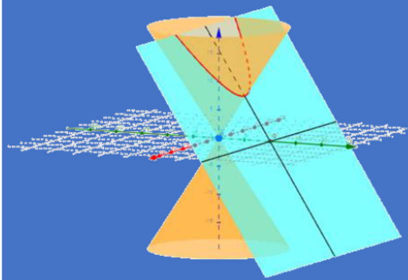
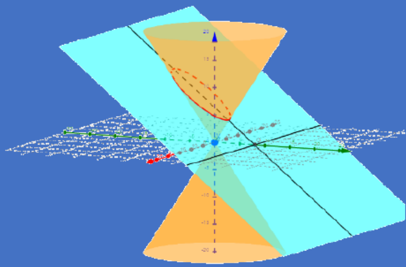
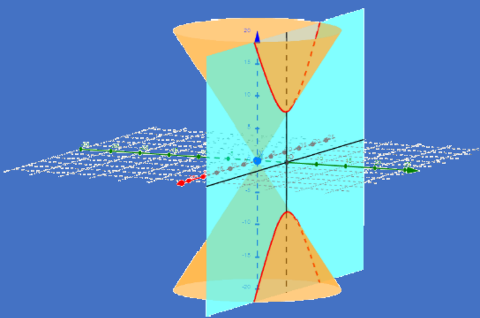
ATIVIDADES SOBRE AS CÔNICAS USANDO O GEOGEBRA

MÁRCIO ANDRÉ SANTA BRÍGIDA LIMA E FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES







UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

ATIVIDADES SOBRE AS CÔNICAS USANDO O GEOGEBRA

Belém – 2020

Diagramação e Capa: Os Autores
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

LIMA, Márcio André Santa Brígida & ALVES, Fábio José da Costa
Atividades sobre as cônicas usando o Geogebra, 2020
Produto Educacional vinculado à dissertação "Introdução às cônicas usando o Geogebra" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, PPGEM/UEPA, 2020
Bibliografias p. 68
ISBN:
1. Geogebra (Software) 2. Geometria-Estudo e ensino. 3. Cônicas. 4. Aprendizagem. I. Alves, Fábio José da Costa. II. Título.
CDD. 23º ed.512.16

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este encarte é parte de uma dissertação de mestrado de Lima (2019), com o tema: Introdução as Cônicas utilizando o Geogebra, que teve como foco principal a exploração de conhecimentos matemáticos sobre as Cônicas usando um software de geometria dinâmica.

Ao construir a sequência de atividades, o direcionamento era desenvolver um material para que o professor utilize um software de geometria dinâmica para auxiliar na aprendizagem dos alunos sobre as cônicas. A motivação para esse trabalho veio no decorrer do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará durante a disciplina de Tecnologias no Ensino de Matemática.

O impacto que teve o computador na sociedade levou a uma reflexão sobre seu uso em sala de aula. Com o surgimento de diferente software para o ensino da matemática e sua incorporação na sala de aula, é necessário que o professor consiga acompanhar as evoluções tecnológicas podendo, dessa forma, usar o computador para introduzir conceitos de matemática. "A existência do computador aumenta para os professores de matemática o desafio de projetar atividades para aproveitar o potencial desses recursos para abordoar novas formas de aprender "(ARCAVI & HADAS, 2000, p. 41).

Martin (2000) aborda que a tecnologia deve ser usada na educação matemática, bem como enfatizar o uso do conhecimento matemático, indo além de procedimentos de rotina que são tão presentes nas aulas de matemática. Mudanças recentes no ensino aprendizagem de matemática reconhecem no currículo a importância do uso de calculadoras e computadores na aprendizagem dos alunos.

Embora tenha sido dado um grande impulso às novas tecnologias, muitos professores rejeitam o uso de calculadoras, aplicativos e computadores, porque eles acreditam que seu uso irá atrapalhar outras habilidades. Hitt (1998) ressalta que o professor de matemática vai sentir a necessidade de mudança quando se apresentar materiais e estudos que mostram a eficácia da tecnologia na sala de aula, na qual este conceito está imerso em uma situação-problema e onde procurará sistema de representação adequada para exibi-lo.

São muitas as possibilidades oferecidas pelas ferramentas tecnológicas no ensino de matemática, que vão desde calcular expressões aritméticas, solução de equações ou sistemas de equações, gráficos estatísticos, gráficos de funções reais, a mais avançada, incluindo software de geometria e computação simbólica, para trabalhar com expressões algébricas e cônicas.

Um dos objetivos fundamentais do professor na sala de aula é levar os alunos a analisar, criticar e tirar conclusões a partir da informação que ele possa fornecer. Dessa forma, o uso de ferramentas tecnologia se torna um lugar ideal para o meio estudantil otimizando os seus regimes por meio de sistemas de representação dos conteúdos (VIEIRA, 2011).

O papel do educador é fornecer, através da concepção de uma situação, uma reunião entre o sujeito e os meios para surgir o conhecimento. Aqui, deve-se orientar para o uso de ferramentas tecnológicas para apoiar e contribuir, bem como construir o conhecimento adequado em diferentes representações, a fim de alterar os antigos sistemas de percepções e, assim, chegar no surgimento do conhecimento.

É claro que a evolução da aprendizagem dos alunos depende em grande parte das situações em que ele é submetido (VIEIRA, 2011). Assim, a presença de tecnologia na classe torna-se um instrumento capaz de fornecer diferentes representações nas aulas de matemática que podem ser utilizadas para auxiliar a visualização de conceitos importantes e experimentações que permitem aos alunos algumas estratégias para a resolução de alguns problemas. Para fazer isso, é necessário conhecer e saber aplicar algumas ferramentas tecnológicas.

Quais atividades devem ser levantadas na sala de aula para que os estudantes reconheçam as vantagens proporcionadas utilizando ferramentas tecnológicas?

O poder gráfico de instrumentos tecnológicos permite o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas muitos estudantes apresentam dificuldade em gerar de forma independente ou não estão dispostos a fazê-lo. Alguns autores concordam que:

> As novas tecnologias não substituem o professor, mas modificam algumas de suas funções. O professor transforma-se agora no estimulador da curiosidade do aluno por querer conhecer, por pesquisar, por buscar as informações. Ele coordena o processo de apresentação dos

> resultados pelos alunos, questionando os dados apresentados, contextualizando os resultados, adaptando-os para a realidade dos alunos. O professor pode estar mais próximo dos alunos, receber mensagens via e-mail com dúvidas, passar informações complementares para os alunos, adaptar a aula para o ritmo de cada um. Assim sendo, o processo de ensino-aprendizagem ganha um dinamismo, inovação e poder de comunicação até agora pouco utilizados. (BASSO, 2000, p.1).

De acordo com Williamson & Kaput (1999), uma consequência importante da introdução da tecnologia na educação matemática é a possibilidade de que se pense a educação matemática de uma forma mais indutiva. Ele sugere que os alunos possam perceber a matemática de uma forma experimental (por interação com a tecnologia) o que conduz à necessidade e o desejo de ser mais formal nas justificativas. Eles podem encontrar ideias matemática, manipulando o fenômeno e descobrir possíveis relações matemáticas fundamentais.

Quanto à forma de estruturar as atividades, recomenda-se propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos como uma forma de estarem em sinergia com a informática (BORBA e PENTEADO, 2012).

Diante das provocações aqui elencadas, o professor deve estar em constante processo de atualização, buscando aperfeiçoar-se quanto ao uso da tecnologia da informação nas atividades em sala de aula, aproveitando-a da melhor forma no planejamento das atividades de ensino.

Dessa forma, a ideia principal é: uma sequência de atividades com o uso do Geogebra potencializa a aprendizagem sobre as cônicas? Assim, nosso olhar principal é voltado aos professores do ensino médio, para que os mesmos verifiquem as potencialidades de uma sequência de ensino sobre a aprendizagem das principais cônicas (Parábola , Elipse e Hipérbole) com o uso do Geogebra.

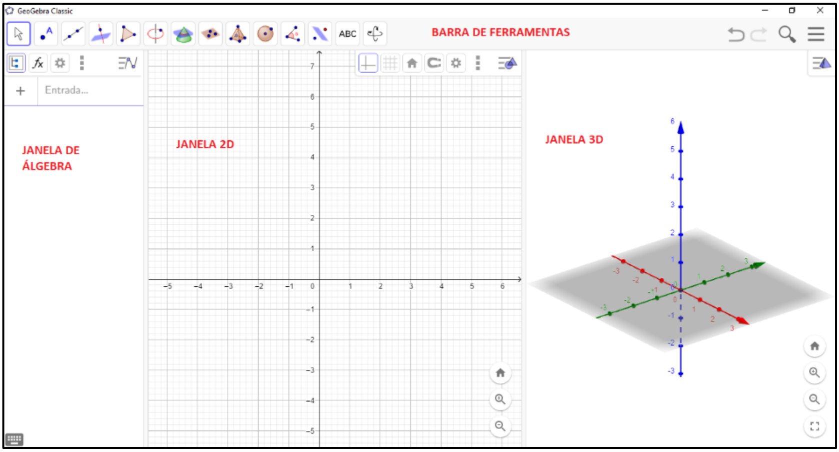
Esse livreto apresenta três sessões. Na primeira sessão apresentamos o software de geometria dinâmica Geogebra, em seguida na segunda sessão destacamos a Sequência de Atividades, construída para atingir os objetivos deste trabalho. E por fim, na terceira sessão focamos na teoria sobre as Cônicas (Parábola, Elipse e Hipérbole), com uma abordagem bem acessível, para um melhor entendimento desse conteúdo.

1. O *GEOGEBRA*

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Esse software se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

A seguir temos a interface da tela inicial do software, que pode ser baixado a partir do endereço eletrônico www.geogebra.org.

Figura 01: Tela inicial do Geogebra



Fonte: Autor (2019)

A tela inicial do Geogebra tem três partes principais:

- ✓ Barra de ferramentas
- ✓ Janela de álgebra

✓ Janelas de visualização

A barra de ferramentas é onde se encontram as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ela está dividida em 14 janelas. Cada uma destas janelas possui várias ferramentas e para visualizar estas ferramentas, basta clicar sobre a seta no canto do ícone, e então irão aparecer as opções referentes a estas janelas.

Figura 02: Barra de Ferramentas do Geogebra.

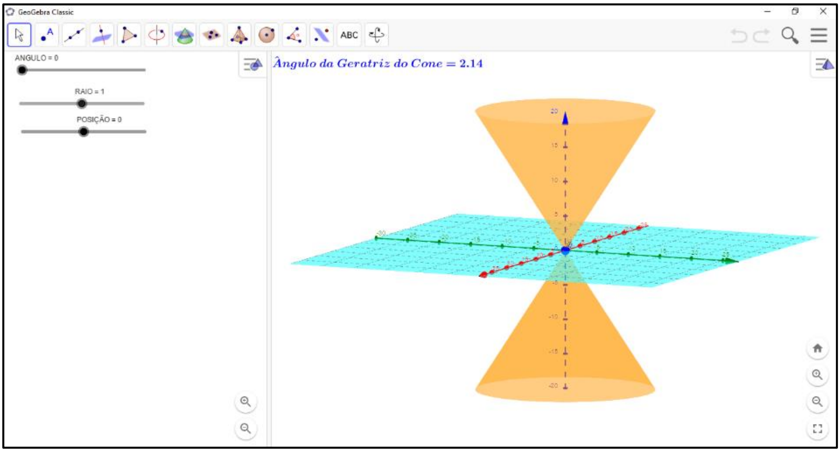
Fonte: Autor (2019)

A janela de álgebra é a área que exibe as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

A janela de visualização ou zona gráfica, mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas e cônicas no plano e no espaço, que podem ser introduzidos na janela geométrica ou através da entrada de texto. Ao passar o mouse sobre algum desses objetos, aparece sua respectiva descrição.

Na Figura 3, apresentamos o exemplo da tela de uma construção no Geogebra para gerar as cônicas (Parábola, Elipse e Hipérbole). Para gerar as cônicas, o estudante precisa manipular os controles deslizantes de acordo com os valores do quadro da atividade. Ao colocar os dados dos de forma correta, cada um das cônicas será apresentada.

Figura 3: Tela do Geogebra que gera as Cônicas



Fonte: Autor (2019)

Apresentamos a seguir, todas as atividades construídas no Geogebra e suas respectivas fichas para anotações.

2. A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Vamos apresentar nesta sessão 16 aplicações criadas no Geogebra para o auxílio na aprendizagem sobre as cônicas voltadas para alunos do 3º ano do ensino médio. Essas atividades irão abordar os seguintes tópicos:

- Gerar as cônicas a partir de um cone duplo
- Definir a parábola como lugar geométrico
- Equação reduzida da parábola com concavidade pra cima
- Equação reduzida da parábola com concavidade pra baixo
- Equação reduzida da parábola com concavidade pra direita
- Equação reduzida da parábola com concavidade pra esquerda
- Definir a elipse como lugar geométrico
- Equação reduzida da elipse com eixo maior vertical com centro na origem
- Equação reduzida da elipse com eixo maior vertical com centro fora da origem
- Equação reduzida da elipse com eixo maior horizontal com centro na origem
- Equação reduzida da elipse com eixo maior horizontal com centro fora da origem

- Definir a hipérbole como lugar geométrico
- Equação reduzida da hipérbole horizontal com centro na origem
- Equação reduzida da hipérbole horizontal com centro fora da origem
- Equação reduzida da hipérbole vertical com centro na origem
- Equação reduzida da hipérbole vertical com centro fora da origem

Aulas tradicionais, onde o professor expõe o conteúdo de forma unilateral, propõe listas intermináveis de exercícios e aplica avaliações descontextualizadas, não despertam mais o interesse do aluno de hoje. O uso das TICs acaba sendo inevitável para dar esse diferencial nas aulas.(CALIL,2011).

Queremos, com as atividades aqui proposta, escapar dos meios habituais de ensino, buscando com os alunos a construção do conhecimento reflexivo. Nossa abordagem procura que o aluno chegue às conclusões devidas de maneira autônoma, embora sob gerência e orientação fundamentais do professor. O objetivo diferencial dessas atividades é desenvolver a autonomia do aluno, tornando-o corresponsável pelo processo pedagógico.

A seguir apresentamos todas as atividades com alguns comentários para esclarecer possíveis dúvidas.

Figura 4: Sessão I – Atividade 1

SEÇÃO I: ATIVIDADE 1

Título: Cônicas.

Objetivo: Gerar a Parábola, a Elipse e a Hipérbole.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.

2. Deixe os valores dos controles deslizantes do Geogebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas.

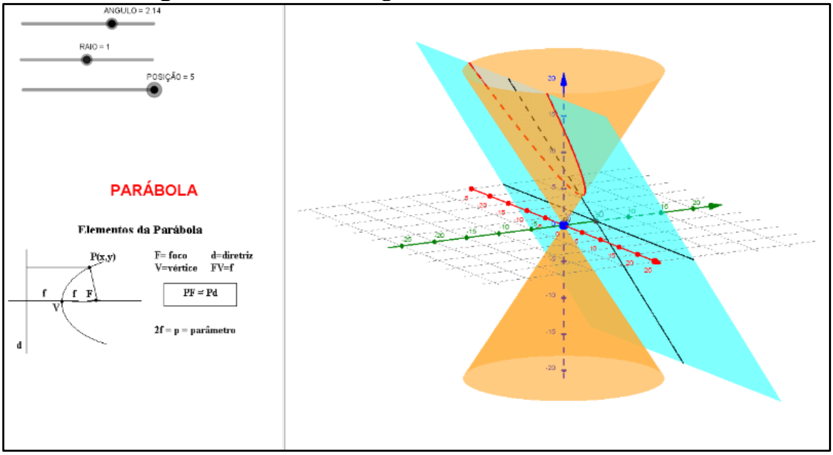
Ângulo do plano	Raio	Posição	Ângulo da geratriz do cone	Marque o desenho da curva mais próximo ao da intersecção do plano com cone	Como se chama essa curva?
2,14	1	10		( ) ( ) ( ) 	
2,14	1	5			
2,14	1	-8			
2,47	1	8		( ) ( ) ( ) 	
2,47	1	5			
2,47	1	-7			
1,57=90°	1	6		( ) ( ) ( ) 	
1,57=90°	1	2			
1,57=90°	1	-8			

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 5: Tela do Geogebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do Geogebra, os alunos percebam a relação que existe entre o ângulo do plano e o ângulo da geratriz do cone duplo. Em seguida, depois que os alunos apresentem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma do nome de cada curva que foi gerada. Após a socialização, caso haja dificuldades por parte dos alunos em concluir suas observações, o professor seguirá então com a formalização. Após a conclusão, os papeis com as atividades devem ser recolhidos.

A seguir, apresentaremos as atividades da sessão II sobre a Parábola que vai descrever essa curva como um lugar geométrico e descobrir as equações reduzidas.

Figura 6: Sessão II – Atividade 1

SEÇÃO II - ATIVIDADE 1

Título: Parábola

Objetivo: Definir a Parábola como lugar geométrico.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.

2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

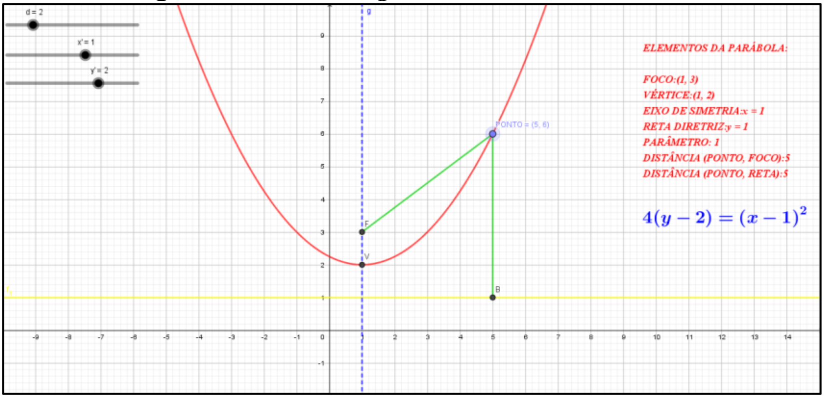
Vértice (x', y')	Distância (Foco, Reta)	Ponto	Distância (Ponto,Foco)	Distância (Ponto,Reta)
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		
(0,0)	2	(,)		

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 7: Tela do Geogebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do Geogebra, os alunos percebam a regularidade das distâncias dos pontos que pertencem a parábola para o foco e para reta diretriz, percebam que sempre essas distâncias são iguais para qualquer ponto tomado sobre essa curva. Depois que os alunos apresentem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma do conceito da parábola como um lugar geométrico. Após a socialização, caso haja dificuldades por parte dos alunos em concluir suas observações, o professor seguirá então com a formalização. Após a conclusão final dos alunos, os papeis com as atividades devem ser recolhidos.

A seguir, apresentaremos a atividade 2 da sessão II sobre a Parábola que vai descrever a equação reduzida dessa curva com concavidade para cima.

Figura 8: Sessão II – Atividade 2

SEÇÃO II - ATIVIDADE 2

Título: Parábola

Objetivo: Determinar a equação reduzida da parábola com concavidade para cima.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro e para cada valor preencher as colunas.

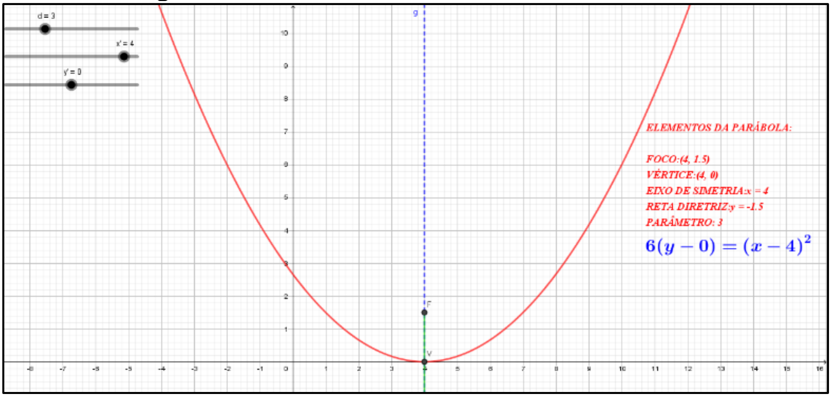
Vértice (x', y')	Distância (Foco, Reta)	Parâmetro (p)	Concavidade da Parábola	Equação Reduzida da Parábola
(0,0)	2		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(0,2)	2		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(0,-2)	2		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(4,0)	3		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(-4,0)	3		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(2,3)	3		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(-2,3)	4		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(-3,-4)	4		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	
(3,-4)	4		( )pra cima ( )pra baixo ( )pra direita ( )pra esquerda	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 9: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do GeoGebra e do preenchimento do quadro, os alunos percebam que a equação reduzida da parábola é obtida a partir do parâmetro e do vértice de dessa curva. Após os alunos apresentem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma de como pode ser obtida a equação reduzida da parábola conhecendo seu parâmetro e seus vértices. Após a socialização, caso os alunos não entendam para concluir suas observações, o professor seguirá então com a formalização. Após a conclusão final dos alunos, os papeis com as atividades devem ser recolhidos.

A seguir, apresentaremos a atividade 3 da sessão II sobre a Parábola que vai descrever a equação reduzida dessa curva com concavidade para baixo.

Figura 10: Sessão II – Atividade 3

SEÇÃO II - ATIVIDADE 3

Título: Parábola

Objetivo: Determinar a equação reduzida da parábola com concavidade para baixo.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro e para cada valor preencher as colunas.

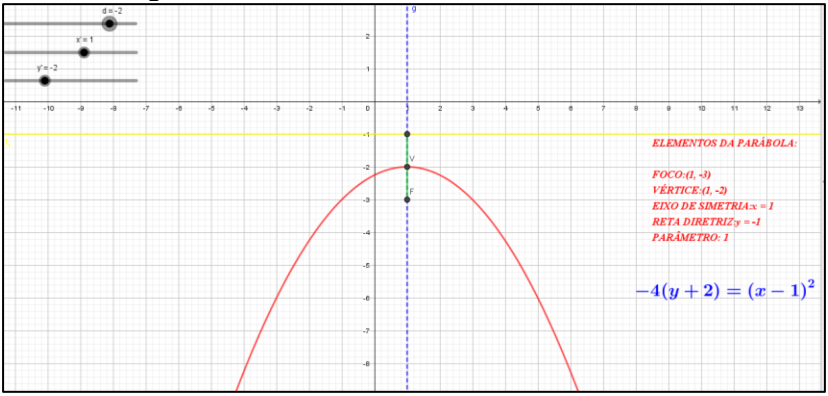
Vértice (x', y')	Distância (Foco, Reta)	Parâmetro (p)	Concavidade da Parábola	Equação Reduzida da Parábola
(0,0)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,-2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(2,3)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-2,3)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 11: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do GeoGebra e do preenchimento do quadro da atividade, os alunos observem que a equação reduzida da parábola é obtida a partir do dobro do parâmetro e das coordenadas do vértice de dessa curva, e o que difere da equação da atividade anterior essa equação tem o sinal negativo. Após os alunos apresentem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma de como pode ser obtida a equação reduzida da parábola conhecendo seu parâmetro e seus vértices. Após a socialização, caso os alunos não cheguem a uma conclusão adequada, o professor seguirá então com a formalização. Após a conclusão final dos alunos, as fichas da atividade devem ser recolhidas.

A seguir, apresentaremos a atividade 4 da sessão II sobre a Parábola que vai descrever a equação reduzida dessa curva com concavidade para direita.

Figura 12: Sessão II – Atividade 4

SEÇÃO II - ATIVIDADE 4

Título: Parábola

Objetivo: Determinar a equação reduzida da parábola com concavidade para direita.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro e para cada valor preencher as colunas.

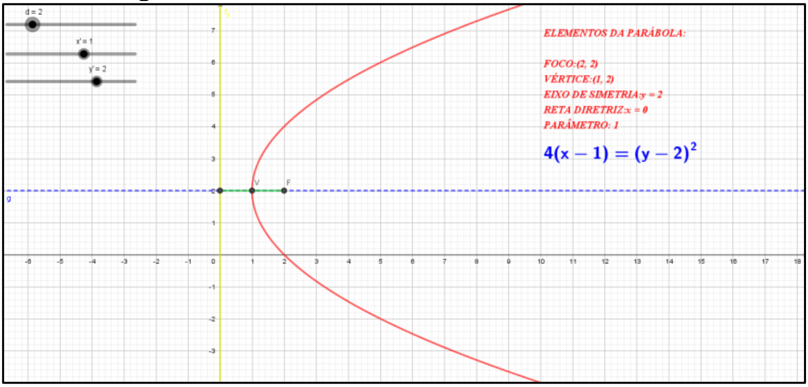
Vértice (x', y')	Distância (Foco,Reta)	Parâmetro (p)	Concavidade da Parábola	Equação Reduzida da Parábola
(0,0)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,-2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(2,3)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-2,3)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 13: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do GeoGebra e do preenchimento do quadro da atividade, os alunos observem que a equação reduzida da parábola é obtida a partir do dobro do parâmetro e das coordenadas do vértice de dessa curva, e o que difere das equações das duas atividade anteriores nessa equação a variável X troca de posição na equação com a varável y. Após os alunos apresentem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma de como pode ser obtida a equação reduzida da parábola com concavidade para a direita conhecendo seu parâmetro e seus vértices. Após a socialização, caso os alunos não cheguem a uma conclusão adequada, o professor seguirá então com a formalização. Após a conclusão final dos alunos, a ficha referente a atividade deve ser recolhida.

A seguir, apresentaremos a atividade 5 da sessão II sobre a Parábola que vai descrever a equação reduzida dessa curva com concavidade para esquerda.

Figura 14: Sessão II – Atividade 5

SEÇÃO II - ATIVIDADE 5

Título: Parábola

Objetivo: Determinar a equação reduzida da parábola com concavidade para esquerda.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro e para cada valor preencher as colunas.

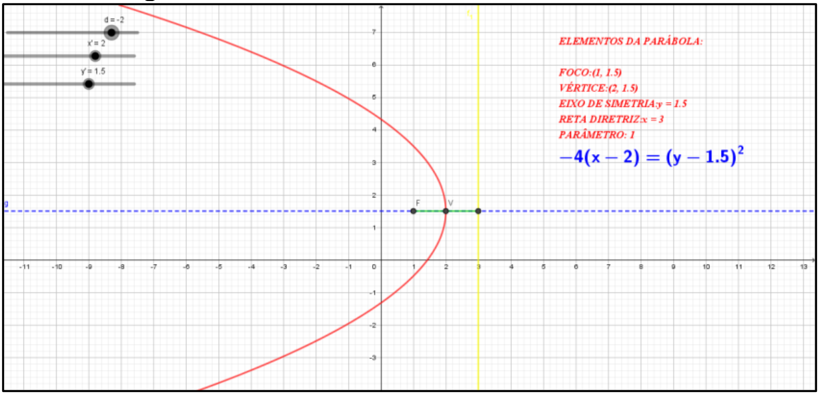
Vértice (x', y')	Distância (Foco,Reta)	Parâmetro (p)	Concavidade da Parábola	Equação Reduzida da Parábola
(0,0)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(0,-2)	2		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-4,0)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(2,3)	3		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-2,3)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(-3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	
(3,-4)	4		( ) pra cima ( ) pra baixo ( ) pra direita ( ) pra esquerda	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 15: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do GeoGebra e do preenchimento do quadro da atividade, os alunos observem que a equação reduzida da parábola é obtida a partir do dobro do parâmetro e das coordenadas do vértice de dessa curva, e o que difere da equação da atividade anterior, essa equação tem um acréscimo do sinal negativo em lado da igualdade. Após os alunos apresentarem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma de como pode ser obtida a equação reduzida da parábola com concavidade para a esquerda conhecendo seu parâmetro e seus vértices. Após a socialização, caso os alunos não cheguem a uma conclusão próxima da esperada, o professor passará então para a formalização matemática adequada esperada da atividade. E finalizando, após a escrita da conclusão final dos alunos, a ficha da atividade deve ser recolhida.

Em seguida, apresentaremos as atividades da sessão III que envolve conhecimentos sobre a Elipse, que vai definir a Elipse como lugar geométrico e suas equações reduzidas.

Figura 16: Sessão III – Atividade 1

SEÇÃO III - ATIVIDADE 1

Título: Elipse

Objetivo: Definir a Elipse como lugar geométrico.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.

2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

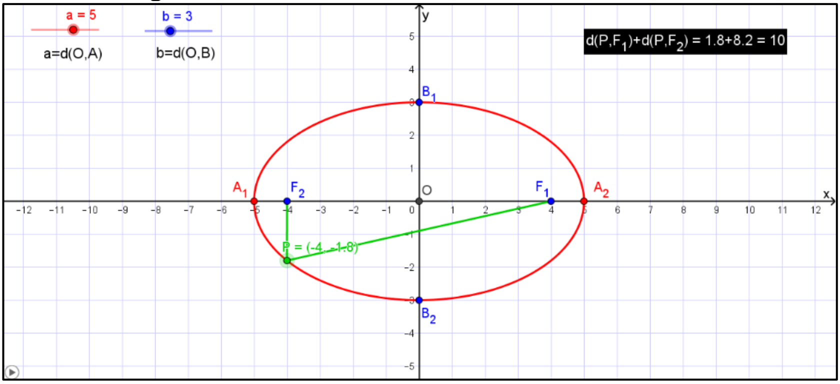
Distância (O,A)	Distância (O,B)	Ponto P(x,y)	Distância (A_1,A_2)	Distância (P,F_1)	Distância (P,F_2)	(P,F_1)+(P,F_2)
5	3	(0,3)				
5	3	(0,-3)				
5	3	(5,0)				
5	3	(-5,0)				
5	3	(3.73,2)				
5	3	(2,2.75)				
5	3	(-3,2.4)				
5	3	(1,4.71)				
5	3	(-4,-1.8)				

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 17: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do GeoGebra e do preenchimento do quadro da atividade, os alunos observem que a soma das distâncias de ponto que pertence a Elipse aos focos dessa curva é um valor constante e que a Elipse é o lugar geométrico dos pontos que tem essa particularidade. Após os alunos apresentarem suas observações e conclusões na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma de como é definida essa curva como um lugar geométrico. Após essa conversa com a turma, caso os alunos ainda apresentem dúvidas, o professor então deve apresentar a formalização matemática adequada e esperada da atividade. E finalizando, após a escrita da conclusão final dos alunos, a ficha da atividade deve ser recolhida.

Em seguida, apresentaremos a segunda atividade da sessão III que envolve conhecimentos sobre a equação reduzida da Elipse com centro na origem e eixo maior horizontal.

Figura 18: Sessão III – Atividade 2

SEÇÃO III - ATIVIDADE 2

Título: Elipse

Objetivo: Encontrar a equação reduzida da Elipse com centro na origem e eixo maior na horizontal.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

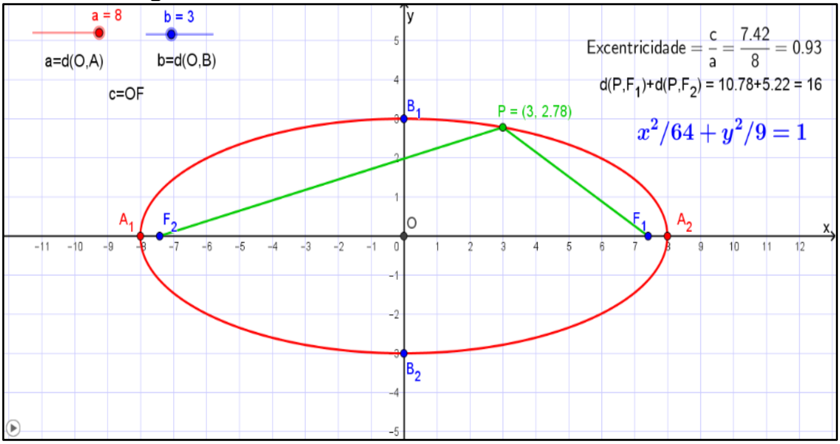
Centro (x,y)	Distância (O,A)	Distância (O,B)	Ponto P(x,y)	Eixo Maior	Equação Reduzida da Elipse
(0,0)	3	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	6	5		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	7	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	8	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 19: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Para essa atividade, esperamos que usando o GeoGebra e analisando o preenchimento do quadro da atividade, os envolvidos na aplicação tenham a noção que a equação reduzida de uma Elipse centrada na origem e com eixo maior na horizontal depende dos valores dos semieixos horizontal e vertical e que o quadrado desses valores são os denominadores das variáveis x e y na equação dessa curva. Dando sequência na atividade, após os alunos apresentarem suas observações e conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer a socialização com a turma de como pode ser encontrada a equação dessa Elipse. Após esse bate papo com a turma, se os alunos ainda mostrem dificuldades, então o professor deve fazer a formalização matemática adequada e esperada. E por último, após a escrita da conclusão final dos alunos, a ficha da atividade deve ser recolhida.

A seguir, será apresentada a atividade 3 da sessão III, que define a equação reduzida da Elipse com centro na origem e eixo maior vertical.

Figura 20: Sessão III – Atividade 3

SEÇÃO III - ATIVIDADE 3

Título: Elipse

Objetivo: Encontrar a equação reduzida da Elipse com centro na origem e eixo maior na vertical.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

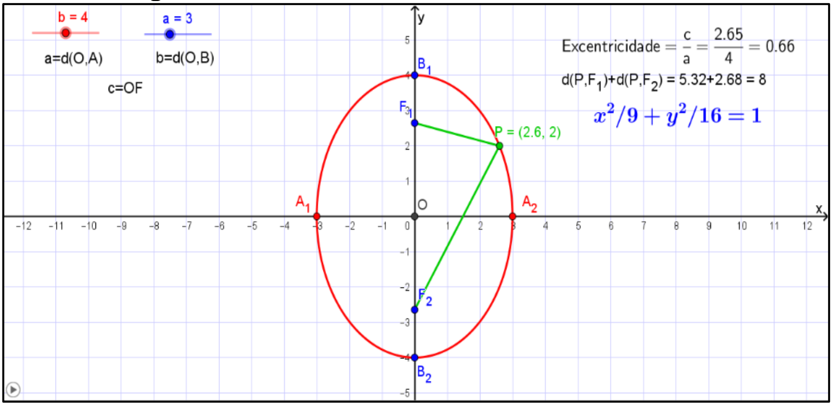
Centro (x,y)	Distância (O,A)	Distância (O,B)	Ponto P(x,y)	Eixo Maior	Equação Reduzida da Elipse
(0,0)	1	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	6	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	5	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	6	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	7	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	8	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 21: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Essa atividade, é idêntica a atividade 2 e com isso, contamos que os alunos manipulem o GeoGebra e ao analisar o quadro preenchido dessa atividade, tenham a noção que a equação reduzida de uma Elipse centrada na origem e com eixo maior na vertical depende dos valores dos semieixos horizontal e vertical e que o quadrado desses valores são os denominadores das variáveis x e y na equação reduzida dessa curva. Em seguida, dando sequência na atividade, após os alunos apresentarem suas observações e conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer a socialização com a turma de como pode ser encontrada a equação dessa Elipse. Após essa conversa e socialização com a classe, se os alunos ainda se mostrarem com dificuldades, então o professor deve fazer a formalização matemática referente a esse tópico. E pra finalizar, após os alunos chegarem na conclusão, a ficha da atividade deve ser recolhida.

A próxima atividade apresentada, será a atividade 4 da sessão III, que vai contemplar a equação reduzida da Elipse com centro fora da origem e eixo maior horizontal.

Figura 22: Sessão III – Atividade 4

SEÇÃO III - ATIVIDADE 4

Título: Elipse

Objetivo: Encontrar a equação reduzida da Elipse com centro fora da origem com eixo maior na horizontal.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

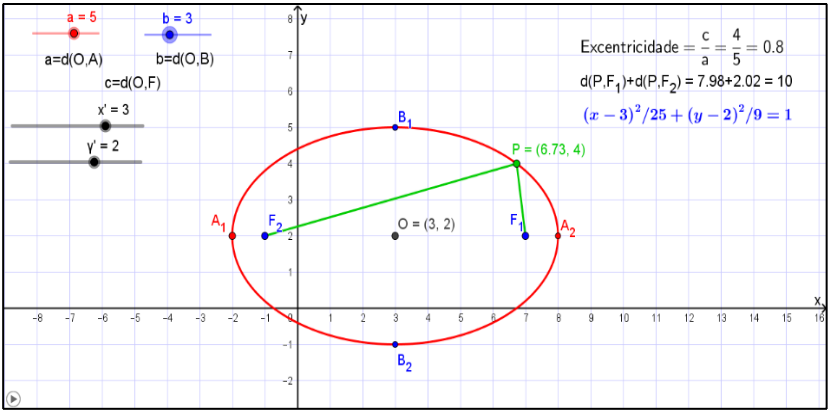
Centro (x',y')	Distância (O,A)	Distância (O,B)	Ponto P(x,y)	Eixo Maior	Equação Reduzida da Elipse
(3,2)	3	1	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,-2)	3	2	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,-2)	4	2	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,2)	4	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,0)	5	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,2)	5	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(4,3)	6	5	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(5,-1)	7	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(2,-5)	8	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 23: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa atividade, esperamos que os alunos manipulem o GeoGebra e ao preencher o quadro dessa atividade, tenham o entendimento que a equação reduzida de uma Elipse cm centro fora da origem e com eixo maior na horizontal, depende das coordenada do centro e dos valores dos semieixos horizontal e vertical e que o quadrado desses valores são os denominadores das variáveis x e y na sua equação reduzida. Em seguida, após os alunos apresentarem suas observações e conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer a socialização com a turma de como pode ser encontrada a equação dessa elipse. E após essa socialização com a classe, se os alunos ainda se mostrarem com dificuldades, então o professor deve fazer a formalização matemática referente a essa curva. E finalizando, depois que os alunos escrevem sua conclusão, a ficha da atividade deve ser recolhida pelo professor.

Em seguida, a próxima atividade apresentada será a última atividade da sessão III, que traz a equação reduzida da Elipse com centro fora da origem e eixo maior vertical.

Figura 24: Sessão III – Atividade 5

SEÇÃO III - ATIVIDADE 5

Título: Elipse

Objetivo: Encontrar a equação reduzida da Elipse com centro fora da origem com eixo maior na vertical.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

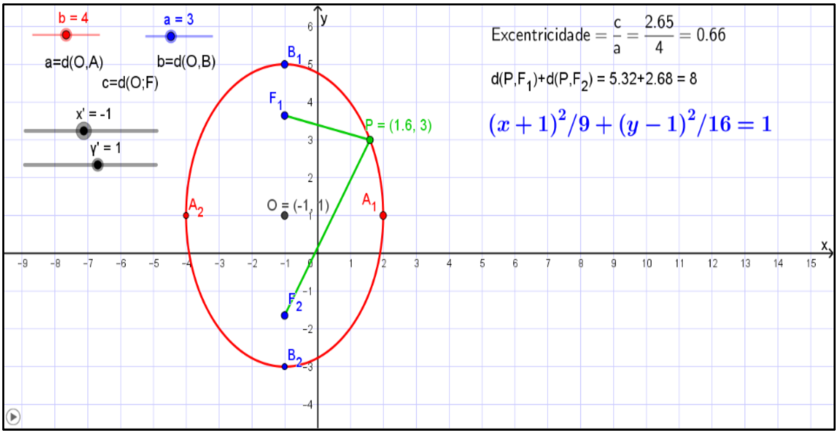
Centro (x,y)	Distância (O,A)	Distância (O,B)	Ponto P(x,y)	Eixo Maior	Equação Reduzida da Elipse
(3,2)	1	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,-2)	2	3	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,-2)	2	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-1,1)	3	4	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,0)	3	5	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,2)	4	5	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(4,3)	5	7	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(5,-1)	4	8	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	
(2,-5)	5	9	(,)	( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 25: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa atividade, que é muito semelhante a atividade 4, também esperamos que os alunos manipulem o GeoGebra e ao preencher o quadro dessa atividade, compreendam que a equação reduzida de uma Elipse cm centro fora da origem e com eixo maior vertical, depende das coordenada do centro e dos valores dos dois semieixos e que o quadrado das medidas das semieixos aparecem na equação como os denominadores das variáveis x e y. Em seguida, após os alunos observarem e fazer suas conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer uma socialização com a turma de como pode ser encontrada assa equação reduzida. E após essa conversa com os participantes, se eles ainda estiverem com dúvidas, então o professor deve fazer a formalização matemática referente a essa curva. E depois que os alunos anotarem sua conclusão final, a ficha da atividade deve ser recolhida pelo professor.

A seguir, passamos para as atividades da sessão IV que vai apresentar a Hipérbole, destacando sua definição como lugar geométrico e suas principais equações reduzias. Começamos com a atividade um dessa sessão.

Figura 26: Sessão IV – Atividade 1

SEÇÃO IV - ATIVIDADE 1

Título: Hipérbole

Objetivo: Definir a Hipérbole como lugar geométrico.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

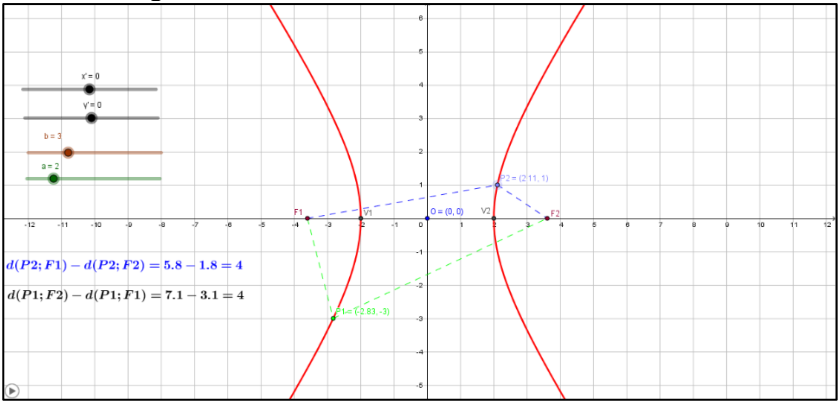
Centro (x',y')	Ponto P_1 (x_1,y_1)	Ponto P_2 (x_2,y_2)	$\lvert d(P_1,F_2)-d(P_1,F_1)\rvert$	$\lvert d(P_2,F_1)-d(P_2,F_2)\rvert$	$d(V_1,V_2)$
(0,0)	(-2.83,-2)	(2.24,1)			
(0,0)	(-5.38,5)	(4.48,4)			
(0,0)	(-3.38,8)	(6.48,7)			
(0,0)	(-2.47,-1)	(4.24,4)			
(0,0)	(-5.47,0)	(1.24,5)			
(0,0)	(-4,1.76)	(3,0.54)			
(0,0)	(0,-4.24)	(7,-5.46)			
(0,0)	(-2.38,3)	(6,-4.23)			
(0,0)	(-1.38,4)	(7,-3.23)			
(0,0)	(-1, -5.59)	(9,3.58)			

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 27: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa primeira atividade da sessão IV, esperamos que os alunos, já com a experiencia das atividades anteriores sobre a parábola e a elipse, apresentem poucas dificuldades ao manipularem o Geogebra e preencherem o quadro dessa atividade, e com isso compreendam que ao marcar um ponto sobre a Hipérbole, o módulo da diferença da distância desse ponto para os dois focos da dessa curva é sempre um valor constante e esse valor corresponde a distância entre os dois vértices dessa Hipérbole. E após os alunos observarem e fazer suas conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer uma socialização com a turma de como a Hipérbole pode ser definida como um lugar geométrico que tem essa característica. E mesmo depois dessa conversa e socialização com os alunos, eles ainda se mostrarem sem o entendimento correto, então o professor deve fazer a formalização matemática referente a Hipérbole. E depois que os alunos anotarem sua conclusão final, a ficha da atividade deve ser recolhida pelo professor.

A seguir, apresentamos a atividade 2 da sessão IV, que vai descrever a equação reduzida de uma Hipérbole horizontal com centro na origem dos eixos ordenados.

Figura 28: Sessão IV – Atividade 2

SEÇÃO IV - ATIVIDADE 2

Título: Hipérbole

Objetivo: Determinar a Equação reduzida da hipérbole horizontal com centro na origem.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

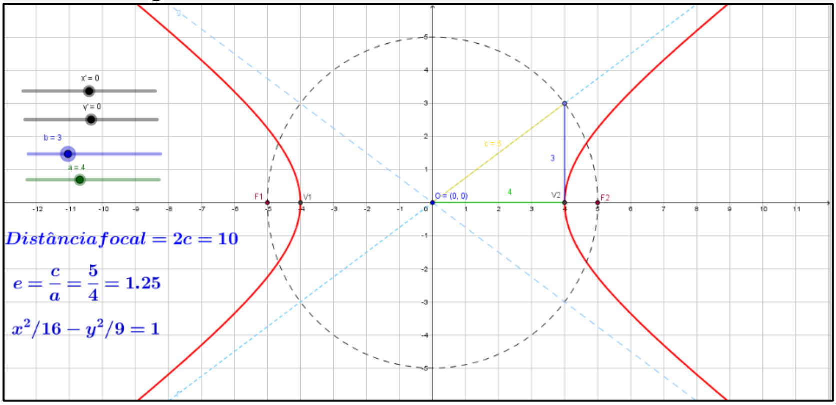
Centro (x',y')	Distância a	Distância b	Distância focal 2c	Eixo Real ou Transverso	Equação Reduzida da Hipérbole
(0,0)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 29: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa segunda atividade da sessão IV, esperamos que os alunos usem do Geogebra e façam as anotações no quadro dessa atividade de forma correta, visto que eles já possuem uma experiência, e possam assimilar que a equação reduzida da Hipérbole horizontal com centro na origem, dependem do quadrado de duas distâncias que são verificadas nos seus eixos e que um lado da igualdade dessa equação reduzida é sempre igual a 1. E após os alunos observarem e fazer suas conclusões na ficha de atividades, o professor deverá fazer uma socialização com a turma de como a partir desses valores pode ser obtida essa equação reduzida, destacando as principais partes. E se os alunos mesmo depois da socialização, eles não entenderem, nesse momento o professor deve fazer a formalização matemática de como é que podemos encontrar essa equação. E depois que os alunos fizerem suas anotações finais, a ficha da atividade deve ser recolhida pelo professor.

A seguir, apresentamos a atividade 3 da sessão IV, que vai descrever a equação reduzida de uma Hipérbole horizontal com centro fora da origem dos eixos ordenados.

Figura 30: Sessão IV – Atividade 3

SEÇÃO IV - ATIVIDADE 3

Título: Hipérbole

Objetivo: Determinar a Equação reduzida da hipérbole horizontal com centro fora da origem.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

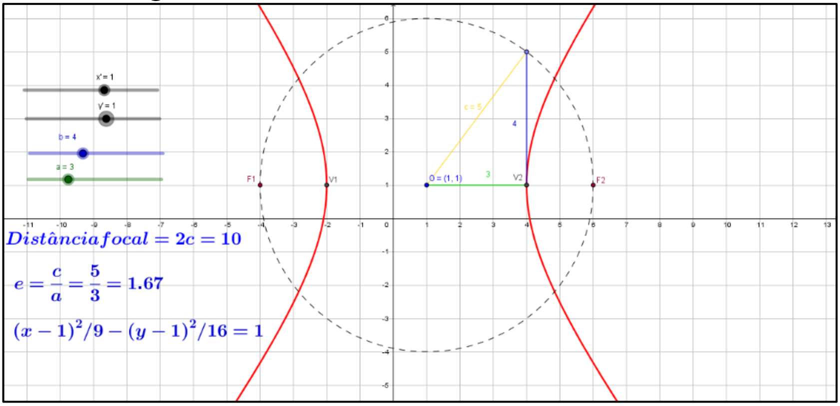
Centro (x',y')	Distância a	Distância b	Distância focal 2c	Eixo Real ou Transverso	Equação Reduzida da Hipérbole
(1,1)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,2)	3	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-2,0)	4	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,-4)	2	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,-2)	3	5		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(2,5)	4	5		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,3)	3	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(4,0)	2	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,-3)	2	5		( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 31: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa terceira atividade da sessão IV, esperamos que os alunos relacionem essa atividade com a anterior e observem que podem seguir o mesmo raciocínio para chegar na equação reduzida da Hipérbole horizontal com centro fora a origem. E como nas outras atividades os alunos faram suas observações e possíveis conclusões na ficha de atividades, e após isso o professor deverá fazer uma socialização com a turma de como chegar nessa equação reduzida, fazendo suas intervenções necessárias . E se os alunos depois da socialização não entenderem, nesse momento o professor deve fazer a formalização matemática de como é que podemos encontrar essa equação. E depois que os alunos fizerem suas anotações finais, o professor finaliza e recolhe a ficha.

A seguir, apresentamos a atividade 4 da sessão IV, que vai apresentar como chegar na equação reduzida de uma Hipérbole vertical com centro na origem dos eixos ordenados.

Figura 32: Sessão IV – Atividade 4

SEÇÃO IV - ATIVIDADE 4

Título: Hipérbole

Objetivo: Determinar a Equação reduzida da hipérbole vertical com centro na origem.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

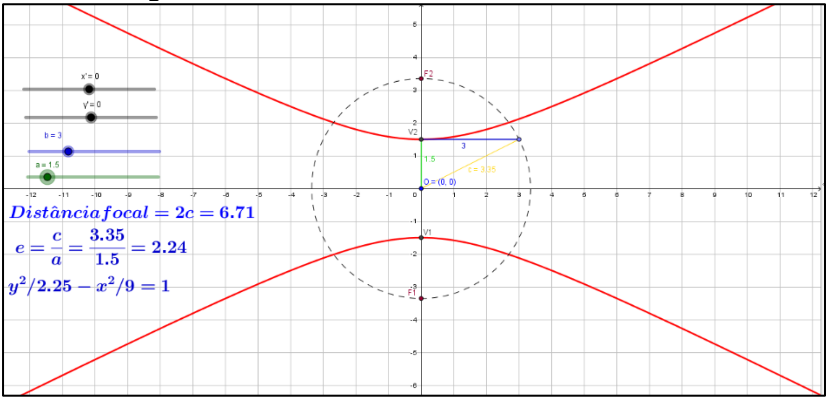
Centro (x',y')	Distância a	Distância b	Distância focal 2c	Eixo Real ou Transverso	Equação Reduzida da Hipérbole
(0,0)	1	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	1	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	1	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	3	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	2	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,0)	5	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 33: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa quarta atividade da sessão IV, esperamos que os alunos relacionem essa atividade com as atividades 2 e 3 dessa mesma sessão e desenvolvam a mesma ideia usada anteriormente para descobrir a equação reduzida da Hipérbole vertical com centro na origem. E como nas outras atividades os alunos faram suas observações e possíveis conclusões na ficha de atividade, e após isso o professor deverá fazer uma socialização com a turma de como chegar nessa equação reduzida, fazendo suas intervenções necessárias . E se os alunos depois da socialização não entenderem, nesse momento o professor deve fazer a formalização matemática de como é que podemos encontrar essa equação. E depois que os alunos fizerem suas anotações finais, o professor finaliza e recolhe a ficha da atividade.

A seguir, apresentamos última atividade da sessão IV, que vai apresentar como chegar na equação reduzida de uma Hipérbole vertical com centro fora da origem dos eixos ordenados.

Figura 34: Sessão IV – Atividade 5

SEÇÃO IV - ATIVIDADE 5

Título: Hipérbole

Objetivo: Determinar a Equação reduzida da hipérbole vertical com centro fora da origem.

Material: Laboratório de Informática, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software Geogebra.
2. Mudar os valores nos controles deslizantes do Geogebra de acordo com o quadro abaixo e para cada valor preencher as colunas.

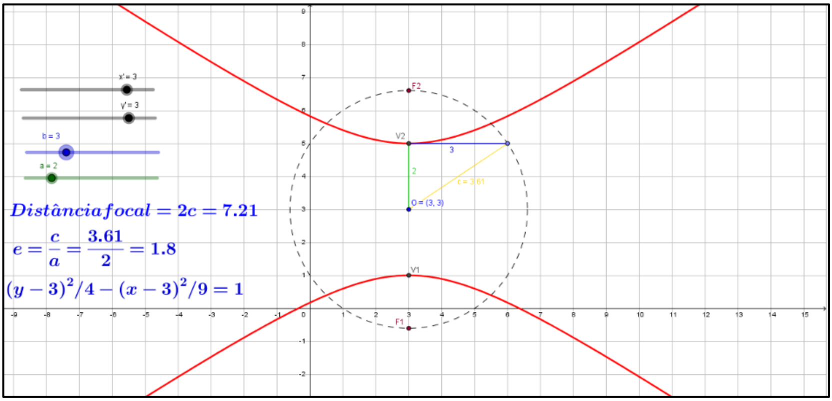
Centro (x',y')	Distância a	Distância b	Distância focal 2c	Eixo Real ou Transverso	Equação Reduzida da Hipérbole
(3,3)	1	2		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(2,2)	1	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,-3)	2	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(3,2)	1	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(4,2)	2	4		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-3,1)	4	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(1,4)	3	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(-2,0)	2	1		( ) Horizontal ( ) Vertical	
(0,3)	5	3		( ) Horizontal ( ) Vertical	

Observação:

Conclusão:

Fonte: Autor (2019)

Figura 35: Tela do GeoGebra com dados da atividade



Fonte: Autor (2019)

Sugestão para a Atividade: Nessa última atividade da sessão IV e do nosso livreto, esperamos que os alunos relacionem essa atividade com as atividades anteriores e dessa forma, possam descobrir sem dificuldades os padrões das equações reduzidas assim escrever a equação reduzida da Hipérbole vertical com centro fora da origem. E o roteiro segue o mesmo das outras atividades: o professor precisa fazer a socialização das respostas dos alunos, em seguida observar se os alunos entenderam, após isso o professor deve fazer a formalização matemática de como é que podemos encontrar essa equação. E depois que os alunos fizerem suas anotações finais, o professor finaliza e recolhe a ficha da atividade.

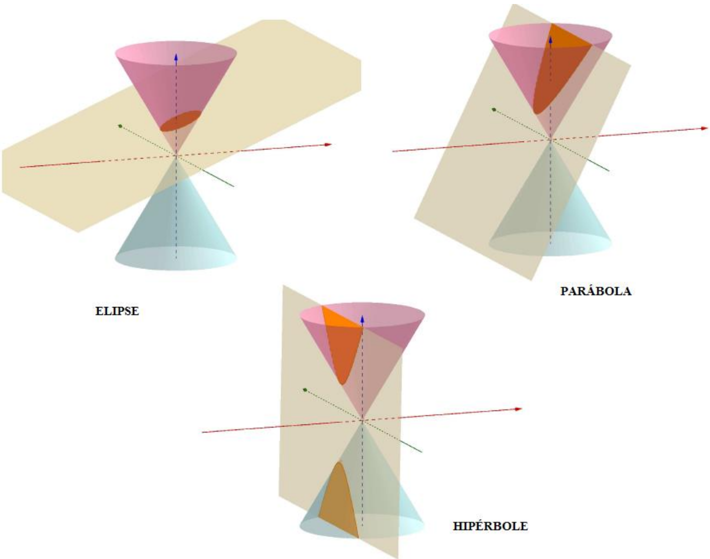
No próximo tópico, mostraremos o tratamento formal das cônicas que foram trabalhadas em todas as atividades anteriores, isso se faz necessário pelo fato de que o professor precisa do conhecimento formal sobre o objeto matemático que está em estudo para ter uma propriedade maior nas intervenções com os alunos no decorrer das atividades.

3. TEORIA SOBRE AS CÔNICAS

Este tópico apresenta uma abordagem matemática sobre as cônicas (parábola, elipse e hipérbole) e foi construído de acordo com os autores Ieezi (2014), Venturi (1987) e Miranda, Grisi, Lodovici, (2015).

As seções cônicas são as curvas obtidas pela intersecção de um cone, de duas folhas, com planos que não contenham o vértice desse cone.

Figura 36: Cônicas geradas por um cone duplo



Fonte: Miranda, Grisi, Lodovici, (2015. p.13)

Neste estudo vamos considerar basicamente três tipos de cônicas (*Parábola Elipse e Hipérbole*) que podem ser obtidas a partir de um cone duplo cuja reta geratriz faz ângulo α com o eixo desse cone:

- ✓ *Parábola*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma ângulo *a* com o eixo do cone;
- ✓ *Elipse*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta > \alpha$ com o eixo do cone;

- ✓ *Hipérbole*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta < \alpha$ com o eixo do cone.

Podemos mostrar que o lugar geométrico dessas curvas num plano pode ser assinalado por relações envolvendo a distância de seus pontos a seus focos e retas diretrizes como descrito a seguir.

Assim sendo, definimos:

Definição 1: Uma **parábola** $\boldsymbol{\rho}$ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias ao ponto F e a reta d são iguais. Ou seja, dados F e d, dizemos que P é um ponto da parábola $\boldsymbol{\rho}$ se somente se:

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| = d(P, d)$$

Definição 2: Uma **elipse** $\boldsymbol{\varepsilon}$ de focos $F1$ e $F2$ de eixo maior medindo $2a > \left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e F_2, com $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 2c$, e um número $a > c$, dizemos que P é um ponto da elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$ se somente se:

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

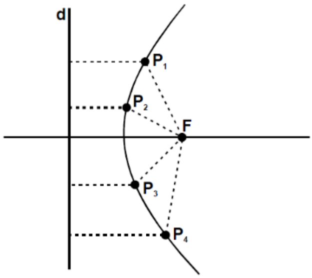
Definição 3: Uma **hipérbole Ƕ** de focos F_1 e F_2 de eixo transverso medindo $2a < \left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e F_2, com $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 2c$, e um número $a < c$, dizemos que P é um ponto da hipérbole **Ƕ** se somente se:

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| - \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

3.1. A PARÁBOLA

Segundo descrito na Definição 1, uma parábola ρ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias a F e d são iguais.

Figura 37: Alguns pontos da Parábola (Equidistantes de F e d)

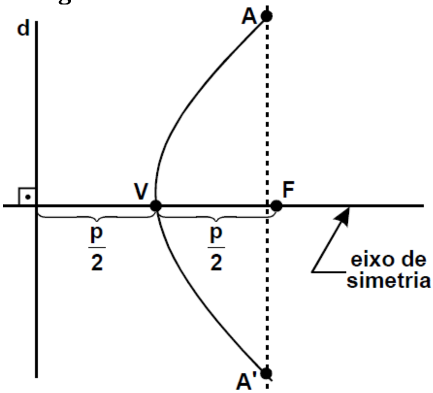


Fonte: Venturi (1949.p.41)

3.1.1. ELEMENTOS DA PARÁBOLA

Observando a figura 38 abaixo podemos destacar os principais elementos da parábola.

Figura 38: Elementos da Parábola



Fonte: Venturi (1949.p.42)

- ✓ O ponto F é denominado **foco da parábola**.
- ✓ A reta d é denominada **reta diretriz da parábola**.
- ✓ A distância p entre o foco F e a reta diretriz d da parábola é chamada **parâmetro da parábola**.
- ✓ O ponto V de intersecção da perpendicular à d por F com a parábola é o **vértice da parábola**;
- ✓ A reta perpendicular a d por F é o **eixo de simetria da parábola**.
- ✓ Qualquer segmento cujos extremos estão sobre P é denominado **corda da parábola**;

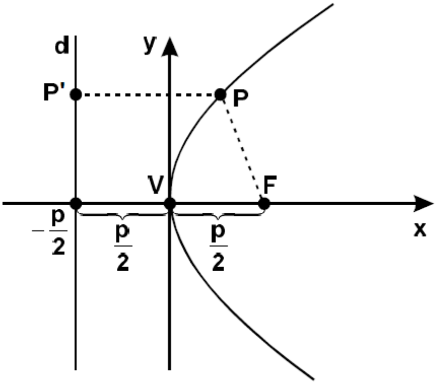
- ✓ Tomando A e A' os extremos da corda que contém F e é paralela a diretriz d, obtemos o triângulo ΔVAB denominado **triângulo fundamental da parábola**.

3.1.2. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM

Para obtermos as equações canônicas da parábola com vértice na origem vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo de simetria coincide com o eixo x.

Figura 39: Parábola com concavidade voltada para direita no sistema $xo\gamma$



Fonte: Venturi (1949.p.42)

Da figura 39 temos que:

$P = (x, \gamma)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = (\frac{p}{2}, 0)$ é o foco.

$P' = (-\frac{p}{2}, \gamma)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

$x = -\frac{p}{2}$ é a diretriz da parábola.

Por definição:

$$d(P, \mathrm{F}) = d(P, \mathrm{P}')$$

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (\gamma - 0)^2)} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (\gamma - \gamma)^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando e isolando y chegamos então a:

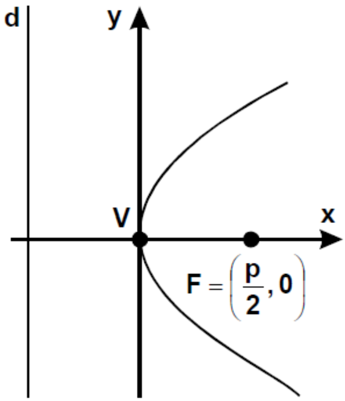
$$y^2 = 2px$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola com vértice na origem cujo eixo de simetria é o eixo x.

Na equação $y^2 = 2px$ temos que:

Para $p > 0$ a parábola tem equação $y^2 = 2px$ e concavidade voltada para a direita.

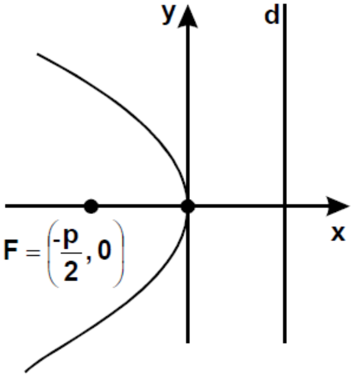
Figura 40: Parábola com concavidade para a direita ($p > 0$)



Fonte: Venturi (1949.p.43)

Para $p < 0$ a parábola tem equação $y^2 = -2px$ e concavidade voltada para a esquerda.

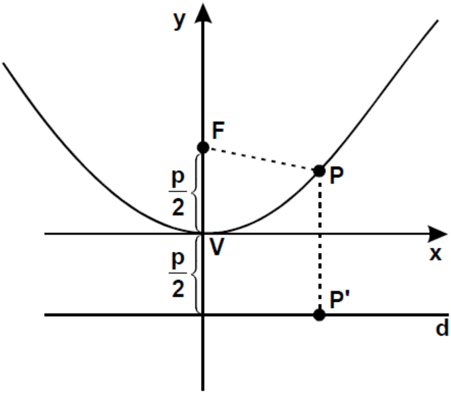
Figura 41: Parábola com concavidade para a esquerda ($p < 0$)



Fonte: Venturi (1949.p.43)

Caso 2: O eixo de simetria coincide com o eixo γ.

Figura42: Parábola com concavidade voltada para cima no sistema $xo\gamma$



Fonte: Venturi (1949.p.43)

Da figura 42 temos que:

$P = (x, \gamma)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = (0, \frac{p}{2})$ é o foco.

$P' = (x, -\frac{p}{2})$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

$\gamma = -\frac{p}{2}$ é a diretriz da parábola.

Por definição:

$$d(P, \mathrm{F}) = d(P, \mathrm{P}')$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (\gamma - \frac{p}{2})^2)} = \sqrt{(x-x)^2 + (\gamma + \frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 - p\gamma + \frac{p^2}{4} + \gamma^2 = \gamma^2 + p\gamma + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando e isolando γ chegamos então a:

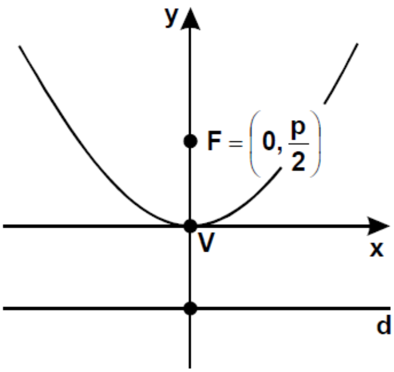
$$x^2 = 2p\gamma$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola com vértice na origem cujo eixo de simetria é o eixo γ.

Na equação $x^2 = 2p\gamma$ temos que:

Para $p > 0$ a parábola tem equação $x^2 = 2p\gamma$ e concavidade voltada para cima.

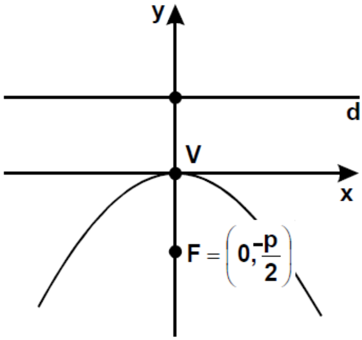
Figura 43: Parábola com concavidade para cima ($p > 0$)



Fonte: Venturi (1949.p.44)

Para $p < 0$ a parábola tem equação $x^2 = -2p\gamma$ e concavidade voltada para baixo.

Figura 44: Parábola com concavidade para baixo ($p < 0$)



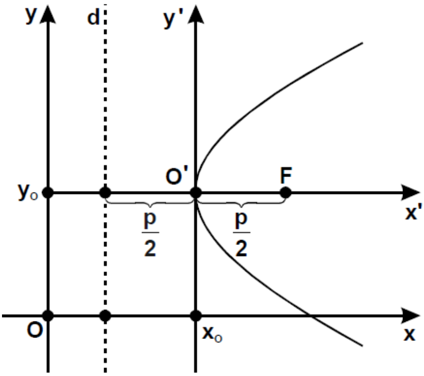
Fonte: Venturi (1949.p.44)

3.1.3. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA PARÁBOLA COM VÉRTICE FORA DA ORIGEM

Para obtermos as equações canônicas da parábola com vértice fora da origem vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo x.

Figura 45: Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo a x.



Fonte: Venturi (1949.p.50)

Fazendo uma translação de eixos no plano cartesiano, encontramos um novo sistema $x'O\gamma'$, no qual o centro O' coincide com o vértice $V = (x_0, \gamma_0)$.

Com isso, a equação da parábola nesse novo sistema $x'O\gamma'$ será:

$$\gamma'^2 = 2px' \qquad (1)$$

Daí segue pelas fórmulas de translação dos eixos que:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Fazendo a substituição de (2) em (1) temos que:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \qquad (I)$$

Que será a equação reduzida de uma parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo a x.

Se o parâmetro p for positivo a concavidade da parábola estará voltada para a direita caso contrário se p tiver valor negativo sua concavidade é para a esquerda.

Continuando com a equação (I) e isolando o valor de x encontramos:

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{y_0}{p}y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} \qquad (I')$$

Fazendo:

$$\frac{1}{2p} = a \quad ; \quad \frac{y_0}{p} = b \quad e \quad \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} = c$$

Encontramos a equação:

$$x = ay^2 + by + c \qquad (I'')$$

Comparando os coeficientes dessas equações (I') e (I'') observamos que:

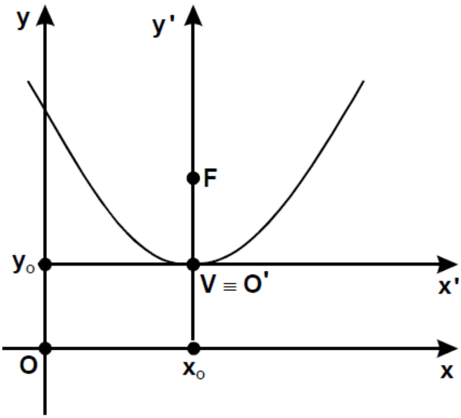
$$a = \frac{1}{2p} \rightarrow p = \frac{1}{2a}$$

$$b = -\frac{y_0}{p} \rightarrow y_0 = -bp \rightarrow y_0 = \frac{-b}{2a}$$

Com essa última equação podemos encontrar a ordenada do vértice da parábola y_0.

Caso 2: O eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo y.

Figura 46: Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo a y.



Fonte: Venturi (1949.p.50)

Analogamente a parábola com concavidade voltada para cima $(p > 0)$ ou concavidade voltada para baixo $(p < 0)$ tem equação da forma:

$$(x - x_0)^2 = 2p(\gamma - \gamma_0) \qquad (II)$$

Desenvolvendo a equação (II) e isolando γ encontramos:

$$\gamma = ax^2 + bx + c \qquad (II')$$

Analogamente comparando os coeficientes dessas equações (II) e (II') temos que:

$$p = \frac{1}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Com essa última equação podemos encontrar a ordenada do vértice da parábola x_0.

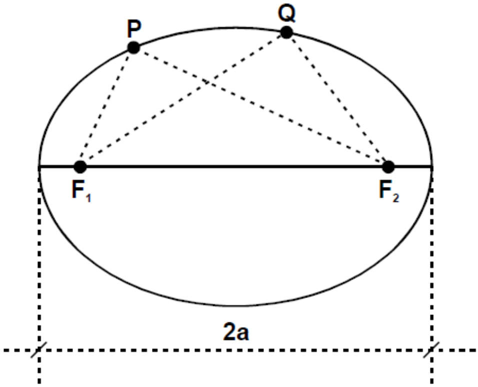
Comparando as equações enfatizamos que o sinal do coeficiente a é o mesmo de p. Com isso, a concavidade da parábola fica explicitada.

3.2. A ELIPSE

Segundo descrito na Definição 2, uma elipse ε é o lugar geométrico formado por pontos cuja soma a dois pontos fixos, $F_1 e\ F_2$, é constante.

Assim:

Figura 47: Dois pontos de uma elipse



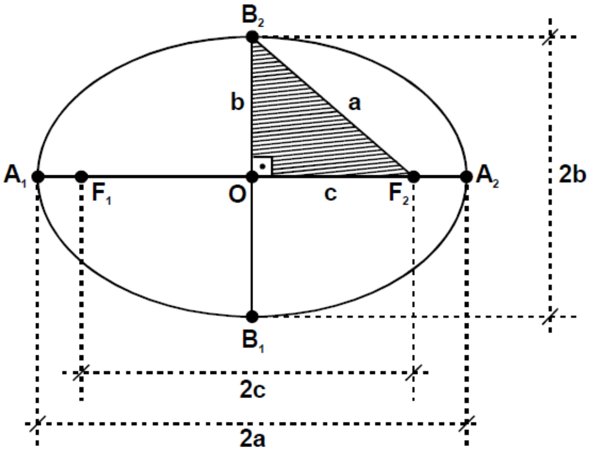
Fonte: Venturi (1949.p.69)

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \quad \text{e} \quad d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$$

3.2.1. ELEMENTOS DA ELIPSE

Observando a figura 48 abaixo podemos destacar os principais elementos da Elipse.

Figura 48: Elementos da Elipse



Fonte: Venturi (1949.p.69)

- ✓ Os pontos F_1 e F_2 são denominados **focos da elipse**.
- ✓ A distância $2c$ entre os focos F_1 e F_2 é chamada **distância focal**.
- ✓ O ponto O é o **centro** da elipse e o ponto médio do segmento F_1F_2.
- ✓ A_1, A_2, B_1, B_2 são os **vértices** da elipse.

- ✓ O segmento A_1A_2 **eixo maior** da elipse cujo perímetro é igual a $2a$.
- ✓ O segmento B_1B_2 **eixo menor** da elipse cujo perímetro é igual a $2b$.
- ✓ Relação notável do triângulo B_2OF_2 : $a^2 = b^2 + c^2$.

3.2.2. EXCENTRICIDADE DA ELIPSE

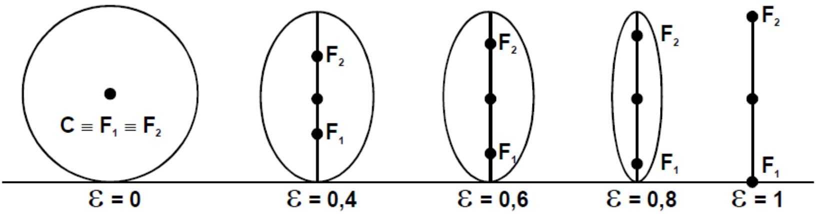
Uma característica importante da elipse é sua excentricidade que pode ser definida pela relação:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

Quanto mais ϵ se aproxima de zero, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Porém, quanto mais esse valor se aproxima de 1 mais achatada se torna a elipse.

Fixando o valor de a temos uma relação entre ε e a distância focal: quanto menor a distância entre os focos mais a elipse se aproxima de uma circunferência e quanto mais achatada for a elipse maior será a distância entre os focos

Figura 49: Excentricidade da elipse



Fonte: Venturi (1949.p.70)

Quando a excentricidade é igual a zero ($\varepsilon = 0$), temos uma circunferência de diâmetro $2a$ e seus focos concordam com o centro da elipse.

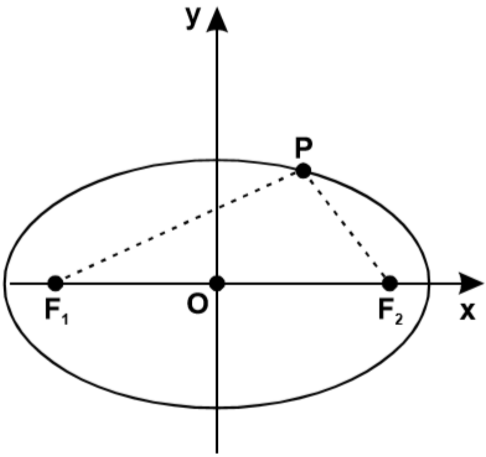
E se $\varepsilon = 1$ temos um segmento F_1F_2.

3.2.3. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA ELIPSE COM VÉRTICE NA ORIGEM

Para obtermos as equações canônicas da Elipse com centro na origem vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo maior pertence ao eixo x.

Figura 50: Elipse com eixo maior pertencendo ao eixo x



Fonte: Venturi (1949.p.71)

Da figura 50 temos que:

$P(x, y)$ um ponto genérico da elipse

$F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

Por definição segue que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Pela relação notável $a^2 - c^2 = b^2$:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

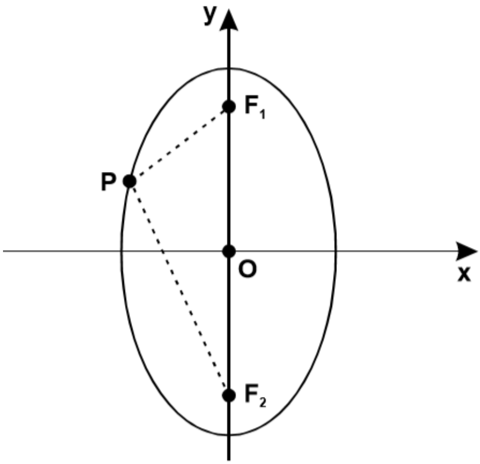
Dividido ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação canônica ou reduzida da elipse centrada na origem e focos sobre o eixo x.

Caso 2: O eixo maior pertence ao eixo y.

Figura 51: Elipse com eixo maior pertencendo ao eixo y



Fonte: Venturi (1949.p.72)

Da figura 51 temos que:

$P(x,y)$ um ponto genérico da elipse

$F_1 = (0,c)$ e $F_2 = (0,-c)$

Por definição segue que:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}$$

$$(y-c)^2 + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(y+c)^2 + x^2} + (y+c)^2 + x^2$$

$$4a\sqrt{(y+c)^2 + x^2} = 4a^2 + 4cy$$

$$a^2(y^2 + 2cy + c^2 + x^2) = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2$$

Pela relação notável $a^2 - c^2 = b^2$:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Dividido ambos os membros por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Equação canônica ou reduzida da elipse centrada na origem e focos sobre o eixo y.

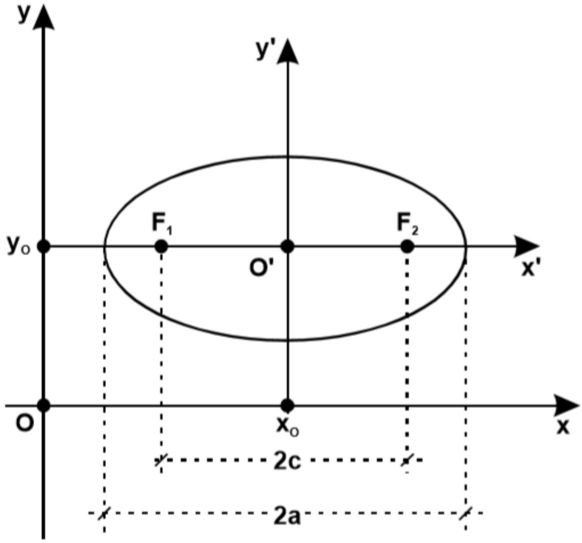
Na equação canônica se a^2 for o denominador do termo x^2 então os focos estão sobre o eixo x e se for denominador do termo y^2 então os focos estão contidos eixo y.

3.2.4. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA ELIPSE COM CENTRO $O' = (x', y')$ E EIXOS PARALELOS AOS EIXOS ORDENADOS.

Para obtermos as equações canônicas da Elipse com centro fora da origem e eixo paralelos aos eixos ordenados, vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo maior é paralelo ao eixo x.

Figura 52: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo x



Fonte: Venturi (1949.p.82)

Na figura 52 temos uma translação de eixos, representando um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O' = (x', y')$, coincide com o centro da elipse.

Fazendo a demonstração análoga a anterior chegamos na equação referente ao novo sistema $x'O'y'$ é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Temos pela translação de eixos que:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

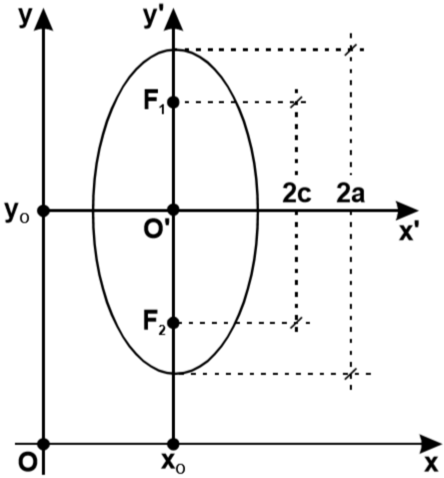
Substituindo (2) em (1) temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (I)$$

Que representa a equação canônica de uma elipse de centro $O' = (x', y')$ e cujo focos pertencem a uma reta paralela ao eixo x.

Caso 2: O eixo maior é paralelo ao eixo y.

Figura 53: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo y



Fonte: Venturi (1949.p.82)

Observando a figura 53 e adotando um raciocínio similar ao caso (I) encontramos a equação da elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \qquad (II)$$

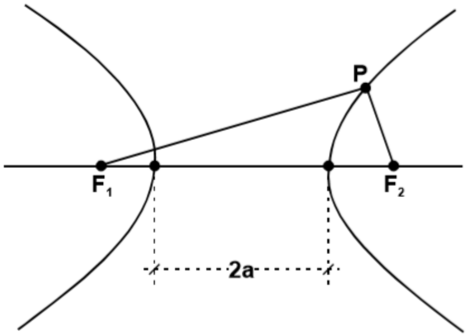
Se eliminarmos os parênteses nos casos (I) e (II) e depois desenvolvendo os produtos notáveis e ordenando as variáveis, a equação da elipse toma a forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, em que $A\ e\ B$ tem o mesmo sinal e $A\ \neq B$.

3.3. A HIPÉRBOLE

Segundo descrito na Definição 3, uma hipérbole **Ꮒ** é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o módulo da diferença das distâncias de cuja soma a dois pontos fixos, $F_1 e\ F_2\ (focos)$, do mesmo plano é constante.

Assim:

Figura 54: Hipérbole



Fonte: Venturi (1949.p.92)

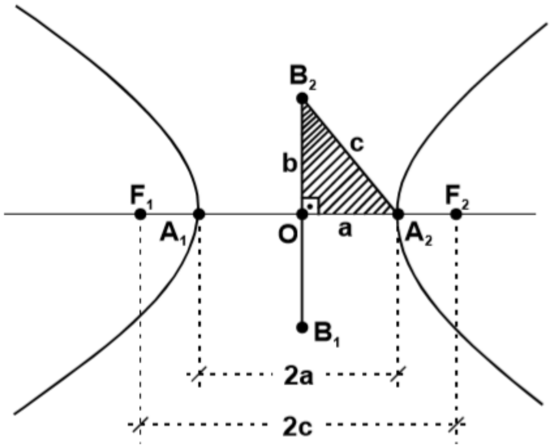
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

A hipérbole é uma curva de dois "ramos" e o módulo pode ser desconsiderado se for adotado a diferença entre a maior e a menor distância.

3.3.1. ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

Observando a figura 55 abaixo podemos destacar os principais elementos da Hipérbole.

Figura 55: Elementos da hipérbole



Fonte: Venturi (1949.p.92)

- ✓ Os pontos F_1 e F_2 são denominados **focos da Hipérbole**.
- ✓ A distância $2c$ entre os focos F_1 e F_2 é chamada **distância focal**.

- ✓ O ponto O é o **centro** da Hipérbole e o ponto médio do segmento F_1F_2.
- ✓ A_1, A_2 são os **vértices** da Hipérbole.
- ✓ O segmento A_1A_2 é o **eixo real ou transverso** da Hipérbole cujo comprimento é igual a $2a$.
- ✓ O segmento B_1B_2 é o **eixo imaginário ou conjugado** da hipérbole cujo comprimento é igual a $2b$.
- ✓ Relação notável do triângulo B_2OF_2 : $c^2 = b^2 + a^2$.

3.3.2.EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE

Uma característica importante da Hipérbole é sua excentricidade que pode ser definida pela relação:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon > 1)$$

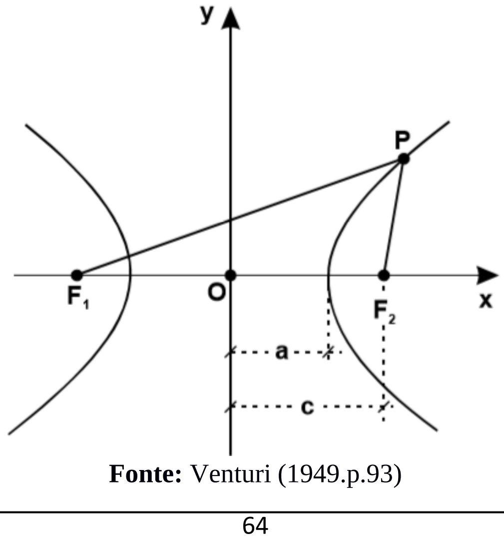
Existe uma relação proporcional entre a excentricidade e a abertura da hipérbole. Quanto maior o valor do ε maior se torna a abertura da hipérbole e vice versa.

3.3.3. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA HIPÉRBOLE COM VÉRTICE NA ORIGEM

Para obtermos as equações canônicas da Hipérbole com centro na origem vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo real coincide com o eixo x.

Figura 56: Hipérbole com eixo real coincidindo com o eixo x



Fonte: Venturi (1949.p.93)

Da figura 56 temos que:
$P(x, y)$ um ponto genérico da Hipérbole
$F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$
Por definição segue que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

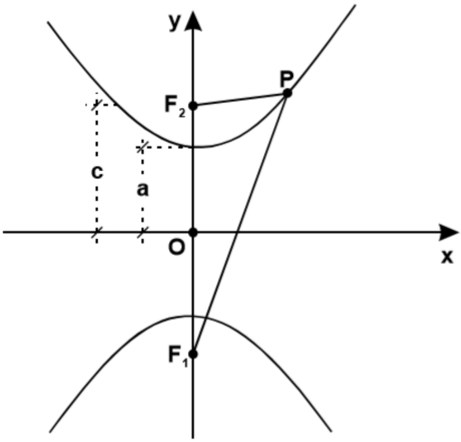
Empregando as mesmas operações e raciocínios usados para a elipse, chegamos na equação reduzida da hipérbole que destacamos a seguir:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação canônica ou reduzida da Hipérbole centrada na origem e eixo real coincidindo com o eixo x.

Caso 2: O eixo real coincide com o eixo y.

Figura 57: Hipérbole com eixo real coincidindo com o eixo y



Fonte: Venturi (1949.p.94)

Da figura 57 temos que:
$P(x, y)$ um ponto genérico da elipse
$F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$
Por definição segue que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\right| = 2a$$

Analogamente podemos demonstrar que para um ponto $P(x, y)$ que pertence a hipérbole temos sua equação reduzida:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Equação canônica ou reduzida da hipérbole com eixo real coincidindo com o eixo y.

Na hipérbole podemos ter $a > b, a = b\ ou\ a < b.$

Se uma hipérbole estiver na sua forma canônica, o eixo real ou o eixo focal coincide com o eixo da coordenada correspondente a variável de coeficiente positivo.

Exemplos:

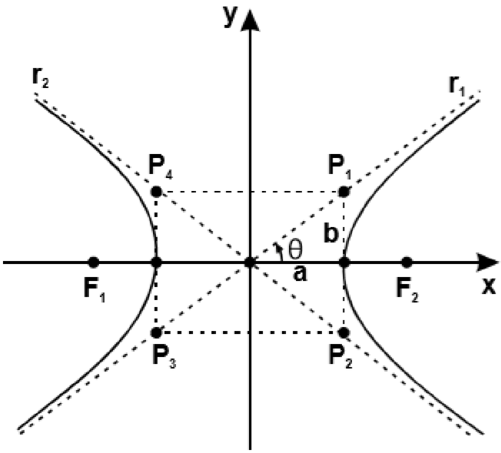
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1\ , o\ eixo\ focal\ coincide\ com\ o\ eixo\ x$$

$$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1\ , o\ eixo\ focal\ coincide\ com\ o\ eixo\ y$$

3.3.4. ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

Na figura 58 abaixo temos uma hipérbole e o retângulo de lados 2a e 2b.

Figura 58: Assíntotas da Hipérbole



Fonte: Venturi (1949.p.99)

As retas r_1 e r_2 que contém as diagonais desse retângulo são chamadas de assíntotas da Hipérbole. A distância de um ponto P da hipérbole á assíntota tende a zero quando o ponto P da hipérbole tende a infinito.

Pra calcular as equações das assíntotas, observamos a figura 15 onde as assíntotas passam pela origem, logo são do tipo:

$y = \pm mx$

Mas $m = tg\theta = \frac{b}{a}$, daí segue que:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Essas equações das assíntotas da hipérbole também podem ser representadas como segue abaixo:

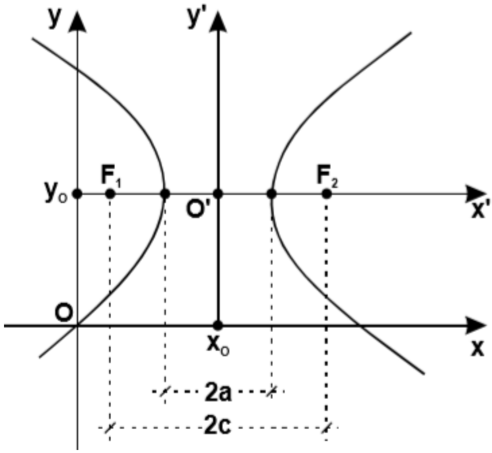
$$r_1 = bx - ax = 0$$
$$r_2 = bx + ax = 0$$

3.3.5. EQUAÇÕES DA HIPÉRBOLE COM CENTRO FORA DA ORIGEM CUJO EIXOS SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS

Para obtermos as equações canônicas da Hipérbole com centro fora da origem vamos considerar dois casos:

Caso 1: O eixo real paralelo ao eixo x.

Figura 59: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x



Fonte: Venturi (1949.p.106)

Na figura 59 temos uma translação de eixos, representando um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O' = (x', y')$, coincide com o centro da hipérbole.

Fazendo a demonstração análoga a anterior chegamos na equação referente ao novo sistema $x'O'y'$ é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Temos pela translação de eixos que:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

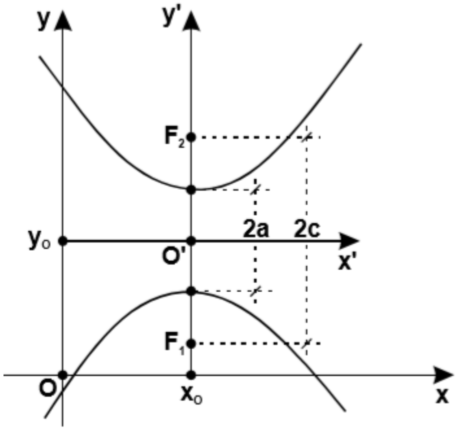
Substituindo (2) em (1) temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (I)$$

Que representa a equação canônica de uma hipérbole de centro $O' = (x', y')$ e cujo eixo real é paralelo ao eixo x.

Caso 2: O eixo real paralelo ao eixo y.

Figura 60: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo y



Fonte: Venturi (1949.p.106)

Observando a figura 60 e adotando um raciocínio similar ao caso (I) encontramos a equação da elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \qquad (II)$$

Se eliminarmos os parênteses nos casos (I) e (II) e depois desenvolvendo os produtos notáveis e ordenando as variáveis, a equação da hipérbole toma a forma de uma equação do 2º grau $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, em que $A\ e\ B$ são não nulos e tem sinais diferentes.

Ademais, quando a hipérbole tem centro fora da origem, as assíntotas passam por esses pontos e tem equações do tipo:

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \quad para\ a\ hipérbole\ (I)$$

$$ou$$

$$y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0) \quad para\ a\ hipérbole\ (II)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. y Hadas, N. **Computer Mediated Learning: An Example of An Approach**. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 2545, 2000.

BASSO, Cintia Maria. **Algumas reflexões sobre o ensino mediado por computador. Linguagem e Cidadania**. s.l. edição n. 004, p. 1, dez. 2000. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/lec/02_00/Cintia-L&C4.htm >. Acesso em: 26/09/19.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. 2 reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

HITT, F. **Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. Educación matemática**. Vol. 10, Nº 2, pp. 23-45, 1998.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 6, 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MARTIN, W. **Lasting effects of the integrated use of graphing technologies in precalculus mathematics.** In E. Dubinsky; A. Schoenfeld; J. Kaput (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education. Mathematical Association of America, Washington, D. C. Vol. 8, pp. 154-187, 2000.

VENTURI, J. J. **Cônicas e Quádricas**. 5ª edição, Curitiba, 243 p. 1949.

VIEIRA, R. S. **O papel das tecnologias da informação e comunicação na educação: um estudo sobre a percepção do professor/aluno.** Formoso - BA: Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), 2011. v. 10, p.66-72.

WILLIAMSON, S. & KAPUT, J. **Mathematics and virtual culture: an evolutionary perspective on technology and mathematics education**. Journal of Mathematical Behavior, 17 (21), pp. 265-281. 1999

SOBRE OS AUTORES

MÁRCIO ANDRÉ SANTA BRÍGIDA LIMA

Possui Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), Especialização em Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e é Mestrando do PROFMAT-UFPA Campus-Castanhal. Professor na Secretaria Municipal de Educação de São João da Ponta (SEMEC) e na Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA). Possui diversos artigos e trabalhos publicados em livros e anais de eventos nacionais e internacionais.

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES

Possui Doutorado e Mestrado em Geofísica. Licenciado em Matemática, Engenheiro Civil, Professor Pesquisador da Universidade do Estado do Pará-UEPA. Docente do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino da Matemática e Tecnologias-GPEMT.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n, Telégrafo
66113 – 200 – Belém – PA
www.uepa.br