Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Adriano Bechara De Oliveira
Roberto Paulo Bibas Fialho

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: Uma sequência didática

Belém/PA
2020

Adriano Bechara de Oliveira
Roberto Paulo Bibas Fialho

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: Uma sequência didática

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.
.

Belém/PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

OLIVEIRA, Adriano Bechara de & FIALHO, Roberto Paulo Bibas. GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: Uma sequência didática. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Sequência Didática; Geometria Espacial de Posição.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

O estudo de geometria é a parte do ensino em que analisamos e estudamos as formas e características dos entes planos e espaciais, estando presente na vida do ser humano desde a antiguidade, segundo Boyer (1996, p. 5), “o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem”.

Citando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre a importância do ensino de geometria e as suas contribuições para a aprendizagem do aluno:

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Segundo Lorenzatto (1995, p. 5), sobre a importância e justificativa do ensino de geometria, temos que: “A necessidade do ensino de Geometria pelo fato de que, um individuo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas". Ainda segundo Lorenzatto (1995, p. 5), "Não poderão ainda se utilizar da Geometria como facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano”.

No ambiente educacional em nossa realidade atual, vários métodos de ensino vem sendo pesquisados e aplicados como é o caso do uso das tecnologias. Podemos citar alguns exemplos dessas tecnologias diversas que estão sendo utilizadas como facilitadores no ensino e aprendizagem dos alunos, como os computadores, os softwares, tablets e celulares, citando Rancan (2011, p. 17), “as crianças de hoje percebem o fluxo constante de informações com as quais convive e, por consequência, como este novo mundo tecnológico está transformando a maneira pela qual aprendem”.

As Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) na educação torna-se uma possibilidade de recurso didático, que pode tornar as aulas mais atrativas, fazendo com que os alunos construam o conhecimento de uma forma diferenciada. Mas para que esses recursos didáticos sejam realmente utilizados é necessário que tanto as escolas como os professores saibam empregar e aplicar todo o potencial desses recursos, com objetivos concretos e justificativas sólidas para a construção do processo de ensino e aprendizagem. Para Imbérnom (2010, p.36):

> Para que o uso das TIC signifique uma transformação educativa que se transforme em melhora, muitas coisas terão que mudar. Muitas estão nas mãos dos próprios professores, que terão que redesenhar seu papel e sua responsabilidade na escola atual. Mas outras tantas escapam de seu controle e se inscrevem na esfera da direção da escola, da administração e da própria sociedade.

Demo (2008), sobre as Tecnologias de Informação e Comunicação, ressalta que: “Toda proposta que investe na introdução das TICs na escola só pode dar certo passando pelas mãos dos professores. O que transforma tecnologia em aprendizagem, não é a máquina, o programa eletrônico, o software, mas o professor, em especial em sua condição socrática.”

As tecnologias voltadas para o ensino de matemática e geometria surgiram como uma forma alternativa que o professor, com o papel de mediador do conhecimento, encontra para dinamizar os conteúdos em sala de aula e também fazer com que os alunos venham a ser incentivados a buscar e construir o conhecimento. Para Gladcheff, Zuffi & Silva (apud PACHECO e BARROS, 2013, p.8), a utilização de softwares em aulas de matemática no ensino pode consentir diversos objetivos: ser fonte de informação, auxiliar o processo de construção de conhecimentos, ampliar a autonomia do raciocínio, da reflexão e da criação de soluções.

Diante do exposto, apresentamos a presente sequência didática para o ensino de geometria de posição com ênfase no ensino de reta e plano como produto educacional resultado da pesquisa desenvolvida de Bechara (2019). A pesquisa teve como objetivo utilizar o *software* geogebra como ferramenta para auxiliar o ensino e aprendizagem de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. A metodologia empregada foi do tipo experimental, utilizando as tecnologias de informação e comunicação, em que foi aplicado uma sequência didática utilizando o software geogebra como ferramenta auxiliadora à luz da Engenharia Didática.

Sendo assim, tivemos a finalidade de colaborar com o desenvolvimento do o ensino e aprendizagem de geometria espacial de posição e o produto apresenta uma proposta de atividades envolvendo os principais conceitos, postulados e propriedades dos tópicos de reta e plano utilizando como metodologia as tecnologias de informação e comunicação, como uma forma diferenciada para apresentar e ensinar os alunos.

2. ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

A revisão de estudos possui a finalidade de apresentar estudos e pesquisas realizadas anteriormente, como forma de propor métodos e propostas, com a intenção de levantar hipóteses e resolver problemas identificados no decorrer do ensino. O foco principal desse levantamento de estudos é o ensino de geometria espacial de posição, onde cada referência verificada utilizada, auxiliou no desenvolvimento da pesquisa. Citando Vosgerau e Romanowski:

> Os estudos de revisão consistem em organizar, esclarecer e resumir as principais obras existentes, bem como fornecer citações completas abrangendo o espectro de literatura relevante em uma área. As revisões de literatura podem apresentar uma revisão para fornecer um panorama histórico sobre um tema ou assunto considerando as publicações em um campo. Muitas vezes uma análise das publicações pode contribuir na reformulação histórica do diálogo acadêmico por apresentar uma nova direção, configuração e encaminhamentos. (VOSGERAU e ROMANOWSKI 2014, p. 167)

O estudo de Geometria Espacial de Posição possibilita o desenvolvimento da capacidade de abstração, auxilia na resolução de problemas práticos e permite reconhecer propriedades das formas geométricas. Porém citando Souza Filho e Brito (2006) que confirmam que na atualidade o ensino de Geometria é feito de forma mecânica, fazendo com que o aluno perca o interesse pelo conhecimento, pois ele não encontra um significado para a compreensão do conteúdo.

Segundo Lorenzato (1995) a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Segundo esse autor, são inúmeras as causas que provocam esse acontecimento, uma delas é a falta de conhecimentos específicos da Geometria pelos próprios professores, ou seja, o professor não poderá ensinar o que ele nunca aprendeu.

As dissertações utilizadas tiveram como critérios, a metodologia de pesquisa, o conteúdo de geometria, os axiomas, as propriedades e as atividades relacionadas a geometria espacial de posição. As palavras digitadas como procedimento de pesquisa foram: Sequência didática em geometria; Ensino de ponto, reta e plano; Geometria Espacial de Posição. Os documentos foram obtidos no banco de teses e dissertações da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e no Google Acadêmico.

As dissertações foram divididas nas seguintes sessões: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Uso das tecnologias da informação e comunicação, onde foi destacado cada proposta , metodologia, objetivo, questão de pesquisa, desenvolvimento, resultado e conclusão de cada pesquisa.

O desenvolvimento deste estudo consistiu através de algumas etapas: busca de material para a revisão de estudos, análise do material para a inclusão ou exclusão através de critérios pré estabelecidos, divisão dos trabalhos incluídos em categorias e análise das pesquisas onde foram destacados propostas, metodologias, objetivos, questões de pesquisa, desenvolvimento, resultados e conclusões de cada pesquisador estudado.

A pesquisa foi elaborado a partir de uma revisão da literatura no período entre 1998 e 2017, visando a busca de obras nacionais e fazendo um panorama e evolução entre estudos clássicos e os mais recentes sobre o tema através do período de 20 anos. As palavras chaves utilizadas foram " Sequência didática em geometria" ," Ensino de ponto, reta e plano", " Geometria Espacial de Posição". Foram critérios de exclusão: trabalhos publicados antes de 1998 e os que não se referiam a geometria espacial de posição.

Na busca realizada na ferramenta Google Acadêmico, na página oficial do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT e nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, foram encontrados 8 trabalhos entre artigos e dissertações. Após uma breve leitura e analise dos textos, notou - se que alguns não preenchiam os critérios deste estudo, pois contemplavam outros tópicos da geometria espacial e foram excluídos. Foram selecionados 5 dissertações que preencheram os critérios proposto, foram lidos na íntegra (Quadro 1), onde foram categorizados em três linhas de pesquisa: Resolução de problemas; Modelagem Matemática e Uso das tecnologias da informação e comunicação. E como etapa final da revisão as pesquisas foram analisadas minuciosamente e destacados os resultados e conclusões.

Quadro 1 - Textos Selecionados

Titulo	Fonte	Categoria	Autores	Ano
Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração: Uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Resolução de Problemas	GOVÊA, Filomena	1998
Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geométrica	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Resolução de Problemas	MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de	1999
Demonstrações em geometria euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para seu ensino	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Modelagem Matemática	FERREIRA, Fernanda Aparecida	2008
Geometria Espacial de Posição: Do Concreto ao Raciocínio Dedutivo com uma Passagem pela Tecnologia	Dissertação-Universidade Federal de Santa Maria	Uso das tecnologias da informação e comunicação	GOMES, Rafael Oliveira de	2016
Uso do Gegebra 3D no ensino de Geometria Espacial	Dissertação-Universidade Federal de Juiz de Fora	Uso das tecnologias da informação e comunicação	SOUZA, Grabriel Moreno Ferreirda de	2017

Fonte: Autor (2018)

Pesquisas sobre geometria espacial de posição ainda encontra-se escassa, pois como é o tópico inicial de geometria espacial, é explorada de maneira intuitiva, fazendo com que as pesquisas foquem em outros tópicos da geometria espacial. Então as cinco dissertações selecionadas focam o ensino e aprendizagem de geometria espacial de posição, explorando axiomas, teoremas e propriedades que são necessárias para todo o estudo posterior da geometria espacial.

3. USO DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Os métodos para o ensino de matemática vem se ampliando e modificando com o passar do tempo, como forma de dinamizar o processo de ensino e aprendizagem e como forma de minimizar a dominância do ensino de forma tradicional, podemos identificar essas mudanças a partir do que é citado nos documentos dos parâmetros curriculares nacionais (PCN), segundo o documento:

> [...] no ensino de matemática devesse "identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.(BRASIL, 2001, p.37).

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) na educação surge como uma ferramenta potencializadora no processo de ensino e aprendizagem de alunos e professores, de forma que a sociedade de forma geral está utilizando a tecnologia para a resolução de problemas do cotidiano. Citando Tornaghi (2010), de forma resumida o autor nos mostra como se deu o inicio do uso das tecnologias na educação nas escolas públicas brasileiras.

> O uso de tecnologias na escola pública brasileira inicio-se timidamente, com projetos pilotos em escolas no final de 1980. Nesses projetos, algumas experiências ocorriam com o uso do computador em atividades disciplinares e em muitas outras extracurriculares e ocorriam em horários diferentes daquelas em que os alunos frequentavam a escola. Nas duas situações, era possível observar que as práticas apresentavam -se com base em uma das seguintes abordagens: (i) instrucionista, na qual o computador pode ser usado na educação como máquina de ensinar ou como máquina para ser ensinada; ou (ii) construcionista, por meio da qual o aluno constrói, por intermedio do computado, o seu próprio conhecimento (TORNAGHI, 2010, p.145).

Podemos ainda observar nos documentos do PCN, a utilização da tecnologia faz com que alunos e professores tenham uma oportunidade de investigar e explorar, nas aulas de matemática, os tópicos que possibilitam o favorecimento da argumentação e validação de resultados , tornando - se uma forma para o despertar do interesse do aluno nas práticas em sala de aula e também nas práticas sociais.

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46).

A utilização das TIC como um recurso didático possibilita a adequação às diferentes necessidades e individualidades de cada aluno, oportunizando o professor a criar ambientes virtuais de aprendizagem de forma diferenciada e de acordo com a necessidade de cada assunto a ser ensinado, fazendo uma contribuição para a assimilação dos conteúdos. A internet e o computador são ferramentas que atraem a atenção do aluno, proporcionando a habilidade de captar e assimilar as informações. Vogt e Soares (2016, p.5) relatam que:

> É preciso considerar que as tecnologias - sejam elas novas (como o computador e a Internet) ou velhas (como o giz e a lousa) condicionam os princípios, a organização e as práticas educativas e impõem profundas mudanças na maneira de organizar os conteúdos a serem ensinados, as formas como serão trabalhadas e acessadas as fontes de informação, e os modos, individuais e coletivos, como irão ocorrer as aprendizagens.

Segundo Valente (1993), afirma que o computador tem que ser utilizado como uma nova ferramenta educacional e não apenas como uma maquina de ensinar, pois os alunos precisam buscar e usar as informações que os norteiam, ao invés de memorizar as informações. O computador torna- se cada vez mais uma ferramenta que favorece os alunos no desenvolvimento do raciocínio e da reflexão, através da interação e manipulação da ferramenta, há a possibilidade no desenvolvimento da capacidade do aluno em buscar, selecionar a informação e solucionar os problemas de forma independente.

Ainda em concordância Valente (2008), observa que a escola deveria utilizar-se cada vez mais das tecnologias, para que os alunos pudessem aprender a se expressar através do uso dessa tecnologia, pois ao fazer essa integração o processo de ensino e aprendizagem torna-se mais atrativa e significativa, promovendo a conquista de novos conhecimentos que permite o aluno a inserção no contexto de seu cotidiano. Esses recursos estão a disposição do professor para auxiliar em sua pratica pedagógica, sendo um facilitador do entendimento do aluno, com isso os professores devem estar preparados e capacitados na utilização desse recurso para que os objetivos sejam atingidos.

> Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e *softwares* e também qual é seu potencial, quais são os seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essa tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professore, têm um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional (VALENTE, 2008, p.76).

Neste contexto cabe ao professor criar as situações para desenvolver a aprendizagem do aluno, desenvolvendo atividades com o objetivo de construir o conhecimento do aluno, ao invés de apenas transmitir uma informação, então ao utilizar um *software*, o professor tem que estar preparado e familiarizado com a tecnologia que irá utilizar, preparando as atividades com antecedência relacionando a tecnologia com o tópico estudado, citando Valente (1999), caso o professor não esteja preparado em utilizar o recurso para desafiar o aluno, não será a tecnologia quem irá cumprir este papel. Outro papel importante do professor na construção do conhecimento do aluno, é a necessidade de se colocar no lugar do educando e de como a atividade desenvolvida será impactante na construção do conhecimento.

> No seu trabalho cotidiano em sala de aula, alguma vez já parou para pensar como o seu aluno aprende? Ou, ao contrário, você se preocupa apenas no "como ensinar", ou seja, na criação de estratégias que favoreçam a transmissão do conhecimento? Lembre-se de que aprendizagem é um processo individual e social que a pessoa constrói na interação do com o meio e com o outro. Daí a importância das interações e de situações que promovam a reflexão, a tomada de consciência e a reconstrução do conhecimento (TORNAGUI, 2010, p.42).

Em concordância, os PCN (1998), destacam o papel do professor e de seu poder de decisão de quando e como será utilizado as tecnologias em sala de aula e que o professor também tem como papel, fazer a ponte entre o conhecimento e o aluno. Segundo o documento: "O professor é sempre responsável pelos processos que desencadeia para promover a construção de conhecimentos, e nesse sentido é insubstituível". (BRASIL, 1998, p. 155).

O uso eficiente da informática educativa, aliado ao incentivo da escola na parte estrutural, o professor com a formação adequada e o aluno motivado em aprender, possibilita e proporciona desde um entendimento mais profundo acerca dos campos conceituais até uma abertura para análise de possíveis erros que possam ser analisados e corrigidos pelo uso das tecnologias. Os *softwares* matemáticos são utilizados apenas como ferramentas para o auxílio do professor no ensino de conceitos para os alunos e, não como um substitutos, então o professor deve escolher e usar de forma adequada o *software* matemático, com o objetivo de buscar possíveis soluções para problemas no campo conceitual em que o aluno poderá apresentar e, proporcionar uma interação dos alunos com as novas tecnologias.

4. O SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um *software* livre, ou seja, o criador do *software* disponibiliza de forma gratuita o programa para qualquer usuário que deseje utilizá-lo. Ele possui um sistema de Geometria Dinâmica, permitindo que a pessoa que utilize o programa realize construções e insira equações e coordenadas e fazendo alterações quando necessárias.

O Geogebra foi criado e desenvolvido por Markus Hohenwater, da Universidade Austríaca de Salzburg em 2001, possui a função de ferramenta de ensino e aprendizagem de matemática. Atualmente o *software* encontra – se na versão 6.0.523.0, sendo aplicativo multiplataforma, ele pode ser instalado em computadores com os sistemas operacionais *Windows*, *Linux* ou *Mac OS* e em *Smartphones* e *Tablets* com sistema Androide ou IOS. Disponível para download no link: http://www.geogebra.org/download.

> Geogebra é um *software* de matemática para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne **GEO**metria, ál**GEBRA** e cálculo. Recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o prêmio de *software* educativo Alemão e Europeu. (FERREIRA, 2010, p.03)

Segundo Vieira (2013), o *software* GeoGebra possui ferramentas de geometria, de álgebra e do cálculo. Fornece principalmente duas visões diferentes de um mesmo objeto matemático estudado, podendo ser visualizado na janela gráfica e na janela de álgebra. A janela de visualização gráfica é aonde os objetos são construídos, podendo ser editado a cor, espessura das linhas, medir ângulos, distâncias, entre outras funções. Na janela de álgebra é visualizado a representação algébrica do objeto construído na janela visualização gráfica.

A área de desenho há um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as suas construções geométricas, podendo ser alternado entre a janela 2D e a janela 3D, de forma simultânea aparecem as coordenadas que indicam as equações correspondentes na janela de álgebra.

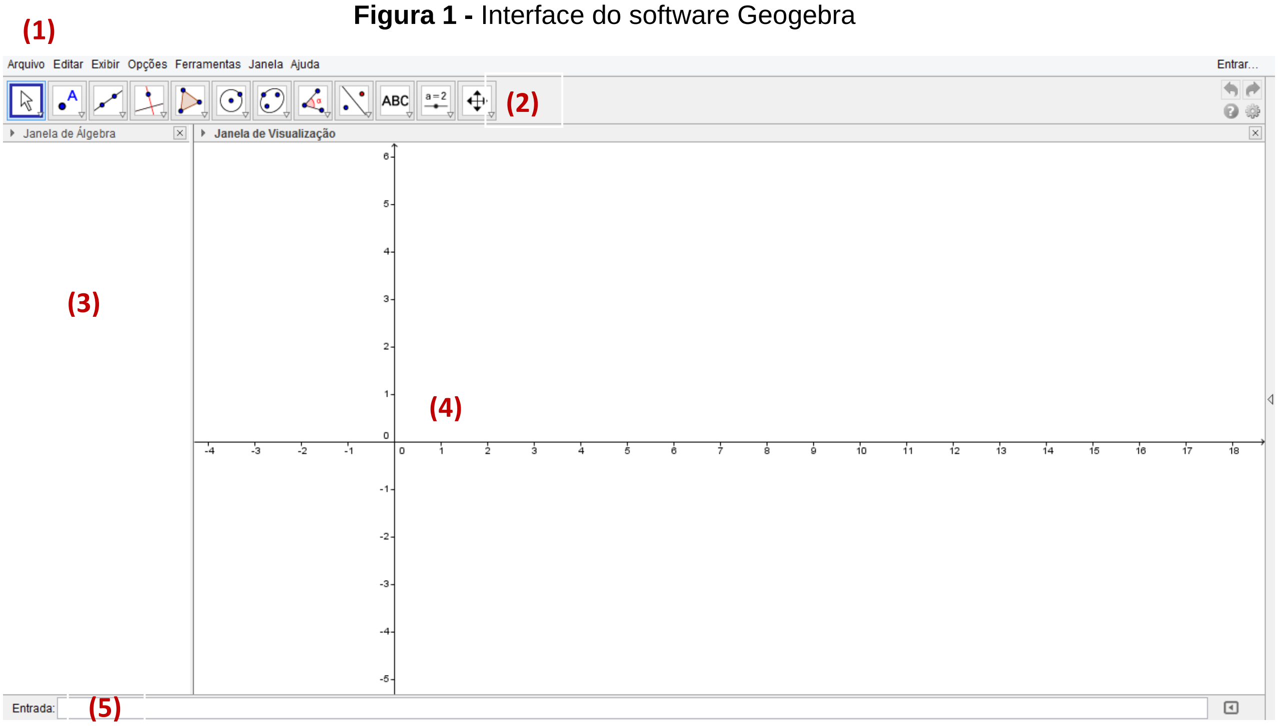
O campo de entrada de comandos é aonde são escritas as coordenadas, equações, comandos e funções, e estes são mostrados na área de desenho.

Entre várias funções do *software*, pode – se construir objetos como planilhas, pontos, vetores, segmentos, retas, figuras planas, figuras espaciais, polígonos, secções cônicas, coordenadas cartesianas e polares, gráficos de funções e curvas parametrizadas, o cálculo de derivadas e integrais, podendo ser manejados de forma dinâmica de tal forma que suas propriedades são conservadas.

Na área educacional o uso do *software* permite os alunos testem e validem os problemas propostos pelo professor, possibilitando revisar ou buscar conceito de conteúdos anteriores de forma simples e dinamizada, permitindo a potencialização do ensino e aprendizagem. Citando Pereira (2012), que fez uma pesquisa utilizando o geogebra como ferramenta de ensino.

> O trabalho com as tarefas geométricas mediadas pelo *software* GeoGebra foi primordial para a consolidação de alguns conceitos ligados à circunferência, por exemplo. Os alunos tiveram a oportunidade de validar suas hipóteses, conjecturar sobre possíveis caminhos para a solução das tarefas e discutir de forma colaborativa suas soluções encontradas. A relação entre as conjecturas levantadas no transcorrer da pesquisa, evidenciou a recorrência dos alunos às tarefas anteriores ou a conceitos percebidos durante as plenárias, para dar continuidade à solução de uma tarefa nova a qual se debruçavam, desenvolver uma autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Contribuiu, também para revisar os conceitos de triângulos, circunferência, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento e retas paralelas, quando os mesmos apresentavam-se como conceitos necessários para transcorrer das soluções propostas. (PEREIRA, 2012, p.98).

Figura 1 - Interface do software Geogebra



Fonte: Geogebra (2019)

(1) Menu principal;

(2) Barra de ferramentas;

(3) Janela algébrica;

(4) Área de desenhos;

(5) Entrada de comandos.

5. GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

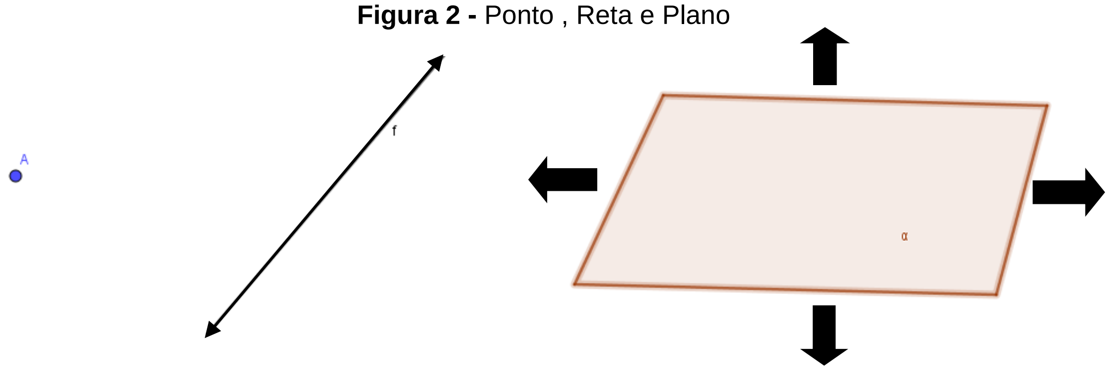
Neste sessão abordaremos os tópicos matemáticos e geométricos do tema central, que serão investigados através da construção e aplicação de uma sequência didática, com o objetivo de potencializar o ensino e aprendizagem do aluno em geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano.

5.1 Entes Geométricos e primeiros postulados

A Geometria que será abordada é a geometria Euclidiana, constituída por Euclides (300.AC), em sua obra Os Elementos, em que são destacados os primeiros entes geométricos (ponto, reta e plano) no qual essa geometria é constituída. Não precisam ser definidos. E a partir deles temos os postulados (ou axiomas) que tomamos como verdades lógicas, para depois construímos todas as propriedades e teoremas que embasam essa geometria. Como base dos tópicos abordados, das demonstrações e dos conceitos, utilizamos como referência Dolce (1993).

Os entes geométricos que vamos apresentar são o ponto, a reta e o plano, como são elementos primitivos da Geometria, os mesmos são adotados sem definição.

Figura 2 - Ponto , Reta e Plano



Fonte: Autor (2019)

O ponto é um elemento que não possui dimensão, mas é representado graficamente, como na figura 5, e podemos representar por uma letra maiúscula do nosso alfabeto; A reta é representado graficamente, como na figura 5, e podemos representar por uma letra minúscula do nosso alfabeto e sendo ela infinita nos dois sentidos; O plano não possui fronteiras, mas também é representado graficamente como está exposto na figura 5 e representado por uma letra do alfabeto grego.

A geometria espacial de posição e constituída através desses entes geométricos e suas construções, podemos definir o espaço como o conjunto de todos os pontos.

Assim, iniciaremos o estudo da geometria espacial de posição através de alguns postulados que estão relacionados com o ponto, a reta e o plano.

i. Postulado da existência

a) Em uma reta existe infinitos pontos, tanto sobre a reta, como externo a ela.

b) Em um plano existe infinitos pontos, tanto sobre o plano, como externo a ele.

ii. Postulado da determinação

a) Dois pontos distintos determina uma única reta que passa sobre eles.

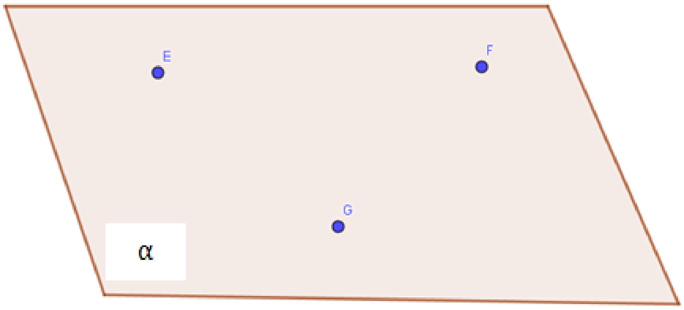
Figura 2 - Postulado da determinação

$$f = \overleftrightarrow{AB}$$

Fonte: Autor (2019).

b) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa sobre eles.

Figura 3 - Postulado da determinação



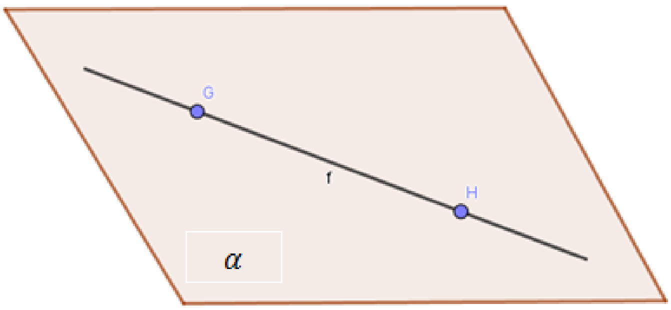
$$\alpha = (E, G, F)$$

Fonte: Autor (2019)

iii. Postulado da Inclusão

Se dois pontos estão determinam uma reta, e esses pontos estão contidos em um plano, então a reta também está contida no plano.

Figura 4 - Postulado da inclusão



$$(G \neq H, f = GH, G \in \alpha, H \in \alpha) \Rightarrow f \subset \alpha$$

Fonte: Autor (2019)

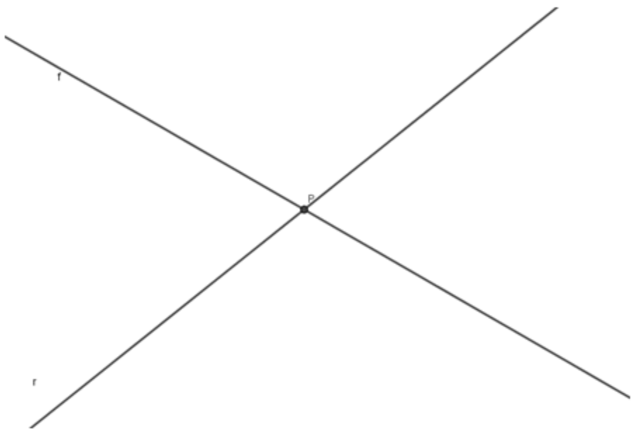
5.2 Posição relativa entre duas retas

Sejam r e f duas retas quaisquer , podem ser:

a) Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes, se, e somente se, elas possuem um único ponto de interseção.

Figura 5 - Retas Concorrentes



F

$$f \cap r = \{P\}$$

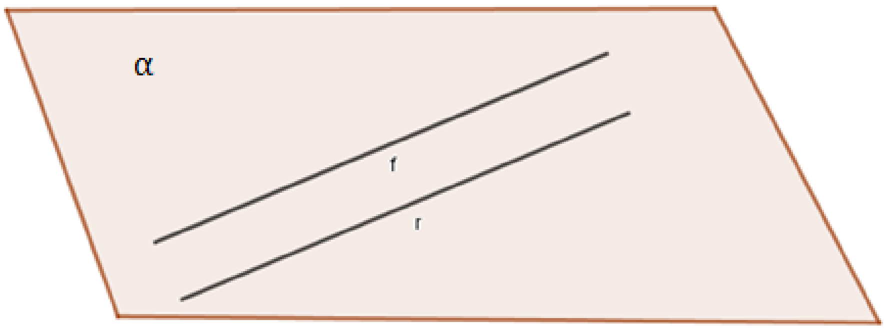
Fonte: Autor (2019)

b) Retas paralelas

Duas retas são paralelas, se e somente, ou são coincidente ou são coplanares sem possuir nenhum ponto de interseção.

Figura 6 - Retas Paralelas

$$r = f \Rightarrow r // f$$



$$(f \subset \alpha, r \subset \alpha \text{ e } f \cap r = \emptyset) \Rightarrow f // r$$

Fonte: Autor (2019)

5.3 Determinação do Plano

Apresentaremos os quatro modos em que se determina um plano.

a) A partir de três pontos não colineares.

Esse primeiro modo é postulado, então consideramos como verdade, obervado na figura 7.

b) Teorema 1: Determinação do Plano a partir de uma reta e um ponto externo a ela.

Se uma reta e um ponto externo a ela, ou seja, esse ponto não pertence a reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam P um ponto externo a r, e r uma reta qualquer determinados pelos pontos A e B, temos:

A, B e P pontos não colineares e utilizando o postulado da existência (ii), então A, B e P determinam um plano α.

Logo,

$\alpha = (A, B, P)$ então $A \subset \alpha$, $B \subset \alpha$ e $P \subset \alpha$

$A \neq B$; A e $B \in r$, implica que, $r \subset \alpha$. (1)

Podemos concluir que existe pelo menos o plano α construído por r e P.

Sejam r e P, a reta e o ponto externo a ela que determina o plano α, provemos que α é o único plano determinado.

Tomamos a existência de α e α' por r e P, temos que:

$\alpha = (r,P)$ e $A, B \in r$, implica que, $\alpha = (A, B, P)$

$\alpha' = (r,P)$ e $A, B \in r$, implica que, $\alpha' = (A, B, P)$,

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e P. (2)

Concluímos a partir de (1) e (2) que : $\exists \mid \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

■

c) Teorema 2: Determinação do Plano a partir de duas retas concorrentes.

Se duas retas são concorrentes, então as mesmas, determinam um único plano que as contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam r e s duas retas concorrentes, P o ponto em comum, tomemos dois, um ponto A em r e um ponto B em s, sendo esses pontos diferentes de P.

Sendo A, B e P pontos não colineares e utilizando o postulado da existência (ii), então A, B e P determinam um plano α.

Então,

$\alpha = (A, B, P)$; $A, P \in r$ e $A \neq P$, implica que, $r \subset \alpha$

$\alpha = (A, B, P)$; $B, P \in s$ e $B \neq P$, implica que, $s \subset \alpha$

Logo, pode existir pelo menos o plano α determinado pelas retas concorrentes r e s. (1)

Sejam r e s, a retas concorrentes e P o ponto em comum, que determina o plano α, provemos que α é o único plano determinado.

Tomamos a existência de α e α' por r e s, retas concorrentes, temos que:

α = (r,s) e A, P $\in$ r; B, P $\in$ s, com A $\neq$ B $\neq$ P , implica que, α = (A, B, P)

α' = (r,s) e A, P $\in$ r; B, P $\in$ s, com A $\neq$ B $\neq$ P , implica que, α' = (A, B, P)

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e s concorrentes. (2)

Concluímos a partir de (1) e (2) que : $\exists$ | α | r $\subset$ α e s $\subset$ α.

■

d) Teorema 3: Determinação do Plano a partir de duas retas paralelas.

Se duas retas são paralelas, de forma distinta, então as mesmas determinam um único plano que as contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam r e s retas paralelas e r $\neq$ s então temos que:

Por definição de retas paralelas, existe um plano α passando por r e s, pois as mesmas por definição, são coplanares. (1)

Tomamos a existência de α e α' por r e s, retas paralelas, e sejam os pontos A e B $\in$ r, com A $\neq$ B e o Ponto P $\in$ s, temos que:

α = (r,s); A, B $\in$ r , com A $\neq$ B e P $\in$ s, implica que, α = (A, B, P)

α' = (r,s); A, B $\in$ r , com A $\neq$ B e P $\in$ s, implica que, α = (A, B, P)

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e s paralelas. (2)

Concluímos a partir de (1) e (2) que : $\exists$ | α | r $\subset$ α e s $\subset$ α.

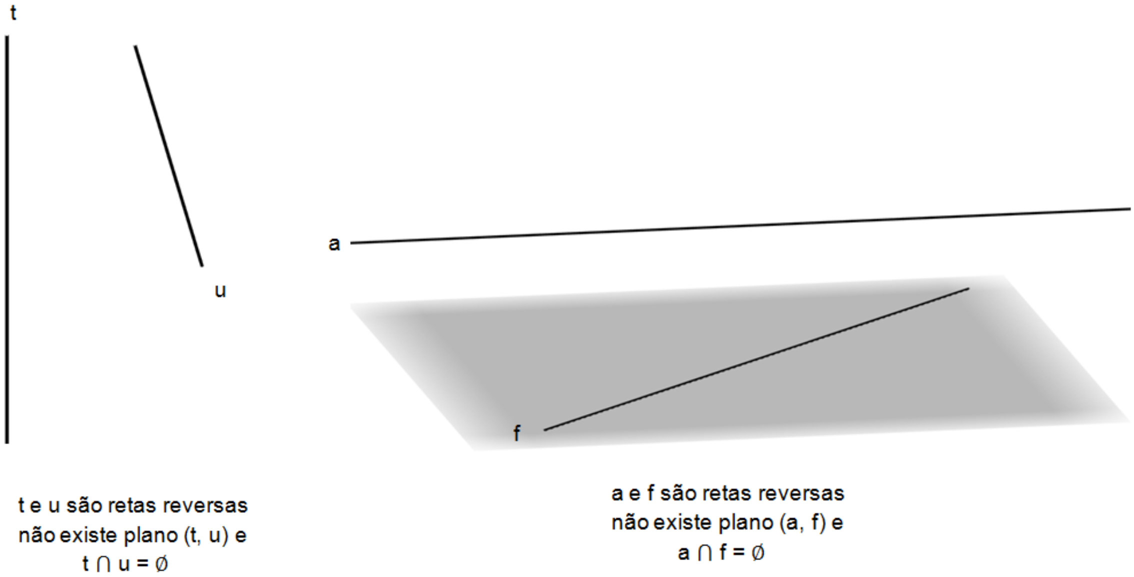
■

5.4 Definição de retas reversas

Podemos considerar duas retas reversas se, e somente se, elas não possuem nenhum plano que as cotenha e não são paralelas entre si.

Observando a figura 7, temos a exemplificação dessa definição.

Figura 7 - Retas Reversas



Fonte: Autor (2019)

5.5 Postulado da Interseção e planos secantes

O postulado da interseção nos diz que se existe dois planos distintos com um ponto em comum, então existe pelo menos outro ponto em comum.

O teorema da interseção nos diz que se existe dois planos distintos com um ponto em comum, então a interseção desses planos será única reta que passa pelo ponto em comum.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam dois planos α e β, e o ponto P sendo comum aos dois planos, temos que:

$\alpha \neq \beta$, com $P \in \alpha$ e $P \in \beta$, implica que, $\exists\, Q \neq P$, $Q \in \alpha$ e $Q \in \beta$ (Postulado da intercessão).

Se o que esta descrito acima for verdadeiro, implica que, $\exists\, i \mid i = PQ$, $i \subset \alpha$ e $i \subset \beta$ (Postulado da existência da reta).

Logo a reta i determinada pelos os pontos P e Q é comum aos planos.

Para demonstrarmos a unicidade, utilizaremos a técnica de demonstração chamada redução por absurdo.

Supondo que exista um ponto X tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$, temos que:

Como $X \notin i$ e pelo teorema 1 , temos um plano γ tal que , $\gamma = (X,i)$. Então podemos observar que:

$i \subset \alpha$, $X \in \alpha$, $\gamma = (i,X)$, implica que, $\gamma = \alpha$ (1)

$i \subset \beta$, $X \in \beta$, $\gamma = (i,X)$, implica que, $\gamma = \beta$ (2)

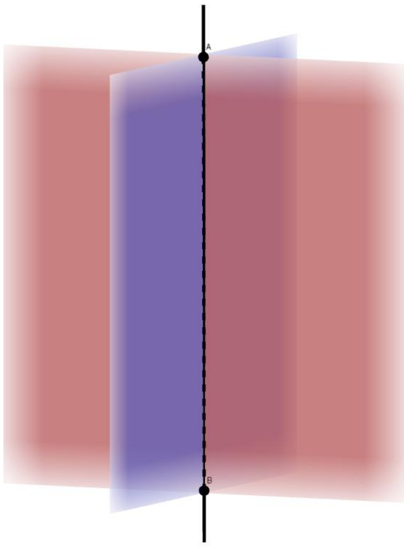
Comparando (1) e (2) temos que $\alpha = \beta$ e esses planos coincidem com o plano γ, o que se caracteriza um absurdo, pois a hipótese nos mostra que $\alpha \neq \beta$.

Logo, a reta i é a interseção dos planos α e β.

■

Dois Planos são secantes, quando os mesmos apresentam uma reta em comum, essa reta chamamos de interseção desses planos.

Figura 8 - Planos secantes



Fonte: Autor (2019)

5.6 Paralelismo de retas

Como já foi definido anteriormente, duas retas são paralelas quando são coincidentes ou quando não possuem nenhum ponto de interseção. Euclides apresentou em sua obra um postulado sobre o paralelismo.

Postulado: Por um ponto A fora de uma reta dada r passa uma única reta paralela s a essa reta dada.

Podemos também definir e demonstrar uma propriedade chama transitividade do paralelismo de retas.

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então todas as retas são paralelas entre si.

Demonstração:

Sejam três retas distintas e não coplanares r, s e t, temos que:

Pelo postulado das paralelas podemos concluir que r e s não possuem nenhum ponto de interseção.

Pelo teorema 3, as retas s e t determinam um plano β, r e t determinam um plano α, então $t = \alpha \cap \beta$.

Seja um ponto P em s, teremos por definição um plano γ, tal que, $\gamma = (r, P)$.

Os planos α e γ, que são distintos, possuem o ponto P em comum, então tomemos uma reta comum x, tal que:

$r = \beta \cap \gamma$, $x = \alpha \cap \gamma$, $c = \alpha \cap \beta$ e $r \,//\, t$, implica que, $r \,//\, x$ e $t \,//\, x$

Como o ponto P pertence a ambas as retas s e x e as mesmas são paralelas à reta t, podemos concluir, pelo postulado das paralelas que x = s.

Então $r \,//\, x$ e $x = s$, temos que $r \,//\, s$.

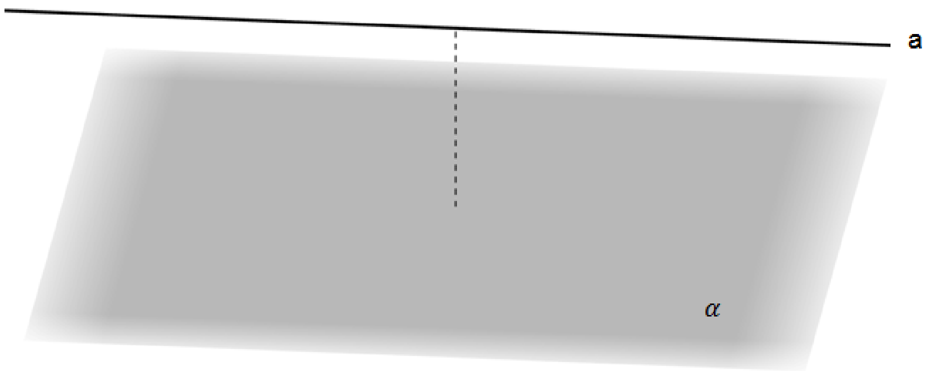
■

5.7 Paralelismo entre a retas e planos

Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, não possuírem nenhum ponto de interseção.

$a \,//\, \alpha$ se, somente se, $a \cap \alpha = \emptyset$.

Figura 9 - Reta "a" paralela ao plano α



Fonte: Autor (2019)

Para ocorrer a existência de retas e planos paralelos, faremos a demonstração de duas condições: a condição suficiente, a condição necessária.

a) Condição Suficiente

Se uma reta não está contida num plano qualquer e é paralela a uma outra reta que está contida nesse plano, então ela é paralela ao plano.

Demonstração:

Sejam a e b retas paralelas, e b esta contida em um plano α, temos que:

$a // b$, $a \cap b = \emptyset$, implica que, $\exists\ \beta = (a,b)$

$b \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$, implica que $b = \alpha \cap \beta$

Seja um ponto P, comum a reta a e o plano α, tal que:

$P \in a$ e $a \subset \beta$, implica que, $P \in \beta$

Se $P \in \beta$ e $P \in \alpha$, então $P \in a$ e $P \in b$, o que é absurdo, pois $a \cap b = \emptyset$.

Logo, a reta a e o plano α não tem pontos em comum, então a e α são paralelos.

■

b) Condição Necessária

Se uma reta é paralela a um plano, então uma reta contida nesse plano também é paralela a ela.

Demonstração:

Seja uma reta a, paralela a um plano α , temos que:

Se conduzimos pela reta a, um plano β que intercepta α em uma reta b, teremos a e b coplanares, pois estão em β, porém não possuem pontos em comum, então:

$a \cap \alpha = \emptyset$, $b \subset \alpha$, implica que, $a \cap b = \emptyset$. Logo, as retas a e b são paralelas.

■

5.8 Posições relativas entre uma reta e um plano

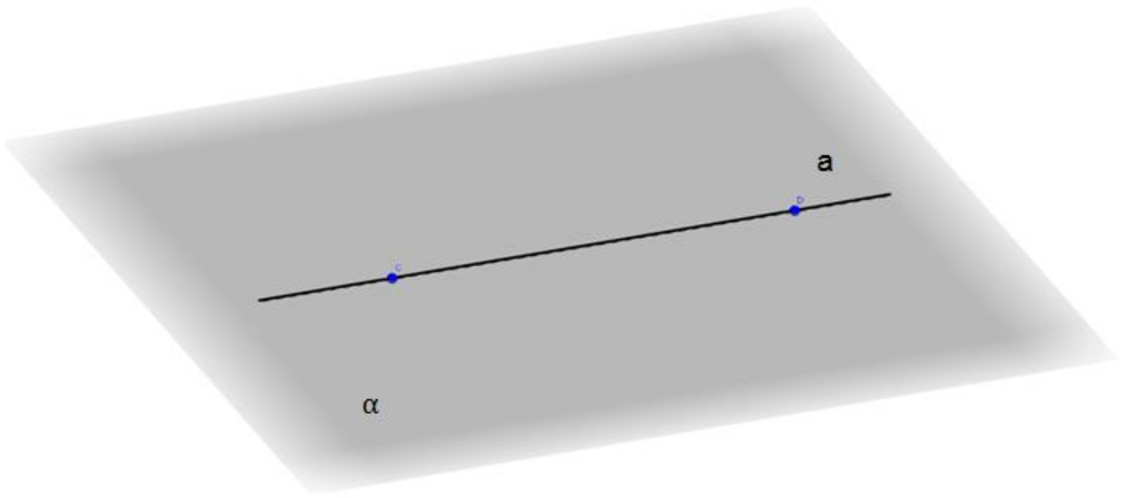
Uma reta e um plano podem assumir três posições relativas.

a) Reta contida no Plano

Ocorre quando a reta e o plano possuem ao mínimo dois pontos em comum.

$a \subset \alpha$, então $a \cap \alpha = a$.

Figura 10 - Reta contida no plano



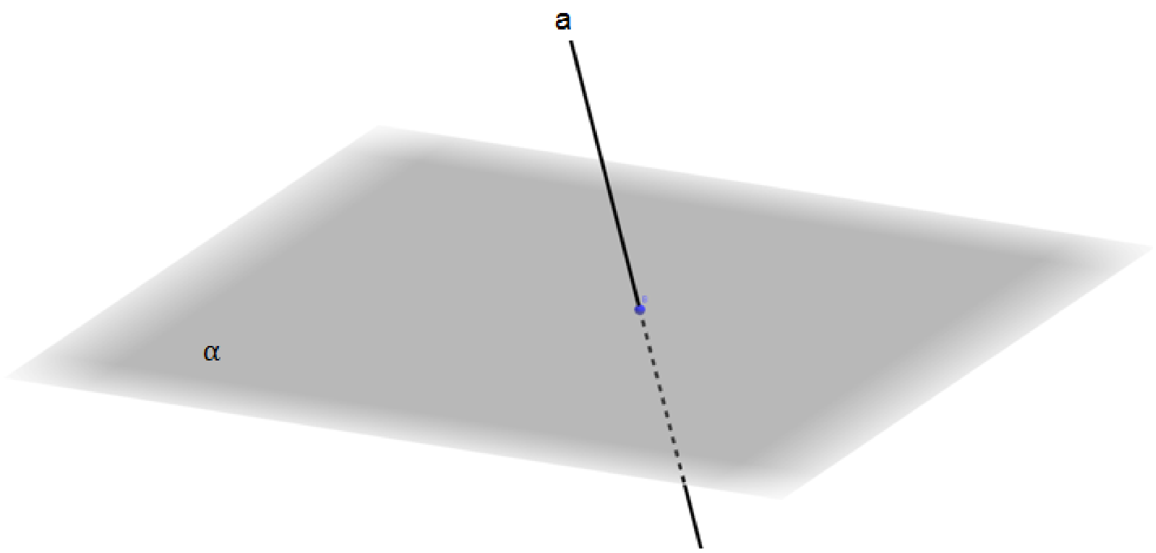
Fonte: Autor (2019)

b) Reta secante ao Plano

Ocorre quando a reta e o plano possuem apenas um ponto em comum.

$a \cap \alpha = B$.

Figura 11 - Reta secante ao Plano



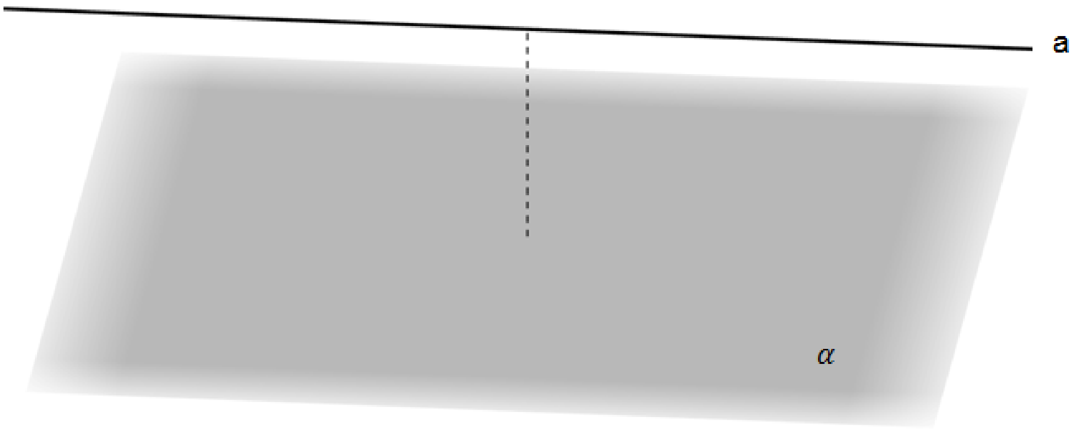
Fonte: Autor (2019)

c) Reta paralela ao Plano

Ocorre quando a reta e o plano não possuem nenhum ponto em comum.

a ∩ α = ∅.

Figura 12 - Reta paralela ao plano

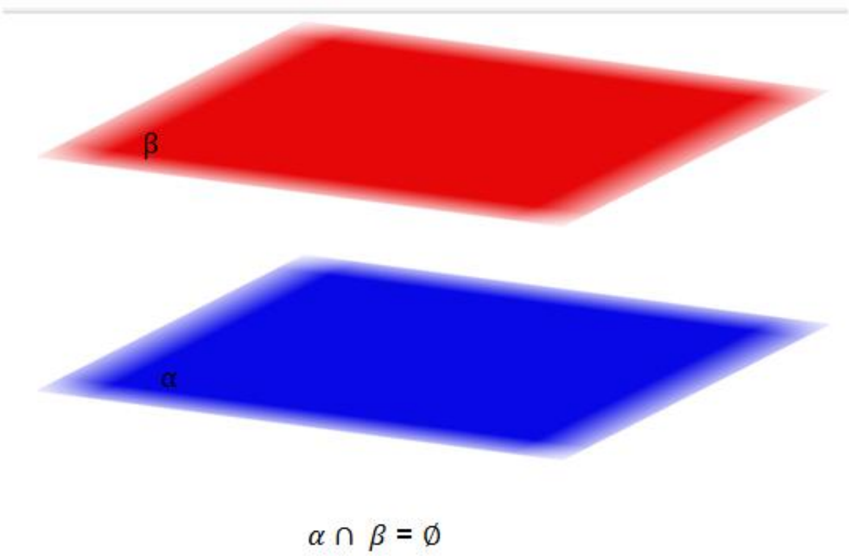


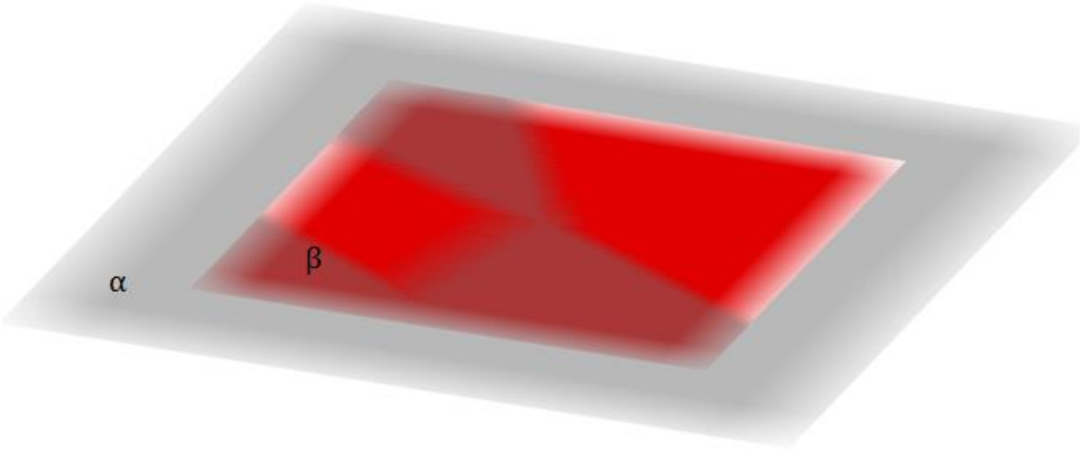
Fonte: Autor (2019)

5.9 Paralelismo entre os planos

Dois planos são considerados paralelos entre si se, e somente se, eles não possuírem nenhum ponto em comum ou os planos sejam coincidentes.

Figura 13 - Planos Paralelos





$\alpha = \beta$

Fonte: Autor (2019)

Para ocorrer a existência entre planos paralelos, faremos a demonstração de duas condições: a condição suficiente, a condição necessária.

a) Condição Suficiente

Se um plano contém duas concorrentes, e essas retas são paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Demonstração:

Seja os planos α e β distintos, e as retas a e b concorrentes e contidas em α. Se considerarmos uma reta i tal que $i = \alpha \cap \beta$, temos que:

$a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$ e $i = \alpha \cap \beta$, implica que, $a \parallel i$

$b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$ e $i = \alpha \cap \beta$, implica que, $b \parallel i$

Porém o as retas a e b por hipótese são concorrentes, e se ambas forem paralelas a i é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas. Logo, os planos α e β não possuem pontos em comum, então $\alpha \parallel \beta$.

$\blacksquare$

b) Condição Necessária

Se dois planos distintos são paralelos, e se um deles contém duas retas concorrentes, então essas retas são paralelas ao plano que não os contém.

A demonstração que prova a condição necessária é similar a demonstração da condição suficiente, com isso, a condição necessária se torna também suficiente.

5.10 Posição relativa entre dois planos

As posições entre dois planos foram expostas e seus teoremas de existências foram demonstradas nos tópicos anteriores, nesse ultimo tópico faremos um resumo expondo as três posições.

a) Planos Coincidentes:

São dois planos que não possuem nenhum ponto em comum e são iguais.

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

b) Planos Paralelos distintos

São dois planos que não possuem nenhum ponto em comum.

$\alpha \cap \beta = \emptyset$

c) Planos secantes

São dois planos que possuem uma reta em comum.

$\alpha \cap \beta = i$

6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Zabala (1998, p.18), a sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.Essas atividades são ligadas entre si com o objetivo de ensinar um conteúdo definido.

A organização das atividades deve ser feita através de um planejamento de acordo com os objetivos que o professor visa obter para alcançar a aprendizagem de seus alunos. Para que essa aprendizagem ocorra, é indispensável que essas atividades sejam práticas, lúdicas ou diferenciadas, de forma que o nível de dificuldade de cada questão seja elevado gradativamente, estimulando os alunos para conquistar cada desafio proposto e proporcionar a construção do conhecimento.

Zabala (1998) destaca que a construção de uma sequência didática com foco e objetivos claros, torna-se um caminho assertivo para a busca de melhoras nas praticas pedagógicas educativas. Com isso, o centro do interesse ao construímos uma sequência didática deve ser o aluno, então temos que levar em consideração as vivências do cotidiano e os conhecimentos anteriores para podemos instiga-los na busca da compreensão e desenvolvimento da aprendizagem significativa.

Em concordância Dolz e Schneuwly (2004) dizem que as sequências didáticas são instrumentos que auxiliam o professor no direcionamento de suas aulas e nas possíveis intervenções pedagógicas.

Para Pais (2002, p.102) “Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”.

Nesta busca de ferramentas para potencializar o ensino e aprendizagem do aluno, esta pesquisa apresenta uma sequência didática com o objetivo apresentar um conjunto de atividades para o auxilio do ensino de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. O conjunto de atividades é composto de 15 atividades em forma de uma sequência para o auxilio no ensino das definições, propriedades e postulados dos entes geométricos. Algumas das atividades desenvolvidas seguem como referência Sá(2009).

As atividades de 1 a 3 foram pensadas afim de proporcionar o conhecimento sobre o postulado da existência, a atividade 4 sobre o postulado da existência da reta, atividades de 5,6 e 7 destaca as posições relativas entre duas retas, atividades 8 a 10 proporcionam o conhecimento sobre o postulado da determinação do plano, atividades 11 e 12 a noção espacial do plano ao não possuir fronteiras e nem tamanho, atividades 13 a 15 contemplam as relações de posicionamento entre retas e planos, e planos e planos. Cada atividade é apresentada com uma análise a *priori*, onde é proposto os caminhos que os alunos devem seguir para construir o conhecimento geométrico e também o aluno poderá alternar, utilizando o software, entre uma visão 2D e uma visão 3D para desenvolver uma noção espacial através da manipulação das construções propostas.

Atividade 1

Atividade adaptada de Sá (2009)

Titulo: Retas por um ponto

Objetivo: Estudar a quantidade de retas que passam por um ponto.

Material : Geogebra.

Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de retas que passem por um ponto.

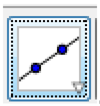
Questões: a) Quantas retas você construiu?

b) Poderia construir mais?

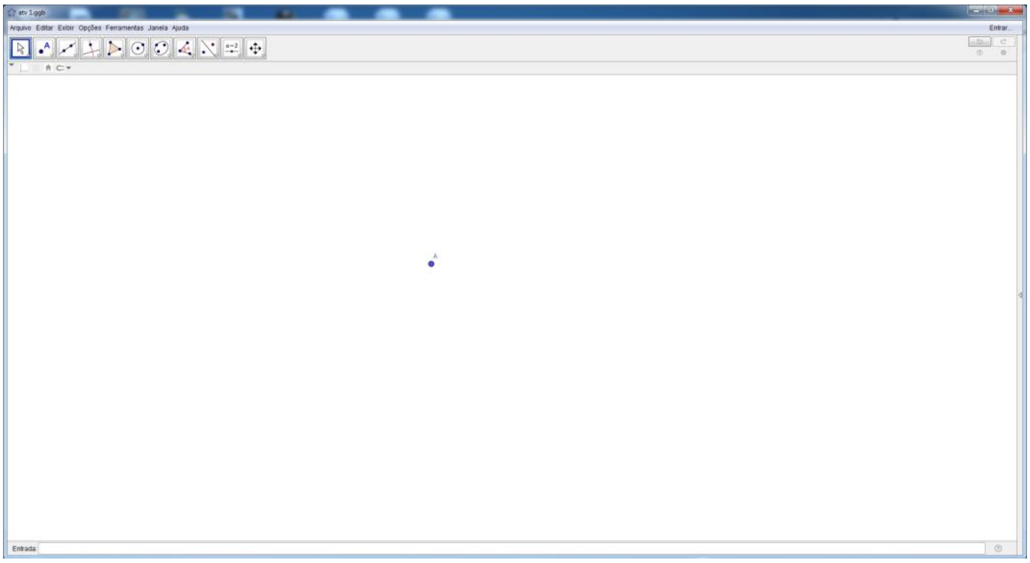
c) Quantas mais?

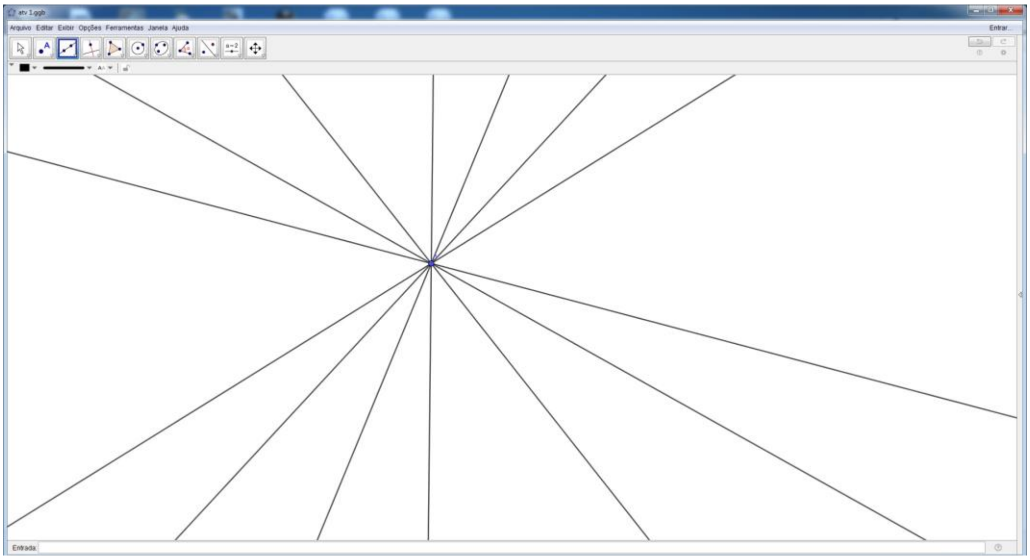
Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto 

e reta , após construir o ponto na tela do geogebra o aluno deverá marcar retas que passem por esse ponto.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de retas, não conseguindo abstrair o infinito numa figura limitada, devido a algum obstáculo epistemológico de infinito. Não se apropriando do conceito de reta, ponto e plano. Por isso cabe ao professor mediar a socialização entre os alunos sobre as quantidades que um conseguiu marcar, para que durante a socialização siga a definição de que em um ponto passam infinitas retas. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 2

Titulo: Pontos que existem numa reta

Objetivo: Verificar a quantidade de pontos sobre uma reta.

Material : Geogebra.

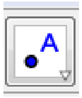
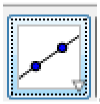
Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de pontos sobre a reta.

Questões: a) Quantos pontos você construiu?

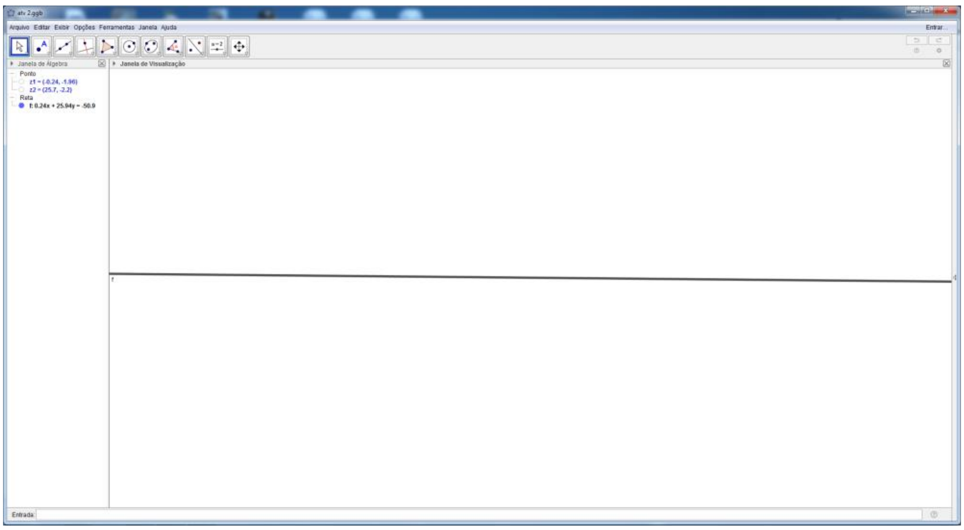
b) Poderia construir mais?

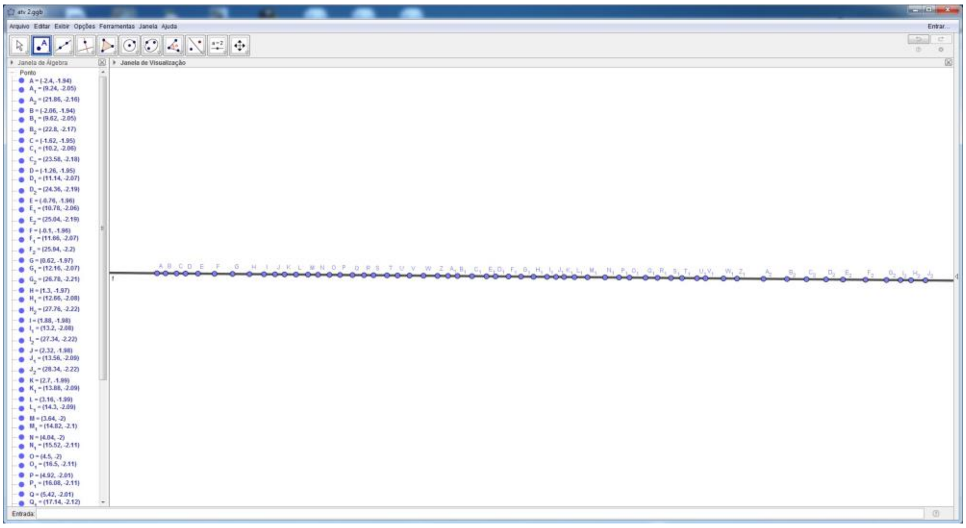
c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e reta , após construir a reta na tela do geogebra o aluno deverá marcar pontos sobre a reta.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos sobre a reta, a partir da socialização entre os alunos sobre as quantidades obtidas deverá aparecer a seguinte definição: sobre uma reta há infinitos pontos. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 3

Titulo: Pontos que existem fora de uma reta

Objetivo: Verificar a quantidade de pontos fora de uma reta.

Material : Geogebra.

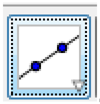
Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de pontos fora da reta.

Questões: a) Quantos pontos você construiu?

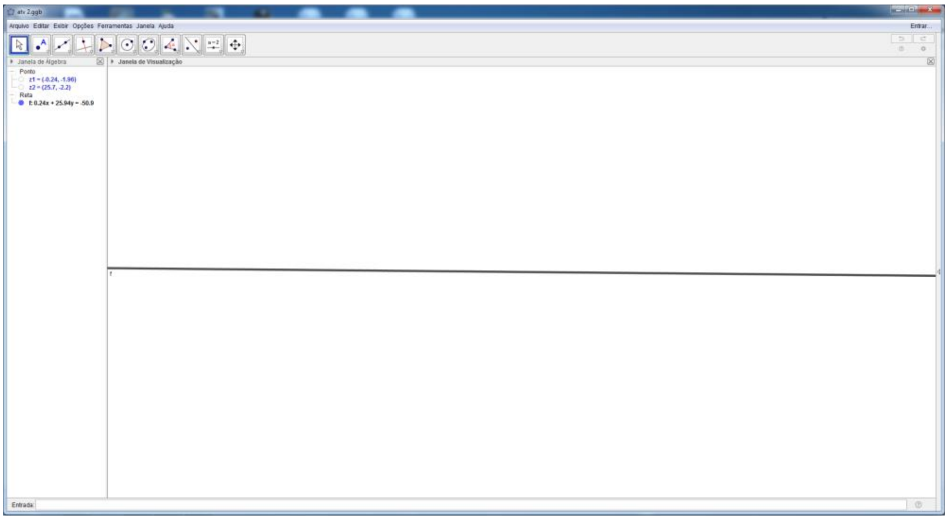
b) Poderia construir mais?

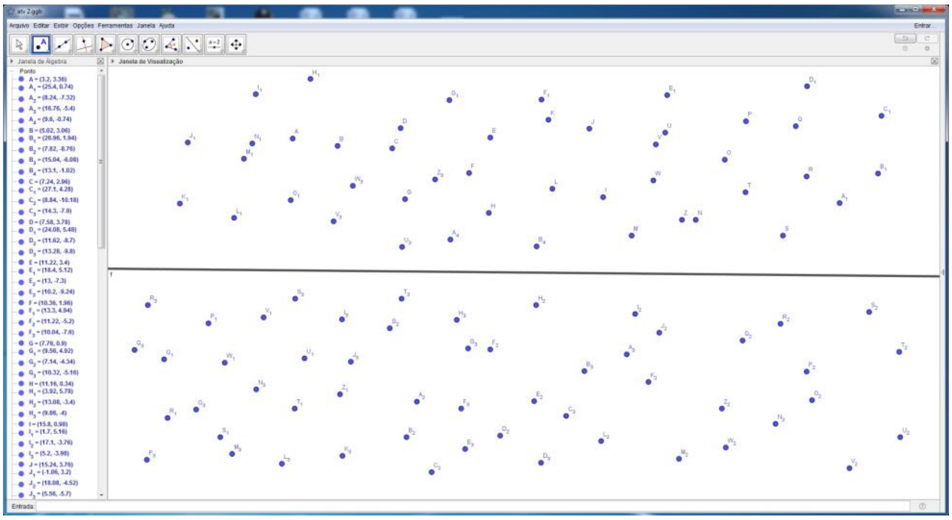
c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e reta , após construir a reta na tela do geogebra o aluno deverá marcar pontos fora da reta.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos fora a reta, a partir da socialização entre os alunos sobre as quantidades obtidas deverá aparecer a seguinte definição: fora de uma reta há infinitos pontos. Então o professor a partir das duas definições obtidas nas atividades 2 e 3, poderá formalizar a definição do postulado da existência de uma reta. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 4

Atividade adaptada de Sá (2009)

Titulo: Retas por dois pontos

Objetivo: Estudar a quantidade de retas que passam por dois pontos.

Material : Geogebra.

Desenvolvimento: Marcar o maior número possível de retas que passam pelos pontos marcados.

Questões: Marque os Pontos A, B , C , D de forma aleatória e que não estejam alinhados e responda:

a) Quantas retas passam pelos pontos A e B?

b) Quantas retas passam pelos pontos A e C?

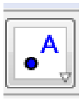
c) Quantas retas passam pelos pontos A e D?

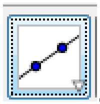
d) Quantas retas passam pelos pontos B e C?

e) Quantas retas passam pelos pontos B e D?

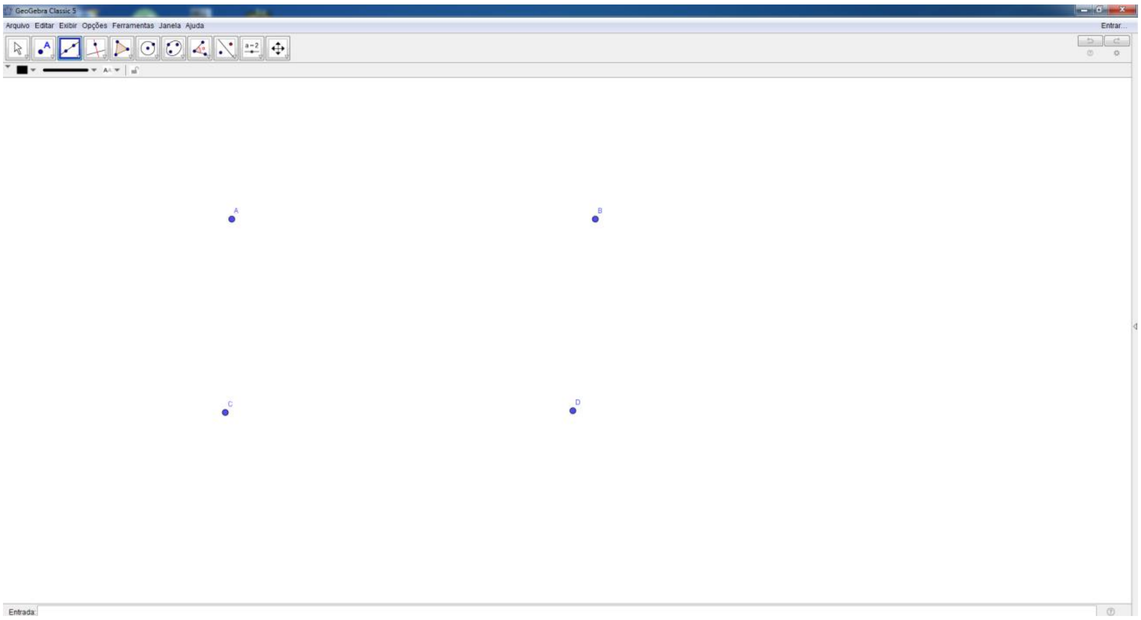
f) Quantas retas passam pelos pontos C e D?

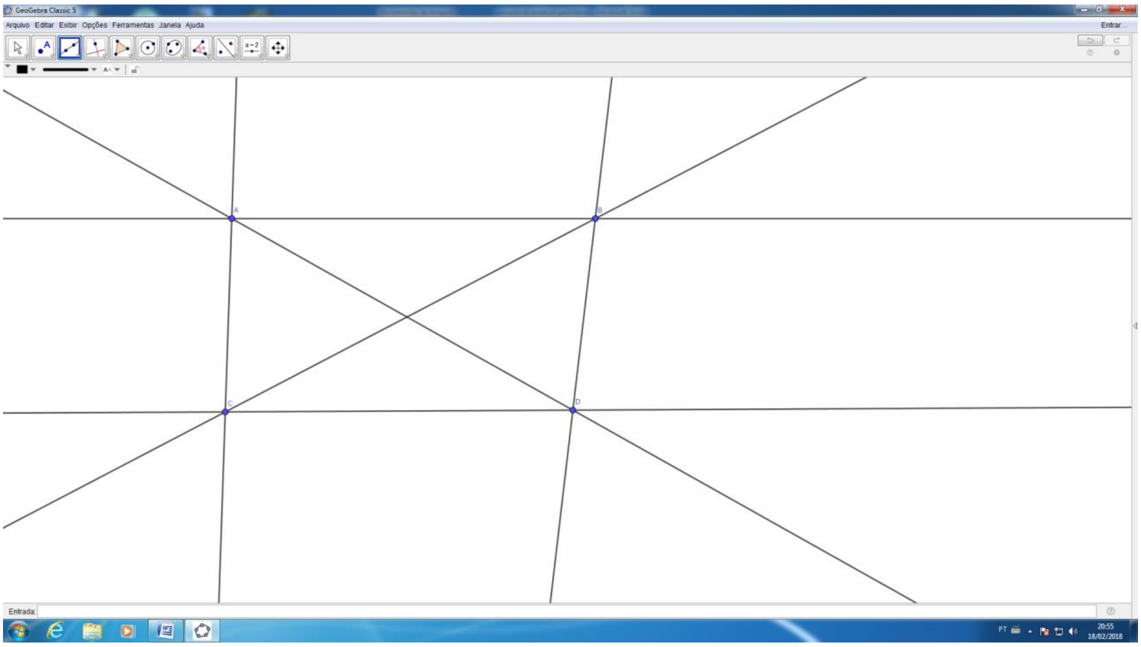
Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto 

e reta , após marcar os Pontos A, B, C, D, o aluno deverá construir as retas que passa por esses pontos como cada item determina, a partir dessas construções espera-se que o aluno tenha a percepção de que em dois pontos passam uma única reta. Provavelmente o aluno poderia optar em dizer que passam infinitas retas se considera todas as retas que passam pelos pontos A, B, C e D não observando as condições exigidas no comando da questão.

Então o professor a partir das discussões da atividade deve formalizar a definição do postulado da determinação de uma reta. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 5

Titulo: Posição entre duas retas.

Objetivo: Verificar as relações entre as posições de duas retas

Material : Geogebra.

Desenvolvimento: Visualizar através de uma figura as relações entre os segmentos de reta.

Questões: Qual relação podemos estabelecer entre os segmentos?

a) Figura 1

b) Figura 2

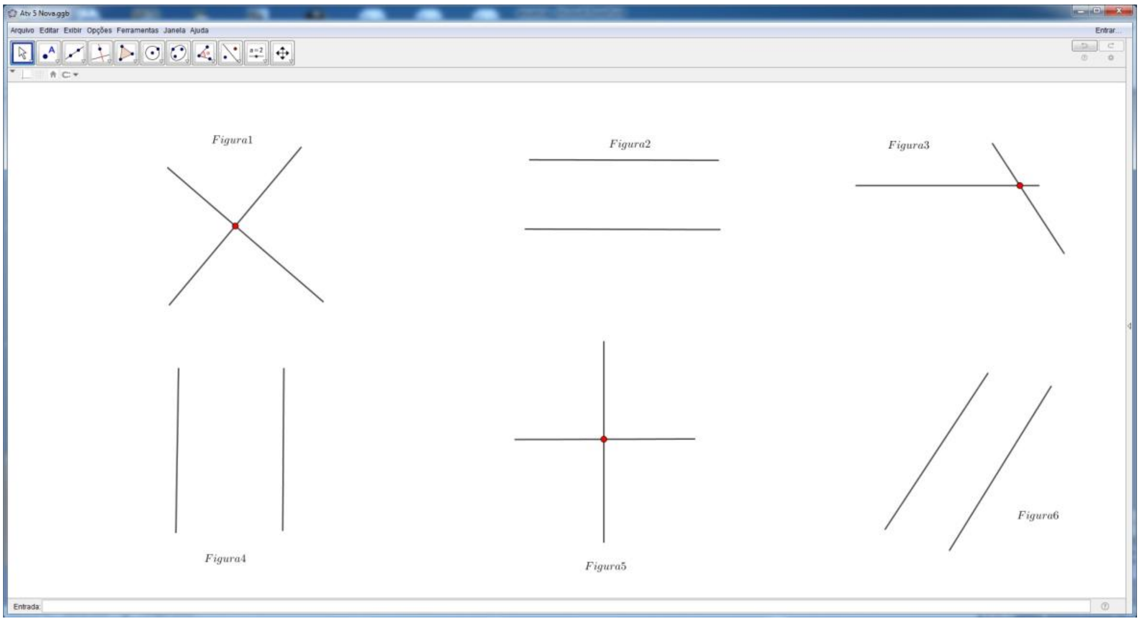
d) Figura 4

e) Figura 5

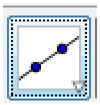
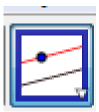
c) Figura 3

 f) Figura 6

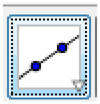
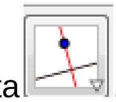
Conclusão:



Atividade 6

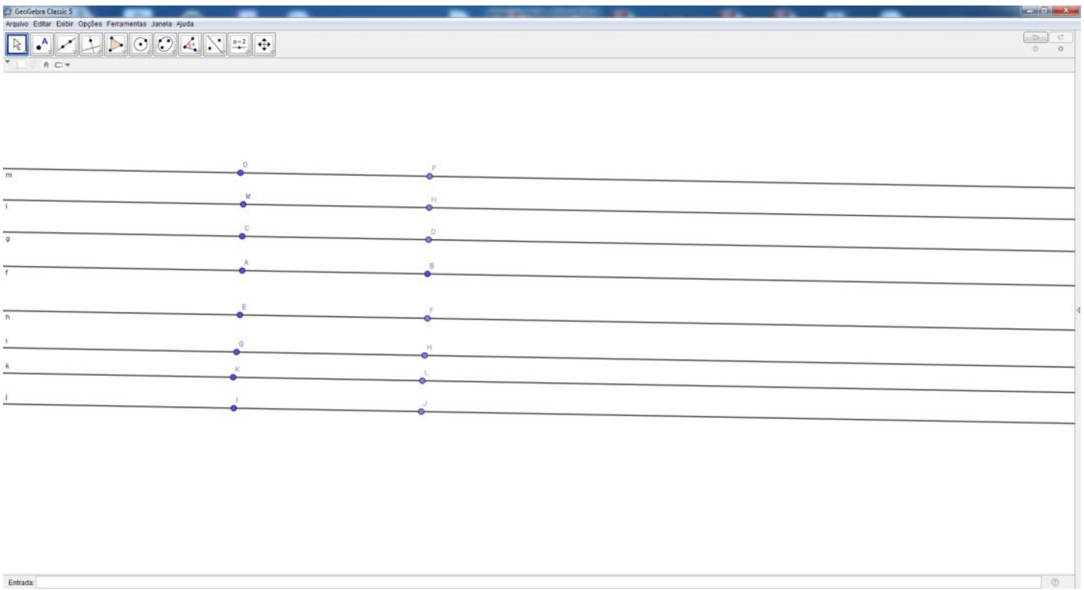
Marque uma reta utilizando a ferramenta  e utilizando a ferramenta , construa outras retas tomando a primeira reta construída como suporte. O que você pode concluir em relação a esses construções?

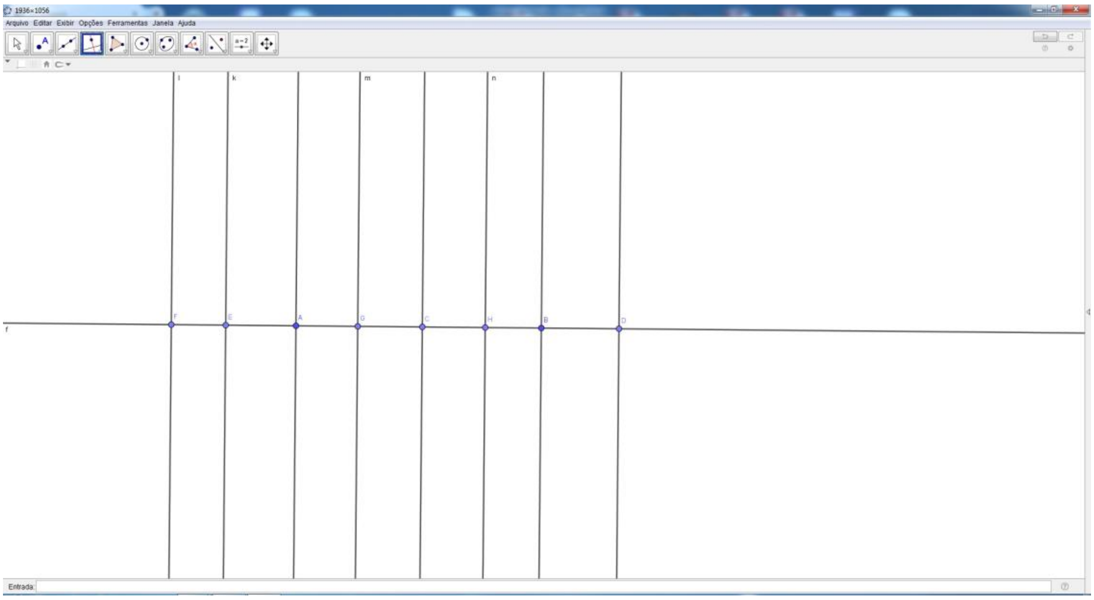
Atividade 7

Marque uma reta utilizando a ferramenta  e utilizando a ferramenta , construa outras retas tomando a primeira reta construída como suporte. O que você pode concluir em relação a esses construções?

Análise a *priori:* Na atividades 5 os alunos deveram fazer a relação dos segmentos e retas listados, observando em alguns casos os segmentos e as retas se cruzam e um único ponto e em outros casos os segmentos e as retas não possuem pontos em comum. Nas atividades 6 e 7 os alunos devem usar os comandos apresentados e fazer as construções e com base na atividade 5 observar as relações entre a reta suporte e as outras construídas. Com as discussões entre os alunos e o professor sobre as atividades, o professor deverá introduzir os conceitos de retas paralelas e retas concorrentes, também mostrando o caso de retas concorrentes perpendiculares e com o auxílio do geogebra o professor poderá construir junto com alunos segmentos que passem pelas retas paralelas e mostrar que sempre que as retas forem paralelas, quaisquer segmentos perpendiculares possuem a mesma distância.

As imagens abaixo, respectivamente, ilustram as construções das atividades 6 e 7.





Atividade 8

Titulo: Retas paralelas na construção de um plano

Objetivo: Verificar a determinação de um plano.

Material : Geogebra 3D.

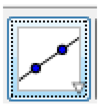
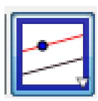
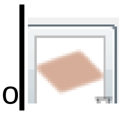
Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano

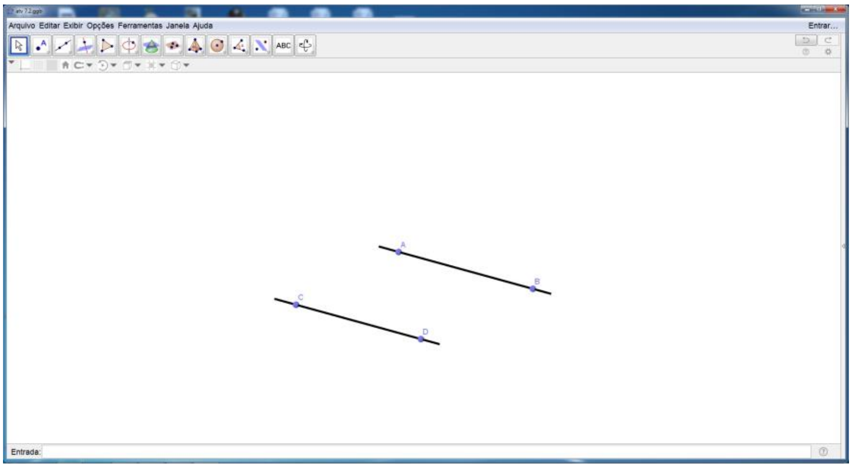
Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir das retas paralelas?

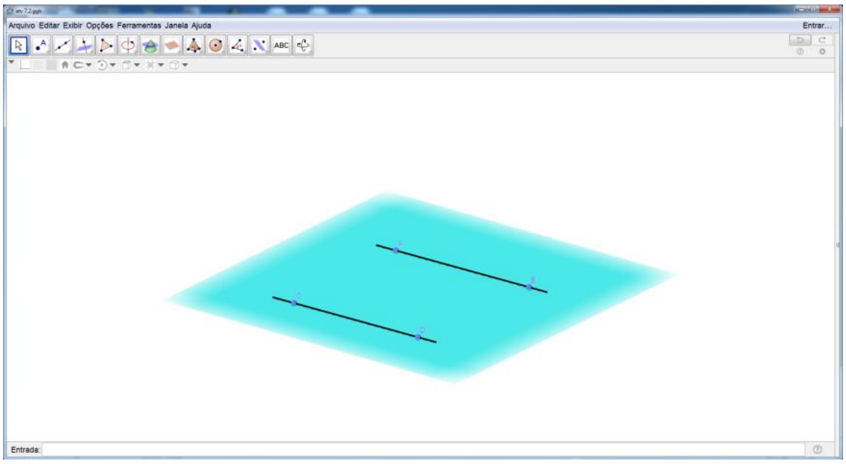
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* Nesta atividade o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D ,ponto , reta , reta paralela  e plano . Primeiro o aluno deverá marcar uma reta qualquer e um ponto externo a reta, em seguida utilizar a ferramenta reta pararela e marcar a reta e o ponto marcados para a construção da reta paralela a primeira, no final utilizar a ferramenta plano e marcar o plano que passa pelas as duas retas paralelas. Com isso o aluno perceberá que é possivel apenas determinar um único plano que contém as duas retas. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 9

Titulo: Retas concorrentes na construção de um plano

Objetivo: Verificar a existência de um plano.

Material : Geogebra 3D.

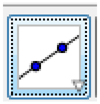
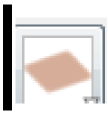
Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano.

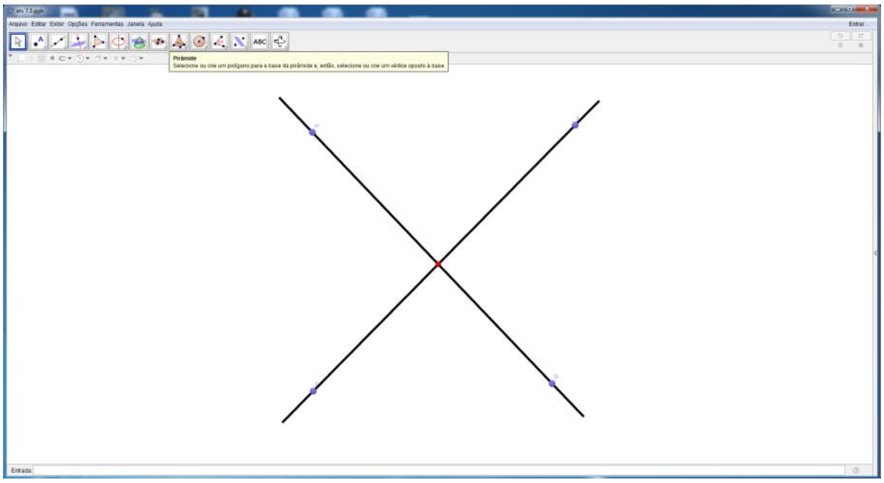
Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir de duas retas concorrentes?

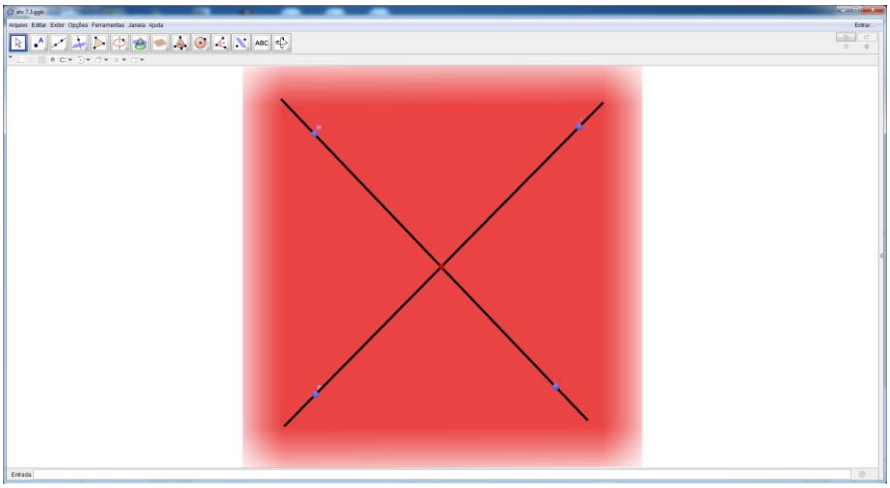
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* Na atividade 8 o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D , reta  e plano  . O aluno deverá construir duas retas que sejam concorrentes e depois utilizar a ferramenta plano e marcar o plano que passa pelas retas concorrentes. No final da atividade de construção o aluno irá perceber que é possivel apenas determinar um único plano que contem duas retas concorrentes. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 10

Titulo: Reta e um ponto externo na construção de um plano

Objetivo: Verificar a existência de um plano.

Material : Geogebra 3D.

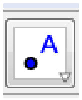
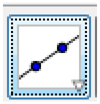
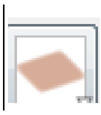
Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano.

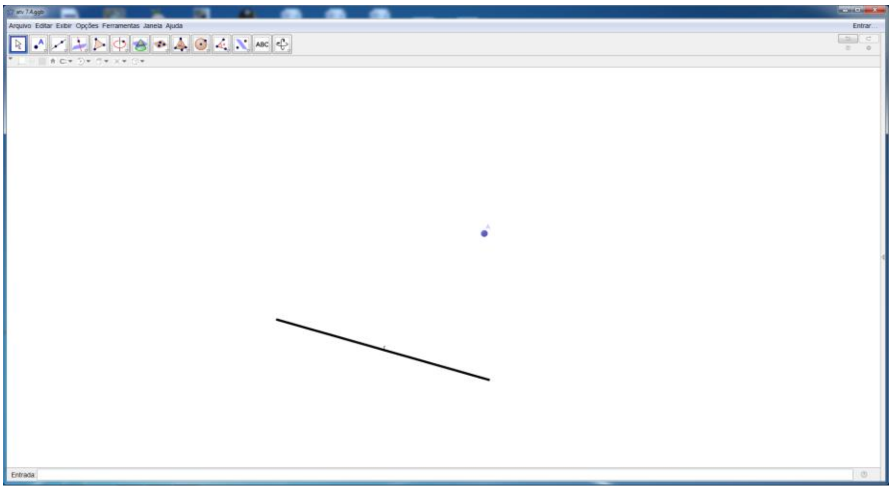
Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir da reta r e o ponto A?

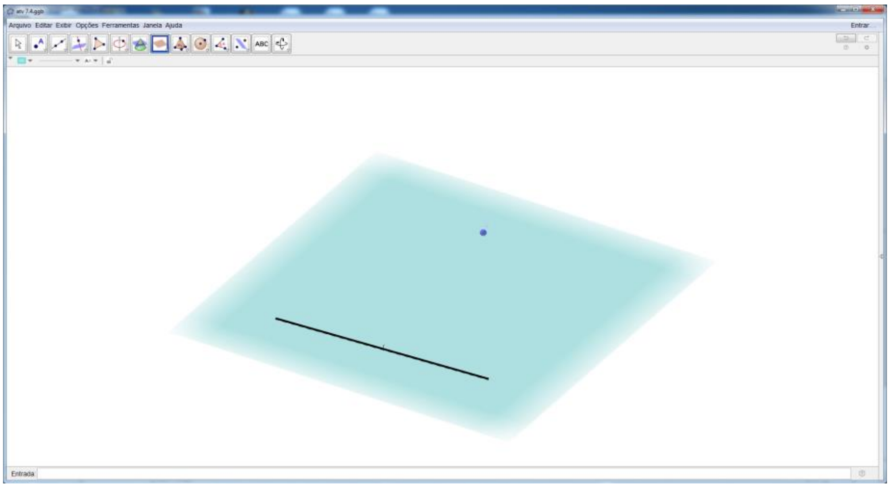
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* Na atividade 9 o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D , ponto  , reta  e plano  . Primeiramente o aluno marcará uma reta e um ponto externo a ela, em seguida marcará um plano que passe por essa reta e esse ponto. Ao final pretende-se que o aluno perceba que é possivel apenas construir uma reta que passe por uma reta e um ponto externo a ela. Nas atividades 7,8 e 9 o professor poderá formalizar o postulado da determinação de um plano.





Atividade 11

Titulo: Pontos no plano

Objetivo: Descobrir a quantidade de pontos sobre um plano.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Construir o maior número possível de pontos sobre um plano.

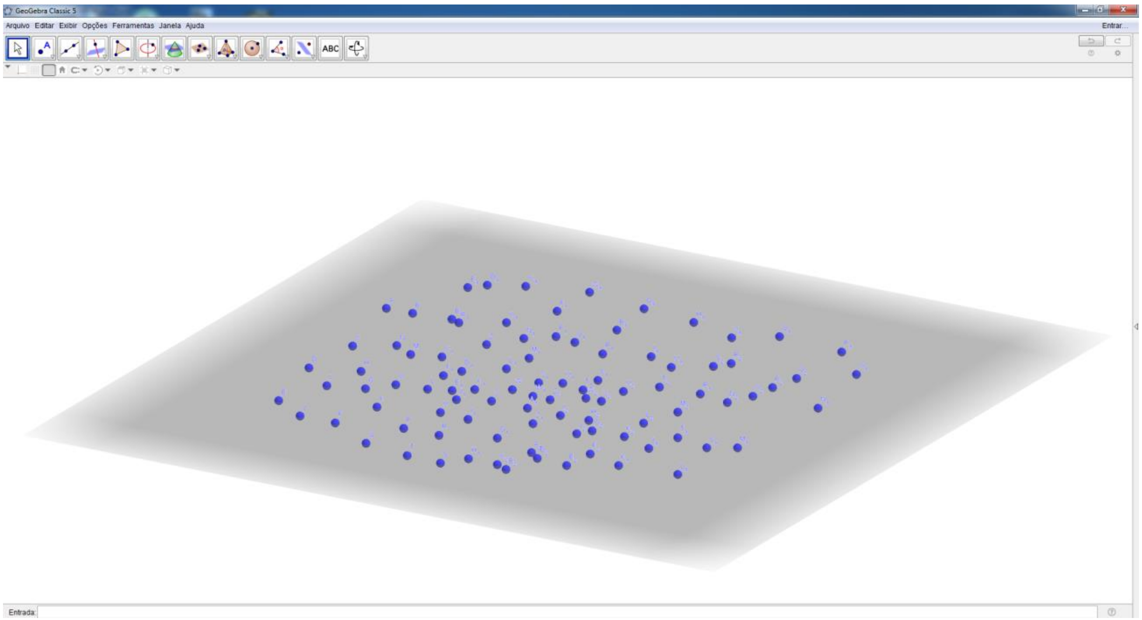
Questões: a) Quantos pontos você construiu?

b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno usará a ferramenta do geogebra 3D , ponto . Como a própria janela 3D do geogebra apresenta um plano, o aluno deverá marcar os pontos sobre esse plano. Possivelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos sobre o plano, então a partir da socialização da atividade o aluno deverá perceber que sobre um plano existem infinitos pontos. Como pode ser ilustrado na figura abaixo.



Atividade 12

Titulo: Retas no plano

Objetivo: Descobrir a quantidade de retas que passam sobre um plano.

Material : Geogebra 3D.

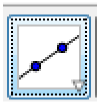
Desenvolvimento: Construir o maior número possível de retas que passam sobre um plano.

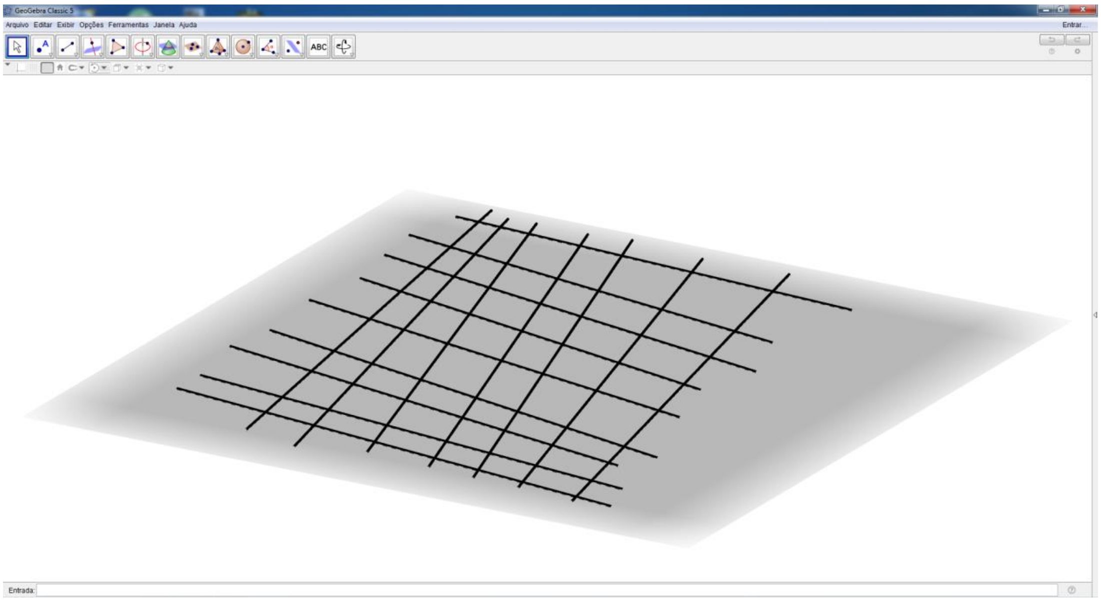
Questões: a) Quantas retas você construiu?

b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a *priori:* O aluno usará a ferramenta do geogebra 3D , reta . Como a própria janela 3D do geogebra apresenta um plano, o aluno deverá marcar as retas sobre esse plano. Possivelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de retas sobre o plano, então a partir da socialização da atividade o aluno deverá perceber que sobre um plano passam infinitas retas. Como pode ser ilustrado na figura abaixo.



Atividade 13

Titulo: Posição das retas nos planos

Objetivo: Relacionar retas em planos.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e relacionar as posições das retas sobre os planos.

Questões: a) Qual a relação entre as retas CD e EF?

b) Qual a relação entre as retas CD e GH?

c) Qual a relação entre as retas EF e GH?

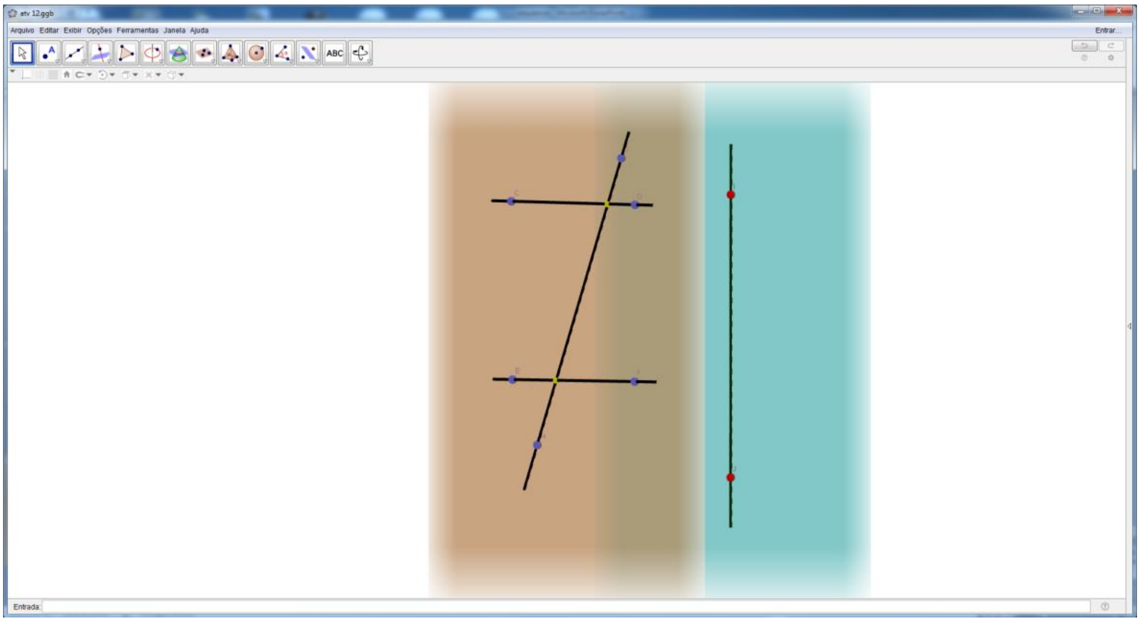
d) Qual a relação entre as retas CD, EF e GH em relação ao plano laranja?

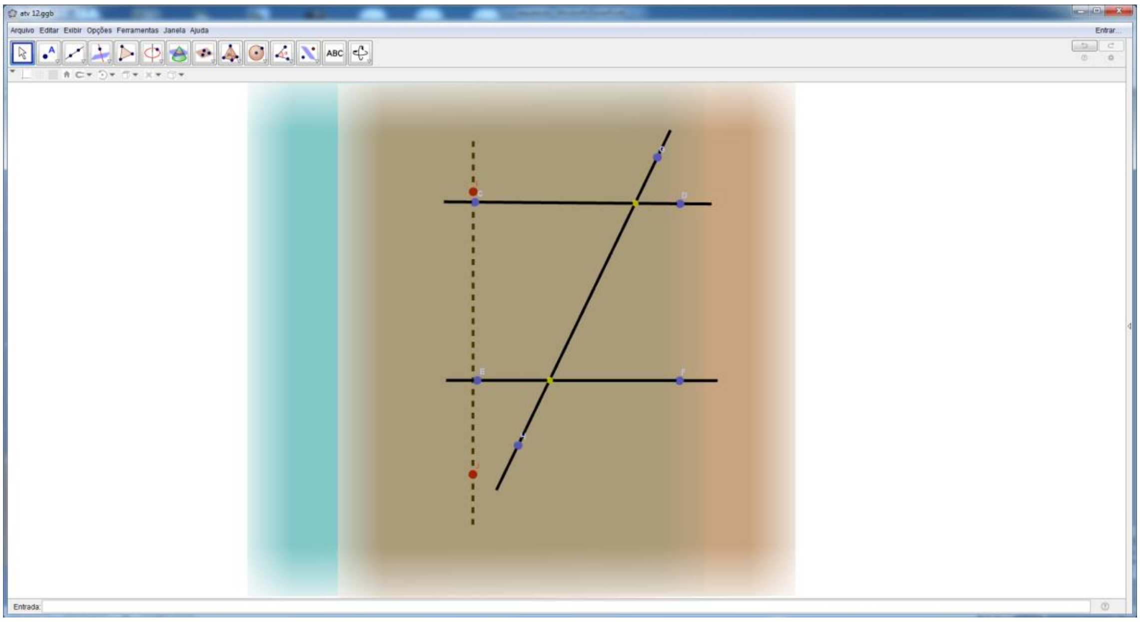
e) Qual a relação entre as retas CD e IJ?

f) Qual a relação entre as retas EF e IJ?

g) Qual a relação entre as retas GH e IJ?

Conclusão:





Atividade 14

Titulo: Posição relativa entre uma retas e um plano

Objetivo: Identificar as posições entre uma reta e um plano.

Material : Geogebra 3D.

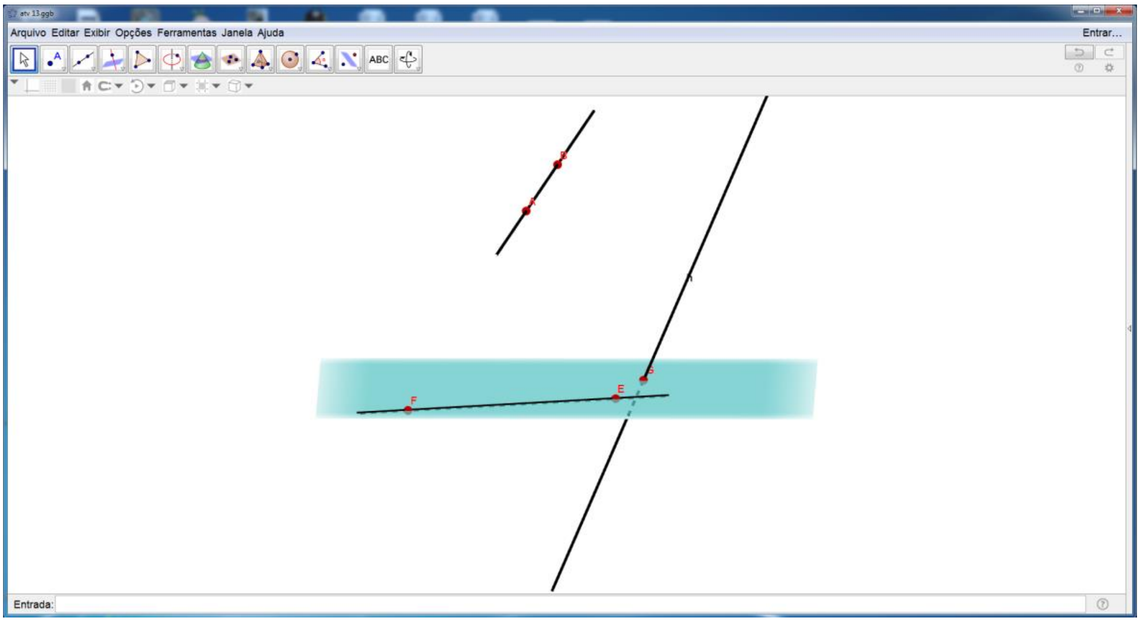
Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e observar as relações entre retas e um plano.

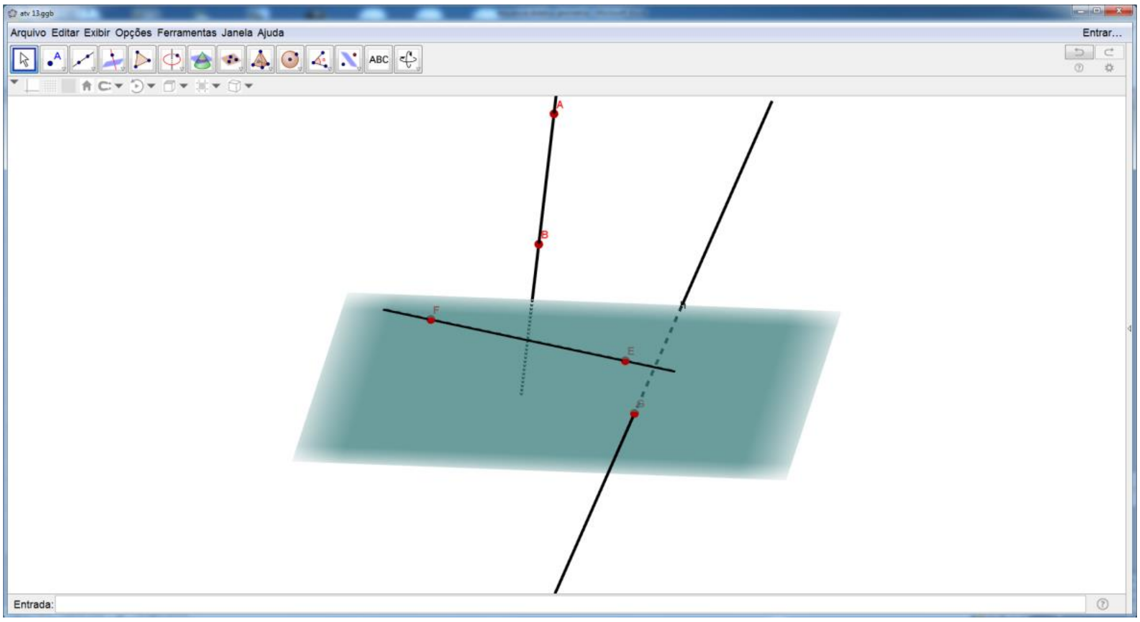
a) Qual a relação entre a reta AB e o plano azul?

b) Qual a relação entre a reta EF e o plano azul?

c) Qual a relação entre a reta h e o plano azul?

Conclusão:





Atividade 15

Titulo: Posição relativa entre dois planos

Objetivo: Identificar as posições entre dois planos.

Material : Geogebra 3D.

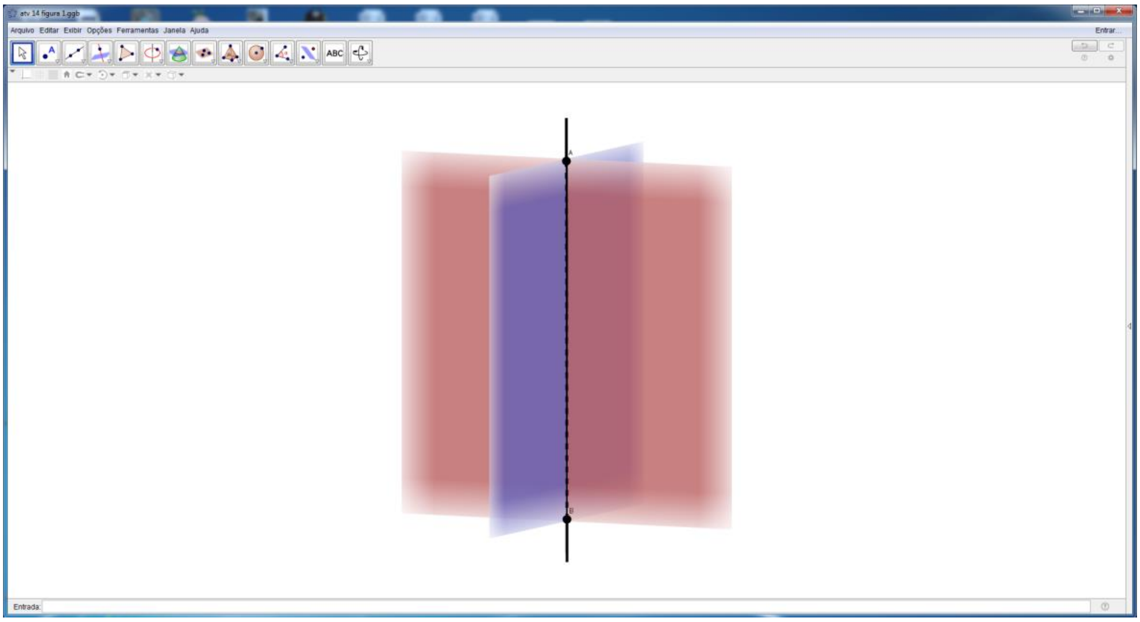
Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e observar as relações entre dois planos.

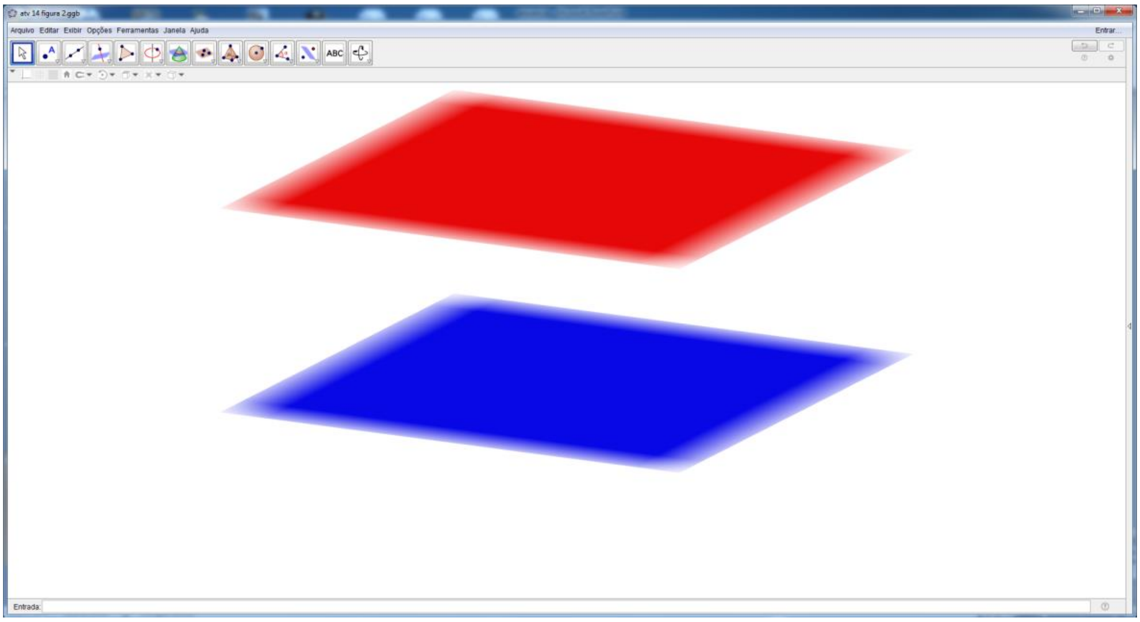
a) Qual a relação entre os dois planos na figura 1?

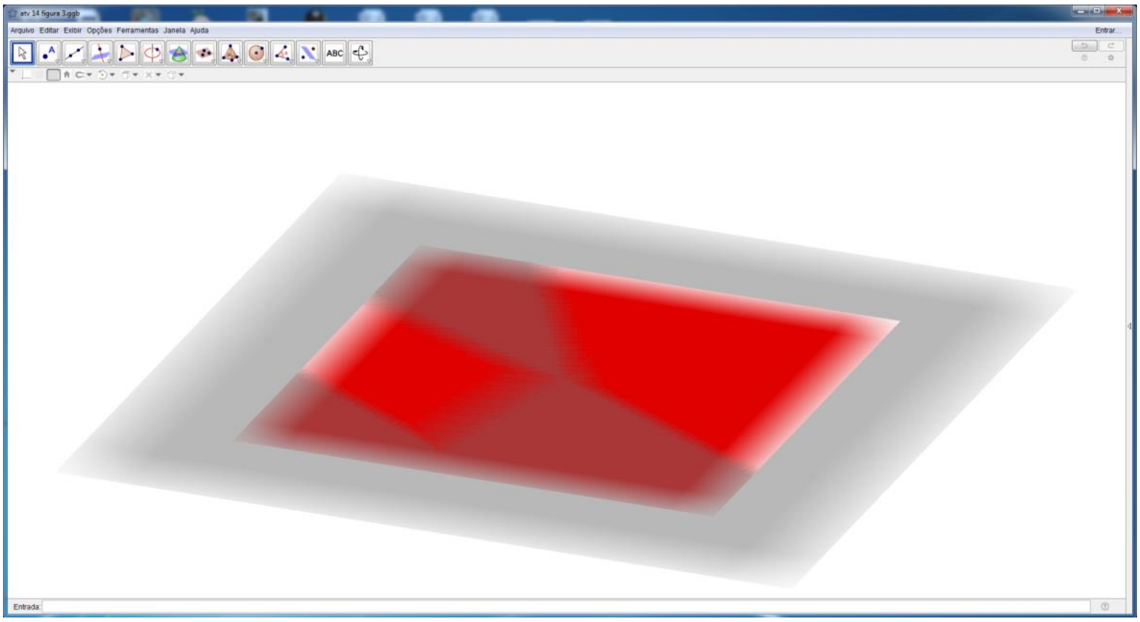
b) Qual a relação entre os dois planos na figura 2?

c) Qual a relação entre os dois planos na figura 3?

Conclusão:







Análise a *priori:* As atividades 12,13,14 o aluno com a ferramenta rotação  irá verificar as relações de posicionamento entre retas e planos, e depois com as devidas discussões sobre as atividades o professor poderá formalizar o conceito de retas coplanares, retas reversas, retas secantes, plano e reta paralelos , plano e reta secantes, planos paralelos distintos, planos coincidentes e planos secantes.

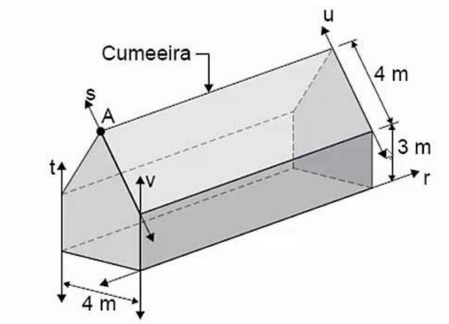
Ao finalizar as atividades sugerimos que seja realizado um teste oral, para estabelecer os postulados, propriedades e teoremas e minimizar os efeitos de eventuais dificuldades conceituais.

Questões Propostas

1. Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:
a) 1 plano.
b) 2 planos.
c) 3 planos.
d) 4 planos.
e) 5 planos.

2. (UF – AL) Classifique **V** como verdadeira ou **F** como falsa cada uma das afirmativas abaixo.
a) Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas (   ).
b) Duas retas distintas sempre determinam um plano (   ).
c) Uma reta pertence a infinitos planos distintos (   ).
d) Três pontos distintos não colineares sempre determinam um plano (   ).
e) Duas retas coplanares distintas são paralelas ou concorrentes (   ).

3. (Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede

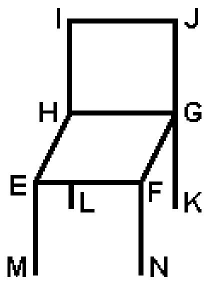


Das retas assinaladas podemos afirmar que:
a) t e u são reversas.
b) s e u são reversas
c) t e u são concorrentes
d) s e r são concorrentes
e) t e u são paralelas.

4. Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:
a) Paralelos

b) Coincidentes
c) Secantes
d) Coplanares
e) Perpendiculares

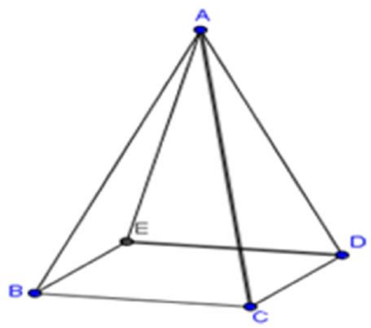
5. (UF – AL) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim:
a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.
b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.
d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

6. (UNIPAMPA) Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.

a) AC e AD



b) AB e ED

c) BC e ED

d) EC e BD

e) BC e AE

7. Considere as afirmações a seguir.

I. Duas retas distintas determinam um plano.

II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que:

a) Apenas II é verdadeira
b) Apenas III é verdadeira
c) Apenas I e II são verdadeiras
d) Apenas I e III são verdadeiras
e) I, II e III são verdadeiras

8. (ENEM 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1 , uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte. Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão.Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Figura 1

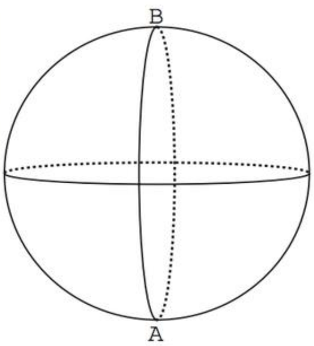
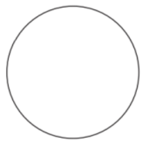
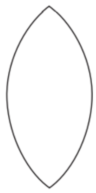


Figura 2

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

a) 
b) 
c) 
d) 
e)

9. Qual das afirmações abaixo é **VERDADEIRA**?
a) Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.
b) Duas retas não coplanares são reversas.
c) Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas.
d) Se três retas são paralelas, existe um plano que as contém.
e) Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, elas determinam um e um só plano.

10. (UEL 2001) Considere uma reta **s**, contida em um plano **α**, e uma reta **r** e perpendicular a **s**. Então, necessariamente:
a) **r** é perpendicular a **α**.
b) **r** e **s** são coplanares.
c) **r** é paralelo a **α**.
d) **r** está contida em **α.**
e) Todas as retas paralelas a **r** interceptam **s**.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O produto educacional apresentado foi validado através da dissertação de Bechara (2019), com o objetivo de auxiliar o ensino e aprendizagem de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano através do uso do *software* geogebra.

A sequência didática com a utilização do geogebra como ferramenta auxiliadora no ensino e aprendizagem, apresenta-se como uma proposta de método diferenciado em que o aluno possa através da interação com as construções geométricas feita pelo *software*, abstrair os conceitos e também venham potencializar a percepção espacial dos entes geométricos.

Almejamos que os professores utilizem esse produto em suas aulas introdutórias de geometria de maneira a incentivar os alunos a utilizar o computador como ferramenta educacional e contribuir para potencializar a aprendizagem significativa dos discentes.

Diante disso, o presente produto educacional pode ser utilizado não apenas no ambiente escolar, pois sabemos que há escolas com recursos escassos, mas também a qualquer usuário que tenha acesso a um o computador e através do geogebra possa construir as figuras geométricas expostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Carlos Henrique. **O segredo é avaliar sempre**. Nova Escola, São Paulo, Ano XXII, n.199, jan/fev. 2007. p.42-43.

ARTIGUE, M. (1988): "**Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática.** In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas. Lisboa*: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BARBOSA, Eduardo F. **Instrumentos de coleta de dados em pesquisas educacionais**. Disponível em <http://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Ensino_2013_2/Instrumento_Coleta_Dados_Pesquisas_Educacionais.pdf> . 2008. Acesso 25/01/2019.

BECHARA, Adriano de Oliveira. **Geometria espacial de posição:** uma sequência didática utilizando o GeoGebra. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Belém, Universidade do Estado do Pará, 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997

BRASIL, Ministério Da Educação E Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**/ Secretária de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF. 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília/DF: MEC/SEF, 2000.

BRASIL, Ministério Da Educação E Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**/ Secretária de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF. 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. Sào Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

COUTINHO, Cileda de Q. S.; ALMOULOUD, Saddo Ag. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

DELFINO, Hudson Sathler. **O conceito de infinito** : uma abordagem para a Educação Básica / Hudson Sathler Delfino. – Viçosa, MG, 2015. vi, 70f. : il. ; 29 cm.

DELORS, J. **Educação**: um tesouro a descobrir. 8. ed. - São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC: UNESCO, 2003.

DEMO, Pedro. **TICs e educação**, 2008. Disponível em: <http://pedrodemo.blogspot.com.br/2012/04/tics-e-educacao.html>. Acesso : 25/01/2019.

DOLCE, Osvando. **Fundamentos de matemática elementar 10**: geometria espacial, posição e métrica: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com respostas/ Ovaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLZ , J. e SCHNEUWLY, B. **Gêneros e progressão em expressão oral e escrita.** Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In Gêneros Orais e escritos na escola. Campinas (SP): Mercado de Letras. 2004.

DUVAL, Raymond. **Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence**. Annales de didactique et de sciences cognitives, v 1, p. 57-74. 1988.

FERREIRA, Fernanda Aparecida. **Demonstrações em geometria euclidiana:** uma sequência didática como recurso metodológico para seu ensino / Fernanda Aparecida Ferreira, Dimas Felipe de Miranda. - Belo Horizonte: FUMARC/PUC-MG, 2008. 67 p. : il.

FERREIRA, R. C. **Ensinando Matemática com o Geogebra**. Enciclopédia Biosfera, Goiânia: < http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010bb.htm> vol.6, N.10, 2010. Acesso em 15/01/2019.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática Escolar e Matemática da vida cotidiana**. Campinas: Autores Associados, 1999.

GOMES, Rafael Oliveira de. **Geometria Espacial de Posição:** Do Concreto ao Raciocínio Dedutivo com uma Passagem pela Tecnologia / Rafael Gomes de Oliveira. - 2016. 143 p. ; 30cm. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016.

GOVÊA, F.. **Aprendendo e ensinando geometria com demonstração**: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1998.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 7. Ed. São Paulo: Cortez, 2010

KNÜPPE, Luciane. **Motivação e desmotivação:** desafio para as professoras do Ensino Fundamental. Educ. rev. no.27 Curitiba Jan./June 2006

LORENZATO, Sérgio. Porque não ensinar geometria? In: **Educação Matemática em Revista.** SBEM, ano III, 1995.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geométrica**. Dissertação (Mestrado), PUC-SP, 1999.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MOURA, M. O. A **atividade de ensino como ação formadora**. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2002.

NEVES, Miranilde Oliveira. **A importância da investigação qualitativa no processo de formação continuada de professores: subsídios ao exercício da docência**. Revista Fundamentos, V.2, n.1. Revista do Departamento de Fundamentos da Educação da Universidade Federal do Piauí. ISSN 2317-2754. 2015.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; A. SCHLEIMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

PACHECO, José Adson D.; BARROS, Janaina V. **O Uso de Softwares Educativos no Ensino de Matemática**. 2013.

PAIS, LUIZ Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREIRA, T. L. M. **O Uso do Software Geogebra em uma Escola Pública**: interações entre alunos e professores em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. Dissertação de Mestrado: Juíz de Fora. 2012.

QUINQUER, D. **Modelo e enfoques sobre a avaliação**: o modelo comunicativo. In: BALLESTAR, M. et al. Avaliação como apoio à aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2003. p. 15-22

RANCAN, Graziele. **Origami E Tecnologia**: Investigando Possibilidades Para Ensinar Geometria No Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física – PUCRS, Porto Alegre, RS. 2011.

REIS, Leonardo Rodrigues dos**. Rejeição à matemática**: causas e formas de intervenção, 2005. Disponível em: <http://repositorio.ucb.br/jspui/handle/10869/1737>. Acesso : 25/01/2019.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental**/ Pedro Franco de Sá - Belém: EDUEPA, 2009.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTA HELENA, Rainer Fischer. **Uma proposta para o ensino de geometria na educação de jovens e adultos com o uso de mídias digitais**. Trabalhos de

Conclusão de Curso de Especialização, Universidade Federal do Rio grande do Sul. 2015.

SOUZA, Filho, J. B. de; BRITO, K. L. V. de. **O aprendizado da geometria contextualizada no ensino médio**. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Instituto de Ensino Superior de Goiás. Formosa, 2006. 86 p.

SOUZA, Gabriel Moreno Ferreira de. **Uso do Gegeobra 3D no ensino de Geometria Espacial** / Gabriel Moreno Ferreira de Souza - 2017. 52 f. il. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). 2017.

TIBA, Içami. **Disciplina:** Limite na medida certa. São Paulo: Gente, 1996.

TORNAGUI, A. J,C. **Tecnologias na Educação: ensinado e aprendendo com as TIC.** -2 Ed. - Brasília: Secretaria de Educação a Distância, 2010.

VALENTE, J. A. (Org.). **Computadores e conhecimento: repensando a Educação**. Campinas: Unicamp/NIED, 1993. 418 p.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/NIED, 1999. 156 p.

VALENTE, J.A . **As tecnologias digitais e os diferentes letramentos.** Revista Pátio. Porto Alegre, RS, v.11, n.44, 2008.

VIEIRA, Luana Ramalho. **O uso do GeoGebra no Ensino de Matemática**. Universidade Federal de Mato Grosso– UFMT. IV Encontro Goiano de Educação Matemática. 2013.

VOGT, Alessandra; SOARES, Silviane Lawall. **O Papel da Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação**: Um Olhar Docente. 2016. Disponível em < https://eventos.uceff.edu.br/eventosfai_dados/artigos/semic2016/432.pdf >. Acesso: 15/01/2019.

VOSGERAU, Dilmeire Sant’Anna Ramos; ROMANOWSKI, Joana Paulin. **Estudos de revisão:** implicações conceituais e metodológicas. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 14, n. 41, p. 165-189, jan./abr. 2014

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem