Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

João Nazareno Pantoja Corrêa
Ducival Carvalho Pereira
Pedro Franco de Sá

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLIEDROS

Belém
2020

João Nazareno Pantoja Corrêa
Ducival Carvalho Pereira
Pedro Franco de Sá

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLIEDROS

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Belém
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Ducival Carvalho Pereira
Pedro Franco de Sá
João Cláudio Brandemberg Quaresma

CORRÊA, João Nazareno Pantoja, PEREIRA, Ducival Carvalho e SÁ, Pedro Franco de. UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLIEDROS. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino Matemática; Ensino por atividades; Ensino de Poliedros.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO 4
2. OS POLIEDROS NO CURRÍCULO 6
3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE POLIEDROS 10
4. ASPECTOS HISTÓRICOS DOS POLIEDROS 13
4.1. Os Estudos dos Poliedros na Pré-História e Antiguidade 13
4.2. Os Estudos dos Poliedros na Antiguidade e seus contribuidores 16
4.3. Os Estudos dos Poliedros no Renascimento 22
4.4. Os Estudos dos Poliedros na Idade Moderna 25
4.5. Os Estudos dos Poliedros na Idade Contemporânea 30
5. ASPECTOS MATEMÁTICOS 43
5.1. Definição de Poliedros 435
5.2. Poliedros Convexos e Não Convexos 457
5.3. Relações Iniciais 468
5.4. Relação de Euler 479
5.5. Poliedros Regulares, Semirregulares e Irregulares 524
5.6. Poliedros de Platão 568
5.7. Poliedros Arquimedianos 591
5.8. Poliedros Duais 679
5.9. Planificação de Poliedros 70
6. O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE 702
6.1. Momentos do Ensino por Atividade 723
6.2. Considerações do uso do Ensino por Atividade 768
7. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE POLIEDROS 778
7.1. Kit de Sólidos Geométricos 80
7.2. Atividade 01 80
7.3. Atividade 02 846
7.4. Atividade 03 90
7.5. Atividade 04 924
7.6. Atividade 05 1013
7.7. Atividade 06 1046
7.8. Atividade 07 1089
7.9. Atividade 08 1134
7.10. Atividade 09 1189
7.11. Atividade 10 1234
7.12. Atividade 11 1278
8. SUGESTÕES DE LEITURA 1311
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS 1322
10. REFERÊNCIAS 1333
ANEXOS 1411
APÊNDICES 1677

1. APRESENTAÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem de matemática tem sido discutido ao longo do tempo, bem como as habilidades que devem ser essenciais para formação educacional discente de maneira efetiva, e consequentemente as metodologias que devem ser utilizadas neste processo pelos parâmetros destacados no currículo, tendo em vista as dificuldades que estes demonstram no desenvolvimento de alguns conteúdos da disciplina em questão, como mostram os resultados processo avaliativos nacionais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O ENEM, que avalia os conhecimentos dos discentes ao término do ensino médio, servindo hoje como processo seletivo que possibilita o ingresso em Instituições de Ensino Superior (IES) públicas e privadas, demonstrou através do relatório do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (ENEM, 2017), que proficiência geral média dos participantes em matemática e suas tecnologias de 2009 até 2017, chega a pouco mais de 500 pontos, isto é, os participantes chegam apenas a conseguir resolver um pouco além de 50% do que lhes foi proposto no exame relacionado a matemática.

Esse cenário de fraco desempenho em Matemática, e consequentemente em geometria pelos alunos, é resultado, em muitos casos, do uso de práticas que não atendem as expectativas destes, evidenciando o distanciamento na percepção da matemática de professores e alunos do ensino médio, pois o educador em muitos casos idealiza que seus educandos concebem o mesmo prazer e afinidade com a disciplina em questão, porém isso nem sempre ocorre, a esse respeito Vianna afirma que:

> O professor tem imenso prazer com a matemática, delicia-se imaginando seus alunos a brincar com a matemática que ele adora. Entretanto, postos lado a lado com a matemática, qual é a atitude dos alunos? Nada! Não entendem, não perguntam. (VIANNA, 2001, p. 130)

Um outro fator relevante, é o discente não está sendo devidamente preparado para os tipos de avaliações as quais será submetido no futuro, ou seja, a recorrente falha dos instrumentos de avaliação aos quais foi anteriormente submetido, demonstrando a falta de clareza de objetivos de ensino tanto na explicitação quanto no potencial dos tipos de atividades que favoreçam o seu desenvolvimento, para possibilitar uma avaliação qualitativa do desenvolvimento do aluno, como comenta Gitirana (2012, p.3):

> A clareza dos objetivos de ensino auxilia o trabalho de planejar-avaliar-replanejar da atividade docente, conduzindo o professor a uma maior compreensão do desenvolvimento das aprendizagens do aluno e da sua própria intervenção pedagógica. Tal procedimento intenciona mapear a relação entre o ensino e as aprendizagens para um ajustamento do planejado, dos objetivos pretendidos, da intervenção docente em função das necessidades de aprendizagens dos educandos.

O processo de ensino e aprendizagem de geometria, não só no ensino médio, mas de modo geral, ou seja, nos vários níveis educacionais, são notórias as dificuldades no entendimento de conceitos estudados e suas respectivas aplicabilidades no dia a dia do educando, demonstrando a carência talvez de metodologias que proporcionem a minimização deste problema, uma vez que a aprendizagem que valoriza a mecanização de exercícios e conjunto de regras que devem ser obrigatórias, ainda é muito utilizada nas metodologias, somado a uma desvalorização, em alguns casos, do ensino de geometria em comparação a outros conteúdos por docentes de matemática na atualidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, citam a geometria como uma parte fundamental do currículo, na obtenção do pensamento espacial da sociedade em que vive, propondo que a geometria proporcione problemas do quotidiano, pois esta é uma excelente ferramenta para materializar conceitos matemáticos (BRASIL, 2006).

Neste sentido, apresentamos a presente sequencia didática para o ensino de poliedros como produto da pesquisa desenvolvida de Corrêa (2019) a qual foi objeto da dissertação do autor.

A dissertação objetivou avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de poliedros por meio de atividades, obtendo através sequência didática uma efetiva a participação e excelente desempenho dos discentes na resolução de questões envolvendo poliedros, além de desenvolver competências e habilidades para resolverem problemas de poliedros.

Dessa forma, com a finalidade de contribuir para uma possível reversão do cenário apresentado de dificuldades e baixos rendimentos educacionais por parte dos discentes, este produto apresenta uma proposta de atividade para o ensino dos conceitos relacionados a poliedros no nível médio utilizando como metodologia o Ensino por Atividades.

2. OS POLIEDROS NO CURRÍCULO

Para tratarmos do ensino da matemática faz-se necessário o entendimento da relevância desta na construção da formação do indivíduo, bem como do significado de ensino e suas implicações. E para versar sobre Poliedros, devemos salientar que este é um conteúdo de Geometria Espacial, de modo que quando o currículo se refere de forma geral a esta parte da geometria também está se referindo aos Poliedros.

A definição de ensino, segundo as ideias de Ponte (2002, p.02), vai muito além de uma simples aplicação de metodologias pré-definidas numa forma unilateral, "trata-se de uma atividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos". E são essas as necessárias constantes nas avaliações e reformulações durante suas práticas docentes, oportunizando os discentes a obtenção de resultados almejados, mas para sua efetivação, existe a necessidade de compreender as dificuldades bem como propor uma maior proximidade com seus educandos.

Os filósofos antigos declaravam que no início da criação Deus geometrizou (LUZ, 2004), e segundo a visão de Lewis (2001), se realizarmos uma pesquisa sobre a origem da lei natural e espiritual, chegaremos à conclusão que a conjuntura do universo, e a individual de cada elemento que o compões condiz com princípios geométricos, demonstra sua ideia quando afirma:

> Deus, assim, é o grande Arquiteto e Matemático; o complexo mapa dos movimentos e desenhos geométricos da ação e existência de todas as coisas apenas começa a ser compreendido pelo ser humano. Talvez nunca cheguemos a conhecer a origem e o plano geral do universo de Deus em seu todo e talvez nunca cheguemos a conhecer o motivo da progressão matemática de todos os acontecimentos (LEWIS, 2001, p. 32)

Numa perspectiva histórica, o ensino de geometria, mesmo com sua imensa importância, nem sempre foi valorizado como deveria, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, no Brasil, com seu auge a partir da década de 60, e com críticas iniciadas na década de 80, por conta do desempenho ruim de alunos em exames nacionais e internacionais, e que possuía como uma de suas características o ensino de geometria com pouca ênfase em todos os níveis de ensino e a valorização exagerada de uma matemática extremamente axiomática.

Dado os maus resultados obtidos no ensino de matemática, foi elaborado no ano de 1989, nos Estados Unidos, as “Normas para o Currículo e Avaliação Escolar” documento do National Council of Teachers of Mathemtics (NCTM), o qual tinha como objetivo o fornecimento de recomendações e orientações para o ensino de Matemática, tornando-se referência curricular no Brasil e em muitos outros países, propondo uma série de mudanças especificamente para o ensino de Geometria (NCTM,1991, apud COSTA, p.162).

O documento explicitou a relevância do ensino da geometria enfatizando à Geometria espacial, trazendo um resgate ao desenvolvimento do “pensamento geométrico”, o qual tinha sido abandonado pelo Movimento Matemática Moderna, e consequentemente a partir da década de 90, o ensino de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico passaram novamente a serem considerados importantes em todos os níveis educacionais.

Segundo Leivas (2009), o pensamento geométrico tem sido um objeto de muitos estudos de educadores em diferentes áreas do conhecimento, existindo desse modo diversas concepções de sua definição, segundo este autor: “É um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos”.

E com Alsina (1999, p. 65, apud COSTA, 2000, p.158), concorda com os apontamentos de Leivas (2009), sobre o ensino de Geometria afirmando:

> Não servem nem os elementos de Euclides, nem os tratados de Bourbaki, nem os livros sábios de geometria métrica, nem os mais sofisticados livros de álgebra linear. O silêncio e o esquecimento menos servem. Fazer geometria na sala de aula não é repetir a história. A geometria no ensino da matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta à interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma da modernização matemática; predicadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (…) esta é a geometria com a qual nós gostaríamos de educar todos.

A geometria pode se fazer presente de várias formas e em diversas situações de nossa vida, podemos observá-la desde a natureza até as construções modernas e da antiguidade, mostrando-se nesse último, presente na vida do ser humano

desde períodos mais remotos, assumindo o papel de um dos ramos mais antigos da matemática.

Ao tomarmos, por exemplo, os egípcios que deixaram como herança documentos com uma quantidade significativa de conhecimentos ligados a geometria, e a construção de pirâmides e outros monumentos que existem até hoje, mostrando a aplicabilidade desses conhecimentos por essa civilização, a qual os registros existentes indicam ter o primeiro contato por contada necessidade de medição da terra, dando por isso o nome geometria, uma palavra de origem grega, onde *geo* significa terra e *metria* significa medida. E sendo desenvolvida por conta das inundações anuais recorrentes do delta do Nilo, onde a terra era mais fértil.

Como já comentado, podemos perceber a geometria espacial não só na antiguidade, mas também em nosso dia a dia, e dessa forma seu estudo deve ser instigado, de modo a ser verificado na prática discente para construção de um processo de ensino-aprendizagem significativo, onde a visualização das formas geométricas, bem como a capacidade de resolução de situações-problemas pelo seu reconhecimento, e ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2006) a Geometria deve proporcionar ao aluno a leitura e a interpretação do espaço.

A geometria é uma excelente ferramenta para materializar conceitos matemáticos, pois considera o espaço em volta do educando, podendo desse modo formalizar matematicamente a realidade contribuindo com a construção de capacidades e habilidades intelectuais, como destacam Costa, Bermejo e Moraes:

> O estudo da Geometria Espacial é de suma importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas (COSTA, BERMEJO E MORAES, 2009, p.1).

As dificuldades existentes na construção de novos conceitos em Matemática por alunos principalmente quando estes necessitam de conceitos elementares da Geometria Espacial tem sido objeto de estudos de diversas pesquisas (BRANCO, 2011; VILADETI, 2009; VIANA, 2005), e assim entendemos que o ensino deve ser seguido de metodologias que busquem minimizar essas dificuldades.

Como comentado anteriormente o Movimento da Matemática Moderna, o ensino de Matemática começou a dar ênfase ao simbolismo e estabelecer um grau mais elevado de abstrações, o que distanciou esta disciplina do cotidiano, levando o

discente formado por esse currículo a um baixo nível de conhecimento de Geometria Espacial e pouca percepção da relação dos conteúdos desta com a realidade que o rodeava.

Para Fucks (1970) a Matemática Moderna praticamente eliminou a geometria dos currículos escolares, dando ênfase aos símbolos e terminologias matemáticas excessivamente, e como consequência ocorreu uma defasagem na aprendizagem desse conteúdo, o que nos leva a refletir na forma como os docentes trabalhavam, bem como quais os erros que os discentes cometiam com maior frequência.

Ao buscar ensinar a geometria, na atualidade somos levados a analisar e repensar o currículo e os fins do ensino da matemática, uma vez que este é de extrema relevância, por se tratar de uma ciência que influenciou e influencia significativamente toda a sociedade em que vivemos.

Para Rico (1997) as finalidades da educação matemática são cruciais para o desenvolvimento do currículo desta disciplina no sistema educacional. Percebemos isso, ao definirmos currículo como o que uma determinada sociedade avalia primordial para ser aprendido por alunos no decorrer de sua escolaridade. A relevância da geometria foi reconhecida e destacada nos parâmetros curriculares nacionais, como segue:

> A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento espacial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas ideias as principais norteadoras da presente abordagem. (BRASIL, p. 57, 1998)

A intenção do currículo é trazer propostas no que diz respeito a maneira de entender o conhecimento, interpretar a aprendizagem, colocar em prática o ensino e valorizar a utilidade do domínio dos aprendizados realizados, essas propostas levam ao estabelecimento de dimensões culturais, formativas ou cognitivas, políticas e sociais, as quais são primordiais em se tratando de currículo e sua reflexão de organização, mesmo essas não apontando seu conteúdo de forma explicita, a partir delas chegamos a uma possível estruturação dos fins da educação matemática (RICO, 1997).

No que diz respeito a geometria, nosso objeto de estudo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) valorizam com veemência a participação do aluno na percepção da Matemática no que se refere a leitura e interpretação do espaço como subárea ligada às aplicações, com cunho não somente formativo e instrumental,

mas também na ótica de ciência possuindo estruturas específicas. Segundo as Orientações Curriculares para o ensino médio (2006):

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p.75)

As metodologias indicadas pelos PCN para o ensino-aprendizagem de geometria, bem como aos outros conteúdos, estão ligadas ao aprendizado ativo e interativo, onde mencionam a inserção de atividades lúdicas, onde os discentes sintam-se instigados pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes, propondo que o discente tenha um aprendizado ativo, onde seja protagonista do processo educacional e não pacientes deste.

Os PCN (BRASIL, 2006), afirmam ainda, que devem ser utilizados também situações problemas do cotidiano nos quais os alunos sejam confrontados como estratégia de ensino, uma vez que estes já possuam condições educacionais necessárias para chegarem a suas respectivas soluções, dando a oportunidade do discente da realização da experimentação que conduza a descoberta, a esse respeito Fonseca afirma que:

> É possível e desejável, todavia, que o argumento da utilização da Geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar permita e desencadeie o reconhecimento de que sua importância ultrapasse esse seu uso imediato para ligar-se a aspectos mais formativos. (FONSECA, 2005, p. 93).

Segundo os PCN (BRASIL, 2006), um dos fatores que influenciam a educação é a região, e sendo assim cabe considerar variáveis regionais na elaboração de propostas educacionais, sendo elas oficiais ou não, buscando a readequação de determinado conteúdo, verificando o mérito da proposta em questão, condicionada as reações dos discentes, isto é, trata os conteúdos de forma genérica os incentivando a regionalização e contextualização.

O recurso da contextualização objetiva criar relações entre o conteúdo que está sendo proposto e a realidade histórico-cultural tendo por base conhecimentos relevantes aos discentes (ciência, cultura, arte, leitura e filosofia), existindo um senso comum entre os docentes de matemática que afirma a grande necessidade

do emprego destes para busca de aprendizado significativo por parte do aluno como afirma Fonseca:

> (...)Torna-se cada vez mais evidente a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido ou construído, não apenas inserindo-o numa situação problema, ou numa abordagem dita “concreta”, mas buscando suas origens, acompanhando sua evolução, explicitando sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade para a qual o aluno se depara e/ou de suas formas de vê-la e participar dela. (FONSECA, 2005, p. 55).

O emprego da regionalização no currículo é reforçado, também no artigo 26 da LDB 9394/1996, quando é empregada a expressão “base nacional comum curricular” que deve ser complementada por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.

Em um trabalho envolvendo a geometria idealizado por docentes da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), segundo Fonseca et al. (2002, p. 91), foi verificado que muitos professores em exercício, não relacionam questões práticas durante estar lecionando o referido conteúdo, a respeito disso as autoras comentam que:

> A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino.

Desse modo, podemos perceber a grande relevância para o desenvolvimento cognitivo efetivo humano da geometria, uma vez que permite a abstração imprescindível para construção lógica e espacial de propriedades que levam a solução de situações-problemas do cotidiano do discente e que apesar de todas as orientações curriculares, muitos educadores durante o ensino de geometria não se preocupam em trabalhar esses conteúdos seguindo tais orientações.

Todo este cenário pode levar o discente a dificuldades na compreensão de conceitos de geometria, tendo em vista que estes não podem ser vistos apenas como um conjunto de regras que os discentes deverão apenas memorizar, levando a aplicação sem a compreensão significativa no processo de aprendizagem, ocasionando os baixos rendimentos educacionais comprovados em processos avaliativos nacionais.

3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE POLIEDROS

Neste tópico abordaremos as principais pesquisas existentes relacionadas aos Poliedros, procurando identificar quais seus resultados e o que estes concluíram, com objetivo de apresentar um panorama das pesquisas existentes relacionadas a este objeto de estudo, isto é, apresentar uma revisão de estudo sobre o ensino de poliedros, de modo a verificar os caminhos que já foram cursados, seus resultados e respectivas conclusões.

Para realização desta revisão de estudo, buscamos pesquisas envolvendo nosso objeto “Poliedros” como palavra-chave nos repositórios de diversas instituições de ensino superior brasileiras, incluindo o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Plataforma Sucupira, também ligada a CAPES, e do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), bem como na biblioteca eletrônica SciELO (*Scientific Electronic Library Online*) e na versão de busca de trabalhos acadêmicos da Google o “Google Acadêmico”, dentre outros.

Durante a busca das pesquisas percebemos que os estudos existentes condizentes com nosso objeto de estudo, estão presentes no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e na Plataforma Sucupira, de modo a estarem presentes no repositório de dissertações destes, fazendo consequentemente com que seus respectivos repositórios acabassem sendo a fonte principal desta revisão.

Para realização desta revisão foram encontrados um total de 30 (trinta) trabalhos relacionados ao ensino de poliedros, destes foram excluídos 18 (dezoito) pesquisas, por terem problemas de ordem metodológica, não sendo possível determinar com clareza a metodologia utilizada por estas.

Desse modo, selecionamos somente 12 (doze) dissertações, as quais foram categorizadas de acordo com suas respectivas características, em três categorias: Estudos Diagnósticos, Estudos Teóricos e Estudos Experimentais.

Os estudos diagnósticos trazem resultados de verificação de dificuldades dos discentes no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de poliedros no sentido de verificar fenômenos didáticos ligados, bem como suas possíveis causas e condições, já os estudos teóricos apresentam um processo investigativo de trabalhos que propõem conceitos e novas ideias, os quais tiveram resultados satisfatórios na contribuição com o ensino de poliedros e por fim os estudos

experimentais propõem e realizam atividades para o ensino de poliedros a partir de resultados de experiências didáticas em sala de aula. A divisão das pesquisas em três categorias pode atuar como uma espécie de facilitador no processo de entendimento do cenário das pesquisas existentes sobre o ensino de poliedros.

Em síntese, a metodologia aplicada obedeceu a cinco etapas: busca, seleção, análise, categorização e por fim a apresentação dos resultados obtidos pelas pesquisas encontradas referentes ao ensino de matemática envolvendo poliedros.

A seguir veremos as pesquisas existentes que foram selecionadas em nossa revisão de estudo, a qual possibilitou a construção de um quadro onde as informações foram agrupadas de acordo com suas características nas categorias mencionadas anteriormente, de modo a buscar favorecer uma melhor visão do cenário do ensino de poliedros.

Quadro 01 - Estudos sobre ensino de Poliedros

Tipo de estudo	Autor(es)	Ano	Natureza e Título do trabalho	Instituição / Evento
Estudos Diagnósticos	Teixeira Filho	2002	Dissertação / O aprendizado da geometria no ensino médio: origens de dificuldades e propostas alternativas	UFSC
	Proença	2008	Dissertação / Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio	UNESP/ PROFMAT
Estudos Teóricos	Carvalho	2013	Dissertação / Uma Aplicação no Ensino dos Poliedros e Corpos Redondos para turmas do 3º ano do Ensino Médio usando Dobraduras e Softwares Livres	UFTO/ PROFMAT
	Silva	2014	Dissertação / Um Estudo Complementar dos Poliedros voltado para Professores e Alunos do Ensino Básico	UECE/ PROFMAT
	Nascimento	2014	Dissertação / Poliedros regulares no Ensino Médio	UFPB/ PROFMAT
	Gonçalves	2014	Dissertação / Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial	UFABC/ PROFMAT
	Brasil	2017	Dissertação / Explorando o software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial	UESC/ PROFMAT
Estudos Experimentais	Bicalho	2013	Dissertação / Um estudo sobre poliedros e Atividades para o ensino de matemática: Geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica	UFV/ PROFMAT
	Parreira	2014	Dissertação / Poliedros e o Teorema de Euler	UFG/ PROFMAT

	Santos	2014	Dissertação / Poliedros De Platão: Uma abordagem segundo o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico	UFOPA/ PROFMAT
	Nogueira	2014	Dissertação / Uma Experiência no Ensino de Geometria Espacial no terceiro ano do Ensino Médio	UFRRJ/ PROFMAT
	Araújo	2017	Dissertação / A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos	UFMT/ PROFMAT

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2017.

Ao analisarmos as pesquisas percebemos que todas categorias, isto é, os estudos diagnósticos, teóricos e experimentais convergem em suas conclusões que uma diminuição significativa das dificuldades no ensino de poliedros pode ser alcançada através da utilização de novas metodologias que enfatizem o uso de materiais manipuláveis e softwares de maneira dinâmica e interativa.

Os estudos também mostraram que as dificuldades podem estar ligadas a falta de ênfase dos livros didáticos utilizados no conteúdo de poliedros, tendo em vista que este conteúdo é abordado apenas superficialmente na maioria destes, o que nos faz refletir sobre como o discente pode estar sendo prejudicado por isso ao longo do seu aprendizado.

De modo geral, os estudos mostram a necessidade de o docente de matemática inovar em sua prática, por mais que as metodologias demandem tempo de preparo e execução, os resultados obtidos são mais eficazes do que metodologias tradicionais no ensino de poliedros.

Assim, acreditamos que a produção de livros didáticos com maior ênfase no conteúdo de poliedros pode minimizar as dificuldades do ensino deste, e que estes livros poderiam trazer softwares em mídias e atividades a partir de materiais manipuláveis exemplificados no próprio livro. O impacto de um livro didático com essas características poderia ser verificado através de pesquisas futuras.

Como foi visto, por meio das propostas das pesquisas diante de novas metodologias os discentes tendem a ser mais participativos, a até colaborativos entre si nas atividades propostas, e que nem sempre conseguem entender as características dos sólidos, se estes forem apenas desenhados no quadro principalmente em visualizações em três dimensões.

O desenvolvimento desta revisão de estudo, possibilitou identificar um panorama que o ensino de geometria, mais precisamente o de conteúdo poliedros

tem tomado, chegando a conclusão que seu ensino se torna mais significativo ao discente através de metodologias que utilizam softwares e materiais manipuláveis, ou seja, metodologias que favorecem a visualização e o manuseio, de modo que o discente se sinta inserido de forma mais ativa em seu aprendizado.

4. ASPECTOS HISTÓRICOS DOS POLIEDROS

Neste tópico abordaremos uma síntese do desenvolvimento da construção e estudo dos Poliedros ao longo da história da humanidade retirado da pesquisa de Corrêa (2019), a qual apresenta a versão completa do conteúdo aqui apresentado. Veremos que os Poliedros são conhecidos desde a Pré-história e Antiguidade, até a Idade Contemporânea, e como a formação do conhecimento e a construção dos poliedros sofreram uma evolução ao longo do tempo, contando com ajuda de muitos contribuidores, buscando sempre situar o leitor em que cenário as contribuições ocorreram.

4.1. Os Estudos dos Poliedros na Pré-História e Antiguidade

As circunstâncias as quais levaram ao início do desenvolvimento e construção do estudo de poliedros não são possíveis de serem conhecidas, mesmo sendo estes definidos simplesmente neste momento, apenas como sólidos de várias faces, pois existiram vários povos do período neolítico e da antiguidade, que desde períodos mais remotos, segundo fontes bibliográficas consultadas, conheciam alguns poliedros, como os etruscos, egípcios, chineses e babilônios, entre outros, fato comprovado com os registros de objetos, gravuras e esculturas na forma de poliedros por esses povos.

De acordo com Hart (1998) e Critchlow (1970), os registros mais antigos de poliedros são encontrados na pré-história, e pertencem aos povos neolíticos da Escócia, os quais construíram em forma de esfera modelos com caras talhadas formando poliedros regulares em pedra, com função desconhecida, que datam de cerca de 2000 a.C.

Figura 01 - Esferas neolíticas semelhantes aos sólidos platónicos

Fonte: Ashmolean Museum de Oxford, 2018.

O estudo dos Poliedros, bem como de geometria espacial também foram de interesse dos povos da Mesopotâmia (babilônicos, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios), região localizada entre os rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, onde atualmente está situado o Iraque. É importante destacar que as civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas de “babilônicas” de modo geral, mesmo esta denominação não estando inteiramente correta por conta da existência de outros povos, foi convencionada essa denominação aos habitantes dessa região no período de aproximadamente 2000 até 600 a.C. (BOYER, 2010).

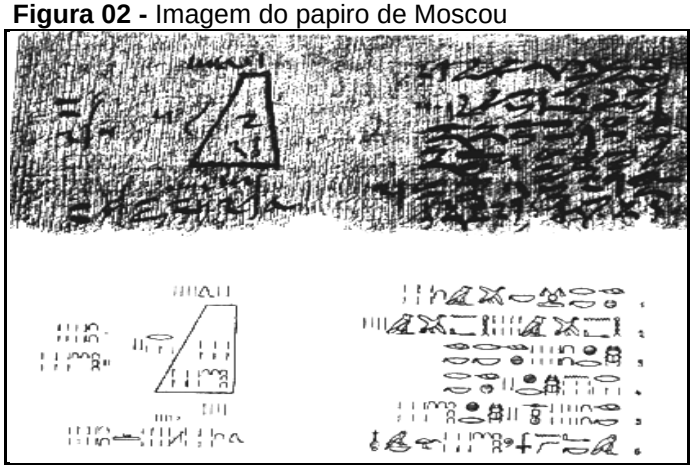
Segundo Lawlor (1993), a obra de Gordon Plummer “*The Mathematics of the Cosmic Mind*” afirma que os hindus também conheciam os poliedros icosaedro e o dodecaedro e os associam a sua mitologia. E muitos historiadores, como Eves (2004) e Kline (1992), admitem que as civilizações egípcias e babilônicas já conheciam o cubo, tetraedro e octaedro, e que foi a partir das jornadas de Tales e Pitágoras que o conhecimento desses poliedros pode ter chegado a Grécia.

Dentre os registros mais antigos de poliedros destacam-se os encontrados em papiros, sendo considerados os principais o “papiro de Moscou” e o “papiro de Rhind” que pertencem aos povos egípcios, onde dos 110 dos problemas existentes nesses papiros 26 são geométricos (EVES, 2004).

O papiro de Moscou escrito em hierático (escrita sacerdotal) por um escriba desconhecido a aproximadamente 1850 a.C., com dimensões que de aproximadamente 8 centímetros de largura por 5 metros de comprimento, apresenta 25 problemas, dentre eles o do cálculo do volume de um tronco de uma pirâmide de

base quadrada, juntamente com o registro em transcrição hieroglífica (BOYER, 2010).

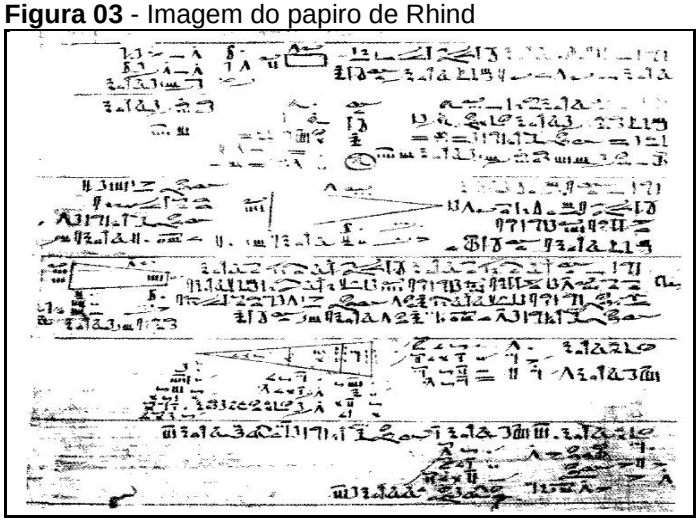
Figura 02 - Imagem do papiro de Moscou



Fonte: Boyer, 2010.

O papiro de Rhind, é o mais extenso papiro sobre matemática existente, com aproximadamente 0,30 metros de altura e 5 metros de comprimento, e possui esse nome por ter sido comprado em 1858 por um antiquário de nome Henry Rhind, porém este mesmo papiro também é chamado de Papiro de Ahmes, nome do escriba que por volta de 1650 a. C. o teria copiado. Neste papiro existem problemas que são relacionados as faces de uma pirâmide e o seus respectivo declive, os quais segundo Kartz (2010) eram essenciais para construção das pirâmides, como observado nos valores concretos obtidos nestes problemas que se aproximam aos valores dos declives das pirâmides de Gizé.

Figura 03 - Imagem do papiro de Rhind



Fonte: Eves, 2004.

Segundo Boyer (2010), os estudiosos babilônicos e egípcios continuaram seus estudos os registrando em papiros e cuneiforme (tipos de escrita feitas com

auxílio de objetos na forma de cunha), enquanto a liderança intelectual deixava de ser construída nos vales do rio Nilo, Tigre e Eufrates, passando para beira do Mediterrâneo, onde a civilização grega assumia a hegemonia do conhecimento e cultura, não apenas no mediterrâneo, mas também nos principais vales fluviais da época, entrando em contato outros povos realizando trocas de conhecimentos.

4.2. Os Estudos dos Poliedros na Antiguidade e seus contribuidores

Os etruscos antecederam os gregos no conhecimento de alguns poliedros regulares, fato comprovado ao ser descoberto um dodecaedro etrusco (500 a.C.) em escavações arqueológicas nas proximidades de Pádua na Itália, o qual era utilizado em jogos, os egípcios também usavam dados poliédricos para jogos, porém na forma de icosaedro. Etruscos era como se chamavam os habitantes da Etrúria, antiga província italiana, hoje atual Toscana.

Figura 04 - Dodecaedro etrusco de 500 a. C.

Fonte: Landes-Museum. Mainz, Alemanha.

Os poliedros tiveram uma influência considerável na antiguidade grega, possivelmente, como já comentamos, o conhecimento destes bem como outros de geometria chegaram a Grécia através das viagens de Tales de Mileto, nascido na colônia grega de Mileto situada na Jônia, que conhecemos hoje como Turquia, com nascimento e morte datados de por volta de 624 a 548 a.C. aproximadamente. As obras de Tales certamente influenciaram Pitágoras, de quem falaremos a seguir.

Pitágoras nasceu na ilha Jônica de Samos, situada não muito longe de Mileto, onde nasceu Tales, e estima-se que tenha vivido por volta de 586 a.C. a 500 a.C., e mesmo existindo alguns relatos de que tenha sido discípulo de Tales, acredita-se ser pouco provável tendo em vista a diferença de idade entre estes, porém uma das explicações para existirem áreas de interesses comuns entre seus estudos, como os

poliedros, dá-se ao fato de que Pitágoras também viajou para o Egito, Babilônia, indo possivelmente até a Índia, e nestas viagens absorveu informações matemáticas, bem como outros conhecimentos e ideias religiosas (BOYER, 2010, p. 33).

Depois de suas viagens, Pitágoras voltou a Grécia, estabelecendo-se em Crotona, localizada na Magna Grécia, que hoje conhecemos como costa sudeste da Itália, lá ele fundou, por volta de 540 a. C., uma sociedade secreta que ficou conhecida como Pitagóricos, onde o conhecimento e a propriedade eram comuns, de modo que todas as descobertas não eram atribuídos a um membro específico, porém geralmente na antiguidade esses créditos eram atribuídos ao mestre. (BOYER, 2010, p. 33).

Segundo Boyer (2010), os pitagóricos já tinham conhecimento de alguns poliedros regulares, como o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, a Pitágoras é atribuída a invenção do dodecaedro, sólido venerado pelos pitagóricos. A matemática era dividida pelos pitagóricos em quatro áreas: Geometria, Aritmética, Astronomia e Música. É importante ressaltar que, a matemática em nenhum outro momento teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos, e muitos dos conhecimentos dos pitagóricos certamente influenciaram Platão.

O filósofo e matemático grego Platão, é um importante nome na história dos poliedros, sendo considerado o centro do desenvolvimento de matemática de sua época, viveu por volta de 427 a 347 a. C., e fundou em Atenas sua Academia, na qual muitos historiadores, como Katz (2010), Boyer (2010) e Eves (2004), afirmam estar escrito sobre as portas, algo com a tradução: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”, o que demonstra a exaltação do papel da geometria na construção da espiritualidade humana.

Segundo Boyer (2010), a visão matemática de Platão não foi herança de seu mestre Sócrates, mas sim foram encaminhadas possivelmente por seu amigo Arquitas, a quem visitou na Sicília em 388 a.C., e talvez tenha sido neste momento que Platão tenha tomado conhecimento dos sólidos regulares, e sua associação aos quatro elementos da teoria de Empédocles, muito bem descritos na obra “O Sonho de Mendeleiev” (STRATHERN, 1940, p. 18), uma estrutura cósmica que fascinou os homens durante séculos.

Platão associou os elementos água, terra, fogo e ar respectivamente, ao icosaedro, cubo, tetraedro e octaedro, acreditando que “as propriedades físicas da

matéria eram consequência das propriedades geométricas de suas partículas constituintes" (TOMEI, 2003, p. 79). Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro, foi o que levou Platão a considerá-lo o quinto elemento que estava faltando simbolizando o cosmos, ou seja, o universo (BOYER, 2010).

Todas as ideias de Platão sobre os cinco poliedros regulares, foram colocadas em sua obra intitulada "Timeus", onde usa estes sólidos para explicar fenômenos científicos, e por esse motivo estes poliedros ficaram conhecidos como "Corpos Cósmicos" ou "Sólidos de Platão", e posteriormente como Poliedros de Platão.

A obra de Platão é considerada a mais antiga evidência da associação dos poliedros regulares com os quatro elementos, porém acredita-se que muitas dessas ideias fantasiosas devem-se aos pitagóricos e foram apenas absorvidas por este, como já mencionamos. E existem relatos que o amigo de Platão de nome Teeteto, foi o primeiro a escrever sobre os cinco poliedros regulares, e que foi ele quem primeiro tratou do octaedro e o icosaedro, lembrando que os pitagóricos já conheciam o cubo, o tetraedro e o dodecaedro (EVES, 2004).

Teeteto de Atenas é considerado um dos matemáticos mais importantes da época de Platão, estima-se que tenha vivido por volta de 417 a 369 a. C., tendo ensinando na Academia de Platão. Segundo Heath (1921), Teeteto realizou um estudo teórico sobre as relações dos cinco poliedros regulares, enfatizando o octaedro e o icosaedro. Existe grande possibilidade de que este matemático também seja responsável pelos cálculos encontrados na obra Elementos de Euclides de Alexandria, o qual falaremos em seguida, que tratam sobre os cinco poliedros regulares.

Os Estados Gregos caem, e a Grécia torna-se parte do Império Macedônio do rei Felipe, em 338 a. C., com a derrota de Atenas em Queronéia, e dois anos depois, após a morte deste rei, assume seu filho, Alexandre, "o Grande", que se tornou um grande conquistador, agregando aos domínios macedônios, já bastante vastos, grandes extensões territoriais do mundo civilizado desta época, fundando Alexandria em 332 a. C. no Egito, por conta de sua localização privilegiada.

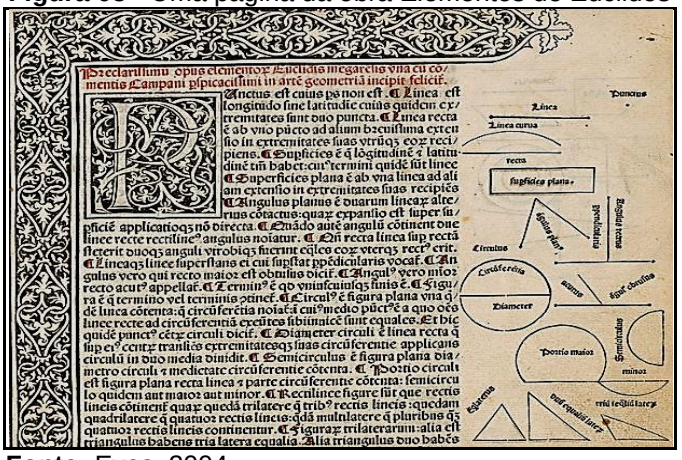
Após a morte de Alexandre, o Egito foi a parte do Império que ficou com Ptolomeu, que com o objetivo de atrair as melhores mentes desta época, para Alexandria a qual tornou sua capital, construiu a Universidade de Alexandria, que por volta de 300 a. C. abriria suas portas com uma vasta biblioteca, chegando a

possuir mais de 600.000 rolos de papiros, e desse modo Alexandria se tornou a metrópole intelectual grega por quase um milênio (EVES, 2004, p. 166-167).

Neste cenário falaremos de Euclides, que foi escolhido para ser responsável pelo departamento de matemática da Universidade de Alexandria, tendo em vista a demanda de atividades desta universidade, a qual necessitava da composição de um grupo de grandes intelectuais nas mais diversas áreas.

A respeito do nascimento e origem de Euclides, nada se sabe, porém sobre sua formação em matemática, possivelmente foi concebida na Academia de Platão em Atenas, recebeu o nome de Euclides de Alexandria por ser o fundador da escola de matemática na até então capital do Egito. Euclides foi autor de vários trabalhos, nas mais variadas áreas como óptica, astronomia, música e mecânica, entre outras, mas sua obra-prima são os Elementos, trabalho que exerceu grandiosa influência no pensamento científico desde aqueles que o sucederam, até os tempos modernos.

Figura 05 - Uma página da obra Elementos de Euclides



Fonte: Eves, 2004.

Ao falarmos dos Elementos de Euclides não podemos deixar de salientar que o conteúdo desta obra é resultado da junção de todo o conhecimento que foi acumulado ao longo de milhares de anos por vários povos, como da Mesopotâmia e Egito, conhecimentos que foram assimilados, e posteriormente aperfeiçoados pelos gregos, de modo que esta obra possivelmente, em sua boa parte, seja uma compilação e sistematização feita por Euclides de trabalhos que o antecederam.

O imensurável mérito de Euclides de Alexandria está em seguir fielmente os princípios do método científico na seleção de proposições, bem como no arranjo em uma sequência lógica derivadas de algumas suposições e muitas demonstrações e provas que constituem sua obra Elementos.

Os Elementos de Euclides são formados por treze livros ou capítulos, dos quais os três últimos (Livros XI, XII e XIII) falam sobre a geometria no espaço, tratando dos poliedros, principalmente o último. No Livro XIII os sólidos platônicos são estudados de forma sistemática, pois este é inteiramente dedicado aos poliedros regulares, e muitos dos cálculos deste livro, como já mencionado, são atribuídos a Teeteto (BOYER, 2010, p. 81).

No Livro XIII, existem dezoito proposições sobre as propriedades dos sólidos regulares, as quais são todas demonstradas, sendo a proposição dezoito, que é a última deste livro, bem como do conjunto dos Elementos, onde Euclides afirma não existirem outros poliedros regulares além dos cinco demonstrados no final de sua obra, ou seja, finaliza enfatizando a singularidade dos poliedros platônicos.

Segundo Boyer (2010, p. 81), esse fato levou muitos historiadores a dizerem que o objetivo dos Elementos seria comprovar a existência de somente cinco poliedros regulares, sendo esta uma atribuição gratuita, uma vez que grande parte do restante da obra não teria relação com poliedros regulares.

Nesse sentido, Eves (2004, p. 175) por sua vez, comenta que frequentemente é exposto que os Elementos tinham o objetivo da exaltação dos cinco poliedros regulares, porém acredita que afirmar que os livros anteriores ao último foram meramente um prolongamento para discussão sobre estes poliedros é uma avaliação equivocada, acreditando que a finalidade da obra seria a introdução de matemática geral.

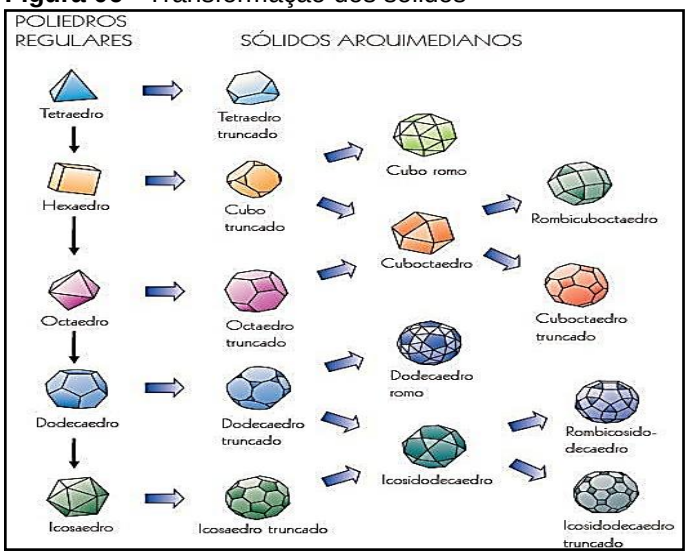
A cidade de Alexandria desfrutou de paz por longos anos, aproximadamente 300 anos, sofrendo uma curta interrupção no período em que o Império Romano anexou o Egito em seu domínio, e seguiu-se a paz novamente. Esse império dominou todo o final da antiguidade, em 212 a. C. Neste período, a cidade de Siracusa foi conquistada, bem como todas as cidades gregas, tornando assim a Grécia uma província romana.

Na cidade de Siracusa, viveu Arquimedes, considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, tendo vivido por volta de 287 a. C. até 212 a. C., foi morto durante a ocupação romana de sua cidade. Segundo Eves (2004) existem registros que apontam a passagem de Arquimedes no Egito, possivelmente na Universidade de Alexandria, onde encontrou com seus amigos Cônon e Dositeo sucessores de Euclides, e também Eratóstenes, que era bibliotecário da

universidade, lá certamente tomou conhecimento mais aprofundando da obra Elementos.

Arquimedes realizou muitos estudos, dentre eles estudou os poliedros, neste estudo obteve uma família mais ampla de sólidos mantendo a definição de poliedros regulares com a condição de possuir faces com polígonos regulares, mas não sendo congruentes, de modo que enquanto as faces nos poliedros platônicos eram de uma só forma, isto é, um tipo, os descobertos poderiam ser de vários, estes sólidos foram denominados arquimedianos ou semirregulares.

Figura 06 - Transformação dos sólidos



Fonte: Hart, 1998.

Os sólidos arquimedianos chegam a um total de treze, e são obtidos a partir dos sólidos platônicos através de uma sucessão de cortes, também chamados truncaturas. Infelizmente os livros de Arquimedes que tratavam sobre estes sólidos estão perdidos, sendo Johanes Kepler (1571-1630), como veremos posteriormente, o responsável pelo resgate ao estudo destes sólidos em sua obra "*Harmonices Mundi*" de 1619, onde fez as nomenclaturas e ilustrações destes respectivos sólidos.

Ao longo do tempo a estrutura econômica romana entrou em colapso com declínio do mercado de escravos e uma ciência sem incentivos, resumida a um plano insignificante, e assim a escola de Alexandria foi entrando em declínio juntamente com a sociedade antiga, em meio as disputas entre cristãos e pagãos, até que a cidade de Alexandria foi tomada pelos árabes em 641 d. C. (EVES, 2004, p. 191).

A queda do Império Romano do Ocidente marca o final da Antiguidade e o início da Idade Média, período no qual o estudo dos poliedros não foi desenvolvido,

isto é, foram mais de mil anos sem interesse por esse assunto, bem como muitos outros relacionados ao desenvolvimento do conhecimento e das ciências.

4.3. Os Estudos dos Poliedros no Renascimento

Por volta do século XV, a sociedade existente na Península Itálica estava passando por mudanças consideráveis, sua posição geográfica favorecia o comércio, bem como uma interação com diferentes pensamentos e conhecimentos. O Renascimento foi um período no qual houve uma grande valorização nas formas diferentes de pensamento, e muitos pensadores foram trazidos para esta Península através da influência de personagens importantes em relação a sociedade bizantina da época.

Esses pensadores certamente trouxeram consigo diversidade de ideias, bem como realizaram a tradução de obras de autores importantes da antiguidade como de Sócrates, Pitágoras, Platão, Euclides, e escritos de seus discípulos e sucessores nos estudos, muitas vezes já escritos por tradutores árabes. Nas obras encontraram contribuições significativas para a mudança na forma de pensar, e também muita da extraordinária matemática grega.

O contato com os Poliedros deve ter ocorrido através de obras de Platão e Euclides, entre outras, por intermédio dos textos originais ou traduções que chegaram ao conhecimento dos eruditos dessa época. Desse modo, o conhecimento dos poliedros regulares, suas propriedades, características e todo o misticismo da antiguidade que girava em torno destes, com toda certeza foram assuntos estudados profundamente no Renascimento.

A representação e estudo dos poliedros foram objeto de estudo de vários artistas e matemáticos, como Paolo Uccello, Piero della Francesca, Luca Pacioli e Albrecht Dürer, ente outros. O interesse destes artistas se justifica pelo apreço naquele período dos estudos de autores gregos, principalmente a obra de Euclides, os Elementos, bem como o desafio da perspectiva das representações dos poliedros. A seguir de forma sintetizada falaremos dos respectivos artistas mencionados e suas obras envolvendo poliedros.

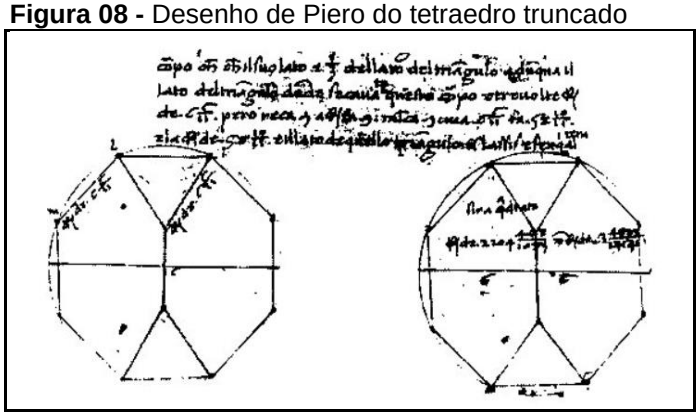
Paolo Ucello foi um matemático e pintor italiano que nasceu em 1397 e faleceu em 1475. E entre 1420 e 1425, desenhou os mosaicos na Catedral de São Marcos, em Veneza, com um poliedro estrelado como motivo principal, como podemos ver abaixo:

Figura 07 - Mosaico da Catedral de São Marcos

Fonte: Hart, 2018.

Piero della Francesca, nasceu por volta de 1416, em Borgo Santo Sepolcro, em uma província de Arezzo no norte da região da Península Itálica, falecendo nesta mesma cidade em 1492, é considerado um dos mais famosos pintores da renascença, por volta de 1480, foi autor de um tratado sobre os cinco sólidos regulares, denominado "*Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*", neste tratado os sólidos platônicos são estudados profundamente. De modo que, Pierro se torna o primeiro artista no qual as explorações geométricas envolvem o redescobrimento gradual dos sólidos arquimedianos.

Figura 08 - Desenho de Piero do tetraedro truncado



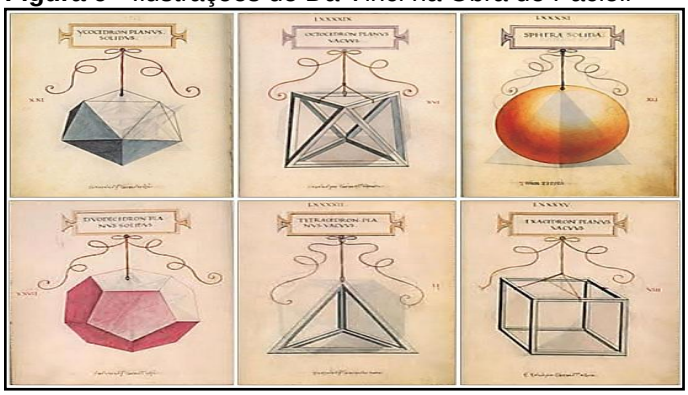
Fonte: Hart, 1998.

Luca Pacioli, foi frade franciscano que viveu por volta de 1445 até 1517, incorporou partes do tratado de Piero em seu sumário de matemática denominado "*Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalita*", escrito em Veneza no ano de 1494. Pacioli em 1509, escreve em Florença um livro chamado "*De Divina proportione*" no qual aparecem poliedros arquimedianos desenhados de autoria de Leonardo da Vinci.

Leonardo Da Vinci viveu por volta de 1452 até 1519, é considerada uma das maiores referências do Renascimento, obteve excelência em tudo o que fez, foi

artista, matemático, cientista e engenheiro. Ele dedicou muito de seu tempo a geometria, mais precisamente a figuras geométricas, onde sua obra com maior referência é o “*Poliédrico*”, as ilustrações feitas para Luca Pacioli, as quais já mencionamos.

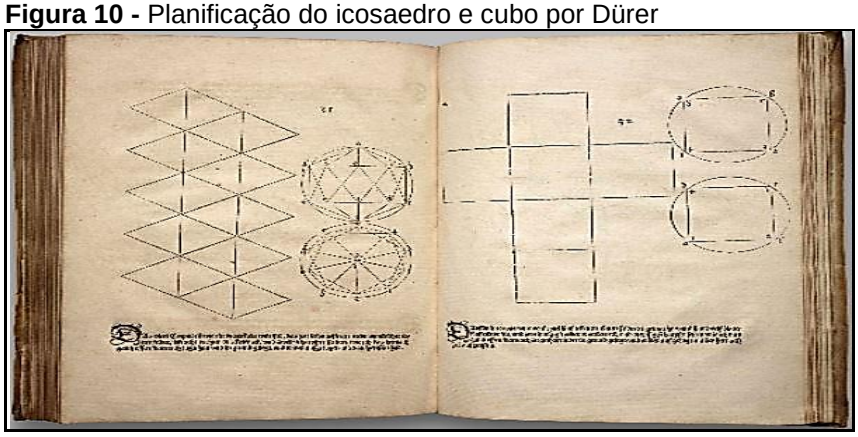
Figura 9 - Ilustrações de Da Vinci na Obra de Pacioli



Fonte: Giannini, 2015.

Albrecht Dürer, nasceu em 1471 e faleceu em 1528, em Nuremberg na Alemanha, foi um grande gravador, pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte alemão que escreveu o tratado “*Underveissung der messung*” em quatro volumes, onde é apresentada no Livro IV, possivelmente pela primeira vez, a ideia de construção de um sólido a partir da planificação. Neste livro são encontradas planificações de diversos poliedros regulares e semi-regulares, seus trabalhos sofreram a influência de Piero della Francesca e de Leonardo da Vinci.

Figura 10 - Planificação do icosaedro e cubo por Dürer



Fonte: Dürer, 1538, p.154.

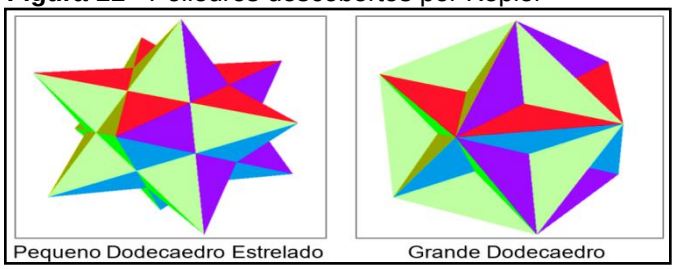
No final deste período, estrelas e poliedros não convexos adquirem grande popularidade e assim levam possivelmente à retomada dos estudos de poliedros na Idade Moderna por Kepler com a ideia de estrelação, ou seja, a ideia de poliedros estrelados.

4.4. Os Estudos dos Poliedros na Idade Moderna

A nova categoria de poliedros que surgiu no Renascimento chama a atenção de Kepler, que inicia o estudo dos poliedros estrelados, como vistos anteriormente na obra de Ucello, que ao observarmos com maior cuidado poderemos perceber que podemos obter a partir de um dodecaedro, se colarmos em todas as suas faces pirâmides pentagonais formadas por triângulos equiláteros, um sólido denominado como pequeno dodecaedro estrelado, o qual veremos em seguida.

Johann Kepler, nasceu próximo da cidade de Stuttgart em 1571, e foi um astrônomo, matemático e numerologista, com trabalhos importantes nessas áreas, criou as três Leis de Kepler, as quais são fundamentais da mecânica celeste. Em relação aos poliedros, provou que além dos prismas e antiprismas, somente podem existir treze poliedros arquimedianos. Em 1619, descobriu o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado, porém não existem referências que indiquem que os associou como regulares juntamente com os platônicos.

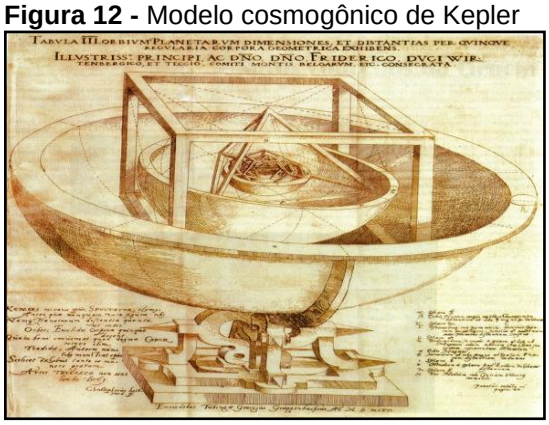
Figura 11 - Poliedros descobertos por Kepler



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Para estudar o movimento dos planetas que eram conhecidos naquele período (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio), recorreu as propriedades dos Poliedros de Platão, alcançando êxito, embora de forma imprecisa, a qual corrigiu posteriormente.

Figura 12 - Modelo cosmogônico de Kepler



Fonte: Hart, 1990.

Kepler intuitivamente formulou uma explicação sobre os Poliedros de Platão e os quatro elementos, baseada nas relações de volume-superfície desses sólidos em comparação com a secura-umidade dos quatro elementos (EVES, 2004, p. 114).

Ao Tetraedro por ter menor volume de superfície o icosaedro tem maior volume de superfície, comparando com qualidades de secura e umidade, logo considerou o mais seco dos quatro elementos o fogo ao tetraedro e água o mais úmido ao icosaedro, quanto ao cubo relacionou com a terra pelo fato de sua estabilidade quando assentado em uma de suas faces.

Em relação ao octaedro, o relacionou com o ar pela instabilidade que representa quando colocamos seus vértices opostos entre os dedos indicador e polegar frouxamente, e o rodopiamos facilmente. E em particular o dodecaedro associou ao Universo, devido suas doze faces correspondentes as seções do zodíaco, ou seja, tentou neste sólido, bem como nos demais, justificar a associação que Platão fez na antiguidade na obra Timeus.

René Descartes, nasceu próximo de Tours na França em 1596, foi um filósofo, físico e matemático francês, com grandes contribuições a filosofia moderna, entre suas principais obras está “O Discurso Sobre o Mérito”, o qual é um tratado matemático e filosófico que publicou na França em 1637. Ao relacionar álgebra e geometria contribuiu para o surgimento da geometria analítica e o sistema de coordenadas que conhecemos hoje como Plano Cartesiano.

Descartes e sua contribuição para o estudo dos poliedros, está diretamente ligada a “odisseia” na qual passou sua obra “*De Solidorum Elementis*”, manuscrito que ficou perdido no rio Sena durante três dias depois do naufrágio de um navio que levava seus pertences depois de seu falecimento, sendo posteriormente encontrada e copiada por Leibnitz em 1676, e depois perdida, sem notícias até os dias atuais.

A cópia da obra de Descartes escrita por Leibntz, também foi perdida e somente foi encontrada após aproximadamente duzentos anos, no ano de 1856 em Hannover, na Alemanha durante recatalogação dos pertences deixados por Leibntz.

Nessa obra, Descartes realiza a introdução de défice angular total dos poliedros regulares, provando que em um poliedro regular esse valor é igual a 4π, impondo assim uma condição para o poliedro ser classificado como regular, demonstrando assim que existem apenas cinco poliedros convexos regulares.

No mesmo manuscrito de “*De Solidorum Elementis*”, Descartes ao estudar a geometria dos poliedros descobre uma fórmula, considerada por muitos, equivalente

a que seria encontrada por Euler quase um século depois, porém não demonstrou tal fórmula, apenas afirmou que se ***P*** é o número total de ângulos planos das faces de um poliedro, então temos:

$$\boldsymbol{P = 2F + 2V - 4}$$

Como P, nas relações feitas por Descartes seria igual a 2A, temos que:

$$\boldsymbol{2A = 2F + 2V - 4}$$

Como veremos posteriormente com mais detalhes, dada a semelhança com a relação descoberta por Euler, muitos denominam essa relação como Descartes-Euler, e essa é apenas uma das muitas discussões que giram em torno da história da relação de Euler que está contida nas notas de rodapé do livro de Lakatos (1976).

Nesta perspectiva, falaremos agora do matemático e físico Leonhard Euler, que nasceu em 1707 na cidade da Basiléia, localizada na Suíça, seu pai foi um ministro religioso fervoroso e queria que seu filho seguisse esta mesma carreira, porém com o contato com a família Bernoulli descobriu sua vocação para a matemática, e por intermédio destes tornou-se membro da Academia de S. Petersburgo em 1727, na Rússia.

No ano de 1735 perdeu a visão do olho direito, mesmo assim continuou produzindo seus trabalhos incansavelmente, e em 1741 a convite, de Frederico, o Grande, foi para Berlim para a Academia das Ciências onde ficou por vinte e cinco anos, voltando para a Rússia, onde faleceu em 1783, aos setenta e seis anos enquanto estava na companhia de um neto, já completamente cego a quase dezessete anos.

A tragédia da cegueira não conseguiu parar o desenvolvimento árduo de pesquisas e publicações, sendo considerado um dos mais produtivos matemáticos de sua época passando a “escrever com giz numa grande lousa e ditando para os seus filhos” (BOYER, 1996, p. 304). Tendo muitos trabalhos em diversas áreas da matemática, como a geometria, a qual enfocaremos aqui destacando o estudo de poliedros.

Euler, no ano de 1750 direcionou seus estudos para as propriedades dos sólidos, uma matéria que ele denominou Estereometria, onde esbarrou na

dificuldade de classificação de poliedros, notando que somente a classificação obtida pelo número de faces não seria suficiente, conseguindo sucesso em seguida ao inventar os conceitos dos outros elementos que formam um poliedro que são vértice e arestas, como mostra a figura 14, observando mesmo sem perceber, o caráter topológico da superfície de poliedros (LAKATUS, 1976, p. 19).

Euler desse modo, aperfeiçoa sua estrutura conceitual, inventando o termo “acies” (aresta) substituindo o que se usava “latus” (lado), tendo em vista que latus era um conceito poligonal, enquanto o que queria realmente era um termo que fizesse referência a um conceito poliedral como obteve êxito. (LAKATUS, 1976, p. 19).

Os poliedros mesmo já sendo conhecidos desde a antiguidade (origem grega do termo: poly “muitas” e hedra “faces”), principalmente os cinco chamados “Poliedros de Platão”, mostrados na figura 15, até então ninguém havia percebido a relação combinatória entre os números de suas faces, arestas e vértices, ou seja, uma relação entre os números de seus elementos. E após descobrir uma relação entre estes, Euler escreveu uma carta ao seu amigo e também matemático Christian Goldbach, afirmando a veracidade da relação a seguir para poliedros:

$$\boldsymbol{V - A + F = 2}$$

Em que V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro respectivamente.

Euler, para verificar a validade da respectiva relação descoberta, testou exaustivamente esta, em vários poliedros como prismas, pirâmides etc. Só demonstrou a relação algum tempo depois (LAKATUS, 1976, p. 21). Porém, a demonstração apresentada por Euler não definiu o poliedro que se referia, não sendo considerada aceitável no meio matemático daquele período, iniciando a grande história dos poliedros e a polêmica em torno da relação de Euler que vai de meados do final da Idade Modena até a Idade Contemporânea.

4.5. Os Estudos dos Poliedros na Idade Contemporânea

Já na Idade Contemporânea, entra em cena o matemático francês Adrien-Marie Legendre, que nasceu na cidade de Paris, em 18 de setembro de 1752, e viveu até o ano de 1823. Foi professor da escola militar de Paris, recebendo em

1782 o Grande Prêmio da Academia de Ciências de Berlim, se tornando membro da Academia de Ciências de Paris no ano seguinte, onde publicou trabalhos de matemática e física. Em 1788, entrou para a Sociedade Real de Londres, tornando-se membro da Academia de Ciências londrina em 1789.

Em 1795, Legendre ocupou a seção de Ciências Físicas e Matemáticas no recém criado Instituto Nacional das Ciências e das Artes, e em 1813 em virtude do falecimento de Lagrange, assumiu sua cadeira no *Bureau Longitudes*, onde ficou até sua morte em 10 de janeiro de 1833.

Legendre, foi o primeiro a demonstrar a relação de Euler, sendo considerada a primeira correta para a preposição (LIMA, 1991), a anunciando da seguinte forma: “Seja S o número de ângulos sólidos de um poliedro, H o número de suas faces, A o número de suas arestas; eu digo que teremos sempre S + H = A + 2” (LEGENDRE, 1817, p. 228, tradução nossa do original em francês).

Logo após, Legendre faz a demonstração da relação de Euler:

> Tome no interior de um poliedro um ponto de onde você leve as linhas retas aos vértices de todos seus ângulos; imagine então que do mesmo ponto, como centro, descrevemos uma superfície esférica que seja encontrada por estas linhas em todos os pontos; junte estes pontos por arcos de grandes círculos, de maneira a formar sobre a superfície da esfera polígonos correspondente e o mesmo número de faces do poliedro; Seja ABCDE um de seus polígonos e seja n o número de seus lados; sua superfície será s – 2n + 4, s será a soma dos ângulos A, B, C, D, E. Se avaliarmos similarmente a superfície de cada um dos outros polígonos esféricos, e que adicionados todos juntos, concluímos que sua soma na superfície da esfera representada por 8, é igual a soma de todos os ângulos dos polígonos menos duas vezes o número de seus lados mais quatro tomado de vezes que ele tem de faces. Ou, como todos os ângulos que se ajustam em torno de um mesmo ponto A vale quatro ângulos retos, a soma de todos os ângulos do polígono é igual a 4 tomados como de vezes que ele tem de ângulos sólidos; ela é feita a 4S. Então o dobro do número de lados AB, BC, CD, etc. é igual ao quádruplo do número de arestas ou = 4A, porque a mesma aresta é lado de duas faces: portanto teremos 8 = 4S – 4A + 4H; onde tomando um quarto de cada membro, 2 = S – A + H; portanto S + H = A + 2. (LEGENDRE, 1817, p. 228-229, tradução nossa do original em francês).

Para obter mais informações sobre a demonstração de Legendre, o leitor poderá consultar o trabalho de Santos (2014) e Costa (2013), os quais abordam com maior aprofundamento os estudos de Legendre sobre a relação de Euler para poliedros.

Um outro importante contribuidor para a evolução do conhecimento de poliedros neste período, foi o matemático francês Louis Poinsot, que nasceu em 03 de janeiro de 1777, em Paris, e lá estudou na *École Polytechnique*, e depois em

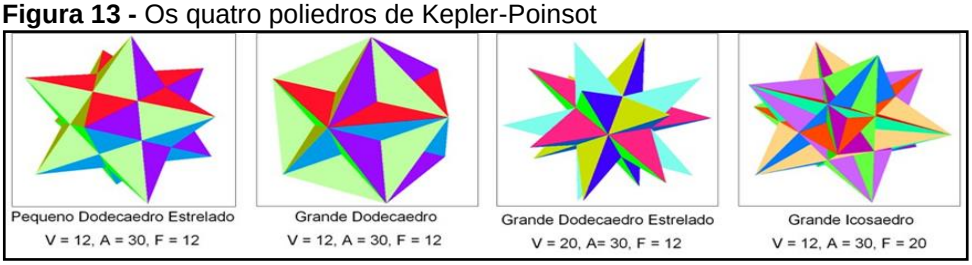
1797 se transferiu para *École Nationale des Ponts et Chaussées*, onde cursou engenharia, decidiu desistir da ideia de se tornar um engenheiro e se tornar um professor de matemática, atuando neste trabalho de 1804 até 1809 no Liceu Bonaparte, em Paris. Em 1840 foi nomeado para o *Royal Conseil de l'Instruction Publique*, e de 1839 até seu falecimento, trabalhou no *Bureau des Longitudes*.

Poinsot, em 1810 descobre quatro poliedros estrelados, a saber: o pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro, grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro, compreendendo provavelmente que estes eram regulares associando aos cinco poliedros de Platão (platônicos), que já eram conhecidos desde a antiguidade, e utilizando possivelmente a relação descoberta por Euler.

Como Kepler já havia descoberto o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado, ficaram os quatro estrelados descobertos conhecidos como poliedros de Kepler-Poinsot, e em seu trabalho afirma que existem pelo menos nove poliedros regulares, os platônicos e os que descobrira.

Os poliedros de Kepler-Poinsot não são convexos, ou seja, são côncavos e suas faces são polígonos regulares congruentes, com ângulos poliédricos congruentes, possuindo faces que podem ser ou não convexas, como podemos observar na figura 16, a seguir:

Figura 13 - Os quatro poliedros de Kepler-Poinsot



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Depois da descoberta de Poinsot, chegamos então as contribuições de Augustin-Louis Cauchy, que nasceu em 21 de agosto de 1789, e faleceu no dia 23 de maio de 1857 na cidade de Sceaux, próximo a Paris, e as suas últimas palavras foram dirigidas ao Arcebispo de Paris: “O homem morre mas suas obras ficam” (EVES, 2004, p. 532).

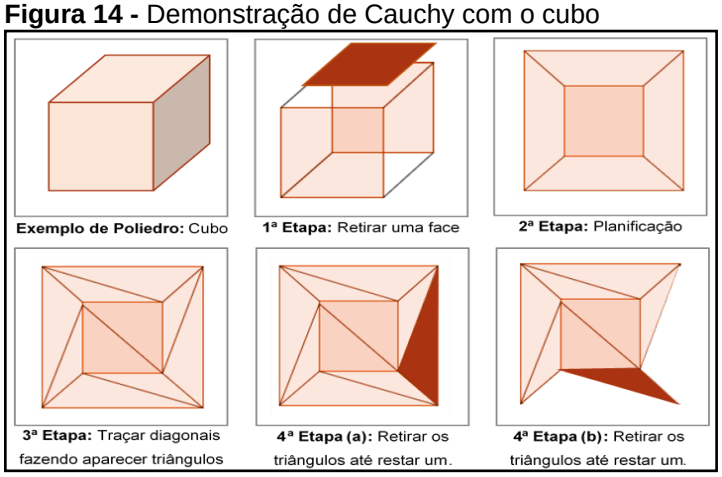
Segundo Boyer (2010), Cauchy foi um dos maiores matemáticos do mundo, sendo um dos um dos principais do seu tempo com pesquisas que cobriram significativamente a matemática. Em 1813, provou a existência de apenas nove poliedros regulares dentro da ideia da definição que tinham na época, contribuído

com a validação das ideias de Poinsot, e em 1811 já havia demonstrado que os ângulos de um poliedro convexo são determinados pelas suas faces.

Em 1813, publicou um artigo sobre polígonos e poliedros, demonstrando para um caso particular de poliedros a relação de Euler é válida, a qual será nosso enfoque entre suas contribuições para evolução dos estudos de poliedros, uma vez que essa demonstração é a mais divulgada para esta relação (LIMA, 1982, p. 58).

A demonstração de Cauchy possui quatro etapas com objetivo de mostrar que V – A + F = 2, para tanto, propõe nas etapas que a afirmação V – A + F = 1 é válida se retirarmos uma face de um poliedro, esta não altera o número de V e A, mas diminui F em uma unidade deste poliedro. Para tentar buscar um melhor entendimento e visualização da demonstração de Cauchy buscaremos ilustrar as etapas desta, tomando como exemplo de poliedro no processo o hexaedro (cubo) a seguir:

Figura 14 - Demonstração de Cauchy com o cubo



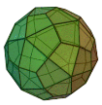
Fonte: Pesquisa bibliográfica, adaptado de Lima, 1982.

Em sua demonstração, Cauchy sugere apenas duas possibilidades na disposição dos triângulos após a planificação do poliedro para serem retirados, não levando em consideração outras disposições as quais são apresentadas em outros trabalhos como de Lima (1982), ressaltamos novamente que a demonstração apresentada é válida somente poliedros homeomorfos, e uma melhor compreensão do que isso significa pode ser obtida posteriormente, nos estudos de Poincaré.

Essa demonstração e a generalidade que esta supunha no seu enunciado, como outras que existiram, poderiam ser invalidadas por conta da indefinição do que seria poliedro, como ocorreria com esta, a qual invalidaríamos com um simples contraexemplo de poliedro que não fosse equivalente a uma superfície esférica.

Em 1865, o matemático belga Eugène Catalan nascido em 1814 em Bruges na Bélgica, e que se distingui pelos seus estudos sobre geometria e teoria dos números, publica o texto chamado "*Mémoire sur la théorie des polyèdres*", onde realiza o primeiro estudo sistemático da dualidade nos poliedros, no qual apresenta a lista dos duais dos poliedros arquimedianos, os quais ficaram conhecidos como Sólidos de Catalan.

Quadro 2 - Sólidos de Catalan

SÓLIDOS DE CATALAN						
Tetraedro triakis 12 faces	Dodecaedro rômbico 12 faces	Octaedro triakis 24 faces	Hexaedro tetrakis 24 faces	Icositetraedro deltoida 24 faces	Dodecaedro disdiakis 48 faces	Triacontaedro rômbico 30 faces
						
Icosaedro triakis 60 faces	Dodecaedro pentakis 60 faces	Hexecontaedro deltoidal 60 faces	Triacontaedro disdiakis 120 faces	Icositetraedro pentagonal 24 faces	Hexecontaedro pentagonal 60 faces	

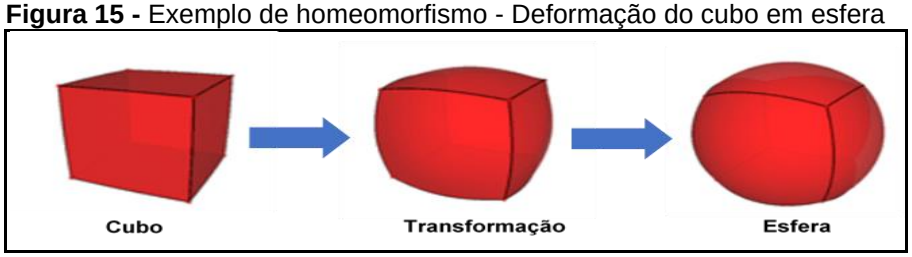
Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Jules Henri Poincaré, conhecido como um dos maiores matemáticos de seu tempo, nasceu em Nancy na França em 1854, estudou Engenharia na *École Polytechnique*, e realizou doutorado na Universidade de Paris, conseguiu desenvolver realizações em todos os ramos da matemática, sendo ele que apresentou uma solução para a discussão da relação descoberta por Euler.

De acordo com Lima (1982), a solução definitiva para o fim da discussão dada por Poincaré (1893), veio através da compreensão que a relação de Euler é um teorema de Topologia, área que se preocupa com propriedades de objetos geométricos que são preservadas quando esses objetos são deformados e não de Geometria, como se acreditava, de modo que a relação de Euler passou a se chamar neste caso de característica de Euler-Poincaré.

Poincaré concluiu que a característica da relação se tratava de um invariante topológico de um poliedro P o número V – A + F, de modo que atualmente podemos escrever na forma X(P) = V – A + F, e quando um poliedro possui X(P) = 2, este é homeomorfo ('homeo'= mesmo, 'morfo'= forma) a esfera, ou seja, de modo geral o poliedro pode ser transformado em esfera quando deformado, como mostra o exemplo da figura, a seguir:

Figura 15 - Exemplo de homeomorfismo - Deformação do cubo em esfera



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

No que se refere a demonstração de Cauchy, Lima (1982) afirma que certamente esta apenas provará alguma coisa relacionada a poliedros, mas que só terá validade se deixarmos clara a definição de poliedros a qual estamos seguindo inicialmente.

Um outro matemático que contribuiu significativamente para o estudo dos poliedros foi David Hilbert, o qual é conhecido como um dos maiores matemáticos do século XX, que nasceu no ano de 1862 em *Königsberg*, cidade conhecida hoje como Kaliningrado, na Alemanha, onde estudou na Universidade de *Königsberg*, falecendo em 1943 em *Göttingen*, cidade deste mesmo país.

No ano de 1895, Hilbert foi nomeado professor na Universidade de Göttingen, na qual trabalhou até se aposentar, em 1930. E seus trabalhos contribuíram com vários campos da matemática como com a teoria dos invariantes, na sua obra "*Grundlagen der Geometrie*" (Fundamentos da geometria), na teoria dos números algébricos, em que a criação dos espaços algébricos são conhecidos como espaços de Hilbert, e outras contribuições que embasaram matematicamente a teoria da relatividade.

Dentre as contribuições de Hilbert é especialmente conhecida uma lista com 23 (vinte e três) problemas matemáticos, apresentados por ele no congresso Internacional de Matemáticos de Paris (primeiramente dez, posteriormente publicou os demais), em 1900, os quais alguns não foram resolvidos até nossos dias, mesmo existindo prêmios para aqueles que encontrem suas soluções.

Nos problemas de Hilbert, os poliedros são tratados no terceiro e no décimo oitavo problema, os quais já foram resolvidos. O terceiro problema questiona se dois poliedros que possuem o mesmo volume são congruentes por corte, ou seja, é sempre possível tomar dois poliedros de mesmo volume e decompor um em poliedros menores de tal maneira que os reorganizando seja possível montar o outro. A resposta negativa foi dada por Max Dehn, aluno de Hilbert em 1902, com a construção de um novo invariante, que ficou conhecido como teorema de Dehn.

O décimo oitavo problema de Hilbert ou conjectura de Kepler (1611) trata da construção em um espaço euclidiano com poliedros congruentes a forma mais densa de empacotamento de esferas, em outras palavras, qual seria a melhor forma poliedral de empilhamento de esferas. Kepler afirmou que existiam duas maneiras mais eficientes que são na forma piramidal cúbica e hexagonal.

Figura 16 - Panfleto sobre a conjectura de Kepler

Fonte: Kepler, 1611.

Kepler estava certo, porém essa confirmação, isto é, a solução deste problema foi realizada apenas em 1998 por Thomas Hales, sendo publicada nos *Annals of Mathematics* (2005). A grosso modo, podemos exemplificar o décimo oitavo problema de Hilbert com laranjas, na melhor forma de empilhamento de infinitas laranjas, e qual seria o poliedro formado com o referido empilhamento.

De volta ao contexto da demonstração de Cauchy, falaremos do grande matemático brasileiro Elon Lages Lima, que nasceu em 1929, na cidade de Maceió, iniciou seus estudos universitários em Fortaleza, graduando-se em Matemática pela Faculdade Católica de Filosofia do Ceará em 1952, e Bacharelou-se em Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro, realizando posteriormente mestrado e doutorado (PhD) na Universidade de Chicago, suas principais áreas de interesse eram topologia diferencial, topologia algébrica, e geometria diferencial.

Lima foi ganhador de muitos prêmios e escreveu muitos livros que são referências para o ensino de matemática. Faleceu aos 87 anos, no Rio de Janeiro em 2017.

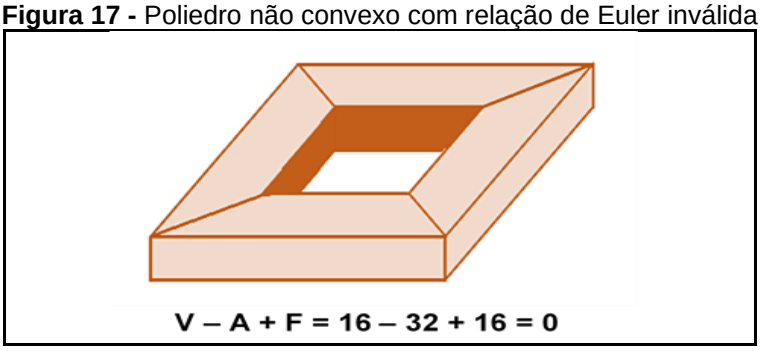
No que se refere a sua contribuição com poliedros, Lima reescreveu a demonstração feita por Cauchy do Teorema de Euler, mostrando que esta estava incompleta, e suas análises sobre poliedros associados ao referido teorema, servem de embasamento para os autores da atualidade sobre o tema em questão.

Lima no ano de 1982, escreveu um trabalho intitulado “O teorema de Euler sobre Poliedros”, que foi motivado a partir da leitura de Lakatos (1976), onde fala da trajetória histórica de Poliedros e do teorema de Euler, sua validade e uma análise crítica da demonstração de Cauchy, entre outras coisas.

Segundo Lima (1982), apesar da relação descoberta por Euler ter características que o tornam atraente, como a simplicidade em que apresenta a facilidade da constatação deste na representação de poliedros que podemos verificar a validade de V – A + F = 2, esta não é válida para todos os poliedros como acreditava Euler quando a descobrira, e ainda em nenhum momento definiu especificamente o que seriam “poliedros” durante seus estudos, de modo a deixar lacunas em torno de sua importante descoberta.

Para Euler, provavelmente, muitos sólidos não eram considerados poliedros para os quais seu teorema não tem validade, não sendo uma tarefa difícil encontrarmos exemplos em que V – A + F ≠ 2, como:

Figura 17 - Poliedro não convexo com relação de Euler inválida



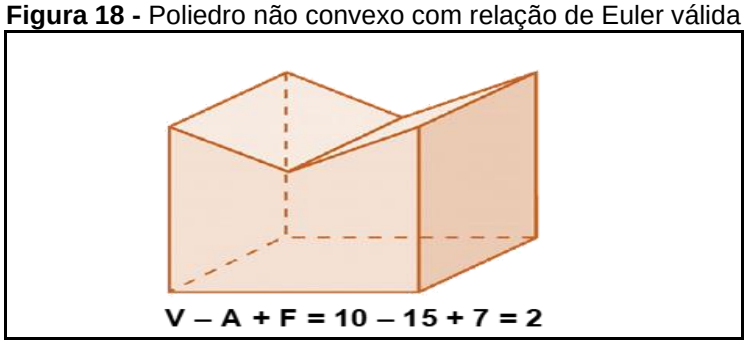
Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Lima (1982) afirma que muitas gerações de geômetras procuraram estabelecer meios para que a relação V – A + F = 2 viesse a ter status de teorema, estando assim completamente livre de contraexemplos que pudessem no futuro refutá-la. A saída encontrada foi a restrição da classe de poliedros os quais a relação se aplica, alguns autores a limitaram apenas aos poliedros convexos, que Lima no referido trabalho definiu como poliedros situados do mesmo lado que qualquer plano que contenha uma de suas faces, como podemos notar o sólido representado na figura apresentada não é convexo.

O autor chama a atenção para o fato de que todo poliedro convexo satisfaz à relação de Euler, mas que, porém, existe grande facilidade em se encontrar exemplos de poliedros não convexos que satisfazem a relação, existindo uma grande discussão em torno desta, como podemos notar na figura abaixo. Essa

grande discussão durou mais de um século como mostram as notas de rodapé do livro de Lakatos (1976).

Figura 18 - Poliedro não convexo com relação de Euler válida

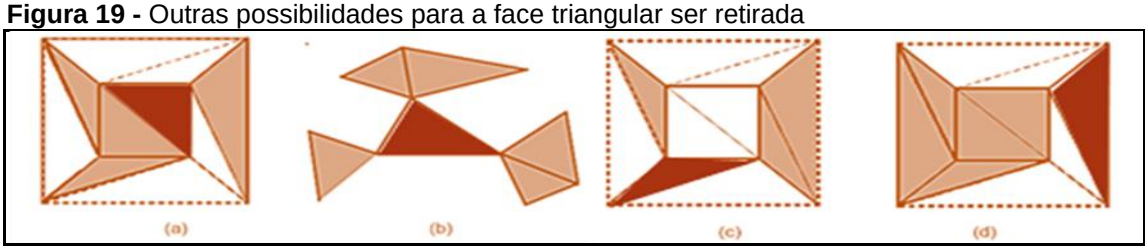


Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Como já explanado, a solução definitiva foi a compreensão que a relação de Euler é um teorema de Topologia, dada por Poincaré.

No que se refere a demonstração de Cauchy, Lima (1982) mostra a existência de outras quatro possibilidades de remoção de faces do poliedro plano resultante (triângulo), a saber: quando o triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre, quando o triangulo a ser retirado tem as três arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre, quando o triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres ou quando o triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres. (LIMA, 1982, p. 69)

Figura 19 - Outras possibilidades para a face triangular ser retirada



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Um outro grande contribuidor para o estudo de poliedros, agora em outras dimensões, foi o matemático suíço Ludwig Schläfli, nasceu na cidade de Seeberg na Suíça em 1814 e faleceu em 1895 em Berna, pertencente ao mesmo país. Ele fez importantes contribuições na área da geometria e em outras áreas da matemática, sendo considerado um dos três arquitetos da geometria multidimensional, juntamente com Arthur Cayley e Bernhard Riemann.

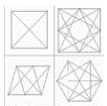
Schläfli de 1850 até 1852 trabalhou em sua obra prima "*Theorie der vielfachen Kontinuität*" (Teoria da Múltipla Continuidade), onde ele inventa os Politopos, que são análogos de maior dimensão de polígonos e poliedros, ou seja,

são generalizações, para um número arbitrário de dimensões (finitas), dos conceitos conhecidos de polígonos e poliedros, em outras palavras são o termo geral da sequência: ponto (dimensão 0), segmento (dimensão 1), polígono (dimensão 2), poliedro (dimensão 3), etc.

Ao desenvolver sua teoria encontra, entre outras coisas, uma versão de maior dimensão da conhecida relação de Euler, determina então os Politopos Regulares, os quais são equivalentes primos tridimensionais de polígonos regulares e dos sólidos platônicos, mostrando a existência de seis na quarta dimensão e três em todas as dimensões superiores.

Schläfli concebeu a notação $\{p,q\}$ para poliedros regulares, onde p indica o número de lados de cada polígono e q o número de polígonos que incidem em cada vértice do poliedro, essa notação ficou conhecida como símbolo de Schläfli para poliedros (KLAASEN, 1994).

Quadro 3 - Exemplos de Polítopos convexos de 4 dimensões

NOME	FAMÍLIA	SÍMBOLO DE SCHLÄFLI	VÉRTICES	BORDAS	FACES	CÉLULAS	FIGURAS DE VÉRTICES	POLITOPO DUPLO	IMAGEM
Pentacoron	simplex	{3,3,3}	5	10	10 triângulos	5 tetraedros	tetraedros	(auto-dual)	
Octácoron , teseracto	politopo de medição	{4,3,3}	16	32	24 quadrados	8 cubos	tetraedros	16 células	
Hexadecacoron ou 16-cell	atravessar politopo	{3,3,4}	8	24	32 triângulos	16 tetraedros	octaedro	Tessect	

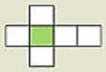
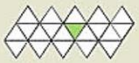
Fonte: Coxeter, 1969.

O trabalho de Schläfli envolvendo geometria, mesmo com suas contribuições especialmente em análise sendo conhecidas, não receberam a devida atenção, e a primeira publicação de todo o manuscrito foi somente em 1901, após seu falecimento. Porém, no século XX, os Politopos começaram a ser analisados a partir dos estudos de Schläfli por outros matemáticos, os quais desenvolvem vastamente o assunto neste período como veremos de forma sintetizada a seguir.

O matemático alemão Victor Schlegel, que viveu de 1843 até 1905, é conhecido por promover a álgebra dos trabalhos de Hermann Grassmann e a criação de um método para visualizar Politopos, que ficou conhecido como diagrama de Schlegel, o qual é uma representação que transporta as arestas de um poliedro

para um desenho no plano, em outras palavras, é como se um objeto tridimensional fosse achatado.

Quadro 4 - Diagrama de Schlegel

POLIEDRO	VISÃO	PLANIFICAÇÃO	DIAGRAMA DE SCHLEGEL
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Em 1886, Schlegel introduz seu diagrama para realizar o estudo das propriedades combinatórias e topológicas dos Politopos, e geralmente é usado para a visualização de politopos de quatro dimensões.

O matemático holandês Willem Abraham Wythoff, nasceu em 1865 na cidade de Amsterdã, falecendo no ano de 1939, frequentou a Universidade de Amsterdam, obtendo seu Ph.D. em 1898, possui trabalhos envolvendo teoria dos jogos combinatória, teoria dos números e geometria.

Na geometria ficou conhecido pela criação dos poliedros uniformes, que foram chamados de Poliedros Uniformes de Wythoff, o qual trata de uma forma de construir um poliedro uniforme ou azulejos planos, e pelo símbolo usado como uma notação para esses objetos geométricos, conhecido hoje como Símbolo de Wythoff. Segundo Coxeter, Longuet-Higgins e Miller (1954) poliedros uniformes podem ser definidos como poliedros transitórios de vértices com faces regulares.

O matemático inglês e pioneiro da computação Jeffrey Miller que nasceu em 1906 e faleceu no ano de 1981, dedicou-se ao trabalho com teoria dos números e geometria, em particular poliedros, onde criou o conhecido monstro de Miller, o "*great dirhombicosidodecahedron*", ou grande dirombicosidodecaedro, que possui 124 faces, sendo composto por 40 triângulos, 60 quadrados e 24 pentagramas.

Miller contribuiu com sugestões para a pesquisa de Coxeter relacionadas a teoria das estrelações de poliedros, as quais ficaram conhecidas como regras de Miler. Em 1938, Coxeter, HT Flather, John Flinders Petriee e Patrick du Val seguindo

essas regras escreveram um livro chamado "*The Fifty-Nine Icosahedra*" (Os Cinquenta e Nove Icosaedros) sobre os cinquenta e nove icosaedros encontrados na pesquisa. Miller e Coxeter na década de 1930, encontraram 12 poliedros uniformes novos, apenas um passo na classificação completa que ocorreria apenas na década de 1950. Miller faleceu em 1981.

Considerado um dos principais responsáveis pelos avanços da geometria no seu tempo, o geômetra canadense Harold Coxeter, nasceu na cidade de Londres em 1907 no Reino Unido, mas passou a maior parte de sua vida no Canadá, é considerado um dos maiores geômetras do século XX, seus trabalhos mais conhecidos são com politopos regulares e geometria de dimensões superiores.

Coxeter trabalhou por 60 anos na Universidade de Toronto e publicou doze livros, como o "*Regulares Polytopes*", publicado em 1947, o qual apresenta um levantamento abrangente da geometria de polítopos, a generalização de polígonos regulares e poliedros regulares para dimensões superiores.

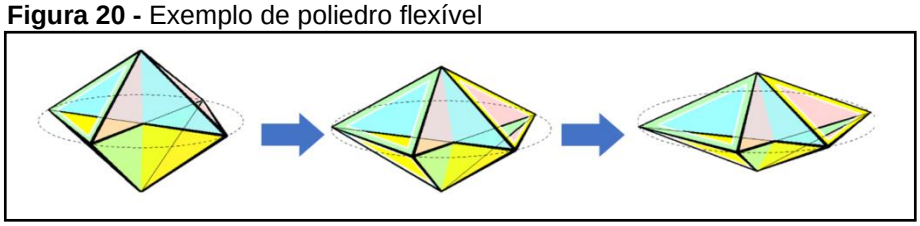
O matemático Norman Johnson, nascido em 1930, que obteve seu Ph.D. na Universidade de Totonto, no ano de 1966, com a supervisão de Coxeter, com o título em português Teoria de Polítopos Uniformes e Favos de mel.

Segundo Weisstein (2009), Johnson em 1966, conseguiu enumerar 92 poliedros não-uniformes com faces regulares, os quais são atualmente conhecidos como Sólidos de Johnson, que se caracterizam sendo poliedros convexos em que as faces constituem polígonos regulares e todas as arestas possuem o mesmo comprimento, e que não são sólidos platônicos, sólidos arquimedianos e as duas famílias infinitas de prismas e antiprismas.

O matemático russo Victor Zalgaller nascido em 1920, é conhecido por trabalhos em diversos campos da matemática, mas principalmente pelos resultados obtidos nos estudos de poliedros convexos. Em 1969, provou que a lista de Johnson estava completa. A Johnson, também é atribuído o credito de ter nomeado todos os poliedros estrelados uniformes, bem como seus duplos.

O matemático estadunidense Robert Connelly nasceu na Pensilvânia, em 1942, estudou na Universidade Carnegie Mellon, em 1964, e recebeu seu Ph.D. na Universidade de Michigan em 1969, atualmente é professor na Universidade de Cornell. Ele descobriu poliedros flexíveis, um exemplo desses poliedros se encontra no Museu Nacional da História Americana.

Figura 20 - Exemplo de poliedro flexível

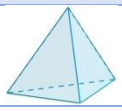
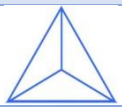


Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O matemático inglês John Horton Conway, nasceu em 1937, é atuante em diversas áreas da matemática, atualmente é professor emérito na Universidade de Princiton, em Nova Jersey. Conway e George W. Hart com o objetivo de construir poliedros com mesma simetria, expandiram a ideia de usar operadores, como por exemplo o truncamento que foi definido por Kepler.

Conway criou uma notação para poliedros que é divulgada por Hart, a qual é usada na descrição de poliedros baseada em um poliedro semente, o qual é modificado por várias operações de prefixo. Inicialmente especifica um poliedro "semente" usando uma letra maiúscula de acordo com a letra inicial, por exemplo, sólidos platônicos são denominados T (tetraedro), O (octaedro), C (cubo), I (icosaedro) e D (dodecaedro), já os demais poliedros como os Pn (prismas), An (antiprismas), e Yn (pirâmides), onde n > = 3, que especifica o número de lados da base do poliedro. Com letras minúsculas precedendo a letra maiúscula as operações a serem executadas no poliedro são então especificadas.

Quadro 5 - Exemplo da Notação de Conway - Tetraedro

Poliedro	Tetraedro	=	Pirâmide
Notação de Conway	***T***	**=**	***Y3***
Imagem		=	

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Ao pensarmos que todas as possibilidades sobre o estudo de poliedros já existem haviam sido conhecidas, isto é, que todos os tipos de poliedros já foram descobertos e estudados, a ciência e nos traz o escutoide (scutoid), o mais novo poliedro do mundo, que foi descoberto por cientistas quando realizavam o estudo das células que formam a pele humana (GRIMA, 2018).

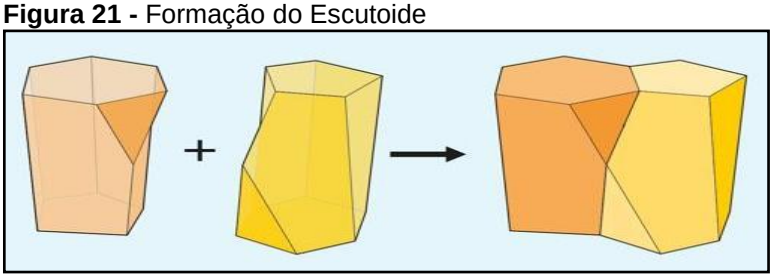
Os cientistas responsáveis pela descoberta foram Luisma Escudero, do Departamento de Biologia Celular da Universidade de Sevilha e do Instituto de Biomedicina de Sevilha, o qual é o principal responsável pelo estudo, e seu grupo de

pesquisa. O trabalho de Escudero buscava descrever as células epiteliais, no sentido de descobrir como estas se constituem.

Grima (2018), que participou da pesquisa, afirma que a estrutura escutoidal foi inicialmente encontrada em modelos básicos biológicos celulares nas glândulas salivares da mosca da fruta, nos ovos deste mesmo inseto e nas células do peixe-zebra durante o desenvolvimento da pesquisa.

O escutoide possui a forma semelhante a de um prisma, porém tem características distintas, uma vez que uma de suas extremidades possui cinco arestas e a outra seis, formando um “Y” que divide uma dessas extremidades em duas, e consequentemente resultando em um triângulo como podemos observar na figura a seguir.

Figura 21 - Formação do Escutoide

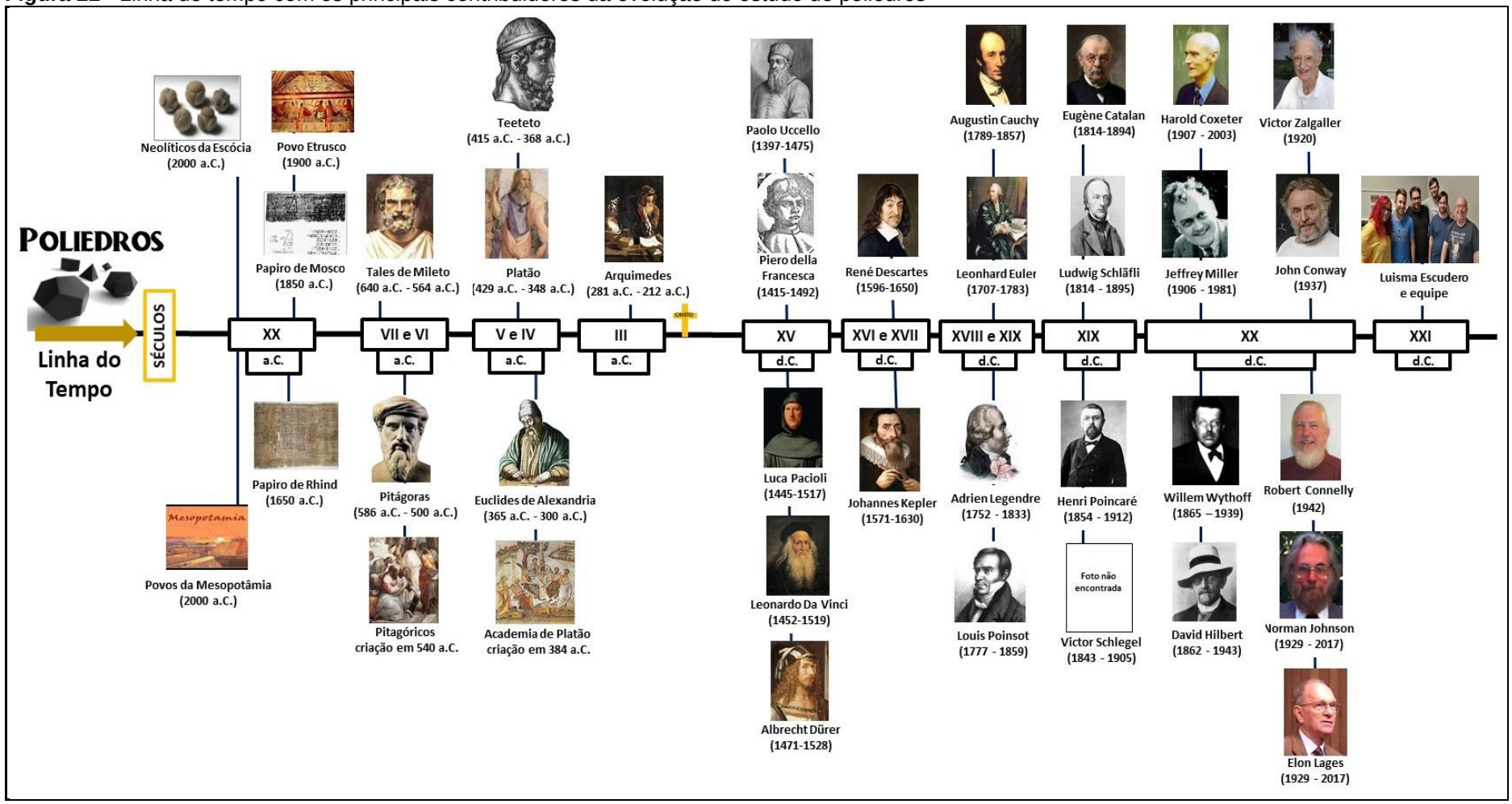


Fonte: Grima, 2018.

Segundo Grima (2018), as implicações desta descoberta podem trazer avanços significativos para criação de órgãos de impressão em 3D, uma vez que permite a identificação de padrões epiteliais saudáveis em sua geometria, ajudando na identificação de um crescimento considerado anormal. De modo geral, a pesquisa contribui para a criação de órgão artificiais, a partir da descoberta que as células da pele têm um formato geométrico de um poliedro peculiar.

O levantamento histórico do desenvolvimento dos poliedros ao longo da história nos forneceu informações que nos permitiram desenvolver a criação de um diagrama contendo uma linha do tempo com os principais contribuidores para a construção da evolução do estudo e conhecimento dos poliedros, o qual apresentamos a seguir:

Figura 22 - Linha do tempo com os principais contribuidores da evolução do estudo de poliedros



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Nas biografias apresentadas, com destaque para produção dos personagens na contribuição para conteúdo matemático de poliedros, podemos observar que cada um destes personagens destacados no referido período contribuiu com seu trabalho para a evolução do conhecimento que se possuía sobre poliedros, mostrando que o conhecimento foi e continua sendo construído ao longo da história a partir de grandes esforços, nos fazendo a menção do que existia desde os tempos mais remotos, até o que sabemos e futuramente poderemos aprender em nossos dias, tendo em vista as possibilidades criadas com a junção da matemática e as tecnologias.

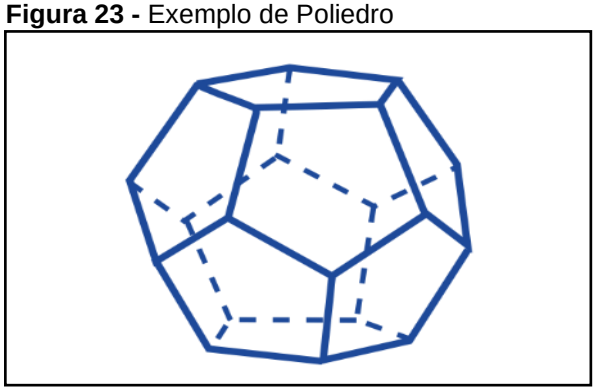
5. ASPECTOS MATEMÁTICOS

Neste tópico estudaremos uma classe primordial dos sólidos geométricos: os poliedros. A seguir faremos um apanhado sobre os conceitos de Poliedros e a demonstração das propriedades e teoremas destes, para tanto utilizaremos as definições apresentadas principalmente por Lima e outros (2006).

5.1. Definição de Poliedros

A ideia que pode ser considerada mais geral de Poliedros é dizer que estes são sólidos formados apenas por “faces”, se referindo a estas como partes limitadas de um plano, ou ainda nos referindo a origem grega do termo: poly (muitas) e hédra (face), que a partir da etimologia deste, nos levaria a uma possível definição de “muitas faces”, e consequentemente a uma ideia do que sejam poliedros, porém estas não servem como definição formal propriamente dita (LIMA et al., 2006).

Figura 23 - Exemplo de Poliedro



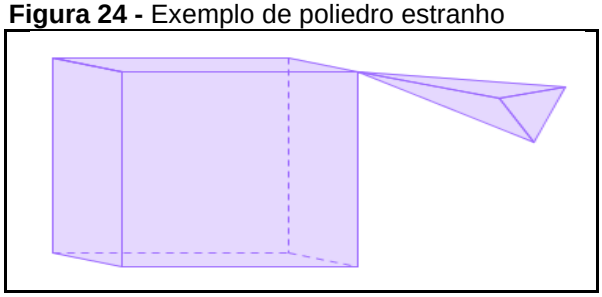
Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018

Uma outra proposta para definição de poliedros segundo Lima e outros (2006) é que este se trata de uma reunião de um número finito de polígonos planos, no qual

cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e somente um, outro polígono. Lembrando que cada um dos polígonos referidos é chamado de uma face do poliedro, onde cada lado comum de duas faces recebe o nome de aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também vértice do poliedro.

Esta proposta de definição apresentada aparentemente simples e compreensível, permite “liberdades” que levam ao entendimento que a figura a seguir seria um exemplo de um sólido que representaria um poliedro.

Figura 24 - Exemplo de poliedro estranho



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018

Todas essas informações e propostas de definição de poliedros podem levar a ideia geral de sua forma, mas como já mencionamos, necessitamos de uma definição adequada que possibilite de maneira efetiva a demonstração das propriedades e teoremas os quais trataremos posteriormente, e sendo assim adotaremos, então, a seguinte definição:

Definição (1). Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

Vale ressaltar que, a união do poliedro com seu interior constitui o que chamamos de um sólido, e que um poliedro é “oco”, ou seja, é vazio, não tendo desse modo nenhum preenchimento, enquanto que um sólido é “maciço”, ou seja, é cheio, sendo assim todo preenchido.

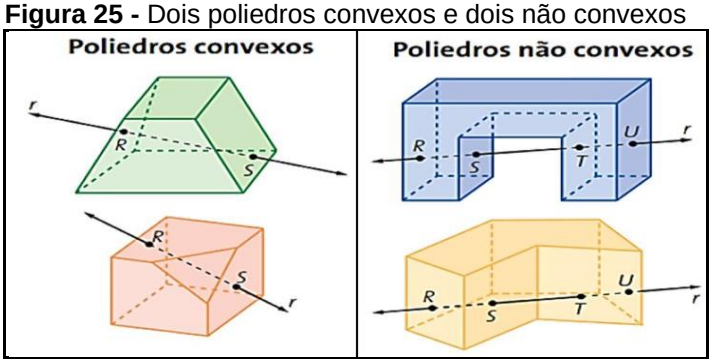
5.2. Poliedros Convexos e Não Convexos

Ao considerarmos a Definição (1) que tomamos para poliedros, todo poliedro está limitado a uma região do espaço denominada de interior desse poliedro, e sendo assim dizemos que um poliedro é convexo quando seu interior é convexo, e quando seu interior não é convexo, dizemos que este poliedro é não convexo.

Para um melhor entendimento, primeiramente definiremos o conjunto dos convexos: “Um conjunto A, do plano ou do espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de A está inteiramente contido em A”.

Agora, tomando o caso dos poliedros, podemos trocar esta definição por outra que a equivalha, mas que se adeque melhor, nos proporcionando maior utilidade: “Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em, no máximo, dois pontos”.

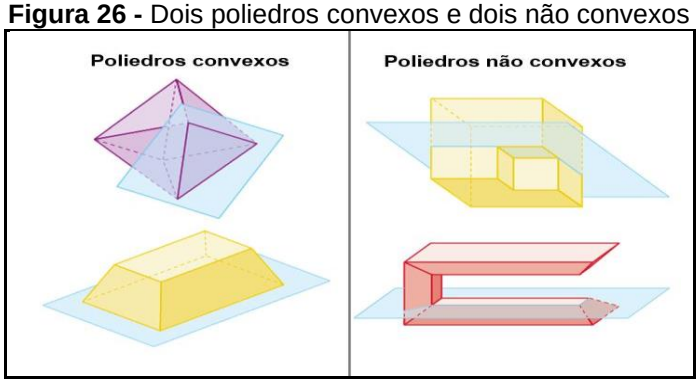
Figura 25 - Dois poliedros convexos e dois não convexos



Fonte: Dante, 2005.

Segundo Janos (2011), um poliedro é chamado de convexo, quando encontra-se inteiramente de um lado do plano que contém qualquer uma de suas faces, enquanto que um poliedro não convexo apresenta um plano que contém uma de suas faces e corta outra, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 26 - Dois poliedros convexos e dois não convexos



Fonte: Leonardo, 2012.

5.3. Relações Iniciais

Dado um poliedro que contemple a definição que consideramos, verificaremos as relações existentes entre o número de faces, arestas e vértices, e sua respectiva contagem. Desse modo, representaremos por F o número de faces, por A o número de arestas e por V o número de vértices. E pelo fato de as faces poderem ser de gêneros diferentes, ou seja, por poderem ser representadas por polígonos distintos, representaremos estas por $F_n(\mathrm{n} \geq 3)$ o número de faces que possuem n lados conforme nossa definição. Analogamente, como os vértices podem apresentar as mesmas características, representaremos o seu número por V_n o número de vértices nos quais ocorrem n arestas, onde de acordo com o item (b) da definição que seguimos, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.

E desse modo, valem as relações de V e F:

$$F = F_3 + F_4 + \ldots + F_i = \sum_{n=3}^{i} F_n \tag{1}$$

$$V = V_3 + V_4 + \ldots + V_j = \sum_{m=3}^{j} V_m \tag{2}$$

Vamos agora relacionar as arestas com as faces do poliedro, para tanto vamos imaginar um poliedro qualquer totalmente desmontado com suas respectivas faces sobre uma mesa ou qualquer outra superfície plana. Notaríamos que, cada uma de suas faces é representada por um polígono, de modo que se quiséssemos saber a quantidade de lados de cada um destes, bastaria multiplicarmos o número de triângulos por três (F_3), o número de quadriláteros por quatro (F_4), o número de pentágonos por cinco (F_5), o número de hexágonos por seis (F_6) e assim sucessivamente, e depois realizar a soma de todos os resultados obtidos. Porém, por conta de cada aresta do poliedro ser lado de exatamente duas faces, esta soma deverá ser igualada ao dobro do número de arestas do poliedro, assim:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots + iF_i = \sum_{n=3}^{i} nF_n \tag{3}$$

O número de arestas também pode ser contado através da observação dos vértices do poliedro, através da contagem do número de arestas que ocorrem nestes, bastaria multiplicarmos por três o vértice com gênero V_3, multiplicarmos por quatro o vértice com gênero V_4, multiplicarmos por cinco o vértice com gênero V_5, e assim sucessivamente, somando seus respectivos resultados, e por conta de cada

aresta ter sido contada duas vezes, esta soma também deverá ser igualada ao dobro do número de arestas. Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ... + jV_j = \sum_{m=3}^{j} mV_m \qquad (4)$$

Das primeiras relações entre faces, arestas e vértices, existem duas desigualdades que ocorrem entre arestas e faces e também entre arestas e vértices, existentes nos poliedros que atendem a definição (1) que são respectivamente: $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$, observe:

Demonstração.

Temos de (3) que,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... + iF_i = \sum_{n=3}^{i} nF_n$$

Colocando 3 em evidência e usando (1), chegamos em:

$$2A = 3\left(F_3 + F_4 + F_5 + ...\right) + F_4 + 2F_5...$$
$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ...$$
$$2\,\mathrm{A} \geq 3\mathrm{F}$$

Note que a igualdade somente ocorrerá quando o poliedro em questão possuir apenas faces triangulares, ou seja, quando $F_4 = F_5 = ... = F_i = 0$.

A segunda desigualdade $2A \geq 3V$ é demonstrada de forma análoga, onde a igualdade ocorrerá somente quando em todos os vértices do poliedro ocorrerem 3 arestas, observe:

Temos de (4) relação e usando (2), que:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ... + jV_j = \sum_{m=3}^{j} mV_m$$

Colocando o 3 em evidência, temos:

$$2A = 3\left(V_3 + V_4 + V_5 + ...\right) + V_4 + 2V_5 + ...$$
$$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + ...$$
$$2A \geq 3F$$

5.4. Relação de Euler

Depois das definições e relações estudadas até o momento, temos condições do estudo da demonstração da relação de Euler para poliedros, a qual veremos que não é verdadeira para todos os poliedros de acordo com a definição que seguimos,

porém para todos os poliedros convexos ela é válida. Como já apresentamos nos aspectos históricos a relação de Euler, em outros contextos, usando uma definição de poliedro com maior restrição, esta relação é chamada de característica do poliedro, porém não abordaremos esta vertente aqui.

A demonstração que iremos enunciar do Teorema de Euler para poliedros convexos, a seguir, e daremos uma prova logo em sequência, segue basicamente a encontrada no livro de Lima et al (2006) “A Matemática do Ensino Médio”, a qual foi adaptada do professor Zoroastro Azambuja Filho, publicada na RPM nº 3 (1983).

Teorema 1 (Euler): Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação V – A + F = 2.

Demonstração. Para primeira parte, iniciaremos calculando a soma dos ângulos internos dos polígonos que formam as faces de um poliedro convexo P. Enumeraremos as faces de 1 até F e seja $n_k \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ e a quantidade de lados do polígono da k-ésima face sendo $1 \leq k \leq F$. Lembrando que se um poliedro é convexo, logo todas as faces que o formam são polígonos convexos, e sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada por $\pi(n-2)$.

Assim, sendo S a soma dos ângulos internos de todas as faces de P, temos:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2)$$

que reordenando fica:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)]$$

Podemos observamos que no primeiro parêntese temos a soma do número de lados de todas as faces do poliedro, e que esta vale o dobro do número de arestas, isto é, $(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) = 2A$. E no segundo parêntese temos o dobro do número de faces tendo em vista que existem F parcelas em $(2 + 2 + 2 + \cdots + 2)$, ou seja, é igual a $2F$.

Assim,

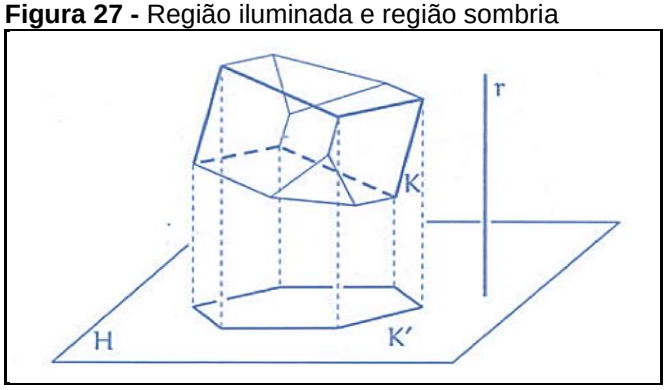
$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \qquad (1)$$

Para a segunda parte da demonstração, vamos escolher uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e que seja perpendicular a reta r. O plano H vamos chamar de plano horizontal e as retas paralelas a r, que serão perpendiculares a H, de retas verticais.

O plano H divide o espaço em dois semi-espaços, um destes contém o poliedro P, que chamamos de semi-espaço superior e dizemos que seus pontos estão acima de H.

Com a finalidade de ilustrar melhor nosso raciocínio, vamos imaginar o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto X do semi-espaço superior corresponde um ponto X′ em H, chamado sombra de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto C′, contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C.

Figura 27 - Região iluminada e região sombria



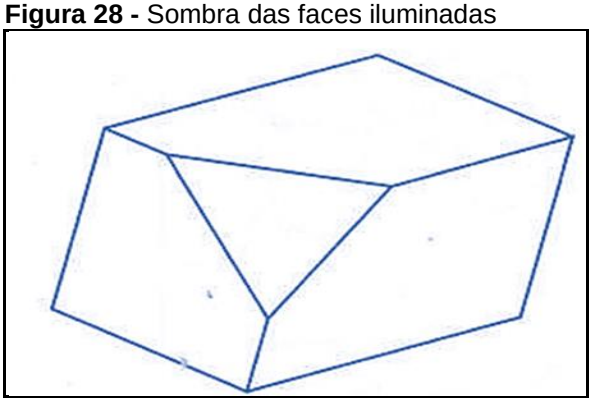
Fonte: Lima et al, 2006

Consideremos então a sombra P′ do poliedro P. Como P é convexo, cada ponto de P′ é sombra de um ou dois pontos de P. Como podemos notar, a sombra P′ do poliedro P tem como contorno um polígono convexo K′, sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de P. Cada ponto de K′ é sombra de um único ponto de P. A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior P′, portanto não pertencente a K′, é sombra de exatamente dois pontos de P. Dados dois pontos de P que têm mesma sombra, ao mais alto, mais distante de H, chamaremos ponto iluminado e o mais baixo será chamado sombrio.

Depois dessas considerações apresentadas, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra (ambos são polígonos de mesmo gênero).

Sejam: V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$, onde V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K′, contorno de P′. Consideremos então a sombra das faces iluminadas da Figura 33.

Figura 28 - Sombra das faces iluminadas



Fonte: Lima et al, 2006

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P. A soma de todos os vértices da Figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

De forma análoga, obteríamos, para soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

Somando as duas, obtemos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$
$$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2)$$
$$S = 2\pi(V - 2) \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2) e dividindo por 2π, resulta que:

$$A - F = V - 2$$

ou

$$V - A + F = 2.$$

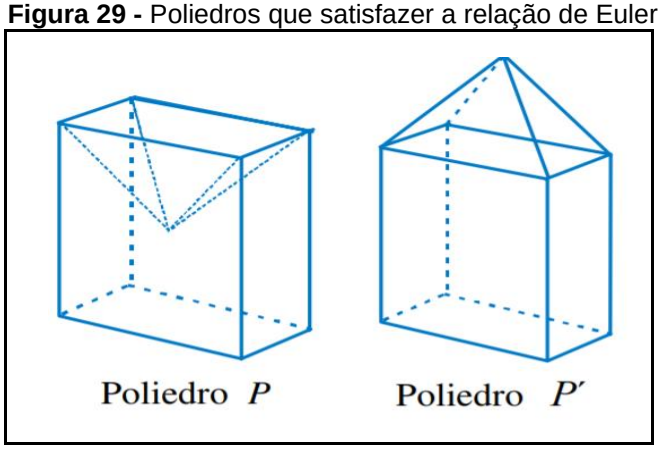
Como queríamos demonstrar. □

Como podemos analisar, não é uma tarefa difícil encontrar exemplos de poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler, por exemplo, se tomarmos um poliedro P não convexo e o colocarmos em uma posição na qual sua sombra seja um polígono, em que cada um de seus pontos seja a sombra de no

máximo dois pontos de P, a demonstração apresentada continuará válida e relação de Euler será verificada.

Segundo Wagner (2001), uma outra forma de encontrar exemplos de poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler é o processo de equivalência, o qual diz que “Dois poliedros são equivalentes se existe uma deformação contínua que transforma qualquer um deles no outro”, como ocorre entre os poliedros P e P' na figura 34, onde a deformação consistiu em “puxar” o vértice da pirâmide interior para fora, tornando ambos os poliedros contemplados pela relação.

Figura 29 - Poliedros que satisfazer a relação de Euler



Fonte: Wagner, 2001

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler, são conhecidos por poliedros eulerianos, e como consequência da existência de poliedros não convexos que satisfazem esta relação, como os poliedros P’ e P, tomamos a Propriedade (1).

Propriedade (1): Todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo.

Todas as relações encontradas, é importante destacar, são somente condições necessárias para a verificação da característica de Euler, ou seja, não basta que os três números de V, A, e F satisfaçam as relações para garantir a existência de um poliedro com essas características.

A relação $V - A + F$ é denominada de característica de Euler. Como esta característica tem validade para todos os poliedros convexos, podemos afirmar que a característica de Euler dos poliedros convexos é 2. Como já vimos nos aspectos históricos, a noção de característica de Euler foi generalizada por Poincaré para um

poliedro de qualquer dimensão e hoje é conhecida como característica de Poincaré-Euler.

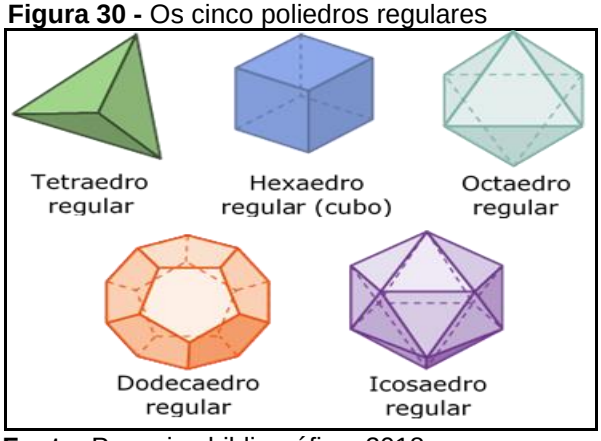
5.5. Poliedros Regulares, Semirregulares e Irregulares

Definição (2). Um poliedro convexo é regular se todas as suas faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Como abordado nos aspectos históricos, os poliedros regulares são conhecidos desde a antiguidade, ou seja, os poliedros convexos que possuem como faces polígonos regulares iguais e com todos os vértices concorrem o número igual de arestas fascinam desde as antigas civilizações. A seguir definiremos poliedros regulares, tendo como base a Definição (1).

Os Elementos de Euclides dedicam o livro XIII, último livro da obra, completamente aos poliedros regulares, contendo uma grande quantidade de cálculos os quais determinam respectivamente para cada um a razão entre o comprimento da aresta e o raio da esfera circunscrita. E no final em sua última proposição prova que os poliedros regulares são apenas cinco: **o tetraedro regular, o hexaedro regular (cubo), o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular.**

Figura 30 - Os cinco poliedros regulares



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018

Segundo Bortolossi (2009), os poliedros regulares recebem seus nomes de acordo com suas características, sendo que assim como a palavra poliedro, derivam do grego indicando as suas respectivas quantidades de faces: tetra (4), hexa (6), octa (8), dodeca (12) e icosa (20), já no que se refere a palavra cubo vem do latim cubu, significando estar deitado, estar estirado, repousar, estar deitado à mesa e do grego kýbos.

A demonstração que iremos enunciar a seguir, sobre a existência dos poliedros convexos, é atribuída a Euclides sendo a encontrada no livro de Lima et al (2006, p. 241).

Teorema 2: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração: Seja P um poliedro regular convexo com n lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos

$$2A = nF = pV \quad \text{ou} \quad A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}$$

Substituindo na relação de Euler, obtemos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

Observemos que devemos ter

$$2p + 2n - pn > 0 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} > p$$

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. As possibilidades são, então, as seguintes:

$$n = 3 \Rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \Rightarrow F = 4 & (tetraedro) \\ p = 4 \Rightarrow F = 8 & (octaedro) \\ p = 5 \Rightarrow F = 20 & (icosaedro) \end{cases}$$

$$n = 4 \Rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 6 \qquad (cubo)$$

$$n = 5 \Rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 12 \quad (dodecaedro)$$

Como queríamos demonstrar. □

Definição (3). Um poliedro P é semi-regular se:

a) P é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo.

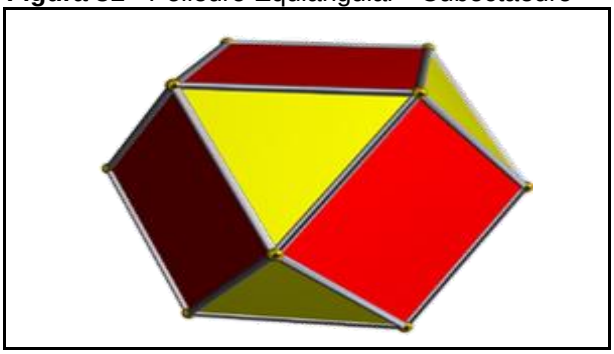
b) Todos os vértices de P são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice.

c) Todo vértice de P pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro.

Os poliedros semi-regulares são classificados em **equiangulares** e **equifaciais**.

Definição (4). Um poliedro é equiangular se seus ângulos poliédricos são todos iguais e as faces, polígonos regulares de mais de um tipo.

Figura 31 - Poliedro Equiangular - Cuboctaedro

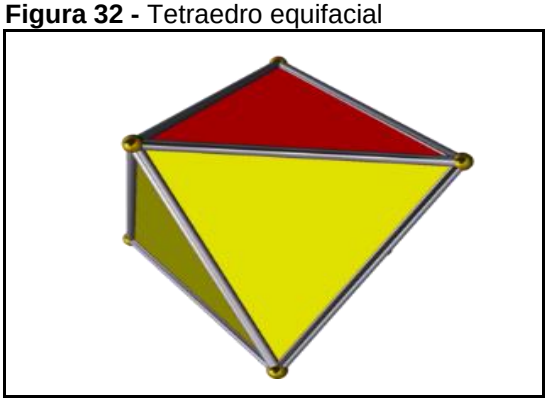


Fonte: Software Poly 1.12.

Como podemos notar observando o poliedro da Figura 36 suas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e todos os ângulos poliédricos são iguais entre si.

Definição (5). Um poliedro é equifacial se suas faces são todas iguais, não necessariamente polígonos regulares, e seus ângulos poliédricos, também, não são necessariamente iguais.

Figura 32 - Tetraedro equifacial



Fonte: Software Poly 1.12.

Na figura 37 podemos observar um exemplo de poliedro equifacial, ou seja, em que a face é formada pelo mesmo polígono, neste caso triângulos, porém estes não são triângulos equiláteros.

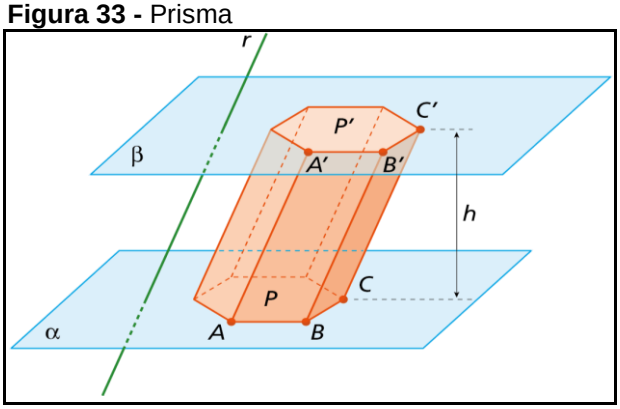
Existem poliedros que não se classificam como regulares e nem como semi-regulares, os trataremos em seguida.

Definição (6). Os poliedros que não podem ser classificados como regulares ou semi-regulares são chamados poliedros multiformes. Dentre estes, existem dois tipos com maior destaque: **os prismas** e **as pirâmides.**

Os Prismas e as Pirâmides também são classificados como poliedros irregulares, uma vez que não admitem lei de geração que os caracterize perfeitamente

Definição (7). Consideremos dois planos paralelos, α e β, uma região poligonal P contida em P e uma reta r que intercepta os planos α e β. Chama-se prisma o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades é um ponto da região P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

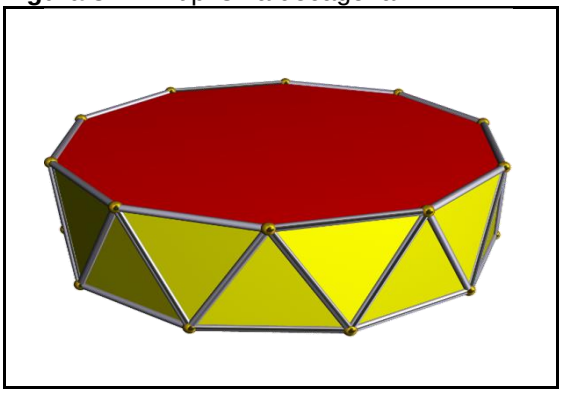
Figura 33 - Prisma



Fonte: Leonardo, 2012.

Um prisma regular ao sofrer uma variação em sua construção, na qual suas faces laterais são triângulos que equiláteros passa a ser denominado de antiprisma (Figura 39).

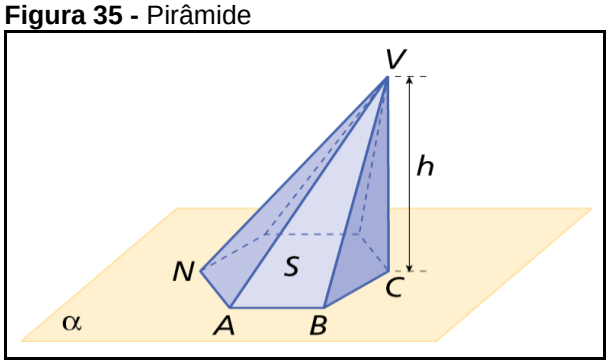
Figura 34 - Antiprisma decagonal



Fonte: Software Poly 1.12.

Definição (8). Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α. Chamamos de pirâmide o poliedro formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.

Figura 35 - Pirâmide



Fonte: Leonardo, 2012.

5.6. Poliedros de Platão

A definição que iremos utilizar dos Poliedros de Platão, bem como a demonstração que iremos enunciar, e dar prova em sequência, segue basicamente a encontrada no livro de Dolce e Pompeo (1985) “Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10”.

Definição (9). Um poliedro é chamado de poliedro de Platão ou platônico se, e somente se, as três seguintes condições:

a) Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,

b) Em todos os seus vértices concorrem o mesmo número (m) de arestas,

c) Satisfaz a relação de Euler $(V - A + F = 2)$

Teorema (3). Existem cinco e apenas cinco Poliedros de Platão.

Demonstração. Usando as condições que devem ser contempladas para um poliedro ser chamado de poliedro de Platão, temos:

a) cada uma das F faces tem n arestas $(n \geq 3)$, e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \qquad (1)$$

b) cada um dos V vértices tem m arestas $(m \geq 3)$, e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{m} \qquad (2)$$

c) $V - A + F = 2$ (3)

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$\frac{2A}{m}-A+\frac{2A}{n}=2$$

Dividindo por $2A$, temos:

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A} \qquad (4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Notemos, porém, que se m e n fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m>3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n>3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leq 0$$

, o que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, $m = 3$ ou $n = 3$, que significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, $triedro$ ou $triângulo$:

1º) Para $m = 3$, supondo que tem $triedro$.

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n}>\frac{1}{6} \Rightarrow n<6.$$

m	***n***
3	3
3	4
3	5

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$

Logo, respectivamente são faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais.

2º) Para $n = 3$, supondo que tem $triângulo$.

Em (4) vem:

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m}>\frac{1}{6} \Rightarrow m<6.$$

m	***n***
3	3
4	3
5	3

Então, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$

Logo, respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos.

Concluímos com os resultados encontrados no 1º e no 2º, que os Poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela abaixo, existindo portanto, cinco, e somente cinco, as classes de Poliedros de Platão.

m	***n***
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Para sabermos o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada Poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de m e n encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Podemos tomar como exemplo, uma das possibilidades encontradas para m e n, como $m = 3$ e $n = 5$.

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{30}=\frac{1}{A} \Rightarrow A=30.$$

Em (2): $$V=\frac{2\cdot 30}{3}\Rightarrow V=20$$

Em (1): $$F=\frac{2\cdot 30}{5}\Rightarrow F=12$$

Como já vimos, o número de faces determina o nome do poliedro, então neste caso temos o dodecaedro $dodecaedro$.

Notemos que $m = 3$, significa ângulos triédricos ou triedros e $n = 5$, significa faces pentagonais.

Procedendo desta forma para os demais casos encontrados, temos os nomes das classes dos poliedros de Platão, as quais apresentamos no quadro a seguir:

m	***n***	***A***	***V***	***F***	***Nome***
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

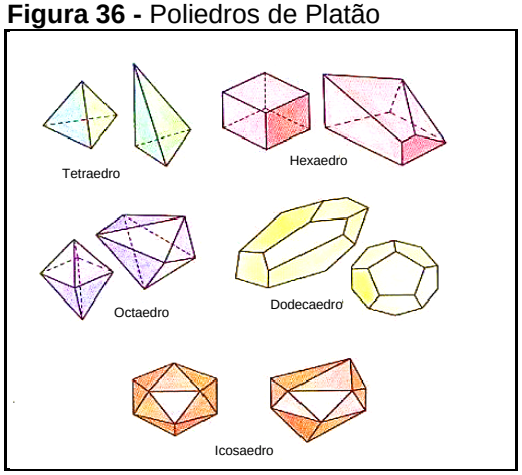
Como queríamos demonstrar. □

Por essas conclusões temos que todos os poliedros convexos regulares são poliedros de Platão, lembrando que como já vimos, existem cinco e somente cinco poliedros convexos regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Contudo, vale ressaltar que existem poliedros que satisfazem a Definição (9), pertencendo as classes dos Poliedros de Platão, porém não satisfazem a Definição (2), não sendo assim regulares, como é o caso do prisma quadrangular que

pertence a classe dos hexaedros e contempla a (9), mas não contempla (2). Assim, podemos perceber que existem poliedros que mesmo não sendo regulares pertencerão as classes dos poliedros de Platão como podemos observar na Figura 41.

Figura 36 - Poliedros de Platão



Fonte: Machado, 1996.

Desse modo, analisando as definições (9) e (2), bem como os exemplos citados, poderemos chegar a seguinte interpretação “Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular” (p. 133).

5.7. Poliedros Arquimedianos

Os poliedros arquimedianos podem ser denominados de semi-regulares com características particulares de simetria, as quais os diferenciam da família dos prismas e dos antiprismas, que fazem parte de um grupo de simetria diedral, ou seja, que possuem faces laterais equiláteras quadradas e triangulares, e sendo assim, constituindo um infinito grupo de poliedros.

Definição (10). Os sólidos de Arquimedes ou poliedros arquimedianos são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro.

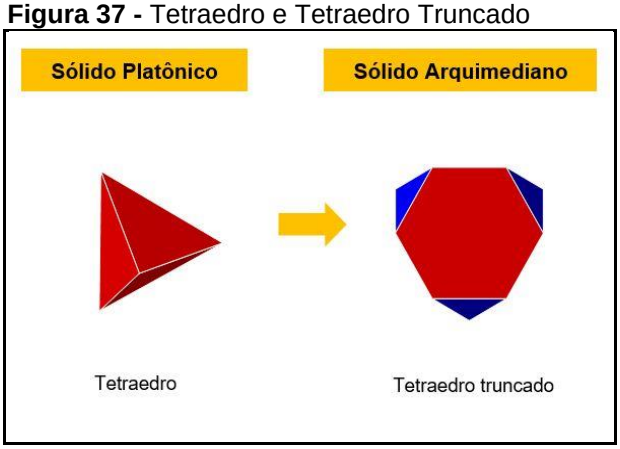
Observação (1): De acordo com a definição que tomamos, os prismas e antiprismas que possuem faces laterais regulares são arquimedianos, porém os infinitos prismas e antiprismas não são de modo geral incluídos nesta família. Assim,

sem os prismas e antiprismas, a família dos arquimedianos é finita, e desse modo a análise para obter esses finitos poliedros segue um caminho similar ao caminho indicado na demonstração de Euclides para determinar os poliedros platônicos, porém, neste caso, pode ser muito mais trabalhoso, uma vez que no mesmo vértice podem-se incluir polígonos regulares diferentes.

Como já mencionamos nos aspectos históricos, Kepler demonstra a existência de treze sólidos arquimedianos nomeando cada um deles, dos quais sete são obtidos através de truncaduras, isto é, sucessão de cortes por planos perpendiculares ao eixo de simetria de rotação que passa por vértices determinados, de um poliedro platônico. A seguir apresentaremos cada um destes poliedros.

O tetraedro ao sofrer truncaturas nos vértices de modo que todos os polígonos originados formem faces congruentes, obteremos o tetraedro truncado como podemos observar na Figura 42, porém se os cortes forem realizados passando pelo ponto médio de cada aresta, obteremos um octaedro, que é um poliedro platônico, o qual já conhecemos.

Figura 37 - Tetraedro e Tetraedro Truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018

O quadro 18 apresenta as características dos elementos que formam o Tetraedro e Tetraedro Truncado.

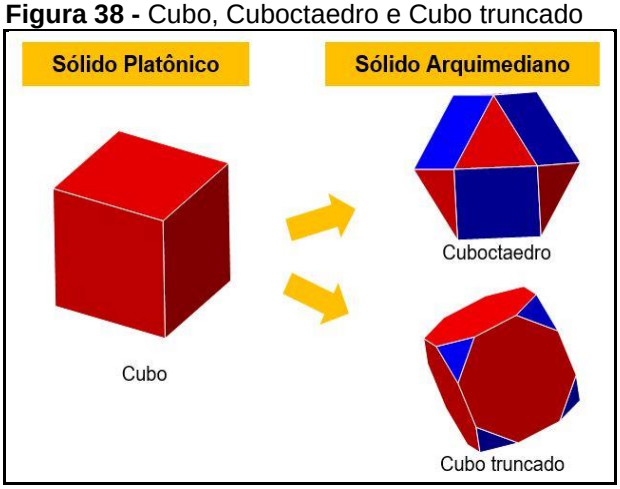
Quadro 6 - Características: Tetraedro e Tetraedro Truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Tetraedro	4 triângulos equiláteros	4	6
Tetraedro truncado	4 triângulos equiláteros 4 hexágonos regulares	12	18

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2018)

O hexaedro (cubo) ao sofrer truncaturas nos vértices de modo que todos os polígonos originados formem faces congruentes, obteremos o cubo truncado, e se as truncaturas que forem realizadas passarem pelo ponto médio de cada aresta obteremos o cuboctaedro, como ilustra a Figura 43.

Figura 38 - Cubo, Cuboctaedro e Cubo truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 19 apresenta as características dos elementos que formam o Cubo, Cuboctaedro e Cubo truncado.

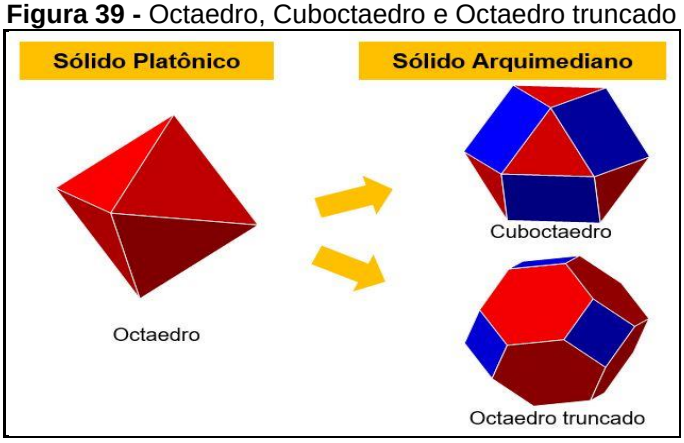
Quadro 7 - Características: Cubo, Cuboctaedro e Cubo truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Cubo	6 quadrados	8	12
Cubo truncado	8 triângulos equiláteros 6 octógonos regulares	24	36
Cuboctaedro	8 triângulos equiláteros 6 quadrados	12	24

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O octaedro ao sofrer truncaturas nos vértices de modo que todos os polígonos originados formem faces congruentes, obteremos o octaedro truncado, e se as truncaturas que forem realizadas passarem pelo ponto médio de cada aresta obteremos o cucoctaedro, como ilustra a Figura 44.

Figura 39 - Octaedro, Cuboctaedro e Octaedro truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 20 apresenta as características dos elementos que formam o Octaedro, Cuboctaedro e Octaedro truncado.

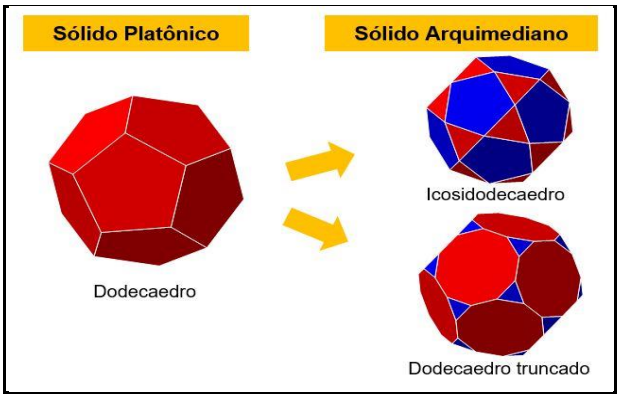
Quadro 8 - Características: Octaedro, Cuboctaedro e Octaedro truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Octaedro	8 triângulos equiláteros	6	12
Octaedro truncado	6 quadrados 8 hexágonos regulares	24	36
Cuboctaedro	8 triângulos equiláteros 6 quadrados	12	24

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O dodecaedro ao sofrer truncaturas nos vértices de modo que todos os polígonos originados formem faces congruentes, obteremos o dodecaedro truncado, e se as truncaturas que forem realizadas passarem pelo ponto médio de cada aresta obteremos o icosidodecaedro, como ilustra a Figura 45.

Figura 40 - Dodecaedro, Icosidodecaedro e Dodecaedro truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 21 apresenta as características dos elementos que formam o Dodecaedro, Icosidodecaedro e Dodecaedro truncado.

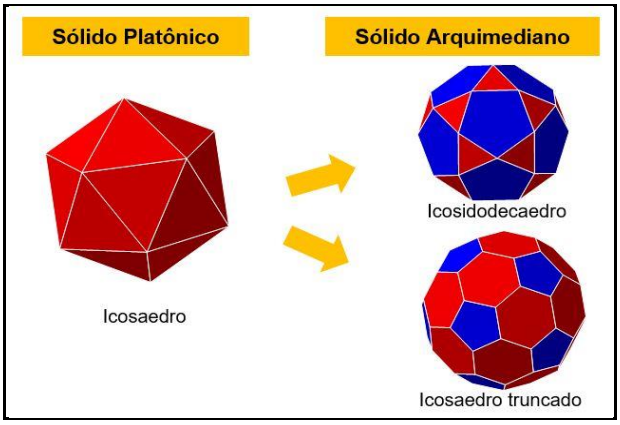
Quadro 9 - Características: Dodecaedro, Icosidodecaedro e Dodecaedro truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Dodecaedro	12 pentágonos regulares	20	30
Dodecaedro truncado	20 triângulos equiláteros 12 decágonos regulares	60	90
Icosidodecaedro	20 triângulos equiláteros 6 pentágonos regulares	30	60

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O icosaedro ao sofrer truncaturas nos vértices de modo que todos os polígonos originados formem faces congruentes, obteremos o icosaedro truncado, e se as truncaturas que forem realizadas passarem pelo ponto médio de cada aresta obteremos o icosidodecaedro, como ilustra a Figura 46.

Figura 41 - Icosaedro, Icosidodecaedro e Icosaedro truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 22 apresenta as características dos elementos que formam o Dodecaedro, Icosidodecaedro e Dodecaedro truncado.

Quadro 10 - Características: Icosaedro, Icosidodecaedro e Icosaedro truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Icosaedro	20 triângulos equiláteros	12	30
Icosaedro truncado	12 pentágonos regulares 20 hexágonos regulares	60	90
Icosidodecaedro	20 triângulos equiláteros 6 pentágonos regulares	30	60

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

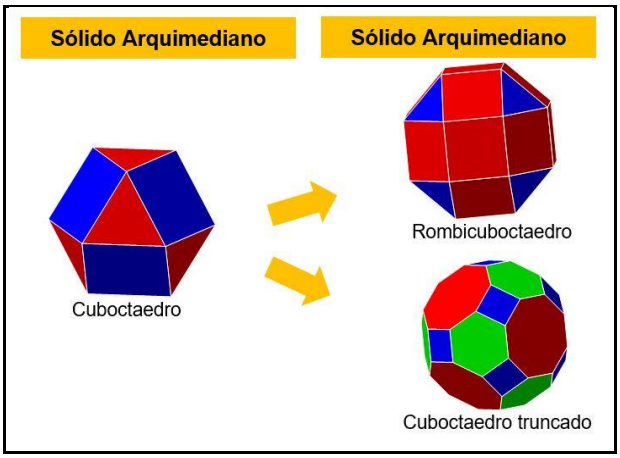
Como comentamos a princípio, os sete poliedros arquimedianos apresentados até o momento se originam dos poliedros platônicos, de modo que suas respectivas nomenclaturas obedecem às nomenclaturas dos poliedros dos

quais se originaram. E quanto ao cuboctaedro e o icosadodecaedro, que como já vimos podem ser originados de dois poliedros platônicos, cada um, o primeiro do cubo e octaedro, enquanto que o segundo do dodecaedro e do icosaedro, a nomenclatura se justifica da mesma forma a partir da junção dos nomes dos dois poliedros que podem originá-los.

Além dos sete poliedros arquimedianos obtidos a partir das truncaturas dos poliedros platônicos, existem outros poliedros desta mesma classe que podem ser obtidos a partir de novas truncaturas de poliedros já truncados, ou seja, poliedros arquimedianos que darão origem a novos poliedros arquimedianos, em alguns momentos será utilizado o prefixo “Rombi” nos novos poliedros originados, pelo fato de que estes podem ser inscritos em sólidos com faces rômbicas.

Ao truncarmos os vértices do cuboctaedro, não obteremos faces quadradas, uma vez que em cada vértice existem dois triângulos e dois quadrados, formando assim faces retangulares, como perceberemos ao visualizar os ângulos internos deste, e desse modo transformando esses retângulos em quadrados formaremos consequentemente o grande rombicuboctaedro ou cuboctaedro truncado, porém se as truncaturas em questão forem realizadas passando pelo ponto médio das faces do sólido, ocorrerá um processo semelhante, mas que resultará no rombicuboctaedro, como podemos observar na Figura 47.

Figura 42 - Rombicosidodecaedro, Cuboctaedro e Cuboctaedro truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 23 apresenta as características dos elementos que formam o Rombicosidodecaedro, Cuboctaedro e Cuboctaedro truncado.

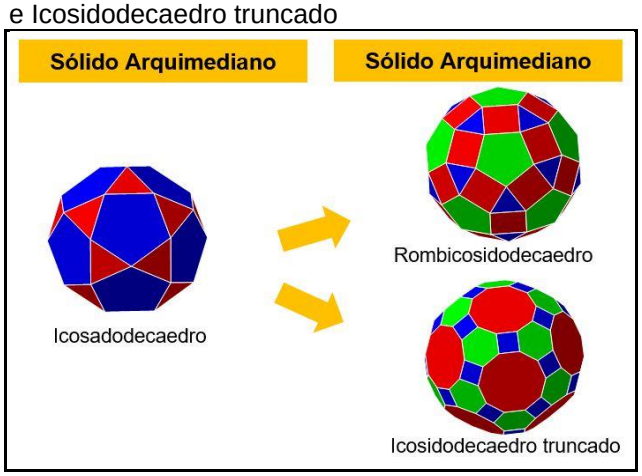
Quadro 11 - Características: Rombicosidodecaedro, Cuboctaedro e Cuboctaedro truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Cuboctaedro	8 triângulos equiláteros 6 quadrados	12	24
Cuboctaedro truncado	12 quadrados 8 hexágonos 6 octógonos	48	72
Rombicuboctaedro	8 triângulos equiláteros 18 quadrados	24	42

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O icosadodecaedro ao sofrer truncaturas nos vértices, também não terá faces quadradas, e sim retângulos, logo terá que ser realizada um processo semelhante ao anteriormente mostrado, transformando os retângulos em quadrados, obtendo assim o grande rombicosidodecaedro ou icosidodecaedro truncado, porém se as truncaturas em questão forem realizadas passando pelo ponto médio das arestas das faces do sólido, ocorrerá um processo semelhante, mas que resultará no rombicosidodecaedro, como podemos observar na Figura 48.

Figura 43 - Icosadodecaedro, Rombicosidodecaedro e Icosidodecaedro truncado



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 24 apresenta as características dos elementos que formam o Icosadodecaedro, Rombicosidodecaedro e Icosidodecaedro truncado.

Quadro 12 - Características: Icosadodecaedro, Rombicosidodecaedro e Icosidodecaedro truncado

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS

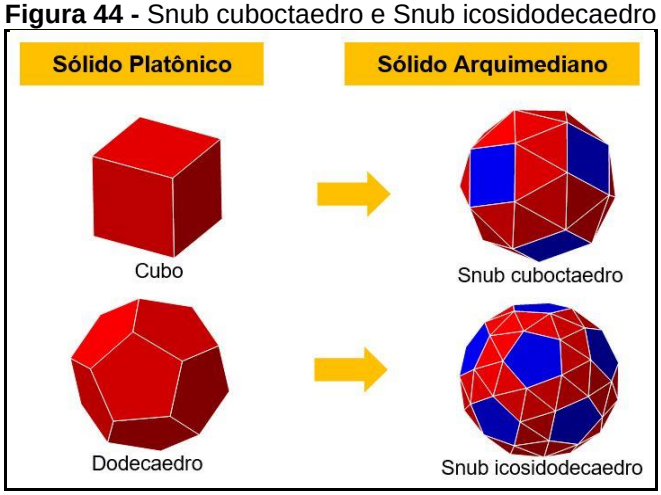
Icosidodecaedro	20 triângulos equiláteros 6 pentágonos regulares	30	60
Icosidodecaedro truncado	30 quadrados 20 hexágonos 12 decágonos	120	180
Rombicosidodecaedro	20 triângulos equiláteros 30 quadrados 12 pentágonos regulares	60	120

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Porém, existem poliedros Arquimedianos que não são obtidos através de truncaturas, como os apresentados até aqui, esses poliedros são chamados de poliedros Arquimedianos achatados, os quais são construídos através de um processo denominado “Snubificação”, uma operação que consiste no afastamento das faces do poliedro, girando-o em determinado ângulo e preenchendo em seguida os espaços vazios resultantes com outros polígonos.

O cubo ao sofrer o processo de snubificação resulta no snub cuboctaedro ou cubo achatado, já o dodecaedro ao sofrer este mesmo processo resulta no snub icosidodecaedro ou dodecaedro achatado, como podemos observar na Figura 49. É importante ressaltar que estes poliedros resultantes podem ser obtidos através de truncaturas especiais do octaedro e do icosaedro.

Figura 44 - Snub cuboctaedro e Snub icosidodecaedro



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

O quadro 25 apresenta as características dos elementos que formam Cubo, Snub cuboctaedro, Dodecaedro e Snub icosidodecaedro.

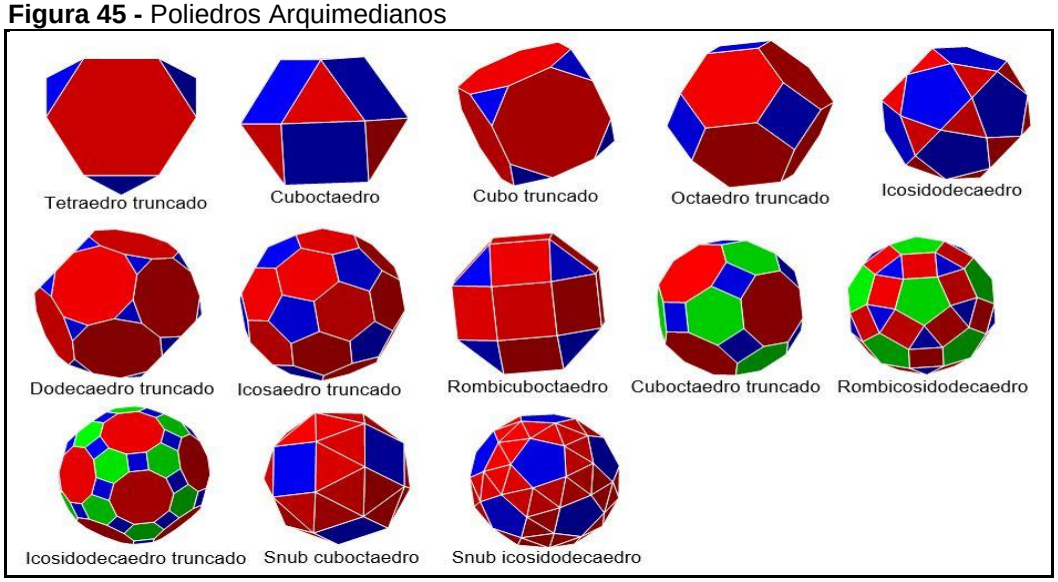
Quadro 13 - Características: Cubo, Snub cuboctaedro, Dodecaedro e Snub icosidodecaedro

POLIEDRO	FACES	VÉRTICES	ARESTAS
Cubo	6 quadrados	8	12
Snub cuboctaedro	32 triângulos 6 quadrados	24	60
Dodecaedro	12 pentágonos regulares	20	30
Snub icosidodecaedro	80 triângulos equiláteros 12 pentágonos regulares	60	150

Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018

Para concluirmos o estudo dos sólidos Arquimedianos, apresentamos na Figura 50, todos esses respectivos poliedros, os quais mostramos em nosso estudo.

Figura 45 - Poliedros Arquimedianos



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

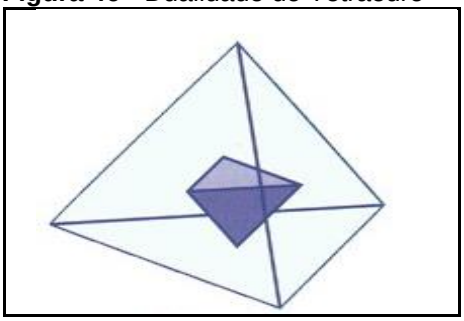
5.8. Poliedros Duais

Os poliedros quando podem ser associados em pares, são chamados duais, quando os vértices de um se inscrevem nas faces do outro. Desse modo, o dual do dual será o poliedro de origem, já o dual de um poliedro que possui vértices equivalentes será um com faces equivalentes, e de um com arestas equivalentes será também um com arestas equivalentes, obedecendo a definição a seguir.

Definição (11). Considere P um poliedro. O poliedro dual de P é o poliedro cujos vértices são os centros de cada uma das faces de P.

O dual de um tetraedro regular é um tetraedro regular, por esse motivo dizemos que o tetraedro regular é auto-dual, como podemos observar na Figura 51.

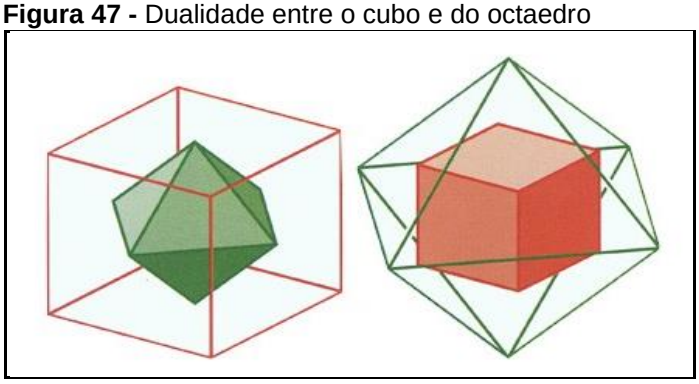
Figura 46 - Dualidade do Tetraedro



Fonte: Tavares, 2009.

O dual do cubo é o octaedro regular, e o dual do octaedro regular é o cubo, como mostrado na Figura 52. Desse modo, o cubo e o octaedro regular são poliedros duais.

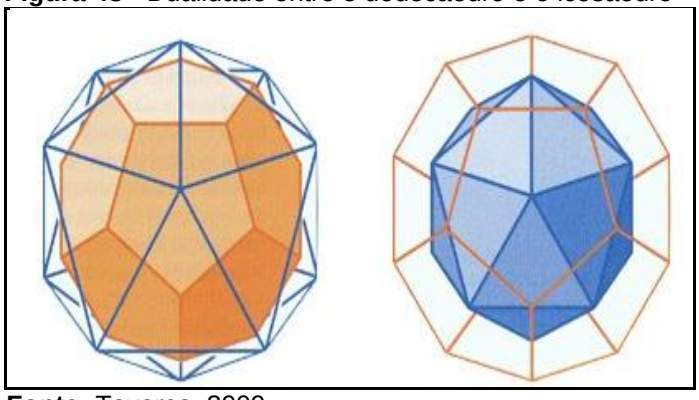
Figura 47 - Dualidade entre o cubo e do octaedro



Fonte: Tavares, 2009.

O dual do dodecaedro é o icosaedro regular, e o dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular, como mostrado na Figura 53. Desse modo, o dodecaedro regular e o icosaedro regular são poliedros duais.

Figura 48 - Dualidade entre o dodecaedro e o icosaedro



Fonte: Tavares, 2009.

Como podemos observar os poliedros regulares (sólidos de Platão) estão organizados em pares duais, porém vale ressaltar que os poliedros regulares de Kepler-Poinsot, mesmo não sendo convexos, também possuem essa característica, e que os poliedros duais dos sólidos de Arquimedes são os Sólidos de Catalan e vice-versa.

5.9. Planificação de Poliedros

Vamos finalizar os aspectos matemáticos, apresentando a planificação de alguns poliedros, neste caso determinadas planificações dos poliedros que foram abordados no decorrer deste tópico.

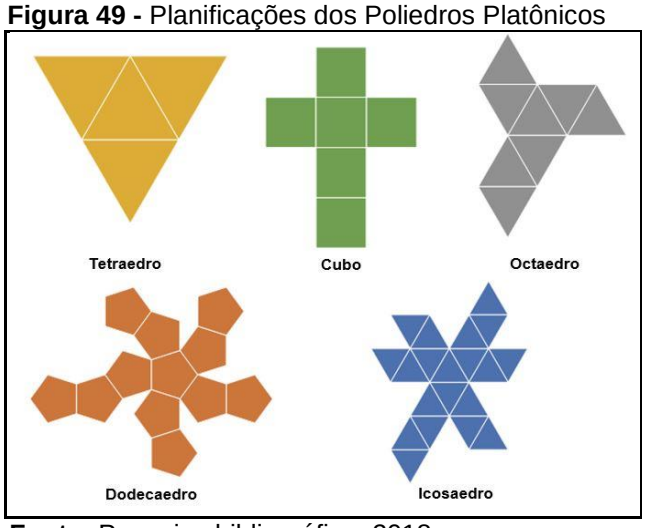
Como já tratamos no tópico sobre a história dos poliedros, o registro mais antigo de planificações de poliedros é atribuído ao artista alemão Albretch Dürer, que realizou tal feito com o propósito do fornecer para pintores um guia de ilustrações corretas contemplando as leis da teoria da perspectiva.

Definição (12). Planificação de um poliedro consiste no resultado do processo do corte de poliedros no decorrer de suas curvas, e posteriormente abri-lo de modo que possa ser disposto em uma superfície plana, não existindo sobreposições e deformações em suas respetivas faces. E que uma planificação por arestas consiste na planificação resultante de cortes ao longo das arestas de um poliedro (BORTOLOSSI, 2009).

Segundo Bortolossi (2009) o tetraedro regular possui duas planificações diferentes, o cubo e o octaedro regular possuem 11 planificações distintas, já o icosaedro regular e o dodecaedro regular possuem 43380 planificações diferentes. E não podemos afirmar se todo poliedro convexo possui uma planificação por arestas, porém, contudo, podemos afirmar que existem poliedros não convexos que não possuem uma tal planificação.

Na Figura 54, a seguir, apresentaremos algumas planificações dos poliedros regulares platônicos:

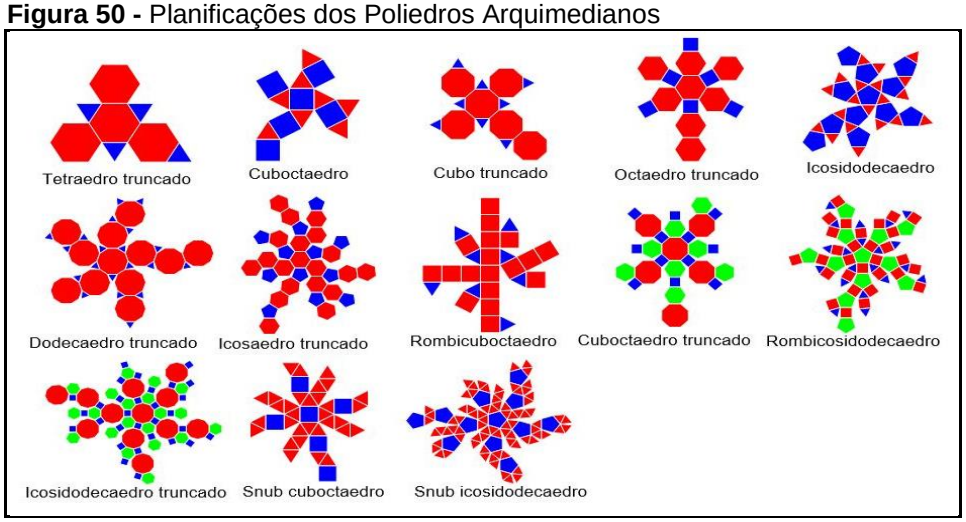
Figura 49 - Planificações dos Poliedros Platônicos



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Na Figura 55, a seguir, apresentaremos algumas planificações dos Poliedros Arquimedianos:

Figura 50 - Planificações dos Poliedros Arquimedianos



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Como podemos observar nas planificações dos poliedros apresentadas, sempre uma planificação de poliedros resultará em um conjunto de polígonos de lados comuns, que ao serem dobrados retornam ao poliedro que lhe deu origem (DELTON, 2006, p. 16).

6. O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE

Como já citamos no princípio, esta pesquisa consistirá na realização de um experimento didático sobre o ensino de poliedros, e objetivando nortear o processo de ensino e aprendizagem desenvolvemos uma sequência de atividades embasadas

na metodologia do Ensino de Matemática por Atividade, no contexto da Engenharia Didática. A escolha do Ensino por Atividade é justificada pelo fato de acreditarmos nas potencialidades desta na realização de um processo de aprendizagem de matemática mais dinâmico, envolvente e participativo por parte do discente.

O Ensino por Atividade é uma metodologia pautada na construção da autonomia do aluno na construção do seu conhecimento, sendo esta a principal peculiaridade desta metodologia, onde os conteúdos propostos possam ser descobertos pelo próprio aluno durante o processo de aprendizagem, tendo o professor apenas como orientador (MENDES e SÁ, 2006, p. 13).

Essa metodologia, busca apresentar os conteúdos matemáticos através do encontro de leis gerais, ou ainda de generalizações, sem a intervenção do professor, no que diz respeito a oferecer informações iniciais, fazendo com que o aluno construa sua aprendizagem por meio de descobertas, conforme afirma Sá (2009):

> A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

Nesta perspectiva, o ensino não segue uma sequência tradicional pelo professor, isto é, apresentação de conceitos, definições, exemplos e exercícios, seguirá a partir de uma atividade com perguntas que buscam instigar e nortear o discente a descoberta, ou mesmo redescoberta através de leis gerais, ou ainda de generalizações, de modo que o aluno encontre uma regularidade que o encaminhe a resolução da atividade e apreensão do conhecimento.

Segundo Sá (2009), para o desenvolvimento efetivo do Ensino por Atividades, existem alguns cuidados que deverão ser tomados quando as atividades que serão aplicadas forem planejadas e executadas, as quais destacamos a seguir:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento

> intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller(1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÁ, 2009, p.18).

6.1. Momentos do Ensino por Atividade

Os momentos do ensino por atividades que serão abordados neste trabalho compreendem um estudo de Sá (2019), o qual ainda não havia sido publicado quando realizamos nossa pesquisa, e que nos foi disponibilizado pelo autor tendo em vista o caráter metodológico de nossa pesquisa, no que diz respeito a fundamentação teórica, bem como os procedimentos que serão realizados no decorrer das atividades que compõem a sequência didática construída, e que será posteriormente apresentada.

Segundo Sá (2019) o ensino por atividades pode ser realizado por dois tipos básicos de atividade que são a de conceituação e a de redescoberta, as quais possuem características distintas.

A atividade de conceituação objetiva levar o estudante a percepção da ocorrência de um determinado tipo de situação ou objeto matemático, objetivando a construção da definição do objeto o qual foi percebido durante o processo, ou seja, o objetivo desse de uma atividade de conceituação é a definição do objeto matemático.

Já a atividade de redescoberta objetiva levar o estudante ao descobrimento de uma relação/propriedade referente a um dado objeto ou operação matemática, correspondendo ao momento de exploração do objeto, a qual antecede a demonstração do resultado, não se limitando simplesmente na demonstração de um resultado matemático recorrente do processo.

Em linhas gerais, enquanto atividade de conceituação visa a construção do conhecimento durante a definição do objeto matemático, a atividade de redescoberta tem o enfoque na construção do conhecimento a partir da descoberta das relações/propriedade durante a exploração do objeto matemático.

Apesar da distinção entre os objetivos de uma atividade de conceituação e de uma atividade de redescoberta, o ensino de matemática por meio de uma aula por ambos os tipos de atividade, podem ser divididos didaticamente em seis momentos a saber: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização (SÁ, 2019).

De acordo com Sá (2019), descrevemos a seguir como os seis momentos do ensino por atividade apresentados, sendo esta de conceituação ou redescoberta, são estruturados, bem como as atribuições do professor e dos estudantes em cada respectivo momento da execução da atividade.

No primeiro momento, a **organização**, a turma onde ocorrerá a aplicação da atividade deverá ser de preferência organizada em equipes construídas de forma, preferencialmente, espontânea de no mínimo dois e no máximo quatro alunos. Essas atividades poderão ocorrer também de forma individual, porém não é recomendável uma vez que não estimula a troca de ideias entre os participantes, processo que é fundamental para o processo de aprendizagem, nestes casos Sá (2019) afirma que:

> Se houver o caso de algum estudante desejar realizar a atividade individualmente o professor deve, sem pressão alguma, tentar convencer o estudante da necessidade de realizar em grupo, mas se não conseguir deve permitir a realização individual e aguardar para ver o que acontecerá ao longo da realização das atividades. Há relatos de estudantes que no início não desejavam realizar atividades em grupo e no decorrer da realização das mesmas passaram a participar ativamente em grupo (SÁ, 2019, p.16).

Neste momento cabe ao professor dirigir as ações e orientar a formação das equipes, demonstrando segurança e que planejou cuidadosamente a atividade proposta, e ainda evitar que os discentes se dispersem em ações alheias a organização da turma para realização da atividade.

No segundo momento, a **apresentação**, no caso se referindo a apresentação da atividade, compete ao professor a distribuição do material e roteiro da atividade, sendo que o roteiro, dependendo das condições estruturais da escola, pode ser disponibilizado impresso ou no quadro, porém preferencialmente impresso. O material deve estar organizado de modo que facilite a distribuição destes (kits), evitando desse modo o possível desperdício de tempo que poderia ocorrer. Neste momento é esperado que os participantes estejam atentos as orientações que serão apresentadas.

No terceiro momento, a **execução**, é correspondente à etapa da experimentação no instante em que o pesquisador realiza a manipulação dos materiais fazendo processos de medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Neste momento é esperado que cada equipe reproduza os procedimentos descritos na atividade.

Ao professor neste momento, cabe deixar as equipes desenvolverem a atividade livremente, supervisionando apenas e auxiliando nos casos de dúvidas quando solicitado, ou ainda quando perceber a existência de dificuldades na execução que vierem a surgir em cada equipe durante o processo, deve intervir com orientações claras e precisas de modo permitir a continuidade da atividade sem constrangimento do estudante.

Quanto aos estudantes, cabe procurar seguir fielmente as instruções contidas no roteiro da atividade com a atenção completamente voltada para esta, não se dispersando em conversas alheias ao processo em sua equipe ou em outra, evitando visita a outros grupos.

O estudante neste momento, deverá ter a oportunidade de ser protagonista na obtenção dos resultados, todavia deverá receber as devidas orientações, por parte do professor, as quais devem ocorrer em momentos de dúvidas e dificuldades durante a realização de alguma ação recorrente da atividade.

Se a dúvida ou questionamento em questão, tiver origem em uma falha nas orientações existentes no procedimento, ou ainda na confecção do material usado na atividade, o professor deverá socializar imediatamente com as equipes o corrido, apresentando as devidas orientações que contornem a falha e permita a continuidade do processo, se assim for possível. É importante destacar que esse tipo de situação pode ser evitada através de um planejamento cuidadoso das atividades.

No quarto momento, o **registro**, é correspondente a sistematização de uma pesquisa científica, e nele espera-se que as equipes registrem todas as informações obtidas no decorrer da execução dos procedimentos no espaço indicado no roteiro, o qual deve conter um espaço adequado para a inserção do registro das informações que serão produzidas no decorrer da execução dos procedimentos, otimizando o tempo da atividade. Ao professor cabe nesse momento, supervisionar o processo e realizar intervenções quando surgirem dúvidas.

No quinto momento, a **análise**, é correspondente a análise dos resultados de uma pesquisa científica, e nele espera-se que a partir das análises das informações registradas cada equipe descubra relação/propriedade válida, sendo este um momento de fundamental importância para o andamento efetivo da atividade, uma vez que é o primeiro momento em que os alunos terão acesso a informação o professor deseja obter com a atividade.

Ao professor no decorrer deste momento, cabe fornecer auxílio quando surgirem dificuldades por parte de uma equipe no que se refere a percepção da relação/propriedade válida a partir dos registros realizados. Esse auxílio a equipe deverá ser feito através da formulação de questões que instiguem seus membros a perceberem uma relação/propriedade com validade.

O momento em questão deverá culminar com a elaboração de uma conclusão construída pela equipe ou participante que possa vir a satisfazer o objetivo da atividade proposta pelo professor quando planejou a respectiva atividade. E se mesmo após o auxílio do professor alguma equipe não consiga chegar no desejado, deve-se prosseguir para o próximo momento, isto é, a institucionalização.

No sexto e último momento, a **institucionalização**, é correspondente, de modo geral, a construção das considerações finais de uma pesquisa científica. É neste momento que será produzida a conclusão oficial da turma, tomando por base as conclusões que cada equipe elaborou durante o momento da análise, e dessa forma construindo um enunciado correspondente a uma conclusão alcançada em recorrência da realização da atividade.

Neste momento, cabe ao professor solicitar que um representante de cada equipe se dirija até o quadro e faça o registro da conclusão elaborada por esta, independente do formato que a conclusão se apresente. Logo em seguida, o professor deverá analisar os registros de todas as equipes no quadro, e posteriormente indagar as equipes sobre quais das conclusões que foram apresentadas conseguem levar ao entendimento da relação/propriedade estabelecida a alguém que não participou da atividade.

O professor deverá ainda, chamar a atenção da turma para as características que compõem uma conclusão, e finalmente, elaborar juntamente com a turma uma que permita a alguém que não participou da atividade entender a relação/propriedade estabelecida, e ainda, se possível, representar esta conclusão também com representações visuais ou símbolos matemáticos. A essa conclusão

elaborada pelo professor em conjunto com a turma será denominada conclusão da turma, que representa o término da institucionalização e consequentemente o final dos momentos do ensino por atividade.

Segundo Sá (2019) o momento final da atividade, é uma oportunidade para que o professor realize considerações históricas a respeito do conceito trabalhado, caso seja possível, uma vez que mostra o lado humano da produção conhecimento matemático ao longo do tempo. E recomenda que após a institucionalização seja proposto um conjunto de questões relacionadas com o conhecimento trabalhado na atividade.

No que se refere ao contexto geral da aplicação das atividades, Sá (2019) afirma que é recorrente dificuldades na primeira atividade por parte dos estudantes, pelo fato da pouca experiência destes em realizarem atividades com esta abordagem, isto é, o raro contado com atividades que solicitem a construção de textos conclusivos, sendo desse modo comum a reprodução de uma conclusão da atividade com apenas o registro da relação obtida no momento da análise, não atendendo as condições de um texto de caráter conclusivo, e que neste contexto o professor não deve nutrir grandes preocupações relacionadas a esse fato.

O autor afirma ainda que, o professor ao realizar algumas perguntas durante o processo de elaboração da conclusão pode auxiliar em uma construção mais eficaz da mesma, levando à elaboração de uma conclusão adequada para atividade. E que a existência da possível demora na conclusão da atividade por conta da dificuldade na elaboração da construção da conclusão por parte da turma não deve ser encarada com preocupação, uma vez que o tempo gasto nestas atividades tende a diminuir a medida em que vão sendo desenvolvidas atividades de mesma natureza.

6.2. Considerações do uso do Ensino por Atividade

Desse modo, tendo em vista o potencial de transformar o discente em autor principal do seu aprendizado proporcionado pelo Ensino por Atividades, de forma a construir seus conhecimentos através de atividades de forma ativa, este certamente através dos seus respectivos momentos, levará a construção do conhecimento através um processo de ensino e aprendizagem mais significativos.

Dentro do contexto do Ensino por Atividade e dos momentos que o constituem, elaboramos atividades envolvendo o conteúdo de poliedros, com a finalidade de contribuir para o desenvolvimento deste em sala de aula, na intenção de oferecer suporte ao professor, e buscando favorecer a obtenção do conhecimento pelo aluno, para desse modo tentar ocasionar a existência de maiores possibilidades de um processo efetivo de ensino e aprendizagem do conteúdo de matemática em questão.

Dessa forma, elaboramos uma sequência didática contendo 11 (onze) atividades para desenvolver o conteúdo de Poliedros, que faz parte importante da geometria espacial que é estudada no Ensino Médio. As atividades da sequência didática, são acompanhadas de questões envolvendo a parte do conteúdo ao qual a atividade da sequência se refere, com a finalidade de proporcionar maior aprofundamento da aprendizagem, como veremos a seguir.

7. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE POLIEDROS

Nesta seção, apresentamos uma sequência didática baseada no ensino por atividades com a finalidade de conduzir os discentes para um aprendizado mais efetivo dos conceitos poliedros, através da percepção dos conceitos matemáticos presentes em cada atividade proposta. Com todas as atividades embasadas nos momentos do ensino por atividade, o qual viabiliza um roteiro dinâmico de interação, participação e descobertas de conhecimentos.

Esta sequência didática está constituída por 11 atividades e questões de fixação propostas para cada uma das respectivas atividades, explorando o conteúdo de poliedros para o ensino médio.

As atividades propostas para compor a nossa sequência abordam os seguintes conteúdos:

- Atividade 01 - Sólidos Convexos e Não Convexos;
- Atividade 02 - Poliedros (Conceito);
- Atividade 03 - Elementos de um Poliedro;
- Atividade 04 - Quem eu sou? (Identificação de Poliedros);
- Atividade 05 - Arestas e os Vértices de um poliedro (Relação);
- Atividade 06 - Arestas e os Polígonos das faces de um poliedro (Relação);
- Atividade 07 - Relação de Euler;

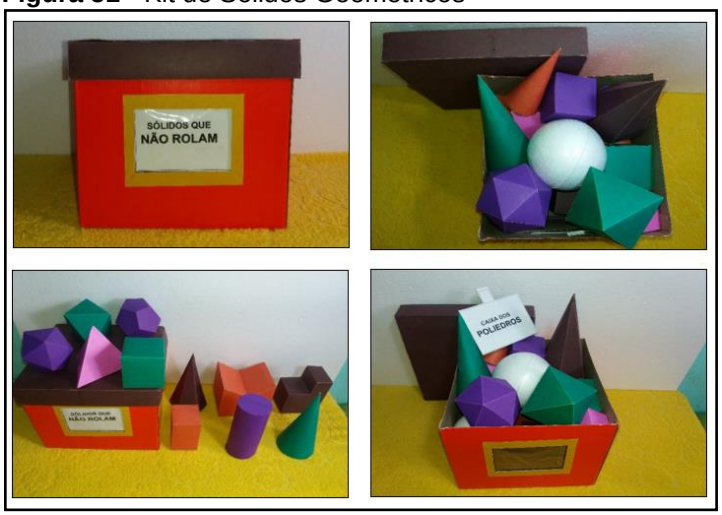
- Atividade 08 - Poliedros Regulares e Irregulares;
- Atividade 09 - Poliedros de Platão;
- Atividade 10 - Baralho das Planificações;
- Atividade 11 - Pif Paf dos Poliedros.

Em cada uma das atividades serão apresentados o título, o objetivo, os materiais necessários (Kit de Sólidos Geométricos, Baralhos e etc.) e os procedimentos a serem realizados, solicitação de observações para que os alunos possam expor suas ideias acerca da atividade e o espaço para conclusão da atividade, para sistematizar os conhecimentos matemáticos adquiridos na atividade, quando necessário, bem como uma sugestão ao docente no final cada uma das atividades, embasadas nos momentos do ensino por atividades. A seguir apresentaremos o Kit de Sólidos Geométricos e as atividades com suas respectivas questões de fixação.

7.1. Kit de Sólidos Geométricos

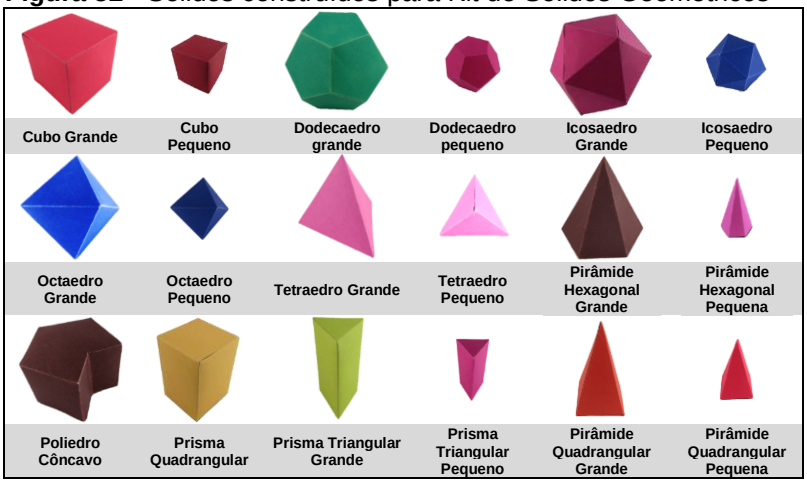
Neste tópico apresentamos as atividades que compõem a sequência didática que será desenvolvida em nossa pesquisa, é importante destacarmos aqui que as atividades utilizarão um kit de sólidos geométricos construído para que os alunos manuseiem os poliedros durante a realização das atividades, como mostra a figura 56 a seguir:

Figura 51 - Kit de Sólidos Geométricos



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

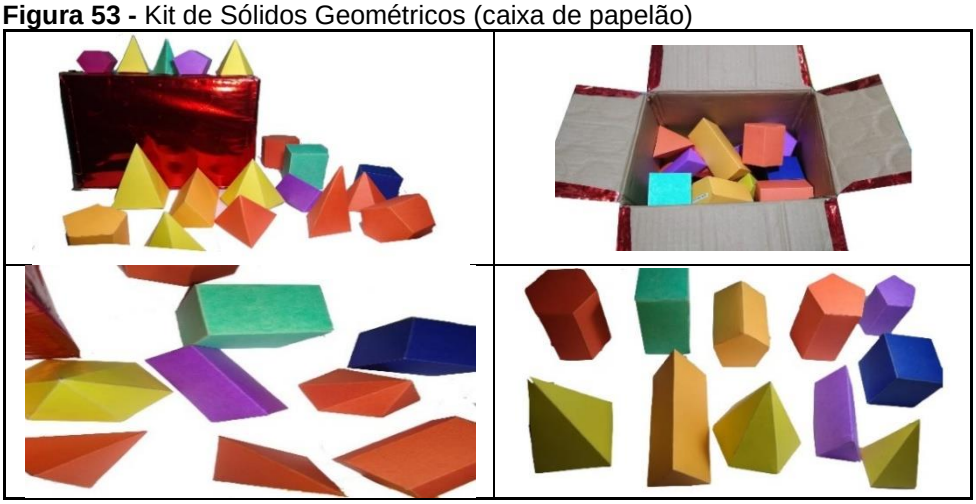
Figura 52 - Sólidos construídos para Kit de Sólidos Geométricos



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

Uma outra opção para a construção da caixa do Kit de Sólidos Geométricos pode ser a utilização de caixas de papelão comuns encapadas com papel celofane, como fizemos na caixa de alguns kits, como mostramos a seguir:

Figura 53 - Kit de Sólidos Geométricos (caixa de papelão)



Fonte: Pesquisa bibliográfica, 2018.

No decorrer das atividades o nome da caixa onde ficam os sólidos do kit será modificado de acordo com o que é proposto no desenvolvimento de cada respectiva atividade de modo a buscar ajudar na identificação e classificação dos sólidos presentes no decorrer do processo.

Para uma melhor compreensão no desenvolvimento das atividades que propomos a seguir, recomendamos uma leitura minuciosa dos momentos do ensino por atividade de autoria de Sá (2019).

7.2. Atividade 01

ATIVIDADE 01

Título: Sólidos Convexos e Não Convexos
Objetivo: Diferenciar sólidos convexos e não convexos
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Manuseie os sólidos geométricos do kit do seu grupo.

02. Observe em quais dos sólidos geométricos do kit **todos os pontos de qualquer reta estão dentro da figura.**

03. Coloque na caixa apenas esses sólidos.

04. Quais as características desses sólidos?

Orientações Didáticas Específicas:

Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que os discentes consigam expressar suas características nas respostas, para posteriormente chegarmos na seguinte conclusão: *Sólido convexo é aquele que todos os pontos de quaisquer segmentos de reta encontram-se completamente contidos no interior do sólido, e caso exista algum segmento de reta que não satisfaça essa condição, chamamos de sólido não convexo ou côncavo.*

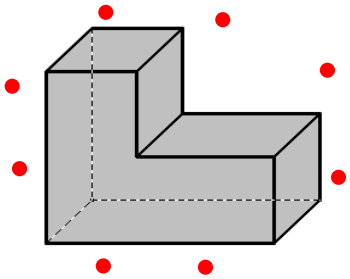
Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre as características encontradas;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
10. Informar que os sólidos que estão dentro da caixa eram os sólidos convexos e os que estão fora desta eram os não convexos;
11. Nomear a caixa do kit de “Caixa de Sólidos Convexos”;
12. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

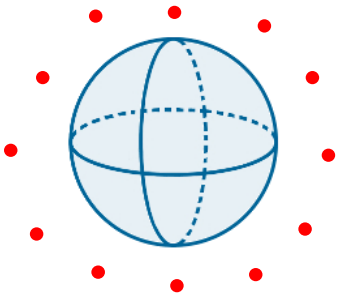
1. Ligue os pontos de dois a dois através de cada sólido e diga se ele é **CONVEXO** ou **NÃO CONVEXO**:

a)



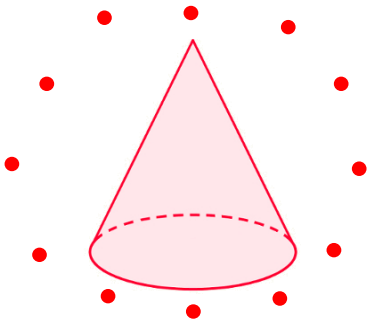
(_____)

b)



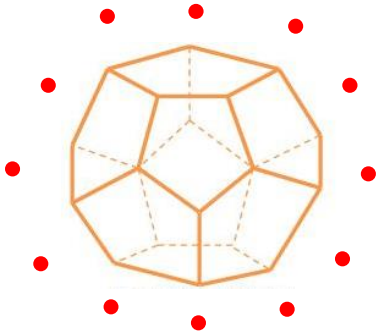
(_____)

c)



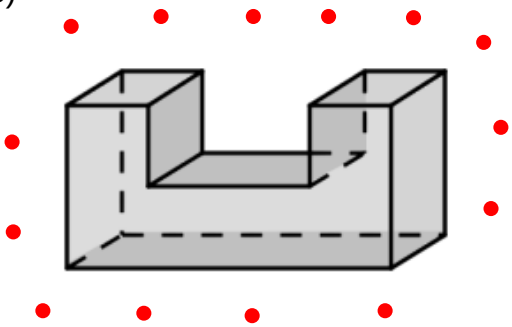
(_____)

d)



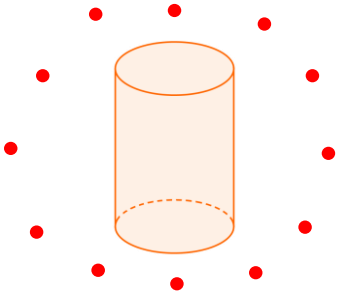
(_____)

e)



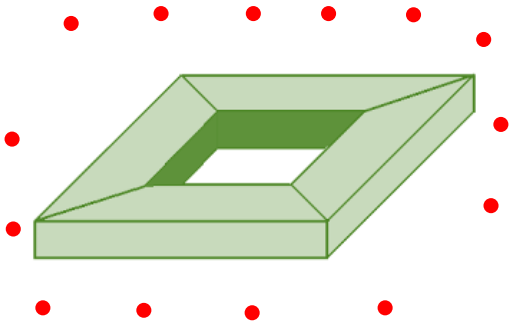
(_____)

f)



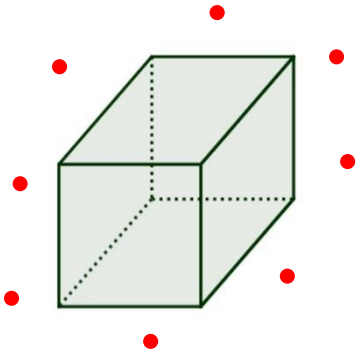
(_____)

g)



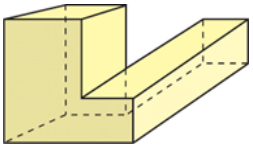
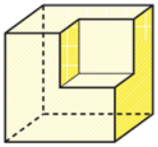
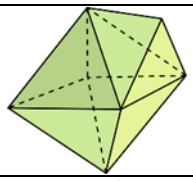
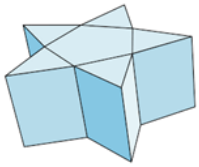
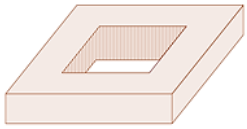
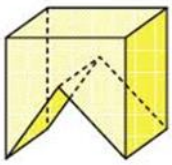
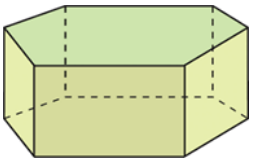
(_____)

h)



(_____)

02. Classifique os sólidos abaixo em **CONVEXO** ou **NÃO CONVEXO**, e explique em seguida por que:

Nº	SÓLIDO	CLASSIFICAÇÃO	POR QUE?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

7.3. Atividade 02

ATIVIDADE 02

Título: Poliedros
Objetivo: Conceituar poliedros
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Manuseie os sólidos geométricos do kit do seu grupo.

02. Verifique quais dos sólidos geométricos do kit **ROLAM** e os que **NÃO ROLAM**.

03. Coloque na caixa apenas os sólidos que **NÃO ROLAM**.

04. Quais as características dos sólidos que **NÃO ROLAM**?

Orientações Didáticas Específicas:

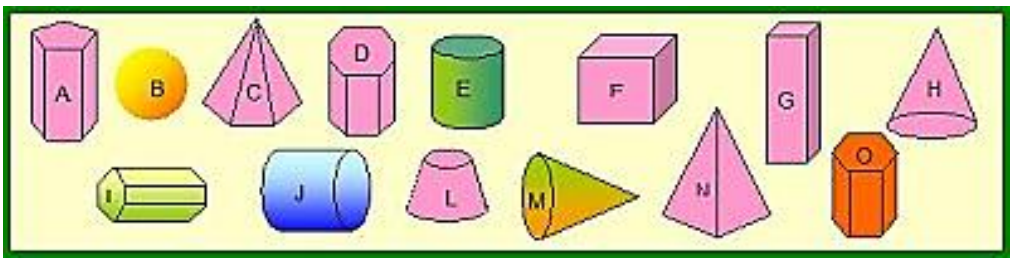
Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos, possamos posteriormente chegar à seguinte conclusão: *Um poliedro é o sólido que tem muitas faces as quais são formadas por polígonos.*

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre as características encontradas;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
10. Informar que os sólidos que estão dentro da caixa, os sólidos que não rolam, eram os poliedros e os que estão fora desta eram não poliedros ou corpos redondos;
11. Nomear a caixa do kit de “Caixa dos Poliedros”;
12. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

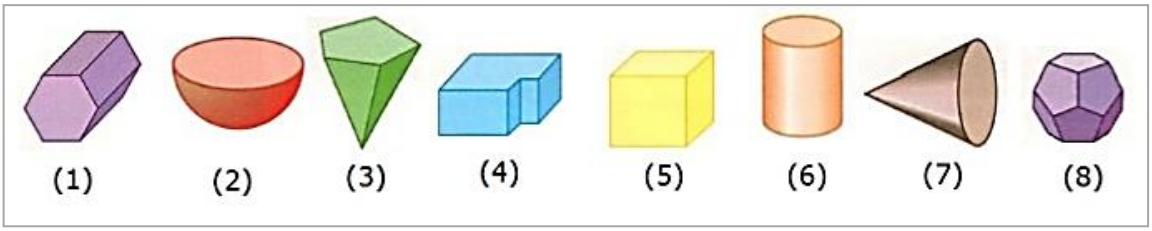
QUESTÕES PROPOSTAS

01. Nos sólidos geométricos que se seguem, identifique quais são os POLIEDROS e os NÃO POLIEDROS?



(A)_____ (F)_____ (L)_____
(B)_____ (G)_____ (M)_____
(C)_____ (H)_____ (N)_____
(D)_____ (I)_____ (O)_____
(E)_____ (J)_____

02. Cada sólido representado no quadro a seguir é identificado por um número. Observe a identificação e marque qual das alternativas abaixo possui apenas números correspondentes de poliedros:



a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
b) 1, 3, 4, 5, 8
c) 1, 2, 3, 6, 7, 8
d) 3, 4, 5, 6, 8
e) 3, 4, 5, 6, 7, 8

03. Coloque (V) nas alternativas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando as alternativas

a) ( ) Um poliedro é um sólido que contém muitas faces.

b) ( ) Um poliedro possui apenas faces planas.

c) ( ) Um poliedro pode ter uma de suas faces arredondadas.

d) ( ) Todos os sólidos que rolam são poliedros.

e) ( ) Uma bola é um poliedro.

f) ( ) Os poliedros são sólidos geométricos espaciais, tridimensionais e formados por faces retangulares.

7.4. Atividade 03

ATIVIDADE 03

Título: Elementos de um Poliedro
Objetivo: Identificar e Conceituar os Elementos dos Poliedros
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Manuseie os sólidos geométricos do kit contidos na **Caixa dos Poliedros**.

02. Escolha um **sólido** qualquer, manuseie as superfícies que o compõem.

03. Que **figuras** encontramos nas superfícies do sólido escolhido? São todas iguais?

04. O que resultará o encontro **de duas** das figuras que formam o sólido escolhido?

05. O que resultará o encontro **de três ou mais** figuras que formam o sólido escolhido?

Orientações Didáticas Específicas:

Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos, as respostas dos discentes cheguem o mais próximo possível das respostas esperadas nas questões respectivamente apresentadas: Na Q_3 espera-se que respondam o nome das figuras planas, e que em alguns casos são todas iguais, e em outros tem figuras iguais e diferentes, já na Q_4 espera-se que respondam que o encontro de duas figuras forma um canto, uma quina, ou um lado, e na Q_5 espera-se que respondam que o encontro de três ou mais figuras resultará um bico, uma ponta ou até mesmo um vértice. Para que possamos chegar posteriormente à seguinte conclusão: Cada um dos polígonos existentes chama-se uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado vértice do poliedro.

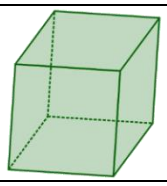
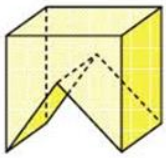
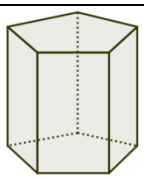
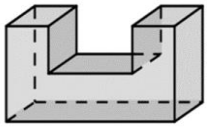
Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos, informando que o nome desta é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes nas respostas das questões a partir de suas observações no manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas respostas;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
10. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

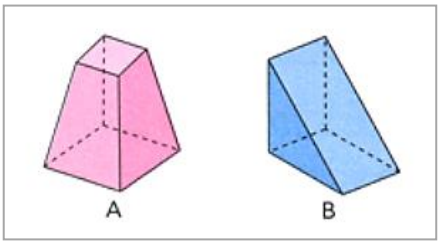
QUESTÕES PROPOSTAS

01. Quais são os elementos que formam um poliedro? Quais suas características?

02. Observe os poliedros a seguir e responda a quantidade de seus elementos:

POLIEDROS			
			
Nº de Faces F = _____	Nº de Faces F = _____	Nº de Faces F = _____	Nº de Faces F = _____
Nº de Arestas A = _____	Nº de Arestas A = _____	Nº de Arestas A = _____	Nº de Arestas A = _____
Nº de Vértices V = _____	Nº de Vértices V = _____	Nº de Vértices V = _____	Nº de Vértices V = _____

03. Analise os poliedros abaixo e responda:



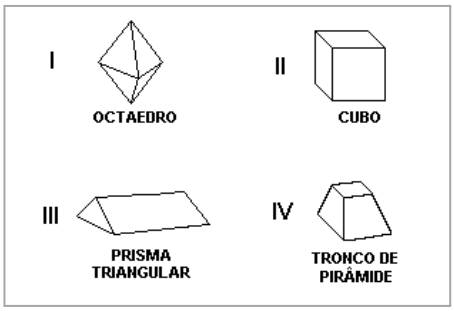
a) Qual deles possui mais vértices? Por que?

b) Quantas arestas tem cada um deles?

c) Qual deles tem o número de faces ímpar? Quantas são?

d) Em qual deles o número de vértices é igual ao número de faces?

04. Indique quantas faces possuem, respectivamente, nessa ordem, os sólidos numerados como I, II, III e IV a seguir:

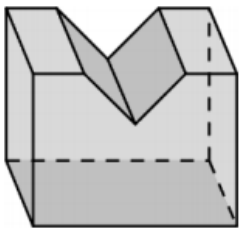


a) 8, 6, 5, 6.
b) 8, 6, 6, 5.
c) 8, 5, 6, 6.
d) 5, 8, 6, 6.
e) 6, 18, 6, 5.

05. Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

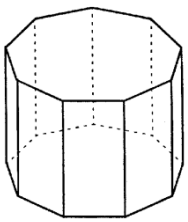
Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

06. A figura a seguir representa um poliedro não convexo.



Qual o número de vértices deste poliedro?

07. A figura, representada abaixo, é de um prisma com x faces, y vértices e z arestas.



Qual é o valor de x + y + z ?

7.5. Atividade 04

ATIVIDADE 04

Título: Quem eu sou?
Objetivo: Identificar poliedros
Material: Kit de sólidos geométricos, fichas do “Quem eu sou?”, caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Escolha uma ficha
02. Leia atentamente a ficha e identifique o sólido geométrico do kit do seu grupo.

QUEM EU SOU?
Nº 01

1) Sou um poliedro.
2) Tenho doze arestas.
3) Minhas faces são quadriláteros.
4) Tenho seis faces.
5) Tenho oito vértices.
6) Minhas faces são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 02

1) Sou um poliedro.
2) Tenho doze arestas.
3) Minhas faces são triângulos.
4) Tenho oito faces.
5) Tenho seis vértices.
6) Minhas faces são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 03

1) Sou um poliedro.
2) Tenho seis arestas.
3) Minhas faces são triângulos.
4) Tenho quatro faces.
5) Tenho quatro vértices.
6) Minhas faces são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 04

1) Sou um poliedro.
2) Tenho trinta arestas.
3) Minhas faces são pentágonos.
4) Tenho doze faces.
5) Tenho vinte vértices.
6) Minhas faces são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 05

1) Sou um poliedro.
2) Tenho trinta arestas.
3) Minhas faces são triângulos.
4) Tenho vinte faces.
5) Tenho doze vértices.
6) Minhas faces são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 06

1) Sou um poliedro.
2) Tenho doze arestas.
3) Minhas faces são quadriláteros.
4) Tenho seis faces.
5) Tenho oito vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 07

1) Sou um poliedro.
2) Tenho doze arestas.
3) Tenho seis faces triangulares e uma hexagonal.
4) Tenho sete faces.
5) Tenho sete vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 08

1) Sou um poliedro.
2) Tenho quinze arestas.
3) Tenho cinco faces quadrangulares e duas pentagonais.
4) Tenho sete faces.
5) Tenho dez vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 09

1) Sou um poliedro.
2) Tenho dezoito arestas.
3) Tenho seis faces quadrangulares e duas hexagonais.
4) Tenho oito faces.
5) Tenho doze vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 10

1) Sou um poliedro.
2) Tenho dez arestas.
3) Tenho cinco faces triangulares e uma pentagonal.
4) Tenho seis faces.
5) Tenho seis vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 11

1) Sou um poliedro.
2) Tenho oito arestas.
3) Tenho quatro faces triangulares e uma quadrangular.
4) Tenho cinco faces.
5) Tenho cinco vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

QUEM EU SOU?
Nº 12

1) Sou um poliedro.
2) Tenho nove arestas.
3) Tenho três faces quadrangulares e duas triangulares.
4) Tenho cinco faces.
5) Tenho seis vértices.
6) Minhas faces não são todas iguais
7) **Quem eu sou?** _____

IDENTIFICAÇÃO DOS POLIEDROS

Nº 01 – Cubo
Nº 02 – Octaedro
Nº 03 – Tetraedro
Nº 04 – Dodecaedro
Nº 05 – Icosaedro
Nº 06 – Prisma quadrangular
Nº 07 – Pirâmide hexagonal
Nº 08 – Prisma pentagonal
Nº 09 – Prisma hexagonal
Nº 10 – Pirâmide pentagonal
Nº 11 – Pirâmide quadrangular
Nº 12 – Prisma triangular

Orientações Didáticas Específicas:

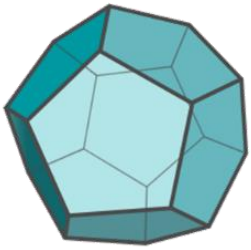
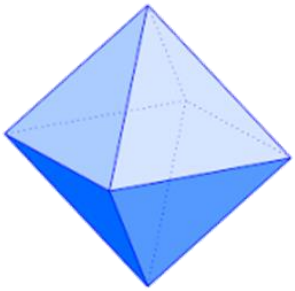
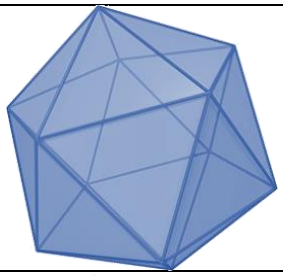
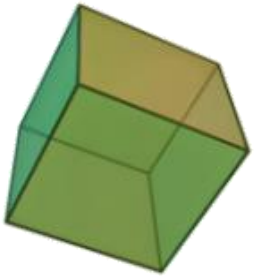
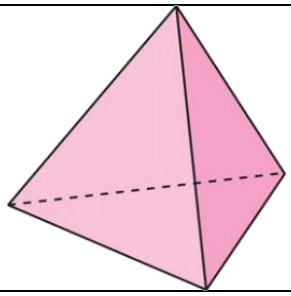
Esta atividade envolve as características particulares de cada poliedro de modo que a partir do manuseio do kit, de modo que esperamos que os discentes consigam identificar o poliedro correspondente e sua respectiva nomenclatura, e posteriormente com suas palavras descrevam as características do poliedro em questão no verso de cada respectiva ficha.

Orientações Didáticas Gerais:

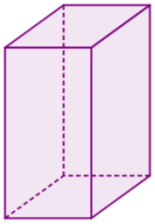
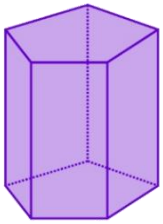
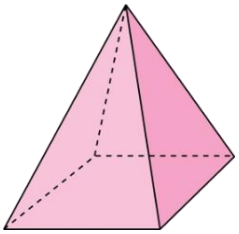
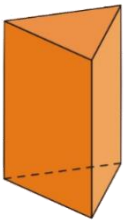
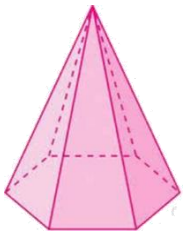
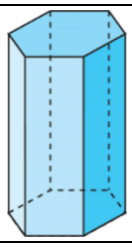
1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos e as fichas para os grupos, informando que o nome do kit é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes na descrição das características dos poliedros das fichas correspondentes a partir das suas observações e manuseio dos poliedros por parte dos discentes;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas respostas.
9. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

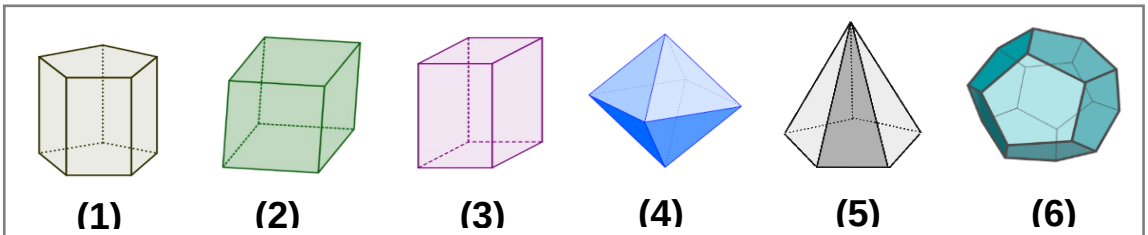
01. Observe os poliedros a seguir e responda os números de suas faces e seus nomes:

Nº	POLIEDRO	Nº DE FACES	NOME DO POLIEDRO
1			
2			
3			
4			
5			

02. Observe os poliedros a seguir e responda o nome dos polígonos de suas bases e os seus nomes:

Nº	POLIEDRO	POLÍGONO DA BASE	NOME DO POLIEDRO
1			
2			
3			
4			
5			
6			

03. Cada sólido representado no quadro a seguir é identificado por um número. Observe a identificação e marque qual das alternativas abaixo possui apenas números correspondentes aos nomes de poliedros:



a) Prisma triangular, cubo, prisma pentagonal, octaedro, pirâmide pentagonal, dodecaedro
b) Prisma pentagonal, cubo, prisma quadrangular, dodecaedro, pirâmide pentagonal, octaedro
c) Prisma hexagonal, quadrado, prisma quadrangular, icosaedro, pirâmide pentagonal, dodecaedro
d) Prisma pentagonal, cubo, prisma quadrangular, octaedro, pirâmide pentagonal, dodecaedro
e) Tetraedro, cubo, prisma quadrangular, dodecaedro, pirâmide pentagonal, octaedro

04. Coloque (V) nas alternativas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando as alternativas

a) ( ) Todos os poliedros recebem seus nomes a partir do número de suas faces.

b) ( ) O icosaedro e o dodecaedro possuem respectivamente dez e oito faces

c) ( ) Um prisma hexagonal possui oito faces, sendo que duas são hexágonos que são chamadas de bases.

d) ( ) Uma pirâmide pentagonal possui cinco faces, e em uma delas existe um quadrado.

e) ( ) O dodecaedro possui apenas faces triangulares.

7.6. Atividade 05

ATIVIDADE 05

Título: Arestas e os Vértices de um poliedro
Objetivo: Descobrir uma relação entre as arestas e os vértices de um poliedro

Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do kit contidos na Caixa dos Poliedros.
02. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros identificados.
03. Determine quantas arestas se encontram em cada vértice do poliedro
03. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	Total de arestas (A)	Total de vértices (V)	Quantas arestas se encontram em cada vértice? (n)	(V) . (n)
1	Cubo				
2	Prisma quadrangular				
3	Pirâmide pentagonal				
4	Prisma triangular				
5	Icosaedro				
6	Dodecaedro				
7	Octaedro				

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas Específicas:

Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos e posterior preenchimento do quadro, os discentes percebam a regularidade da relação entre o número de arestas e a quantidade de vértices de um poliedro, e mais especificamente a partir da observação dos resultados dos cálculos, os discentes cheguem a conclusão que: *Em todo poliedro convexo o número de arestas de cada vértice multiplicado pelo total de vértices é igual ao dobro do total de arestas de um poliedro, ou ainda que o número de arestas é igual a metade do produto do número de vértices do poliedro pelo número de arestas que concorrem esses vértices, ou seja,* $A = \frac{n \times V}{2}$ *ou* $A = \frac{n \times V_1 + n \times V_2 + \cdots}{2}$.

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos, informando que o nome deste é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes no preenchimento do quadro a partir de suas observações e manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes no registro de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
9. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusões;
10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;
11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

01. Um poliedro tem 12 vértices e em cada um concorrem 5 arestas. Qual o número total de arestas desse poliedro?

02. Um poliedro possui 8 faces triangulares, sabendo que em cada um de seus 6 vértices concorrem 4 arestas. Qual o número de arestas desse poliedro?

03. Um poliedro convexo tem 14 vértices. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Qual o número de arestas do poliedro?

04. Um poliedro possui 7 faces e 7 vértices, sendo que de um único vértice partem 6 arestas e dos demais vértices partem 3 arestas cada um. Qual o número de arestas do poliedro?

05. Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. Qual o número de arestas desse poliedro?

7.7. Atividade 06

ATIVIDADE 06

Título: Arestas e as Faces de um poliedro regular
Objetivo: Descobrir uma relação entre o polígono que forma a face e o total de arestas de um poliedro regular
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do kit contidos na Caixa dos Poliedros.
02. Determine o total de arestas e faces nos poliedros identificados.
03. Determine qual ou quais polígonos formam as faces do poliedro identificado
04. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	Total de arestas (A)	Total de faces (F)	Qual ou quais polígonos formam as faces do poliedro?	Quantos lados tem esse(s) polígono(s)? (n)	Quantas vezes o(s) polígono(s) se repete no poliedro? (R)	(R) . (n)
1	Tetraedro						
2	Prisma triangular						
3	Pirâmide hexagonal						
4	Cubo						
5	Icosaedro						
6	Pirâmide quadrangular						
7	Octaedro						

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas Específicas:

Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos e posterior preenchimento do quadro, os discentes percebam a regularidade da relação entre o número de arestas de um poliedro com os polígonos que formam suas faces, quando estas são iguais, e mais especificamente a partir da observação dos resultados dos cálculos, os discentes cheguem a conclusão que: *Em todo poliedro o número de arestas de uma face multiplicado pelo número de vezes que esta se repete no poliedro é igual ao dobro do total de arestas, ou ainda que o número de arestas é igual a metade do produto do número de lados do polígono da face do poliedro pelo número de vezes que ele se repete*, ou seja, $A = \frac{n \times F}{2}$ ou $A = \frac{n \times F_1 + n \times F_2 \ldots}{2}$.

Orientações Didáticas Gerais:

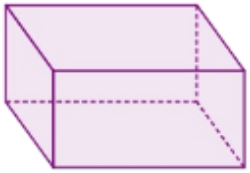
1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos, informando que o nome deste é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes no preenchimento do quadro a partir de suas observações e manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes no registro de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
9. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusões;
10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;
11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

01. Um poliedro possui 10 faces triangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?

02. O dodecaedro possui 12 faces pentagonais. Qual o número de arestas desse poliedro?

03. Observe a figura:



Qual o número de arestas do poliedro?

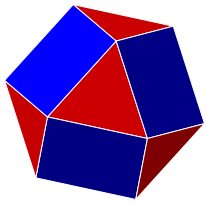
04. O icosaedro possui 30 faces triangulares. Qual o número de arestas desse poliedro?

05. O hexaedro possui 6 faces quadrangulares e o octaedro possui 8 faces triangulares. Qual poliedro possui o maior número de arestas?

06. Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. Qual o número de arestas desse poliedro?

07. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro de 60 faces triangulares. Qual o número de arestas do cristal encontrado?

08. O poliedro representado na figura abaixo possui 14 faces, sendo 8 triangulares e 6 quadrangulares.



Qual o número de arestas que formam esse poliedro?

09. Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. Qual o número de arestas desse poliedro?

10. O número de faces triangulares de uma pirâmide é 6. Qual o número de arestas dessa pirâmide?

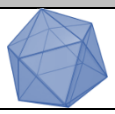
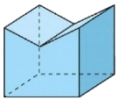
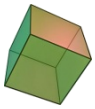
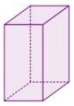
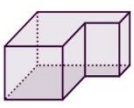
7.8. Atividade 07

ATIVIDADE 07

Título: Relação de Euler
Objetivo: Descobrir uma relação entre os números de faces, vértices e arestas de um poliedro
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Identifique os poliedros do quadro na Caixa dos Poliedros.
02. Verifique se os poliedros identificados são convexos ou não convexos
03. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros identificados.
04. Preencha o quadro a seguir:

Nº	Poliedros	É um poliedro convexo?		Total de vértices (V)	Total de arestas (A)	Total de faces (F)	V – A + F
		Sim	Não				
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO

Orientações Didáticas Específicas:

Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos e posterior preenchimento do quadro, os discentes percebam a regularidade da relação de Euler para poliedros convexos, observando a classificação e posterior contagem dos números de vértices, arestas e faces destes sólidos, para em seguida formalizarmos com a conclusão: *A relação V – A + F será igual a dois em todos os poliedros convexos e para alguns não convexos.*

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos, informando que o nome deste é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes no preenchimento do quadro a partir de suas observações e manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes no registro de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
9. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusões;
10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;
11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

01. Um poliedro possui 16 faces e 18 vértices. Qual é o número de arestas desse poliedro?

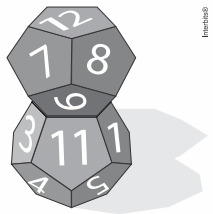
02. Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste poliedro?

03. O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui

a) 33 vértices e 22 arestas.
b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas.
d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

04. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. Qual o número de vértices deste cristal?

05. Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



Considere o número de vértices de faces e de arestas desse poliedro côncavo.
A soma V + F + A é igual a quanto?

06. A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. Os encontros das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

Qual o número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol?

07. Coloque (V) nas alternativas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando as alternativas

a) ( ) A relação de Euler vale para todos os poliedros convexos.

b) ( ) Todos os poliedros não convexos não satisfazem a relação de Euler.

c) ( ) Um poliedro satisfaz a relação de Euler quando V – A + F é igual a 12.

d) ( ) O hexaedro satisfaz a relação de Euler.

e) ( ) Um poliedro satisfaz a relação de Euler quando o número de faces (F) é igual ao número de arestas (A).

08. Ao passar sua mão direita por todos os vértices e arestas de um poliedro, somente uma vez, um deficiente visual percebe que passou por 8 vértices e 12 arestas. Quanto ele concluiu que é o número de faces desse poliedro?

09. Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. Qual o número de vértices desse poliedro?

7.9. Atividade 08

ATIVIDADE 08

Título: Poliedros Regulares e Irregulares
Objetivo: Identificar os poliedros regulares e irregulares
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Manipule os sólidos geométricos do kit do seu grupo.

02. Coloque na caixa apenas os poliedros em que todas as faces são formadas por polígonos iguais.

03. Quantos e quais são os poliedros que ficaram na caixa?

04. O que podemos observar nos vértices dos poliedros que estão na caixa?

Orientações Didáticas Específicas:

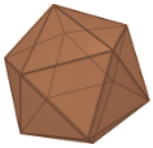
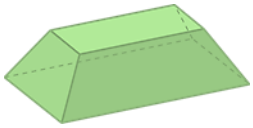
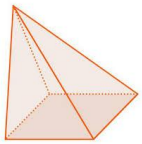
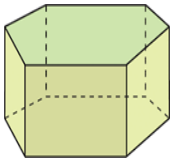
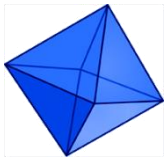
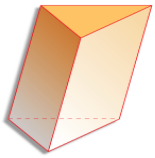
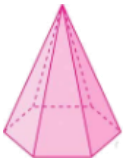
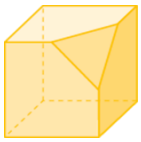
Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos, possamos posteriormente chegar à seguinte conclusão: *Só existem cinco poliedros com as faces exatamente iguais: hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, os quais serão denominados "regulares" por presentarem essa característica. E os sólidos que não possuem essa característica, chamamos de não regulares ou de irregulares.*

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes nas respostas das questões a partir de suas observações no manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre as características encontradas;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
10. Informar que os sólidos que estão dentro da caixa, isto é, os poliedros em que todas as faces são formadas por polígonos iguais, são os poliedros regulares e os que estão fora desta são os poliedros não regulares;
11. Nomear a caixa do kit de "Caixa dos Poliedros Regulares";
12. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

01. Classifique os poliedros abaixo em **REGULARES** ou **IRREGULARES**, e explique em seguida por que:

Nº	POLIEDRO	CLASSIFICAÇÃO	POR QUE?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

02. Sobre as sentenças:

I - Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.

II - Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.

III - Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.

é correto afirmar que APENAS
a) I é verdadeira.
b) II é verdadeira.
c) III é verdadeira.
d) I e II são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

03. Coloque (V) nas alternativas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando as alternativas

a) ( ) Todos os poliedros de Platão são regulares.

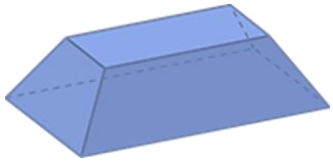
b) ( ) Todos os poliedros regulares são poliedros de Platão.

c) ( ) Nos poliedros irregulares todas as faces são iguais.

d) ( ) Todos os poliedros regulares são convexos.

e) ( ) Os prismas e as pirâmides são poliedros regulares.

04. Observe o poliedro representado na figura a seguir e responda:



a) Esse poliedro é regular ou irregular?

b) Qual o número de vértices, arestas e faces deste poliedro?

c) Esse poliedro satisfaz a relação de Euler?

7.10. Atividade 09

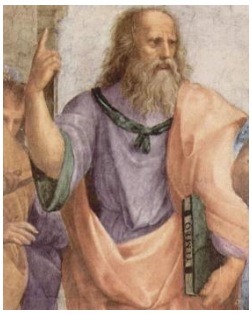
ATIVIDADE 09

Título: Poliedros de Platão
Objetivo: Identificar os poliedros de Platão
Material: Roteiro da atividade, Kit de sólidos geométricos caneta ou lápis

Procedimentos:

01. Leia o texto a seguir:

PLATÃO E OS POLIEDROS



O filósofo e matemático grego Platão, é um importante nome na história dos poliedros, sendo considerado o centro do desenvolvimento de matemática de sua época, viveu por volta de 427 a 347 a. C., e fundou em Atenas sua Academia, na qual muitos historiadores, como Katz (2010), Boyer (2010) e Eves (2004), afirmam estar escrito sobre as portas, algo com a tradução: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”, o que demonstra a exaltação do papel da geometria na construção da espiritualidade humana.

Platão associou os elementos água, terra, fogo e ar respectivamente, ao icosaedro, cubo, tetraedro e octaedro, acreditando que “as propriedades físicas da matéria eram consequência das propriedades geométricas de suas partículas constituintes” (TOMEI, 2003, p. 79). Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro, foi o que levou Platão a considerá-lo o quinto elemento que estava faltando simbolizando o cosmos, ou seja, o universo (BOYER, 2010).

Todas as ideias de Platão sobre os cinco poliedros regulares, foram colocadas em sua obra intitulada “Timeus”, onde usa estes sólidos para explicar fenômenos científicos, e por esse motivo estes poliedros ficaram conhecidos como “Corpos Cósmicos” ou “Sólidos de Platão”, e posteriormente como Poliedros de Platão.

Os Elementos de Euclides, que é uma das mais importantes obras de matemática de todos os tempos, são formados por treze livros ou capítulos, dos quais os três últimos (Livros XI, XII e XIII) falam sobre a geometria no espaço, tratando dos poliedros, principalmente o último. No Livro XIII os sólidos platônicos são estudados de forma sistemática, pois este é inteiramente dedicado aos poliedros regulares (BOYER, 2010, p. 81).

No Livro XIII, existem dezoito proposições sobre as propriedades dos sólidos regulares, as quais são todas demonstradas, sendo a proposição dezoito, que é a última deste livro, bem como do conjunto dos Elementos, onde Euclides afirma não existirem outros poliedros regulares além dos cinco demonstrados no final de sua obra, ou seja, finaliza enfatizando a singularidade dos poliedros platônicos.

02. Identifique os poliedros de Platão no kit do seu grupo.

03. Coloque na caixa apenas os poliedros de Platão

04. Quais e quantos são os poliedros de Platão?

05. Que características possuem esses poliedros?

Orientações Didáticas Específicas:

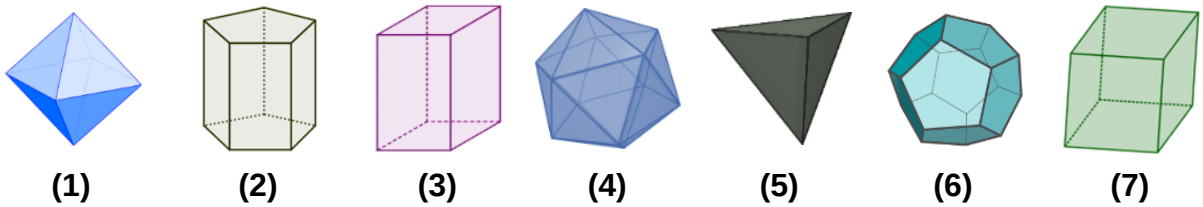
Depois da execução dos procedimentos descritos no roteiro, espera-se que a partir das características observadas no manuseio dos sólidos e na leitura do texto proposto, possamos posteriormente chegar à seguinte conclusão: *Só existem cinco poliedros com as faces exatamente iguais: Os poliedros de Platão são cinco, chamados de tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, e assim todos os poliedros regulares são também de Platão.*

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos para os grupos;
3. Distribuir os envelopes contendo o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes nas respostas das questões a partir de suas observações no manuseio dos poliedros;
8. Orientar os discentes para a socialização de suas observações sobre os poliedros identificados e suas características encontradas;
9. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações dos mesmos;
10. Informar que os sólidos que estão dentro da caixa são os cinco poliedros de Platão e os que estão fora desta não são, pelo fato de não apresentarem as características destes poliedros;
11. Nomear a caixa do kit de “Caixa dos Poliedros de Platão”;
12. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

QUESTÕES PROPOSTAS

01. Cada sólido representado no quadro a seguir é identificado por um número. Observe a identificação e marque qual das alternativas abaixo possui apenas números correspondentes aos poliedros de Platão.



(1) **(2)** **(3)** **(4)** **(5)** **(6)** **(7)**

a) 1, 2, 4, 5, 6 b) 1, 3, 4, 6, 7 c) 1, 3, 4, 5, 7 d) 3, 4, 5, 6, 7 e) 1, 4, 5, 6, 7

02. Utilizando os poliedros enumerados da questão 01, enumere corretamente a coluna a seguir com o nome do poliedro de Platão correspondente:
( ) Tetraedro ( ) Octaedro ( ) Hexaedro ( ) Icosaedro ( ) Dodecaedro

03. Os poliedros de Platão foram associados aos elementos na antiguidade. O astrônomo, matemático e numerologista Johann Kepler intuitivamente formulou uma explicação sobre esses Poliedros e os quatro elementos, observe as características atribuídas por Kepler, e diga qual poliedro platônico cada uma se refere:

a) Poliedro com maior número de faces, logo tendo maior volume de superfície, e desse modo por ser o mais “úmido” sendo atribuído a **água** (_____)

b) Poliedro relacionado com a **terra** pelo fato de sua estabilidade quando assentado em uma de suas faces. (_____)

c) Poliedro com menor número de faces, logo tendo menor volume de superfície, e desse modo por ser o mais “seco” sendo atribuído ao **fogo** (_____)

d) Poliedro relacionado com o **ar** pela instabilidade que representa quando colocamos seus vértices opostos entre os dedos indicador e polegar frouxamente, e o rodopiamos facilmente (_____)

e) Poliedro associado ao **Universo**, devido possui doze faces, as quais corresponderiam as doze as seções do zodíaco (_____)

04. Coloque (V) nas alternativas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando as alternativas

a) ( ) Todos os poliedros de Platão recebem seus nomes a partir do número de suas faces.

b) ( ) Todos os poliedros de Platão têm suas faces formadas por triângulos.

c) ( ) Todos os poliedros de Platão são convexos.

d) ( ) O poliedro de Platão atribuído ao fogo é o dodecaedro.

e) ( ) Existem seis poliedros de Platão, que são: tetraedro, prisma, pirâmide, cubo, cone e esfera.

f) ( ) Todos os poliedros de Platão satisfazem a relação de Euler.

7.11. Atividade 10

ATIVIDADE 10

Título: Baralho das Planificações
Objetivo: Identificar poliedros e suas planificações
Material: Baralho com 36 cartas, sendo: 12 cartas-poliedro, 12 cartas-nomenclatura e 12 cartas-planificação.

Participantes: de 2 a 4

Regras do Jogo:

01. Todas as cartas são embaralhadas.

02. Cada um dos jogadores deverá receber três cartas e as outras serão deixadas com a face virada para baixo sobre a mesa.

03. O jogador com a carta contendo a maior planificação inicia a partida, caso nenhum dos jogadores venha com esse tipo de carta, o início ficará a critério dos jogadores.

04. Os jogadores devem compor ternas válidas de carta-poliedro, carta-nomenclatura e carta-planificação.

05. Uma terna de cartas é válida quando a figura do poliedro da carta-poliedro é representada através da carta-planificação e a carta-nomenclatura corresponde ao nome da figura do poliedro representada na carta-poliedro.

06. Na vez de cada jogar, este deve comprar uma carta do monte que está com a face para baixo na mesa e descartar uma carta, que fica com a face virada para cima.

07. O vencedor da partida é o jogador que compuser primeiro uma terna contendo cartas válidas.

Orientações Didáticas Específicas:

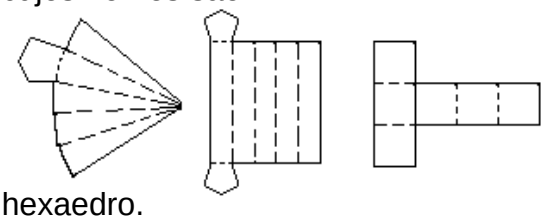
Esta atividade utiliza um jogo denominado “Baralho das Planificações” onde espera-se que os discentes a partir do manuseio do kit e do respectivo baralho consigam identificar cada figura de poliedro, e suas respectivas nomenclatura e planificação.

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos e os baralhos para os grupos, informando que o nome do kit é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo as regras do jogo de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos nas regras do jogo;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes na descrição das figuras, nomes e planificação dos poliedros das cartas correspondentes a partir das suas observações e manuseio dos poliedros por parte dos discentes;
8. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

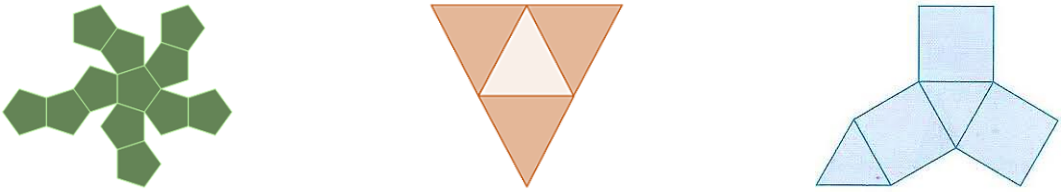
QUESTÕES PROPOSTAS

01. Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas das figuras a seguir, obteremos três modelos de figuras espaciais cujos nomes são:



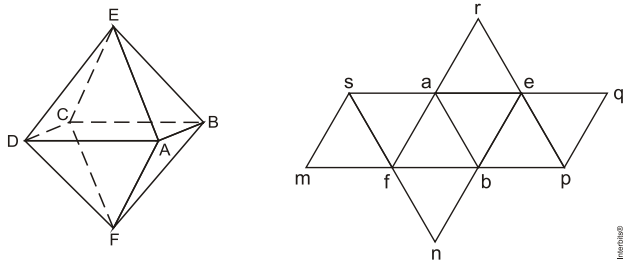
a) tetraedro, octaedro e hexaedro.
b) paralelepípedo, tetraedro e octaedro.
c) octaedro, prisma e hexaedro.
d) pirâmide, tetraedro e hexaedro.
e) pirâmide pentagonal, prisma pentagonal e hexaedro.

02. Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Hexaedro, prisma de base pentagonal e tetraedro.
b) Dodecaedro, tetraedro e prisma de base triangular
c) Dodecaedro, hexaedro e prisma de base triangular
d) Tetraedro, prisma de base pentagonal e hexaedro
e) Prisma de base pentagonal, tetraedro e dodecaedro

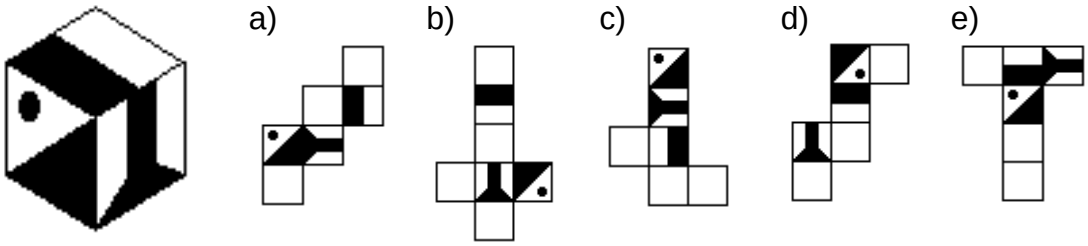
03. As figuras a seguir representam um octaedro regular e uma de suas planificações.



Aos vértices A, B, E, F do octaedro correspondem, respectivamente, os pontos a, b, e, f da planificação. Ao vértice D do octaedro correspondem, na planificação, os pontos:

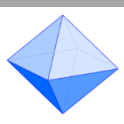
a) m, n, p. b) n, p, q. c) p, q, r. d) q, r, s. e) r, s, m.

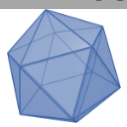
04. Em qual das alternativas está a planificação do cubo representado à abaixo:



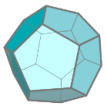
05. Observe os poliedros de Platão regulares e indique o seu correspondente com a numeração na planificação adequada e colocando seu respectivo nome:

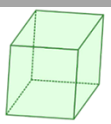
POLIEDROS DE PLATÃO REGULARES


(1)


(2)

(3)


(4)


(5)

POLIEDROS DE PLATÃO REGULARES PLANIFICADOS

( )

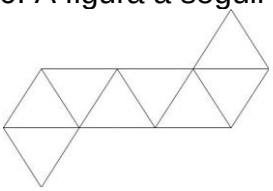
( )

( )

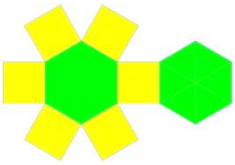
( )

( )

06. A figura a seguir representa a planificação de um poliedro convexo.
Qual o número de vértices e o nome deste poliedro?



07. Observe a planificação a seguir:



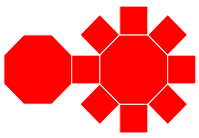
a) Esse poliedro é regular ou irregular? Por que?

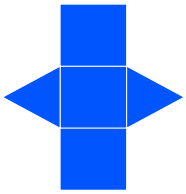
b) Qual o número de vértices, arestas e faces deste poliedro?

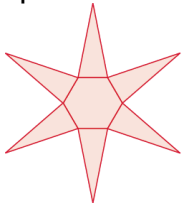
c) Esse poliedro satisfaz a relação de Euler?

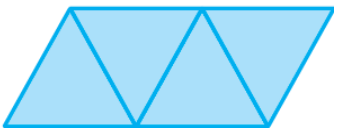
d) Qual o nome desse poliedro?

08. Observe as seguintes planificações e responda:









a) Quais são os nomes dos poliedros obtidos a partir dessas planificações?

b) Os poliedros obtidos a partir das planificações são regulares ou irregulares?

c) Algum desses poliedros é platônico?

7.12. Atividade 11

ATIVIDADE 11

Título: Pif Paf dos Poliedros
Objetivo: Identificar poliedros, suas características e planificações
Material: Baralho com 99 cartas, sendo: 24 cartas-poliedro, 48 cartas-características, 12 cartas-nomenclatura, 12 cartas-planificação e 03 cartas-coringa.

Participantes: de 2 a 4

Regras do Jogo:

01. Todas as cartas são embaralhadas.

02. Cada um dos jogadores deverá receber nove cartas e as outras serão deixadas com a face virada para baixo sobre a mesa.

03. O jogador com a carta contendo a figura do poliedro com maior quantidade de faces planificada ou não, iniciará a partida, caso nenhum dos jogadores venha com esse tipo de carta, o início ficará com aquele que tiver a carta-característica com maior número de faces, e caso nenhum dos jogadores vier com essas cartas, o início ficará a critério dos jogadores.

04. A carta-coringa pode formar terna com qualquer carta-poliedro, outra carta-característica, carta-planificação, carta-nomenclatura ou ainda poderá existir o terno com uma carta-poliedro e duas cartas-coringas, pois estas cartas são formadas por característica comum a todos os poliedros.

05. Os jogadores devem compor ternas válidas de carta-poliedro, carta-característica, carta-planificação e carta-nomenclatura.

06. Uma terna de cartas é válida quando a figura do poliedro da carta-poliedro é representada através de outras duas carta-características correspondentes a figura do poliedro representada na carta-poliedro, ou ainda entre carta-nomenclatura e carta-planificação correspondentes.

07. Duas cartas poliedros juntamente com uma carta-característica, carta-planificação ou carta-nomenclatura não formam uma terna válida.

08. Na vez de cada jogar, este deve comprar uma carta do monte que está com a face para baixo na mesa e descartar uma carta, que fica com a face virada para cima.

09. O vencedor da partida é o jogador que compuser primeiro três ternas contendo cartas válidas.

Orientações Didáticas Específicas:

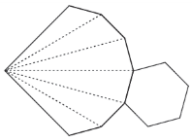
Esta atividade utiliza um jogo denominado “Pif Paf dos Poliedros” onde espera-se que os discentes a partir do manuseio do kit e do respectivo baralho consigam identificar cada figura de poliedro, e suas respectivas nomenclaturas, planificações e outras características. É importante ressaltar que para realização deste jogo as cartas do “Baralho das Planificações” deverão ser inclusas.

Orientações Didáticas Gerais:

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;
2. Distribuir os kits de sólidos geométricos e os baralhos para os grupos, informando que o nome do kit é “Caixa dos Poliedros”;
3. Distribuir os envelopes contendo as regras do jogo de acordo com o número de integrantes de cada equipe;
4. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos nas regras do jogo;
5. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;
6. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;
7. Orientar os estudantes na descrição das figuras, nomes e planificação dos poliedros das cartas correspondentes e demais características, a partir das suas observações e manuseio dos poliedros por parte dos discentes;
8. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas.

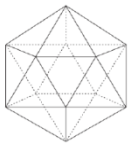
QUESTÕES PROPOSTAS

01. A figura, abaixo, representa a planificação de um sólido geométrico.



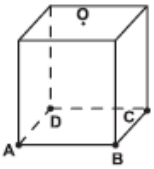
Qual o nome e o número total de faces e arestas desse sólido?

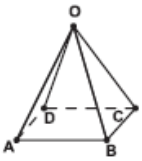
02. A figura abaixo mostra um poliedro regular formado por 20 faces triangulares.



Qual o nome desse poliedro e quantos vértices ele possui?

03. Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

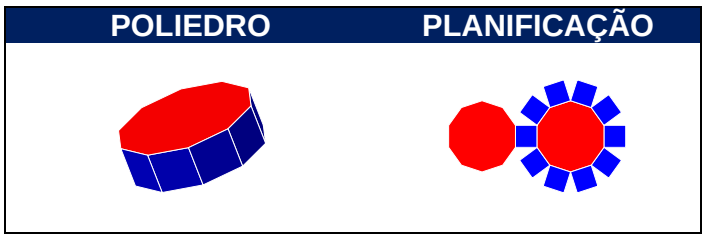




Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é o central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.
Os formatos dos sólidos descartados são:

(A) todos iguais (C) três iguais e um diferente (E) iguais dois a dois.
(B) todos diferentes (D) apenas dois iguais

04. Observe o poliedro a seguir com sua planificação e responda:



a) Qual o nome deste poliedro levando em consideração as nomenclaturas dos poliedros já estudados?

b) O poliedro é regular ou irregular? Por que?

c) O poliedro é convexo ou não convexo? Por que?

d) Quais os polígonos que formam esse poliedro?

e) Qual o número faces, vértices e arestas desse poliedro?

f) O poliedro satisfaz a relação de Euler?

05. No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema de armazenamento da pós- colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocada sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 pentagonais, conforme a figura abaixo:

Qual o número de arestas e vértices desse silo?

8. SUGESTÕES DE LEITURA

Para a obtenção de um maior aprofundamento, no que se refere ao que descrevemos em nosso produto, mostramos a seguir, algumas sugestões de leitura sobre o processo de ensino e aprendizagem envolvendo Poliedros:

AZAMBUJA FILHO, Z. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, nº 3, p. 15-17, 1983.

BASSO, M. T. P.; GONÇALVES, F.; LUCERO, R. N. **Materiais manipulativos para o ensino de sólidos geométricos**. In: DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Katia Stocco. (Org.). Coleção Mathemoteca; V. 5. Porto Alegre: Penso, 2016.

CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividades.** 2019. 354f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, 2019.

GONÇALVES, S. P. **Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial**. 130f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do ABC, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Santo André, SP. 2014.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações.** Tradução de Nathanael C. Caixeiro, Rio de janeiro, Zahar Editores, 1978.

LIMA, E. L. **O teorema de Euler sobre poliedros**. In: Meu Professor de Matemática e outras Histórias - Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1991a.

NASCIMENTO, H. do. **Poliedros regulares no Ensino Médio**. 57f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, João Pessoa, PB. 2014.

PARREIRA, J. R. P. **Poliedros e o Teorema de Euler**. 80f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Goiânia, GO, 2014.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Organizado por Demetrius Gonçalves de Araújo. – Belém: SBEM-PA, 2019.

WAGNER, E. **V - A + F = 2, EXISTE O POLIEDRO?**. Revista do Professor de Matemática nº 47, 2001.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática desenvolvida foi validada na dissertação de mestrado de Corrêa (2019), que objetivava avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de poliedros por meio de atividades, obtendo através sequência didática uma efetiva a participação e excelente desempenho dos discentes na resolução de questões envolvendo poliedros, além de desenvolver competências e habilidades para resolverem problemas de poliedros. Desse modo, este produto busca contribuir de maneira efetiva para o processo de ensino e aprendizagem de poliedros, uma vez que é um conteúdo de geometria espacial no qual os discentes do ensino médio demonstram dificuldades e baixos rendimentos educacionais, o que pode ser consequência da visualização abstrata e limitada de como as formas geométricas podem ter sido apresentadas, e a utilização de metodologias como o Ensino por Atividades, pode contribuir efetivamente para o referido processo. Assim, esperamos que os docentes da Educação Básica apreciem o produto apresentado e possam utilizá-lo em suas aulas.

10. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: ED. UFPR, 2007, p. 167–185.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ALTES, Gijs Korthals. **Paper Models of Polyhedra**. Disponível em: <https://www.polyhedra.net>. Acesso em set. 2017.

AZAMBUJA FILHO, Z. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, nº 3, p. 15-17, 1983.

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 8ª ed. Florianópolis: ed. da UFSC, 2012.

BASSO, M. T. P.; GONÇALVES, F.; LUCERO, R. N. **Materiais manipulativos para o ensino de sólidos geométricos**. In: DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Katia Stocco. (Org.). Coleção Mathemoteca; V. 5. Porto Alegre: Penso, 2016.

BENTO, H. A. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico com a Construção de Figuras Geométricas Planas Utilizando o Software Geogebra.** 258 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BEZZERRA, J.R.A. **Tudo é Geometria**. 1. ed. Natal – Rio Grande do Norte, 2015.

BICALHO, J. B. de S. **Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino de matemática: geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica.** 68f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Viçosa, MG, 2013.

BIOGRAFIAS. **Netsaber**. Disponível em: <http://biografias.netsaber.com.br/index.html>. Acesso em: 10 maio 2018.

BIOGRAFIAS. **Ebiografias**. Disponível em:< https://www.ebiografia.com/>. Acesso em: 28 maio 2018.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: **concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. P. 285 – 295.

BORTOLOSSI, H. J. **Sólidos Platônicos**. CDME - Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em jun. 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgar Blucher LTDA. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Matemática**. Brasília: Mec, 2004. Disponível em: < http://www.fnde.gov.br/ >. Acesso em: 10 maio 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio), 2012. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12 de maio 2017.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Didactique des mathématiques, 1970-1990. Mathematics Education Library, v. 19. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM, PA. 2017.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Oeuvres**. Segunda parte, pp. 15-25, 1813. Disponível em: <http://www.archive.org/details/oeuvresdaugusti01caucrich>. Acesso em: 08 maio 2018.

CHAQUIAM, M. MENDES, I. A. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. 1. ed. Belém: SBHMat, 2016.

CHAQUIAM, M. **Uso e implicações das linguagens no ensino de Matemática**. 1. ed. Belém: SBEM-Pará, MT. 2015.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos: História e Matemática em sala de aula**. 1/1. ed. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

COMMANDINO, Frederico. **Os Elementos de Euclides (versão digital)**. Universidade de Coimbra. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>. Acesso em: ago. 2018.

COSTA, T. L. da. **Uma análise da abordagem da fórmula poliedral de Euler em livros didáticas de matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

COXETER, H.S.M. **Introduction to Geometry, 2ª ed.**, John Wiley & Sons Inc., 1969.

COXETER, H.S.M; LONGUET-HIGGINS, M.S.; MILLER, J.C.P. **Uniform Polyhedra**. Royal Society. 246 (916). p. 401-450, 1954. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsta.1954.0003>. Acesso em: ago. 2018.

CRITCHLOW, K. ***Order in Space: a design source book***, Viking, 1970. Disponível em: <http://argos.vu/wp-content/uploads/2017/08/Order-in-Space-Design-Source-Book-by-Keith-Critchlow.pdf >. Acesso em jul. 2018

DANTE, L. R. **Matemática**, volume único, 1. ed. São Paulo: Editora Afiliada, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N., **Fundamentos de Matemática Elementar** - Volume 10, 4ª edição. São Paulo. Editora ATUAL. 1985.

DELTON, C. **Desenho Geométrico**. Universitária, São Paulo, 2006, p. 16.

DREYFUS, T.; HADAS, N. STEREOMETRIX: a learning tool for spatial geometry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 87-94.

DÜRER, Albrecht. **Underveissung der messung**. Warnock Library. Nuremberg, 1538. Disponível em: <http://www.rarebookroom.org/Control/duruwm/index.html>. Acesso em: set. 2018.

D`AMBRÓSIO, U. **A influência da tecnologia no fazer matemático ao longo da história**. Disponível em: http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br-/2011/02/influencia-datecnologia-no-fazer.html. Acesso em: 15 abr. 2017.

ENEM, **Exame Nacional do Ensino Médio**, Resultados Obtidos, 2016. Disponível em: <https://abrilguiadoestudante.files.wordpress.com/2017/01/resultados-notas-enem-2016.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2017.

ENEM, **Exame Nacional do Ensino Médio**, Resultados dos Participantes, 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/20-17/apresentacao_resultados_enem2017.pdf>. Acesso em: jan. 2018.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp. 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas. Editora UNICAMP. 2004.

FUNDAÇÃO CECIERJ. **Visualizando formas geométricas**. Disponível em: <https://cejarj.cecierj.edu.br/Material_Versao7/Matematica/Mod0/Matematica_Unidade_6_Seja.pdf>. Acesso em: jun. 2018.

GEOGEBRA, Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em: 15 maio 2017.

GIANNINI, F. **Piero della Francesca e l'importanza del suo trattato "De quinque corporibus regularibus"**. Disponível em: <https://www.finestresullarte.info/317n_piero-della-francesca-de-quinque-corporibus-regularibus-importanza.php>. Acesso em: jul. 2018.

GITIRANA, V. **Planejamento e Avaliação em Matemática** (9a Edição). In: Janssen Felipe da Silva; Jussara Hoffmann; Maria Teresa Esteban. (Org.). Práticas avaliativas e aprendizagens significativas - em diferentes áreas do conhecimento. 9ed.Porto Alegre: Editora Mediação, 2012, v. 1, p. 59-68.

GONÇALVES, A. M. L**. Politopos Convexos Regulares**. Dissertação de Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações, Universidade do Porto, Portugal, 2000. Disponível em:< http://hdl.handle.net/10216/9954>. Acesso em: jul. 2018.

GONÇALVES, S. P. **Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial**. 130f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do ABC, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Santo André, SP. 2014.

GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática** - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, [2010]. p. 13. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat>. Acesso em: 18 abr. 2017.

GRIMA, C. **Te presento al escutoide, la forma geométrica que te da forma**. ABC Ciência. Disponível em: < https://www.abc.es/ciencia/abci-presento-escutoide-forma-geometrica-forma-201807301258_noticia.html>. Acesso em: ago. 2018.

HALES, T. C. **A proof of the Kepler conjecture**; Annals of Mathematics, 162 (2005), 1065–1185.

HART, G.W. **Neolithic Carved Stone Polyhedra**. Disponível em: <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>. Acesso em: jul. 2018.

HEATH, T. **A History of Greek Mathematics**, vol. I, Universidade de Cambridge, 1908. Disponível em:< https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/HeathVolI.pdf>. Acesso em: ago. 2018.

HEATH, T. **The Thirteen Books of Euclid's Elements** – Books X-XIII and Appendix. vol. XIII, Universidade de Oxford, 1921. Disponível em:< https://www.wilbourhall.org/pdfs/Heath_Euclid_III.pdf>. Acesso em: ago. 2018.

HISTÓRIA. Infoescola. Disponível em: <https://www.infoescola.com/ >. Acesso em: 28 maio 2018.

JANOS, M. **Matemática para pais e interessados**, volume 2, São Paulo. 1.ed., Livraria da Física, 2011. 440p.

KATZ, V.J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

KEMP, Martin. **The Science of Art**, Yale University Press, 1990. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/7961540_From_science_in_art_to_the_art_of_science >. Acesso em jul 2018.

KEPLER, J. ***The Six-Cornered Snowflake***. Edited and translated from the Latin by Colin Hardie, with essays by L. L. Whyte and B. F. J. Mason. Oxford, U.K.: Oxford University Press. 1966.

KLAASEN, D. L. **Poliedros regulares**. In: EVES, Howard. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 3. São Paulo: Editora Atual, p. 58 - 60, 1994.

KLINE, M. **El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días**. Alianza Universidad, 1992. Madrid. Vol.1. Caps. 3.5, 4.9.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações.** Tradução de Nathanael C. Caixeiro, Rio de janeiro, Zahar Editores, 1978.

LAWLOR, R. **Geometría Sagrada. Filosofía y Práctica**. Debate, 1993. Madrid. Cap.10.

LEGENDRE, Adrien-Marie. **Élements de Géometrie**. Chez Firm Didot Frères, 1817.

LEIVAS, J. C. P**. Imaginação, Intuição e Visualização: A riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática**. Universidade Federal do Paraná, 2009. Tese de Doutorado.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**, volume 2, São Paulo: Editora Moderna, 2012.

LEVIN, Jack; FOX James Alan; FORDE, David R. **Estatística para Ciências Humanas**. 11ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

LIMA, E. L. **O Teorema de Euler sobre poliedros**. Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática. Ano XII, nº 2. p. 57-74. 1982.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volume 2, SBM Coleção do Professor de Matemática. 6ª Edição (2006). Rio de Janeiro.

LIMA, E. L. **O teorema de Euler sobre poliedros**. In: Meu Professor de Matemática e outras Histórias - Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1991a.

LIMA, E. L. **Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos.** In: Meu Professor de Matemática e outras Histórias. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1991b.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio** - volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - 6a ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

MACHADO, J. N. **Vivendo a Matemática** – Os Poliedros de Platão e os Dedos das Mãos, São Paulo, Scipione,1994.

MARTINS, T. D.; GOLDONI, V. **Descobrindo os Poliedros de Platão**. Disponível: http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/des-cobrindoospoliedros.pdf>. Acesso em: jan. 2018.

MIGUEL, A. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores**. In: I Seminário Nacional de História da Matemática, 1998, Recife. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática, 1995.

MORACO, A. S. C. T. & PIROLA, N. A. **Uma análise da linguagem geométrica no ensino de matemática.** Associação brasileira pesquisa em educação para ciências**.** Atas do EMPEC n. 5. 2005, p. 263.

NASCIMENTO, H. do. **Poliedros regulares no Ensino Médio**. 57f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, João Pessoa, PB. 2014.

OLIVEIRA, I. A.; SILVA, M. de J. L. **Educação popular freireana em escola pública: práticas com projetos educativos**. vol. 1. 1. ed. Curitiba: CRV, 2016.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**, 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2001.

PARREIRA, J. R. P. **Poliedros e o Teorema de Euler**. 80f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Goiânia, GO, 2014.

PEREIRA, T. L. M. **O Uso do Software Geogebra em uma Escola Pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, 2012.

PERRENOUD, Phillippe. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens - entre duas lógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

POLIEDROS. UFF. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/definicoes.html>. Acesso em: 28 maio 2018.

POLIEDROS, **História da Geometria**. Universidade de Coimbra, Portugal. Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~mat1131/Historias%20Geometria.pdf>. Acesso em: fev. 2018.

PONTE, J. P. **Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?** Revista Iberoamericana de Educación, n. 24, p. 63 – 90, 2000. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3993>. Acesso em: fev. 2018.

PONTE, J. P. et al. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: [s.n.], 2003.

PROENÇA, M. C. de. **Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio.** 200f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru. SP. 2008.

SANTOS, L. M. dos. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibpex, 2009.

SANTOS, O. J. dos. **A relação de Euler para poliedros**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. RN. 2014.

SANTOS, R. V. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais**. 393f. Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado do Pará, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, PA. 2017.

SILVA, W. O.; LOBO DA COSTA, N. M. L. **Uso do GeoGebra 3D para ensino de Poliedros**. In: V Jornada de Educação Matemática, 2015, São Gonçalo-RJ. V Jornada de Educação Matemática, 2015. Disponível em: <http://feap.edu.br/wp-content/uploads/2017/02/Artigo_publicado_Wendel_Nielce.pdf>. Acesso em: 03 maio 2017.

SILVA, A. C. B.; GOMES, A. S. **Conheça e utilize Software Educativo: avaliação e planejamento para a educação básica**. Recife: Pipa Comunicação, 2015.

SILVA, J. K. T. **Um estudo complementar dos poliedros voltado para professores e alunos do ensino básico**. 69f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, CE. 2014.

SOLANO, A. & Presmeg, N. (1995). **Visualization as a relation of images. Proceedings of PME XIX**, Recife, Vol 3, pp 66-73

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Organizado por Demetrius Gonçalves de Araújo. – Belém: SBEM-PA, 2019.

SÁ, P. F, de; PINHEIRO, K. L. **Jogos e Problemas aritméticos**. Disponível em: <http://www.afirse.com/archives/cd3/tematica4/116.pdf>. Acesso em: jan. 2018.

STRATHERN, P. **O sonho de Mendeleiev: a verdadeira história da química** (1940); tradução, Maria Luiza X. de A. Borges. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2002. Disponível em: <http://lelivros.love/book/baixar-livro-o-sonho-de-mendeleiev-paul-strathern-em-pdf-epub-e-mobi-ou-ler-online/>. Acesso em: nov. 2017.

TEIXEIRA FILHO, D. M. **O aprendizado da geometria no ensino médio:** origens de dificuldades e propostas alternativas. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/83299>. Acesso em: nov. 2017.

VELOSO, E. **Geometria: Temas Atuais - materiais para professores**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VIANA, O. A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria**. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2005.

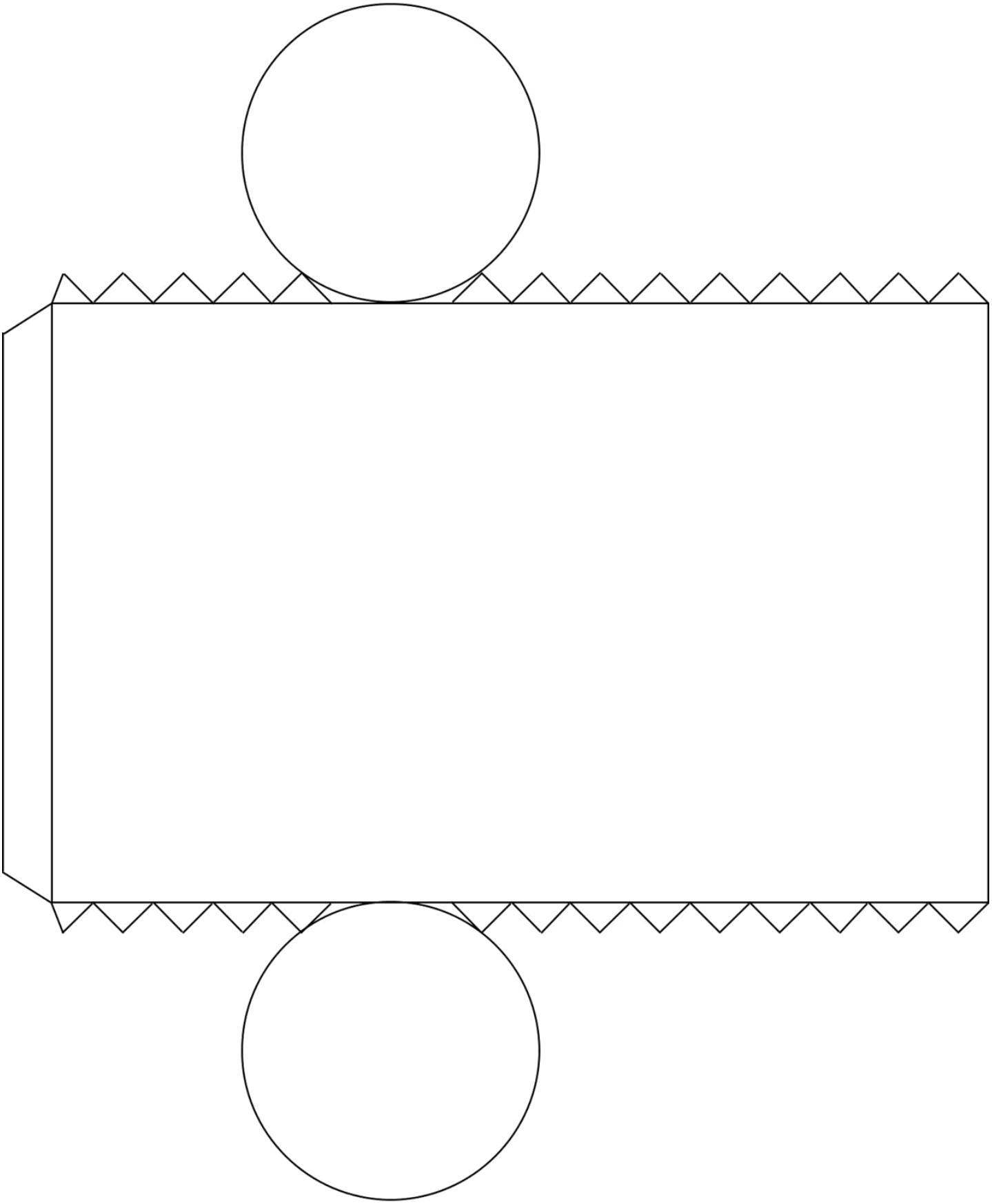
VIANNA, C. R. **O cão do matemático**: discutindo o ensino da matemática em cursos de formação de professores. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

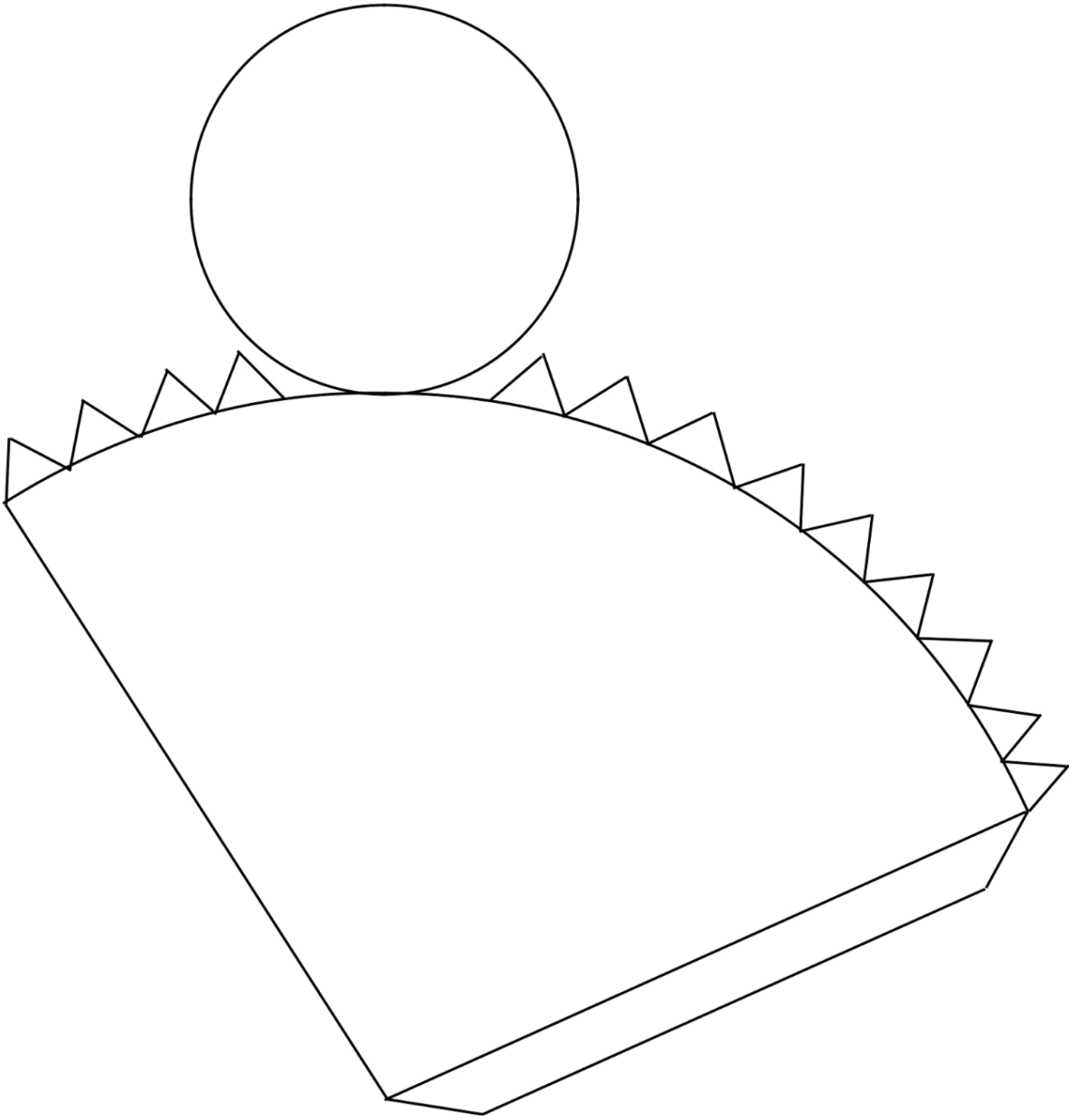
WAGNER, E. **V - A + F = 2, EXISTE O POLIEDRO?**. Revista do Professor de Matemática nº 47, 2001.

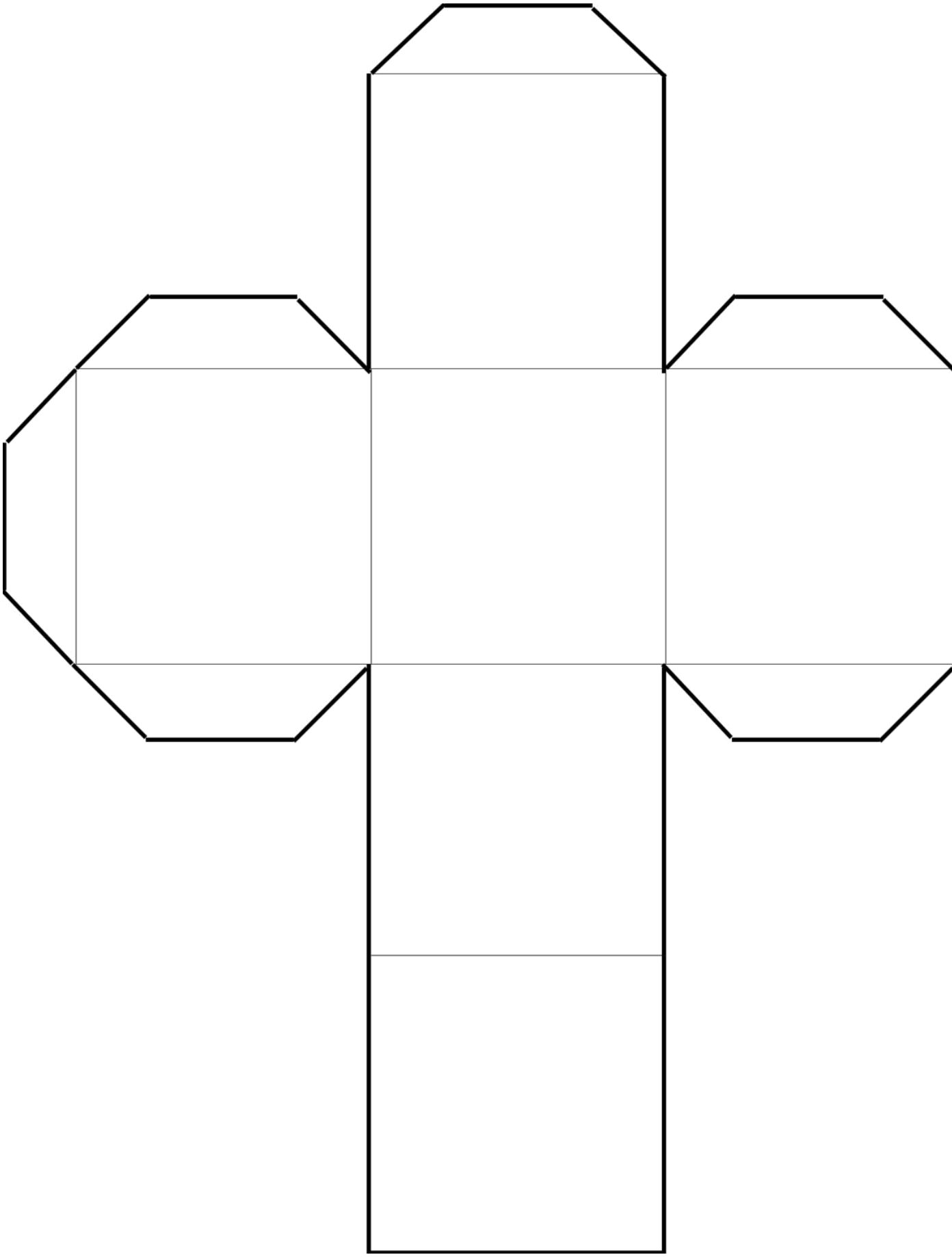
WEISSTEIN, E. W. **MathWorld–A Wolfram Web Resource**, 2009. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/>. Acesso em: ago. 2018.

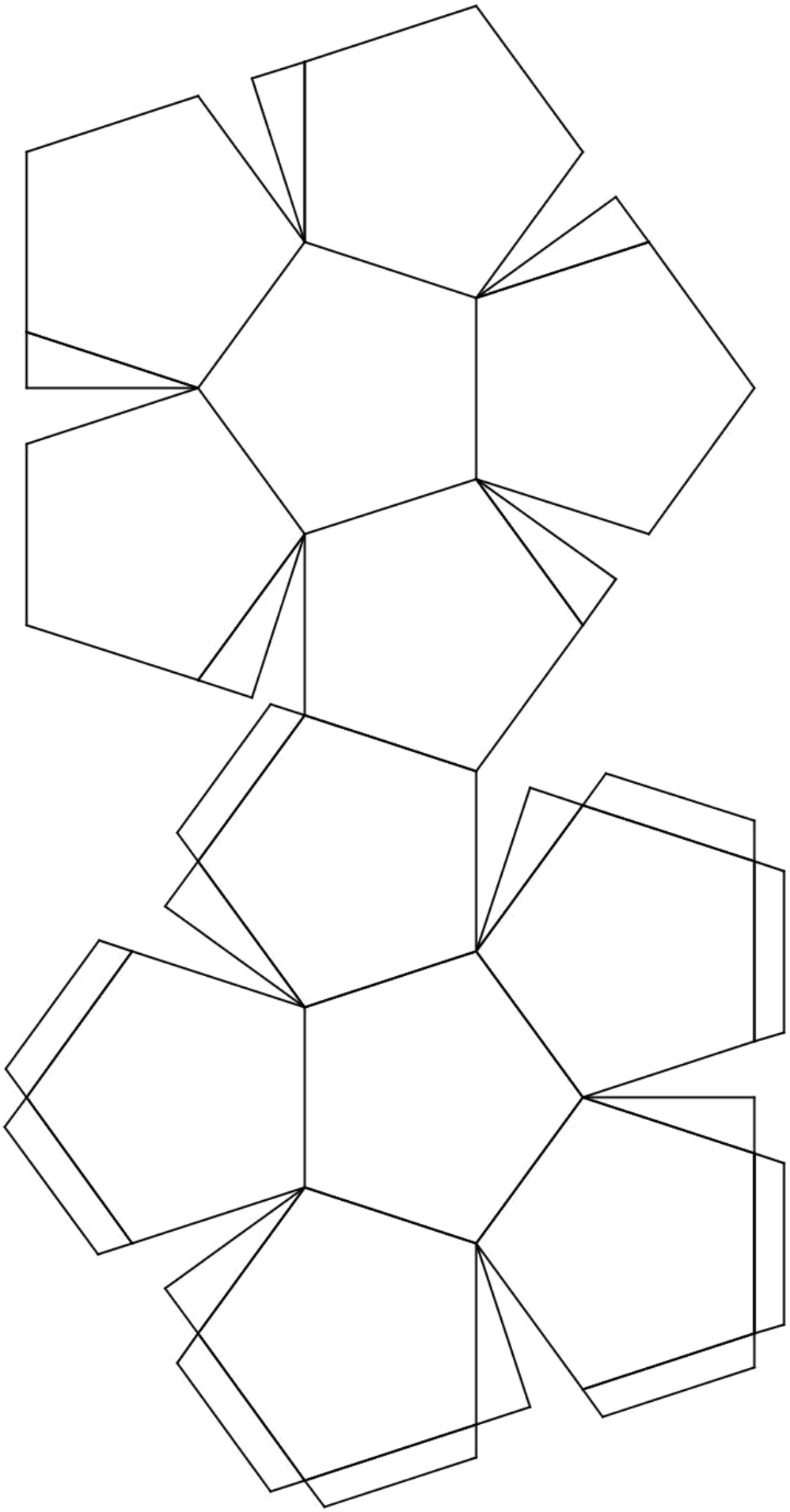
ANEXOS

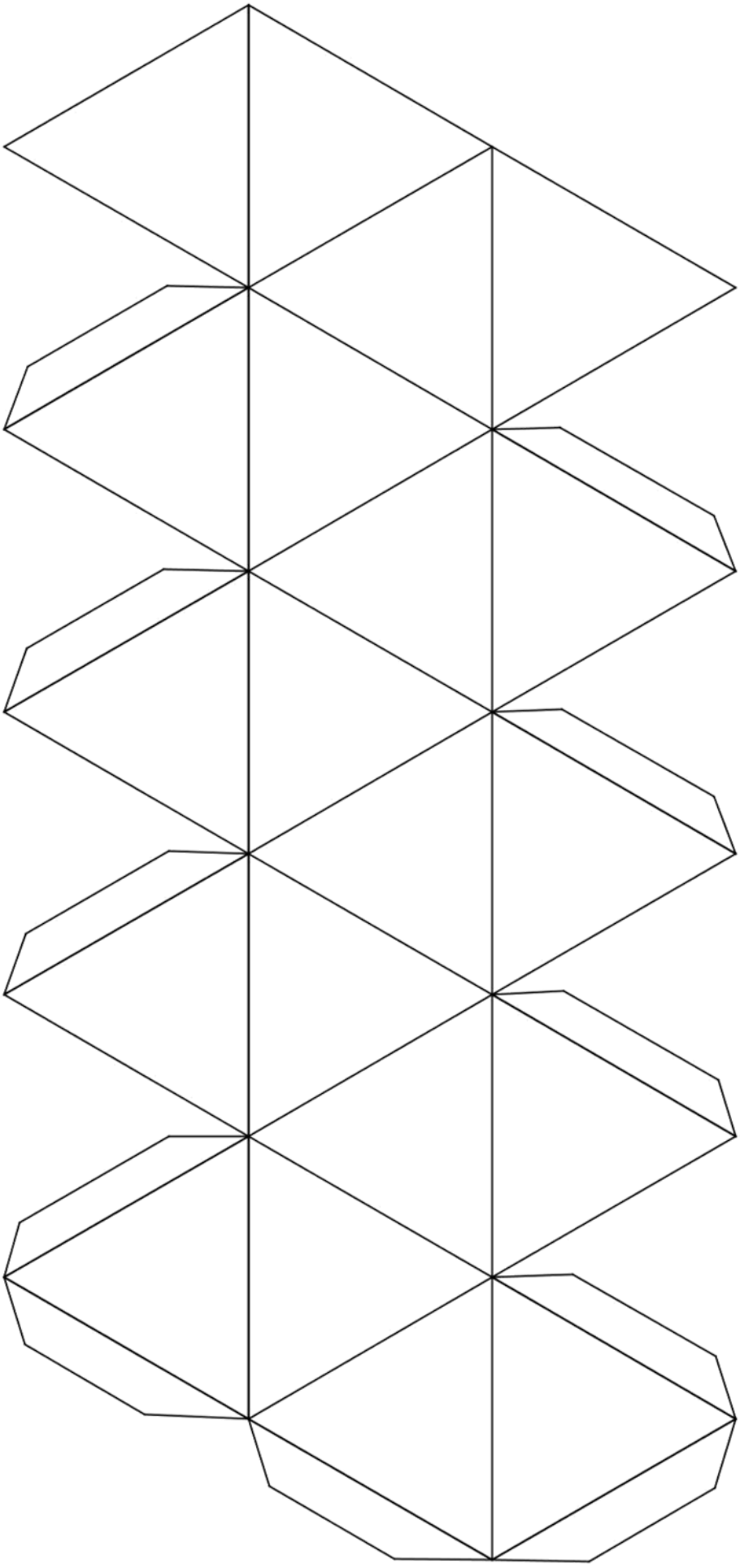
Sólidos do Kit Geométrico para Impressão

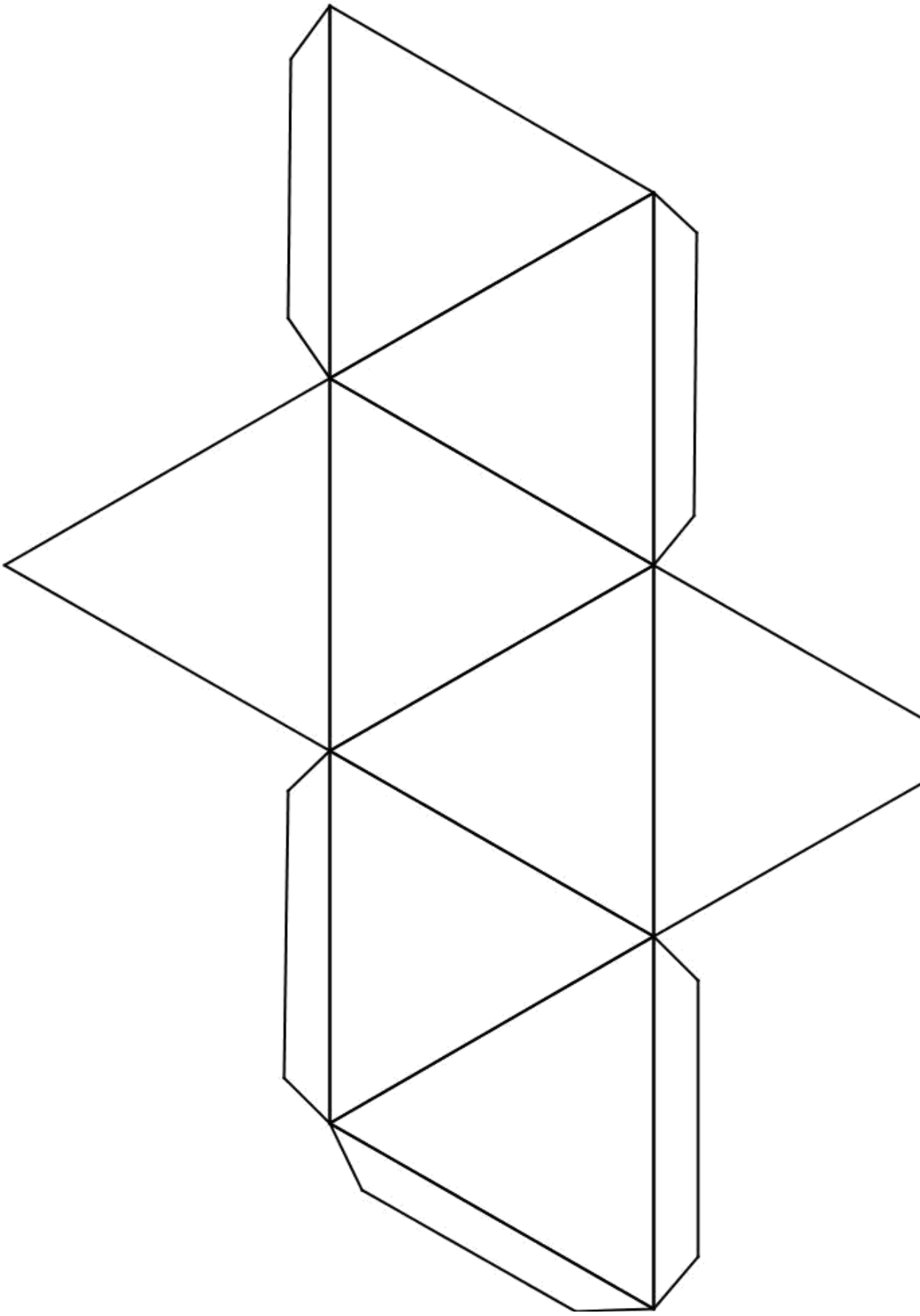


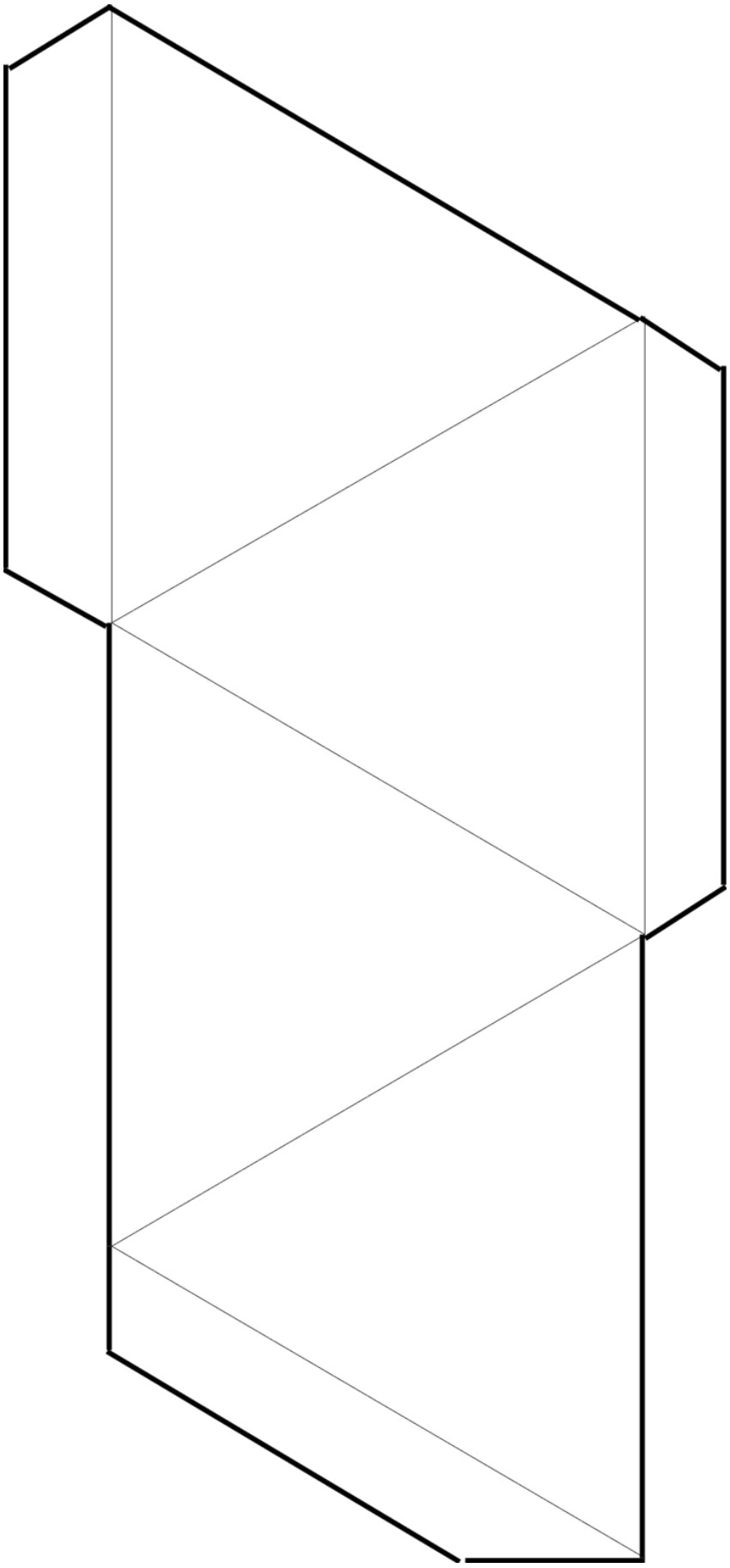


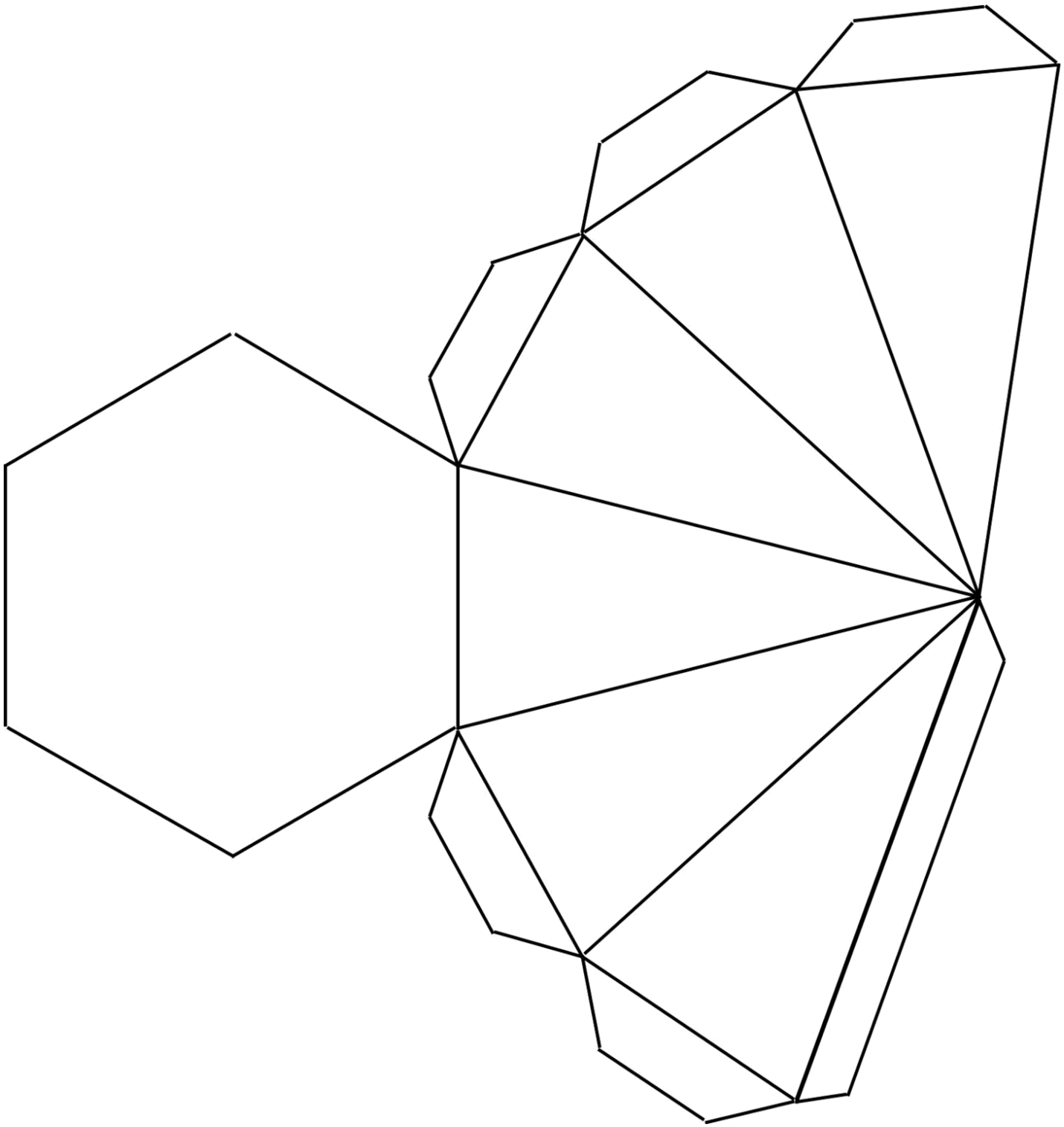


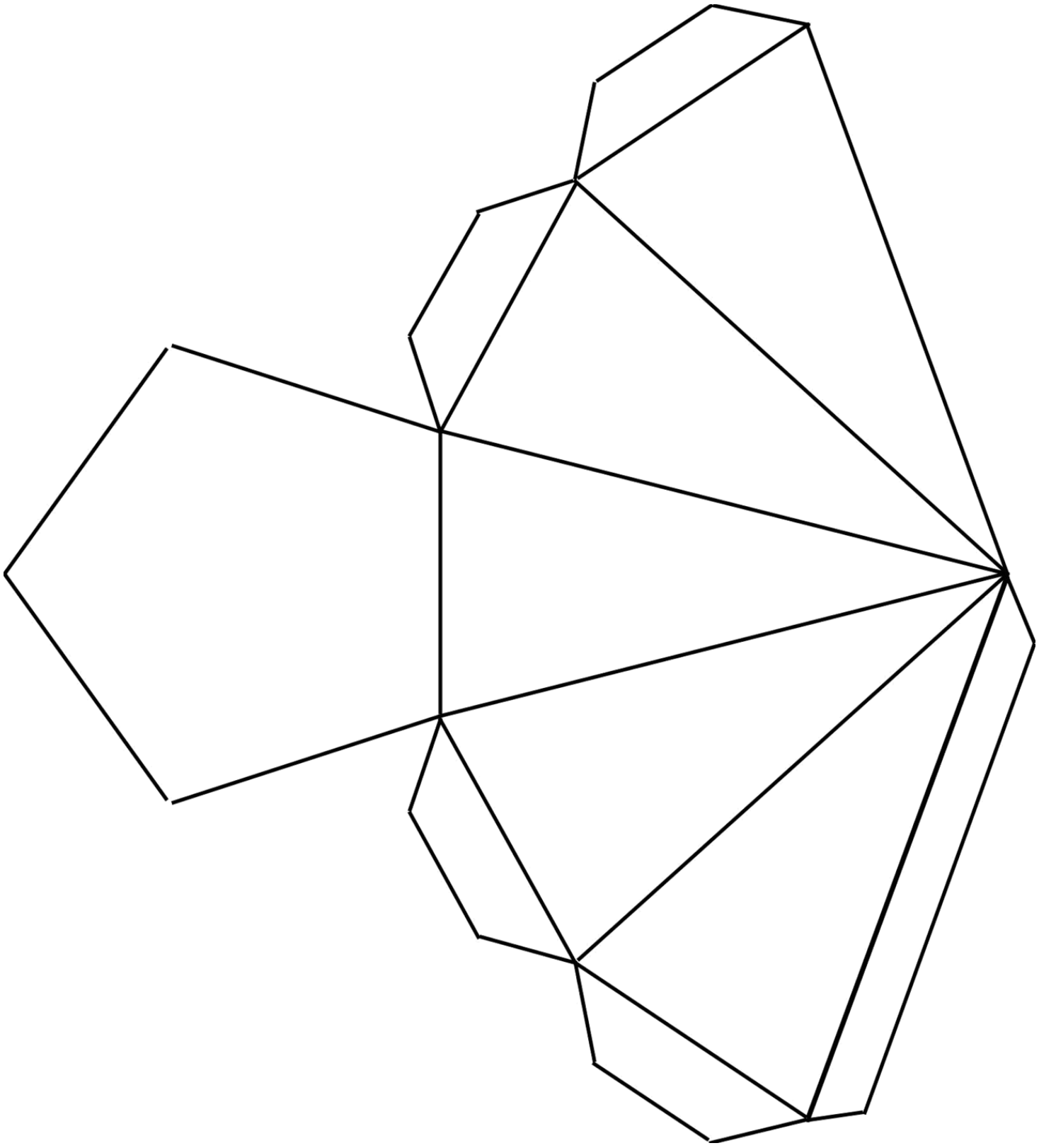


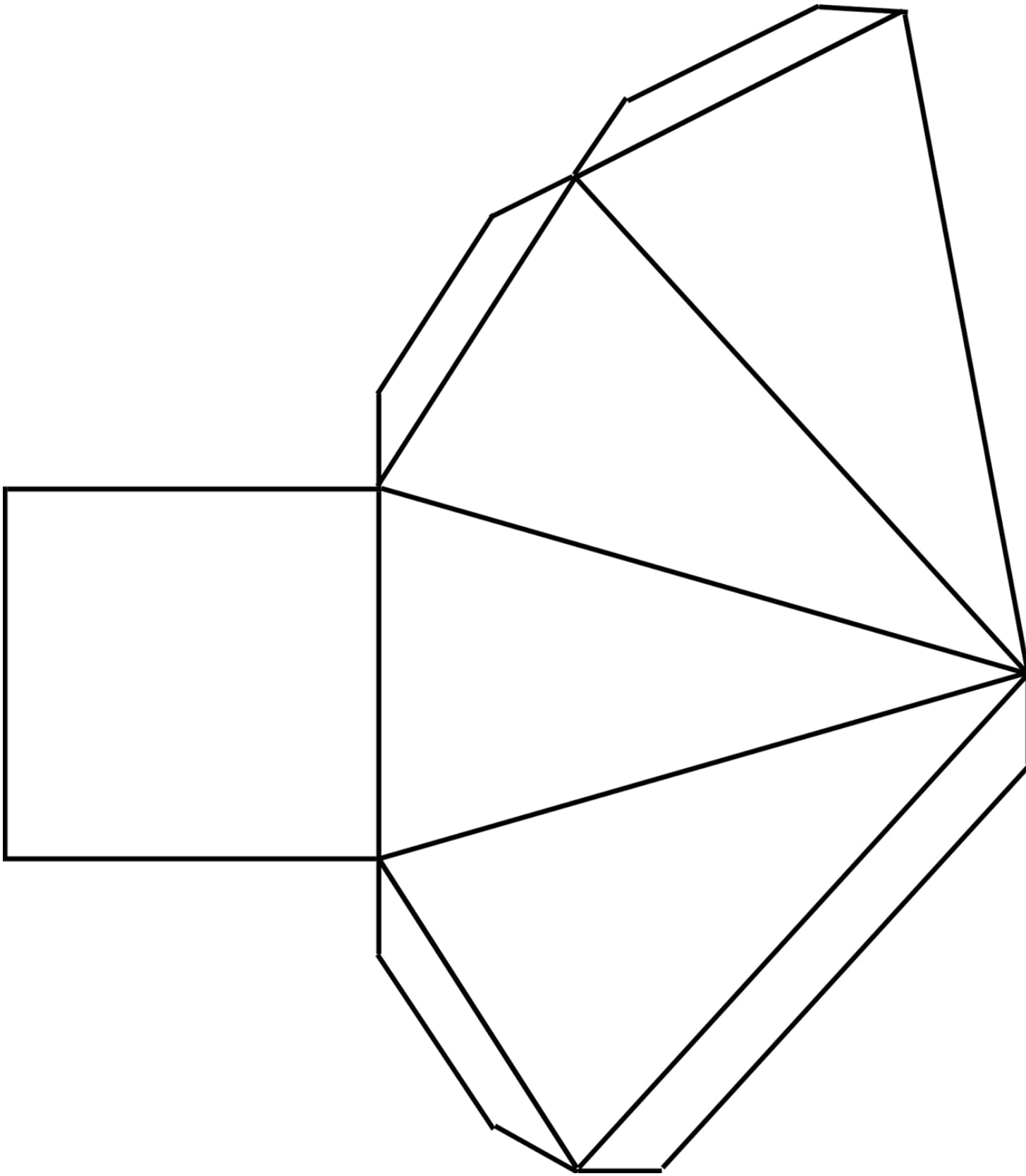


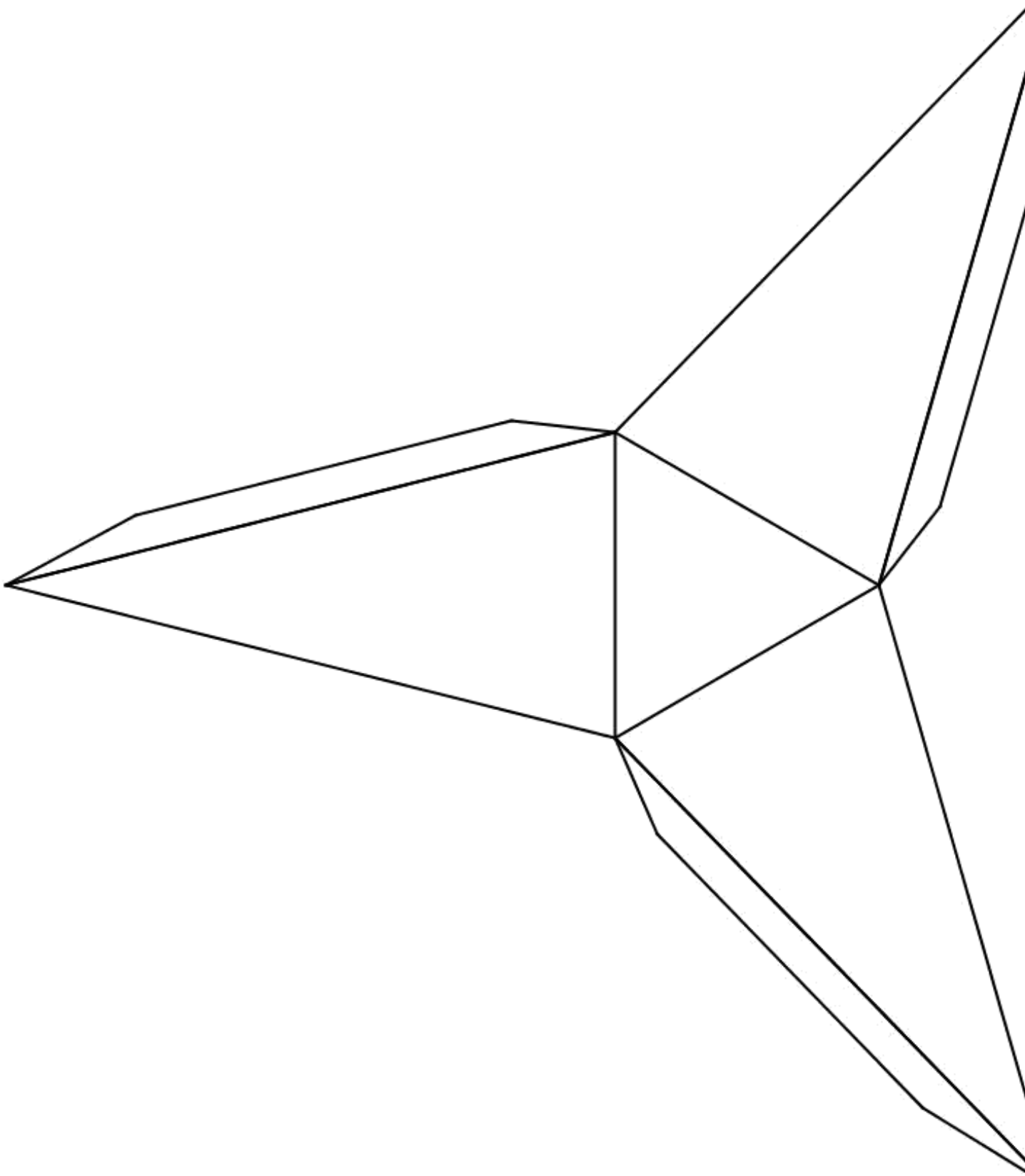


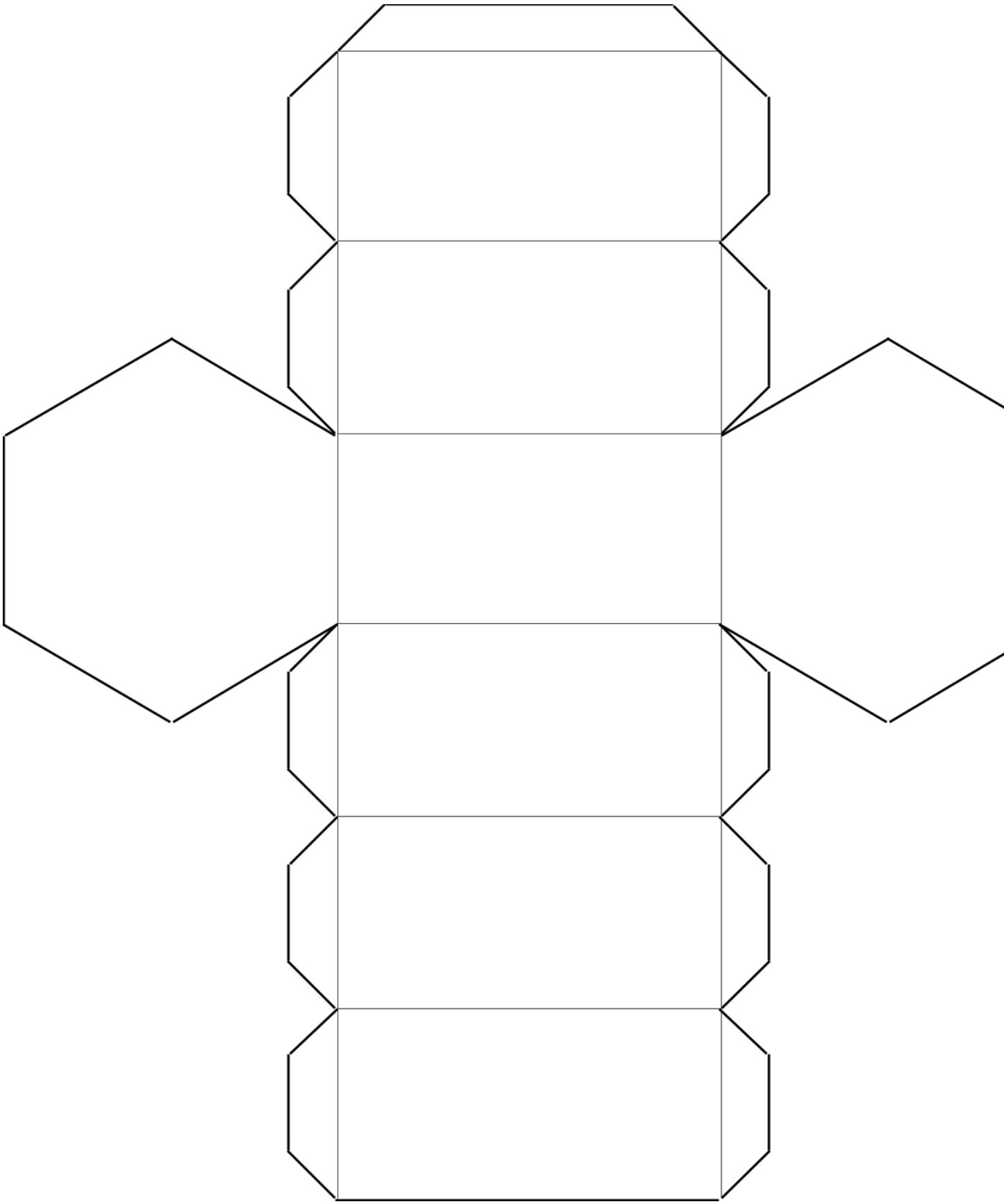


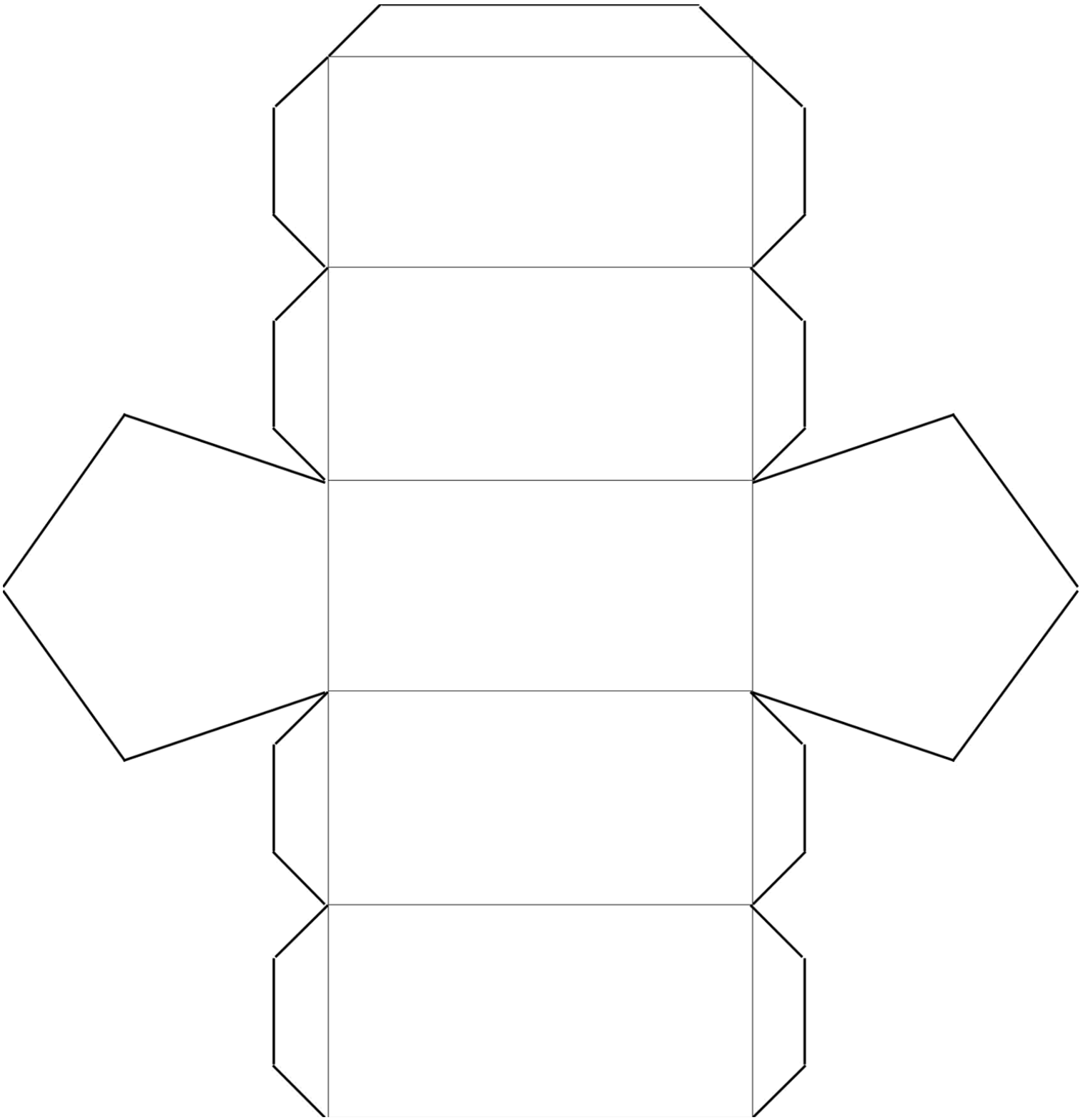


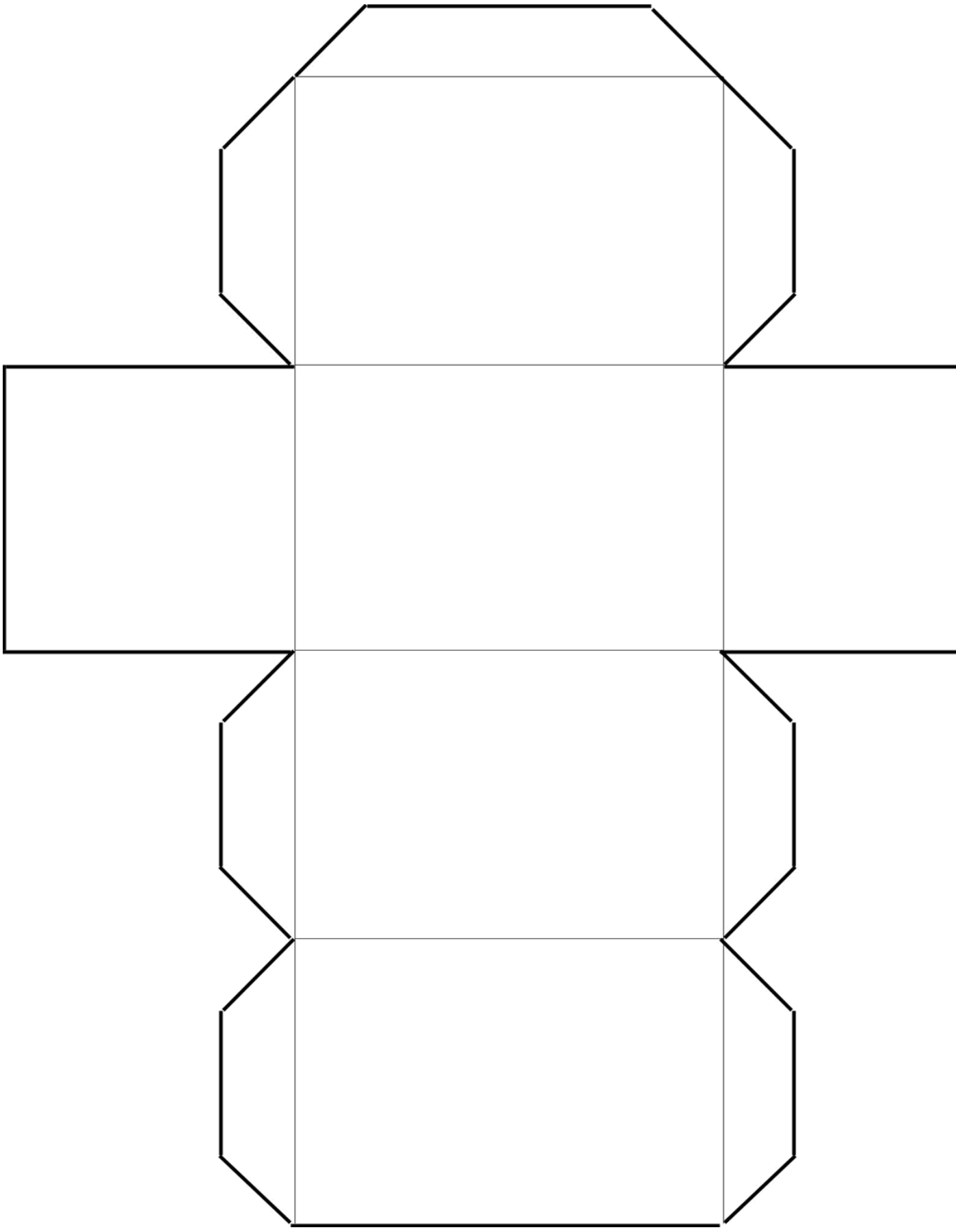


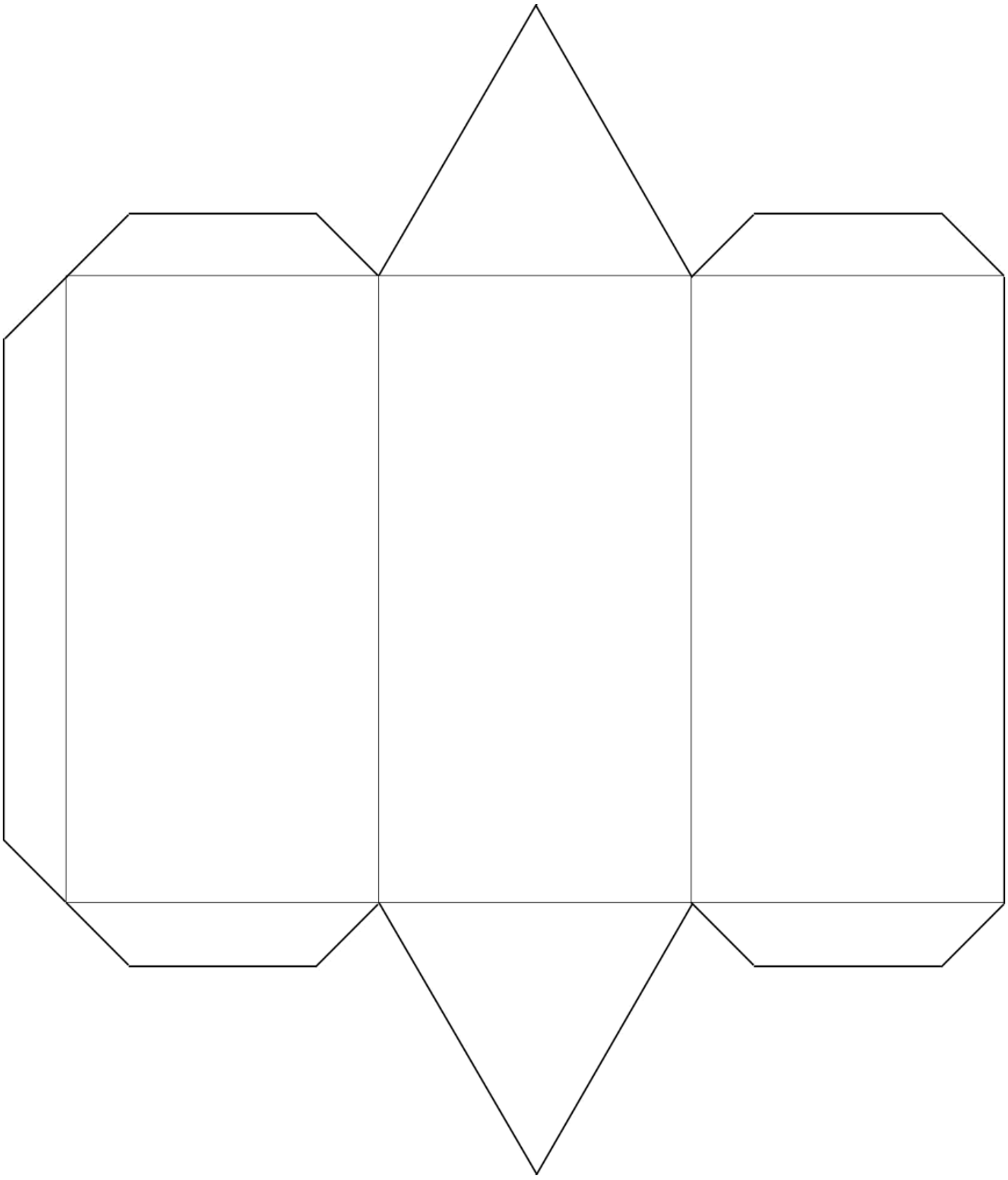


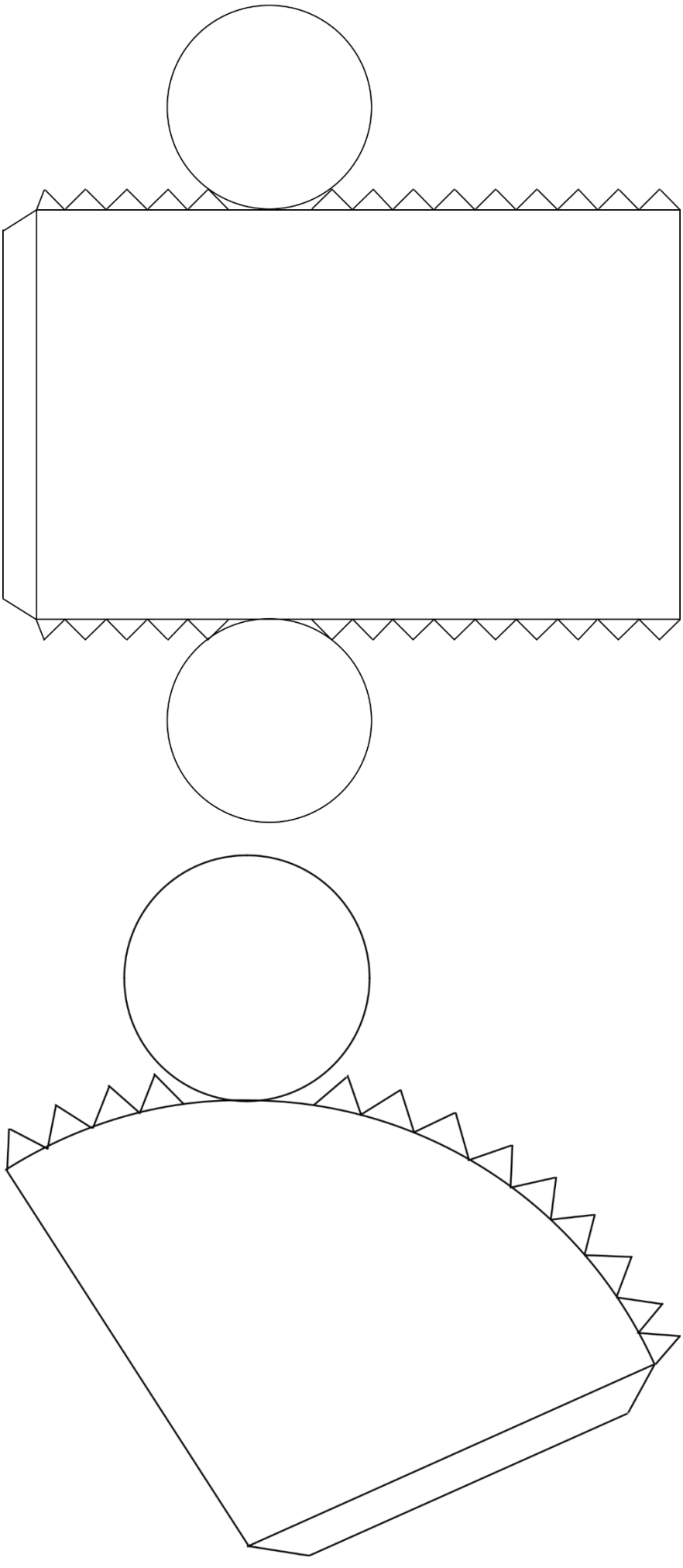


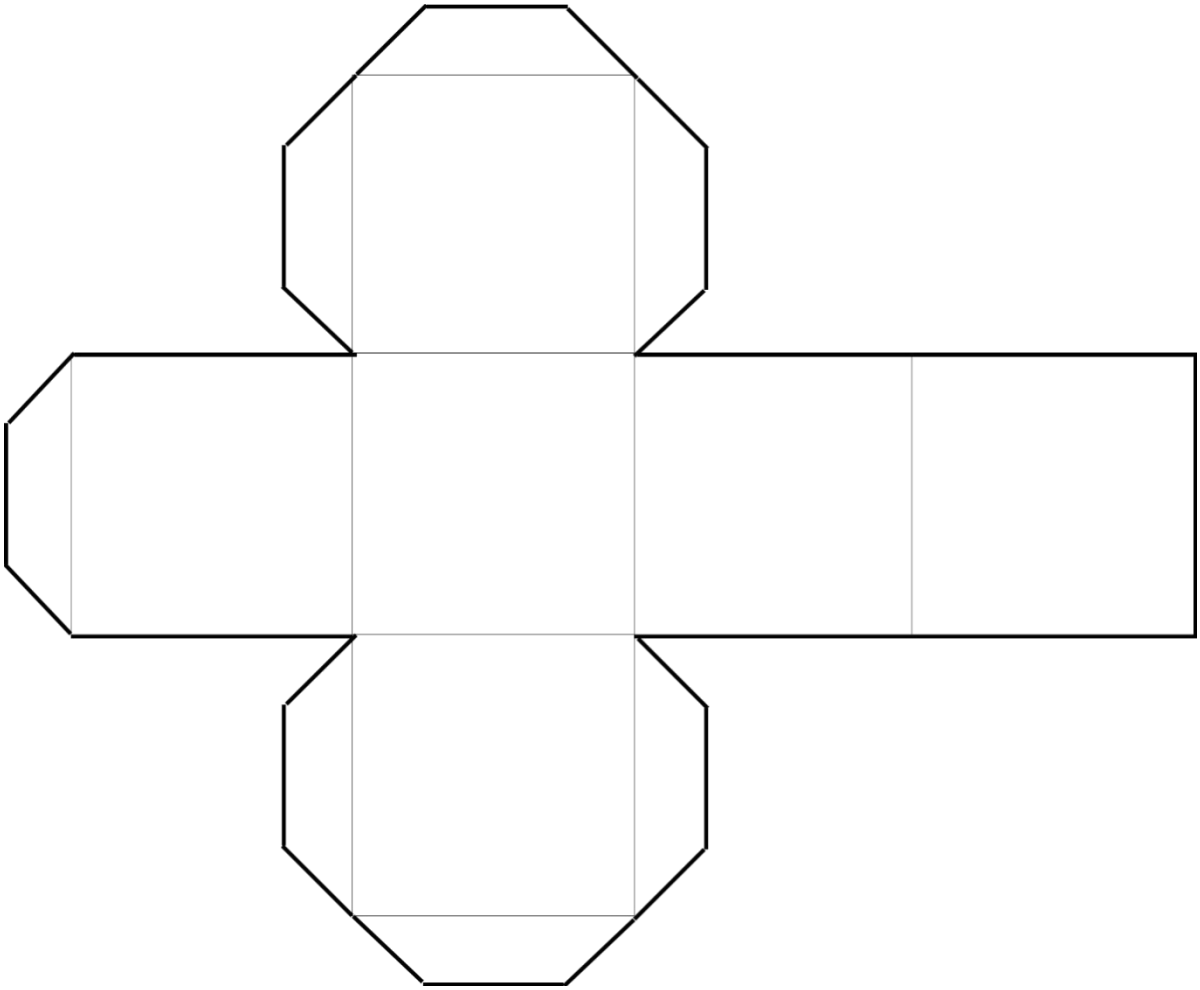


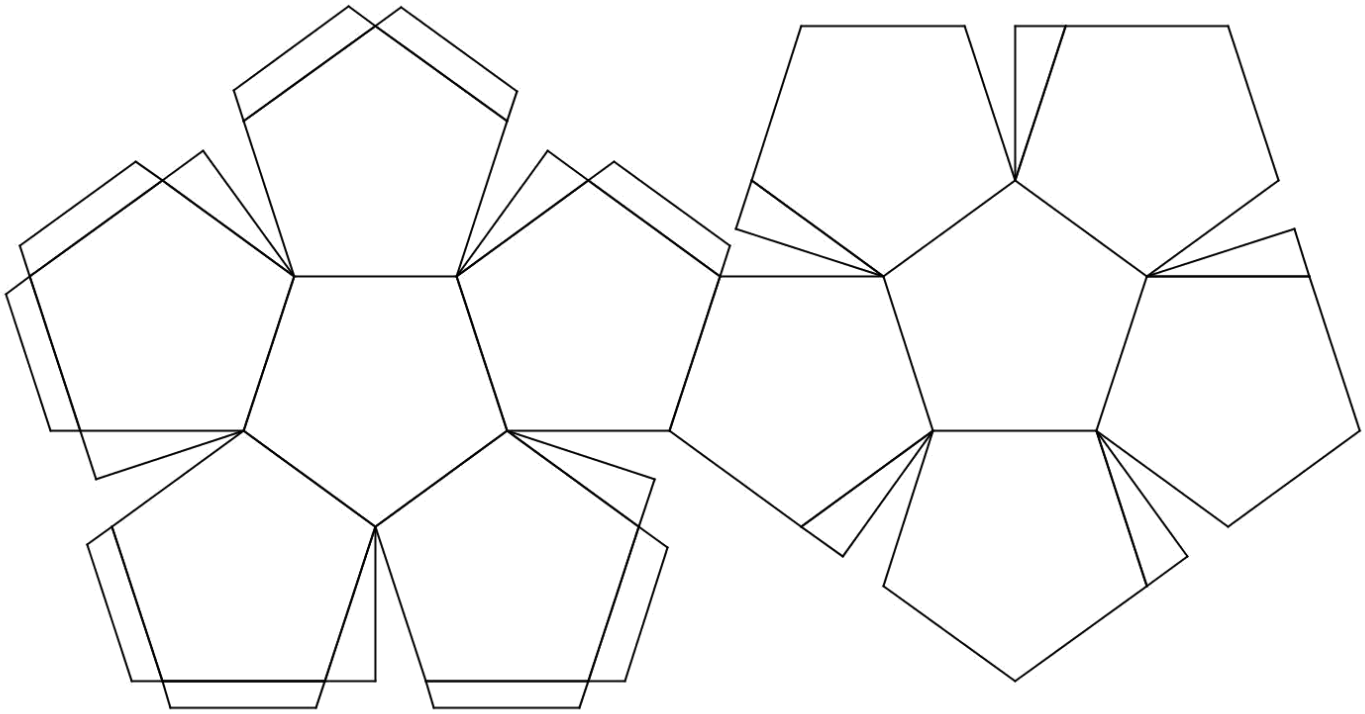


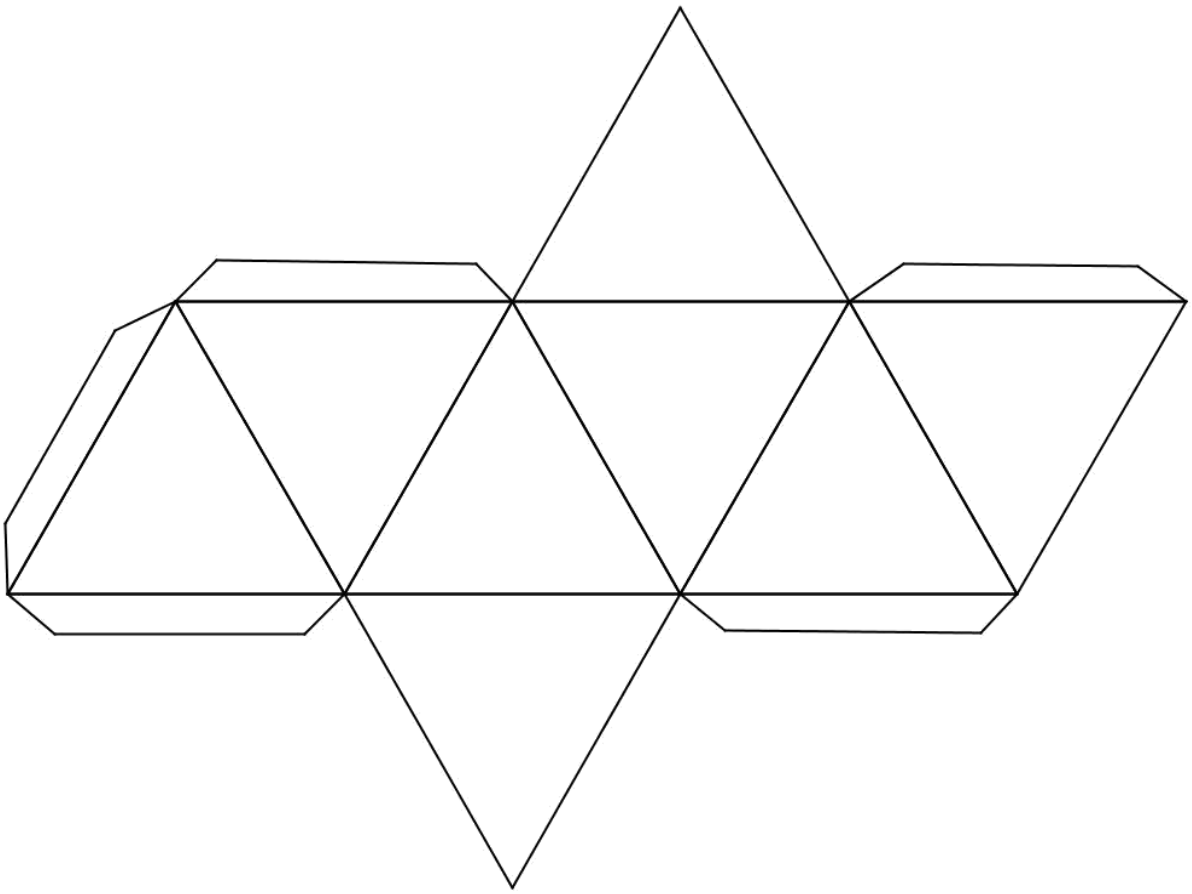


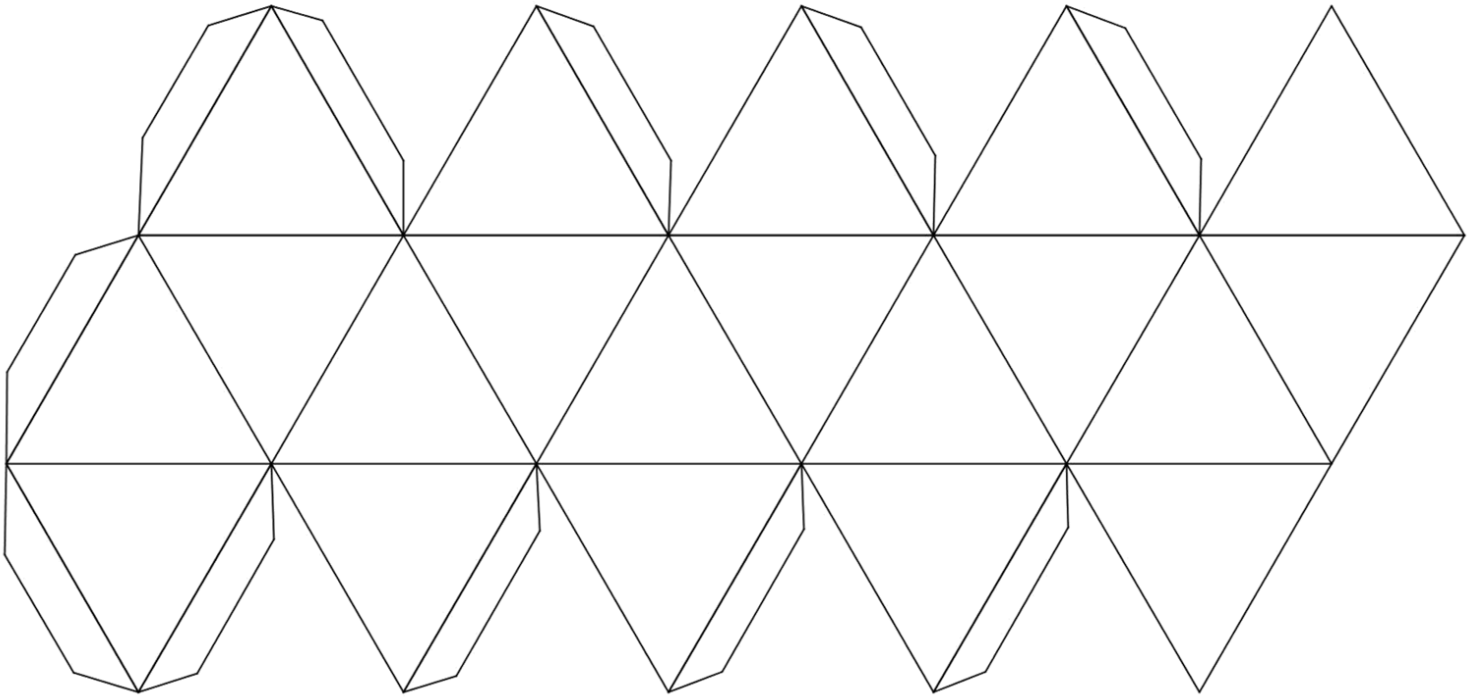


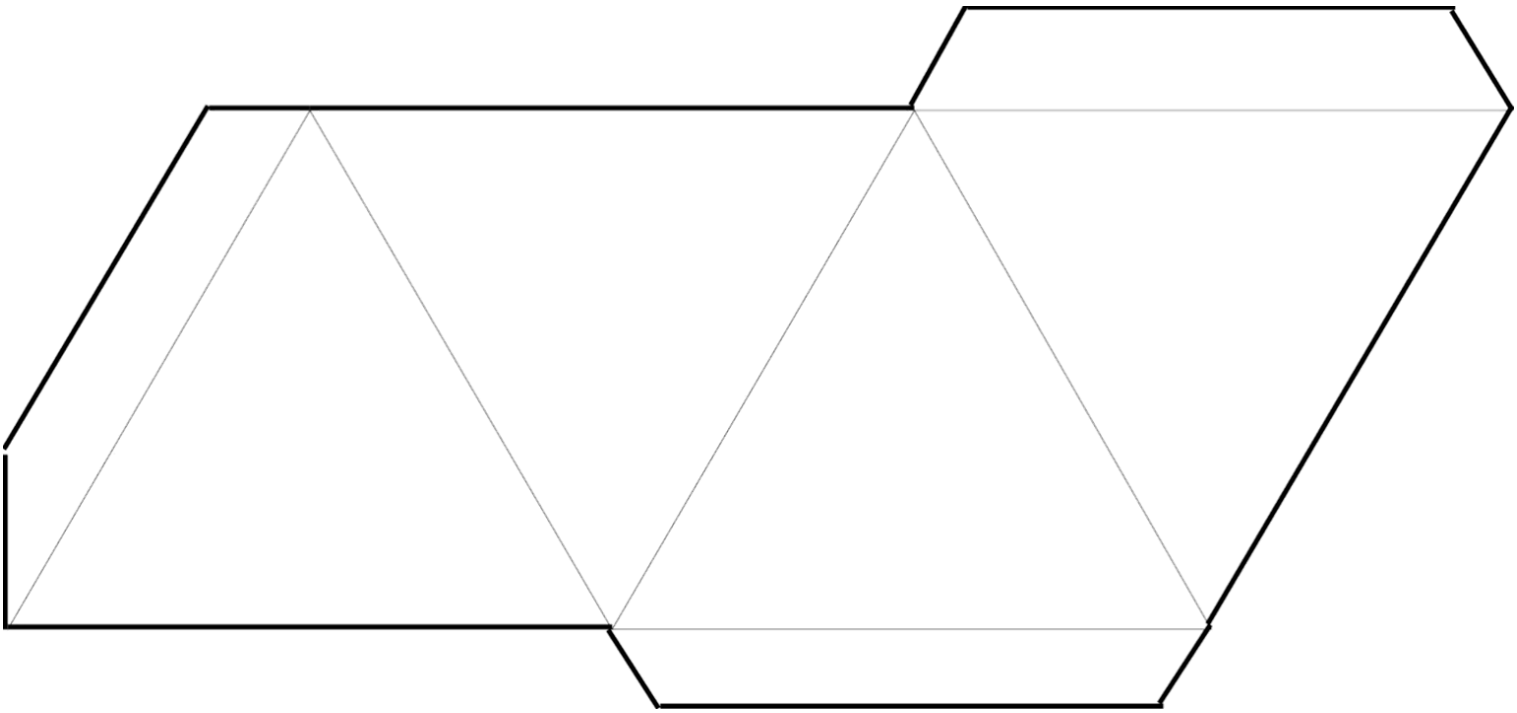


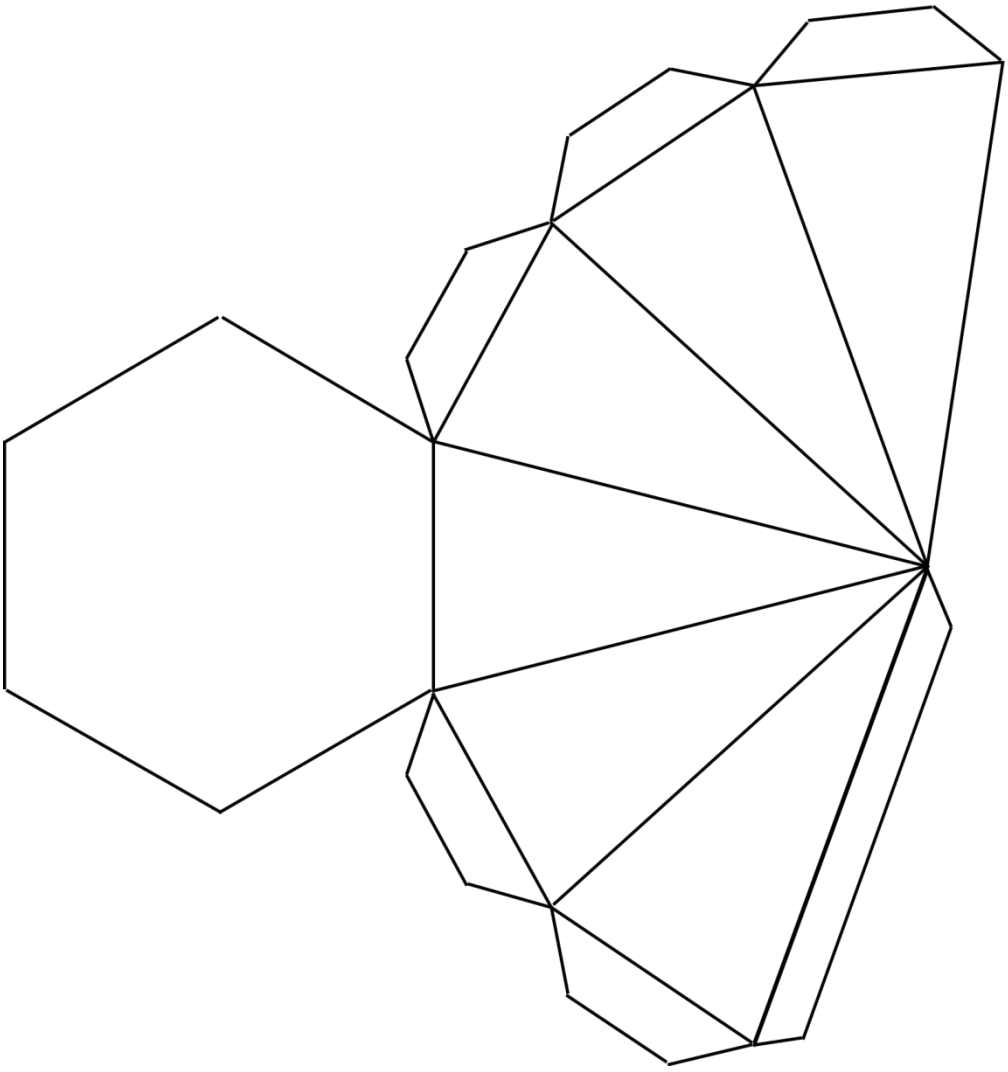


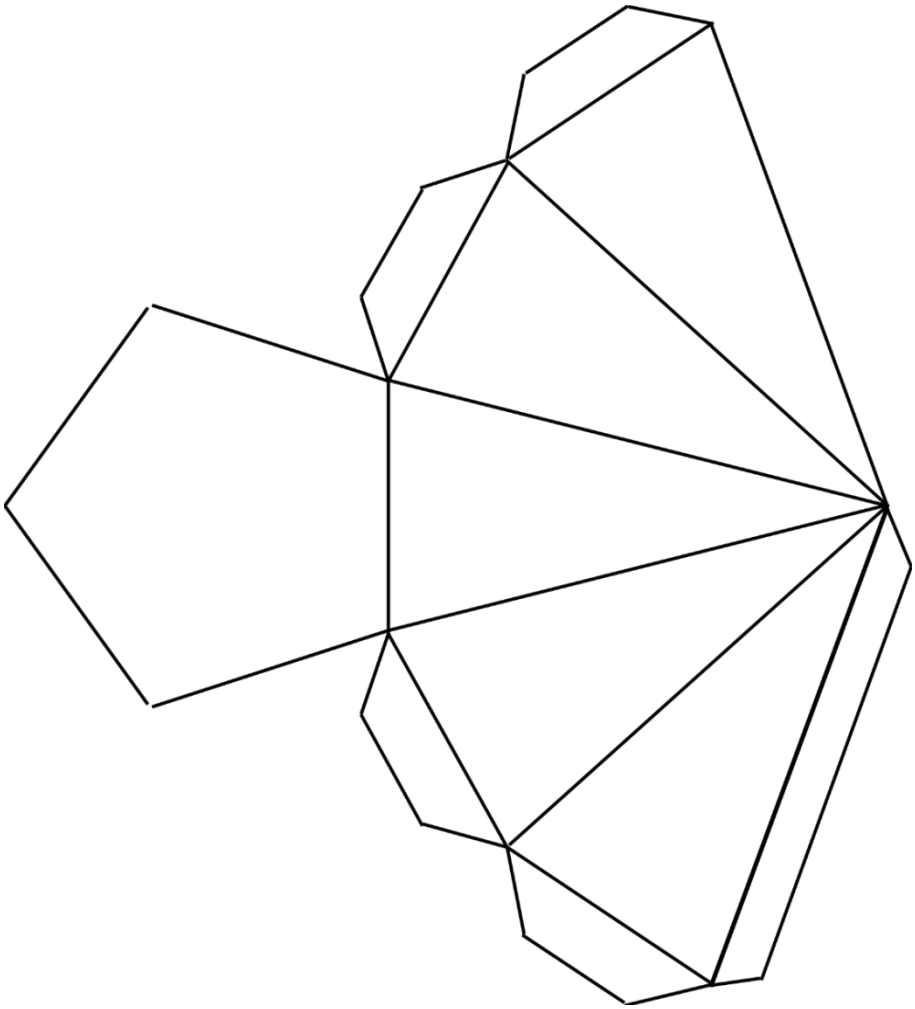


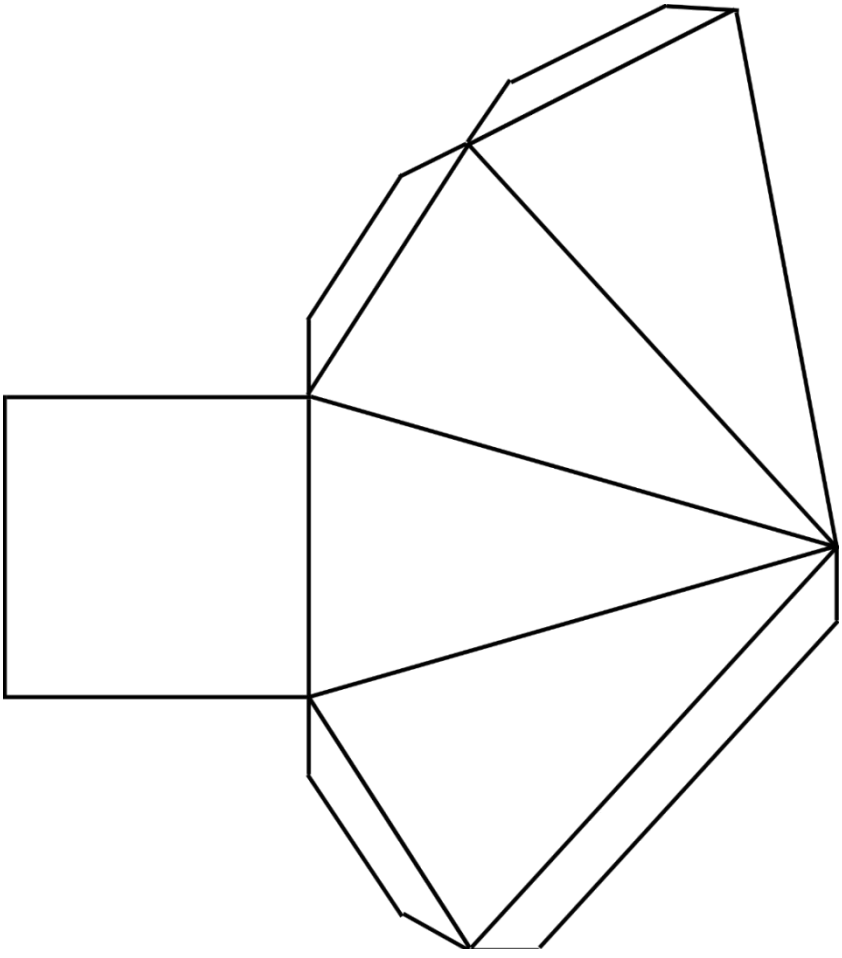


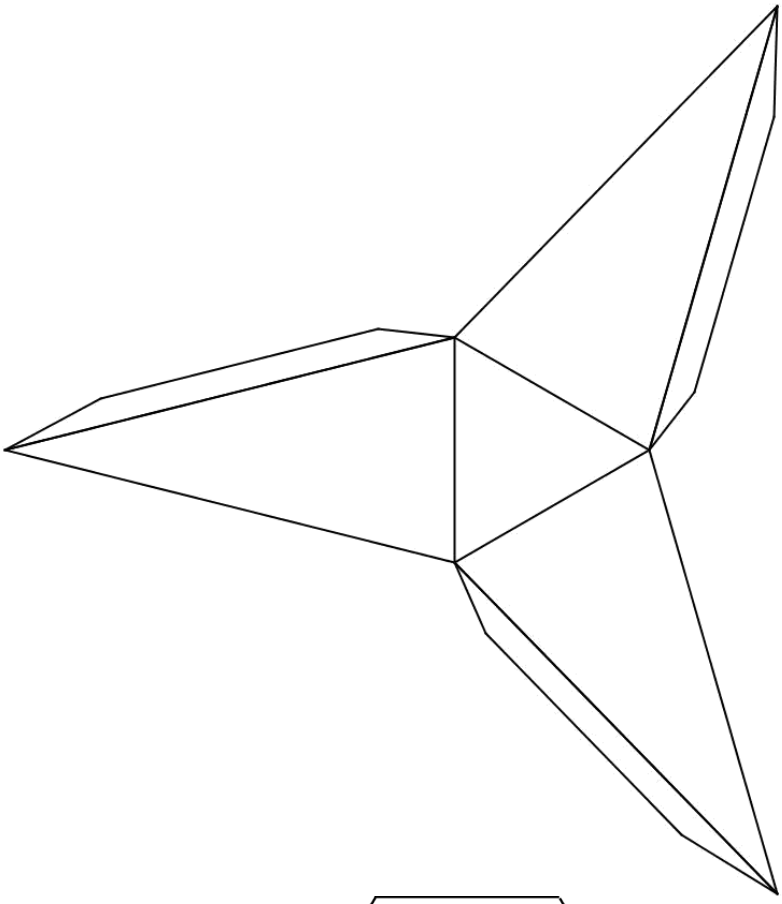


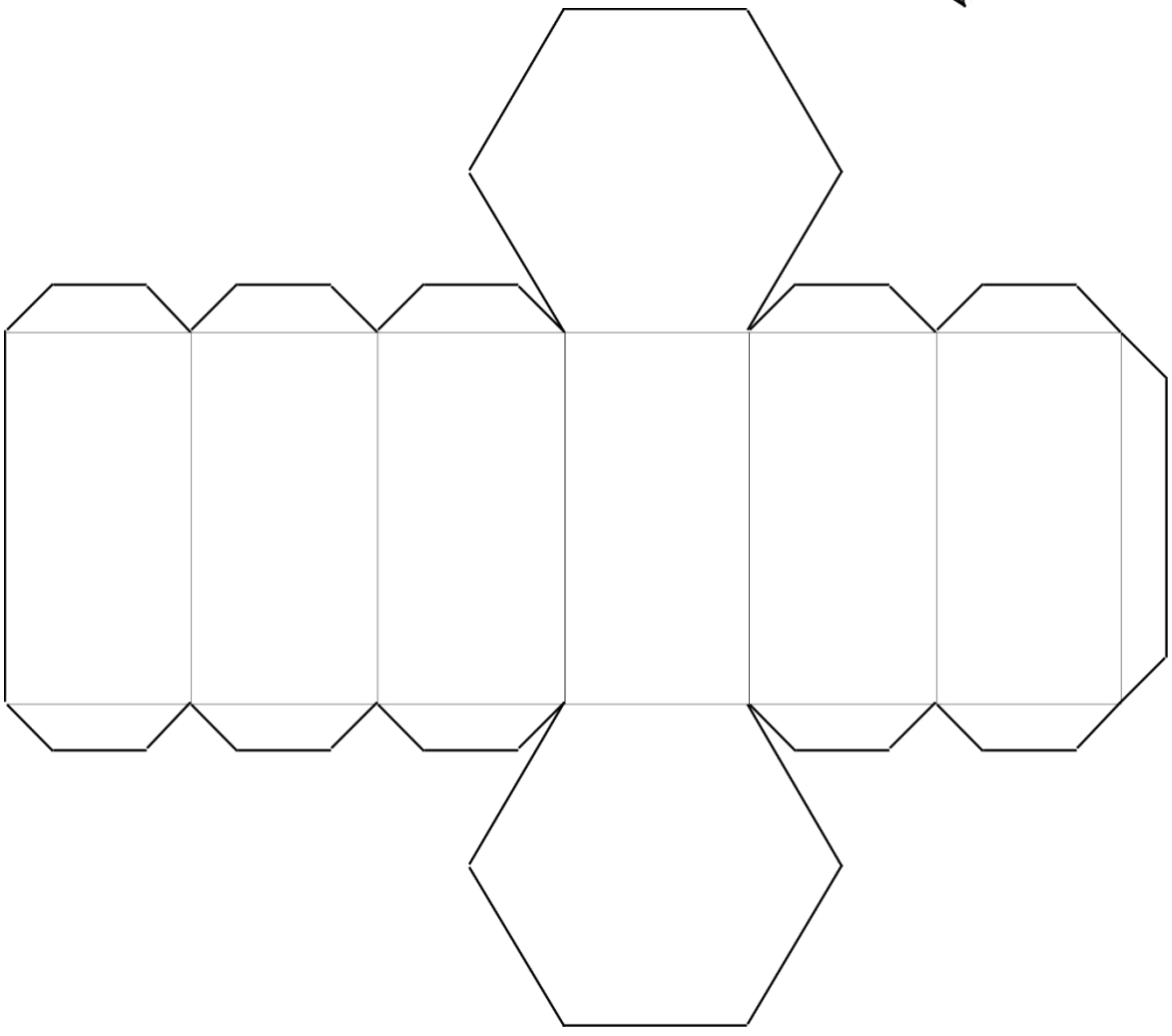


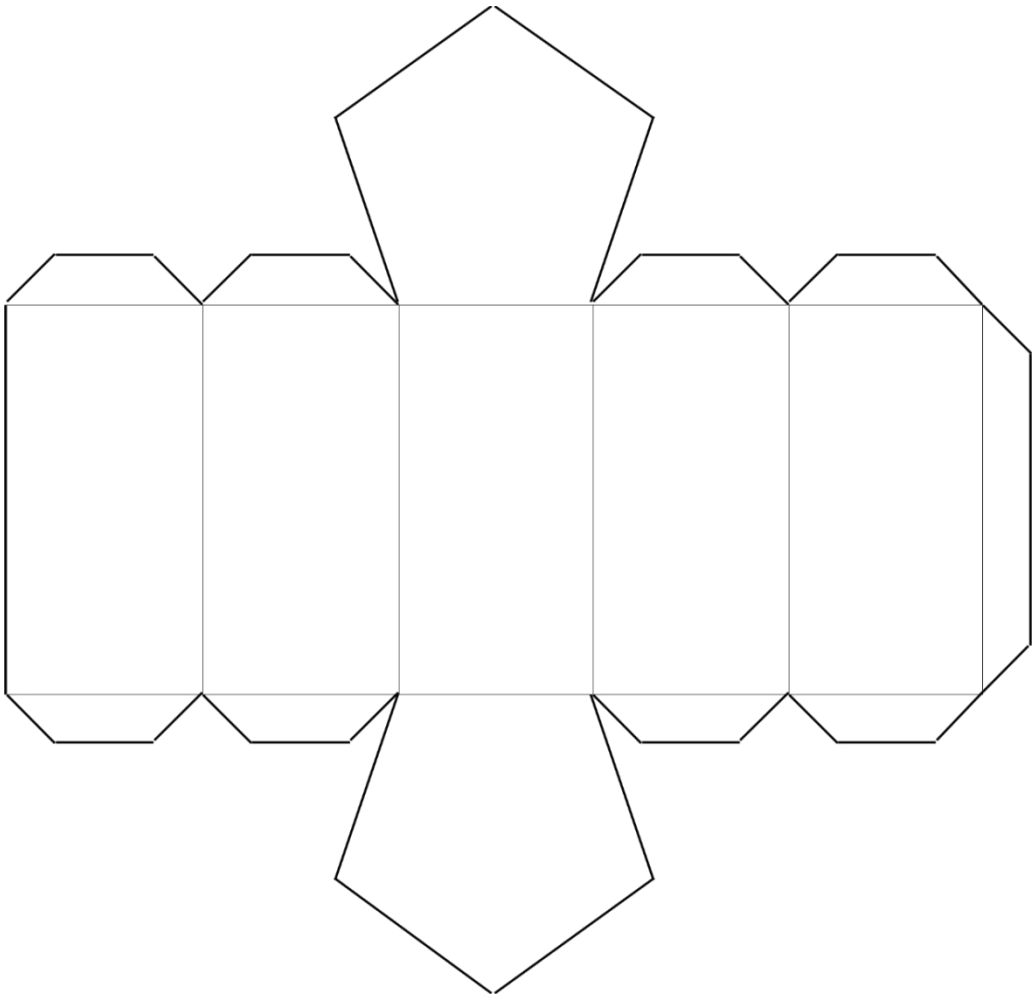


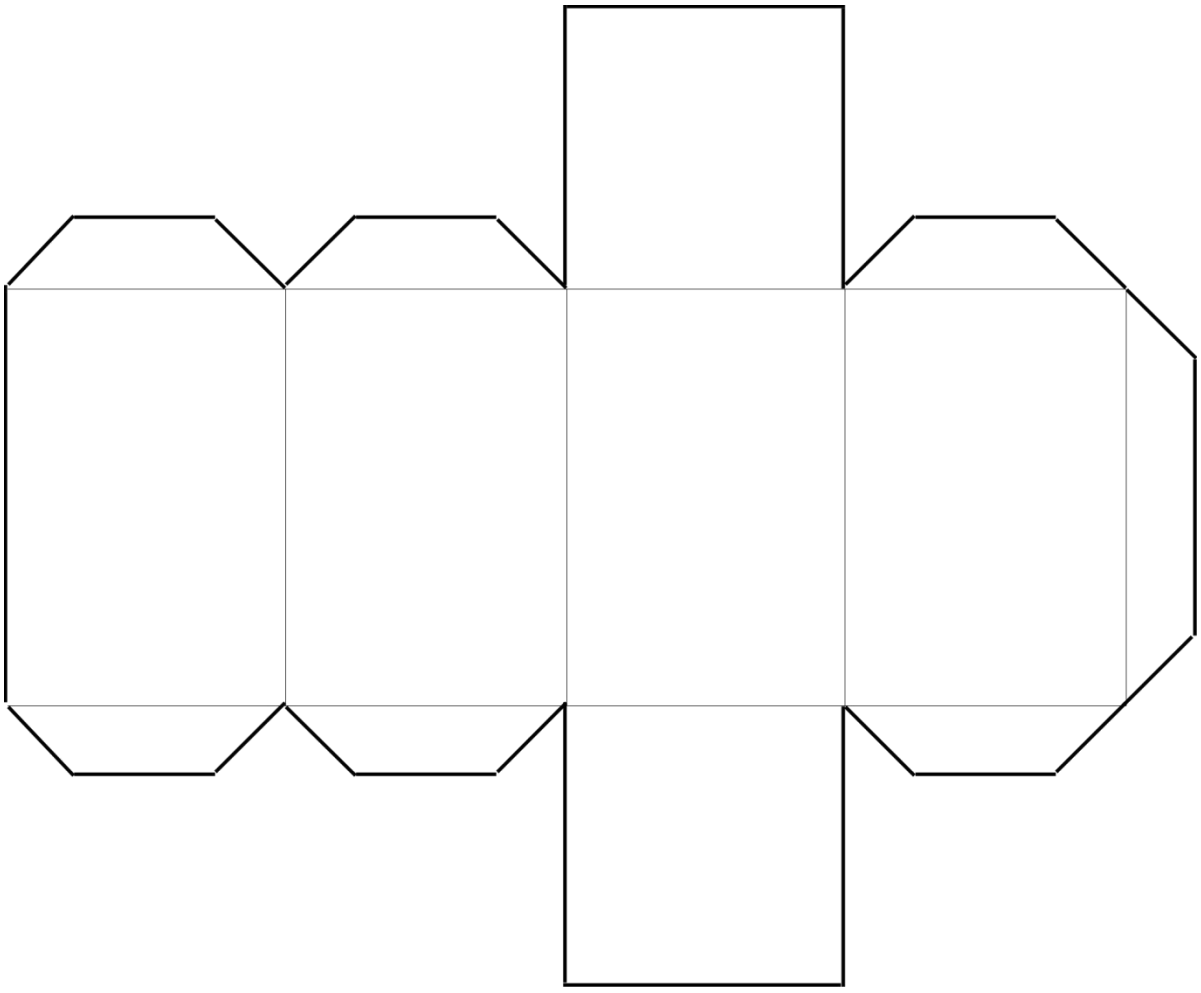


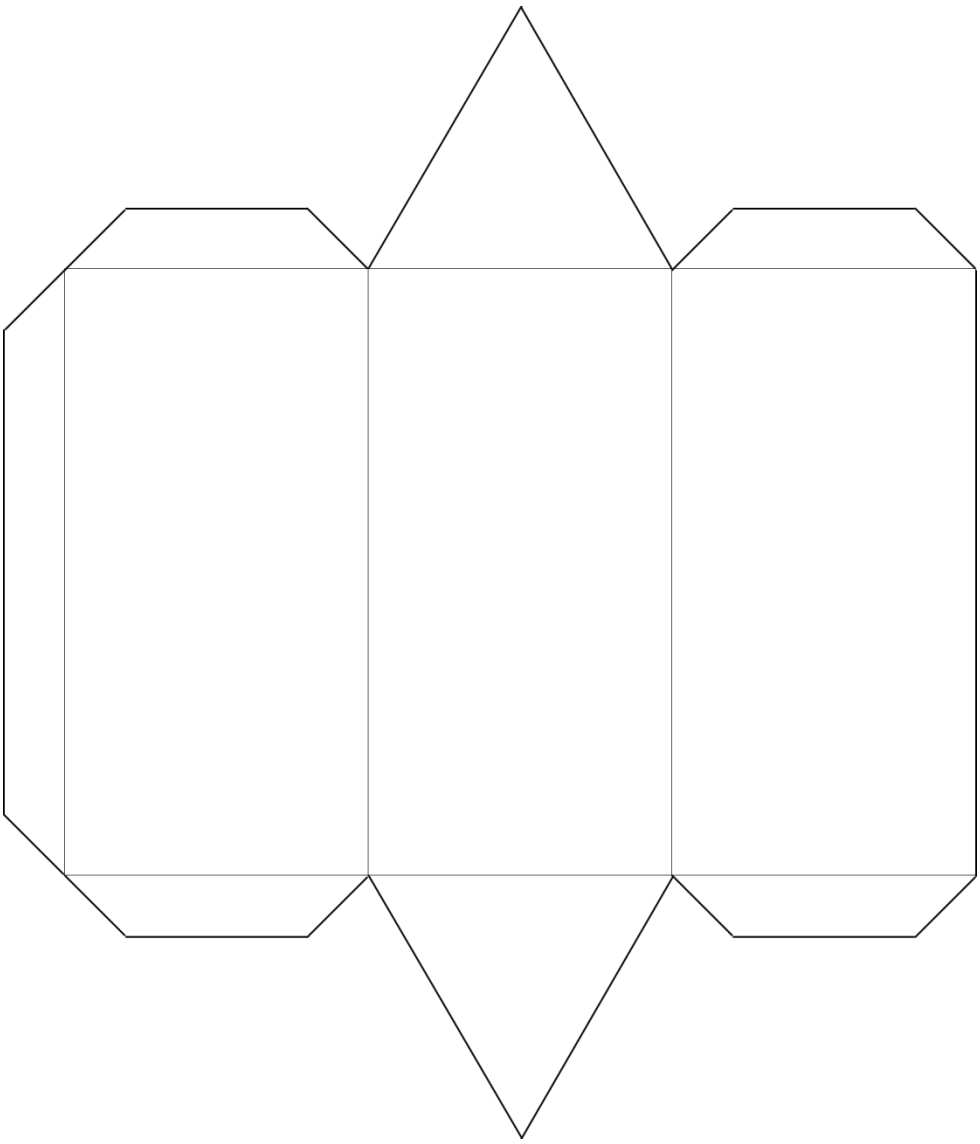


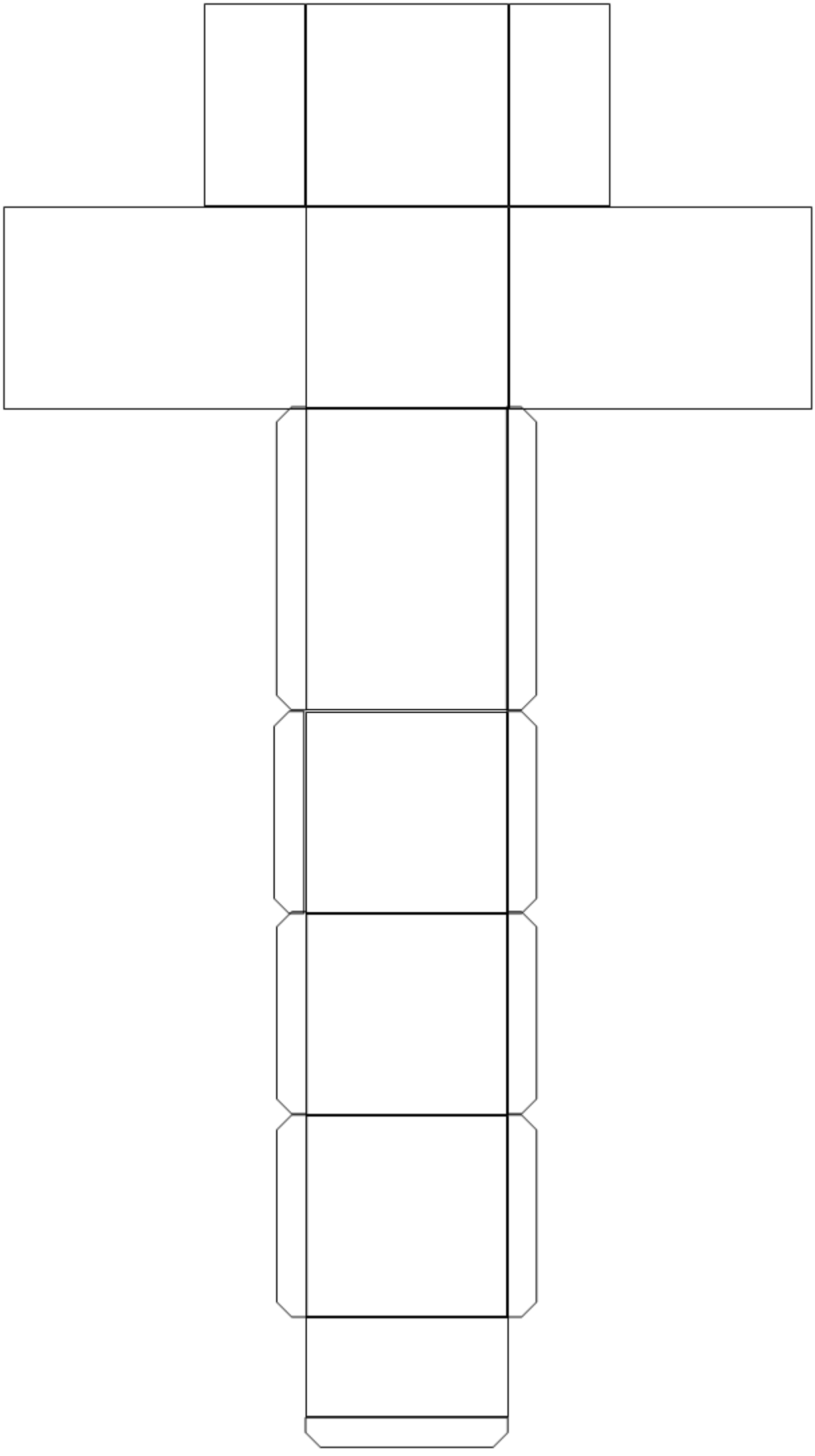


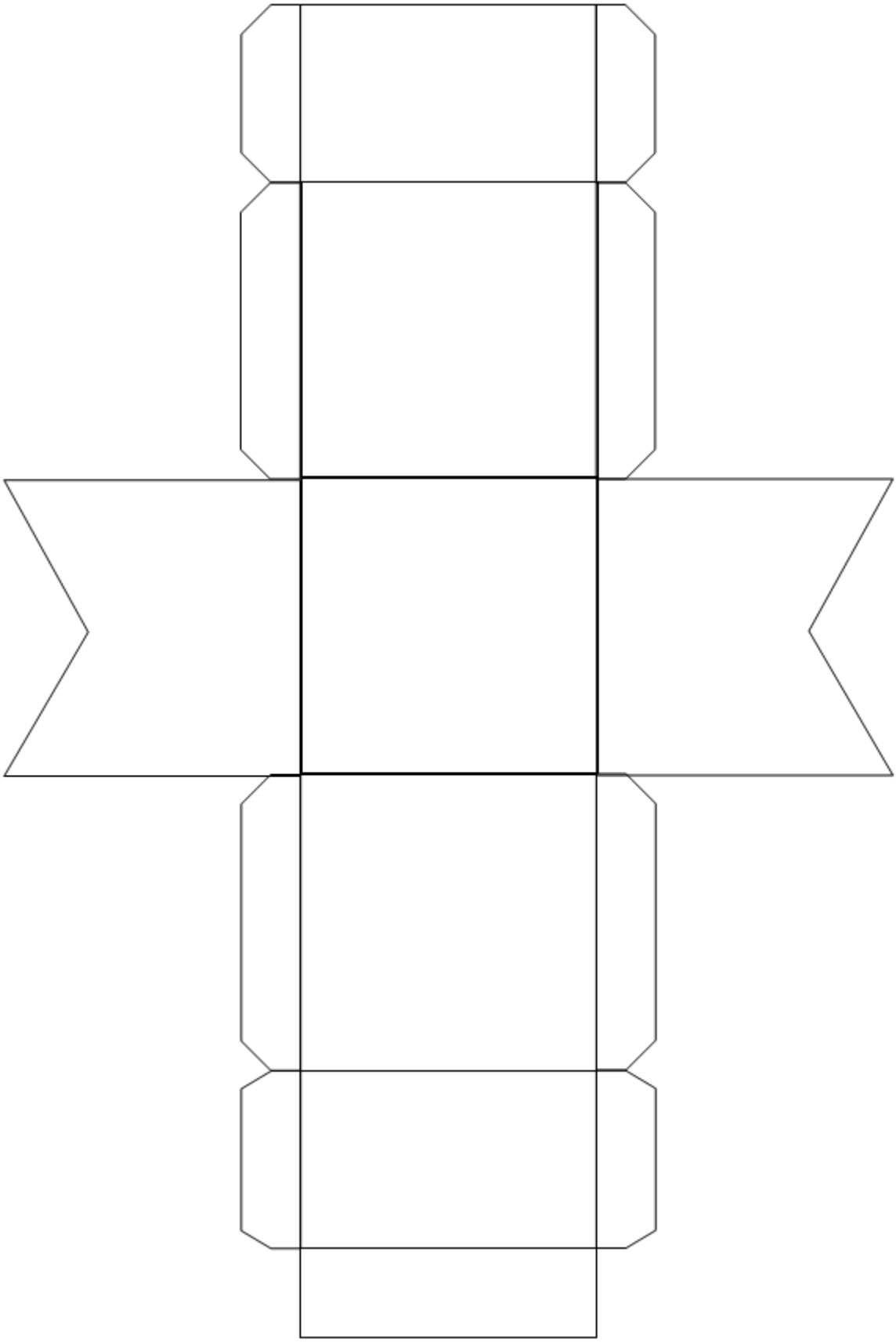


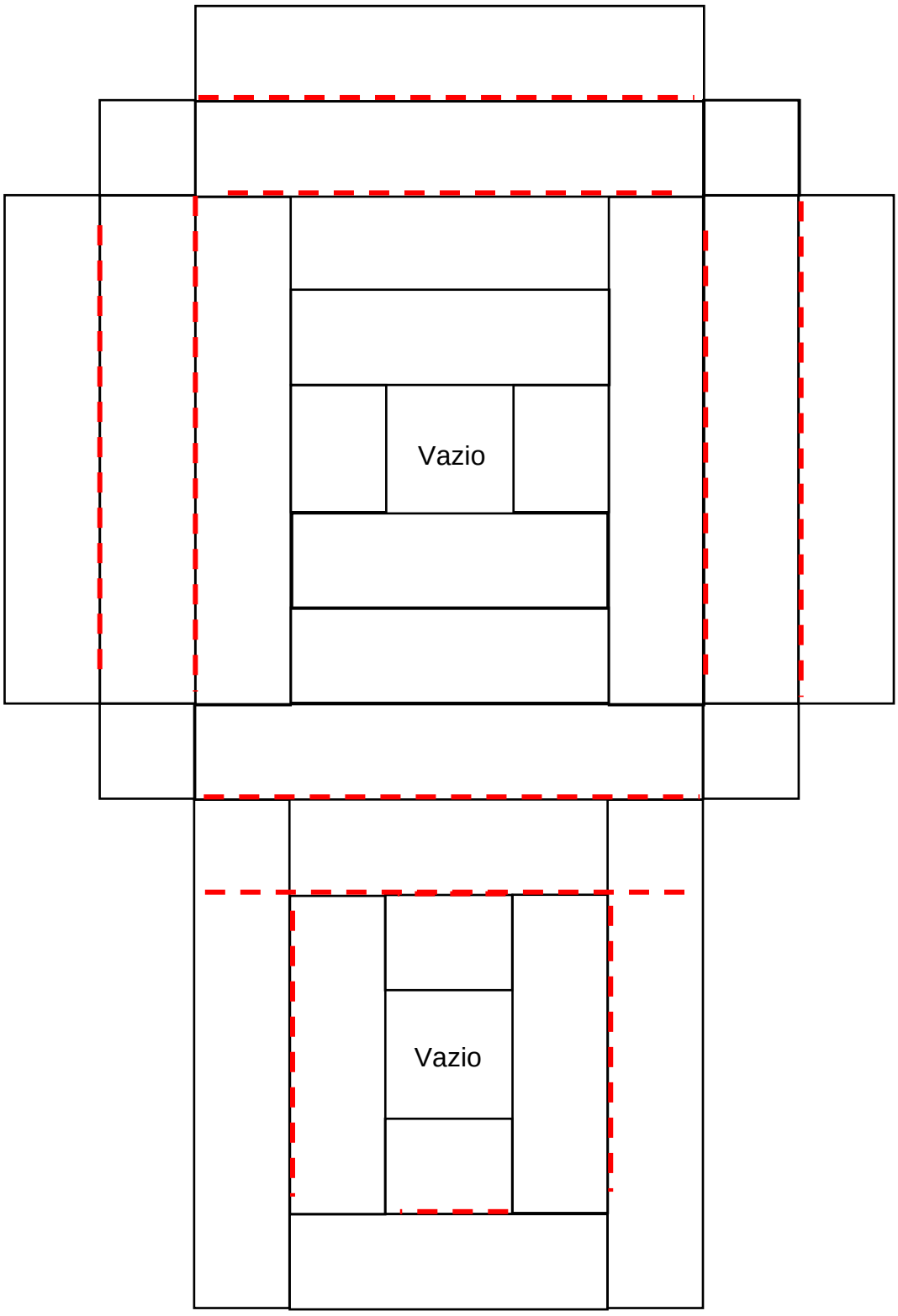






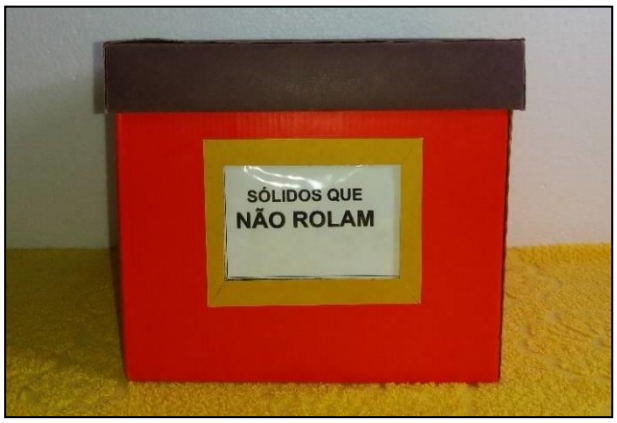


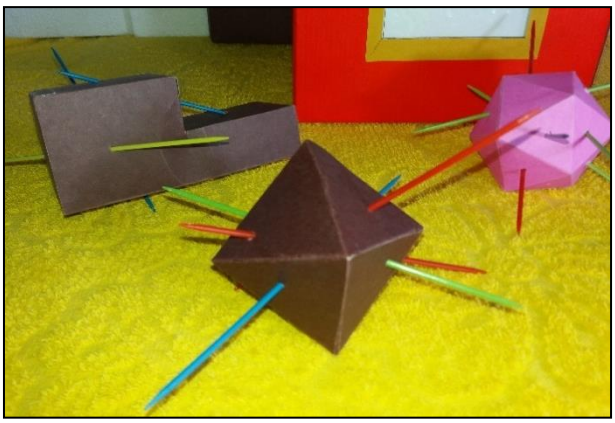



Vazio
Vazio

APÊNDICES

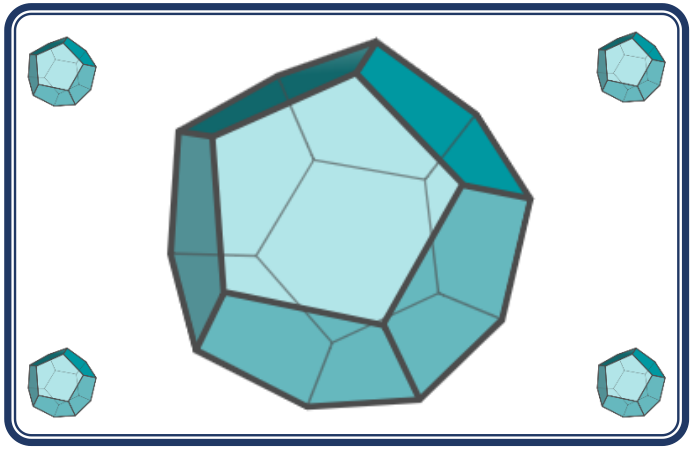
APÊNDICE A: Fotos do Kit de Sólidos Geométricos

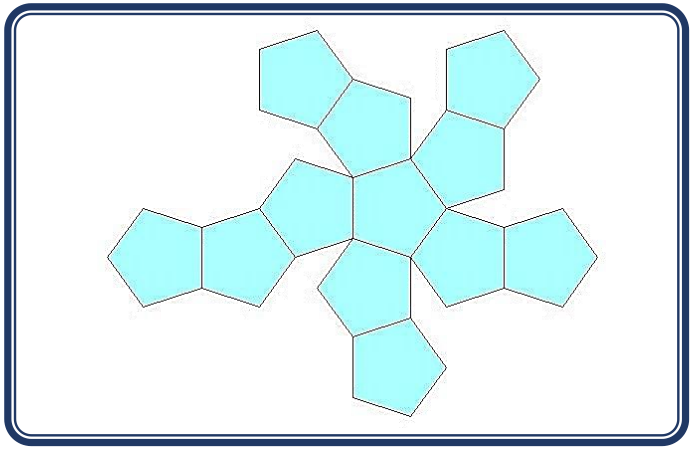




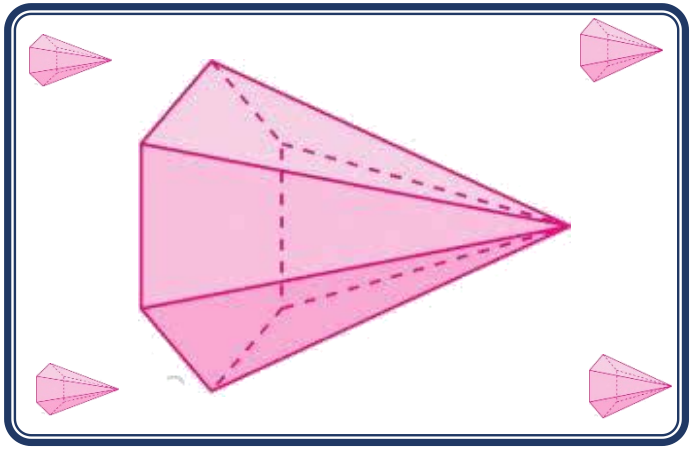
APÊNDICE B: Baralhos dos Poliedros

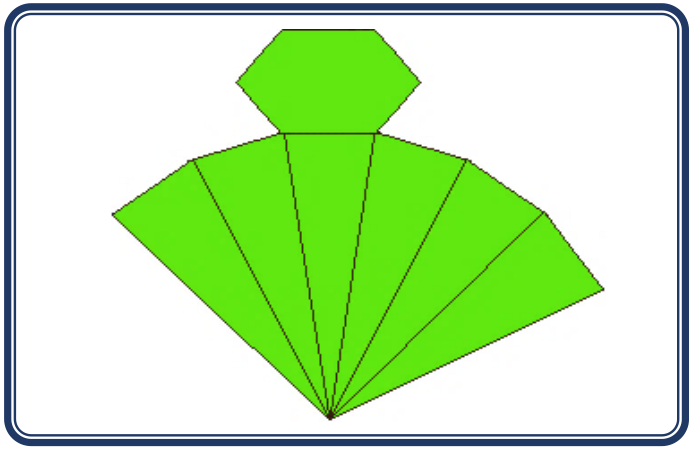
DODECAEDRO



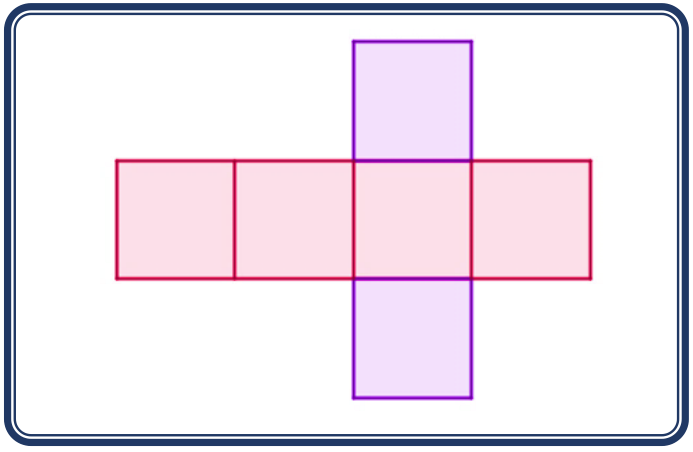


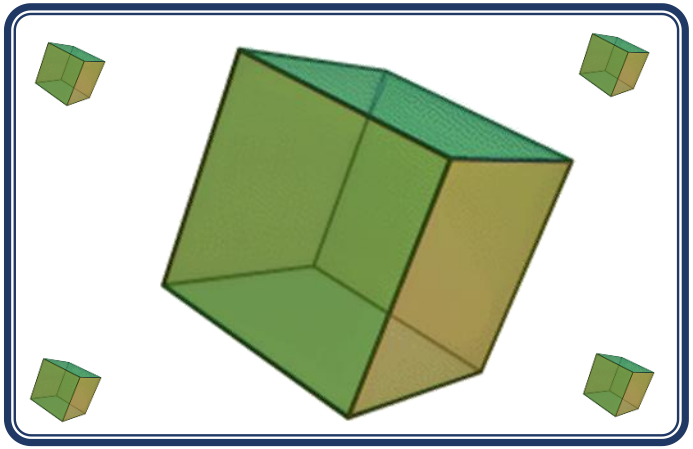
PIRÂMIDE HEXAGONAL



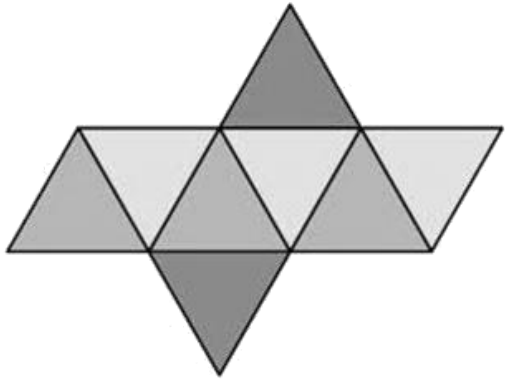


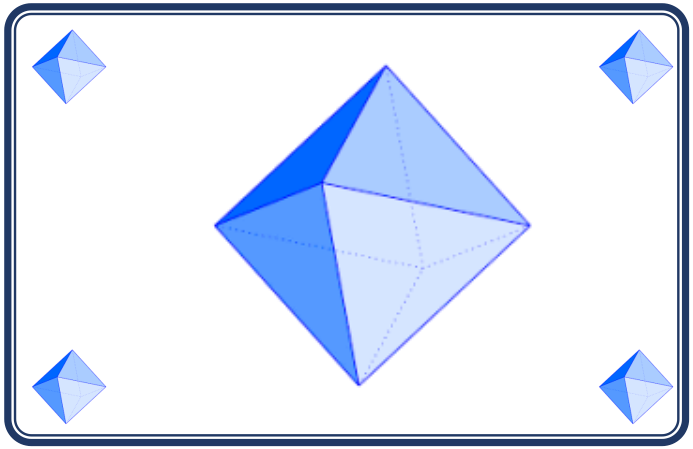
HEXAEDRO (CUBO)



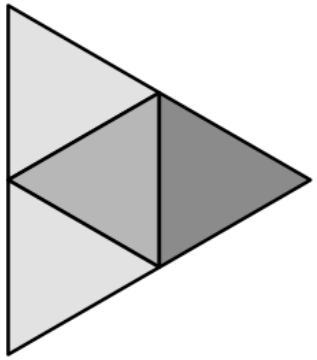


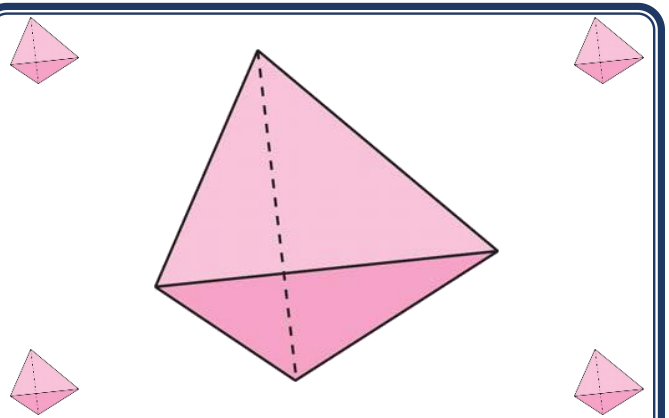
OCTAEDRO



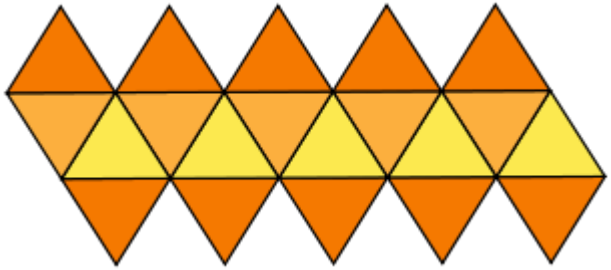


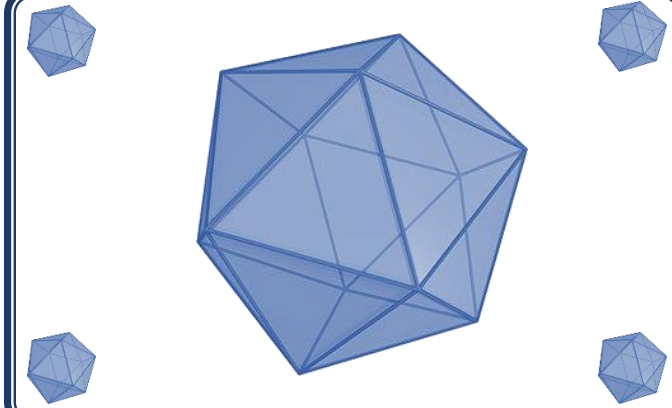
TETRAEDRO



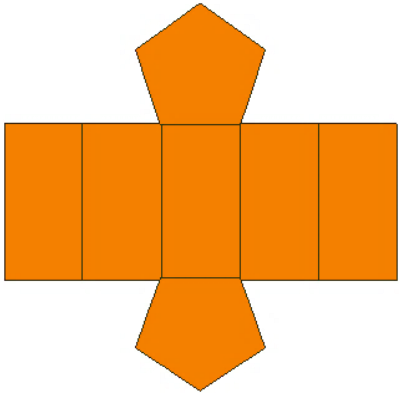


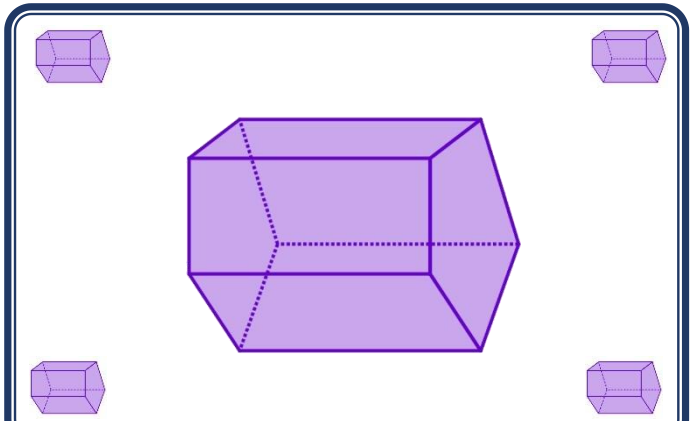
ICOSAEDRO



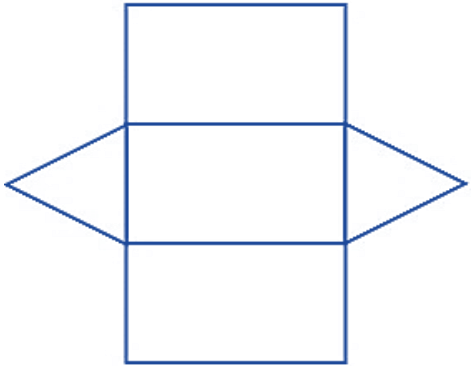


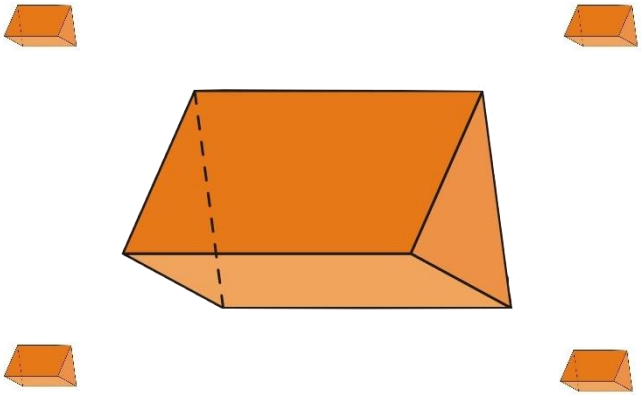
PRISMA
PENTAGONAL



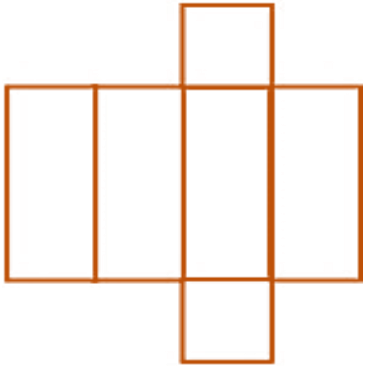


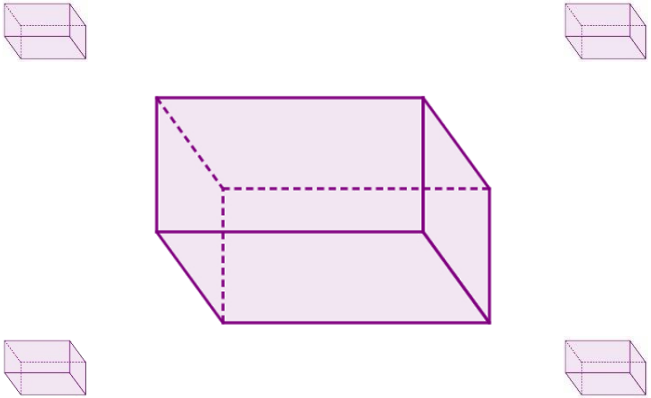
PRISMA
TRIANGULAR



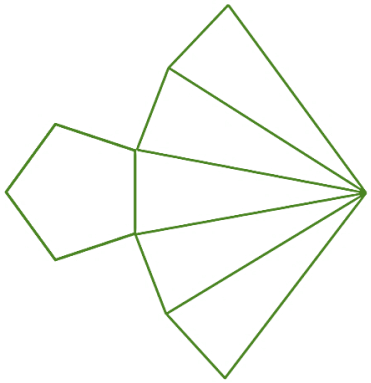


PRISMA
QUADRANGULAR

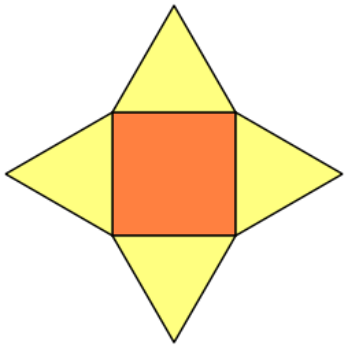




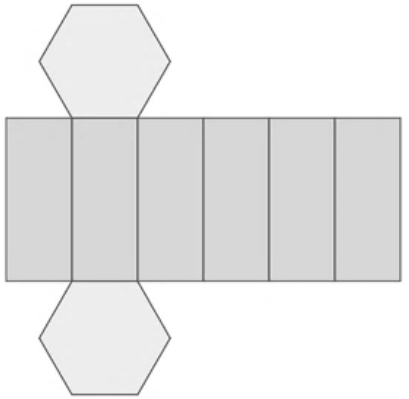
PIRÂMIDE
PENTAGONAL

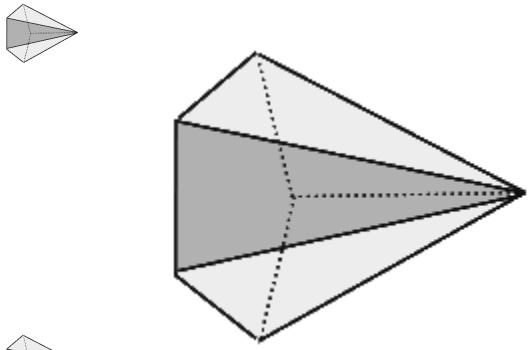


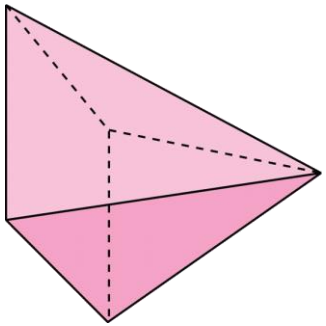
PIRÂMIDE
QUADRANGULAR

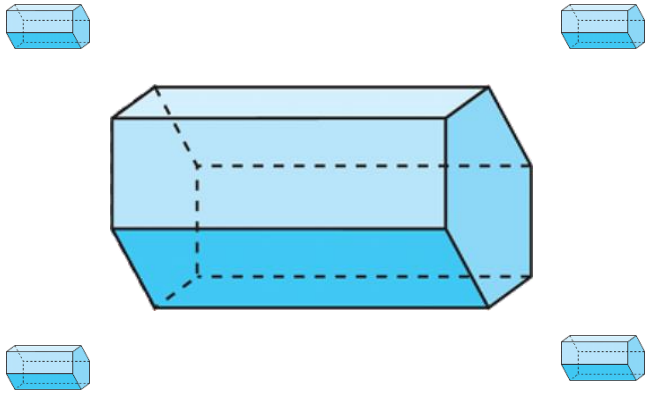


PRISMA
HEXAGONAL









PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

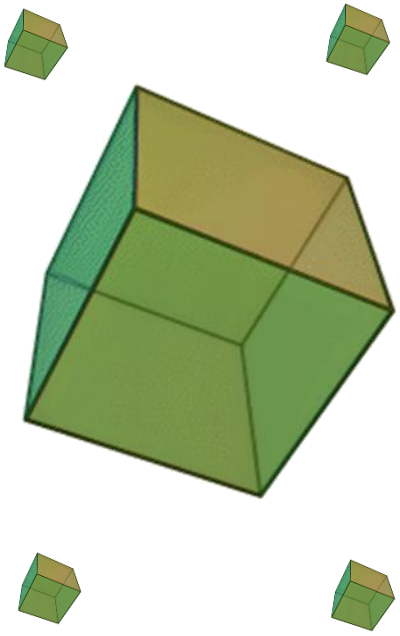
PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS

PIF PAF
DOS
POLIEDROS
POLIEDROS



Base quadrangular

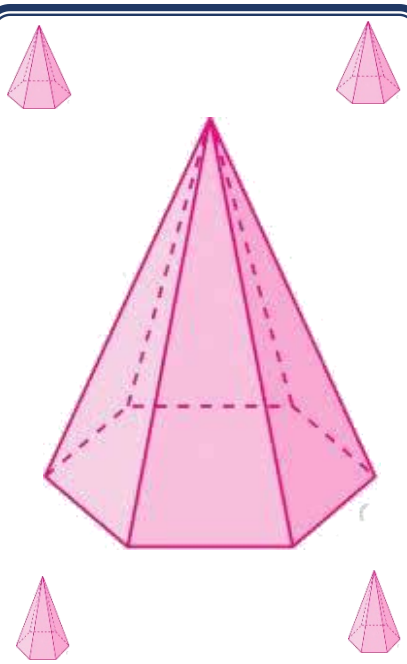
É um poliedro de Platão

É um poliedro regular

6 faces

8 vértices

12 arestas



Base Hexagonal

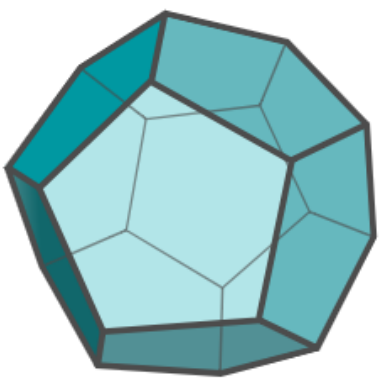
É um poliedro irregular

7 faces

7 vértices

12 arestas

Não é um poliedro de Platão



Base pentagonal

É um poliedro regular

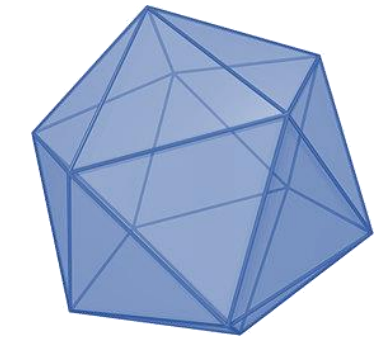
12 faces

20 vértices

30 arestas

É um poliedro de Platão

É um poliedro de Platão



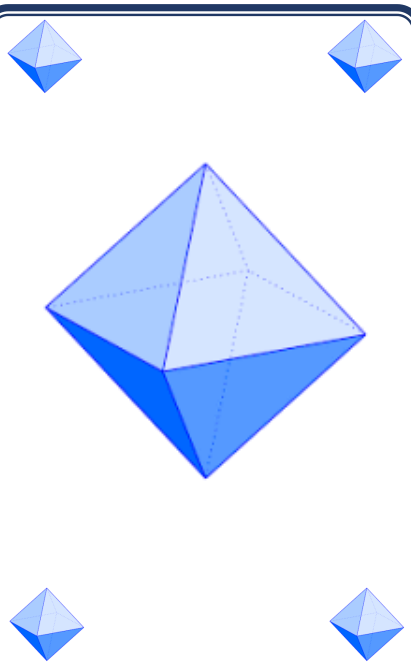
Base triangular

É um poliedro regular

20 faces

12 vértices

30 arestas



Base triangular

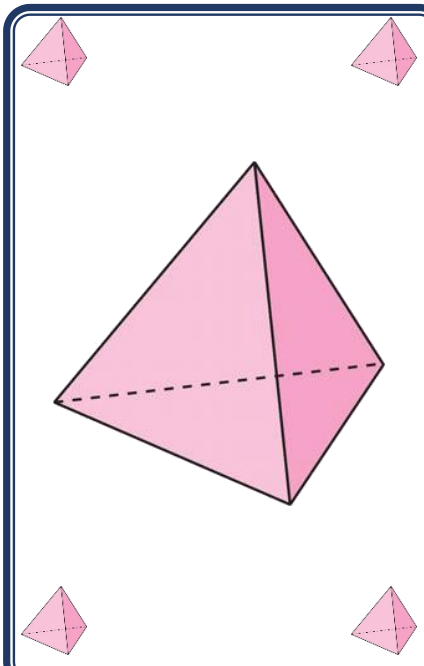
É um poliedro de Platão

É um poliedro regular

8 faces

6 vértices

12 arestas



Base triangular

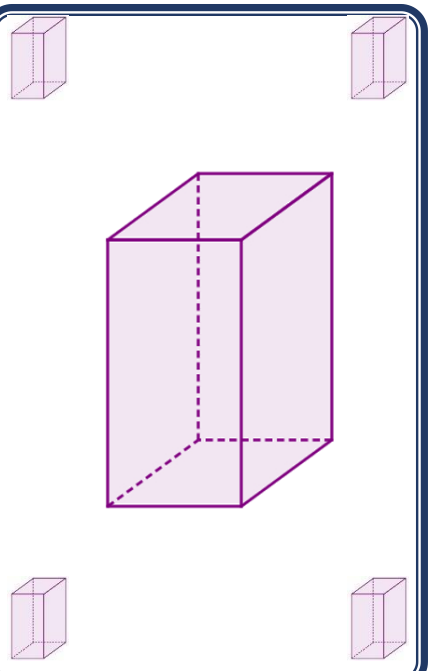
É um poliedro de Platão

É um poliedro regular

4 faces

4 vértices

6 arestas



Base quadrangular

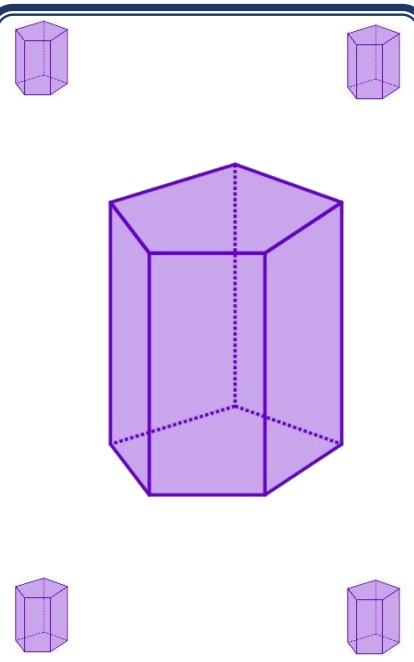
Não é um poliedro de Platão

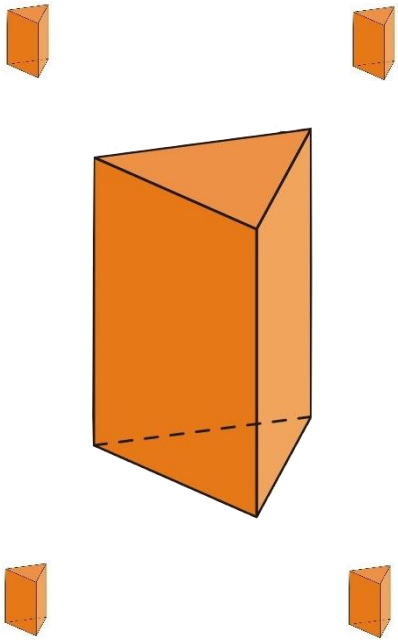
É um poliedro irregular

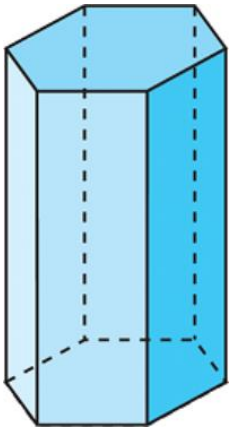
6 faces

8 vértices

12 arestas



Base pentagonal	**Não é um poliedro de Platão**	**É um poliedro irregular**
7 faces **10 vértices** **15 arestas**		**Base triangular**
Não é um poliedro de Platão	**É um poliedro irregular**	**5 faces** **6 vértices** **9 arestas**



Base hexagonal

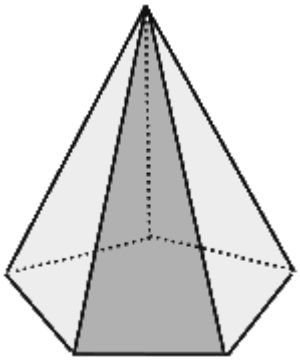
Não é um poliedro de Platão

É um poliedro irregular

8 faces

6 vértices

18 arestas



Base pentagonal

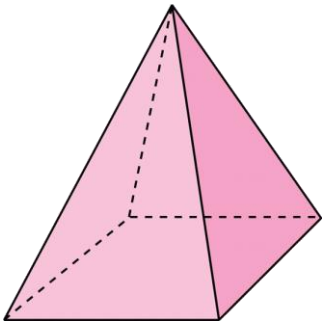
Não é um poliedro de Platão

É um poliedro irregular

6 faces

6 vértices

10 arestas



Base quadrangular

Não é um poliedro de Platão

É um poliedro irregular

5 faces

5 vértices

8 arestas

É um poliedro convexo

É formado por polígonos

Possui muitas faces

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br