

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática



Gleidson Everton de Alcantara Marques
Miguel Chaquiam

**ENSINO DE ESFERA
POR MEIO DE APPLETS DO SOFTWARE GEOGEBRA**

PRODUTO EDUCACIONAL

BELÉM/PA
2020

Gleidson Everton de Alcantara Marques

Miguel Chaquiam

Ensino de Esfera

Por meio de Applets do Software Geogebra

Produto Educacional

**BELÉM/PA
2020**

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias

Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Miguel Chaquiam
Natanael Freitas Cabral
Gustavo Nogueira Dias

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

MARQUES, Gleidson Everton de Alcântara e CHAQUIAM, Miguel

Ensino de esfera por meio de applets do software geogebra: produto educacional fGleidson
Everton de Alcântara de Marques; orientador Miguel Chaquiam, 2020

ISBN:

Produto educacional vinculado à Dissertação "Ensino de esfera por meio de applets do
software geogebra" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade
do Estado do Pará, 2020

1. Geometria espacial–Estudo e ensino 2. Esfera. 3. Geogebra (Software). 4. Métodos de
ensino. I. Chaquiam, Miguel (orient.) II. Título.

CDD. 23º ed.516.15

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	8
2.1 ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES	8
2.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA	10
2.3 APLICATIVOS ASSOCIADOS A CADA ATIVIDADE	19
2.4 ATIVIDADE PARA IMPRESSÃO E USO EM SALA DE AULA.....	22
3. ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE ESFERA	27
3.1 ESFERA, SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SECÇÃO ESFÉRICA.	27
3.2 VOLUME DA ESFERA	29
3.3 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA.....	30
3.4 ÁREA E VOLUME DA ESFERA POR MEIO DO CÁLCULO.....	32
3.5 FUSO ESFÉRICO	34
3.6 CUNHA ESFÉRICA	35
4. CONSIDERAÇÕES GERAIS	36
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37

1. INTRODUÇÃO

Nesse material apresento os resultados obtidos junto a dissertação de mestrado do Programa de mestrado Profissional em Ensino de Matemática intitulada “Ensino de Esfera através de Applets do Software Geogebra” cujo objetivo foi avaliar as potencialidades para o ensino do sólido Esfera de uma Sequência Didática junto a alunos do 3º ano do ensino médio. A partir de levantamentos prévios, dos resultados e das conclusões observadas gerou-se esse produto educacional disponibilizado nesse texto. Observa-se que, com o passar dos anos, o ensino de geometria vem passando por um momento delicado no que diz respeito ao seu ensino. Partindo das produções relacionadas ao tema na educação matemática e por meio de uma consulta realizada junto a alunos e professores sobre ensino e aprendizagem de geometria, ficou explícito o abandono do tema no ensino médio, o que vem deixando uma série de lacunas junto aos alunos que tem contato com a geometria espacial, como exemplo: dificuldades para visualizar figuras, fazer desenhos, reconhecer os elementos dos sólidos geométricos, efetuar cálculos de área e volume, entre outros. Nesse contexto, esses problemas têm impedido que o processo de ensino/aprendizagem se desenvolva da forma adequada.

Diante do panorama apresentado, pensado nos profissionais de ensino de matemática que tenham interesse em pesquisar sobre esses problemas apresentados e que buscam orientações de como proceder para desenvolver o estudo de geometria espacial, se fez necessário uma consulta aos documentos oficiais em busca das diretrizes para o ensino do tema. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, documento do ano de 1998, orienta que o ensino de geometria deve se dar de forma contextualizada, de tal forma que o aluno possa associar a geometria com a mundo que o cerca, possa ser associado a outras áreas do conhecimento e para que o estudante possa utiliza-la para resolver problemas matemáticos ao final do ensino básico.

No que se trata ao ensino do sólido esfera no âmbito nacional é notória a importância durante o ensino médio, visto que habilidades relacionadas ao ensino de geometria espacial encontram-se presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+), na proposta da Base Curricular Comum Nacional (BNCC), na Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e, no

estado do Pará, na Matriz do Sistema Paraense de Avaliação e Qualidade do Ensino (SisPAE), justificando-se assim a importância de seu ensino de forma plena.

Com a finalidade de atender as demandas supracitadas, buscou-se alternativas metodológicas dentro da Educação Matemática que viessem a contribuir para melhoria do aprendizado e com a prática do ensino de geometria de forma alternativa ao considerado como ensino tradicional. Para tanto, escolheu-se a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1989) juntamente com as Concepções sobre Sequências Didáticas (SD) pois, segundo estudos prévios realizados, a combinação entre a Teoria das Situações Didáticas e a Construção de Sequências Didáticas tem apresentado resultados promissores no que diz respeito a melhoria do processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Para construção da (SD) escolhemos o modelo proposto por Cabral (2017), no qual encontramos a ideia de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) por se tratar de uma das produções mais atuais quando se trata de Sequências Didáticas e utilizamos em cada atividade da (SD) applets do software Geogebra, pelo fato de mesmo estar disponível de forma gratuita e ser uma ferramenta que possibilita criações em matemática com fins específicos, possibilita a visualização, manipulação e o processo de construção de resultados, o que de praxe vem a contribuir com a melhoria do processo educacional.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática disponibilizada nesse texto foi elaborada a partir da dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática e trata-se de um estudo detalhado sobre o sólido geométrico esfera, envolvendo levantamento de produções científicas sobre o ensino e aprendizagem de geometria, pesquisa junto a alunos do 3º ano ensino médio e junto a professores sobre o ensino e aprendizagem de esfera, consulta ao que está proposto nos documentos oficiais que regem a educação básica brasileira, análise dos livros didáticos e um levantamento minucioso sobre o objeto matemático em questão.

Por meio dos levantamentos citados anteriormente foram obtidas informações que resultaram na elaboração de Sequência Didática, que foi aplicada em uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual do Pará, localizada no município de Ananindeua.

Os resultados dessa aplicação passaram por um processo de análise detalhada que veio a comprovar a eficiência da Sequência Didática como excelente instrumento para o ensino de esfera e por esse motivo foi aqui disponibilizado para professores de matemática que venham a tratar do tema em sua prática.

Para uma correta utilização desse material, alguns aspectos no sentido teórico e metodológicos devem ser seguidos, para tanto recomenda-se a leitura do capítulo 2 da dissertação Ensino de Esfera através de applets do Software Geogebra disponível nas referências.

2.1 ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES

Para melhor funcionalidade da metodologia proposta alguns aspectos devem ser levados em consideração. Recomenda-se ao professor dividir a turma em grupos de trabalho pois, dentro de cada atividade, a produção de cada aluno deve ocorrer por meio de interações histórico-sociais com os demais, através de estímulos a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) como proposto por Vygotsky. Além disso, não se faz necessário que o professor interaja com os alunos de forma a repassar conhecimento. Nesse momento, o professor deve assumir a posição de orientador no

desenvolvimento das atividades conduzindo assim os alunos a fazer descobertas por conta própria.

Quando for aplicar a Sequência Didática o professor deve deixar claro para os alunos que é por meio das interações e com a elaboração de ideias construídas nas atividades que vai se chegar no que se deseja ensinar, firmando-se assim o contrato didático.

Como a sequência de atividades foi construída de forma diferente do que tradicionalmente se tem em sala de aula, é de praxe que na primeira atividade os alunos precisem de orientações quando ao seu desenvolvimento, sendo que mesma necessita de certa autonomia por parte do aluno no seu desenvolvimento. Nesse sentido, recomenda-se ao professor orientar o aluno na busca por tal autonomia.

Durante a aplicação das atividades o professor deve fazer mínimo de intervenções possíveis. Entretanto, caso perceba que determinado grupo está perdendo o foco sobre intenções da atividade, deve intervir do modo a redirecionar as intenções para que se chegue aos objetivos pretendidos.

Pensando construção do objeto matemático, planejamento e execução das atividades disponibilizo a seguir um quadro com a descrição e os objetivos a serem alcançados em cada uma delas.

Quadro 1: Descrição e objetivos por atividade

Atividade	Descrição	Objetivos	
1	Definir o sólido esfera por meio da rotação de um semicírculo em torno do seu diâmetro. Fazer o aluno reconhecer os elementos da esfera.	1	Reconhecer a esfera através a rotação de um semicírculo
		2	identificar o Raio e o diâmetro da esfera
		3	Nomear o objeto por meio de suas características e formalizar o nome.
2	Descobrir de forma indireta a relação entre o raio da esfera e a área da superfície esférica e redescobrir a fórmula para o cálculo da superfície esférica.	4	Perceber a relação entre o valor do raio da esfera e o valor da área de sua superfície.
		5	Redescobrir a fórmula para cálculo da área da superfície esférica.
3	Descobrir de forma indireta a relação entre o raio da esfera e seu volume e redescobrir a	6	Perceber a relação entre o valor do raio da esfera e o valor do seu volume.

	fórmula para o cálculo do volume da esfera.	7	Redescobrir a fórmula para cálculo do volume da esfera.
4	Descobrir de forma indireta a relação entre o raio, o ângulo de giro e a área da cunha esférica e redescobrir a fórmula para o cálculo da área do fuso esférica.	8	Perceber a relação existente e o raio e a área do fuso esférica.
		9	Perceber a relação existente e o ângulo de giro e a área do fuso esférico.
		10	Redescobrir a fórmula para cálculo da área do fuso esférico.
5	Descobrir de forma indireta a relação entre o raio, o ângulo de giro e a área da cunha esférica e redescobrir a fórmula para o cálculo da área do fuso esférica.	11	Perceber a relação existente e o raio e o volume da cunha esférica.
		12	Perceber a relação existente e o ângulo de giro e o volume da cunha esférica.
		13	Redescobrir a fórmula para cálculo do volume cunha esférica.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

2.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

As atividades propostas neste trabalho constroem-se a partir da ideia de intervenção estruturante. O planejamento de ações e organização de cada um dos elementos compõem a Sequência Didática proposta nesse trabalho foram construídos através das ideias propostos por Cabral (2017). Ao leitor interessado no aprofundamento das ideias aqui discutidas, recomendamos a leitura do livro do autor intitulado é “Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração”.

Segundo o autor, considerando um objeto matemático como a área S de uma superfície, a reconstrução conceitual desse objeto consiste no processo pelo qual esta área pode ser obtida a partir de uma unidade padrão denominada Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC).

Para reconstruir um conceito matemático, deve-se escolher inicialmente uma primeira UARC, a qual o autor denomina de unidade de primeira geração (UARC-1), a qual se tem como “ponto de partida”. Ela, eventualmente, não precisa ser um

problema como de praxe, existe a flexibilidade de começar por qualquer posição dentro do objeto matemático cujos conceitos se deseja reconstruir.

Para Cabral (2017) a escolha da URCA-1 deve levar em consideração diversos aspectos como a experiência do professor, os conhecimentos prévios dos alunos e objeto de estudo. Cabe ao professor verificar esses parâmetros e fazer a escolha.

A partir da UARC-1, o professor deve escolher uma UARC-2 (unidade Articulada de Reconstrução Conceitual de 2º geração), sob a condição de que esta esteja imediatamente conectada a UARC-1. Seguindo as mesmas condições anteriormente citadas, a medida que cada UARC de ordem superior se estabelece o conhecimento é reconstruído/revertido.

Cabral (2017) considera que a cada UARC's estabelecida o processo de aprendizagem a reconstrução conceitual é potencializada, de tal forma que, sequencialmente, em uma n-ésima UARC a reconstrução do conceito é evidenciada.

Uma UARC consiste na organização do conteúdo em quatro intervenções: Intervenção Inicial (I_I), quando o professor apresenta a proposta inicial a fim de que o aluno de maneira empírico-intuitiva perceba regularidades funcionais de um conceito; Intervenção Reflexiva (I_R), quando promove-se questionamentos relacionados a um ou mais aspectos ligados ao objeto de estudo a partir da intervenção inicial; Intervenção Exploratória (I_E), quando se objetiva o aprofundamento diante de resultados obtidos durante a Intervenção Reflexiva, estimula-se o aluno experimentação a fim de evidenciar tais resultados; Intervenção formalizante (I_F), quando de posse dos resultados obtidos pelos alunos o professor apresenta o objeto de estudo através da linguagem formal da matemática.

Durante a construção de uma UARC, o primeiro momento (Intervenção Inicial) é de fundamental importância visto que ele potencializa o espírito investigativo, propicia o surgimento de conjecturas. Elas podem ser classificadas em dois tipos: Exploração Potencial ($I_I - EP$), a qual permite ao professor promover uma série de procedimentos investigativos (simulações, experimentação, levantamento de hipóteses) que são típicos da construção do saber matemático e a Conexão Pontual ($I_I - CP$), a qual a partir de uma situação o aluno é estimulado a descobrir relações que direcionem a reconstrução de um conceito específico.

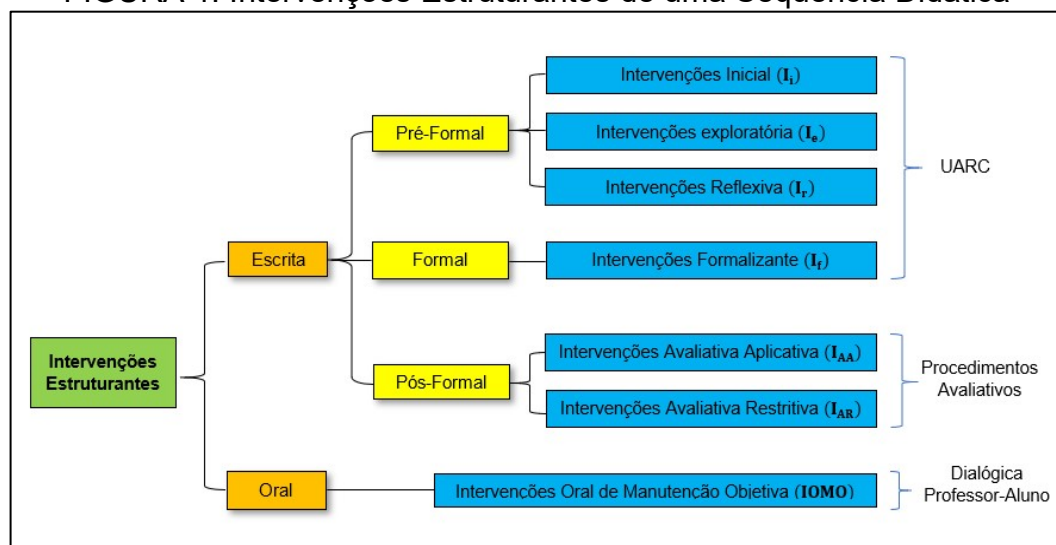
Posteriormente a consolidação de uma UARC, com a intencionalidade de verificar a aprendizagem do objeto construído, o professor poderá inserir as chamadas Intervenções avaliativas, que são de dois tipos: Intervenção Avaliativa Restritiva (I_{AR}),

que tem a finalidade de avaliar a aprendizagem de conceitos e propriedades; e a Intervenção Avaliativa Aplicativa (I_{AA}) cuja finalidade é a resolução de problemas de aplicação. Estas etapas são consideradas pós-formais visto que nelas o aluno já reconstruiu o conhecimento que deseja ser ensinado.

Finalizando, temos a Intervenção Oral de manutenção Objetiva (I_{OMO}) que correspondem a momentos do diálogo entre professor e aluno, “cuja finalidade é manter os objetividade planejado, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática”. (CABRAL, 2017, p. 47). Estas intervenções, tem um caráter auxiliar, no intuito de ajustar a produção dos alunos aos objetivos da sequência, alinhar conceitos obtidos e, por fim, fixá-los.

Todo o conjunto formado pelas Intervenções que compõem uma UARC, juntamente com as intervenções Avaliativas e as Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva, compõe o que Cabral (2017) denomina de Intervenção Estruturante.

FIGURA 1: Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

As intervenções estruturantes citadas anteriormente forma usadas para estruturar em termos de UARC's as atividades da SD envolvendo o sólido esfera. Tais intervenções apresentam conceitos mais amplos, cujo aprofundamento encontra-se em Cabral (2017) citado nas referências desse trabalho. A seguir temos disponíveis as atividades com possíveis respostas elaboradas pelos alunos dentro do objetivo a ser alcançado em cada atividade.

ATIVIDADE 1 - ESFERA

Objetivos: Reconhecer a esfera e seus elementos a partir da rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

Carga Horária: 45 minutos.

Conteúdo Matemático: Definição de esfera e reconhecimento de seus elementos.

Material: Ficha da atividade, Papel, Caneta e computador com o Aplicativo “GEOESFERA1”

Procedimento:

[I₁] No aplicativo GEOESFERA1, clique sobre o botão iniciar rotação, observe os pontos que surgem durante a rotação do semicírculo e anote a distância de cada um deles ao ponto central O no quadro a seguir.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Distância									

[I_E] Qual a figura observada ao final da rotação?

R: Uma esfera.

[I_E] Qual a distância de cada um dos pontos (A, B, C, D, ..., I) ao centro O?

R: São todas iguais a 4.

[I_R] A distância de cada ponto (A, B, C, D, ..., I) ao centro O corresponde a qual elemento do semicírculo?

R: cada distância equivale ao raio do semicírculo.

[I_R] A distância de cada ponto (A, B, C, D, ..., I) ao centro O corresponde a qual elemento do semicírculo?

R: a distância equivale ao diâmetro do semicírculo.

[I_F] O professor partindo das descobertas obtidas orienta os alunos para formalização das observações encontradas.

Observações do Professor

Esfera é o sólido geométrico delimitado por todos os pontos que estão a mesma distância R ($R > 0$) de um ponto central. Tal distância é denominada raio da esfera e o ponto central é chamado de centro da esfera.

ATIVIDADE 2 – ÁREA DA SUPERFÍCIE

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio da esfera e a área da superfície esférica.

Carga Horária: 1 hora e 30 minutos

Material: Roteiro da Atividade, Papel, Caneta e computador com o Aplicativo “GEOESFERA2”.

Procedimento:

[I₁] Insira o valor do raio R da esfera no aplicativo GEOESFERA 2 e complete cada linha do quadro abaixo com os valores do Raio ao Quadrado (R^2) e da Área da Superfície Esférica fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Quadrado (R^2)	Área Da Superfície Esférica (A)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

[I_E] Observando os valores obtidos em cada linha do quadro, o que ocorrer com o valor da área da Área da Superfície Esférica (A) quando aumenta o valor do Raio (R)?

R: Aumenta

[I_R] Em cada linha do quadro, a partir dos valores do Raio ao Quadrado (R^2), como podemos obter o valor da Área da Superfície Esférica (A)?

R: $A = 4\pi R^2$

[I_F] O professor partindo das descobertas obtidas orienta os alunos para formalização das observações encontradas.

Observações do Professor

A Área da Superfície Esférica é dada por $A = 4\pi R^2$.

ATIVIDADE 3 – VOLUME

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio da esfera e o volume da esférica.

Carga Horária: 1 hora e 30 minutos

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 3”.

Procedimento:

[I₁] Insira o valor do raio R no aplicativo GEOESFERA 3 e preencha o quadro a seguir com os valores de R³ e do volume da esfera (V) fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Cubo (R ³)	Volume da Esfera (V)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

[I_E] O que ocorre com o valor do volume da esfera (V) a medida que aumenta o valor do raio (R)?

R: Aumenta

[I_R] Comparando os valores de R³ e os valores obtidos para o volume da esfera, qual a relação observada?

R: $V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$.

[I_F] O professor partindo das descobertas obtidas orienta os alunos para formalização das observações encontradas.

Observações do Professor

O volume da esfera pode ser encontrado por meio da fórmula $V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$.

ATIVIDADE 4 – FUSO ESFÉRICO

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio, ângulo de giro e a área do fuso esférico

Carga Horária: 1 hora e 30 minutos

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 4”.

Procedimento:

[I_i] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em graus) no aplicativo GEOESFERA 4 e complete o quadro a seguir com os valores do raio ao quadrado (R^2), do ângulo de rotação (em radianos) e da área do fuso esférico (A), a seguir responda os itens.

RAIO (R)	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM GRAUS)	R^2	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM RADIANOS)	ÁREA DO FUSO ESFÉRICO (A)
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			
2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

[I_E] Aumentado o valor do Raio (R), o que ocorre com o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

R: Aumenta

[I_E] Aumentado Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação a Área do Fuso Esférico (A)?

R: Aumenta

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^2 e do ângulo de (α) (em radianos), como podemos obter o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

R: $A = 2 \cdot \alpha \cdot R^2$.

[I_F] O professor partindo das descobertas obtidas orienta os alunos para formalização das observações encontradas.

Observações do Professor

O Fuso Esférico corresponde a parte da Área da Superfície Esférica que é obtida quando rotacionamos uma semicircunferência de raio R, através de um ângulo α , em torno de seu diâmetro. A Área do Fuso esférico pode ser encontrada por $A = 2 \cdot \alpha \cdot R^2$.

ATIVIDADE 5 – CUNHA ESFÉRICA

Objetivo: Descobrir a relação entre o raio, ângulo de giro e a área do fuso esférico

Carga Horária: 1 hora e 30 minutos

Material: Roteiro da atividade, papel, caneta e computador com o aplicativo “GEOESFERA 3”.

Procedimento:

[I₁] Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em grau) no aplicativo GEOESFERA 5 e complete o quadro com os valores do raio ao quadrado (R³), do ângulo de rotação (em radianos), do Volume da Cunha Esférico (V) e responda aos itens.

RAIO	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM GRAUS)	R ³	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM RADIANOS)	VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			
2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

[I_E] Aumentado o valor do Raio (R), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

R: Aumenta

[I_E] Aumentado o valor do Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

R: Aumenta

[I_R] Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R³ e do ângulo de (α) (em radianos) em cada linha, como se pode obter o valor do volume da cunha esférica (V)?

$$\text{R: } V = \frac{2 \cdot \alpha \cdot R^3}{3}$$

[I_F] O professor partindo das descobertas obtidas orienta os alunos para formalização das observações encontradas.

Observações do Professor

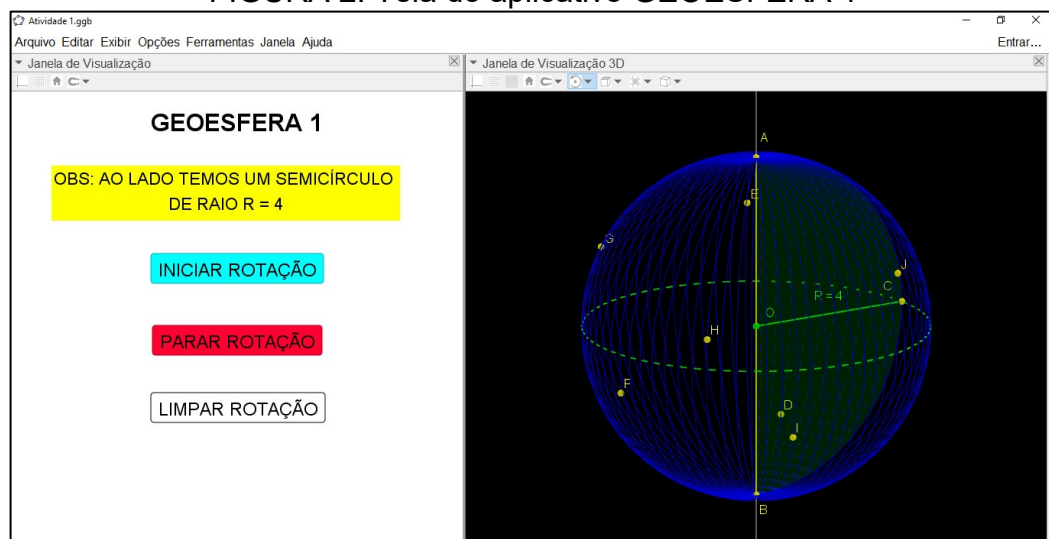
A Cunha Esférica é o sólido gerado pela rotação de semicírculo de raio R , através de um ângulo α , em torno de um eixo que contém o seu diâmetro. O volume da Cunha

Esférica pode ser encontrado por $V = \frac{2 \cdot \alpha \cdot R^3}{3}$.

2.3 APLICATIVOS ASSOCIADOS A CADA ATIVIDADE

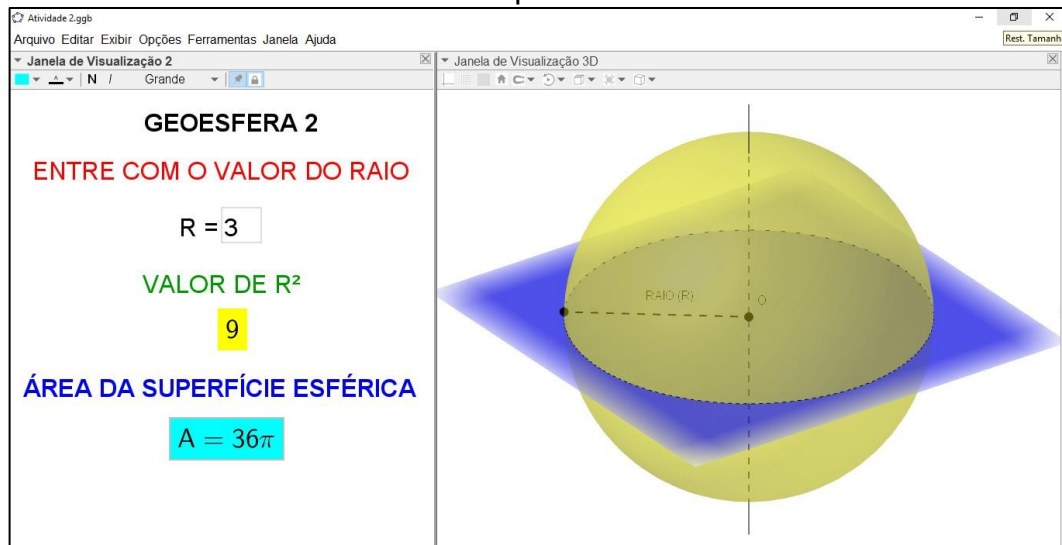
A título de ilustração e para organização do professor junto as atividades aqui a propostas, nesse item, disponibilizaram-se as telas dos aplicativos associados a cada atividade. Para o funcionamento dos aplicativos é necessário a instalação do software Geogebra Clássico 5 disponível de forma gratuita para download no endereço <https://www.geogebra.org/download>. Cada um dos aplicativos indicados a seguir encontram-se disponíveis em CD na parte final do livro e para download no endereço http://ccse.uepa.br/pmpem/?page_id=21.

FIGURA 2: Tela do aplicativo GEOESFERA 1



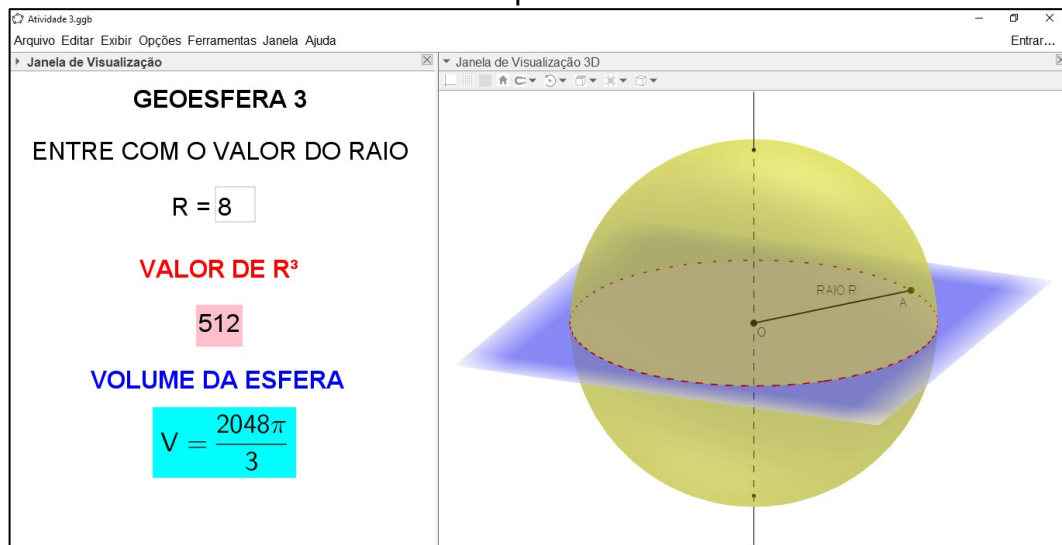
Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

FIGURA 3: Tela do aplicativo GEOESFERA 2



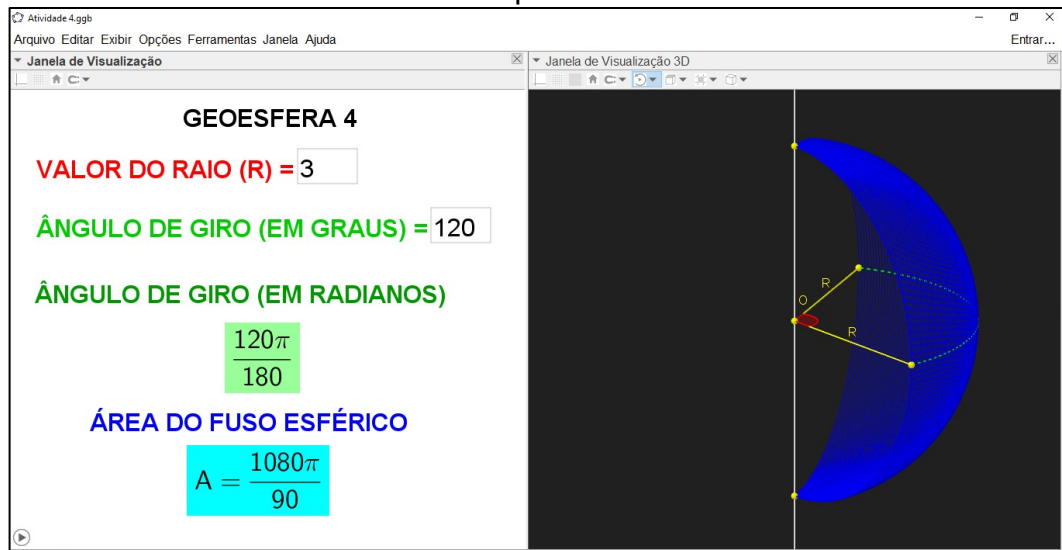
Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

FIGURA 4: Tela do aplicativo GEOESFERA 3



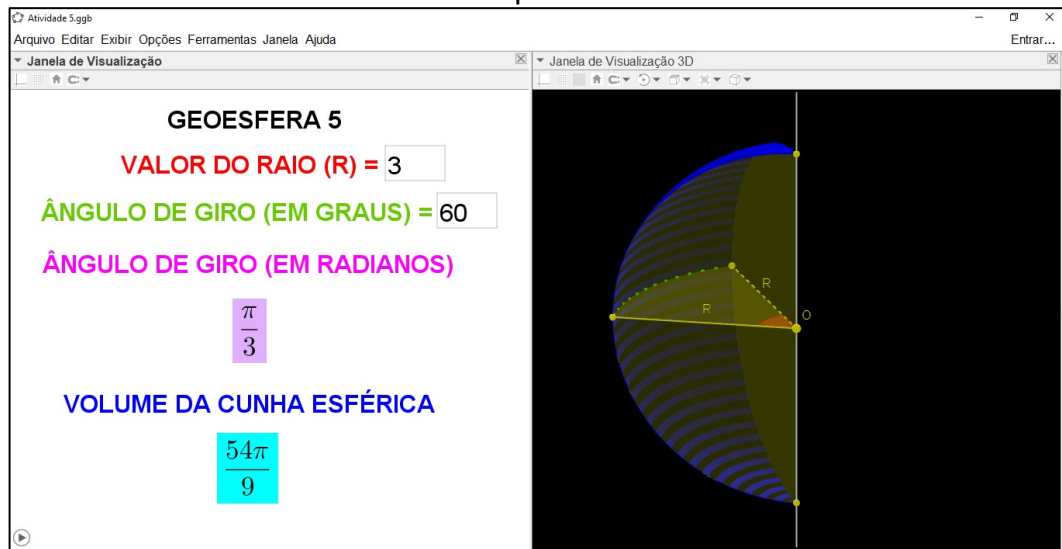
Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

FIGURA 5: Tela do aplicativo GEOESFERA 4



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

FIGURA 6: Tela do aplicativo GEOESFERA 5



Fonte: Elaborado pelo Autor (2018)

2.4 ATIVIDADE PARA IMPRESSÃO E USO EM SALA DE AULA

ATIVIDADE 1 - ESFERA

No aplicativo GEOESFERA1, clique sobre o botão iniciar rotação, observe os pontos que surgem durante a rotação do semicírculo e anote a distância de cada um deles ao ponto central O no quadro a seguir.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Distância									

Qual a figura observada ao final da rotação?

Qual a distância de cada um dos pontos (A, B, C, D, ..., I) ao centro O?

A distância de cada ponto (A, B, C, D, ..., I) ao centro O corresponde a qual elemento do semicírculo?

A distância entre os pontos A e B na figura obtida equivale a qual elemento do semicírculo?

Observações do Professor

ATIVIDADE 2 - ÁREA DA SUPERFÍCIE

Insira o valor do raio R da esfera no aplicativo GEOESFERA 2 e complete cada linha do quadro abaixo com os valores do Raio ao Quadrado (R^2) e da Área da Superfície Esférica fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Quadrado (R^2)	Área Da Superfície Esférica (A)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Observando os valores obtidos em cada linha do quadro, o que ocorrer com o valor da área da Área da Superfície Esférica (A) quando aumenta o valor do Raio (R)?

Em cada linha do quadro, a partir dos valores do Raio ao Quadrado (R^2), como podemos obter o valor da Área da Superfície Esférica (A)?

Observações do Professor

ATIVIDADE 3 - VOLUME

Insira o valor do raio R no aplicativo GEOESFERA 3 e preencha o quadro a seguir com os valores de R^3 e do volume da esfera (V) fornecidos pelo aplicativo.

Raio (R)	Raio ao Cubo (R^3)	Volume da Esfera (V)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

O que ocorre com o valor do volume da esfera (V) a medida que aumenta o valor do raio (R)?

Comparando os valores de R^3 e os valores obtidos para o volume da esfera, qual a relação observada?

Observações do Professor

ATIVIDADE 4 – FUSO ESFÉRICO

Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em graus) no aplicativo GEOESFERA 4 e complete o quadro a seguir com os valores do raio ao quadrado (R^2), do ângulo de rotação (em radianos) e da área do fuso esférico (A), a seguir responda os itens..

RAIO (R)	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM GRAUS)	R^2	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (α) (EM RADIANOS)	ÁREA DO FUSO ESFÉRICO (A)
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			
2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

Aumentado o valor do Raio (R), o que ocorre com o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

Aumentado Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação a Área do Fuso Esférico (A)?

Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^2 e do ângulo de (α) (em radianos), como podemos obter o valor da Área do Fuso Esférico (A)?

Observações do Professor

ATIVIDADE 5 - CUNHA ESFÉRICA

Insira os valores do raio (R) e do ângulo de giro (em grau) no aplicativo GEOESFERA 5 e complete o quadro com os valores do raio ao quadrado (R^2), do ângulo de rotação (em radianos), do Volume da Cunha Esférico (V) e responda aos itens.

RAIO	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM GRAUS)	R^2	ÂNGULO DE ROTAÇÃO (EM RADIANOS)	VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA
1	30			
2	30			
3	30			
1	45			
2	45			
3	45			
1	60			
2	60			
3	60			

Aumentado o valor do Raio (R), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

Aumentado o valor do Ângulo de Rotação (α), o que se observa em relação ao Volume da Cunha (V)?

Observando os valores do quadro, utilizando os valores de R^2 e do ângulo de (α) (em radianos) em cada linha, como se pode obter o valor do volume da cunha esférica (V)?

Observações do Professor

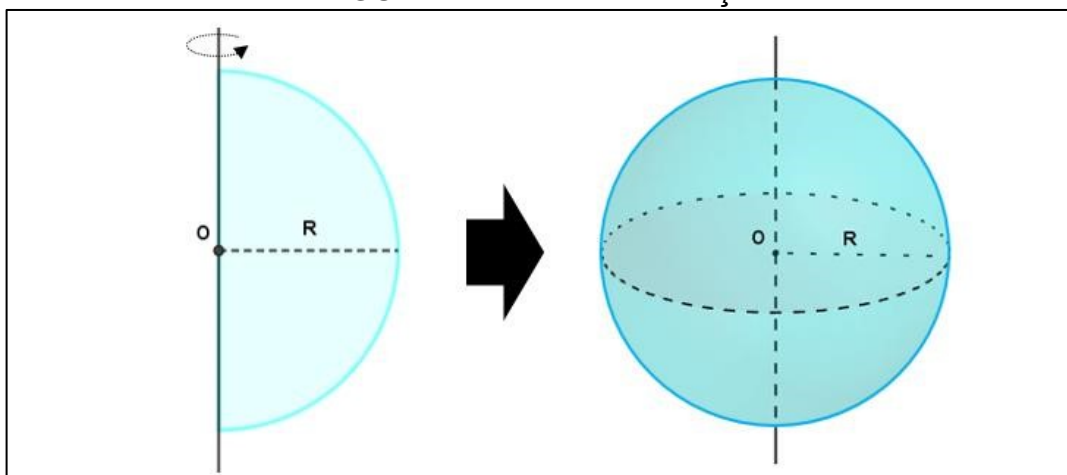
3. ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE ESFERA

Nesse capítulo, apresento alguns aspectos relevantes relacionados ao sólido geométrico esfera, visto que por meio dos levantamentos feitos na dissertação que gerou esse produto, encontramos informações que apontam para uma formação superficial relacionada ao tema e pouca produção disponível para acesso a professores da área que desejem desenvolver o tema através de uma metodologia diferenciada. Nesse sentido, apresenta-se algumas definições e as demonstrações das fórmulas relacionadas ao sólido via tópicos abordados no ensino médio e, a título de aprofundamento, através do uso de cálculo diferencial e integral. Para tanto, as ideias aqui apresentadas foram inspiradas nas produções de Lima et al. (2005), Dolce (2005), Piskunov (2000) e Medeiros (2014).

3.1 ESFERA, SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SECÇÃO ESFÉRICA.

Segundo Dolce e Pompeu (2005) denomina-se esfera o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo de centro O e raio R em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

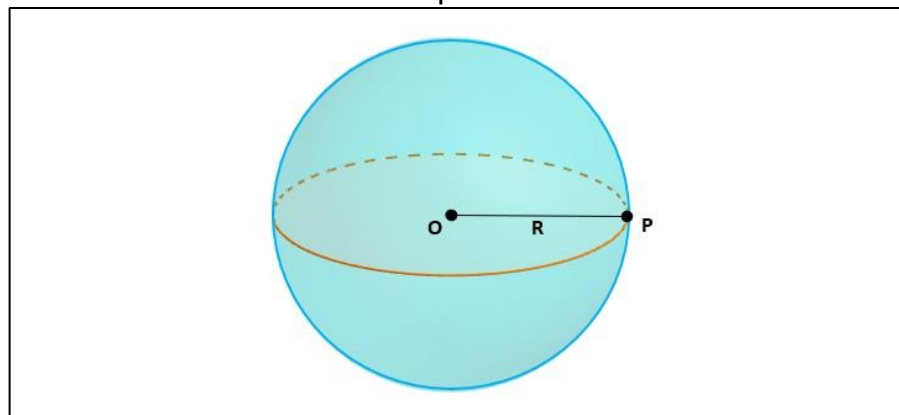
FIGURA 7: Esfera de revolução



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Considere um ponto O e um número real $R > 0$, denomina-se de superfície esférica de centro O e raio R o conjunto de pontos P do espaço tais que a distância $OP = R$. (DOLCE E POMPEU, 2005, p. 250)

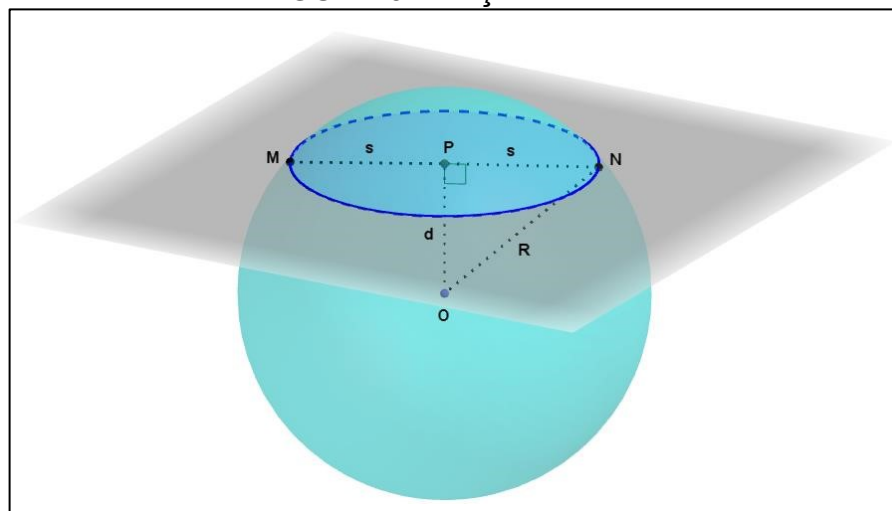
FIGURA 8: Superfície da esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Denomina-se de secção esférica a área da região determinada por um plano secante a esfera. (DOLCE E POMPEU, 2005, p. 251)

FIGURA 9: Secção esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Toda secção esférica é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera a secção esférica corresponde ao círculo máximo da esfera.

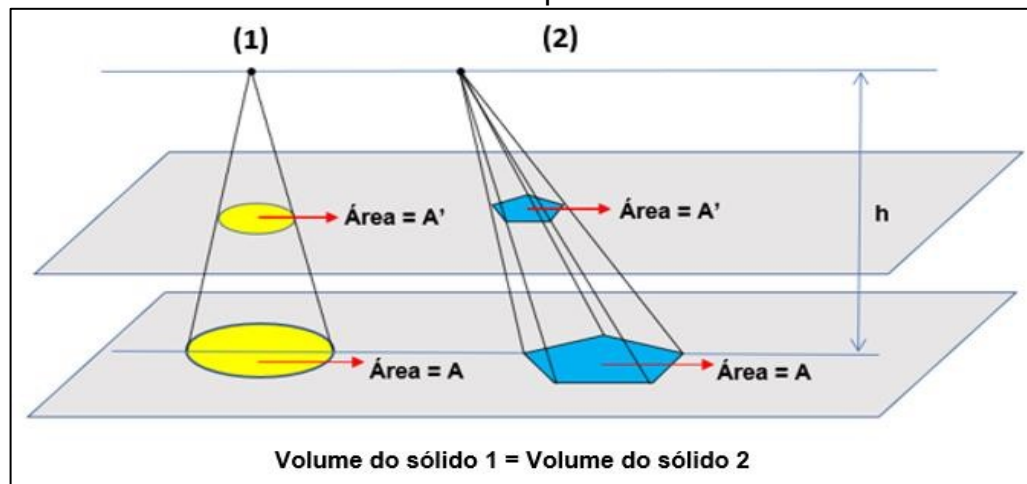
Sendo R o raio da esfera, d a distância entre o centro da esfera e o centro da secção esférica e s o raio da secção esférica, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OPN$ temos:

$$R^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow s^2 = R^2 - d^2$$

3.2 VOLUME DA ESFERA

O Princípio de Cavalieri afirma que se dos sólidos de mesma altura têm suas bases sobre um plano α e quando seccionados por outro plano paralelo a esse plano α as secções determinadas sobre esses sólidos possuem áreas iguais, então os sólidos têm o mesmo volume.

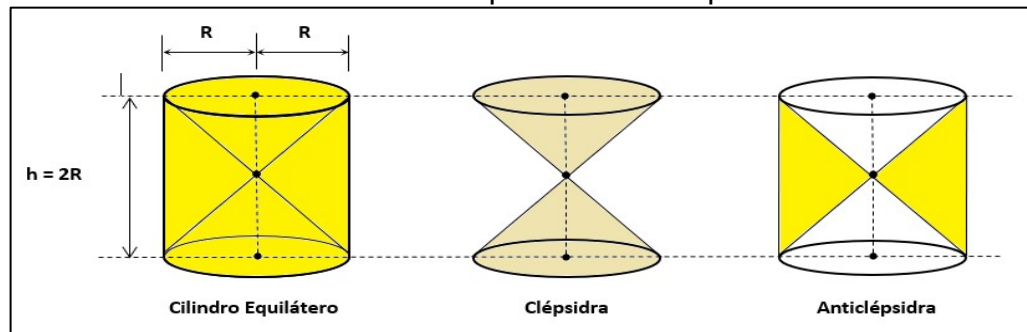
FIGURA 10: Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

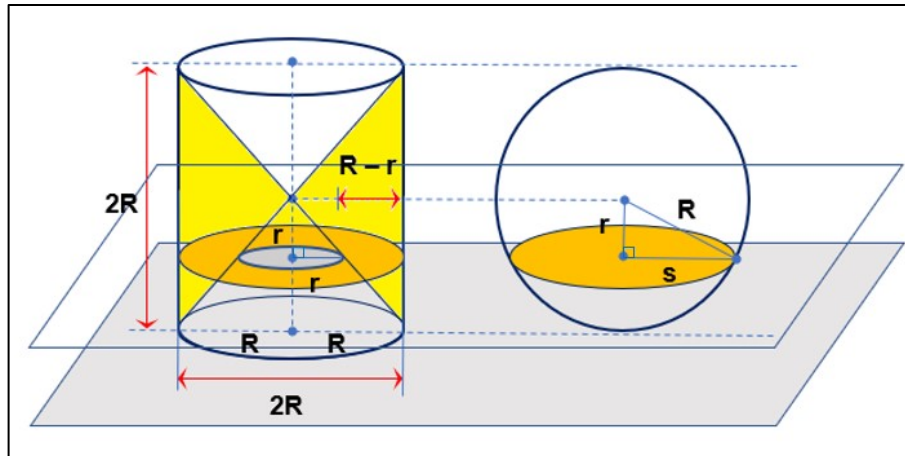
Segundo Medeiros (2014) o sólido determinado pela união de cones de mesma altura cujas bases coincidem com as bases de um cilindro de raio R chama-se *clépsidra*. Por outro lado, sólido geométrico formado pela região interna ao cilindro e externa a clépsidra chama-se de *anticlépsidra*.

FIGURA 11: Clépsidra e Anticlépsidra



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

FIGURA 12: Volume da esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Considerando um cilindro equilátero ($h = 2r$) e uma esfera de raio r apoiados sobre mesmo plano (FIGURA 10). A interseção do plano paralelo a base do cilindro com a anticlépsidra corresponde a uma coroa circular cuja área é dada por $A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2)$ e a interseção desse mesmo plano com a esfera corresponde a área de secção esférica de raio s , a qual é calculada por $A_{\text{secção esférica}} = \pi s^2$. Entretanto, pelo teorema de Pitágoras temos que $s^2 = R^2 - r^2$, ou seja, $A_{\text{secção esférica}} = \pi(R^2 - r^2)$.

Dessa forma, pelo princípio de Cavalieri o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra gerada a partir do cone equilátero.

Dessa forma, concluímos que

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlépsidra}} = V_{\text{cilindro equilátero}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$

$$V_{\text{esfera}} = \pi \cdot R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3} \right) = 2\pi \cdot R^3 - \frac{2\pi \cdot R^3}{3}$$

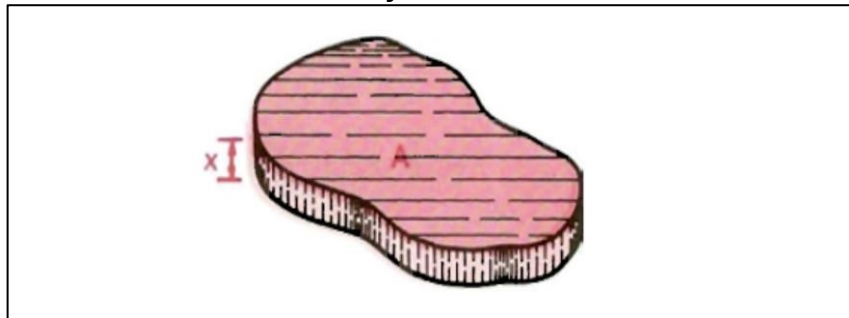
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

3.3 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Considere o sólido delimitado por duas regiões planas (bases) paralelas de área A , cuja altura é x unidades.

Segundo Dolce e Pompeu (2005), sendo V o volume do sólido descrito acima, a área de sua base pode ser obtida através da razão $\frac{V}{x}$ quando x é suficientemente próximo de zero.

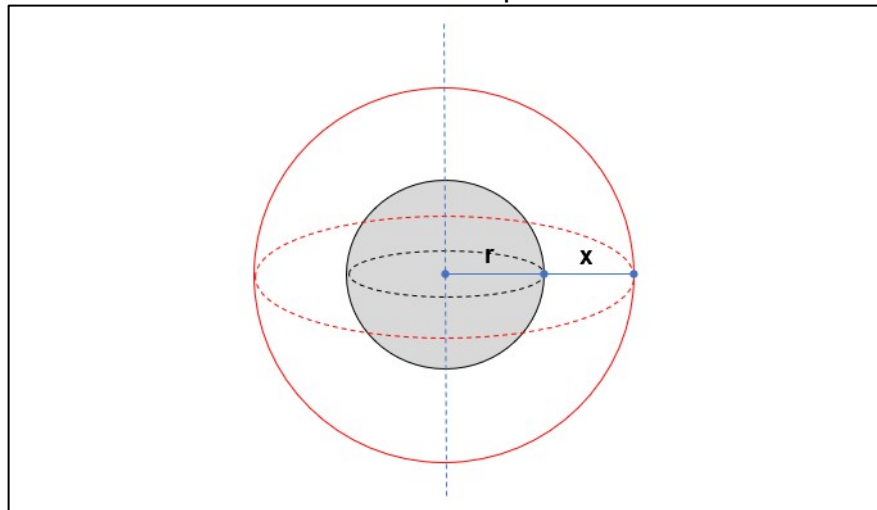
FIGURA 13: Noção intuitiva de volume



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeu (2005)

Através dessa noção podemos determinar o valor da área da superfície esférica conforme o lema a seguir.

FIGURA 14: Área da superfície esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Tomando por base a ideia intuitiva volume, considere duas esferas concêntricas de raios r e $(r + x)$ conforme a FIGURA 11.

Dessa forma, os volumes das esferas maior e menor são dados por

$$V_{\text{menor}} = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ e } V_{\text{maior}} = \frac{4\pi (r+x)^3}{3}$$

O volume do sólido gerada pela diferença entre o volume V da esfera maior e da menor é dado por:

$$V = V_{\text{esfera maior}} - V_{\text{esfera menor}} = \frac{4\pi(x+r)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}[(x+r)^3 - r^3] = \frac{4\pi}{3} \cdot [x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3 - r^3]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot [x^3 + 3x^2r + 3xr^2]$$

$$V = \frac{4\pi x}{3} \cdot [x^2 + 3xr + 3r^2]$$

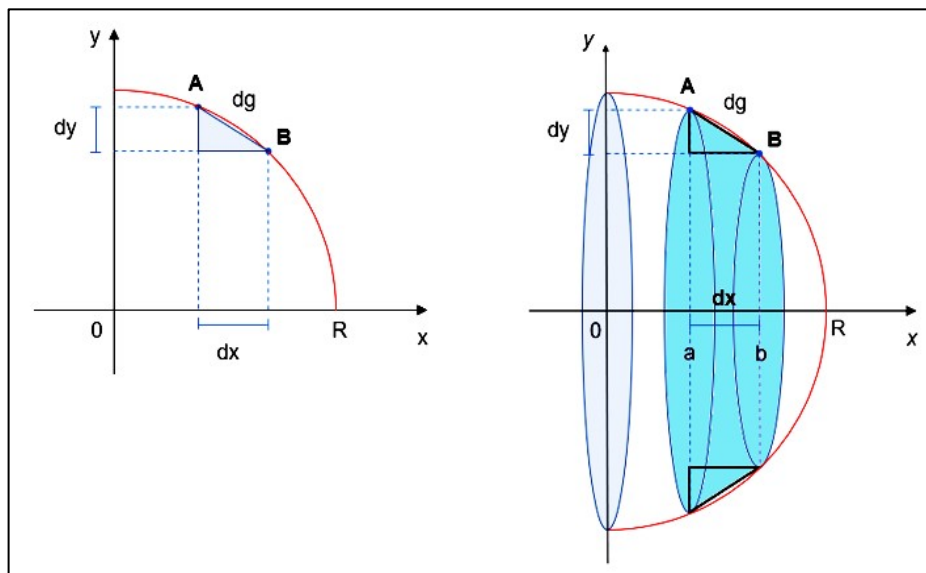
$$A_{\text{superfície esférica}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} \cdot [x^2 + 3xr + 3r^2]$$

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$$

3.4 ÁREA E VOLUME DA ESFERA POR MEIO DO CÁLCULO

As fórmulas para cálculo da área da superfície e do volume da esfera também pode ser obtida quando tomamos por meio do cálculo diferencial e integral.

FIGURA 15: Área e volume da esfera por meio do cálculo



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Para isso, considere o arco de circunferência de centro na origem e raio R , dado pela função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ definida no intervalo $[0, R]$, onde destacamos o segmento $\overline{AB}$ de comprimento infinitesimal dg conforme a figura a seguir.

Se rotacionamos o segmento $\overline{AB}$ entorno do eixo x obtemos um tronco de cone, cuja área lateral infinitesimal dA é dada por $dA = \pi \cdot dg \cdot (f(a) + f(b))$. Como dg é infinitesimal, os valores de $f(a)$ e $f(b)$ se tornam “suficientemente próximos” para todo valor de x no intervalo $[a, b]$, de tal forma que, $f(a) = f(b) = f(x)$ (Piskunov, 1979, p. 490). Deste modo, podemos obtemos que $dA = 2\pi \cdot dg \cdot f(x)$ (I).

Pelo gráfico apresentado na FIGURA 12, através do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$dg = \sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \left(\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\right) dx = \left(\sqrt{(f'(x))^2 + 1}\right) dx \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), encontramos $dA = 2\pi \cdot f(x) \cdot \left(\sqrt{(f'(x))^2 + 1}\right) dx$ (III).

Como $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, então $f'(x) = \frac{(-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ e substituindo tudo em (III) obtemos:

$$dA = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{(-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 1}\right) dx = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2} + 1} dx$$

$$dA = 2\pi \cdot R \cdot dx$$

A área do sólido delimitado pelo gráfico é encontrada somando-se as áreas dos troncos de cone assim obtidos no intervalo $[0, R]$, ou seja

$$AL = \int_0^R dA = \int_0^R 2\pi \cdot R \cdot dx = 2\pi \cdot R \cdot R - 2\pi \cdot R \cdot 0 = 2\pi \cdot R^2$$

Dessa forma, o gráfico delimita a área da superfície de metade de uma esfera obtida com sua rotação em torno do eixo x . Logo para se obter a área da superfície da esfera inteira basta multiplicar AL por 2. Portanto, $A_{\text{superfície Esférica}} = 2 \cdot AL = 4\pi \cdot R^2$.

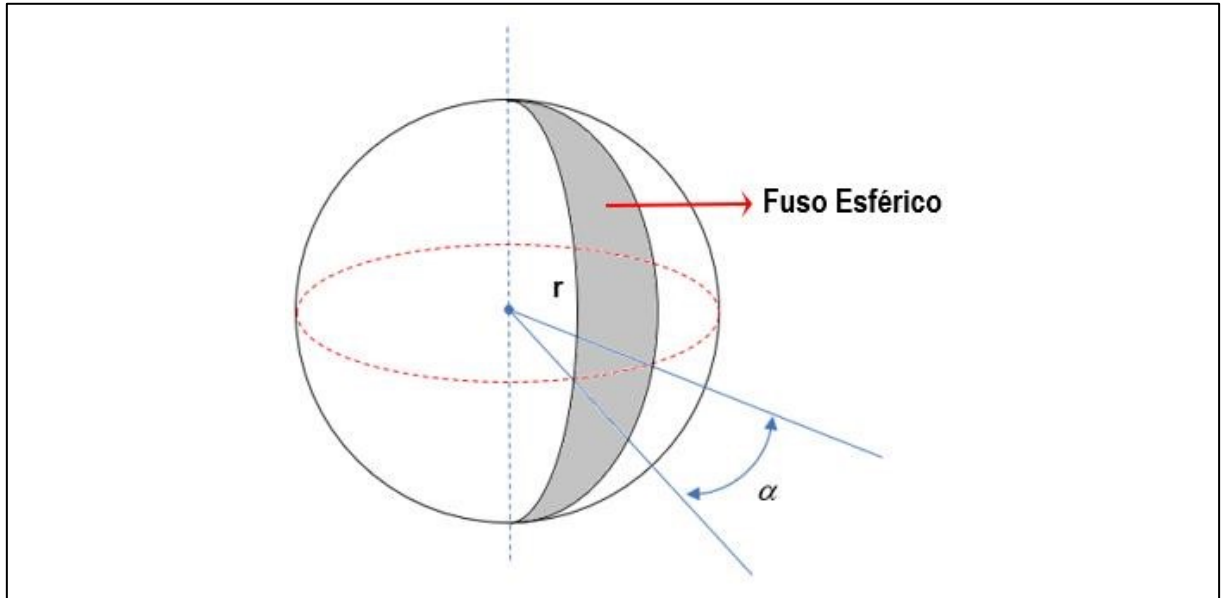
Conhecida a área, o volume da esfera pode ser encontrado por

$$V = \int_0^R A dA = \int_0^R 4\pi R^2 dA = \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3.5 FUSO ESFÉRICO

Denomina-se de fuso esférico a área da superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, segundo um ângulo α , em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

FIGURA 16: Fuso esférico



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Sendo r o raio da semicircunferência e α o ângulo de rotação em torno do eixo que contém o diâmetro, a área do fuso esférico é diretamente proporcional ao ângulo de giro e pode ser obtida pela proporção a seguir.

- Se α estiver em graus, temos

$$\frac{A_{\text{superf. esférica}}}{A_{\text{fuso esférico}}} = \frac{360^\circ}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{(4\pi r^2) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

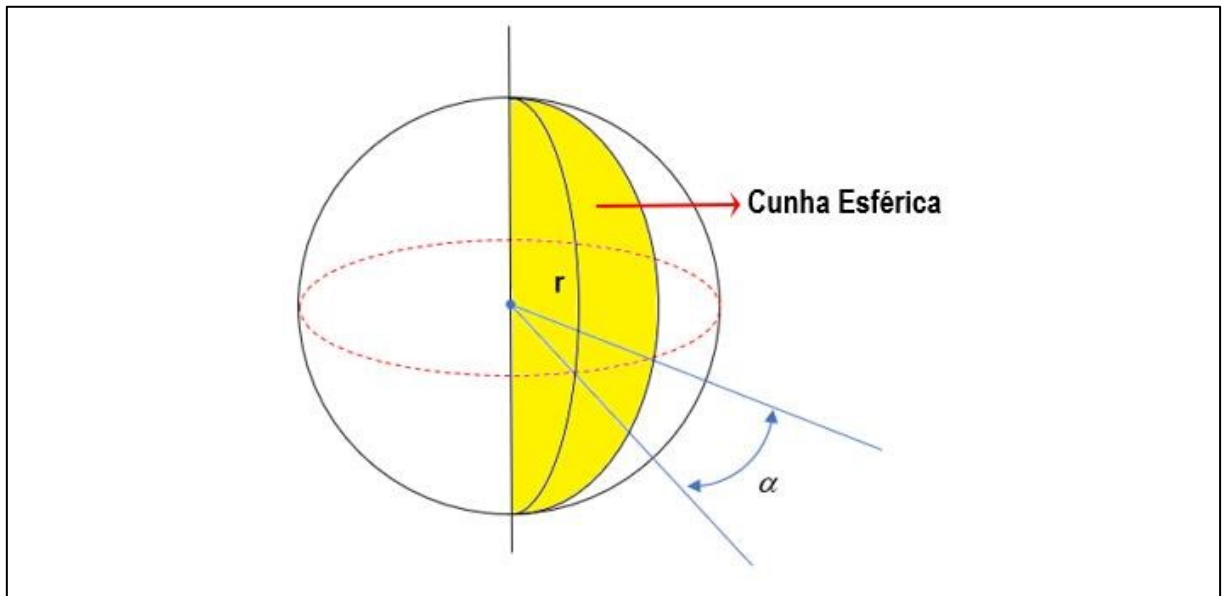
- Se α estiver em radianos, temos

$$\frac{A_{\text{superf. esférica}}}{A_{\text{fuso esférico}}} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{(4\pi r^2) \cdot \alpha}{2\pi} = 2r^2 \alpha \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

3.6 CUNHA ESFÉRICA

Denomina-se Cunha esférica ao sólido gerado pela rotação de semicírculo, sob um ângulo α , em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.

FIGURA 17: Cunha esférica



Fonte: Elaborado pelo Autor (2020)

Assim como o fuso esférico, o volume da cunha esférica também é diretamente proporcional ao ângulo de giro α e pode ser obtido por meio das proporções a seguir.

- Se α estiver em graus, temos

$$\frac{V_{\text{cunha}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow V_{\text{cunha esférico}} = \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

- Se α estiver em radianos, temos

$$\frac{V_{\text{cunha}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow V_{\text{cunha esférico}} = \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2r^3 \alpha}{3} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

4. CONSIDERAÇÕES GERAIS

De posse do conjunto de estudos realizados e levantamentos feitos para elaboração da dissertação intitulada “Ensino de Esfera por meio de Applets do Software Geogebra” conseguiu-se por meio de metodologias já testadas e com bons resultados validados, elaborar uma proposta de ensino utilizando-se uma Sequência Didática para ensino de esfera por meio da construção de UARC's como proposto por Cabral (2017).

A aplicação da Sequência Didática ocorreu de tal forma que se buscou atender ao máximo, dentro do experimento realizado junto aos alunos, as Teorias Educacionais que deram suporte a sua elaboração. Por meio das análises realizadas sobre os dados obtidos do experimento, verificou-se que houveram indícios de aprendizagem que evidenciam a aquisição de conhecimento conforme os objetivos traçados dentre de cada atividade, o que reforça o potencial das teorias que serviram de aporte a dissertação que serviu de base para construção desse produto.

Durante o processo de aplicação das atividades da Sequência Didática algumas observações foram feitas e a partir delas pode-se chegar a algumas reflexões. Entre elas, destaco a postura dos alunos diante de uma atividade diferenciada, que no primeiro momento causou certa estranheza, visto que as aulas geralmente são ministradas no modelo tradicional e o aluno não está acostumado a ser autônomo na realização das tarefas propostas. Por outro lado, é perceptível a motivação, por ser uma atividade que faz uso de tecnologia e traz possibilidades que normalmente não são vistas em sala de aula.

Vale ressaltar que por se tratar de uma metodologia diferenciada, inicialmente é comum que das primeiras atividades demandem mais tempo de execução, entre tanto, conforme as observações feitas nota-se que esse tempo tende a reduzir bastante com o desenvolver do processo.

Ao leitor interessado em conhecer as teorias usadas e os resultados obtidos na construção dessa proposta de ensino indica a leitura dos capítulos 2 e 6 da dissertação base desse material. Entendo que outras Sequências Didáticas voltadas para o ensino de esfera podem ser elaboradas a partir da proposta aqui apresentada. Portanto, fica em aberto a livre utilização a estudantes e profissionais de educação na área de matemática para futuras contribuições e continuidade de estudos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR, 2007.

BALESTRI, R. **Matemática: Interação e Tecnologia**. 2ª. ed. São Paulo: Leya, v. 3, 2016.

BASSETTO, Camila Fernanda.; FERREIRA, Eric Chibana.; AGUIAR, Renato Forte. **Relação entre desempenho educacional e quantidade de alunos: uma análise empírica regional com dados do SARESP**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 12, n. 4, p. 2072-2087, out./dez. 2017.

BOERI, Camila Nicola; VIONE, Márcio Tadeu. **Abordagens em educação matemática**. Domínio Público, v.1, 2009. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/ea000661.pdf>>. Acesso em: 02/05/2018

BORSOI, Caroline. **Geogebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2004.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didática da matemática**. In: BRUN, Jean. Didática das matemáticas. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino**. Rio de Janeiro, RJ: ATICA, 2008. 128 p. (Educação em Ação). ISBN 978-85-0811-966-0. 30, 31, 32

CABRAL, Natanael Freitas. **O Papel das Interações Professor-aluno na Construção da Solução Lógico-aritmética Otimizada de um jogo com regras**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estrutura e elaboração**. Pará: SBEM, 2017.

CARMO, Erinaldo Ferreira et al. **Um estudo da relação entre a adequação na formação docente e o desempenho escolar no Ensino Médio regular**. Educação e Fronteiras On-Line, v. 4, n. 12, p. 24-37, 2014.

COSTA, A. C., BORMEJO A. P., MORAES, M.S. **Análise do ensino de geometria espacial**. Anais do X encontro Gaúcho de Educação Matemática. 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino**. Boletim de Educação Matemática, v. 20, n. 28, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações: Ensino Médio**. 3ª. ed. São Paulo: Ática, v. 3, 2016.

EDITORA MODERNA. **Conexões com a Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 2, 2013.

FAUSTINO, Ana Carolina; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglione. **Cenários para investigação e resolução de problemas: reflexões para possíveis caminhos**. Revista Educação e Linguagens, v. 2, n. 3, 2014.

FERNANDES, Lacorderio Tavares. **Aprendizagem significativa: uma proposta de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana espacial no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

GATTI, Bernadete A. **O professor e a avaliação em sala de aula**. Estudos em avaliação educacional, n. 27, p. 97-114, 2003.

GÓES, Maria Cecília Rafael. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. *Cadernos Cedes*, ano XX, SciELO Brasil, n. 50, 2000. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf> >. Acesso em: 12 de Nov. 2016.

HOMEN, Priscila Maggi. **Concepções de professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o ensino de geometria: uma análise pós-construtivista**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013

HUBERMAN, A. M. **O Ciclo de Vida Profissional de Professores**. In: NÓVOA, Antonio. Vida de professores. Portugal: Porto editora, 2000.

IEZZI, G. **Matemática: ciência e aplicações**. 9ª. ed. São Paulo: Sariaeva, v. 2, 2016.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista. SBEM. N.4, p. 313, 1995.

LEONARDO, F. M. D. **Conexões com a Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 2, 2013.

LUNA, Maria de Fátima Aleixo de. **Estudo das trajetórias hipotéticas de aprendizagem de geometria espacial para o ensino médio na perspectiva construtivista**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MACHADO, Ronaldo Asevedo. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MARQUES, Gleidson Everton de Alcantara. **Ensino de Esfera por Meio de Applets do Software Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

MEDEIROS, Leonardo Andrade. **Área e volume da esfera**. Dissertação (Mestrado em Álgebra; Análise matemática; Ensino de matemática; Geometria e topologia; Matemática aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

MORAES, Ideny E. S. Q. **O Ensino de Volumes de Sólidos Geométricos por atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

MOREIRA, Daniel Monteiro da Silva. **Aprendizagem de geometria espacial, Cálculo de Volumes segundo os Alunos do 2º ano do ensino médio**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino**. *Investigações em ensino de ciências*, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002.

PASSOS, Claudio Manso; TEIXEIRA, Paulo Magalhaes. **Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau**. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2011.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké - Ano 1 - n.1, 1993.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**, vol. 1. Livraria Lopes da Silva Editora, 2000.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. 72 p. [SI]: Virtual Book, 2013.

POSSANI, Jose Fernando. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

RITTER, Andréa Maria. **A visualização no ensino de geometria espacial: uma possibilidade com o Calques 3D**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M.C. (2006, Janeiro/Fevereiro) **Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica**. Revista Brasileira de Fisioterapia, São Carlos, v. 11, n. 1, p. 83-89. ISSN:1413-3555

SANTOS, Waldiza Lima Salgado **O ensino de volume de sólidos por atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2012.

SILVA, N. A.; FERREIRA, MVV; TOZETTI, K. D. **Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau**. In: CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES. 2015.

SILVA, Rosângela de Araújo. **As dificuldades do professor no ensino da geometria espacial nas escolas estaduais no município de Santa Cruz**. Anais do IV encontro de iniciação à docência da UEPB. 2014.

TOMIO, Daniela; SCHROEDER, Edson; ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural**. Reflexão e Ação, v. 25, n. 3, p. 28-48, 2017.

VIVIAN, Nanci Miksza. **Análise dos Padrões discursivos de um professor de Ciências do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Penso, 1998.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem