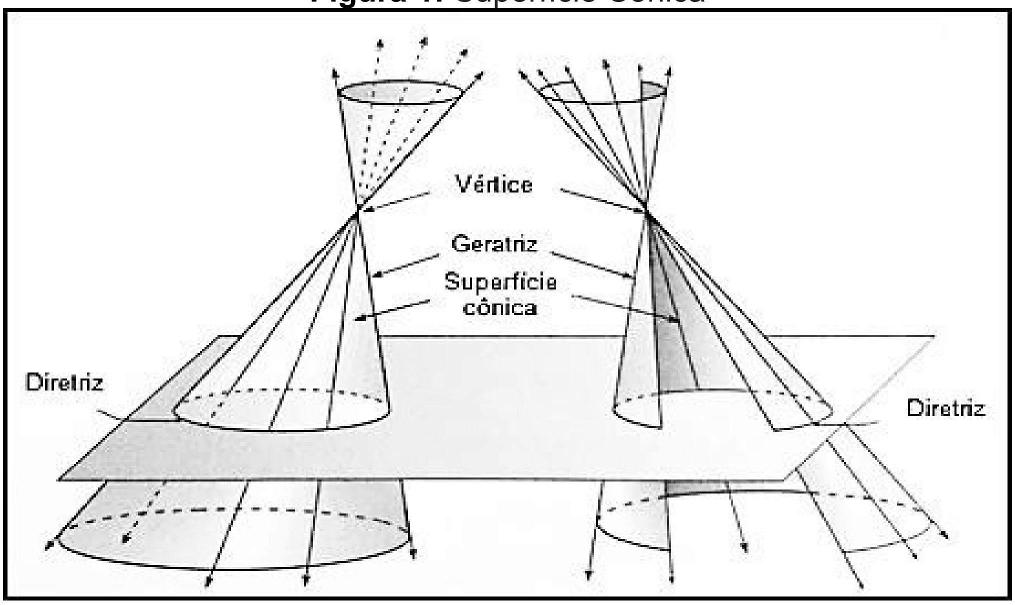
O objetivo desse trabalho é avaliar as contribuições de uma sequência didática estruturada segundo as UARC's para o ensino do cone a alunos da 2ª série do ensino médio. Em razão de o objeto de estudo ser o ensino do cone foi necessário a produção de um capítulo para esse objeto matemático.

Portanto, neste capítulo apresentamos o conteúdo do cone, expondo conceitos, elementos que constituem esse objeto geométrico espacial, classificação que distingue os tipos de cone, entre outros conteúdos que o compõem. Para as definições e dedução de fórmulas, usamos algumas obras como suporte, sendo elas: Antar Neto *et al*. (1882), Dolce e Pompeu (2005), Elon Lages Lima *et al.* (2006) e o Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

3.1 SUPERFÍCIE CÔNICA

A superfície cônica é a superfície gerada por uma reta denominada de geratriz que passa por um ponto fixo chamado de vértice e percorre todos os pontos de uma linha denominada de diretriz, cuja diretriz é uma curva coplanar e não secante a si mesma, com o vértice e a diretriz não pertencentes ao mesmo plano.

Figura 1: Superfície Cônica



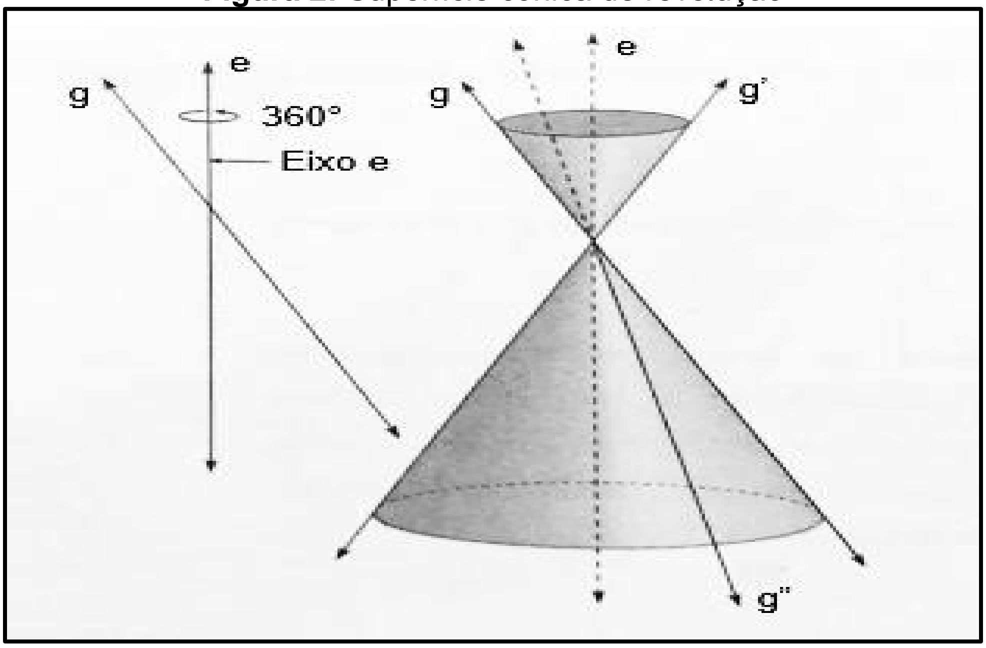
Fonte: Adaptado de Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

Dependendo da diretriz, as superfícies cônicas podem apresentar duas formas, superfície cônica fechada caso a diretriz seja uma linha fechada ou uma superfície cônica aberta caso a diretriz seja uma linha aberta.

3.1.1 Superfície cônica de revolução

Na superfície cônica de revolução a diretriz é uma circunferência com o vértice e a diretriz não coplanares. Sendo que a superfície cônica de revolução é a superfície gerada pela rotação em 360°da geratriz em relação ao eixo e. Conforme indicado na figura 2 a seguir:

Figura 2: Superfície cônica de revolução

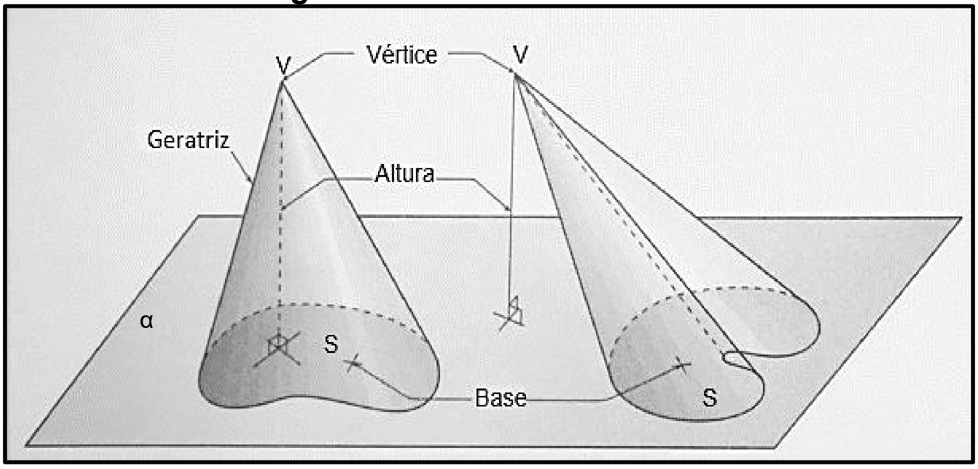


Fonte: Adaptado de Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

3.2 CONE

Consideremos S uma região plana fechada sem quinas contida no plano α e um ponto V não pertencente a α. Chamamos de Cone, o sólido geométrico formado pela união de todos os segmentos com uma extremidade pertencente à região plana S fechada sem quinas e a outra extremidade no ponto V fora dessa região.

Figura 3: Elemento de um cone



Fonte: Adaptado de Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

3.2.1 Elementos de um cone

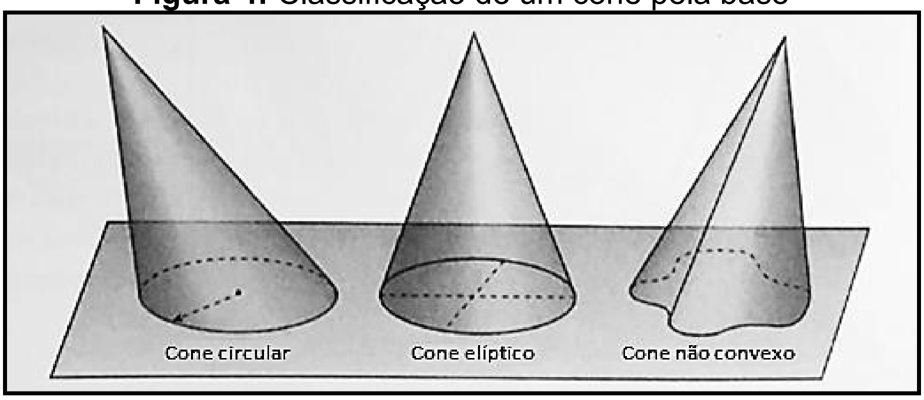
Usando a figura 3 podemos descrever os elementos de um cone, vejamos:

- Altura (h): É o comprimento do segmento que possui como extremidades o vértice e o plano α, formando uma projeção ortogonal com α;
- Base (b): É a região plana fechada sem quinas indicada por S contida no plano α;
- Geratriz (g): É o segmento com uma extremidade em V e a outra no contorno da região S, que forma a base do cone.

3.2.2 Classificação de um cone pela base

O cone pode ser classificado de acordo com a região que forma sua base, podendo ser chamado, cone circular, cone elíptico e cone não convexo.

Figura 4: Classificação de um cone pela base



Fonte: Adaptado de Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

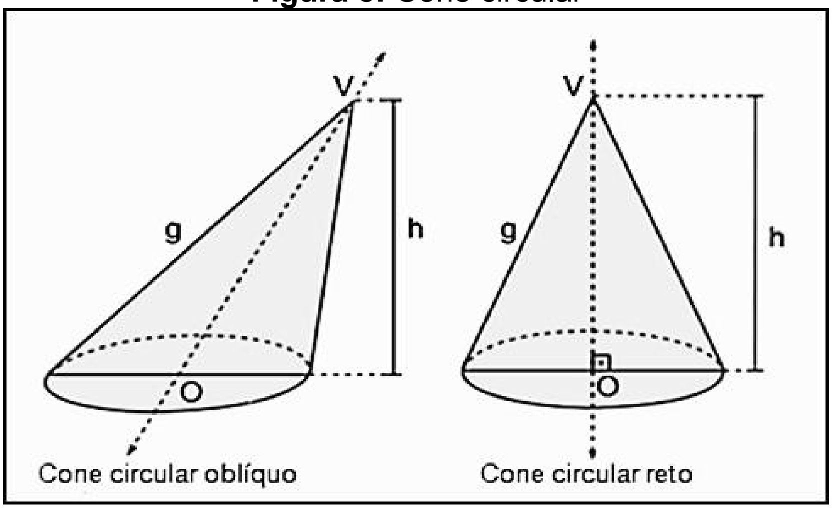
Tomando por base as orientações constantes nos documentos oficiais da educação brasileira, abordamos a partir deste momento apenas o cone circular, pois ele constitui nosso objeto de estudo, o cone circular reto.

3.3 CONE CIRCULAR

O cone circular pode classificado em cone circular reto e cone circular oblíquo, vejamos:

No cone circular oblíquo as geratrizes possuem medidas distintas e tem o eixo VO do cone oblíquo ao plano da base. Já o cone circular reto tem todas as geratrizes com mesma medida e o eixo VO do cone é perpendicular ao plano da base.

Figura 5: Cone circular

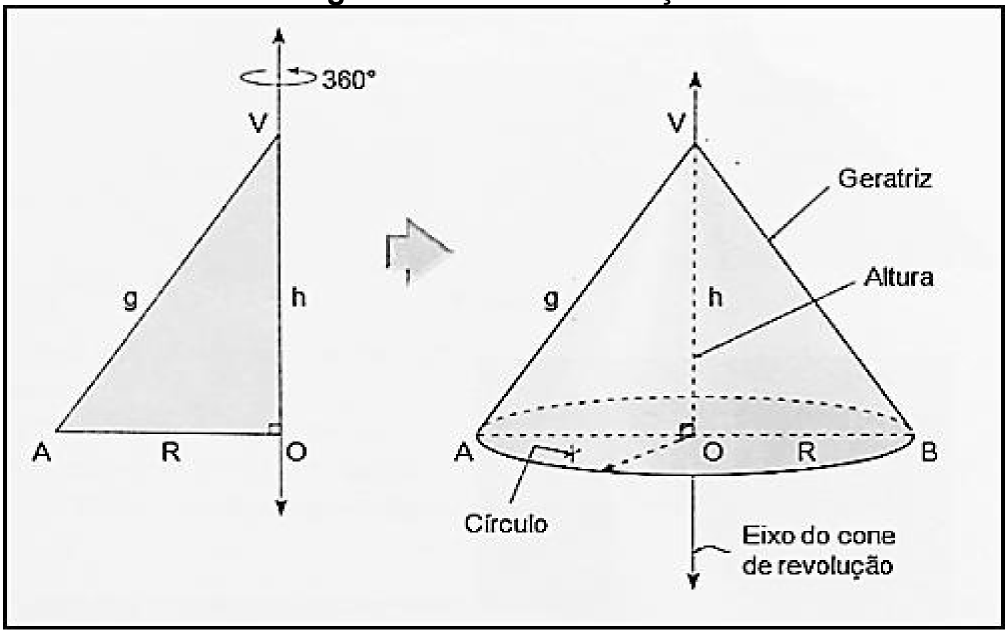


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

3.3.1 Cone de revolução

Usando um triângulo retângulo podemos obter um cone circular reto chamado de cone de revolução. Em que, o cone é gerado pela rotação (giro de 360°) em torno do eixo que contém um dos catetos do triângulo, e sendo o eixo perpendicular à base gerada.

Figura 6: Cone de revolução



Fonte: Adaptado de Instituto de Ciencias y Humanidades (2010).

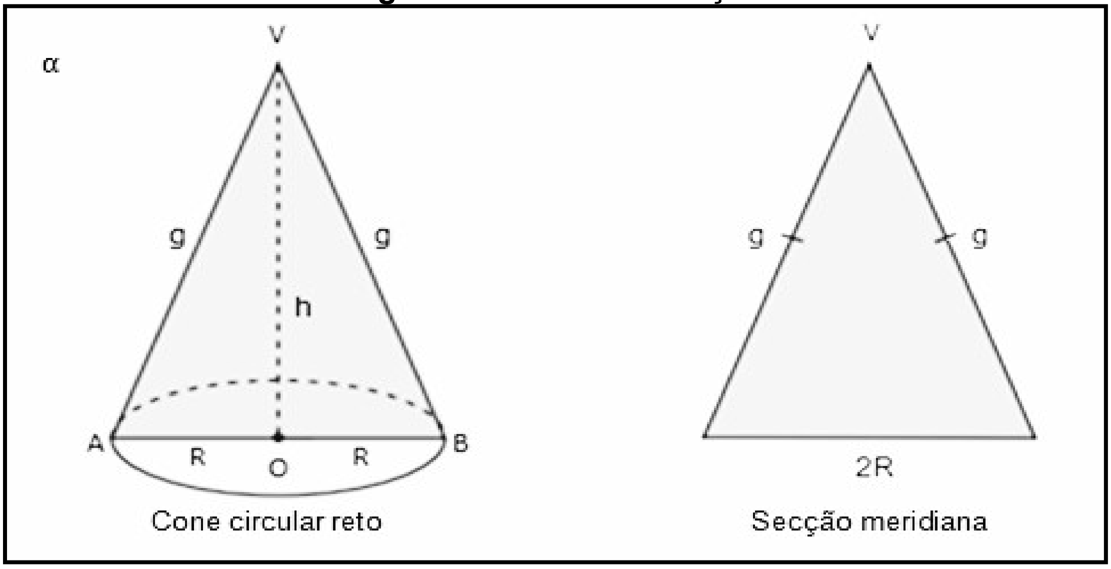
Os elementos do cone de revolução são estabelecidos a partir dos elementos do triângulo retângulo $\Delta\mathrm{AOV}$. O cateto (R) corresponde ao raio (R) da base do cone, o cateto (h) corresponde à altura (h) e é perpendicular à base no centro O, a hipotenusa (g) corresponde a geratriz (g), que também é chamada de apótema do cone. Observamos que como o triângulo $\Delta\mathrm{AOV}$ é retângulo em O, aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

3.3.2 Secção meridiana

A secção meridiana de um cone circular reto é a região representada por um triângulo isóscele que é obtido pela interseção do cone com o plano α que contém a o eixo do cone VO.

Figura 7: Cone de revolução

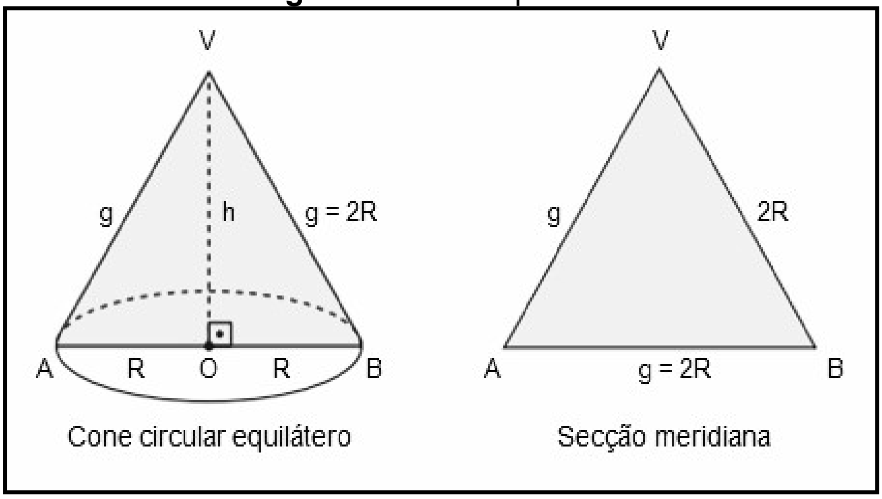


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

3.3.3 Cone equilátero

Se o cone tiver a geratriz (g) igual ao diâmetro (2R), esse cone é denominado de equilátero:

Figura 8: Cone equilátero



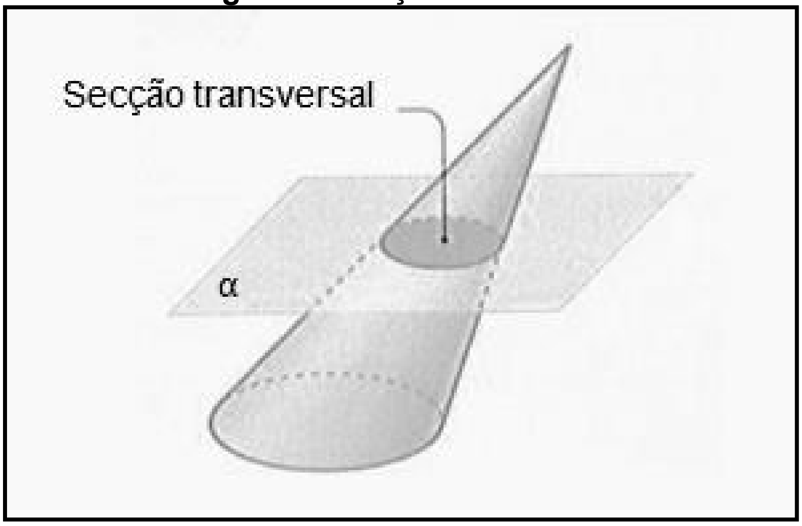
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Como, $\mathrm{g} = 2\mathrm{R}$ e altura $\mathrm{h} = \mathrm{R}\sqrt{3}$ que é obtida aplicando o teorema de Pitágoras, ou seja, $\mathrm{h}^2 + \mathrm{R}^2 = \mathrm{g}^2 \therefore \mathrm{h}^2 = \mathrm{g}^2 - \mathrm{R}^2$, como $\mathrm{g} = 2\mathrm{R}$, logo, $\mathrm{h}^2 = (2\mathrm{R})^2 - \mathrm{R}^2 \therefore \mathrm{h}^2 = 4\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^2 \therefore \mathrm{h}^2 = 3\mathrm{R}^2 \therefore \mathrm{h} = \sqrt{3\mathrm{R}^2} \therefore \mathrm{h} = \mathrm{R}\sqrt{3}$.

3.3.4 Secção transversal

A secção transversal de um cone é obtida pela sua interseção com um plano α paralelo a sua base.

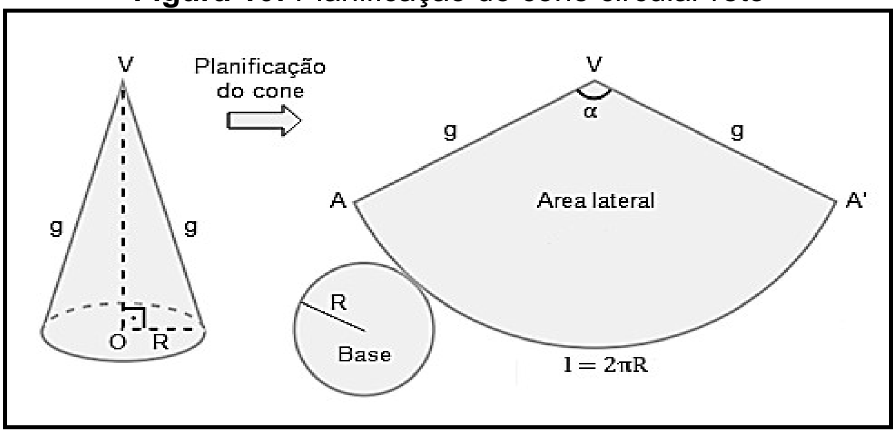
Figura 9: Secção transversal



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

3.4 ÂNGULO DO SETOR CIRCULAR E ÁREA LATERAL E TOTAL DE UMCONE CIRCULAR RETO OU DE REVOLUÇÃO

Figura 10: Planificação do cone circular reto



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

- Ângulo do setor circular de um cone circular reto: A medida do ângulo θ formado pela planificação da área lateral de um cone circular reto ou cone de revolução, passa a ser considerada como um setor circular de arco $(\widehat{AA'})$ de comprimento l. Como o comprimento l do setor circular formado corresponde ao comprimento da base do cone, logo:

$$l = 2\pi R$$

Considerando o setor circular acima, a medida do ângulo θ pode ser obtida da seguinte forma:

a) Para θ em graus: O comprimento do setor circular vale $l = 2\pi R$, e a medida do raio do setor circular corresponde a geratriz g do cone, aplicando uma regra de três simples podemos obter a relação para encontrarmos o valor de θ:

Comprimento do arco		Ângulo
$2\pi g$	-------	$360°$
$2\pi R$	-------	θ

$$2\pi g.\theta = 360°.2\pi R$$

$$\theta = \frac{360°.2\pi R}{2\pi g}$$

$$\theta = 360°.\frac{R}{g}$$

b) Para θ em radianos:

Comprimento do arco		Ângulo
$2\pi g$	-------	2π
$2\pi R$	-------	θ

$$2\pi g.\theta = 2\pi R 2\pi$$

$$\theta = \frac{2\pi R 2\pi}{2\pi g}$$

$$\theta = 2\pi.\frac{R}{g}$$

- Área lateral de um cone circular reto: Tem-se a área lateral de um cone circular reto quando se desenrola a área lateral do cone e a coloca em um plano obtendo-se um setor circular de raio g, e seu comprimento de arco igual a 2πR. Logo a área lateral (Al) de um cone circular reto ou cone de revolução é a medida da área do setor circular formado, como ilustrado na figura 10,que pode ser obtida por uma regra de três simples em que comparamos a área do setor circular (área lateral) com a área do círculo de raio g com seus respectivos comprimentos de arco.

Comprimento do arco   Área do setor circular

$$2\pi g \quad \text{-------} \quad \pi g^2$$

$$2\pi R \quad \text{-------} \quad Al$$

$$2\pi g. Al = 2\pi R. \pi g^2$$

$$Al = \frac{2\pi R. \pi g^2}{2\pi g}$$

$$Al = \pi Rg$$

- Área total de um cone circular reto: Para identificarmos a medida da área total (At) de um cone circular reto, somamos a medida da área lateral com a medida da área da base. Observemos:

Área da lateral (Al): πRg Área da base (Ab): πR^2

$$At = Al + Ab$$

$$At = \pi Rg + \pi R^2$$

$$At = \pi Rg + \pi R^2$$

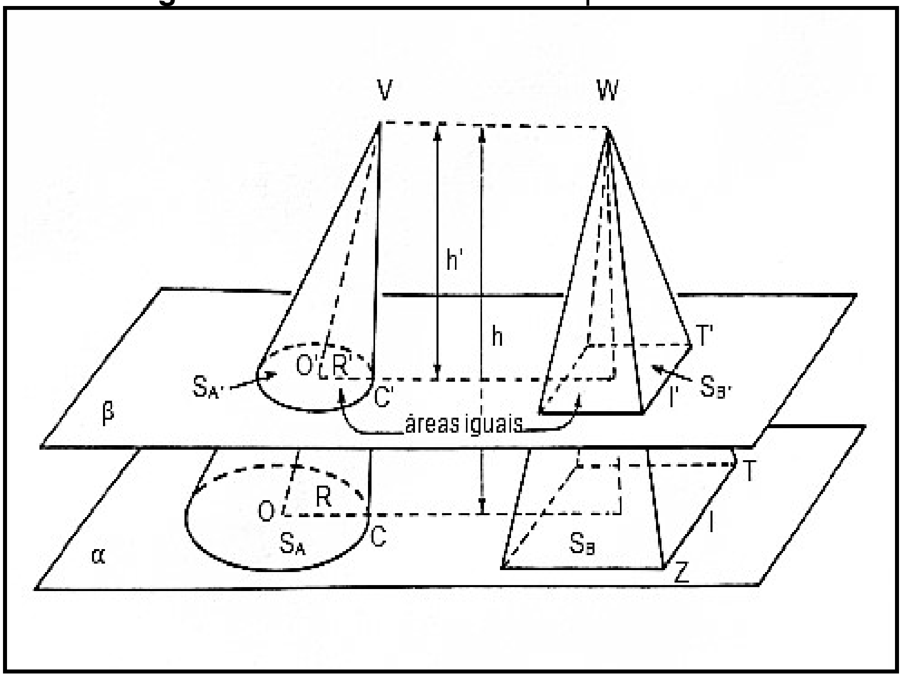
$$At = \pi R(g + R)$$

3.5 VOLUME DE UM CONE

O princípio de Cavalieri e a integral definida são duas maneiras de obtenção da fórmula para o cálculo do volume de um cone.

3.5.1 Pelo princípio de Cavalieri

Figura 11: Volume de um cone por Cavalieri.



Fonte: Adaptado de Antar Neto *et al*. (1982).

O volume (V) de um cone circular reto corresponde à terça parte do produto da área de sua base (S) pela sua altura (h).

$V = \frac{1}{3}Sh$, como $S = \pi R^2$ escrevemos, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

A obtenção dessa fórmula pode ser feita usando o princípio de Cavalieri, para isso consideremos uma pirâmide de base quadrada e um cone, ambos com a mesma altura (h) e bases contidas no plano α com mesma área (S). Como a área da base do cone vale πR^2, logo o lado l da base da pirâmide deve ser igual a $R\sqrt{\pi}$. Agora consideremos um plano β paralelo a α ($\alpha // \beta$) que intersecta a pirâmide e o cone a uma distância h' de seus vértices, o plano β intersecta o cone formando um círculo de raio R' e área $S_{A'}$, e intersecta a pirâmide formando um quadrado de lado l' e área $S_{B'}$, para concluirmos que o cone e a pirâmide possuem mesmo volume, devemos mostrar que as áreas das secções obtidas do cone e da pirâmide em β são iguais.

Dado que, se duas pirâmides são semelhantes, então:

- A razão k entre dois segmentos do sólido geométrico que se correspondem é uma constante chamada de razão de semelhança;
- As áreas de superfície que se correspondem estão na razão k².

Se $S_{A'} = S_{B'} = S$, temos:

$$\frac{S'_B}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \therefore \; S'_B = S.\left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

$$\text{Usando os } \Delta VO'C' \sim \Delta VOC \text{ do cone, temos:}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}.\text{Como } \; \frac{S'_1}{S} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.\text{Logo,}$$

$$\frac{S'_A}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 \Rightarrow \frac{S'_A}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \therefore S'_A = S.\left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Se $S'_A = S'_B$. Logo, podemos concluir pelo princípio de Cavalieri que o cone e a pirâmide de base quadrada têm mesmo volume. Sendo assim:

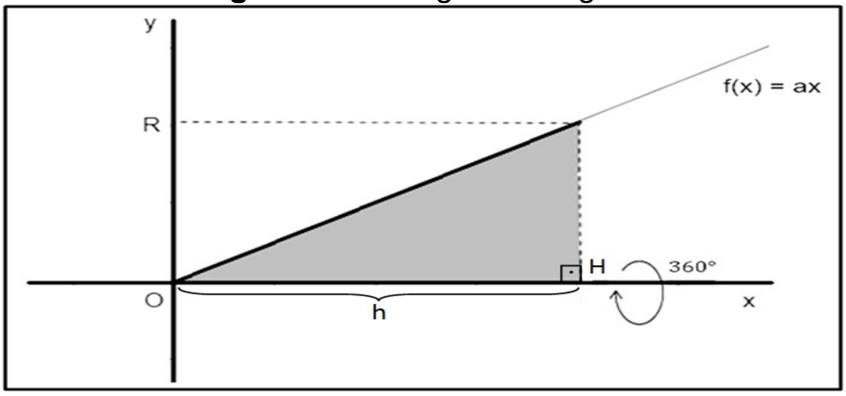
$$V_{cone} = V_{pirâmide}$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}Sh \qquad \text{ou} \qquad V_{cone} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

3.5.2 Por meio da integral definida

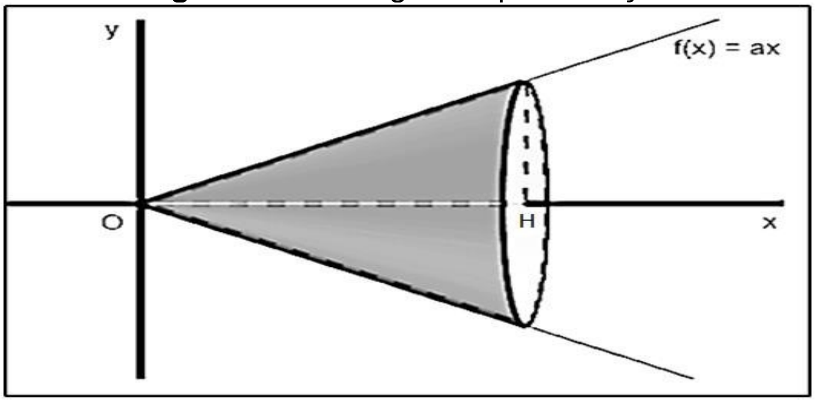
Apresentaremos agora outra maneira de deduzirmos a fórmula para o cálculo do volume de um cone circular reto: Usando um segmento de reta definida por $f(x) = ax$ e a integral definida, podemos fazer a explicitação da fórmula $V_{cone} = \frac{\pi R^2 h}{3}$. Para isso consideremos a área hachurada sob $f(x) = ax$.

Figura 12: Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 13: Cone gerado pela rotação

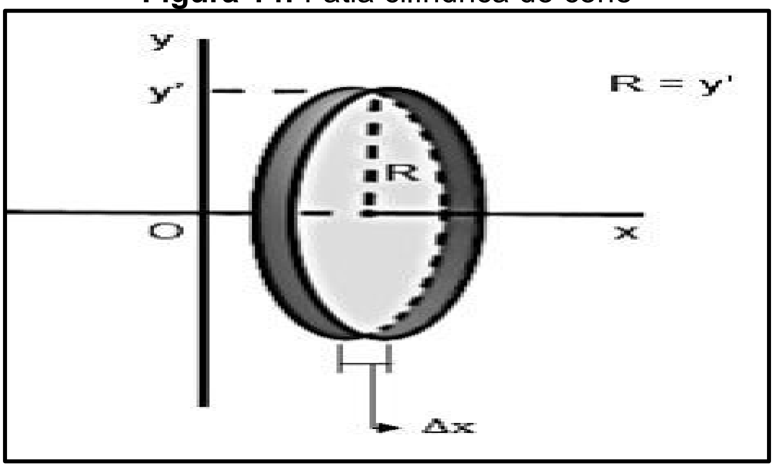


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Notemos que o triângulo retângulo em H, indicado na figura 12, quando girado em relação ao eixo x forma um cone de revolução como indicado na figura 13.

Considerando o cone gerado como um sólido maciço, para calcularmos sua capacidade volumétrica devemos fatiá-lo em cortes paralelos ao eixo y, obtendo fatias cilíndricas com larguras infinitesimais (Δx) e raio y, vejamos a figura 14:

Figura 14: Fatia cilíndrica do cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Sabendo que o volume de um cilindro é obtido pelo produto da sua área da base (S) pela sua altura (h), ou seja, S=$V_{\text{cilindro}} = \pi R^2 h$. Tomando a altura infinitesimal do cilindro igual a Δx, raio igual a y, o volume do cilindro pode ser representado por:

$V_{\text{cilindro}} = \pi y^2 \Delta x$, visto que, $R = y$ e h=Δx

Como o cone é o conjunto de cilindro fatiados com alturas infinitesimais dx, em que o raio y é variável para cada cilindro obtido, logo a soma de todos os cilindros obtidos pela fatoração do cone definirá o volume do cone que é dado pela integral definida:

$$V = \sum_{x=0}^{H} \pi y^2 \Delta x = \int_0^H \pi y^2 dx$$

$$V = \int_0^H \pi y^2 dx \quad , \qquad y = f(x)$$

$$V = \pi \int_0^H [f(x)]^2 dx \quad , \qquad \text{sedo } f(x) = ax$$

$$V = \pi \int_0^H [ax]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^H a^2 x^2 dx$$

$V = \pi a^2 \int_0^H x^2 dx$, efetuando a integração, temos:

$$V = \pi a^2 [\frac{x^3}{3}]_0^H$$

$$V = \pi a^2 [\frac{x^3}{3} - 0]$$

$V = \frac{\pi}{3} a^2 H^3$ (i)

$$\text{Se } f(x) = ax \quad , \qquad \text{logo} \quad R = a.H$$

Consequentemente, $a = \frac{R}{H}$ (ii)

Rescrevendo a equação (i) usando (ii), temos:

$$V = \frac{\pi}{3} . \left(\frac{R}{H}\right)^2 . H^3$$

$$V = \frac{\pi}{3} . \frac{R^2}{H^2} . H^3$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

4 CONSIDERAÇÕES GERAIS

As construções e as configurações apresentadas pela sequência didática desenvolvida responderam a questão do estudo de Pereira (2019) e a partir de então é possível afirmar que a proposta de ensino e aprendizagem desenvolvida foi significativa, relevante e importante. Portanto ao avaliarmos as potencialidades de uma sequência didática estruturada segundo as UARC’s, concebida por Cabral (2017), desenvolvida para o ensino do cone circular reto a alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do Pará, os resultados mostraram que a sequência didática é uma proposta didática potencialmente favorável à aprendizagem.

A aplicação da proposta da sequência didática nos mostrou que os alunos são potencialmente favoráveis à aprendizagem, visto que os alunos se revelaram intelectualmente, subjetivamente socialmente propícios à aprendizagem. Também chamou atenção o retorno que os alunos davam as suscitações provocadas pelo professor. Dados momentos passa a impressão que o saber estava dentro do aluno, guardadinho e que precisava apenas de alguém para provocá-lo. Outros momentos o professor precisou fazer várias e sucessivas suscitações para que o aluno conseguisse formular suas percepções. Ou seja, as suscitações do professor precisavam provocar nos alunos assimilações que iam desde o início à concretização das aprendizagens.

Outro fenômeno evidenciado na sequência didática é o espaço de aprendizagem construído com a formação de grupo de alunos. Os resultados deixaram nítidos o quanto o desenvolvimento da aprendizagem de forma compartilhada constrói espaços para o fortalecimento das relações interpessoais, para manifestações das subjetividades dos alunos, e acaba ressignificando a aprendizagem. Nessa perspectiva, as compreensões das interações, do compartilhamento de aprendizagem realizadas na sequência didática vão além da simples troca de informação, de saber chegando nos aspectos que nos constroem coletivos e sociais.

A aplicação da sequência didática deixou claro que no experimento desenvolvido o ensino e aprendizagem do cone circular reto aconteceu de forma processual e construtiva. Os fundamentos processual e construtivo da aprendizagem proposta pela sequência didática abriram espaço para o protagonismo dos alunos, explorando as potencialidades cognitivas, as habilidades comunicativas, as especificidades subjetivas e as interações sociais.

O protagonismo na sequência didática torna a aprendizagem mais significativa para o aluno. Além disso, os caráteres processual e construtivo da aprendizagem proposta pela sequência didática definem bem o papel de orientador que o professor assume nessa proposta de ensino. Desse modo, a sequência didática desenvolvida é marcada por atuações do professor explicando para os alunos os objetivos e as implicações das atividades e fazendo questionamentos aos alunos que os conduziram a construções cognitivas necessárias à aprendizagem sugeridas nas atividades. Algo marcante expressado na sequência didática é que o espaço ocupado pelo professor na sequencia didática não afeta a importância desse profissional nos processos de ensino e aprendizagem, mas ressignifica sua atuação.

O estudo apresenta uma proposta de sequência didática elaborada e aplicada a alunos dos anos finais do ensino médio, podendo servir de modelo para o ensino normal ou integral. Desse modo, acreditamos que a proposta apresentada pode ser aplicada em outros ambientes, ou seja, outros professores podem desenvolver o mesmos experimentos em seus ambientes de trabalhos e/ou pode servir de para parâmetro para elaboração de uma nova proposta, dado que o professor pode a partir da proposta que apresentamos ajustá-la as suas intencionalidades, aos interesses dos alunos, ao ambiente escolar, ao conteúdo trabalhado e outros.

REFERÊNCIAS

Caso professores e/ou pesquisadores tenham interesses apresentamos a seguir as referências usadas neste trabalho, assim como, todas as referências usadas na dissertação de Pereira (2019).

ALVES, George. Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador. In: XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, v. 1, 2007, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Universidade Mackenzie, p. 1 – 10, 2007.

ANTAR NETO, Aref *et al*. **Noções de Matemática:** Geometria - Volume 5. São Paulo: Moderna, 1982.

ARAUJO, Ciandra Augusta de. **A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos**. 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças, 2017.

BEZERRA, Aluzimara Nogueira. **As isometrias nos azulejos de Belém: uma proposta de ensino**. 164 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM)**. Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC, Brasília, 2000. 58 p.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações determinadas pelas Emendas Constitucionais de Revisão nos 1 a 6/94, pelas Emendas Constitucionais nos 1/92 a 91/2016 e pelo Decreto Legislativo no 186/2008. Brasília, 2016, p. 496.

BRASIL. INEP, **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília, 2009. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/pdf/Enem2009_matriz.pdf. Acesso em: 02 de ago. 2018.

BRASIL. INEP, **Saeb 2017 revela que apenas 1,6% dos estudantes brasileiros do Ensino Médio demonstraram níveis de aprendizagem considerados adequados em Língua Portuguesa**. [*S.l.*]: [2018]. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-que-apenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-aprendizagem-considerados-adequados-em-lingua-portug/21206. Acesso em: 10 de nov. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação, SAEB, ensino médio**: matrizes de referência, tópicos e descritores. MEC, SAEB, INEP, Brasília, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução aos estudos das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CARDIA, Lynk dos Santos. **Uma abordagem do ensino de geometria espacial**: a otimização de embalagens como contextualização do conceito de áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos. 2014. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

CAREGNATO, Rita Catalina Aquino; MUTTI, Regina. Pesquisa qualitativa: análise de discurso versus análise de conteúdo. **Texto contexto enferm**, Florianópolis, v. 15, n. 4, p. 679-84, 2006.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. São Paulo: Papirus, 1996.

DA SILVA, Veleida Anahi. Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n. 37, p. 150 – 161, 2008.

DEWEY, Jonh. **Vida e Educação**. 10ª ed. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

DOLCE, Osvaldo; Pompeo José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 10, 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FERNANDES, Millôr. **POESIA MATEMÁTICA**. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~nep09/AniMat/7.%20Marco/Poema.pdf. Acesso em: 26 de agosto de 2018.

FRANCHI, E. P. A insatisfação dos professores: conseqüências para a profissionalização. In FRANCHI, E. P. (org.) **A causa dos professores**. Campinas: Papirus, 1995.

FREITAS, M. T. de A. A pesquisa em educação: questões e desafios. Vertentes, São João Del Rei, n. 29, p. 28-37, jan./jun. 2007, ISSN 0104-0332.

GATTI, Bernadete A. O professor e a avaliação em sala de aula. **Estudos em avaliação educacional**, São Paulo, n. 27, p. 97-114, 2003.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GODTSFRIEDT, Jonas. Ciclos de vida profissional na carreira docente: revisão sistemática da literatura. **Corpoconsciência**, Cuiabá, v. 19, n. 2, p. 9-17, 2015.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 50, n. 9-25, 2000.

GONÇALVES, José Alberto. Desenvolvimento profissional e carreira docente — Fases da carreira, currículo e supervisão. Sísifo. **Revista de Ciências da Educação**, n. 8, p. 23-36, jan./ abr., 2009.

GRILLO, Jean Daniel. **Atividades e problemas de geometria espacial para o ensino médio**. 2014. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

GUIMARÃES, Y. A. F., GIORDAN, M. Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. In: VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2011, Campinas. **Anais**… Campinas: ABRAPEC, 2011. Disponível em: http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/viiienpec/resumos/R0875-2.pdf. Acesso em: 05 de ago. 2018.

HARTWIG, Sandra Christ *et al*. Um olhar sobre as práticas pedagógicas na construção de conhecimentos geométricos. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 243-258, 2016.

Instituto de Ciencias y humanidades. **Geometría:** una visón de la estereometría. Lima-Perú: Lumbreras, 2010.

KATO, Lilian Akemi e CARDOSO, Valdinei Cezar. Atividades de modelagem matemática mediadas por vídeo e oficina: uma discussão no contexto da educação. In. Celia Finck Brandt e Méricles Thadeu Moretti. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa**. Editora UEPG, p. 161-180, 2016.

KFOURI, William; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Explorar e investigar para aprender matemática através da modelagem matemática. In: **Encontro Brasileiro de Estudantes em Pós - Graduação em Matemática**, 10, 2006, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2006.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A matemática do ensino médio**, vol. 2. Coleçao do Professor de Matemática, SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages**. A matemática do ensino médio**. Vol. 1, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MORAES, Ideny Espirito Santo Queiros. **O ensino de volume de sólidos geométricos por atividades**. 2018. Dissertação (Programa Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém - PA, 2018.

MORELATTI, Maria Raquel Motto *et al*. Sequências didáticas descritas por professores de matemática e de ciências naturais da rede pública: possíveis padrões e implicações na formação pedagógica de professores. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, 2014.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002.

NACARATO, A. M. **A geometria no ensino fundamental.** In: SISTO, Fermino Fernandes, DOBRANSZKY, Enid Abreu, MONTEIRO, Alexandrina (Orgs.). Matemática e Aprendizagem. Petrópolis: Vozes, 2002.

NOGUEIRA, Cleia Alves. **Ensino de geometria**: concepções de professores e potencialidades de ambientes informatizados. 2015. Dissertação (Mestrado em educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; PAVANELLO, Regina Maria; DE OLIVEIRA, Lucilene Adorno. Uma experiência de formação continuada de professores licenciados sobre a matemática dos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 3, n. 4, p. 138-160, 2014.

NOGUEIRA, Fernanda. **Uma experiência no ensino de geometria espacial no terceiro ano do ensino médio**.2014. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática-Paiva.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: Causas e consequências. **Zetetiké,** Campinas, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PERETTI, L; TONIN DA COSTA, G.M. Sequência Didática na Matemática. **Revista de Educação do Ideau**, Getúlio Vargas, v. 8, n. 17, 2013.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do Ensino Médio**. Orientador: Nelson Antônio Pirola. 2008. 200f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2008.

QUARTIERI, Marli Teresinha. **A Modelagem Matemática na escola básica: A mobilização do interesse do aluno e o privilegiamento da matemática escolar**. Orientador: Dra. Gelsa Knijnik. 2012. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, UNISINOS, São Leopoldo, 2012.

REZI, Viviane. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 2001. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RIO, Ana Carla Carneiro. Análise do discurso: Fundamentos, objetos e filiações teóricas. In. Márcia Suany D. Cavalcante *et al*. Lingua(gem), **Discurso e ensino: concepções teórica e ressignificações da prática docente**. Editora América, Goiânia, 2016. p. 187-199.

ROCHA, Luciana Parente; ACHEGAUA, Gabriela de Araújo e CARRIJO, Manuella Heloisa de Souza. O Trabalho em Grupo e o Uso de Materiais Concreto no Ensino de Geometria Espacial para Alunos do Ensino Médio. In: XVI ENDIPE – Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino. 2012, Campinas. **Anais** [...]. Campinas: UNICAMP, 2012, p. 14 – 22.

RODRIGUES, Suely da Silva. Eficácia docente no ensino da matemática. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 25, n. 94, p. 114 - 147, 2017.

ROMANATTO, Mauro Carlos. O livro didático: alcances e limites. In: Encontro Paulista de Matemática, v.7. 2004. São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo, 2004.

SALIN, Eliana Bevilacqua. Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas Spatial Geometry: The learning by the geometric solids' construction and problem-solving. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 2, p. 261-274, 2013.

SANTOS, Waldizia Lima Salgado dos. **O Ensino de Volume de Sólidos por atividades**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém - PA, 2012.

SCHROEDER, E.; FERRARI, N. E. M., SYLVIA R. P. A Construção dos Conceitos Científicos em Aulas de Ciências: a teoria histórico-cultural do desenvolvimento como referencial para análise de um processo de ensino sobre sexualidade humana. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Florianópolis, v.3, n.1, p.21-49, 2010.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, 57 (1), 1987, p.1-22.

SHULMAN, L. S. Those who understand: the knowledge growth in teaching. E**ducational Researcher**. fev, 1986, p. 4-14.

SILVA FILHO, Gilberto Beserra da. **Geometria Espacial no Ensino Médio**: Uma Abordagem Concreta. 2015. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

SILVA, Byanca Matias de Oliveira. **As dificuldades de alunos da 2ª série do ensino médio no reconhecimento das características de um sólido geométrico**. 2015. Monografia – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2015.

SISPAE - Sistema Paraense de Avaliação Educacional. **Revista pedagógica**. Ensino Fundamental Matemática. Belém: SEDUC-PA, 2014. ISSN 2446-9629.

SISPAE - Sistema Paraense de Avaliação Educacional. **Revista pedagógica**. Ensino MédioMatemática. Belém: SEDUC-PA, 2016. ISSN 2446-9610.

SONNEVILLE, Jacques Jules; JESUS, Francineide Pereira. Complexidade do ser humano na formação de professores. In: NASCIMENTO, Antônio Dias; HETKOWSKI, Tania M. **Educação e contemporaneidade: pesquisas científicas e tecnológicas**. EDUFBA, Salvador, 2009. p. 296-319.

SOUZA, Ângelo Ricardo de. O professor da educação básica no Brasil: identidade e trabalho. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 29, n. 48, p. 53-74, 2013.

SOUZA, Joamir e GARCIA, Jacqueline. **Contato matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e formação profissional**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2002.

TARDIF, Maurice. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista brasileira de educação**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 5-13, jan./abr. 2000.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Grenoble, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013.

TOMIO, Daniela; SCHROEDER, Edson e ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural. **Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, 2017.

UNESCO. Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica.** Brasília: UNESCO; São Carlos: EdUFSCar, 2016.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas; JESUS, Paulo Cesar Cruvinel de. Uma sequência didática para o ensino da Matemática com o software Geogebra. **Ciências Ambientais e Saúde**, Goiânia, *v.* 41, n. 1, p. 59-75, 2014.

VYGOTSKY, Lev S. Thinking and Speech. T**he Collected Works of LS Vygotsky**, v. 1, p. 39-285, 1987.

WESTRCH, J. V. A necessidade a ação na pesquisa sociocultural. In: WERSTCH, J. V.; DEL RÍO, P.; ALVAREZ, A. **Estudos sociais da mente.** Porto Alegre: Artmed, 1998a. p. 56-71.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: ArtMed, 1998.