

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



**DANIEL DE DEUS NEGRÃO MAUÉS
MIGUEL CHAQUIAM**

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO
DO CILINDRO CIRCULAR RETO**

PRODUTO EDUCACIONAL

Belém - PA
2020

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

**Daniel de Deus Negrão Maués
Miguel Chaquiam**

**Uma Sequência Didática para o Ensino
do Cilindro Circular Reto**

Produto Educacional

Belém - PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias

Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Miguel Chaquiam
Natanael Freitas Cabral
Gustavo Nogueira Dias

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSEIUEPA, Belém - PA

Maués, Daniel de Deus Negrão & CHAQUIAM, Miguel

Uma sequência didática para o ensino do cilindro circular reto: Produto Educacional, 2020

Produto educacional vinculado à dissertação “Uma sequência didática para o ensino do cilindro circular reto” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA), 2020

1. Geometria espacial-Estudo e ensino 2. Cilindro. 3. Sequência didática. I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD. 23º ed.516.23



FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CENÁRIO CIRCULAR RETO

Mestrando (a): DANIEL DE DEUS NEGRÃO MAVÉS

Data da avaliação: 18/12/2019

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:

- () Estudantes do Ensino Fundamental Estudantes do Ensino Médio
() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio
() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) Tipo de Produto Educacional

- Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
() Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: _____

b) Possui URL: () Sim, qual o URL: EDUCAPES
() Não () Não se aplica

c) É coerente com a questão-foco da pesquisa?

- Sim
() Não. Justifique? _____

d) É adequado ao nível de ensino proposto?

- Sim
() Não. Justifique? _____

e) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?

- Sim
() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- a) Possui sumário: Sim () Não () Não se aplica
b) Possui orientações ao professor: Sim () Não () Não se aplica
c) Possui orientações ao estudante: Sim () Não () Não se aplica
d) Possui objetivos/finalidades: Sim () Não () Não se aplica
e) Possui referências: Sim () Não () Não se aplica
f) Tamanho da letra acessível: Sim () Não () Não se aplica
g) Ilustrações são adequadas: Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

- Sim, onde: Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Francisco Xavier
- Não, justifique: _____
- Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

- Sim, onde: Escolas de Ensino Médio
- Não, justifique: _____
- Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

- Sim, onde: _____
- Não, justifique: _____
- Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

- na escola, como atividade regular de sala de aula
- na escola, como um curso extra
- outro: _____

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

- Alunos do Ensino Fundamental
- Alunos do Ensino Médio
- Professores do Ensino Fundamental
- Professores do Ensino Médio
- outros membros da comunidade escolar, tais como _____
- outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

- APROVADO APROVADO COM MODIFICAÇÕES REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Miguel Chaquiam. Orientador

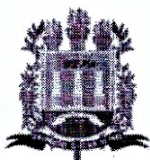
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade do Estado do Pará

Natanael Freitas Cabral. Examinador Interno

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará

Gustavo Nogueira Dias. Examinador Externo

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO PRODUTO EDUCACIONAL

DECLARAÇÃO

Eu, Manoel Carlos Guimarães da Silva, diretor da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Francisco Xavier, localizada à Avenida Quinze de agosto N°: 339, CEP: 68440-000, que obteve IDEB 3,6, no ano de 2017, venho por meio desta declarar que o Sr. Daniel de Deus Negrão Maués, vinculado ao Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolveu Estágio Supervisionado e aplicou Produto Educacional Uma sequência didática para o ensino do cilindro circular reto, nesta Escola sob a supervisão do professor Janir Assunção Maués, na turma 2º K, no turno da tarde, no período de 18/06/2019 a 19/06/2019, para fins de comprovação junto ao referido Programa. O Estágio Supervisionado foi desenvolvido de acordo com o Plano de Atividades apresentado inicialmente, obteve uma avaliação positiva pelo Supervisor responsável levando em consideração tanto o Relatório de Acompanhamento do Estágio Supervisionado quanto a Avaliação do Produto Educacional. O que me leva a concluir que as atividades desenvolvidas no referido Estágio contribuíram efetivamente para a melhoria de ensino e aprendizagem da Escola.

Belém-PA, 14 de janeiro de 2020

Manoel Carlos Guimarães da Silva

Manoel Carlos G. da Silva
Diretor-Port. nº 2072/2012 CRM
Vice-Executivo e Especialista
em Gestão Escolar

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	11
2.1. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR.	11
2.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	13
2.3. MODELOS DAS ATIVIDADES	22
2.4. OUTRAS ATIVIDADES ENVOLVENDO CILINDRO	27
3. OBJETO MATEMÁTICO: CILINDRO	31
3.1. DEFINIÇÕES DE CILINDRO	31
3.2. ÁREAS DAS SUPERFÍCIES DO CILINDRO	35
3.3. VOLUME DO CILINDRO	38
4. CONSIDERAÇÕES GERAIS	40
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41

1. INTRODUÇÃO

Neste material foram apresentados os resultados da dissertação de mestrado gerada dentro do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sob o título “Uma sequência didática para o ensino do cilindro circular reto” com o objetivo de **analisar as potencialidades da aplicação de uma Sequência Didática - (SD) envolvendo o ensino de cilindro para uma turma de 2º série do ensino médio**. A partir das observações e conclusões norteadas pelo objetivo já apresentado gerou-se o produto educacional o qual foi validado para o ensino de cilindro circular reto e disponibilizado neste material.

Observa-se, com o passar dos anos, os relatos de professores e estudantes de Matemática e grande parte da sociedade, sobre as dificuldades apresentadas em relação a essa disciplina, em particular, as lacunas que a maioria dos estudantes encontra em geometria espacial, como por exemplo: dificuldades em desenhar, imaginar sólidos, interpretar textos com conteúdo matemático, realizar cálculos algébricos vinculados à geometria, entre outras, que impedem o ensino e aprendizagem da geometria de forma plena.

Os profissionais atuantes do ensino de matemática podem ter a curiosidade de investigar e pesquisar sobre essas observações iniciais, fato que levou ao aprofundamento sobre o estudo referente ao ensino e aprendizagem de geometria, para tanto, necessitou-se a busca em documentos oficiais, intencionando saber em que direções o ensino da geometria deve seguir. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicado em 1998, as metodologias de ensino da geometria devem ser contextualizadas de forma que o discente possa aprender a relacionar a geometria plana ou espacial com o mundo e que esse conhecimento matemático possa servir como base para outras ciências, à importância da geometria está intrinsecamente relacionada à visão de mundo que deve ser construída pelo discente de tal forma que este possa usá-la para resolver problemas matemáticos e que possa adequar seus conhecimentos geométricos a situações do cotidiano, após sair da educação básica.

Referente ao ensino de cilindro em um nível nacional é perceptível sua importância no ensino médio da educação básica, pois este é citado e comentado nas habilidades presentes nos Parâmetros Nacionais Curriculares do Ensino Médio

(PNC+), assim como as habilidades presentes Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que devem ser desenvolvidas pelos alunos durante esse grau de ensino, ainda vale citar que o assunto cilindro é exigido nos níveis de proficiência do Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE) daí a importância do seu ensino de forma contextualizada e significativa.

A partir dessa intenção buscou-se alternativas metodológicas dentro de estudos envolvendo a Educação Matemática que viessem a contribuir para a construção do conhecimento e melhorar a prática de ensino, diferenciando das metodologias já conhecidas como a tradicional¹, assim escolheu-se a teoria das situações didáticas de Brousseau (1986) apresentada em D'Amore (2007) a qual deu frutos para estudos de outros pesquisadores como Michele Artigue, Bruno D'Amore e Antoni Zabala, estes últimos influenciaram gerações de estudiosos os quais vem produzindo materiais até os dias atuais, os quais comprovam através de experimentos que a Teoria das Situações Didáticas – (TSD) e as Sequências Didáticas – (SD) são instrumentos de ensino que podem ser usados como solução para diminuir as dificuldades do processo educacional.

E considerando as pesquisas anteriores na área da educação matemática escolheu-se a Teoria das Situações Didáticas junto com as Sequências Didáticas - (SD) por estas teorias apresentarem resultados na direção de melhorar a prática do ensino matemático, em particular cilindro, como já foi mostrado nos estudos científicos apresentados anteriormente e para a elaboração das SD escolheu-se a Unidade Articulado de Reconstrução Conceitual - (UARC) de Cabral (2017) por ser uma das obras mais atuais envolvendo Sequências Didáticas.

¹ Segundo Mizukami (1986, p. 4), a metodologia tradicional é “baseada na aula expositiva, com conteúdo pronto, aluno ouvinte passivo.”

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática aqui disponibilizada foi construída a partir da dissertação apresentada como requisito final para obtenção do título de mestre em ensino de matemática e tal Sequência didática envolvendo cilindro circular reto foi produto de um estudo aprofundado sobre esse conteúdo, envolvendo pesquisas realizadas com a aplicação de questionários a professores e alunos, pesquisas envolvendo estudos anteriores sobre o ensino de geometria, consultas a documentos oficiais que regem a educação matemática brasileira, pesquisas sobre metodologias de ensino da matemática, análises de livros didáticos, consultas em livros formais.

As investigações, consultas e pesquisas citadas acima resultaram na Sequência Didática que foi aplicada em forma de experimento, em uma escola pública de ensino do estado do Pará, especificamente na cidade de Abaetetuba.

Após a coleta de dados referentes a experimento foram realizadas análises as quais mostraram a eficiência e validade da Sequência Didática como uma boa opção de ensinar o conteúdo cilindro circular reto, logo esse produto foi aqui disponibilizado para posteriores utilizações pelos profissionais do ensino da matemática.

Para a utilização da metodologia de acordo com os estudos realizados algumas orientações, que destacam o cerne das teorias envolvidas, devem ser seguidas, assim recomenda-se a leitura dos capítulos 2 e 5 da dissertação geradora deste produto educacional.

2.1. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR.

Antes de começar a aplicação da primeira atividade da SD o professor deve considerar alguns fatores metodológicos como, dividir os alunos da turma em grupos afastados uns dos outros, para que haja a interação entre eles, pois a construção da sequência de atividades objetiva essa interação onde os alunos vão aprender de acordo com os seus pares na interação histórico-social de acordo com a Zona de Desenvolvimento Proximal – (ZDP) de Vygotsky. Ainda de acordo com estudos no desenvolvimento dessa sequência de atividades o professor não deve interagir com

o aluno de forma a repassar o conhecimento para ele, mas deve apenas orientá-lo de modo que o próprio discente faça descobertas do conhecimento.

Ao aplicar a sequência didática, o professor deve deixar claro que são a partir das intervenções que os alunos vão conseguir preencher as folhas de atividades e assim aprender o que se quer ensinar, deixando claro o contrato didático estabelecido.

Como essa sequência de atividades foi produzida de forma diferenciada de outras metodologias de ensino, os alunos precisarão de orientações a mais na primeira atividade até perceberem por si mesmos os padrões de comportamentos que devem ser adotados para continuação das outras atividades. O padrão aqui citado é do aluno investigador, e o professor deve adotar a postura de orientador durante o processo para direcionar o aluno a autonomia.

O professor orientador deve aplicar a sequência didática com o mínimo de interferências possíveis nas investigações do aluno, porém deve interromper o processo dando orientações adequadas quando perceber que um aluno ou grupo de alunos está perdendo o foco dos objetivos intencionais de aprendizagem do conteúdo.

Para melhor entender e orientar a construção de conhecimento foi disponibilizado uma tabela de objetivos menores a serem atingidos de acordo com cada atividade, focando no objeto maior da atividade.

Quadro 1: Descrição e objetivos de cada atividade

Atividade	Descrição	Objetivos Sequenciais	
1	Conceituar cilindro circular reto a partir das suas características externas. Fazer o discente perceber que os objetos têm bases circulares iguais, altura específica e diâmetro.	1	Reconhecer o objeto cilindro
		2	Reconhecer a forma da curva da base e que o sólido tem uma altura definida.
		3	Reconhecer a figura geométrica das bases de apoio do cilindro.
		4	Identificar as medidas das alturas e diâmetros dos cilindros.
		5	Nomear o objeto considerando as suas características gerais e formalizar o nome.
2	Intuir a construção de sólidos através da manipulação de estruturas concretas, fazendo o discente perceber a utilização do retângulo do eixo e da curva circular para construir a superfície cilíndrica e nomear esse sólido como cilindro de rotação.	6	Reconhecer que o movimento de girar estruturas planas em torno de um eixo formam sólidos geométricos.
		7	Relacionar o sólido cilindro da atividade 1 com o sólido cilindro formado pelo giro do retângulo.
		8	Renomear o cilindro de acordo com as manipulações feitas.
3	Descobrir de uma maneira indireta	9	Reconhecer a forma geométrica planejada e

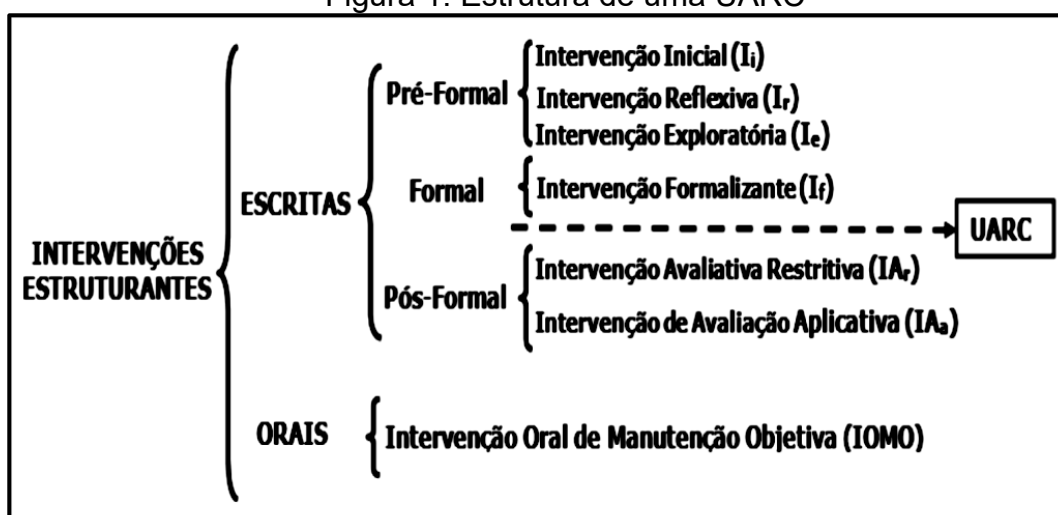
	os procedimentos para calcular a área lateral de um cilindro e redescobrir a fórmula da área lateral.		associar cada molde de cartolina ao respectivo cilindro.
		10	Calcular a área da figura plana retângulo.
		11	Redescobri uma fórmula geral para o cálculo da área lateral.
4	Descobrir uma forma indireta de calcular a área total do cilindro e redescobrir a fórmula.	12	Encontrar a relação intuitiva para calcular a área total do cilindro.
		13	Redescobrir a fórmula geral para calcular a área total do cilindro.
5	Encontrar um meio de calcular o volume do cilindro.	14	Estabelecer uma relação entre área da base, altura e volume.
		15	Redescobrir a fórmula geral para calcular o volume do cilindro.
		16	Calcular o volume do objeto F.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

2.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência didática apresentada nesse estudo teve fortes influências das estruturas criadas por Cabral (2017) envolvendo a Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual - UARC, logo para maiores conhecimentos se recomenda a leitura de “Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração” do ano de 2017. Segundo Cabral a estrutura de uma UARC se resume de acordo com figura 1.

Figura 1: Estrutura de uma UARC



Fonte: Cabral (2017, p. 97)

Cada elemento da UARC acima resumida por Cabral (2017) tem seus significados para o ensino, pois para tornar efetiva a Sequência Didática As são necessárias as Intervenções Iniciais - [Ii], Intervenções Reflexivas [Ir], Intervenções

Exploratórias - [I_e], Intervenções estruturantes pré-formais, Intervenções formalizantes - [I_f], Intervenções Avaliativas Restritas - [IA_r], Intervenções Avaliativas Aplicativas - [IA_a] entram em consonância com o diálogo que o professor orientador tem com o discente direcionando este último a um caminho de redescoberta do próprio conhecimento matemático.

O que ocorre em meio a essa construção do conhecimento é um verdadeiro vai e vem discursivo, onde o discente apresenta através de suas falas o que ainda não conseguiu aprender e o professor com as intervenções já citadas direciona o aluno ao encontro do conhecimento, uma das mais importantes intervenções definidas por Cabral (2017) são as Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva (IOMO) que segundo Cabral (2017, p. 45) “são extremamente necessárias, pois ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem”.

Para começar o ensino através de uma Sequência Didática deve-se instigar os alunos com um texto inicial, tal estrutura segundo Cabral (2017, p. 40) chama-se, “Intervenção Inicial (I_i) é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico - intuitiva as regularidades funcionais de um conceito”.

Outras intervenções são necessárias ao ensino seguindo a UARC na estrutura construída para o ensino do cilindro circular reto ainda são usadas as Intervenções Reflexivas (I_r), sempre elaboradas em forma de perguntas a respeito do objeto estudado, Intervenções Exploratórias (I_e), com o objetivo de fazer o aluno refletir sobre as respostas dadas por ele e aprofundar seus conhecimentos sobre o objeto, Intervenção Formalizante (I_f), que serve para formalizar matematicamente os conceitos dos objetos estudados usando-se das respostas das investigações dos alunos e a Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) que tem como objetivo de sondar pontualmente os conhecimentos obtidos pelos alunos.

As intervenções brevemente destacadas e especificadas foram as usadas na estrutura das UARC's que formaram a SD envolvendo cilindro, elas têm seus conceitos mais abrangentes e aprofundados em Cabral (2017) referenciado na bibliografia deste trabalho. A seguir foram definidas as atividades com possíveis previsões de respostas dos alunos de acordo com os objetivos que se espera alcançar em cada atividade.

Atividade 1: Cilindro

Objetivos: Conceituar cilindro circular reto a partir das suas características externas. Fazer o discente perceber que os objetos têm bases circulares iguais, altura específica e diâmetro.

Carga Horária: 1 hora aula de 45 minutos.

Material: Objetos cilíndricos, tubos de encanamento, caneta, régua e lista de tarefas.

Conteúdo matemático: Conceitos e definições de cilindro circular reto.

Procedimentos:

[I_i] – Os itens a sua frente são objetos normalmente usados no dia a dia, observe-os e manuseie cada objeto.

[I_r] – Qual o sólido geométrico que pode ser associado a esses objetos?

R: Cilindro

[I_r] – Quais características esses objetos têm em comum?

R: Bases circulares e alturas fixas

[I_r] – Os objetos a sua frente podem ser colocados na vertical (“em pé”) Numa superfície de modo que fiquem sem rolar? Em quantas posições?

R: Sim, em duas posições. Sobre o Apoio 1 e Apoio 2

[I_r] – Nas posições em que o objeto fica na vertical (“em pé”), o lado apoiado sobre a superfície plana tem qual forma geométrica?

R: Círculo

[I_e] – Meça a distância entre as duas superfícies planas de apoio desses objetos e os diâmetros dessas superfícies de apoio e registre no quadro abaixo.

Preencha o quadro.

Objeto	Superfície de apoio 1	Superfície de apoio 2	Distância entre as superfícies de apoio
	Diâmetro 1	Diâmetro 2	
A	4 cm	4 cm	5 cm
B	4 cm	4 cm	7 cm
C	5 cm	5 cm	4 cm
D	5 cm	5 cm	5 cm
E	7,5 cm	7,5 cm	3 cm

[I_e] – Descreva as características comuns a todos os objetos.

R: Todos podem ser colocados em pé sobre bases circulares e tem altura específicas, formando ângulo reto com a superfície de apoio.

[I_r] – Apresente uma descrição que contemple todos os objetos manuseados a partir das características acima identificadas.

R: Cilindros retos de bases circulares.

[I_r] - **O professor intervém juntos aos alunos para formalizar as observações dos alunos usando as descobertas dos mesmos.**

Observações do professor

Ao final de cada atividade o professor deve observar se os alunos conseguiram alcançar os objetivos da atividade e a partir dos conhecimentos redescobertos pelo aluno o professor intervém para formalizar os objetos como “cilindros retos de base circular”

Atividade 2: Sólido de Rotação

Objetivo: Intuir a construção de sólidos através da manipulação de estruturas concretas, fazendo o discente perceber a utilização do retângulo do eixo e da curva circular para construir a superfície cilíndrica e nomear esse sólido como cilindro de revolução.

Carga Horária: 1 hora aula de 45 minutos.

Material: Caneta, estruturas giratórias e lista de tarefas.

Conteúdo matemático: Cilindro de rotação

Procedimentos:

[I_i] – Observe atentamente as três estruturas planas.

[I_e] – Coloque cada estrutura no palito central, e gire-as rapidamente.

[I_r] – Considerando todo o espaço por onde passaram as estruturas planas durante os giros, que sólidos foram formados? (Repita o giro quantas vezes for necessário)

R: Cilindro, Esfera e Cone

[I_r] – Qual desses sólidos construídos é o mesmo da atividade anterior?

R: Cilindro

[I_r] – Que figura plana foi usada para a obtenção desse sólido?

R: Retângulo

[I_e] – Atribua um nome específico para o objeto criado de acordo com as **curvas das bases** e o **movimento realizado**.

R: Sólido de Revolução

[I_f] - O professor intervém juntos aos alunos para formalizar as observações dos alunos usando as descobertas dos mesmos.

Observações do professor

Nesse espaço o professor deve observar se os alunos já tem conhecimentos internos básicos necessários para nomear o sólido, algumas variações de nome podem surgir, porém cabe ao professor verificar as respostas que mais se aproximam para depois formalizar o cilindro como “Sólido de Revolução”

Atividade 3: Área Lateral

Objetivo: Descobrir de uma maneira indireta os procedimentos para calcular a área lateral de um cilindro e redescobrir a fórmula da área lateral.

Carga Horária: 1 hora aula de 45 minutos.

Material: Caneta, Calculadora, régua, 5 moldes de cilindros de cartolina. e lista de tarefas.

Conteúdo matemático: Área lateral do cilindro encontrada por planificação.

Procedimento

[I_i] - Observe atentamente o quadro abaixo, os objetos apresentados e as peças de cartolina.

[I_e] – Meça o raio de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Meça o diâmetro de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Meça a altura de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Identifique qual peça de cartolina cobre a lateral de cada objeto cilíndrico, sem sobras ou faltas.

[I_e] – Planifique as peças de cartolina e identifique as figuras planas formadas

[I_e] – Caso seja possível, calcule a área de cada figura planificada.

[I_r] – Que correspondência podemos fazer entre a área lateral dos objetos cilíndricos e a área da figura plana que recobriu a lateral desses objetos?

R: A área planificada de cada cartolina corresponde a área lateral de cada cilindro correspondente.

Com as informações obtidas preencha o **quadro** a seguir:

Cilindros	Medida do raio (r)	Medida do comprimento da base do cilindro (C)	Medida do diâmetro do cilindro (d)	Medida da Altura do cilindro (h)	Medida da área lateral dos objetos cilíndricos (A_l)
A	2		4	5	
B	2		4	7	
C	2,5		5	4	
D	2,5		5	5	
E	3,75		7	3	

[I_r] – Existe um modelo matemático para encontrar o valor de C para qualquer cilindro?

$$C = 2\pi r \text{ ou } C = d\pi$$

[I_r] – O produto de quais dois valores de cada linha do quadro resultam na área lateral do cilindro?

R: Comprimento (C) e Altura (h)

[I_e] – Estabeleça um modelo padrão para calcular a área lateral de um cilindro qualquer.

R: $A_l = 2\pi r \cdot h$

[I_f] - O professor intervém juntos aos alunos para formalizar as observações dos alunos usando as descobertas dos mesmos.

Observações do professor

Neste espaço o professor deve utiliza-se das respostas e modelos de equações criados pelos alunos, observando quais elementos estão ausentes ou mal colocados e a partir dessas respostas formalizar o padrão para a fórmula da área lateral como " $A_l = 2\pi r \cdot h$ "

[I_A] – Teste o modelo anterior estabelecido para o objeto F apresentado.

Aqui o professor pode desenhar no quadro um cilindro qualquer contendo suas medidas, para que os alunos possam encontrar o valor da área lateral, verificando de forma restrita o conhecimento adquirido nessa atividade.

Atividade 4: Área Total do Cilindro

Objetivo: Descobrir uma forma indireta de calcular a área total do cilindro e redescobrir a fórmula.

Carga Horária: 1 hora aula de 45 minutos.

Material: Caneta, Calculadora, régua, moldes de cartolina objetos do cotidiano e lista de tarefas.

Conteúdo matemático: Área da base de um cilindro circular somado a área lateral.

Procedimentos:

[I_i] – Observe atentamente o quadro abaixo, os objetos apresentados e os moldes de cartolina.

[I_e] – Meça os valores dos raios das bases dos objetos e dos moldes de cartolina.

[I_e] – Calcule o valor da área de cada base e das respectivas áreas laterais dos cilindros.

[I_e] – Some os valores das duas bases de cada cilindro com suas respectivas áreas laterais.

[I_r] – Qual a área de cada cilindro você encontrou com o último cálculo?

R: A área total

Sugestão: preencha o quadro a seguir para visualizar cada elemento.

Cilindros	Raio (r)	Altura do cilindro (h)	Comprimento da base do cilindro (C)	Área da base (A _b)	Área lateral do cilindro (A _l)	Soma do dobro da área da base com a área lateral
A						
B						
C						
D						
E						

[I_r] – Qual seria o modelo de cálculo para encontrar a área total de um cilindro qualquer?

R: $A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

[I_f] - O professor intervém juntos aos alunos para formalizar as observações dos alunos usando as descobertas dos mesmos.

Observações do professor

Neste espaço o professor deve utiliza-se das respostas e modelos de equações criados pelos alunos, observando quais elementos estão ausentes ou mal colocados e a partir dessas respostas formalizar o padrão para “ $A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ ” ou “ $A_t = A_l + 2A_b$ ”

[I_{ar}] – Teste o modelo anterior estabelecido para o objeto F apresentado.

Para testar a área total do cilindro usando a fórmula redescoberta aconselha-se que o mesmo objeto F utilizado na atividade anterior seja usado, dando prosseguimento na exploração de um objeto já pré-fixado.

Atividade 5: Volume de Cilindros

Objetivo: Encontrar um meio de calcular o volume do cilindro.

Carga Horária: 1 hora aula de 45 minutos.

Material: Caneta, calculadora, cilindros feitos de tubos de encanamento, recipiente graduado, areia e lista de tarefas.

Conteúdo matemático: Volume dos cilindros retos de base circular.

Procedimentos:

[I_i] – Encha cada cilindro com areia até a borda.

[I_e] – Despeje a areia no recipiente graduado vazio, de forma que a areia fique mais nivelada possível. Repita o procedimento para cada cilindro.

[I_e] – Observe e anote o volume encontrado em cada caso.

Preencha quadro a seguir:

Cilindro	Valor da Área da Base (A_b)	Valor da Altura (h)	Volume do cilindro (V_c)
A			
B			
C			
D			
E			

[I_e] – Estabeleça uma relação entre área da base, altura e volume do objeto cilíndrico.

R: $V = A_b \times h$ ou área da base vezes a altura

[I_r] – É possível elaborar uma fórmula para calcular o volume de qualquer cilindro?

R: $V = \pi r^2 h$

[I_f] - O professor intervém juntos aos alunos para formalizar as observações dos alunos usando as descobertas dos mesmos.

Observações do professor

Neste espaço o professor deve utiliza-se das respostas e modelos de equações criados pelos alunos, observando quais elementos estão ausentes ou mal colocados e a partir dessas respostas formalizar o padrão para “ $V = \pi r^2 h$ ”

[I_{ar}] – Teste o modelo anterior estabelecido para o objeto F apresentado.

Assim com nas atividades 3 e 4 aconselha-se usar o mesmo objeto para que seja dada a continuidade da exploração de um mesmo sólido já desenhado no quadro.

A seguir tem-se as listas das atividades no modelo exato para impressão e posterior ensino de cilindro reto de base circular. Para se tornar mais prático cada folha de atividade foi colocada em uma página o que facilita o trabalho do professor que usará esse material para o ensino de cilindro circular reto.

2.3. MODELOS DAS ATIVIDADES

Atividade 1: Cilindro**Procedimentos:**

[I_i] – Os itens a sua frente são objetos normalmente usados no dia a dia, observe-os e manuseie cada objeto.

[I_r] – Qual o sólido geométrico que pode ser associado a esses objetos?

[I_r] – Quais características esses objetos têm em comum?

[I_r] – Os objetos a sua frente podem ser colocados na vertical (“em pé”) Numa superfície de modo que fiquem sem rolar? Em quantas posições?

[I_r] – Nas posições em que o objeto fica na vertical (“em pé”), o lado apoiado sobre a superfície plana tem qual forma geométrica?

[I_e] – Meça a distância entre as duas superfícies planas de apoio desses objetos e os diâmetros dessas superfícies de apoio e registre no quadro abaixo.

Preencha o quadro.

Objeto	Superfície de apoio 1	Superfície de apoio 2	Distância entre as superfícies de apoio
	Diâmetro 1	Diâmetro 2	
A			
B			
C			
D			
E			

[I_e] – Descreva as características comuns a todos os objetos.

[I_r] – Apresente uma descrição que contemple todos os objetos manuseados a partir das características acima identificadas.

Observações do professor.

Atividade 2: Sólido de Rotação

Procedimentos:

[I_i] – Observe atentamente as três estruturas planas.

[I_e] – Coloque cada estrutura no palito central, e gire-as rapidamente.

[I_r] – Considerando todo o espaço por onde passaram as estruturas planas durante os giros, que sólidos foram formados? (Repita o giro quantas vezes forem necessárias)

[I_r] – Qual desses sólidos construídos é o mesmo da atividade anterior?

[I_r] – Que figura plana foi usada para a obtenção desse sólido?

[I_e] – Atribua um nome específico para o objeto criado de acordo com as **curvas das bases** e o **movimento realizado**.

Observações do professor

Atividade 3: Área Lateral

Procedimentos

[I_i] - Observe atentamente o quadro abaixo, os objetos apresentados e as peças de cartolina.

[I_e] – Meça o raio de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Meça o diâmetro de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Meça a altura de cada objeto cilíndrico

[I_e] – Identifique qual peça de cartolina cobre a lateral de cada objeto cilíndrico, sem sobras ou faltas.

[I_e] – Planifique as peças de cartolina e identifique as figuras planas formadas

[I_e] – Caso seja possível, calcule a área de cada figura planificada.

[I_r] – Que correspondência podemos fazer entre a área lateral dos objetos cilíndricos e a área da figura plana que recobriu a lateral desses objetos?

Com as informações obtidas preencha o **quadro** a seguir:

Cilindros	Medida do raio (r)	Medida do comprimento da base do cilindro (C)	Medida do diâmetro do cilindro (d)	Medida da Altura do cilindro (h)	Medida da área lateral dos objetos cilíndricos (A _l)
A					
B					
C					
D					
E					

[I_r] – Existe um modelo matemático para encontrar o valor de C para qualquer cilindro?

[I_r] – O produto de quais dois valores de cada linha do quadro resultam na área lateral do cilindro?

[I_e] – Estabeleça um modelo padrão para calcular a área lateral de um cilindro qualquer.

Observações do professor

Atividade 4: Área Total do Cilindro

Procedimentos:

[I_i] – Observe atentamente o quadro abaixo, os objetos apresentados e os moldes de cartolina.

[I_e] – Meça os valores dos raios das bases dos objetos e dos moldes de cartolina.

[I_e] – Calcule o valor da área de cada base e das respectivas áreas laterais dos cilindros.

[I_e] – Some os valores das duas bases de cada cilindro com suas respectivas áreas laterais.

[I_r] – Qual a área de cada cilindro você encontrou com o último cálculo?

Sugestão: preencha o quadro a seguir para visualizar cada elemento.

Cilindros	Raio (r)	Altura do cilindro (h)	Comprimento da base do cilindro (C)	Área da base (A _b)	Área lateral do cilindro (A _l)	Soma do dobro da área da base com a área lateral
A						
B						
C						
D						
E						

[I_r] – Qual seria o modelo de cálculo para encontrar a área total de um cilindro qualquer?

Observações do professor

Atividade 5: Volume de Cilindros

Procedimentos:

[I_i] – Encha cada cilindro com areia até a borda.

[I_e] – Despeje a areia no recipiente graduado vazio, de forma que a areia fique mais nivelada possível. Repita o procedimento para cada cilindro.

[I_e] – Observe e anote o volume encontrado em cada caso.

Preencha quadro a seguir:

Cilindro	Valor da Área da Base (A_b)	Valor da Altura (h)	Volume do cilindro (V_c)
A			
B			
C			
D			
E			

[I_e] – Estabeleça uma relação entre área da base, altura e volume do objeto cilíndrico.

[I_r] – É possível elaborar uma fórmula para calcular o volume de qualquer cilindro?

Observação do professor

[I_{ar}] – Teste o modelo anterior estabelecido para o objeto F apresentado.

2.4. OUTRAS ATIVIDADES ENVOLVENDO CILINDRO

Após o ensino de cilindro circular reto recomenda-se a resolução dos exercícios a seguir com a intenção de fixar o conteúdo matemático apreendido e sanar as possíveis dúvidas dos alunos.

Lista de Atividades do Cilindro Circular Reto

1ª - Qual o volume de um cilindro com altura 10 m e raio da base igual a 3 m?

2ª - Determine o volume em cm^3 de um cilindro inscrito em um cubo de lado 4 cm.

a) 96π b) 16π c) 4π d) 32π e) 10π

3ª - Aproximadamente quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem 10m de diâmetro e 15m de profundidade?

a) $7024,7 \text{ m}^3$ b) 1190 m^3 c) $3027,2 \text{ m}^3$
d) $2678,4 \text{ m}^3$ e) $1177,5 \text{ m}^3$

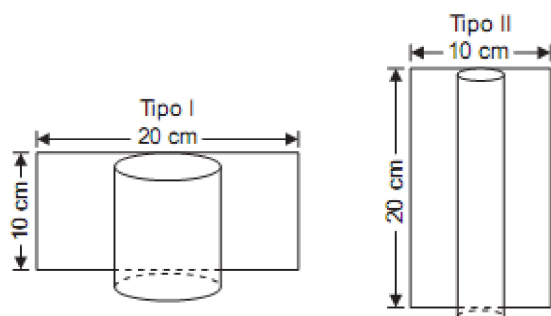
4ª - Qual o valor aproximado da massa de mercúrio em quilogramas, necessária para encher completamente um vaso cilíndrico de raio interno 6 cm e altura 10 cm, se a densidade do mercúrio é 13 g/cm^3 ?

a) 17 kg b) 19 kg c) $14,69 \text{ kg}$ d) $24,6 \text{ kg}$ e) $10,56 \text{ kg}$

5ª - Calcule a área lateral de um cilindro equilátero sabendo que o raio da base mede 2 m.

a) $60\pi \text{ m}^2$ b) $30\pi \text{ m}^2$ c) $24\pi \text{ m}^2$ d) $8\pi \text{ m}^2$ e) $16\pi \text{ m}^2$

6ª - (ENEM - MEC) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 m x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

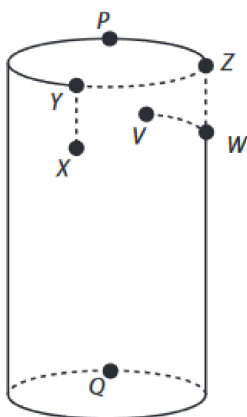


Supondo que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

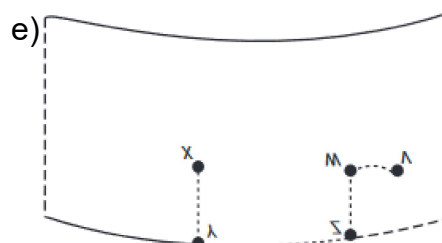
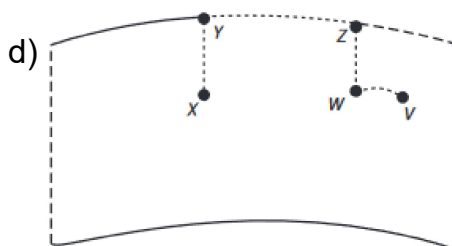
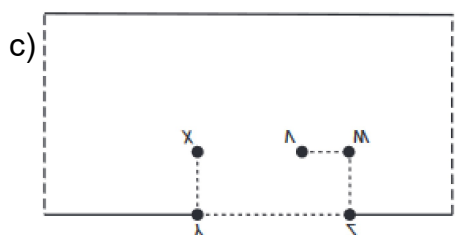
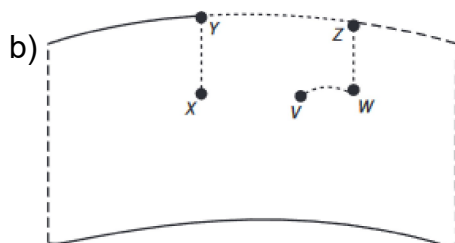
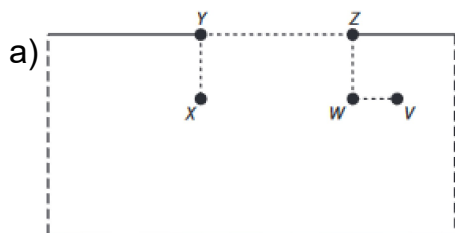
a) o triplo. b) o dobro. c) igual. d) a metade. e) a terça parte.

7ª - Com uma folha de zinco de 5 m de comprimento e 4 m de largura podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Determine em qual dos casos o volume é maior.

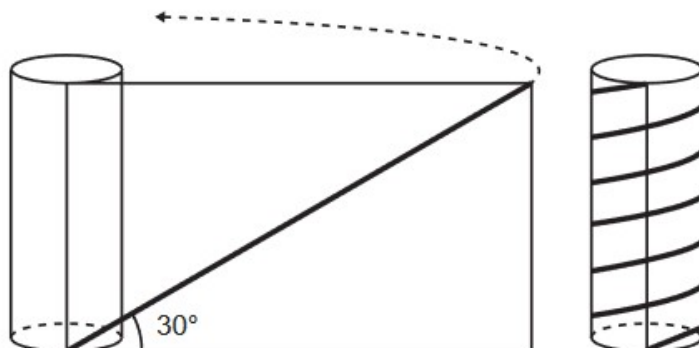
8ª - (ENEM – MEC – 2019) Uma formiga encontra-se no ponto X, no lado externo de um copo que tem a forma de um cilindro reto. No lado interno, no ponto V, existe um grão de açúcar preso na parede do copo. A formiga segue o caminho XYZWV (sempre sobre a superfície lateral do copo), de tal forma que os trechos ZW e WV são realizados na superfície interna do copo. O caminho XYZWV é mostrado na figura.



Sabe-se que: os pontos X, V, W se encontram à mesma distância da borda; o trajeto WV é o mais curto possível; os trajetos XY e ZW são perpendiculares à borda do copo; e os pontos X e V se encontram diametralmente opostos. Supondo que o copo é de material recortável, realiza-se um corte pelo segmento unindo P a Q, perpendicular à borda do copo, e recorta-se também sua base, obtendo então uma figura plana. Desconsidere a espessura do copo. Considerando apenas a planificação da superfície lateral do copo, a trajetória da formiga é.



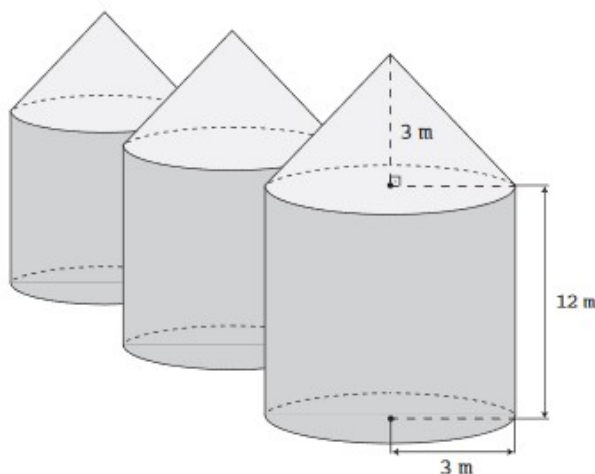
9ª - (ENEM – MEC – 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito um diagonal de que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $6/\pi$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- a) $36\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) 36 e) 72

10ª - (ENEM – MEC – 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- a) 6 b) 16 c) 17 d) 18 e) 21

11ª - (ENEM – MEC – 2014) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

- a) πd b) $2\pi d$ c) $4\pi d$ d) $5\pi d$ e) $10\pi d$

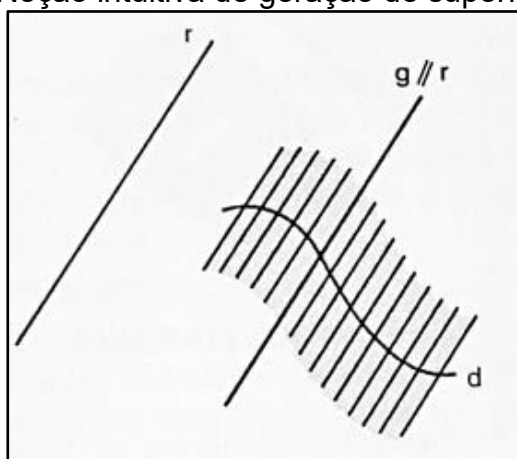
3. OBJETO MATEMÁTICO: CILINDRO

Neste capítulo apresentou-se o conteúdo matemático cilindro, para um melhor aprofundamento dos conceitos e definições formais do conhecimento a respeito desse assunto, para tanto se fez pesquisas sobre o conteúdo das quais puderam ser eleitos os seguintes autores Souza (2010), Leithold (1994) e Dolce & Pompeo (2005), utilizando esses autores como base definiu-se alguns conceitos de cilindros, seus elementos principais, o cálculo de áreas das superfícies e o volume, além das fórmulas apresentadas realizou-se a demonstração de algumas delas, para maior aprofundamento do assunto eleito nesta pesquisa.

3.1. DEFINIÇÕES DE CILINDRO

Antes da definição de cilindro tem-se uma noção intuitiva desse objeto relacionada com a geração da superfície cilíndrica, destacada a seguir: “Superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas são superfícies geradas por uma reta g (geratriz) que se mantém paralela a uma reta dada r (direção) e percorre os pontos de uma linha dada d (diretriz).” (DOLCE & POMPEO, 2005, v.10, p. 215)

FIGURA 1: Noção intuitiva de geração de superfície cilíndrica

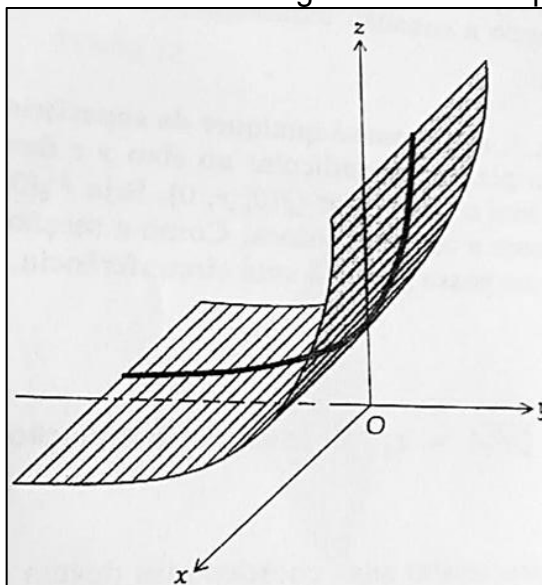


Fonte: DOLCE & POMPEO (2005, v.10, p. 215)

A ideia intuitiva de superfícies cilíndricas indica uma boa noção do sólido para uma linha qualquer, porém vale ressaltar que a definição de superfícies cilíndricas é mais abrangente, embora não seja muito conhecida, observe a seguir uma definição encontrada em LEITHOLD (1994):

Um cilindro é uma superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana dada, de tal forma que ele se mantenha paralela a uma reta fixa não pertencente ao plano da curva dada. A reta móvel é chamada de geratriz do cilindro e a curva plana dada e denominada diretriz do cilindro. Qualquer posição de uma geratriz é chamada de determinante do cilindro. (LEITHOLD, 1994, p. 884)

FIGURA 2: Superfície cilíndrica com geratriz definida pela curva $y=\ln(z)$



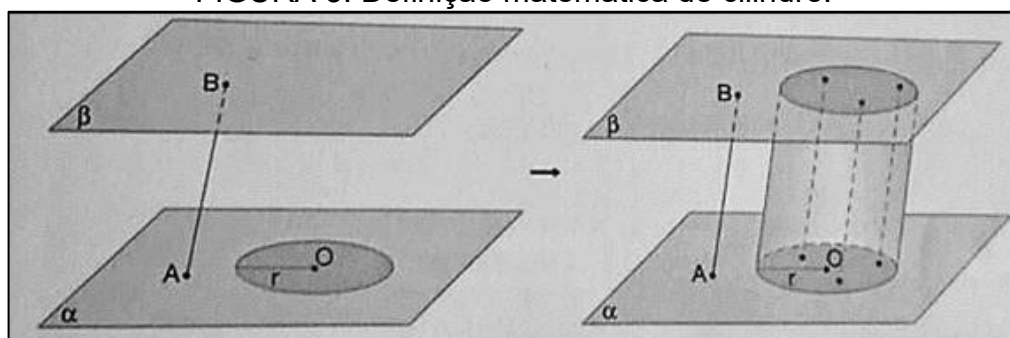
Fonte: LEITHOLD (1994, p. 886)

As noção e definição geral de cilindro são importantes, porém aqui será aprofundado o cilindro circular reto limitado, que é um caso particular de cilindro, esse caso particular é o mais divulgado e ensinado nas escolas, para melhor apropriação do conhecimento sobre cilindro (a partir desse ponto ao usar o termo “cilindro”, o objeto de referência será o cilindro circular reto limitado) deve-se conhecer os elementos desse sólido especificamente.

O cilindro é um sólido geométrico apresentado nos livros didáticos, apostilas ou materiais do ensino médio como um corpo redondo, veja a seguir a definição matemática de cilindro encontrada em um livro didático:

Para definirmos matematicamente um cilindro, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β , um círculo de centro O e raio r , contido em α , e um segmento A , com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Denomina-se cilindro circular, ou simplesmente cilindro, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a \overline{AB} com uma extremidade no círculo de centro O em α e outra extremidade em β . (SOUZA, 2010, p. 111)

FIGURA 3: Definição matemática de cilindro.



Fonte: SOUZA (2010, p. 111)

Em um cilindro circular reto ou apenas cilindro, nomenclatura utilizada neste trabalho, podem ser observados como elementos principais, as bases, as geratrizes, o eixo, a altura e superfície lateral:

As bases são os círculos paralelos com raios de mesma medida.

O eixo é a reta que passa pelos centros das bases circulares.

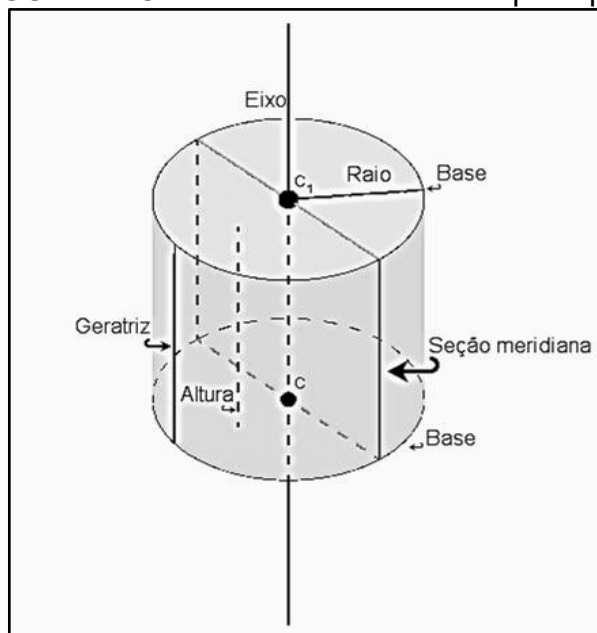
As geratrizes são os segmentos de retas paralelos ao eixo e com extremidades nas circunferências das bases

A altura e a distância entre os planos das bases.

A superfície lateral é a reunião de todas as geratrizes, o cilindro aqui estudado tem suas geratrizes perpendiculares a base, assim é denominado cilindro circular reto. Outro tipo de cilindro é o oblíquo onde as retas são oblíquas as bases.

A seção meridiana de um cilindro é a parte do plano que contém o eixo do cilindro e os pontos pertencentes ao cilindro, quando a seção meridiana do cilindro forma um quadrado, esse cilindro é classificado como equilátero todo cilindro reto de base circular inscrito em um cubo é equilátero.

FIGURA 4: Cilindro e seus elementos principais

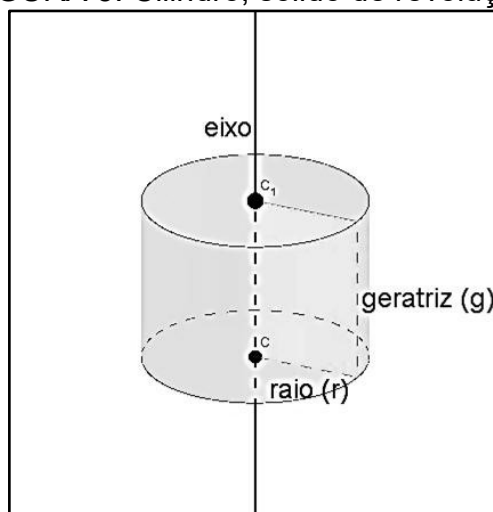


Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A partir da descrição dos elementos principais do sólido estudado nesse trabalho algumas características das figuras que o compõem vão ser enfatizadas.

O objeto geométrico cilindro também pode ser gerado a partir da rotação de um retângulo em torno do eixo, onde um dos lados do retângulo será o raio da base (r) do cilindro e o outro lado será a geratriz (g), esse objeto é denominado sólido de revolução.

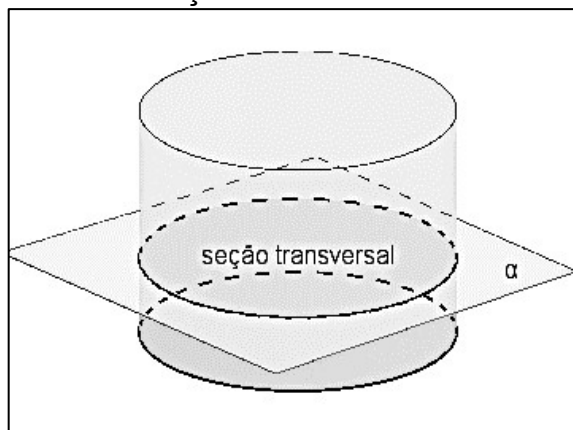
FIGURA 5: Cilindro, sólido de revolução.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A seção transversal de um cilindro pode ser obtida quando um plano α paralelo a base corta esse cilindro, gerando outra curva congruente as curvas das bases do cilindro.

FIGURA 6: Seção transversal de um cilindro

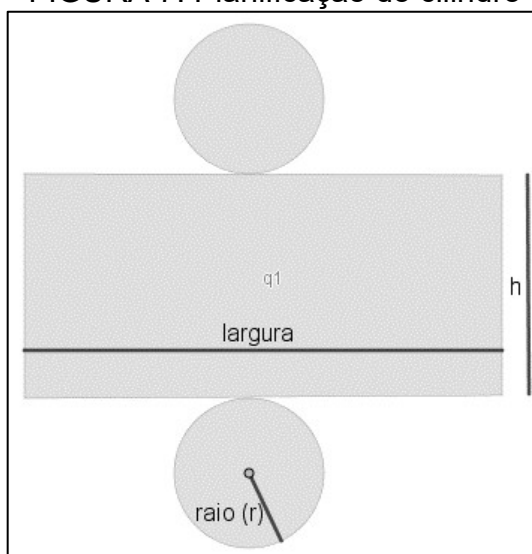


Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

3.2. ÁREAS DAS SUPERFÍCIES DO CILINDRO

Referente ao cilindro pode-se calcular entre outras, as áreas das superfícies das bases e área da superfície lateral, a área da superfície da base do cilindro é calculada a partir da área de um círculo dado seu raio. A área da superfície lateral é calculada a partir da planificação do sólido, que gera um retângulo, observe a seguir a planificação geral do cilindro.

FIGURA 7: Planificação do cilindro

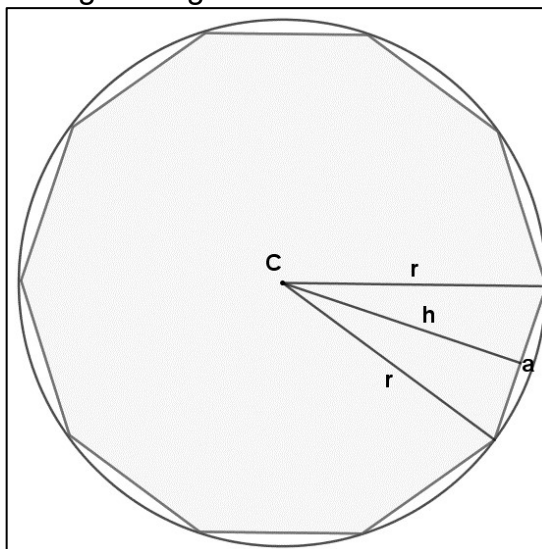


Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Para calcular a área dos círculos das bases usa-se comumente a fórmula $A_B = \pi \cdot r^2$ onde π é a constante obtida calculando a razão entre a medida do comprimento (C) da circunferência pelo seu diâmetro ($2r$) e r é o raio, logo, $\pi = \frac{C}{2r}$.

A demonstração da fórmula $A_B = \pi \cdot r^2$ é dada por uma aproximação da área de um polígono regular a área de uma circunferência dada.

FIGURA 8: Polígono regular inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A área de um polígono regular é dada pela soma das áreas de todos os n triângulos de base a que o formam, logo:

$$A_p = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Onde A_p é a área do polígono e n é o número de lados.

Considerando que A_p está em função de n , nota-se que quanto maior for o valor de n mais próximo a área do polígono estará da área do círculo, assim, supondo:

$$A_p = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Aplicando o limite têm-se duas conclusões a serem observadas, a primeira é que o valor de n tende ao infinito, porém n é o número de lados de um polígono inscrito em uma circunferência, assim seu perímetro é limitado pelo comprimento da mesma, logo $n \cdot a = C$:

$$A_p = C \cdot \frac{h}{2}$$

A segunda conclusão a ser observada é que ao ser aumentado infinitamente o número de lados a altura h se aproximará do próprio raio da circunferência, assim tem-se:

$$A_p = C \cdot \frac{r}{2}$$

Reescrevendo $\pi = \frac{C}{2r}$ obtém-se $C = 2r\pi$ e finalmente substituindo C em A_p

$$A_p = 2r\pi \cdot \frac{r}{2} \rightarrow A_p = \pi \cdot r^2$$

Como $A_p \cong A_B$ por comodidade e simplicidade de cálculo, adota-se:

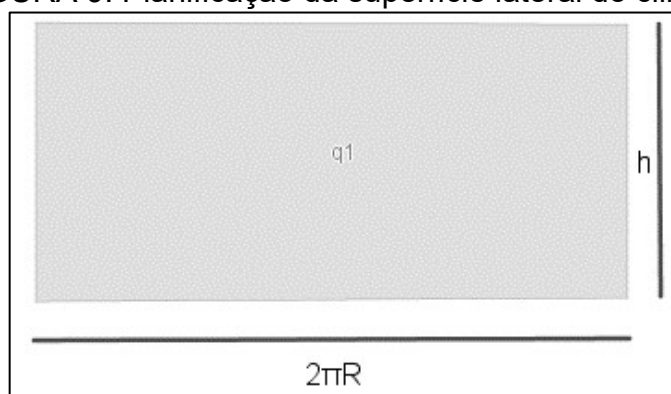
$$A_B = \pi \cdot r^2$$

■

Ainda é possível encontrar o mesmo raciocínio em outras bibliografias, observe, considerando um polígono regular de n lados, levando em consideração que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, ao aumentar o número de lados a área do polígono se aproxima da área do círculo resultando na fórmula “ $A_C = \pi \cdot R^2$ ” DOLCE & POMPEO (2005, v.9, p. 337), A_C é a área do círculo e R é o raio.

Para calcular a área lateral do cilindro usa-se primeiramente planifica-se o sólido, gerando assim uma figura plana de formato retangular, porém a base dessa figura é o comprimento da circunferência do cilindro o qual pode-se obter pela fórmula “ $C = 2\pi R$ ” DOLCE & POMPEO (2005, v.9, p. 293), onde C é o comprimento e R é o raio. Ainda a altura do retângulo formado é a mesma altura do cilindro representada usualmente por h , como a área de um retângulo qualquer é dada por, $base \times altura$, tem-se que a área do retângulo gerado pela superfície lateral do cilindro pode ser calculada pela fórmula, $A_L = C \cdot h$ de outra forma tem-se $A_L = 2\pi R \cdot h$.

FIGURA 9: Planificação da superfície lateral do cilindro



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A área total da superfície cilíndrica pode ser facilmente calculada somando as áreas das duas bases com a área lateral logo $A_T = 2.A_B + A_L$ substituindo em função do raio R , altura h e o pi π , tem-se $A_T = 2.\pi.R^2 + 2\pi R.h$ portanto de forma simplificada $A_T = 2\pi R.(R + h)$.

3.3. VOLUME DO CILINDRO

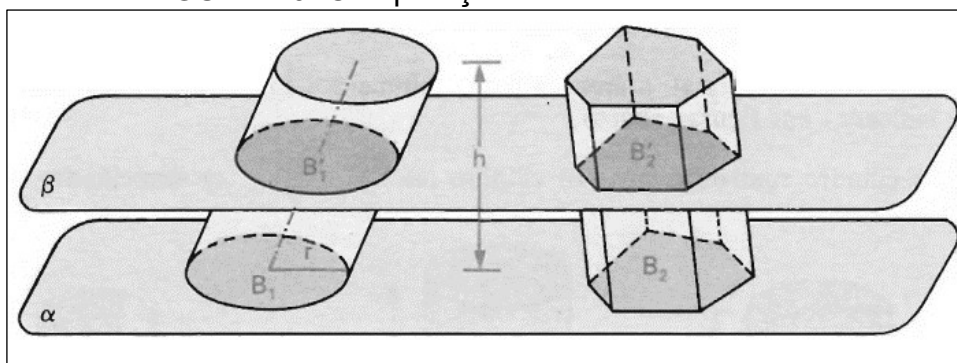
O volume do cilindro pode ser encontrado através do cálculo do produto entre a área da base pela altura do mesmo, como já foram mostradas anteriormente a área da base pode ser calculada por $A_B = \pi.R^2$ enquanto a altura do cilindro é a mesma altura da planificação da área lateral e é denominada por h . Assim o volume do cilindro pode ser calculado através da fórmula $V = A_B.h$, pois considera-se o volume as repetições em ordem das seções congruentes (círculos) até determinada altura, reescrevendo a fórmula tem-se $V = \pi.R^2.h$.

A demonstração dessa fórmula pode ser encontrada em Dolce & Pompeo (2005, v.10, p. 220 e 221) apresentou-se tal demonstração a seguir:

Consideremos um cilindro de altura h e área de base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$.

Suponhamos que os dois sólidos têm bases num mesmo plano α e estão num dos semi-espacos determinados por α .

FIGURA 10: Comparação das bases dos sólidos



Fonte: DOLCE & POMPEO (2005, v.10, p. 221)

Qualquer plano β paralelo a α , que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as secções (B'_1 e B'_2 , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, \quad B'_2 = B_2, \quad B_1 = B_2 = B) \Rightarrow B'_1 = B'_2$$

Então pelo princípio de Cavalieri “Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes)” Dolce & Pompeo (2005, v.10, p. 165), o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

Como o volume de ambos pode ser expresso por

$$V = B \cdot h$$

E a base definida do cilindro anteriormente é dada por

$$B = A_B = \pi \cdot R^2$$

Então se tem:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

4. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Após amplos estudos e pesquisas realizados para elaborar a dissertação com o título “Uma sequência didática para o ensino do cilindro circular reto” foi possível construir através de escolhas metodológicas de ensino já testadas em outros estudos e validadas através de bons resultados, uma metodologia de ensino utilizando uma sequência didática para o ensino de cilindro circular reto envolvendo as UARC's de Cabral.

A Sequência Didática elaborada foi aplicada de acordo com as teorias envolvidas buscando aproximar ao máximo a realização do experimento envolvendo cilindros das teorias já citadas. Através das análises realizadas dos dados obtidos com o desenrolar do experimento verificou-se que houve indícios de aprendizagem que proporcionaram para os alunos envolvidos o ganho de conhecimento de acordo com os objetivos estabelecidos, mostrando a proficiência das teorias apresentadas na dissertação base desse material.

Ao passar pelo processo de ensino usado em tal sequência didática, foram possíveis realizar algumas reflexões como, o impacto inicial dos alunos, que geralmente são ensinados de forma tradicional e ao se depararem com uma tendência metodológica diferenciada sentem um desequilíbrio inicial, que deve ser sanado com as orientações iniciais do professor as quais direcionam os estudantes aos procedimentos que devem realizar.

Portanto aconselha-se a leitura dos capítulos 2 e 5 da dissertação fomentadora desse produto para usar o material aqui disponibilizado. Outras sequências didáticas envolvendo cilindros podem ser elaboradas a partir das metodologias aqui utilizadas, logo fica em aberto a utilização desse trabalho a estudantes de graduações em matemática e professores se utilizarem desse produto com a possibilidade de posteriores contribuições e continuidades de estudos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas**. EMR-RS - ANO 10 - 2009 - número 10 - v.1. Disponível em: http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/viewFile/25/35. Acesso em 22 de julho de 2017 às 09:45.

BALDISSERA, Altair. **A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos**. Santa Terezinha de Itaipu – Pr. 2008, Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_altair_baldissera.pdf. Acesso em 15 de julho de 2017 às 16:34.

BERMEJO, Ana Priscila Borges. MORAES, Mônica Suelen Ferreira. COSTA, Acylena Coelho. **Análise do ensino de geometria espacial**. X EGEM - Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí – RS: 02 a 05 de junho de 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_49.pdf. Acesso em 13 de julho de 2017.

BERNARDINI, Geferson. **Uma Atividade Didática Envolvendo Área e Volume do Cilindro e de Prismas**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de São Carlos, 2014

BEZERRA, Aluzimara Nogueira. **As isometrias nos azulejos de Belém: uma proposta de ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

BINOTTI, Andréa Magalhães. **Ensino Contextualizado de Área e Volume de Cilindro**. Dissertação (mestrado). São Carlos: UFSCar, 2016.

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. [S./l.]: [2017?] Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit_e.pdf. Acesso em: 27/04/2019 às 22:43

BRASIL. **PCN+**: Ciências Natureza. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 de maio de 2017 às 23:14

CABRAL, Natanel Freitas. **Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CABRAL, Tânia C B. COSTA, Luciano Andreatta Carvalho. BLAUTH, Augusto. **Aprendizagem em Geometria Espacial e em Geometria Analítica com o Uso de Sólidos Geométricos e Softwares Educativos: Contribuições da Teoria dos Grupos Operativos**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em:

http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5898_3163_ID.pdf. Acesso em: 21/12/2017.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. (tradução Maria Cristina Bonomi) São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. v.2. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. 8. ed. – São Paulo: Atual, 2005

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 6. ed. – São Paulo: Atual, 2005

GÓES, Maria Cecília Rafael. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. *Cadernos Cedes*, ano XX, SciELO Brasil, n. 50, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050>. Acesso em: 30/08/2019 às 21:25.

INEP, MEC. **ENEM: Provas e gabaritos**. 2º dia. 2014. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/CAD_ENEM_2014_DIA_2_05_AMARELO.pdf. Acesso: 17/01/2020 às 19:03.

INEP, MEC. **ENEM: Provas e gabaritos**. 2º dia. 2016. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf. Acesso: 17/01/2020 às 18:30.

INEP, MEC. **ENEM: Provas e gabaritos**. 2º dia. 2018. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf. Acesso: 17/01/2020 às 18:31.

INEP, MEC. **ENEM: Provas e gabaritos**. 2º dia. 2019. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2019/provas/BAIXA_PL_2_DIA_CADERNO_5_AMARELO.pdf. Acesso: 17/01/2020 às 18:32.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com Geometria Analítica**. v.2. 3ª ed.– São Paulo: HARBRA Ltda. 1994.

MACHADO, Helena Beatriz Witte Cruz. **O Uso de Recursos Tecnológicos Como Auxiliares na Cognição Espacial**. Dissertação (Mestrado Profissional - Profmat) Instituto de Matemática Pura e Aplicada Programa de Pós-Graduação em Matemática – IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

MACHADO, Ronaldo Azevedo. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: Um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio**. Dissertação (mestrado), Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

MAINGUENEAU, Dominique. **Novas tendências em análise do discurso**. Tradução Freda Indursky; revisão dos originais da tradução Solange Maria Ledda Gallo, Maria da Glória de Deus Vieira de Moraes. Campinas, SP: Pontes: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 3ª edição, 1997.

MOREIRA, Daniel Monteiro da Silva. **A Aprendizagem de Geometria Espacial, Cálculo de Volume Segundo os Alunos do 2º ano do Ensino Médio**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016, Disponível em: http://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4967_4290_ID.pdf. Acesso em: 17/07/2018 às 23:08.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

PARÁ, Governo do Estado. **SisPAE 2016 Sistema Paraense de Avaliação Educacional**. Revista do Sistema Paraense de Avaliação Educacional Referências e Resultados. Belém. SEDUC – PA, 2016. ISSN 2358-0283. Disponível em: https://sispae.vunesp.com.br/Arquivos/Revistas2016/SumarioExecutivo_2016.pdf Acesso em: 12/05/2019 às 09:22.

PCN. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**– Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 24/11/2018 às 19:17

SANTOS, Waldiza Lima Salgado. **O ensino de volume de sólidos por atividades**. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, Mestrado em Educação, Belém, 2012.

SCHMITT, Tassiana Trucollo. **Dificuldades No Ensino-Aprendizado Da Geometria: Por Que Os Educadores Não Ensinam E Os Educandos Não Aprendem?** VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil. 2017. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6771/4444>. Acesso em: 21/12/2017.

SCOTT, P. MORTIMER, E. F. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino**. *Investigações em ensino de ciências*, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/562/355>. Acesso em: 22/08/2019 às 21:57

SILVA, Marina Andrade Alves. BRAZ, Lúcia Helena Costa. **Geometria Espacial no Ensino Médio: Investigação Sobre as Dificuldades no Ensino-Aprendizagem**. VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil, 2017. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6783/3311>. Acesso em: 21/12/2017.

SOUZA, Joamir Roberto. **Novo olhar matemática**. v.3. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto. GARCIA, Jaqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**. 2º ano – 1ª ed – São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, Loana Araújo. **Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o Geogebra 3D**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

TOMIO, Daniela. SCHROEDER, Edson. ADRIANO, Graciele Alice Carvalho. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico cultural**. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, Set./Dez. 2017, ISSN on-line: 1982-9949. Disponível em: <https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/download/9525/pdf>. Acesso em: 05/02/2019 às 22:32.

VASSALLO NETO, Rafael. **Reflexões Sobre Aprendizagem Significativa em Geometria**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016, Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5051_2734_ID.pdf. Acesso em: 11/07/2018 às 23:08.

YOUSSEF, Antonio Nicolau. SOARES, Elizabeth. FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática; ensino médio, volume único**. São Paulo: Scipione, 2005.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. trad. Ernãni E. da F. Rosa - Porto Alegre: ArtMed, 1998.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem