UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
FURB

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CCEN

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA - PPGECIM

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

Caro leitor!

Este ebook é resultado de uma experiência pedagógica relatada na dissertação de Mestrado intitulada **A História da Matemática como Recurso Pedagógico para a Aprendizagem Significativa de Multiplicação de Números Naturais**. Tal dissertação é fruto de nossa participação no curso de Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, ofertado pela Universidade Regional de Blumenau – FURB.

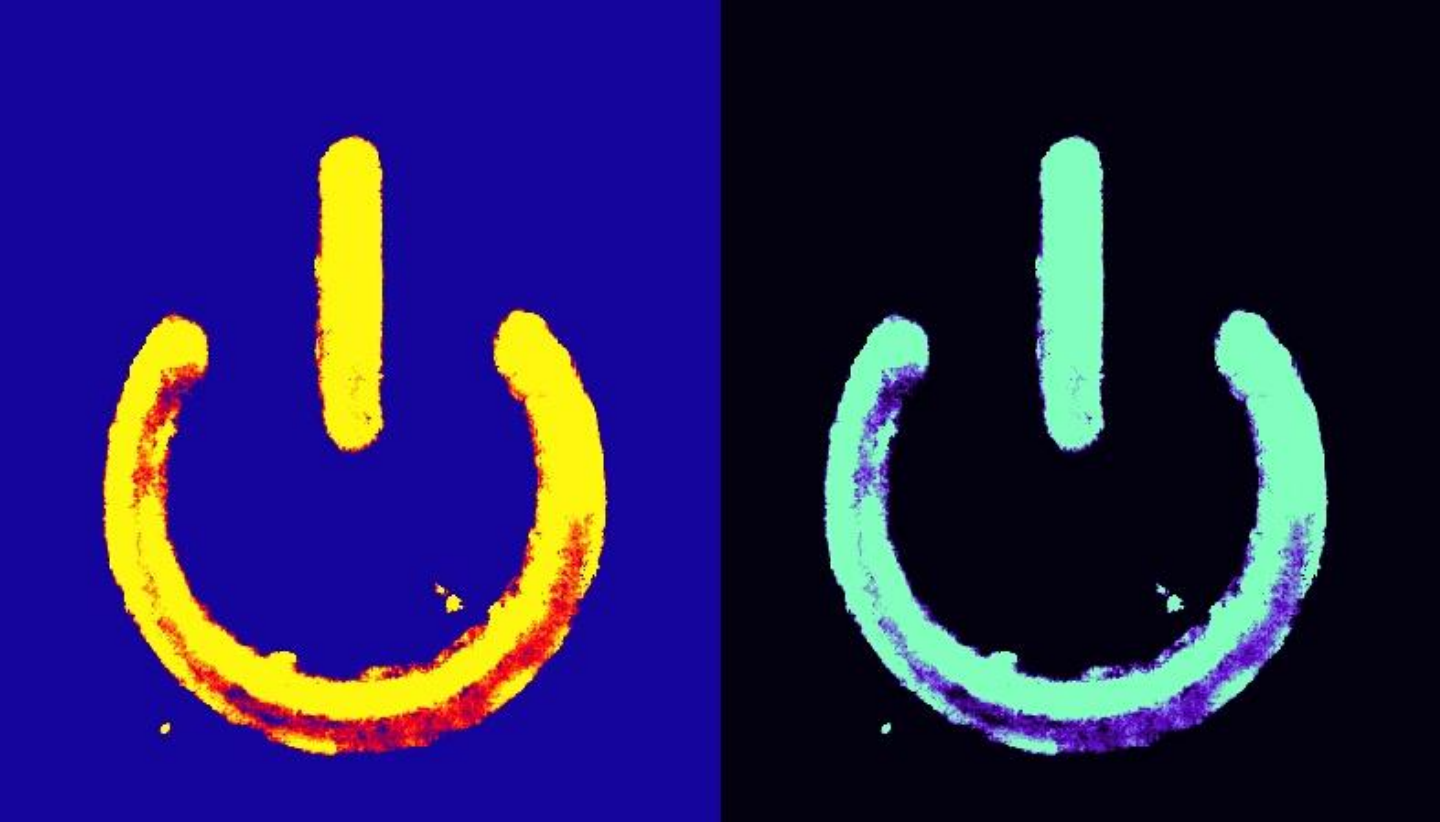
O endereço virtual do ebook é http://www.youblisher.com/p/1924202-Multiplicando-com-a-Historia-da-Matematica/, sendo que o mesmo pode ser visualizado a partir de qualquer dispositivo com acesso à internet (computador, tablet, telefone celular). O conteúdo virtual é idêntico a este que virá a seguir.

Esperamos que você obtenha o melhor proveito deste material, sobretudo se tiver interesse em inserir aspectos históricos às aulas de Matemática.

Cordialmente,

Ivan Álvaro dos Santos

Tânia Baier



Multiplicando com a História da Matemática

Ivan Álvaro dos Santos

Tânia Baier

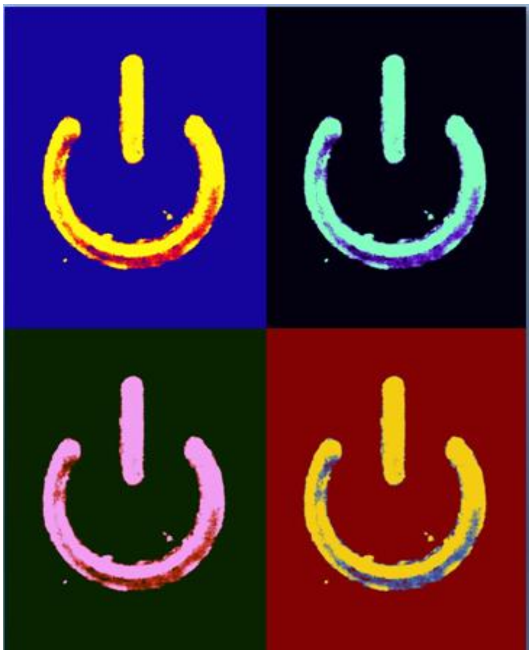
UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU- FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA - PPGECIM
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA
BLUMENAU – SC – 2018

Multiplicando com a História da Matemática

Ivan Álvaro dos Santos

Tânia Baier

Nossa Capa



A imagem que ilustra a capa de nosso livro traz de forma quadruplicada o símbolo da tecla *power* (liga/desliga), utilizada em vários equipamentos eletrônicos.
Este símbolo é composto por um círculo e por um traço, agrupados.

O círculo e o traço representam, respectivamente, “[...] os números zero e um que, no sistema binário, significam simplesmente ligado (um) e desligado (zero). O símbolo padrão foi estabelecido em 1973 pela *International Electrotechnical Comission* e tinha como descrição ‘energia em estado de espera’” (LANDIM, 2010).

Assim, o símbolo traz a junção dos algarismos 1 e 0, conforme a imagem abaixo, e foi utilizado em nossa capa pelo fato de que dois dos métodos de multiplicação que apresentamos no livro estão baseados no sistema de numeração binária.

A história nas aulas de Matemática

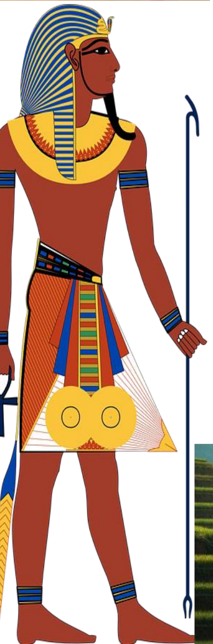
Por meio de uma pesquisa realizada entre professores e pesquisadores da área de Matemática, Miguel (1997) identificou que um dos maiores empecilhos para que aspectos históricos sejam efetivamente utilizados nas aulas de Matemática é a escassez de materiais de ensino adequados à Educação Básica, que abordem organicamente a História da Matemática. Nesse sentido, a ausência de literatura adequada a professores de Matemática e a pedagogos assim como a natureza imprópria da literatura disponível são identificados como obstáculos pedagógicos para profissionais da área da educação.

Em contrapartida, D'Ambrósio (1996, p. 29) afirma que "Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância". Portanto, percebe-se aí uma lacuna existente entre a vontade e a possibilidade de professores em vislumbrar um ensino de conceitos matemáticos pautados na historicidade dessa ciência.

Posto isso, o presente texto é destinado a professores, estudantes e demais profissionais que atuam em todos os níveis do ensino e que desejam utilizar elementos históricos para trabalhar a Matemática de maneira contextualizada e/ou diversificar as formas de abordagem de conteúdos. Miguel (1997, p. 83) salienta que "[...] é no desenvolvimento histórico da matemática que pode-mos perceber as diferentes formalizações de um mesmo conceito" e isso pode favorecer a aprendizagem ao passo que estimula o interesse dos estudantes e amplia as possibilidades dessa disciplina nas instituições educacionais.

Dessa forma, esperamos contribuir para aprimorar o processo de construção de conhecimentos de Matemática em geral e no ramo da Aritmética em particular, assim como encorajar outros autores a tornar públicas suas produções com o mesmo escopo.

Os Autores
Blumenau(SC), 2018






Maimp1iapeghijultiplikcaçnã

moNusMujfumnbvcxzasdfg

hjltQwertyiupiliocpladcvbçt

qzxcãvbnouEjghígpfciasaplmk

iujhnbv4MultiplicaçãOoU

rfgjmcnvbgjpoiuytghnjkl90nb

vc4xc3qa2zxc1qaszxiaiEVkskw

ie7hrzxcvb9mkjhh096RussA5

poiuytrewqasdfghjkl0mnbvcxz

1qaz3wsx4efv5tgb7unmkiolkmM

T9Iojnbbmultiplicaçãolm

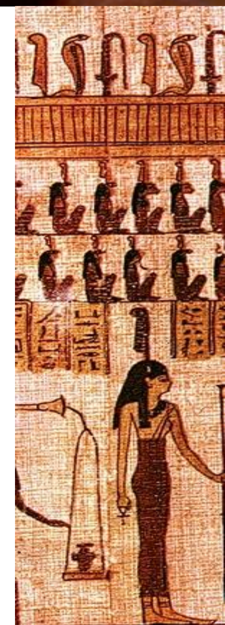
mzxcvb6bnjhgfde4rtyuiolLiJK

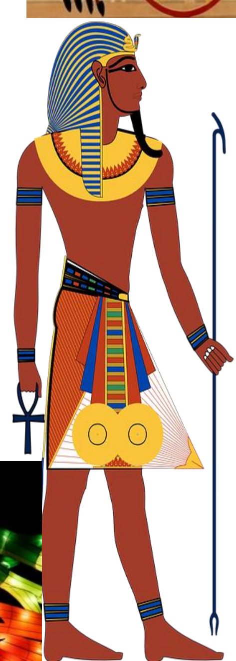
9864EGÍPCIAEWGBNokmnnb8mn

bvcxzasqwertyuioplkm876vbnm

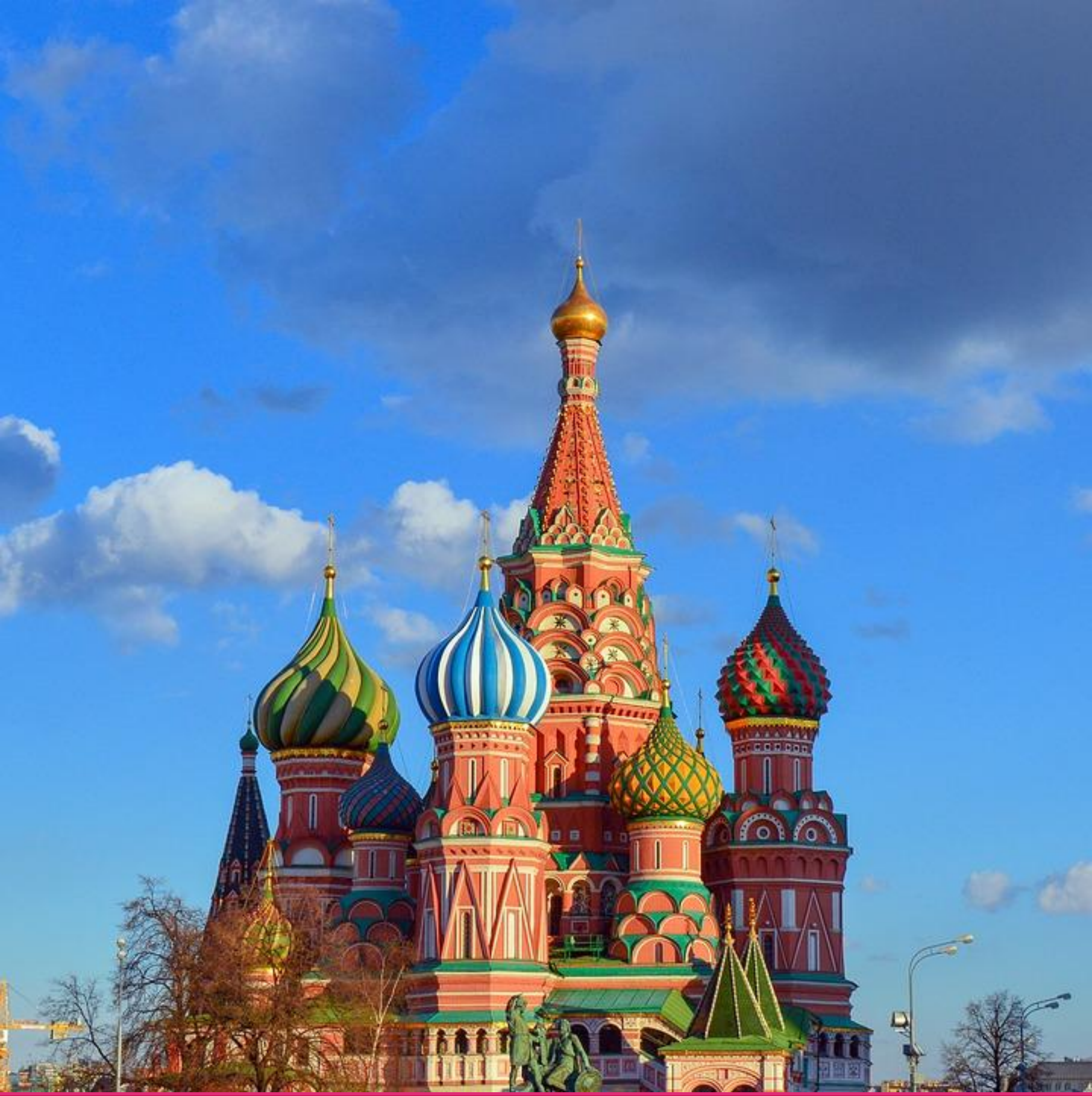
SDwert67ikmlnbvgfd0olmknjbh

uMULTIPLICAÇÃOchinesa









Multiplicação Russa

Multiplicação Russa

Muito pouco se conhece sobre a origem e sobre o período histórico em que o Método da Multiplicação Russa foi desenvolvido e utilizado. Segundo supõem historiadores e matemáticos, este método foi criado pelos antigos camponeses russos a partir da necessidade prática de contabilizar a produção agrícola e de realizar outros cálculos relativos à colheita, troca e comercialização de produtos.

Camponeses russos usavam, há muito tempo atrás, um método de multiplicação que só requeria o conhecimento da tabuada de 2 (BOLT, 1992).

O método russo era um processo especial de multiplicação. Não tinha nada de simples e apresentava uma face curiosa (SOUZA, 2003).

A operacionalização do método é baseada nas ideias de dobro e de metade e utiliza a adição como cálculo auxiliar para se chegar ao produto desejado. Dessa forma, não há a necessidade de se conhecer as tábuas de multiplicação dos números além do 2.

Multiplicação Russa

Para possibilitar a compreensão do processo de resolução de multiplicações pelo método dos camponeses russos, resolveremos alguns exemplos descrevendo-os em 6 etapas:

a) 134 x 50

Na **primeira etapa**, organizamos os fatores em um quadro de duas colunas;
A **segunda etapa** consiste em dividir sucessivamente o primeiro fator até obter-se o quociente 1, ignorando-se os restos e organizando cada quociente nas linhas subsequentes;
Na **terceira etapa**, o segundo fator é dobrado continuamente, registrando-se cada resultado nas linhas imediatamente inferiores, encerrando-se esta etapa quando o valor atingir a mesma linha do número 1 da primeira coluna.

1ª etapa

134	50

2ª etapa

134	50
67	
33	
16	
8	
4	
2	
1	

3ª etapa

134	50
67	100
33	200
16	400
8	800
4	1600
2	3200
1	6400

Multiplicação Russa

Quarta etapa: identifica-se os números ímpares que constam da primeira coluna e seleciona-se os seus correspondentes que encontram-se na segunda coluna do quadro;

Na **quinta etapa** os valores da segunda coluna que foram selecionados são "retirados" da tabela a fim de serem somados. O valor obtido da soma corresponde ao produto inicialmente procurado, conforme pode-se observar na **sexta** e última **etapa**.

4ª etapa

134	50
67	100
33	200
16	400
8	800
4	1600
2	3200
1	6400

5ª etapa

134	50	
67		100
33		200
16	400	
8	800	
4	1600	
2	3200	
1		6400

6ª etapa

6400 + 200 + 100 = 6700

Logo, 134 x 50 = 6700

Multiplicação Russa

Vamos verificar agora que a propriedade comutativa da multiplicação é válida também para o método da Multiplicação Russa. Logo, vamos efetuar a multiplicação 50 x 134.

b) 50 x 134

Na **primeira etapa** então, reorganizamos os dois fatores no quadro, porém com a ordem inversa;
A **segunda etapa** dividiremos sucessivamente o fator 50 até obter-se o quociente 1, ignorando-se os restos e organizando cada quociente nas linhas subsequentes;
Na **terceira etapa**, o fator 134 é dobrado continuamente, sendo registrado cada resultado nas linhas imediatamente inferiores, encerrando-se esta etapa quando o valor atingir a mesma linha do número 1 da primeira coluna.

1ª etapa

50	134

2ª etapa

50	134
25	
12	
6	
3	
1	

3ª etapa

50	134
25	268
12	536
6	1072
3	2144
1	4288

Multiplicação Russa

4ª etapa

50	134
25	268
12	536
6	1072
3	2144
1	4288

Na **quarta etapa** são identificados os números ímpares que constam da primeira coluna e selecionados os seus correspondentes que encontram-se na segunda coluna do quadro;

Na **quinta etapa** os valores da segunda coluna que foram selecionados são "retirados" da tabela para serem somados. O valor obtido da soma corresponde ao produto inicialmente procurado, conforme pode-se observar na **sexta** e última **etapa**.

5ª etapa

50	134	
25		268
12	536	
6	1072	
3		2144
1		4288

6ª etapa

$$4288 + 2144 + 268 = 6700$$

Logo, 50 x 134 = 6700

Multiplicação Russa

Em um terceiro exemplo, vamos efetuar a multiplicação de duas centenas.

c) 379 x 148

Na **primeira etapa**, ordenamos os fatores lado a lado em um quadro com duas colunas;
Na **segunda e na terceira etapas** dividimos sucessivas vezes o primeiro fator até que se obtenha o quociente igual a 1 e dobramos continuamente o segundo fator até que o valor obtido atinja a mesma linha da unidade da primeira coluna, organizando cada valor obtido nas linhas subsequentes do quadro.

1ª etapa

379	148

2ª etapa

379	148
189	
94	
47	
23	
11	
5	
2	
1	

3ª etapa

379	148
189	296
94	592
47	1184
23	2368
11	4736
5	9472
2	18944
1	37888

Multiplicação Russa

Quarta etapa: identifica-se os números ímpares da primeira coluna e seleciona-se os seus correspondentes que encontram-se na segunda coluna do quadro;

Na **quinta etapa** os valores da segunda coluna que foram destacados na tabela são "retirados" para serem somados. O valor obtido da soma corresponde ao produto inicialmente procurado, conforme pode-se observar na **sexta etapa**.

4ª etapa

379	148
189	296
94	592
47	1184
23	2368
11	4736
5	9472
2	18944
1	37888

5ª etapa

379		148
189		296
94	592	
47		1184
23		2368
11		4736
5		9472
2	18944	
1		37888

6ª etapa

37888 + 9472 + 4736 + 2368 +
+ 1184 + 296 + 148 = 56092

Logo, 379 x 148 = 56092

Sistema de Numeração Binário

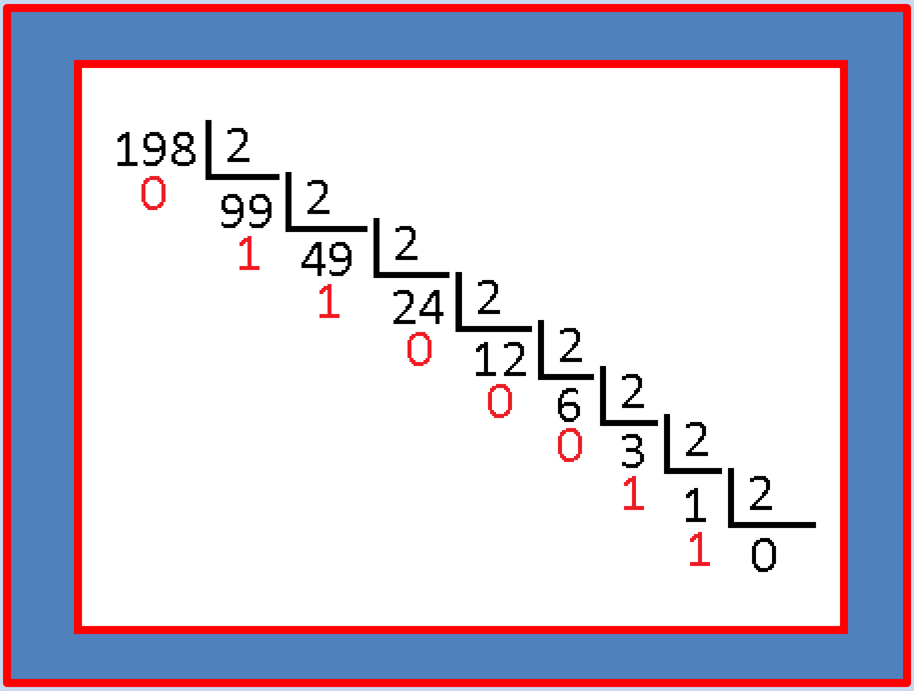
O Sistema de Numeração Binário, diferente do sistema de numeração decimal que trabalha com 10 algarismos (0 a 9), se utiliza de apenas 2 algarismos: 0 e 1. **"Como o sistema decimal oferece dez dígitos para um ciclo completo de uma casa e o sistema binário oferece apenas dois, os ciclos das casas binárias são mais curtos do que os das casas decimais, o que exige a criação de um número maior de casas binárias" (TKOTZ, 2005, p. 107).**

Por este motivo, para transformar um número decimal em um número binário, dividimos tal número seguidamente por 2 até obtermos o último quociente inteiro igual a zero.

Dessa forma, quando efetuamos a operacionalização do **método russo** e dividimos sucessivamente o primeiro fator por 2, estamos convertendo aquele número da base decimal para a base binária. Assim, **o número binário é obtido a partir do grupo de restos produzido por todas as divisões por 2 realizadas até obter-se o quociente inteiro zero.** Este quociente zero é obtido quando dividimos 1 por 2 (última das sucessivas divisões), o que produz quociente 0 e resto 1.

Como exemplo, na sequência vamos transformar o número **198** (base decimal) para a base binária, o que pode ser realizado com qualquer número de base dez.

Assim, dividimos o número 198 por 2, até que o último quociente seja 0:



Assim, a sequência de restos tomada de baixo para cima representa o número **198** na base binária:

1 1 0 0 0 1 1 0

Retornando o número da base binária para a base decimal

Conforme já vimos, o sistema decimal utiliza 10 dígitos e sua base é 10 e como o sistema binário tem apenas dois dígitos, sua base é 2. Nesse sentido, se um número decimal pode ser representado a partir de potências de base 10, um número binário pode ser representado por potências de base 2 (BUCHHOLZ; SHLEUDER, 1973).

De acordo com essa informação, podemos transformar um número da base binária para a base decimal, combinando cada algarismo de um número binário com uma potência de base 2. Como exemplo, vamos retornar o número **11000110** para a base decimal, ou seja, para o número **198**.

Para fazer isso, multiplicamos cada algarismo binário por uma potência de base 2, iniciando da direita para a esquerda pela maior potência de 2 contida no número 198 que, nesse caso é 128 (2^7), chegando até à potência 2^0. Assim, teremos:

$$1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

Resolvendo-se as potências, as multiplicações e as adições, obtemos:

$$1 \times 128 + 1 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

$$128 + 64 + 4 + 2 = 198$$

Assim, podemos converter qualquer número da base binária para a base decimal.

OBS.: Caso você precise transformar um número binário para a base decimal mas não sabe de antemão qual é o número decimal procurado, basta lembrar que o último algarismo binário deverá ser multiplicado por 2^0. Os demais algarismos são multiplicados seguindo-se a sequência 2^1, 2^2, 2^3... até chegar-se ao primeiro algarismo binário do número.

Funcionamento do Método da Multiplicação Russa

É a partir da relação estabelecida entre os sistemas binário e decimal que podemos entender o funcionamento do Método da Multiplicação Russa.

Para compreendermos tal método, vamos retomar o primeiro exemplo utilizado, ou seja, a multiplicação de **134** por **50**. Organizando novamente esses valores em um quadro, resolvendo da forma conforme já detalhada e agregando a tal quadro uma **terceira coluna com os restos das sucessivas divisões por 2**, temos:

134	50	0
67	100	1
33	200	1
16	400	0
8	800	0
4	1600	0
2	3200	0
1	6400	1

Observe que os números **ímpares** da primeira coluna, possuem como correspondentes na terceira coluna o número **1**, enquanto que os números **pares** da primeira coluna possuem como correspondentes na terceira coluna o número **0**.

O número binário relativo ao número decimal 134 é **10000110.**

Vamos, agora, retornar o número binário acima para o seu correspondente decimal 134:

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

$$1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

$$128 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 + 2 + 0 = 134$$

Funcionamento do Método da Multiplicação Russa

Observa-se nesse processo, que as potências de base 2 que são **multiplicadas por 1** representam os **números ímpares** da 1ª coluna do quadro. Já as potências de base 2 que são **multiplicadas por 0** representam os **números pares** da coluna.

Ao somar-se os produtos obtidos, verifica-se que o resultado será dado pela soma dos números correspondentes aos números ímpares do quadro, visto que os produtos com os números pares, por serem multiplicados por 0 resultarão em 0.

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

128	0	0	0	0	4	2	0

$$\begin{aligned} 128 \times 50 &= 6400 \\ 4 \times 50 &= 200 \\ 2 \times 50 &= 100 \\ 134 \times 50 &= 6700 \end{aligned}$$

Observe que o processo funciona como uma decomposição do número 134, cujas partes 128, 4 e 2 são multiplicadas separadamente pelo outro fator (50) e, ao final, os produtos obtidos são somados.

Isso explica o fato de que no método russo são selecionados na segunda coluna do quadro somente os números correspondentes aos números ímpares da primeira coluna para se realizar a soma que consiste no produto procurado. Desse modo, a **multiplicação russa** trabalha com base na ideia de que "[...] todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2" (EVES, 1995, p. 72).




Nesta seção, propomos algumas atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula, como forma de construção de conhecimentos sobre o **Método de Multiplicação Russa**.

1) Peça que os estudantes resolvam as seguintes operações para a prática do algoritmo russo em si, sem se preocupar, nesse momento, com o contexto:

a) 25 x 42	**b) 38 x 99**	**c) 112 x 123**
d) 350 x 67	**e) 235 x 235**	**f) 76 x 0**
g) 1000 x 48	**h) 369 x 1**	**i) 10 x 458**

2) <u>Peça que os estudantes resolvam a seguinte situação-problema</u>: *O Sr. Makarov possuía uma propriedade rural no interior da Rússia onde trabalhava com sua mulher e seus seis filhos. Naquele ano foram cultivados na propriedade cinco tipos de produtos: cevada, aveia, centeio, batata e trigo. Tais produtos foram colhidos e armazenados em sacos de 60 kg cada, sendo organizados para a comercialização 25 sacos de cevada, 22 sacos de aveia, 32 sacos de centeio, 48 sacos de batata e 65 sacos de trigo. Você sabe como o Sr. Makarov e seus familiares fizeram para contar quantos kg de cereais haviam sido produzidos no total, na propriedade?*

3) Estimule os estudantes a criar uma situação-problema que possa ser resolvida por meio do método de multiplicação russa. Lembre-os de utilizar um problema original e que tenha a ver com o contexto onde o método foi criado. Depois de elaborar o problema, peça a eles que o resolvam e escrevam a resposta por extenso, favorecendo a interpretação do que foi feito.

4) Solicite ao grupo que crie uma operação de multiplicação e resolva-a pelo método russo. Na sequência, peça que os estudantes enumerem passo a passo os procedimentos que são adotados para resolvê-la. Por fim, estimule-os a calcular a prova real por meio do método tradicional de multiplicação e a conferir com os colegas como realizaram a atividade.

Algumas dicas para a proposição destas atividades:

*** Proponha que os estudantes refaçam algumas dessas operações utilizando a propriedade comutativa da multiplicação e discuta com eles tal propriedade.**
•Discuta também as propriedades do elemento nulo (letra f) e do elemento neutro (letra h) da multiplicação.
*** Na segunda questão, discuta com os estudantes as formas como tal problema pode ser resolvido e proponha que resolvam de algumas maneiras distintas, utilizando o método russo de multiplicação. Uma possibilidade é o trabalho em grupos, com cada grupo utilizando a estratégia que ache mais apropriada, mas sem perder de vista o algoritmo aprendido. Ao final, faça comparações entre as resoluções e peça que os estudantes comentem sobre como pensaram no momento de efetuar tais cálculos.**
*** Já na questão 3, proponha aos estudantes que criem individual ou coletivamente o problema e que o mesmo possa ser resolvida por meio do método da multiplicação russa. Depois de resolvê-la, peça também que o grupo escreva com palavras próprias e em tópicos os procedimentos adotados tanto para retirar os dados do problema quanto para trabalhar com tais dados na operacionalização do cálculo. A socialização dos estudantes e/ou grupos dos problemas por meio de um seminário também pode ser interessante para se conhecer as diferentes situações criadas, as estratégias de resolução e fixar o processo de operacionalização.**

GABARITO

1) Peça que os estudantes resolvam as seguintes operações para a prática do algoritmo russo em si, sem se preocupar, nesse momento, com o contexto:

a) 25 x 42 = 1050

25	42	672 + 336 + 42 = 1050
12	84	
6	168	
3	336	
1	672	

b) 38 x 99 = 3762

38	99	3168 + 396 + 198 = 3762
19	198	
9	396	
4	792	
2	1584	
1	3168	

c) 112 x 123 = 1050

112	123
56	246
28	492
14	984
7	1968
3	3936
1	7872

7872 + 3936 + 1968 = 13776

d) 350 x 67 = 23450

350	67
175	134
87	268
43	536
21	1072
10	2144
5	4288
2	8576
1	17152

17152 + 4288 + 1072 + 536

+ 268 + 134 = 23450

e) 235 x 235 = 55225

235	235	
117	470	
58	940	
29	1880	30080 + 15040 + 7520 + 1880 + 470 + 235 = 55225
14	3760	
7	7520	
3	15040	
1	30080	

f) 76 x 0 = 0

76	0	
38	0	
19	0	
9	0	0 + 0 + 0 = 0
4	0	
2	0	
1	0	

g) 1000 x 48= 4800

1000	48	
500	96	
250	192	
125	384	
62	768	24576 + 12288 + 6144 + 3072 + 1536 + 384 = 48000
31	1536	
15	3072	
7	6144	
3	12288	
1	24576	

h) 369 x 1 = 369

369	1	
184	2	
92	4	
46	8	
23	16	256 + 64 + 32 + 16 + 1 = 369
11	32	
5	64	
2	128	
1	256	

i) 10 x 458 = 4580

10	458	3664 + 916 = 4580
5	916	
2	1832	
1	3664	

2) <u>Resolução da situação-problema</u>:

São 25 sacos de cevada, 22 sacos de aveia, 32 sacos de centeio, 48 sacos de batata e 65 sacos de trigo, totalizando 192 sacos com 60 kg cada. Logo, foram produzidos 11520 kg de cereais.

192	60	7680 + 3840 = 11520
96	120	
48	240	
24	480	
12	960	
6	1920	
3	3840	
1	7680	

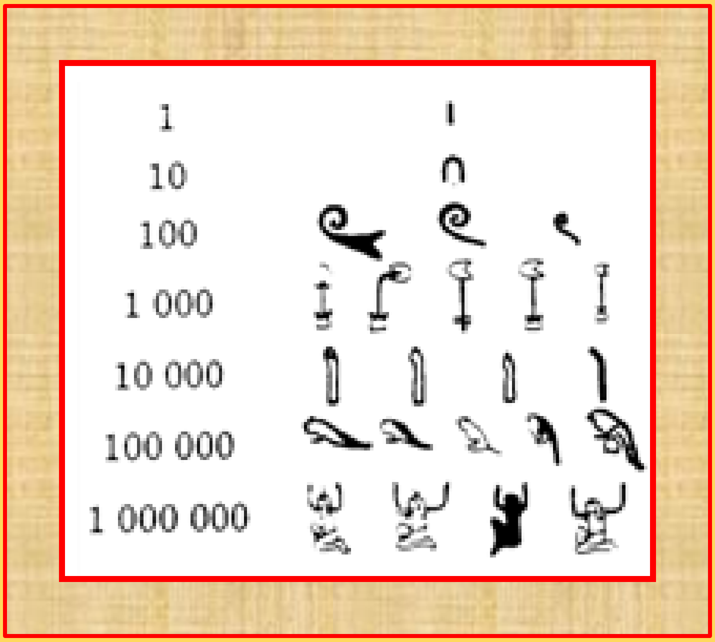
MULTIPLICAÇÃO EGÍPCIA

Civilização Egípcia

A civilização egípcia já apresentava forte desenvolvimento urbano e organização comercial por volta de 3000 a. C. (IFRAH, 1989).

Aos poucos, os egípcios foram tomando consciência de que a memória e a cultura perpetuada meramente por meio da oralidade se tornara insuficiente, erigindo-se assim a necessidade de guardar de forma duradoura a lembrança de informações.

Nesse sentido, essa civilização "[...] descobre a idéia tanto da escrita quanto da notação gráfica dos números [...]" (IFRAH, 1989, p. 159) como forma de ampliar e diversificar as maneiras de registro de sua herança cultural. Apesar do caráter bastante rudimentar de sua escrita numérica, os egípcios já faziam cálculos aritméticos em 2000 a. C., utilizando os hieroglíficos que estão ilustrados na figura abaixo.



Os egípcios inventaram uma escrita própria e um sistema de numeração – os **hieroglíficos** (figura ao lado), por volta de 3000 a.C., mais ou menos na mesma época da Mesopotâmia (IFRAH, 1989).

Multiplicação Egípcia

A adição era a operação aritmética fundamental no Egito e a multiplicação (assim como a divisão) era efetuada "[...] no tempo de Ahmes por sucessivas 'duplações'" (BOYER, 1974, p. 11), ou seja, somando-se o número (no caso, cada fator) com ele próprio. A palavra multiplicação que hoje utilizamos sugere, na verdade, o processo egípcio de realizar tal operação aritmética (BOYER, 1974).

Etapas do Método da Multiplicação Egípcia, de acordo com as ideias de Boyer (1974) e Ifrah (1989)

Para calcular o produto de dois números (que chamaremos de multiplicando e multiplicador) por meio do Método da Multiplicação Egípcia, substituímos o multiplicando que está na coluna da esquerda por 1, número este que colocamos em um quadro, ao lado do multiplicador. (1ª etapa).

Iniciamos efetuando duplicações consecutivas do número 1 (multiplicando), na primeira coluna, "[...] até obter o maior número contido neste multiplicando" (IFRAH, 1989, p. 169), ou seja, contido no número que foi inicialmente substituído por 1 (2ª etapa).

Na sequência, repete-se o processo de duplicação com o multiplicador, na segunda coluna, até obter um valor correspondente ao último número da coluna da esquerda (3ª etapa).

Multiplicação Egípcia

Depois, verificamos qual o número ou o conjunto de números que somados resultem no valor do multiplicando que foi, no princípio, substituído por 1, destacando-os (4ª etapa).

Feito isso, identificamos os números correspondentes a estes que se encontram na segunda coluna, e os somamos (5ª etapa). A soma será o resultado da multiplicação inicialmente procurada (6ª etapa).

Para ilustrar nossa explicação, vamos demonstrar o processo por meio de alguns exemplos:

a) 369 x 12

1ª etapa

1	12

2ª etapa

1	12
2	
4	
8	
16	
32	
64	
128	
256	

3ª etapa

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536
256	3072

Multiplicação Egípcia

4ª etapa

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536
256	3072

5ª etapa

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536
256	3072

Fazendo-se 256 + 64 + 32 + 16 + 1, obtém-se 369, que é o fator que foi inicialmente substituído por 1.

6ª etapa

1	12
16	192
32	384
64	768
256	3072

3072 + 768 + 384 +
+ 192 + 12 = 4428

Logo, 369 x 12 = 4428

Multiplicação Egípcia

b) 12 x 369 (propriedade comutativa do exemplo “a”)

1ª etapa

1	369

2ª etapa

1	369
2	
4	
8	

3ª etapa

1	369
2	738
4	1476
8	2952

4ª etapa

1	369
2	738
4	1476
8	2952

Fazendo-se 8 + 4, obtém-se 12, que é o fator que foi inicialmente substituído por 1.

5ª etapa

1	369
2	738
4	1476
8	2952

6ª etapa

4	1476
8	2952

2952 + 1476 = 4428

Logo, 12 x 369 = 4428

Multiplicação Egípcia

c) 128 x 19

1ª etapa

1	19

2ª etapa

1	19
2	
4	
8	
16	
32	
64	
128	

3ª etapa

1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216
128	2432

4ª etapa

1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216
128	2432

Nesse caso, o último valor duplicado (128) atingiu o mesmo valor do fator que foi substituído por 1. Isso porque tal valor corresponde a uma potência de base 2 (2^7).

Multiplicação Egípcia

5ª etapa

1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216
128	2432

6ª etapa

128	2432

O valor correspondente a 128 é o resultado procurado → **2432.**

Logo, 128 x 19 = 2432

d) 84 x 15 (processo de resolução resumido)

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240
32	480
64	960

960 + 240 + 60 = **1260.**

Logo, 84 x 15 = 1260

Funcionamento do Método da Multiplicação Egípcia

O *Método da Multiplicação Egípcia* também se baseia na ideia de que todo número pode ser representado por meio de uma soma de potências de base 2 (EVES, 1995).

Porém, torna-se mais simples identificar a eficácia deste método do que acontece no método dos camponeses russos, já que os egípcios já trabalhavam, na própria operacionalização, com potências de base 2, ou seja, já trabalhavam na base numérica binária.

Assim, quando na primeira coluna do quadro de resolução substituímos o multiplicando por 1, já estamos iniciando o processo por 2^0. Essa potência vai aumentando progressiva e constantemente até atingir a maior potência que não ultrapasse aquela contida no multiplicando original, ou seja, naquele valor que foi substituído por 1 ou 2^0.

Logo, ao selecionarmos as potências de base 2 cujo desenvolvimento e posterior soma resultem no valor do multiplicando original e somando os valores correspondentes a estes contidos na segunda coluna, estamos, automaticamente, efetuando a multiplicação do primeiro fator, *decomposto*, pelo segundo fator.

O método funciona, então, como uma decomposição do primeiro fator em um grupo de números que correspondem a potências de base 2, que são multiplicadas separadamente pelo segundo fator.

Funcionamento do Método da Multiplicação Egípcia

Os produtos calculados separadamente ao serem somados produzirão, ao final, o resultado que se buscava no início da operação.

Aplicando tal pensamento ao exemplo 369 x 12, apresentado anteriormente, teríamos:

- **o número 369 foi decomposto nas seguintes potências de base 2: $2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0$;**
- **desenvolvendo tais potências, obtemos 256 + 64 + 32 + 16 + 1 (valores destacados na primeira coluna do quadro do exemplo apresentado);**
- **realizando as multiplicações destes valores pelo segundo fator (12) separadamente, temos:**

256 x 12 + 64 x 12 + 32 x 12 + 16 x 12 + 1 x 12;

- **efetuando-se as multiplicações acima, obtemos: 3072 + 768 + 384 + 192 + 12 (valores extraídos e somados da 2ª coluna do quadro do exemplo apresentado);**
- **as somas uma vez efetuadas produzem o número 4.428, que é o resultado da multiplicação inicialmente procurado.**

Nesta seção, propomos algumas atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula, como forma de construção de conhecimentos sobre o Método de Multiplicação Egípcia.

1) Peça que os estudantes resolva a seguinte situação-problema, utilizando o método da Multiplicação Egípcia:

No ano 2000 a.C. na região de Mênfis, no Egito, um funcionário do fisco vai até a casa de um agricultor de cereais para controlar o estágio da produção e fixar o valor do imposto incidente sobre a produção daquele ano. O agricultor encarrega alguns trabalhadores de medir o grão por metros quadrados e de embalá-los nos sacos. A propriedade neste ano produziu dois tipos de trigo: o amido e a espelta, além da cevada comum. Para não se enganar com relação à variedade de cereais, os trabalhadores repartem o amido em fileiras de trinta e cinco sacos, a espelta em fileiras de vinte e dois sacos e a cevada em grupos de dezoito sacos. Após a organização, os trabalhadores perceberam que em cada fileira de amido havia 256 sacos, em cada fileira de espelta havia 69 sacos e em cada fileira de cevada havia 108 sacos. Qual a quantidade de sacos de cereais produzida neste ano na propriedade? (Fonte: adaptado de IFRAH, 1989)

2) Nas operações realizadas na questão anterior, peça que os estudantes apliquem a propriedade comutativa e comprovem que a mesma funciona para o método egípcio.

GABARITO

1) Resolução da situação-problema:

Os trabalhadores organizaram a produção da seguinte maneira: **AMIDO**: 35 fileiras com 256 sacos cada uma; **ESPELTA**: 22 fileiras com 69 sacos cada e **CEVADA:** 18 fileiras com 108 sacos cada uma delas. Efetuando-se as respectivas multiplicações e depois somando-se os produtos obtidos que expressam a quantidade de cada cereal, obtém-se a quantidade total de sacos produzidos pela propriedade naquele ano.

1	256	AMIDO 35 X 256 8192 + 512 + 256 = 8960
2	512	
4	1024	
8	2048	
16	4096	
32	8192	

1	69	ESPELTA 22 X 69 1104 + 276 + 138 = 1518
2	138	
4	276	
8	552	
16	1104	

1	108	CEVADA 18 X 108 1728 + 216 = 1944
2	216	
4	432	
8	864	
16	1728	

Logo, foram produzidos, no total, 12422 sacos de cereais naquele ano.

2) Nas operações realizadas na questão anterior, peça que os estudantes apliquem a propriedade comutativa e comprovem que a mesma funciona para o método egípcio.

1	35
2	70
4	140
8	280
16	560
32	1120
64	2240
128	4480
256	8960

AMIDO
256 X 35

256 → 8960

1	22
2	44
4	88
8	176
16	352
32	704
64	1408

ESPELTA
69 X 22

1408 + 88 + 22 = 1518

1	18
2	36
4	72
8	144
16	288
32	576
64	1152

CEVADA
108 X 18

1728 + 216 = 1944

Para saber mais...

Os egípcios reproduziam seus algarismos e os signos de sua escrita “[...] gravando ou esculpindo em monumentos de pedra, por meio do cinzel e do martelo; ou ainda traçando-os em lascas de rocha, cacos de cerâmica ou em folhas de papiro, com o auxílio de um caniço de ponta esmagada, mergulhado numa matéria colorante” (IFRAH, 1989, p. 158).

Multiplicação Chinesa

Civilização Chinesa

A civilização da China é muito mais antiga que as civilizações gregas e romanas, porém, mais jovem que aquelas que se estabeleceram no vale do Rio Nilo e da Mesopotâmia. Sua idade remonta à Idade Potâmica[1] e certa tradição situa cronologicamente a existência do primeiro império chinês em 2750 a. C. Não se sabe ao certo, porém, se tal data corresponde à realidade ocorrida nas margens dos rios Iang-tse e Amarelo (BOYER, 1974).

Os matemáticos utilizavam-se, nos tempos remotos, de elementos da natureza para instrumentalizar as ideias que possuíam. Não por acaso que os números naturais receberam esta denominação, dada a recorrência do homem primitivo a objetos como pedras, ossos de animais e nós em cordas, através de correspondência biunívoca, para o ato que hoje chamamos “contar”.

De acordo com o que nos traz Ifrah (1989), os chineses utilizaram por muito tempo sistemas de cordas com nós para a realização de atividades “[...] de recenseamento, de contabilidade e de arquivo, nos tempos remotos em que a escrita ainda era pouco conhecida ou insuficientemente difundida” (IFRAH, 1989, p. 103).

[1]O termo “Potâmica” remete à ideia de *Potamus*, que significa “rio” no idioma grego. Nesse sentido, Idade Potâmica se refere ao período histórico situado aproximadamente entre 4000 a. C. e 800 a. C, em que as civilizações se fixavam em vales de grandes rios para se beneficiarem da água para a subsistência e para as atividades a que se dedicavam. Boyer (1974) denomina de “estágio potâmico” a parte mais antiga do período histórico.




Civilização Chinesa

"'Nas épocas mais antigas os homens eram governados por meio do sistema de cordões com nós', precisa o *I Ching (Livro das mutações)*, obra clássica cuja redação data provavelmente da primeira metade do primeiro milênio a.C. Segundo a tradição, o semilegendáio imperador Shen Nong (um dos que teriam lançado as bases da civilização chinesa) teria elaborado o sistema de contabilidade em cordões com nós e contribuído para a propagação deste método" (IFRAH, 1989, p. 103).

Contudo, a China desenvolveu na antiguidade uma Matemática bastante complexa. "Na literatura matemática chinesa, podem ser encontrados métodos para a resolução de equações lineares, quadráticas, cúbicas e de graus ainda maiores. Também foram encontradas equações envolvendo duas, três, quatro ou mais incógnitas" (NICOSIA, 2010, p. 83 – tradução nossa).

A multiplicação na China antiga apoiava-se na ideia da adição e utilizava-se de bastões para representar os números a serem multiplicados. Cada algarismo era representado pela quantidade de bastões correspondentes. Assim, o número 85 no modo chinês seria representado por um conjunto de 8 e um conjunto de 5 bastões, justapostos com um intervalo entre eles.

Nesse sentido, por meio de tal método, caso se quisesse multiplicar o número 85 pelo número 23, por exemplo, se colocaria um conjunto de 2 e de 3 bastões sobrepostos perpendicularmente em um conjunto de 8 e de 5 bastões. Isso é o que detalharemos na seção seguinte.

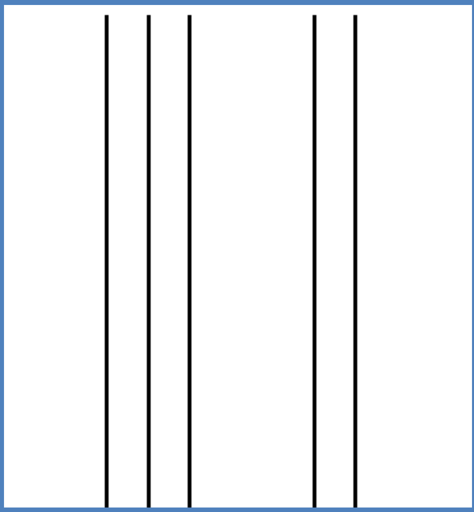
Multiplicação Chinesa

Nicosia (2010) descreve a operacionalização do método afirmando que a multiplicação chinesa é obtida por meio do cruzamento de bastões, contando-se ordenadamente os cruzamentos ou pontos de intersecção. "O sistema é realmente simples, mesmo para números relativamente altos" (NICOSIA, 2010, p. 82 – tradução nossa).

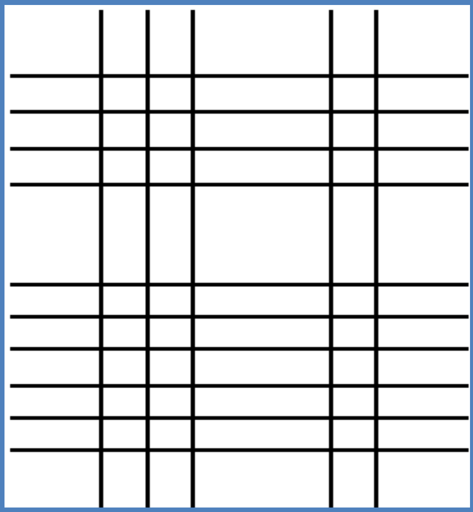
Para compreendermos como tal método é desenvolvido, vamos descrevê-lo por meio de alguns exemplos, iniciando pelo produto 32 x 64.

No 1º passo do método, organizam-se as varetas para representar o primeiro fator, o número 32, agrupando-se três e duas varetas verticalmente, da esquerda para a direita. No 2º passo organiza-se o segundo fator, sobrepondo-se perpendicularmente as varetas que representam os números 6 e 4, de baixo para cima, sobre as varetas do primeiro fator.

1º Passo

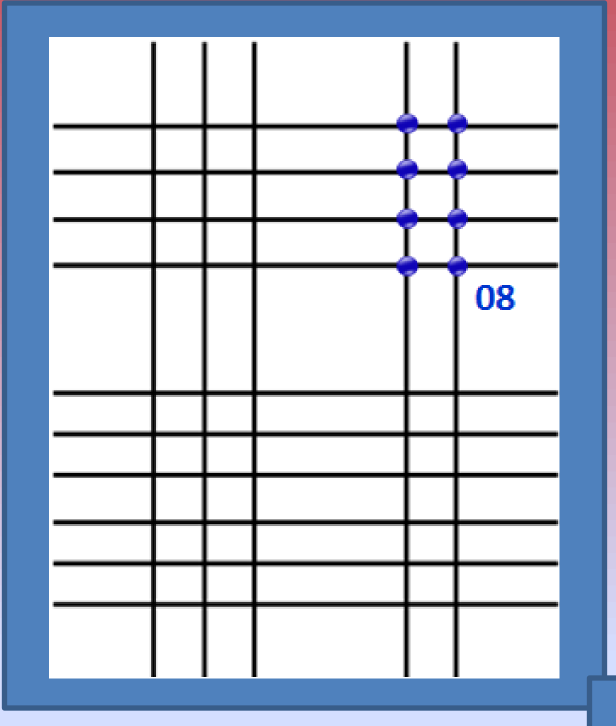


2º Passo



Multiplicação Chinesa

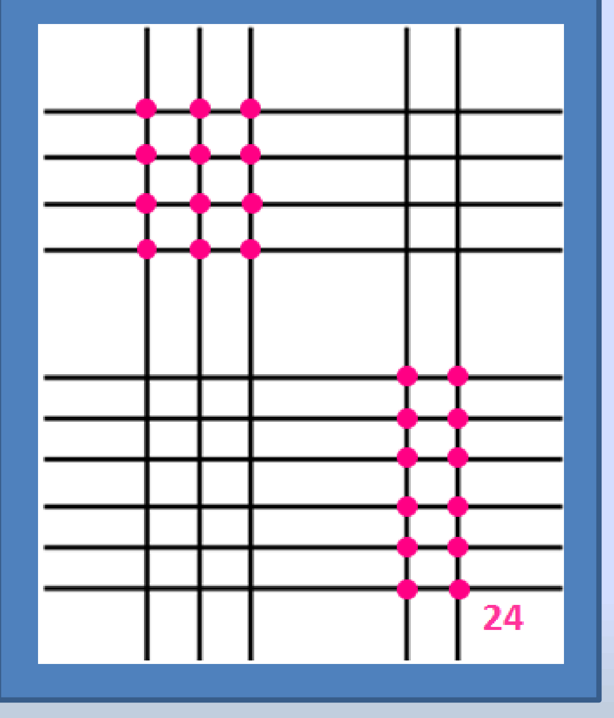
A partir de então, realiza-se o cálculo contando-se os grupos de pontos de intersecção da direita para a esquerda, conforme mostram os esquemas a seguir.



3º Passo

A soma dos pontos de intersecção do canto superior direito indicará o algarismo das unidades do produto que, nesse caso, é 8:

			8



4º Passo

A soma dos pontos de intersecção do canto superior esquerdo e do canto inferior direito indicado é igual a 24. Nesse caso, o 4 indica o algarismo das dezenas do produto e o 2 vai como reserva ao cálculo seguinte. Assim, o resultado parcial fica:

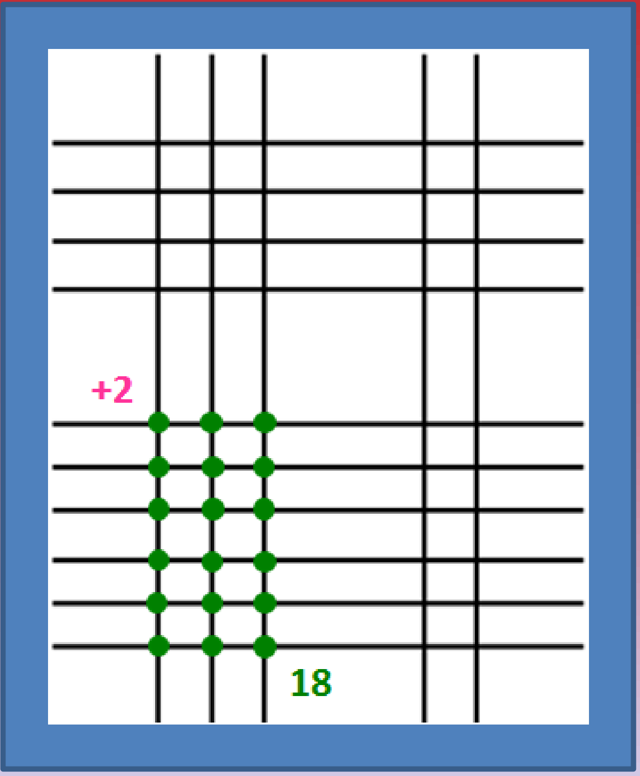
		4	8

Multiplicação Chinesa

5º Passo

A soma dos pontos de intersecção do canto inferior esquerdo é igual a 18. Somando a este resultado o número 2 que ficou como reserva do cálculo anterior, obtemos o número 20, que formará a centena e a unidade de milhar do resultado final:

2	0	4	8



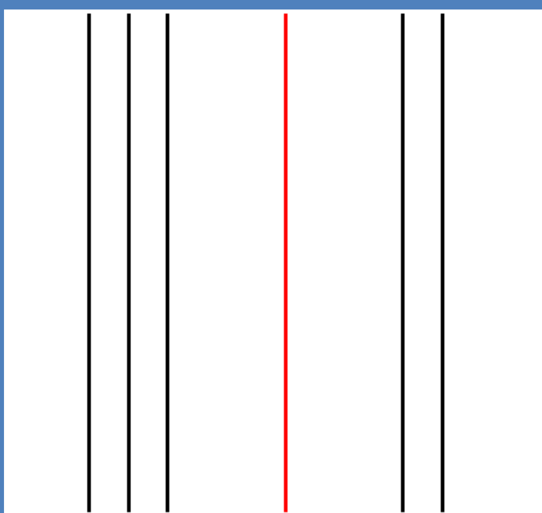
Logo, o resultado da multiplicação 32 x 64 é 2048.

Na sequência, resolveremos um exemplo em que um dos fatores contém o número zero. No método original, o local que representava o número zero era deixado em branco. Em nosso caso, vamos utilizar nesse local uma vareta de cor distinta das demais. Embora os cruzamentos obtidos com tal vareta não sejam contabilizados para o resultado, achamos importante que a mesma seja incluída de forma a facilitar a observação das diagonais que devem ser combinadas em busca do resultado.

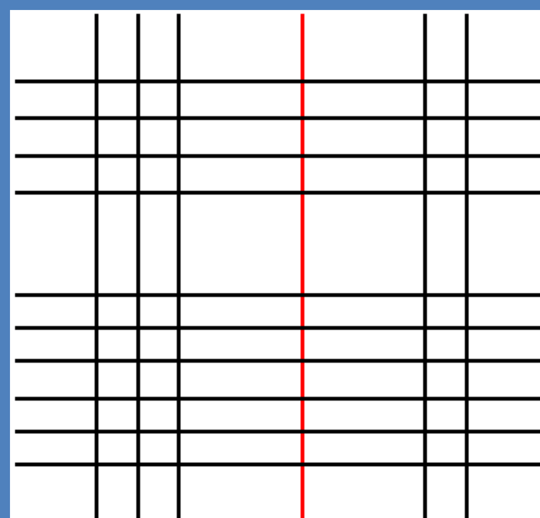
Multiplicação Chinesa

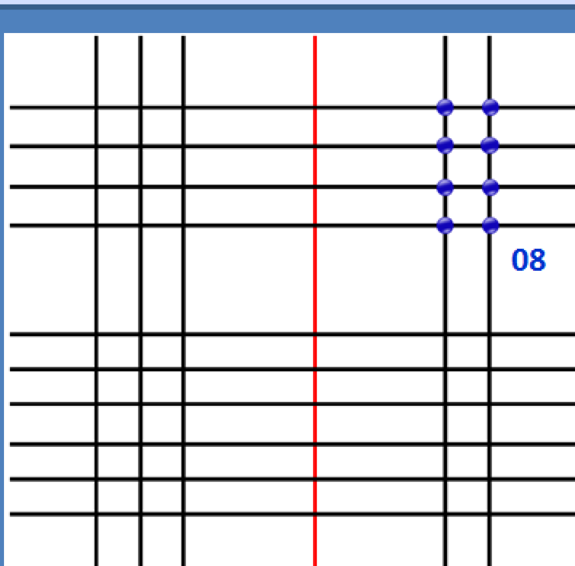
Vamos resolver, então, o produto 302 x 64. Conforme demonstrado no exemplo anterior, nos dois primeiros passos as varetas que representam os algarismos dos fatores são sobrepostas, perpendicularmente.

1º Passo



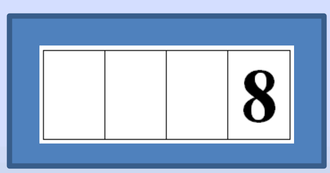
2º Passo

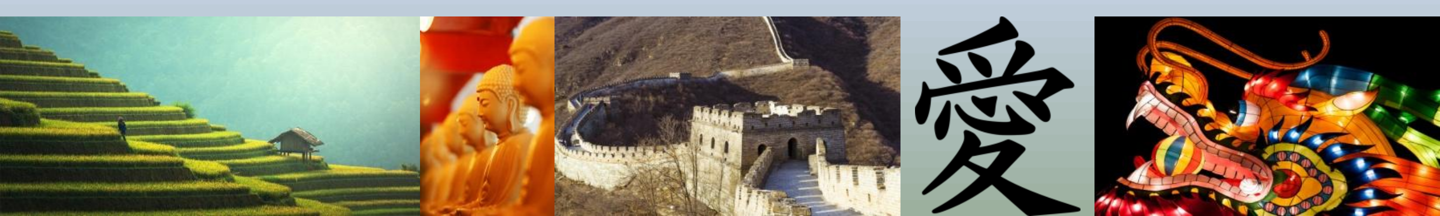




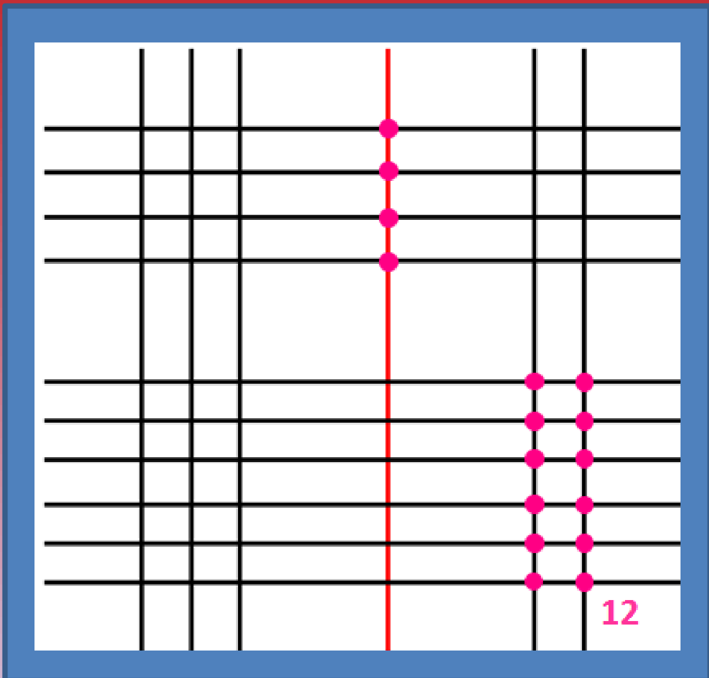
3º Passo

A soma dos pontos de intersecção do canto superior direito indicará o algarismo das unidades do produto que, nesse caso, é 8:





Multiplicação Chinesa



4º Passo

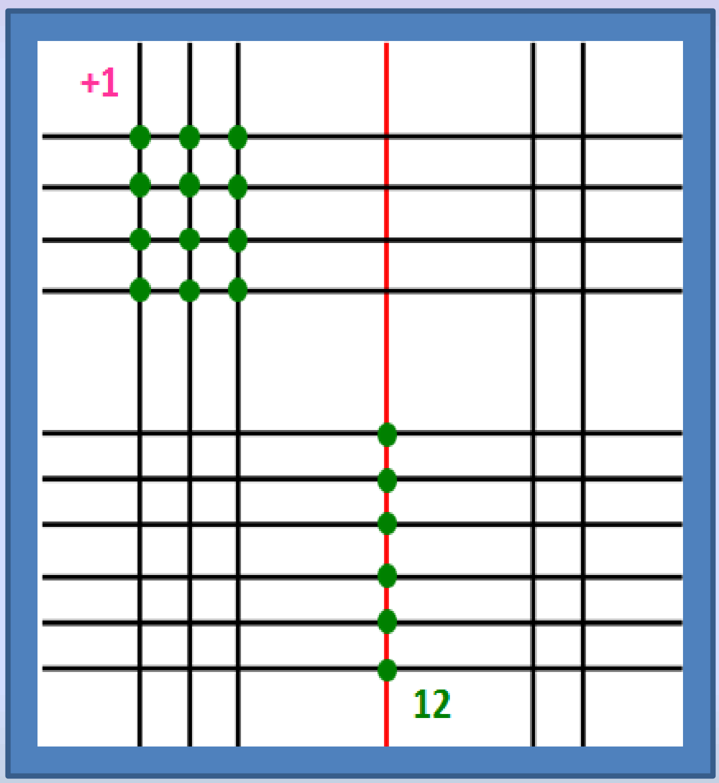
A soma do conjunto de pontos de intersecção do centro superior (que será zero) e do canto inferior direito é igual a 12. Nesse caso, o número 2 indicará o valor das dezenas do produto e o número 1 fica como reserva para o cálculo seguinte. Logo, o resultado parcial fica:

			2	8

5º Passo

A soma dos pontos de intersecção do canto superior esquerdo com os pontos da parte inferior central (que é igual a zero) será 12. A esse valor adiciona-se o 1 que ficou de reserva do cálculo anterior, totalizando 13. Logo, o 3 será o algarismo das centenas do produto procurado e o 1 fica como reserva para o próximo cálculo. Resultado parcial :

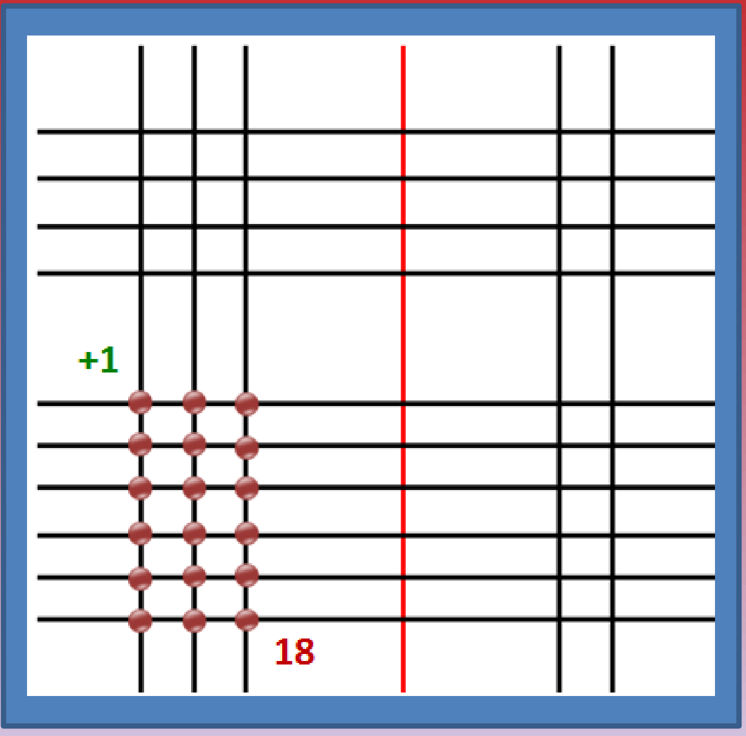
		3	2	8



Multiplicação Chinesa

6º Passo

A soma dos pontos de intersecção da parte inferior esquerda do esquema será igual a 18. Somando-se a este valor o número 1 que ficou como reserva do cálculo anterior, obtém-se 19, que indicará os algarismos da unidade e da dezena de milhar do resultado. Assim, o resultado final da multiplicação será:



1	9	3	2	8

Logo, o resultado da multiplicação 302 x 64 é 19328.

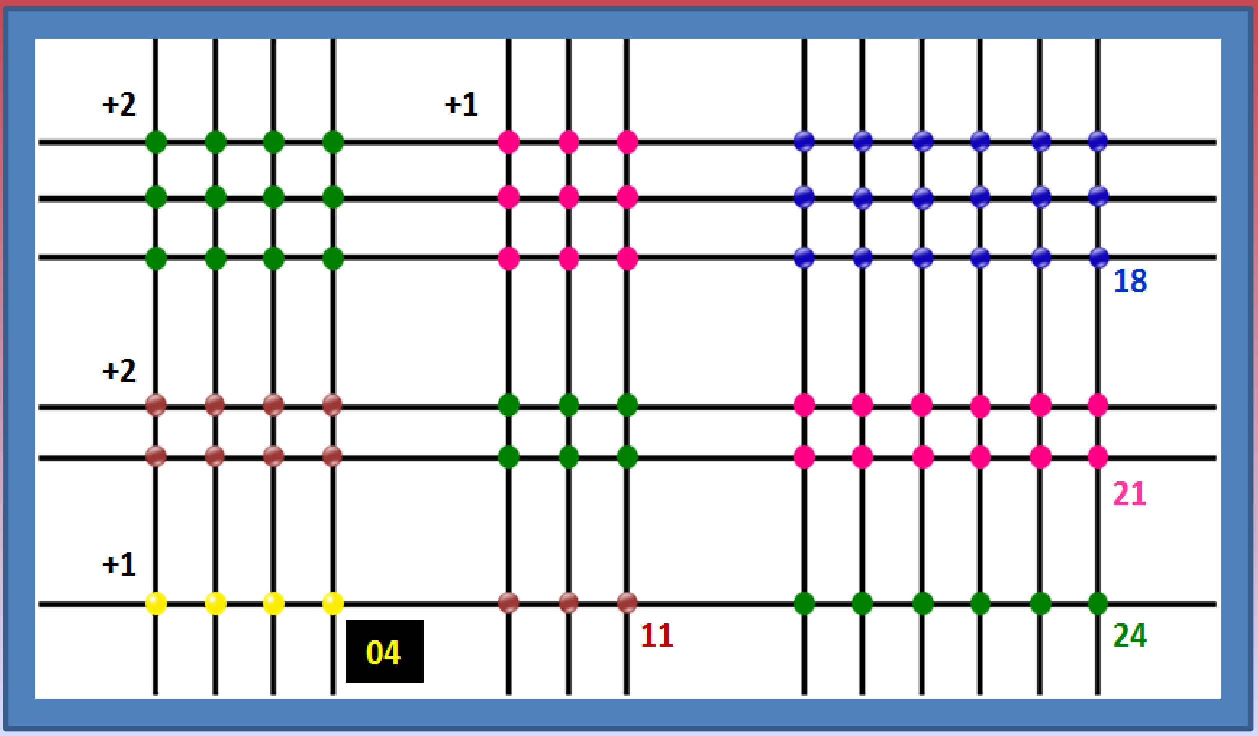
No exemplo a seguir temos o produto de duas centenas, sendo que neste cálculo todas as etapas são demonstradas concomitantemente por meio de uma mesma figura.

Observe que quanto maiores forem os números que estão sendo multiplicados, maior será a quantidade de diagonais que serão consideradas para a obtenção do resultado.

Por fim, salientamos que o fato de posicionarmos as varetas do 1º fator na vertical e do 2º fator na horizontal e, assim, realizarmos os cálculos da direita para a esquerda é uma convenção por nós adotada, sendo que o processo pode ser realizado também no sentido contrário.

Multiplicação Chinesa

3º exemplo: 436 x 123



1º passo:

Unidade: 18 unidades (8)

				8

2º passo:

Dezena: 21 + 1 = 22 (2)

			2	8

3º passo:

Centena: 24 + 2 = 26 (6)

		6	2	8

4º passo:

Unidade de milhar: 11 + 2 = 13 (3)

	3	6	2	8

5º passo:

Dezena de milhar: 4 + 1 = 5 (5)

5	3	6	2	8

Logo, o resultado da multiplicação 436 x 123 é 53628.

Funcionamento do Método da Multiplicação Chinesa

Observando a dinâmica do cálculo do *Método da Multiplicação Chinesa* e procurando trazê-lo para a linguagem matemática atual, podemos observar que o conjunto de pontos de intersecção de cada etapa é multiplicado por potências de base 10, iniciando por 10^0.

Nesse sentido, a quantidade de pontos de intersecção das unidades é multiplicado por 1 (10^0), o número de pontos das dezenas é multiplicado por 10 (10^1), as intersecções das centenas multiplicamos por 100 (10^2), o conjuntos de pontos de intersecção das unidade de milhar é multiplicado por 1000 (10^3) e assim, sucessivamente. Dessa forma, segundo nosso entendimento, podemos afirmar que o método chinês está fundamentado no sistema numérico decimal.

Para demonstrar esse raciocínio, utilizamos o exemplo já apresentado anteriormente, 436 x 123. Conforme podemos observar no esquema da página seguinte, esse cálculo produz as seguintes quantidades de pontos de intersecção, em cada posição:

*** unidades → 18 pontos;**

*** dezenas → 21 pontos;**

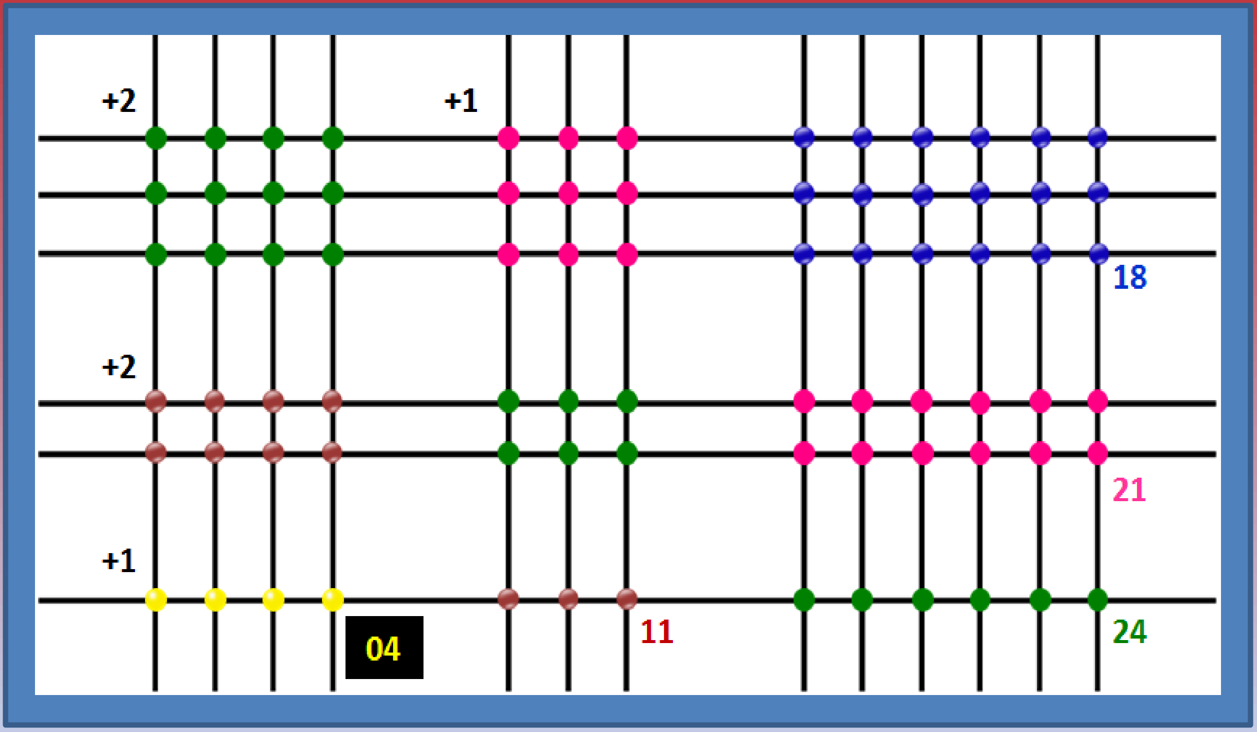
*** centenas → 24 pontos;**

*** unidades de milhar → 11 pontos;**

*** dezenas de milhar → 4 pontos.**

Funcionamento do Método da Multiplicação Chinesa

436 x 123 pelo *Método da Multiplicação Chinesa:*



Dessa forma, temos:

$$18 \times 10^0 + 21 \times 10^1 + 24 \times 10^2 + 11 \times 10^3 + 4 \times 10^4$$

Resolvendo-se tais potências e, na sequência, as multiplicações, obtemos o resultado já encontrado pelo método chinês:

$$18 \times 1 + 21 \times 10 + 24 \times 100 + 11 \times 1000 + 4 \times 10000 \rightarrow$$

$$\rightarrow 18 + 210 + 2400 + 11000 + 40000 = 53.628$$

Atividades de multiplicação para serem resolvidas pelo método chinês

1) Utilizando o método de multiplicação chinesa, calcule os seguintes produtos:

a) 25 x 6 | **b) 25 x 87** | **c) 250 x 87**

d) 9 x 111 | **e) 15 x 15** | **f) 3291 x 72**

g) 652 x 356 | **h) 226 x 209** | **i) 94 x 657**

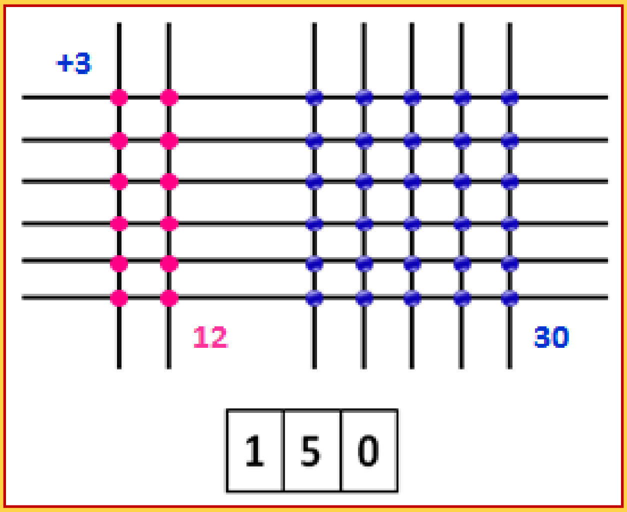
2) Por volta do ano 1000 a.C., no Vale do Rio Amarelo, o Imperador Shang solicitou a alguns técnicos que contabilizassem quantos blocos de pedra seriam necessários para a reconstrução de parte de uma muralha que havia sido danificada. O imperador questionou os técnicos da seguinte maneira: "quantos blocos de pedra iremos utilizar na construção do trecho da muralha situada perto do lago Ya, sendo que são necessários 78 blocos no comprimento e 42 blocos na altura da muralha?" Resolva tal situação utilizando para tanto o método de multiplicação chinesa.

3) Peça aos estudantes que reúnam-se em grupos e que utilizando o celular, gravem um vídeo explicando um exemplo próprio de cálculo de um produto realizado por meio do método chinês. No encontro seguinte, dê a cada grupo a oportunidade de apresentar o seu vídeo para o restante da turma, mediando as discussões que forem surgindo.

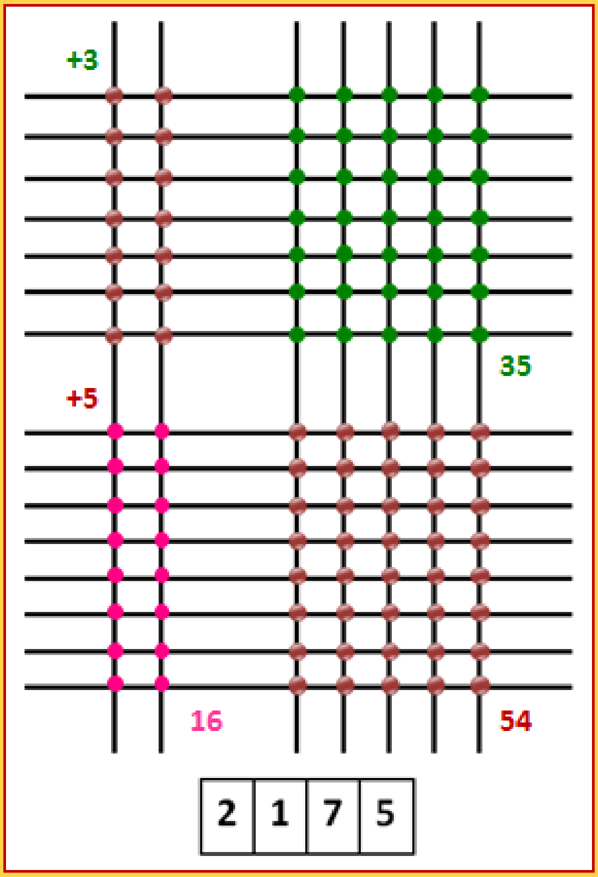
GABARITO

1) Utilizando o método de multiplicação chinesa, calcule os seguintes produtos:

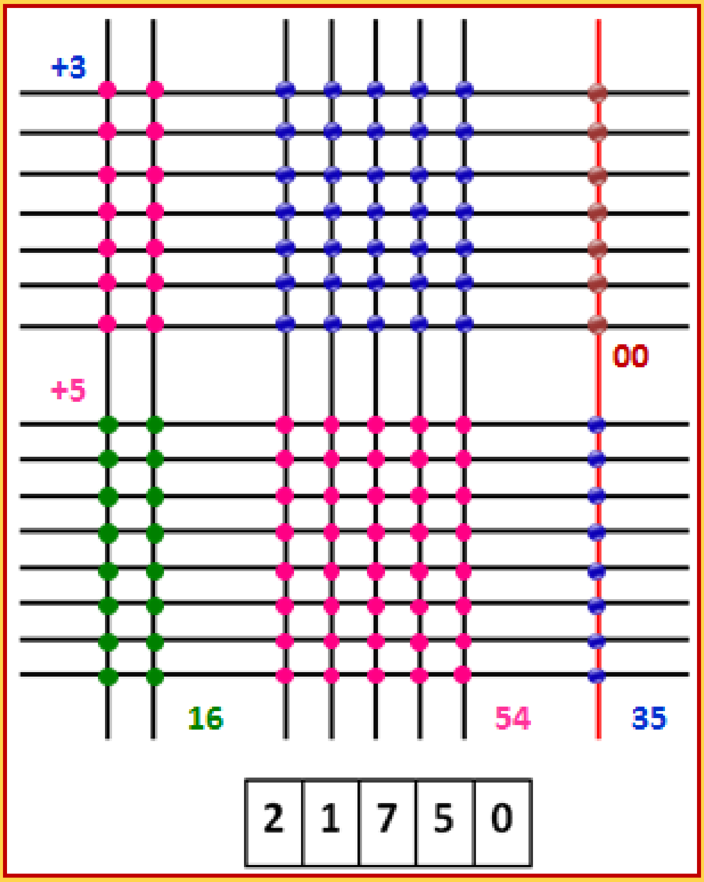
a) 25 x 6 = 150



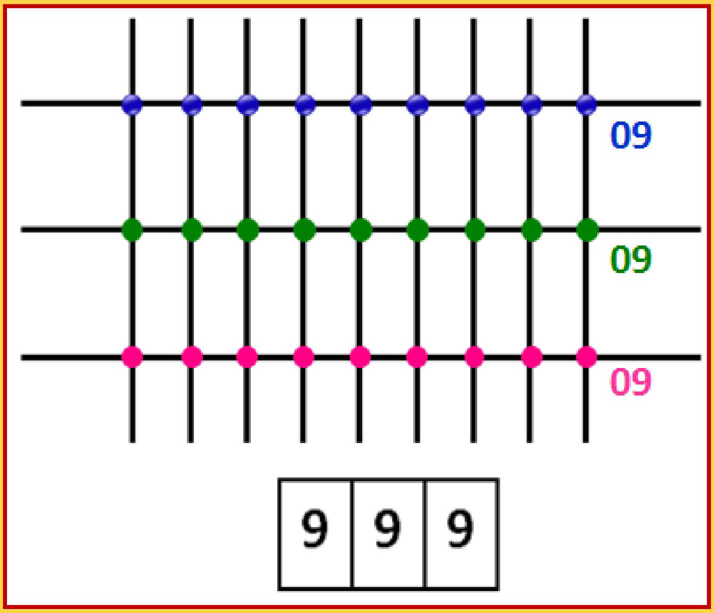
b) 25 x 87 = 2175



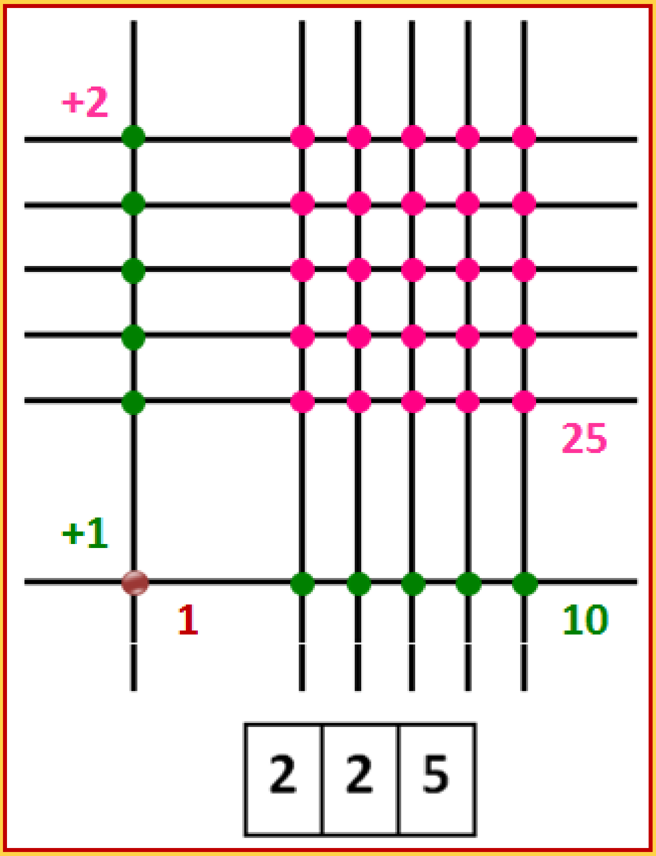
c) 250 x 87 = 21750



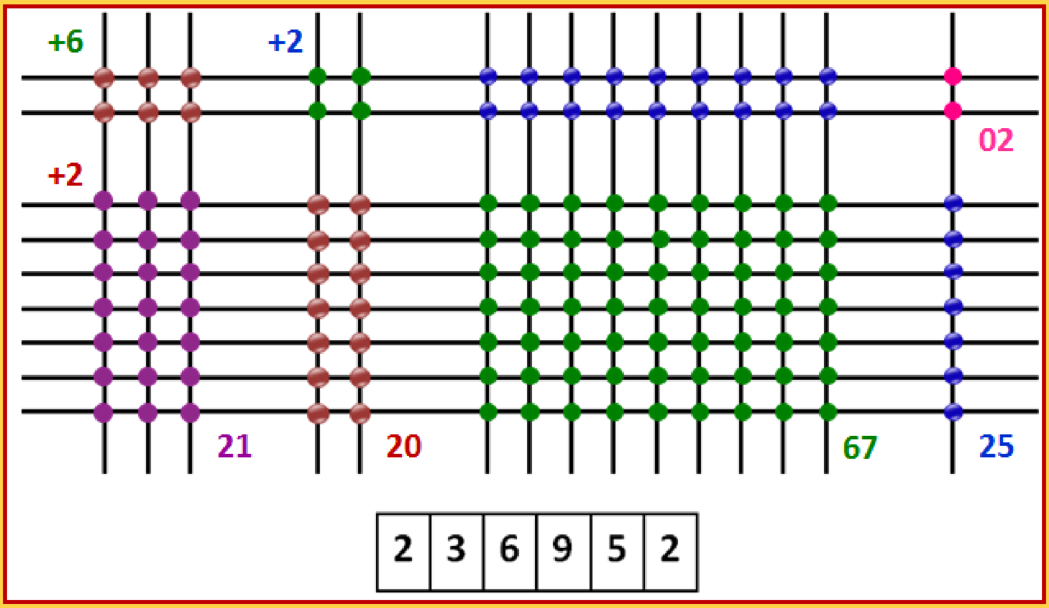
d) 9 x 111 = 999



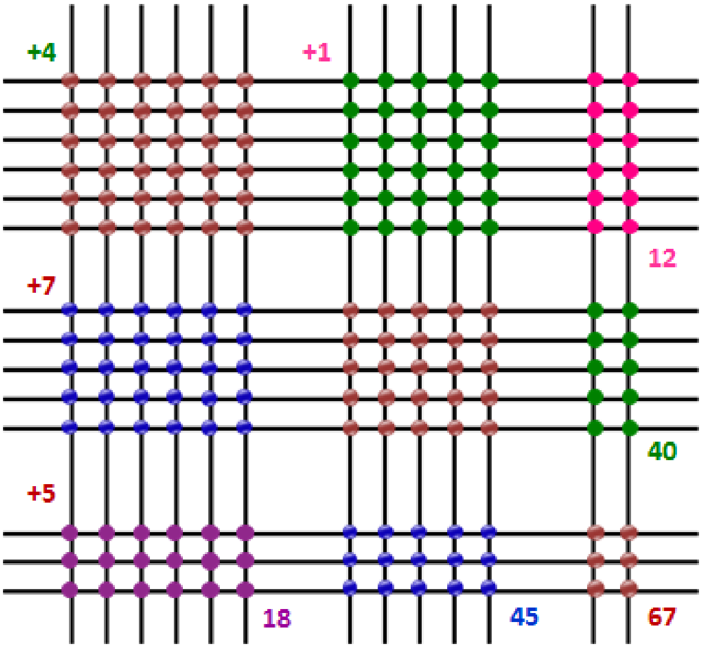
e) 15 x 15 = 225



f) 3291 x 72 = 236952

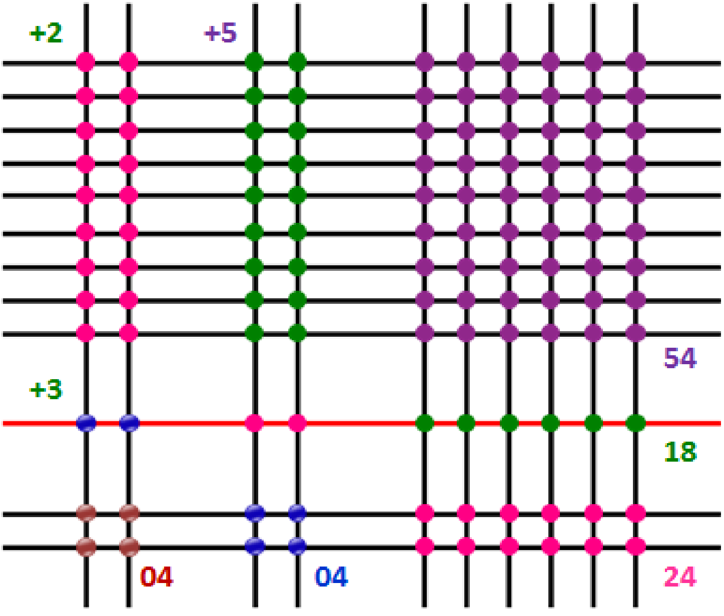


g) 652 x 356 = 232112



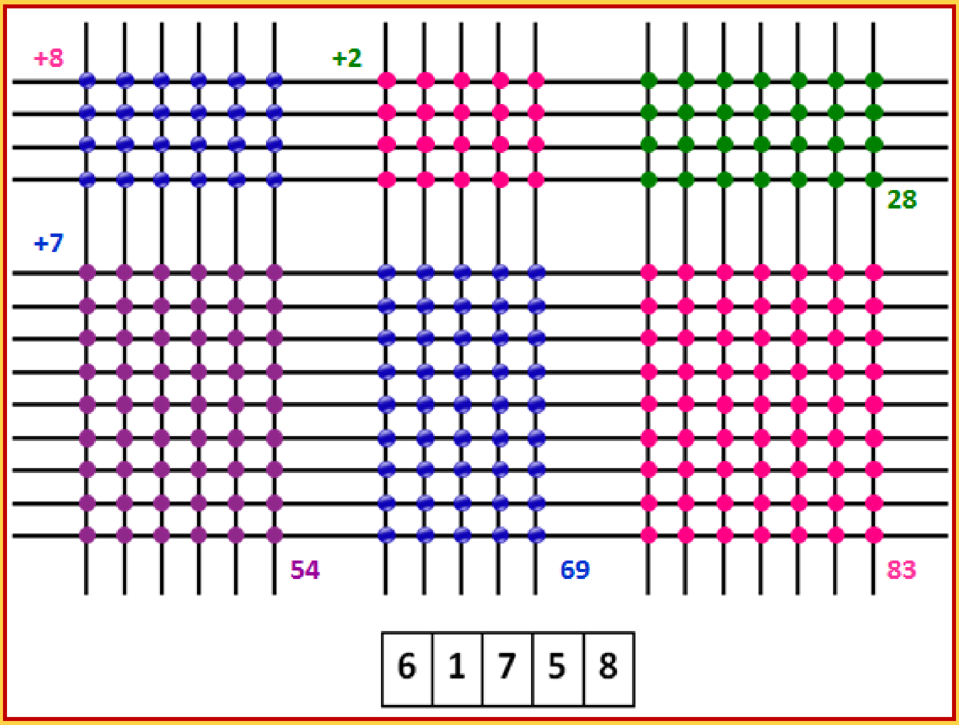
2	3	2	1	1	2

h) 226 x 209 = 47234

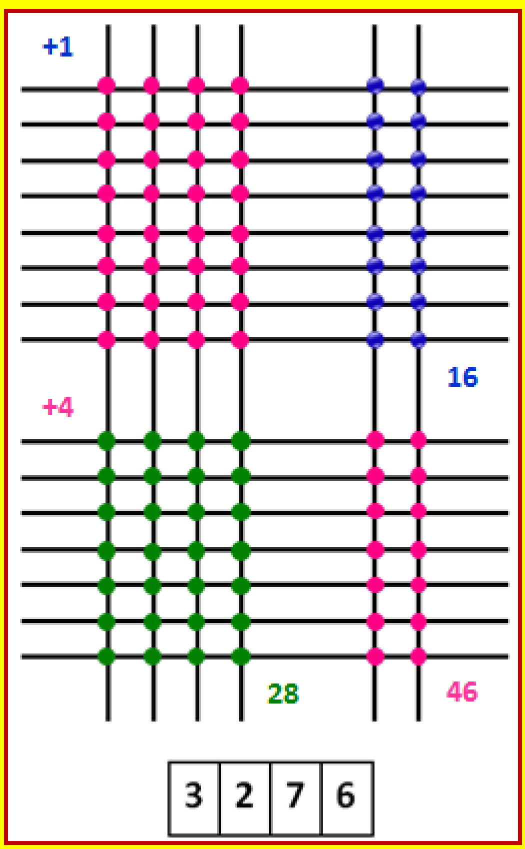


4	7	2	3	4

i) 945 x 657 = 61758



2) Como a quantidade de blocos necessária abrange uma área retangular de 78 por 42 blocos, resolvemos a situação-problema calculando 78 x 42, que resulta em 3276 blocos.



Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BOLT, B. **Mais Actividades Matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1992.

BUCHHOLZ, W. SHLEUDER, S. **Álgebra Booleana.** Buenos Aires: Marymar, 1973.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da Teoria à Prática. Campinas: Papirus, 1996.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

IFRAH, G. **Os Números: história de uma grande invenção**. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

LANDIM, W. **A Origem dos Símbolos Universais dos Computadores.** 2010. Disponível em: <https://goo.gl/Q9AL5o>. Acesso em: 18 set. 2017.

MIGUEL, A. **As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão:** Argumentos Reforçadores e Questionadores**.** Revista Zetetiké, Campinas-SP, v. 5, n. 9, p 73-105, 1997.

NICOSIA, G. G. **Cinesi, Scuola e Matematica**. California: Creative Commons, 2010.

SOUZA, J. C. M. **Matemática Divertida e Curiosa**. 19ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

TKOTZ, V. **Criptografia**: Segredos embalados para viagem. São Paulo: Novatec, 2005.

“A diferença entre presente, passado e futuro é apenas uma persistente ilusão”
(ALBERT EINSTEIN)