Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Natanael de Oliveira Mota
Natanael Freitas Cabral

PRODUTO EDUCACIONAL E APRENDIZAGEM DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém - PA

2020

Natanael de Oliveira Mota
Natanael Freitas Cabral

PRODUTO EDUCACIONAL E APRENDIZAGEM DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Belém – PA

2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Prof. Dr. Antonio José Lopes
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Natanael Freitas Cabral
Miguel Chaquiam
Gustavo Nogueira Dias

MOTA, Natanael de Oliveira e CABRAL, Natanael Freitas. Produto educacional e aprendizagem de progressão aritmética e suas aplicações por meio da sequência didática. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Progressão aritmética.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Prezado Professor, o presente material faz jus a um repositório de atividades de aprendizagem e avaliação de pesquisa na perspectiva de Progressão Aritmética e suas aplicações.

Tais resultados fazem merecimento aos dados da dissertação de mestrado de Mota (2019), denominada **Aprendizagem de Progressão Aritmética e suas aplicações por meio da Sequência didática**, cujo objetivo principal do autor é de analisar por meio de uma sequência didática as circunstâncias que estabelecem relação com o ensino de Progressão Aritmética.

Desta maneira, centraliza seu objetivo em elaborar um projeto com atividades envolvendo Progressões Aritméticas (PA) aplicadas como Sequência Didática em uma amostra de alunos com auxílio da Análise Microgenética segundo Zabala (2007), Vygotsky (1984), Pais (2011), Teixeira e Passos (2013), Pommer (2008) e outros autores incluídos no projeto. A sequência de atividades propostas usou como base a Engenharia Didática na sistematização metodológica para a realização de sua pesquisa, teve a colaboração de revisões da literatura de Pais (2002) e Artigue (1996).

O método escolhido para investigação está fundamentado na Microgenética, assim, os detalhes dos resultados obtidos “descreve as características de uma determinada população ou fenômeno, e os interpreta”. (RÚDIO, 2002 apud COSTA E COSTA, 2011, p. 36). O autor considera que no Brasil, as pesquisas na área de Educação como teses, dissertações e artigos, utilizam o “método Microgenético” na forma de “análise Microgenética” dos dados. E continua citando Góes, (2000) que confirma a abordagem metodológica Microgenética como “análise Microgenética. Teve como base teórica também as literaturas de Tomio, Schroeder e Adriano (2017) citando o trabalho de Vigotsky (2010), entre outros autores como Goes (2000) e Barboza & Zanella (2005), por exemplo.

O autor faz jus ao Ensino das Progressões Aritméticas como ato que proporciona ao aluno habilidades e conhecimentos no campo da matemática, sendo necessário que o professor utilize uma metodologia que parta do concreto para o abstrato segundo as considerações de Mendes (2006) e se elabore uma proposta didático-pedagógica, que promova situações investigativas em sala de aula tornando o aluno um ser ativo e crítico e com capacidade de generalizar o conhecimento matemático nas diversas situações.

Desta maneira, fez-se necessário sua participação no planejamento, acompanhamento e descrição da aplicação desta sequência, afim de avaliar o cumprimento das metas previamente estabelecidas. Assim, disponibilizar-se-á dos exercícios de aplicação, com o intuito de cingir à sua participação nas propostas apresentadas.

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Chama-se Progressão Aritmética (PA) a uma sequência (finita ou infinita) em que qualquer termo (a partir do segundo) menos o seu antecessor tem resultado constante denominada de razão (r) da PA. Ou seja,

$$a_{n+1} - a_n = r.\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, definindo *progressão aritmética* (P.A.) pode-se afirmar que é uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Em que a e r são números reais dados.

São exemplos de progressões aritméticas:

a) A sequência formada pelos números naturais (1, 2, 3, 4, ...) é uma progressão aritmética, já que a diferença entre cada termo, a partir do segundo, com o anterior é constante e igual 1.

b) A sequência formada pelos números ímpares (1, 3, 5, 7, ...) é uma progressão aritmética de razão 2.

c) A sequência (0, – 2, – 4, – 6, – 8, …) é uma progressão aritmética de razão – 2.

d) A sequência (4, 4, 4, 4, 4, …) é uma progressão aritmética de razão *zero*.

Concluímos por esta equação que, uma progressão aritmética é um caso particular de uma sequência recorrente, em que se conhecendo os valores de a_1 e r, fica perfeitamente determinada e podemos obter os demais termos, usando esta fórmula, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nota: Se em uma progressão aritmética, conhecermos apenas a razão, mas não o primeiro ou outro termo da mesma, não a tornará completamente definida. Essa condição só será satisfeita se conhecermos o primeiro ou qualquer outro termo e a razão, caso contrário, teremos para a equação de recorrência várias progressões aritméticas condicionadas ao valor inicial.

É importante ressaltar que em uma Progressão Aritmética

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

Temos que: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$

Os dois exemplos a seguir referem-se a definição de PA.

O primeiro da UFRGS. Os números que exprimem o lado, a altura e a área de um triângulo equilátero estão em PA, nessa ordem. A altura desse triângulo mede:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3} - 1$

c) $2(\sqrt{3} - 1)$

d) $4 - \sqrt{3}$

e) $4 + \sqrt{3}$

Para resolvermos esta atividade, devemos ter o conhecimento em Geometria Plana das fórmulas da altura e da área de um triângulo equilátero que são respectivamente, $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

Do problema dado, temos a seguinte PA:

$$\left(L, \frac{L\sqrt{3}}{2}, \frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Como o problema pede o valor da altura do triângulo, e para isso temos que achar o valor de L. Aplicando a ideia de razão, descrita na definição

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} - L = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2L\sqrt{3} - 4L}{4} = \frac{L^2\sqrt{3} - 2L\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = L^2\sqrt{3} - 2L\sqrt{3} - 2L\sqrt{3} + 4L \Rightarrow L^2\sqrt{3} - 4L\sqrt{3} + 4L = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}L^2 + \left(4 - 4\sqrt{3}\right)L = 0$$

de PA, temos:

O que resulta em uma equação incompleta do segundo grau. Colocando o L em evidência para facilitar os cálculos, descobrimos que as raízes são:

$$L_1 = 0 \text{ e } L_2 = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3}$$

Como a atividade é de Geometria, não podemos ter o valor de L como ZERO, então vale só L_2 como resposta.

Substituindo o valor de $\boldsymbol{L}$, que foi encontrado, na fórmula da altura

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{12-4\sqrt{3}}{3}\right).\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{12\sqrt{3}-12}{6}$$
$$h = 2\sqrt{3} - 2 \; ou \; h = 2(\sqrt{3}-1)$$

(h), teremos:

Portanto a resposta é alternativa “C”.

O segundo, é solicitado a prova de que se (a^2, b^2, c^2) é uma progressão aritmética, então $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ também e progressão aritmética e reciprocamente.

Solução: Provemos primeiramente que se (a^2, b^2, c^2) é PA, então $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ também o é:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{a+c} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{b+c-a-c}{(a+c)(b+c)} \\ r_2 = \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a+c} = \dfrac{a+c-a-b}{(a+b)(a+c)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{b-a}{(a+c)(b+c)} \\ r_2 = \dfrac{c-b}{(a+b)(a+c)} \end{cases}$$

Como (a^2, b^2, c^2) é PA, temos que:

$r = b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow (b+a)(b-a) = (c+b)(c-b) \Rightarrow \frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a} = k$

(admitamos que $\boldsymbol{b+c \neq 0}$ e $\boldsymbol{a+b \neq 0}$ senão não existirá a sequência analisada)

Obtemos desta forma que $\boldsymbol{r_1} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{a+c}}$ e $\boldsymbol{r_2} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{a+c}}$. Então $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2}$, logo concluímos que $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ é PA.

Provemos a recíproca:

Como $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ é PA, obtemos

$$r = \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} \Rightarrow \frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a} \Rightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Logo (a^2, b^2, c^2) é uma PA.

2.1 FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Demonstração: De acordo com a equação $a_{n+1} = a_n + r$, admitindo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão r, podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_5 = a_4 + r$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando membro a membro as n−1 igualdades, teremos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n$$
$$= a_1 + r + a_2 + ra_3 + r + a_4 + r + \cdots + a_{n-1} + r$$

Ou ainda,

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + r + r + r + r + \cdots + r$$

Note que "r" se multiplica $(n-1)$ vezes.

Somando $-(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{n-1})$ a ambos os membros, obtém-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$$

Tal fórmula é conhecida como o **termo geral** da progressão aritmética.

Teorema 1. Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão de r, então

$a_n = a_1 + (n-1).r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Usaremos o princípio de indução para fazermos a demonstração. Para n = 1, temos $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r = a_1 + 0 = a_1$. Temos que para n = 1 a sentença é verdadeira.

Supondo que a fórmula seja válida para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1).r$

Mostraremos que é válida para n + 1:

Temos:

$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + [(n-1)+1].r = a_1 + [(n+1)-1].r$

Portanto, $a_n = a_1 + (n-1).r$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

As cinco atividades a seguir nos evidenciam diversas formas de aplicar e/ou manusear o termo geral:

1) Determinar o 19º termo da PA (2, 5, 8, ...)

Solução: Sabendo que $a_1 = 2$, $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 3$. De acordo com a equação $a_n = a_1 + (n-1).r$ temos: $a_{19} = a_1 + (19-1).r = a_1 + 18.r = 2 + 18.3 = 2 + 54 = 56$.

Logo, o 19º termo da PA é 56.

2) Encontre o trigésimo termo da PA, cujo sexto termo é igual a 12 e a razão 4.

Solução: Do problema tem-se que $a_6 = 12$ e r = 4, logo

$a_{30} = a_6 + (30-6).4 = 12 + 14.4 = 12 + 56 = 68$

Portanto, o trigésimo termo é igual a 68.

Observação. Algumas vezes em problemas de PA é conveniente trocar a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1).r$ por $a_n = a_0 + n.r$

3) Um carro popular novo custa R$ 40 000,00 em uma concessionária. Seu valor diminui R$ 2.000,00 a cada ano de uso. Qual será o valor desse carro após completar 6 anos de uso?

Solução: Seja n o número de anos de uso do carro. Neste caso o carro apresenta um valor inicial antes de ser usado e é conveniente que escrevamos $a_n = a_0 + n.r$, onde a_0 é o valor inicial do carro e a_n é o valor do carro após n

$a_n = a_0 + n.r$

$a_6 = 40000 + 6.(-2000)$

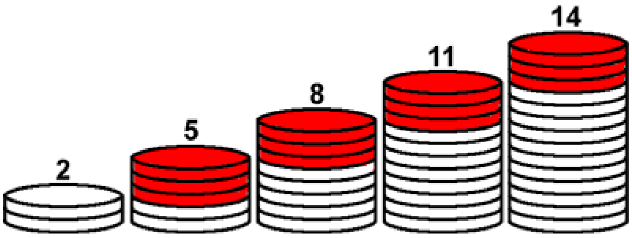
$a_6 = 40000 - 12000$

$a_6 = 28000$

anos de uso. Como o carro é desvalorizado em R$ 2.000,00 a cada ano de uso, teremos r = −2000. Assim,

Portanto, após 6 anos de uso, o valor do carro será de R$ 28 000.

4) Observe a imagem:



O primeiro monte, contém 2 moedas. As moedas em destaque, correspondem ao ao que acresceu em cada monte em relação ao monte anterior, sendo esta quantidade denominada de razão (r). Considerando que o primeiro monte seja a_1, o segundo monte seja a_2 e assim sucessivamente. Quantas moedas deverá conter o trigésimo sexto monte, se novos montes forem formados com a mesma lógica da figura?

Solução: Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$a_{36} = 2 + (36-1).3$$
$$a_{36} = 2 + 35.3$$
$$a_{36} = 2 + 105$$
$$a_{36} = 107$$

Portanto, no 36º monte deverá conter 107 moedas.

5) Prove que, se (a_n) é uma PA de termos positivos verifica-se a relação

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Solução: Vamos racionalizar cada parcela da soma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}\cdot\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}+\sqrt{a_{n-1}}}\cdot\frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}\cdot\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}$$

$$=$$

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{a_3-a_4}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2}-a_{n-1}}$$

$$+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}$$

Como (a_n) é uma PA, logo $a_2=a_1+r$; $a_3=a_2+r$ e assim por diante. Com isso, temos:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_1-r}+\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_2-a_2-r}+\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_3-r}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2}-a_{n-2}-r}+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_{n-1}-r}=$$

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{-r}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{-r}+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-r}=$$

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}+\cdots+\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right)=$$

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)$$

Multiplicando agora por: $\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)$, fica:

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=-\frac{1}{r}\left(\frac{(\sqrt{a_1})^2-\left(\sqrt{a_n}\right)^2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=-\frac{1}{r}\left(\frac{a_1-a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)$$

$$=$$

Como $a_n=a_1+(n-1).r$, resulta em:

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{a_1 - a_1 - (n-1).r}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{-(n-1).r}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}\right) = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\sqrt{\boldsymbol{a_1}} + \sqrt{\boldsymbol{a_n}}}$$

Portanto, se (a_n) é uma PA a relação é válida.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Classificamos as progressões aritméticas como:

a) Crescentes - são aquelas em que cada termo é maior que o anterior. Isso acontece quando r > 0.

Demonstração: De acordo com a Definição, uma sequência é crescente se,

$a_{n+1} > a_n$. (Desigualdade d.1)

Da equação 2, para uma PA tem-se $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo esse resultado em d.1, temos:

$a_n + r > a_n$

$a_n + r - a_n > 0$

$r > 0$

Portanto, uma PA é crescente se e, somente se, r > 0.

b) Constantes - são aquelas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior. Isso acontece quando r = 0.

Demonstração: Se cada termo é igual ao anterior, então

$a_n + 1 = a_n$

$a_n + 1 - a_n = 0$

Assim temos,

$a_n + r - a_n = 0$

$r = 0$

Portanto, uma PA é constante se e, somente se, r = 0.

c) Decrescentes - são aquelas em que cada termo é menor que o anterior. Isso acontece quando r < 0.

Demonstração: De acordo com a Definição, uma sequência é decrescente se,

$a_{n+1} < a_n$. (Desigualdade d.2)

Para uma PA temos $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo essa informação na desigualdade d.2, tem-se:

$a_n + r < a_n$

$a_n + r - a_n < 0$

$r < 0$

Portanto, uma PA é decrescente se e, somente se, r < 0.

Os dois exemplos a seguir, referem-se à classificação da PA.

1) Classificar as seguintes progressões aritméticas:

a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

b) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

Solução: Vamos calcular a razão da PA:

a) $r = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}$, PA crescente.

b) $r = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} = \frac{15}{12} - \frac{16}{12} = -\frac{1}{12}$, PA decrescente.

2) Classifique a progressão aritmética $(x^2 + 2, x^2 + x, \ldots)$:

Solução: Calculemos a razão desta PA.

$r = x^2 + x - (x^2 + 2) \Rightarrow r = x^2 + x - x^2 - 2 \Rightarrow r = x - 2.$

Logo, se: $\begin{cases} x > 2, \ a\ PA \text{ é } crescente \\ x < 2, a\ PA \text{ é } decrescente \\ x = 0, a\ PA \text{ é } constante \end{cases}$

Observação. Sejam “a” e “r” ∈ R. Considere $x_1 = a$, $x_2 = a + r$, $x_3 = a + 2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n - 1).r$. Dessa forma a sequência (x_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo “a” e razão “r”.

Se r = 0, então (x_n) é constante e, portanto, limitada. Logo $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Se r > 0, então (x_n) é crescente e, portanto, limitada inferiormente.

Se r < 0, então (x_n) é decrescente e, portanto, limitada superiormente.

2.3 NOTAÇÕES ESPECIAIS NA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

a) Para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$

b) Para 4 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r)$ ou $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$, onde $y = \frac{r}{2}$.

c) Para 5 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$ ou

$$(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$$

2.4 PROPRIEDADES DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

a) 1ª Propriedade: Numa Progressão Aritmética finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$. Sendo assim, em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n-k+1}$$

Demonstração: Considere a_k e a_{n-k+1} dois termos quaisquer equidistante dos extremos. Pela fórmula do termo geral da PA, temos:

$$\begin{cases} a_k = a_1 + (k-1).r \\ a_{n-k+1} = a_1 + [(n-k+1)-1].r = a_1 + (n-k).r \end{cases}$$

e, portanto, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1).r + a_1 + (n-k).r =$

$$= 2a_1 + [(k-1)+(n-k)].r = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1).r}_{a_n} = a_1 + a_n \,,$$

e deste modo fica demonstrado esta propriedade.

b) 2ª Propriedade: Em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos.

Simbolicamente, temos a $PA = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, sendo que: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$.

Demonstração: Pela definição de PA, sabemos que

$$\left.\begin{matrix} a_n - a_{n-1} = r \\ a_{n+1} - a_n = r \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ e, assim demonstra-se esta propriedade.

Observação: Esta propriedade pode ser escrita de um modo mais amplo por: $a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, onde a_{n-k} e a_{n+k}, são dois termos quaisquer equidistantes na PA.

c) 3ª Propriedade: Em uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots, a_n, \dots)$, onde a_p e a_q são dois termos quaisquer, é válida a seguinte propriedade:

$$a_n = a_p + (n - p).r$$

Demonstração: Tem-se da fórmula do termo geral que $a_n = a_1 + (n-1).r$. Assim, $a_p = a_1 + (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - p.r + r$

Substituindo este resultado na equação do termo geral, obtém-se: $a_n = a_p - p.r + r + (n-1).r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + r + n.r - r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + n.r$, portanto, $a_n = a_p + (n-p).r$

d) 4ª Propriedade: Se $k, m, p\ e\ q$ são índices de termos quaisquer de uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots)$ não constante, então:

$k + p = m + q$ se e, somente se, $a_k + a_p = a_m + a_q$.

Demonstração: Considere r a razão da PA $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots)$, logo:

$a_k + a_p = a_m + a_q \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + (k-1).r + a_1 + (p-1).r = a_1 + (m-1).r + a_1 + (q-1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow (k-1).r + (p-1).r = (m-1).r + (q-1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow (k - 1 + p - 1)r = (m - 1 + q - 1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow k + p - 2 = m + q - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + p = m + q,$

como queríamos demonstrar.

Para entendermos melhor essas propriedades, apresentamos os seguintes exemplos:

1) Determine x e depois escreva a PA no seguinte caso: $(x;\ 2x-2;\ 20, \dots)$.

Solução: Aplicando a 2ª propriedade de PA, temos:

$$2x - 2 = \frac{x + 20}{2} \Rightarrow 4x - 4 = x + 20 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

Logo a PA é $(8, 14, 20, 26, \dots)$.

2) Numa PA, $a_6 = 10$ e $a_{15} = 37$, então a razão dessa PA é:

Solução: Sabemos que na PA dada a_{15} e a_6, podem ser considerados a_n e a_p, então aplicando em $a_n = a_p + (n-p).r$, temos:

$a_{15} = a_6 + (15-6).r \Rightarrow a_{15} = a_6 + 9.r \Rightarrow 37 = 10 + 9.r \Rightarrow 9.r = 27 \Rightarrow r = 3.$

Portanto, a razão dessa PA é 3.

2.5 INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Em uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são denominados extremos e os demais termos são chamados de meios.

Interpolar k meios aritméticos entre os extremos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, consiste em determinar quais k números devem ser inseridos entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ de forma que se tenha uma PA de $k+2$ termos.

Desta forma podemos considerar $a_1 = \alpha$ e $a_{k+2} = \beta$.

De um modo geral, se desejamos inserir k meios aritméticos entre os extremos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, teremos a PA $(\alpha, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \beta)$. Pelo termo geral da PA, temos: $\beta = \alpha + (k+1).r$, onde $r = \frac{\beta-\alpha}{k+1}$.

Segue um exemplo para o melhor entendimento de interpolação, inserir 6 meios aritméticos entre −3 e 18.

Solução: Sabendo que k = 6, A = −3 e B = 18 a PA ficará totalmente determinada quando encontrarmos o valor da razão, assim:

$$r = \frac{18-(-3)}{6+1} = \frac{21}{7}$$
$$= 3$$

Inserindo os 6 meios aritméticos teremos a PA (−3, 0, 3, 9, 12, 15, 18).

2.6 SOMA DOS TERMOS DE UMA PA FINITA

Dada a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Demonstração: Somando membro a membro as igualdades, temos:

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$(I)\ 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Sabemos que numa Progressão Aritmética, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$, portanto na expressão (I), temos: $2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\ vezes}$,ou seja,

$2S_n = n.(a_1 + a_n)$ e finalmente:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Demonstração por indução finita:

Para n = 1, temos:

$S_1 = \frac{(a_1+a_1).1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$ (verdade!)

Supondo que $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ seja verdadeira para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, faremos a verificação da validade para $n + 1$. Temos que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + 2.a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

Como $a_{n+1} = a_1 + n.r$, teremos

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + (a_1 + n.r) + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_1 + a_n.n + n.r + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n + 1) + n(a_n + r) + a_{n+1}}{2}$$

Por outro lado, sabemos que $a_{n+1} = a_n + r$, assim:

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n + 1) + n.a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n + 1) + a_{n+1}(n + 1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

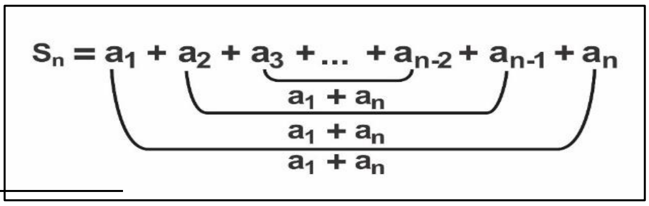
Portanto, $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Também podemos chegar a fórmula da soma dos termos de PA finita de um modo bastante prático.

Vamos considerar a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. E representar por (s_n) a soma dos termos dessa PA utilizando uma anedota (Boyer, 1996, p.343) bem conhecida sobre Carl Friedrich Gauss[1] ainda criança, por volta dos seus 10 anos. Seu professor de matemática querendo manter a classe ocupada, mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem (1+2+3+⋯+99+100) e que deixassem seus trabalhos em sua mesa assim que terminassem a tarefa, Gauss imediatamente apresentou sua ardósia afirmando que já havia terminado. O professor sem fazer muito caso observava os demais que trabalhavam em grande intensidade. Finalmente o professor verificou os resultados e a ardósia de Gauss era a única correta com a resposta 5050.

Gauss com apenas dez anos, talvez não soubesse, mas havia calculado mentalmente a soma dos termos da progressão aritmética (1 + 2 + 3 + ⋯ + 98 + 99 + 100). Note que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98$ e a soma de todos os demais equidistantes é igual a 101.

Baseado nessa lógica, percebemos facilmente que em PA, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, observe a representação abaixo.



[1] Famoso físico e matemático alemão (1777-1855) - conhecido como o Príncipe da matemática, contribuiu muito em diversas áreas da ciência. Em 1801 lançou uma das suas mais importantes publicações: *Disquisitiones Arithmeticae*, um livro dedicado a teoria algébrica dos números.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O que nos faz perceber imediatamente que:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$$

Assim, temos a fórmula da soma dos “n” termos de uma PA:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

$S_n = soma\ dos\ n\ termos$

$a_1 = primeiro\ termo$

$a_n = n - ésimo$

$n = número\ de\ termos$

Apresentamos três exemplos, para uma melhor compreensão da soma dos termos finitos de uma PA:

1) Um médico recomenda ao seu paciente em tratamento que tome uma dose diária de certo medicamento. A dosagem será administrada da seguinte forma: no primeiro dia tomará 100 mg do medicamento, no segundo dia 95 mg, no terceiro 90 mg e assim será a cada dia de tratamento, reduzindo a dosagem de 5 mg em relação ao dia anterior.

Sabendo que o tratamento durou uma semana, qual foi a dosagem total ingerida por esse paciente?

Solução: Para esta questão precisamos encontrar a soma da quantidade em mg de medicamento tomada pelo paciente durante sete dias. Nesse caso temos uma PA de 7 termos, onde $a_1 = 100$ e $r = -5$, assim teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow a_7 = 100 + 6.(-5) = 100 - 30 = 70$$

Aplicando na fórmula da soma dos termos de uma PA, temos,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_7).7}{2}$$
$$S_n = \frac{(100 + 70).7}{2}$$
$$S_n = \frac{170.7}{2}$$
$$S_n = 595$$

Logo, ao final do tratamento, o paciente terá tomado $595\,mg$ do medicamento.

2) (FGV /2017/RJ) Os números naturais, a partir do 1, foram escritos em ordem e arrumados em duas colunas, A e B, como no quadro a seguir:

	A	**B**
Linha1	1	2
Linha2	3,4	5,6
Linha3	7, 8, 9	10, 11, 12
Linha4	13, 14, 15, 16	17, 18, 19, 20
Linha5	21, 22, 23, 24, 25	26, 27, 28, 29, 30
Linha…	…	…

Na linha n, o conjunto dos elementos da coluna A será representado por L_nA, e o da coluna B, por L_nB.

a) Mostre que o último elemento de L_nA é um quadrado perfeito.

b) Calcule a soma dos elementos de $L_{10}B$.

Solução:

a) Note que o último elemento da linha 4, pode ser escrito por:

$a_4 = 2(1 + 2 + 3) + 4 = 16$, assim como o da linha 5 por: $a_5 = 2(1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 25$. Então, o último elemento de LnA será escrito por: $a_n = 2\big(1 + 2 + \cdots + (n - 1)\big) + n$.

Assim, $a_n = 2\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + n = n(n - 1) + n = n^2 - n + n = n^2$, portanto o último elemento de LnA é sempre um quadrado perfeito.

Solução:

c) Seguindo a lógica de L_nA, o último elemento de $L_{10}A$ é $10^2 = 100$. Assim $L_{10}B = (101, 102, 103, \ldots, 110)$, logo

$$S_{10} = \frac{(101 + 110).10}{2} = \frac{2110}{2}$$
$$= 1055$$

Assim, a soma dos elementos de $L_{10}B$ é 1055.

3) Um saco contém 1000 balas de menta. Retiram-se 10 balas na primeira vez, 15 na segunda, 20 na terceira, e assim sucessivamente.

a) Determinar quantas balas sobrarão na caixa após a 15ª retirada.

b) Seguindo esse padrão, no máximo, quantas retiradas podem ser feitas?

Solução:

a) Montamos a seguinte PA (10, 15, 20, 25, …), vamos determinar quantas balas serão retiradas na 15ª vez:

$$a_{15} = a_1 + 14.r = 10 + 14.5 = 10 + 70$$
$$= 80$$

Calculando a soma de todas as retiradas até a15ª, temos:

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}).15}{2} = \frac{(10 + 80).15}{2} = \frac{90.15}{2} = 45.15$$
$$= 675$$

Portanto, se no saco haviam 1000 balas e foram retiradas 675, restarão 325 balas.

b) O número máximo de retiradas é o "n" da fórmula da soma dos termos da PA.

Completando o que temos em $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$, sendo que:

$$1000 = \frac{(10 + 5n + 5).n}{2}$$
$$2000 = (5n + 15).n$$
$$5n^2 + 15n - 2000 = 0$$
$$n^2 + 3n - 400 = 0$$

$a_n = a_1 + (n - 1).r = 10 + (n - 1).5 = 10 + 5n - 5 = 5n + 5$, fica:

Resolvendo a equação, teremos $n_1 = -21{,}55$ e $n_2 = 18{,}55$. Sendo "n" um número natural, então devemos analisar $n = 18{,}55$ e isso nos dá duas possibilidades: $n = 18$ ou $n = 19$. Seguindo o padrão, se forem feitas 19 retiradas não terão balas suficientes no saco. Portanto a quantidade máxima de retiradas será 18.

2.7 PROPOSIÇÕES IMPORTANTES NA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Proposição 1. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n.

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento do termo geral da PA. Como $a_n = a_1 + (n-1).r = a_1 + n.r - r \Rightarrow a_n = r.n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$ o polinômio é de grau 1, se $r = 0$ o polinômio é de grau menor que 1.

Portanto, se (a_n) é uma progressão aritmética, onde $a_n = an + b$, então $a = r$ e $b = a_1 - r \Rightarrow a_1 = a + b$.

Observação. $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ é uma restrição da função quadrática em n.

Proposição 2. A soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por um polinômio em $\boldsymbol{n}$.

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento de S_n, assim,

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1).r].n}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r).n}{2} = \frac{2na_1 + n^2r - rn}{2}$$

$$= \frac{n^2r + 2na_1 - rn}{2}$$

Logo,

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$

Se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio de grau 2 em $\boldsymbol{n}$, sem termo independente, se

$r = 0$, então S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Portanto, se $S(n) = an^2 + bn$ é a soma n primeiros termos de uma progressão aritmética, então $a = \frac{r}{2}$ e $b = a_1 - \frac{r}{2} \Rightarrow b = a_1 - a \Rightarrow a_1 = a + b$.

2.8 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE SEGUNDA ORDEM

Dada a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, \dots)$. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária, ou seja, de razão não nula r.

Teorema. Uma sequência de números reais (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau, na variável n.

Demonstração: Considerando que a sequência dada (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por $(Y_n)=(\Delta x_n)=(x_2-x_1; x_3-x_2; x_4-x_3;...; x_n-x_{n-1};...)=(y_1; y_2; y_3;...; y_n;...)$ é uma progressão aritmética não-estacionária. Assim, $(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$ é a soma dos "$n - 1$" primeiros termos da progressão aritmética (Y_n) e que será representado por um polinômio do segundo grau, na variável n. Se simplesmente somarmos todos os termos da sequência (Y_n), teremos:

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_n - x_1$$

$$x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$$

Assim, o termo geral da sequência (x_n) também será expresso por um polinômio do segundo grau, na variável "$\boldsymbol{n}$". E se esse termo geral da sequência numérica (x_n) for expresso por $x_n = an^2 + bn + c$, com a, b e c constantes reais, então seu operador (Δ) será:

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, que substituindo, teremos:

$$\Delta x_n=a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)\Rightarrow$$

$$\Delta x_n=an^2+2an+a+bn+b+c-an^2-bn-c\Rightarrow$$

$$\Delta x_n=2an+a+b$$

De forma geral, Δx_n é expresso por um polinômio do primeiro grau, na variável $\boldsymbol{n}$. Logo, Δx_n é uma progressão aritmética não estacionária e, por definição, (x_n) é uma **Progressão Aritmética de Segunda Ordem.**

Os dois exemplos a seguir reforçam o entendimento de uma PA de segunda ordem.

1) A sequência $(a_n) = (2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois os números formados pela diferença entre cada par de termos, forma uma nova sequência.

A saber: $(\Delta a_n) = (4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$ que é uma progressão aritmética de razão 2.

2) Qual o 20º termo da sequência $(3, 6, 12, 21, 33, \ldots)$?

Solução: Na prática, apliquemos a fórmula: $a_n = a_1 + S_{n-1}$, onde a_1 é a primeira ordem e S_{n-1} a segunda ordem.

Achando a PA de segunda ordem, temos: $(3, 6, 9, 12, 15, \ldots)$. Para acharmos o 20º termo da sequência, vamos encontrar o S_{19} da PA:

$a_{19} = a_1 + 18.r \Rightarrow a_{19} = 3 + 18.3 \Rightarrow a_{19} = 57$, então,

$$S_{19} = \frac{(3+57).19}{2} \Rightarrow S_{19} = \frac{60.19}{2} \Rightarrow S_{19} = 30.19 \Rightarrow S_{19} = 570.$$

Aplicando em $a_n = a_1 + S_{n-1}$, fica: $a_{20} = 3 + 570$, portanto:

O vigésimo termo da sequência é 573.

Importante: Veja a relação de uma PA com as funções de grau **n**.

Dada a PA (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...), vamos substituir os termos dessa PA em cada função abaixo e em seguida fazer a diferença entre os termos obtidos, até que se alcance valores constantes.

Primeira função: $f(x) = 3x + 2$, substituindo os valores, temos:

$$f(3) = 3.3 + 2 = 11$$
$$f(5) = 3.5 + 2 = 17$$
$$f(7) = 3.7 + 2 = 23$$
$$f(9) = 3.9 + 2 = 29$$
$$f(11) = 3.11 + 2 = 35$$
$$f(13) = 3.13 + 2 = 41$$

....

Sequência gerada: (11, 17, 23, 29, 35, 41, ...), diferença entre os termos:

(6, 6, 6, 6, 6, ...). Portanto a função do 1º grau gerou uma PA de primeira ordem.

Segunda função: $f(x) = x^2 - 3$, substituindo os valores:

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6$$
$$f(5) = 5^2 - 3 = 22$$
$$f(7) = 7^2 - 3 = 46$$
$$f(9) = 9^2 - 3 = 78$$
$$f(11) = 11^2 - 3 = 118$$
$$f(13) = 13^2 - 3 = 166$$

....

Sequência gerada: (6, 22, 46, 78, 118, 166, ...), diferença entre os termos:

(16, 24, 32, 40, 48, ...), diferença dos termos:

(8, 8, 8, 8, ...), logo a função do 2º grau gerou uma PA de segunda ordem.

Terceira função: $f(x) = x^3 + 2$, substituindo os valores:

$f(3) = 3^3 + 2 = 29$

$f(5) = 5^3 + 2 = 127$

$f(7) = 7^3 + 2 = 345$

$f(9) = 9^3 + 2 = 731$

$f(11) = 11^3 + 2 = 1333$

$(13) = 13^3 + 2 = 2199$

....

....

Sequência gerada: (29, 127, 345, 731, 1333, 2199, ...), diferença entre os termos:

(98, 218, 386, 602, 866, ...), diferença dos termos:

(120, 168, 216, 264 ...), diferença entre os termos:

(48, 48, 48, ...), a função do 3º grau gerou uma PA de terceira ordem.

Percebemos, então que quando substituímos os termos de uma PA em uma função de grau “n”, a PA gerada é de ordem “n”.

3 ORIENTAÇÕES GERAIS AOS PROFESSORES

Nesta seção sugerimos ao professor que irá utilizá-la que, na aplicação da sequência didática para o ensino das Progressões Aritméticas, a atenção para alguns conhecimentos elementares com operações básicas com os números reais, para compreender sequências numéricas e conseguir um melhor entendimento em Progressão Aritmética. Assim, propomos um teste contendo oito questões com esses pré-requisitos, que pode ser consultado no Apêndice B. Cada aluno, recebeu uma folha contendo as questões e tiveram um tempo, aproximadamente, de 50 minutos para a entrega.

Cabe ao professor observar se os alunos ao qual se submeteram ao teste, obtiveram um resultado satisfatório, a eles poderão então ser aplicada a sequência didática e, caso o resultado tenha demonstrado um baixo rendimento desses alunos, deverá ser aplicada uma oficina desses conhecimentos básicos, para um melhor nivelamento e em seguida a aplicação da sequência didática.

Importante: Cada professor é livre para aplicar o teste ou mesmo a oficina da maneira que lhe seja mais conveniente, com sua sala de aula.

TESTE DE VERIFICAÇÃO

Universidade do Estado do Pará
Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática

Mestrando: Natanael de Oliveira Mota
Público alvo: Estudantes de uma turma do 1º ano do Ensino Médio
Local: Escola Pública Estadual
Teste sobre conteúdos matemáticos pré-requisitos para a aprendizagem de Progressão Aritmética

Aluno: ______________________________ Data: _____ / _____ / _______

Matemática Financeira

01. (UERJ/2018)

Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras.
O valor de x é igual a:

a) 0,0125 b) 0,005 c) 0,025 d) 0,05

Operações com Números Inteiros

02. (FCM MG/2017/Julho) Uma enfermeira acompanha um paciente hospitalizado. O médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 4 em 4 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 9 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão simultânea desses remédios?

a) 6 horas do dia seguinte.

b) 9 horas do dia seguinte.

c) 12 horas do mesmo dia.

d) 21 horas do mesmo dia.

03. (FUVEST SP/2017) Sejam *a* e *b* dois números inteiros positivos. Diz-se que *a* e *b* são equivalentes se a soma dos divisores positivos de *a* coincide com a soma dos divisores positivos de *b*. 16 e 25. Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

( ) Falso

( ) Verdadeiro

04. (CEFET PR/2017) Sendo n um número natural, $n \neq 0$, assinale a alternativa verdadeira.

a) O número $n^2 + 3$ é sempre um número ímpar.

b) O número n^3 é sempre divisível por 3.

c) O número n(n – 1) é sempre ímpar.

d) O mínimo múltiplo comum entre n e 2n é sempre um número par.

e) O máximo divisor comum entre n e 2n é 2n.

Operações com Números Reais

05. (IFAL/2017) Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e xy = 2.

a) 27 b) 31 c) 38 d) 49 e) 54

06. (CEFET PR/2017) Um fazendeiro possui dois terrenos quadrados de lados x e y, sendo x > y. Represente na forma de um produto notável a diferença das áreas destes quadrados.

a) (x + y).(x + y) b) (x + y).(x – y) c) (x – y).(x – y) d) $(x + y)^2$ e) $(x – y)^2$

Problemas

07. (IFSC/2017) Um cliente foi ao caixa do banco do qual é correntista e sacou R$ 580,00. Sabendo-se que a pessoa recebeu toda a quantia em 47 notas e que eram apenas notas de R$ 5,00 e de R$ 20,00, é CORRETO afirmar que a pessoa recebeu

a) 25 notas de R$ 5,00 e 22 notas de R$ 20,00.

b) 20 notas de R$ 5,00 e 27 notas de R$ 20,00.

c) 23 notas de R$ 5,00 e 24 notas de R$ 20,00.

d) 27 notas de R$ 5,00 e 20 notas de R$ 20,00.

e) 24 notas de R$ 5,00 e 23 notas de R$ 20,00.

08. (IFSC/2017) Além de oferecer cursos gratuitos de Ensino Médio e Graduação, entre outros, o IFSC também oferece a seus alunos e à comunidade a chance de participação em aulas de Teatro, Prática de Orquestra e Coral.
Sabendo que uma determinada atividade do Coral do IFSC, incluindo tempo de viagem e apresentação, teve início às 21h47min e terminou às 05h22min da manhã do dia seguinte, assinale a alternativa CORRETA, que apresenta o tempo total de duração da atividade:

a) 505 minutos

b) 385 minutos

c) 455 minutos

d) 515 minutos

e) 985 minutos

Ao serem aplicadas as questões que compreendem ao teste de verificação e conseguinte análise dos resultados, se verificado um bom desempenho dentre os alunos, é válido destacar que o professor pode então aplicar as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) da sequência didática proposta. Caso seja diagnosticado um baixo rendimento, faz-se necessário a realização de uma Oficina de conhecimentos básicos com o intuito de perpassar parte dos conhecimentos prévios necessários, simultaneamente à uma apostila impressa.

A presente pesquisa contou com uma oficia cuja aula expositiva contou com a transmissão oral e dialogada entre professor e alunos, porém, destacamos novamente que cada professor é livre para aplicar o teste ou mesmo a oficina da maneira que lhe seja mais conveniente, com sua sala de aula.

OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Conjuntos:

1) Descreva os conjuntos numéricos:

Conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N}$ = {

Conjunto dos Números Inteiros: $\mathbb{Z}$ = {

Conjunto dos Números Racionais: $\mathbb{Q}$ = {

Conjunto dos Números Irracionais: $\mathbb{I}$ = {

Representação em diagrama dos conjuntos numéricos:

Conclusão:

2) Se um determinado conjunto possui 7 elementos, quantos subconjuntos ele possui?

R: ____________________

3) (UNITAU SP) Sabendo-se que um conjunto A possui 512 subconjuntos, é CORRETO afirmar que o número de elementos de A é

a) 9
b) 15
c) 28
d) 36
e) 54

4) (PUC RJ) Considere o conjunto A = {3,5}. Sabendo que B $\cap$ A = {3} e B $\cup$ A = {1,2,3,4,5} , determine o conjunto B.

a) B = {1,2,3}
b) B = {1,2,4}
c) B = {1,2,3,4}
d) B = {1,2,3,5}
e) B = {1,2,3,4,5}

5) Os conjuntos X = {0,4,5,6,7,x} e Y = {1,3,6,8,x,y} possuem o mesmo número de elementos e X $\cap$ Y = {2,6,7}. Para os elementos x e y, o valor numérico de 5x – 2y é

a) – 4.
b) – 2.
c) 0.
d) 26.
e) 31.

Função afim: É toda função polinomial do primeiro grau. Formalmente escrita por:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função afim se existem dois números reais ***a*** e ***b*** que satisfaçam a condição: $\forall x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, onde $y = f(x) = ax + b$

Aplicações:

1) Preencha o quadro de cada função dada:

a) $f(x) = 2x - 3$

x	*y=f(x)*	*(x, y)*
- 1		
0		
1		
2		
3		

b) $f(x) = -x + 2$

x	*y=f(x)*	*(x, y)*
- 1		
0		
1		
2		
3		

a) $f(x) = 6$

x	*y=f(x)*	*(x, y)*
- 1		
0		
1		
2		
3		

2) Supondo que você é um vendedor, cujo salário mensal é de R$ 1.600,00. Porém, a cada produto vendido você ganha uma comissão de 5%, ou 0,05 vezes o valor do produto. A função que descreverá, em função do valor vendido durante o mês é do tipo afim, e será descrita pela lei:

3) Um atleta ao ser submetido a um determinado treino específico apresenta, ao longo do tempo, ganho de massa muscular. A função $P(t) = P_0 + 0{,}19\ t$, expressa o peso do atleta em função do tempo ao realizar esse treinamento, sendo P_0 o seu peso inicial e t o tempo em dias.
Considere um atleta que antes do treinamento apresentava 60 kg e que necessita chegar ao peso de 65 kg, em um mês. Fazendo unicamente esse treinamento, será possível alcançar o resultado esperado?

4) Uma certa indústria produz peças de automóveis. Para produzir essas peças a empresa possui um custo mensal fixo de R$ 10 200,00 e custos variáveis

com matéria prima e demais despesas associadas à produção. O valor dos custos variáveis é de R$ 0,40 por cada peça produzida.
Montar a função que define o custo de produção $C_p(x)$:

Sequências numéricas:

1) Montar as seguintes sequências:
a) Sequência 1, somar com 6 (2, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)
b) Sequência 2, subtrair de 4 (10, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)
c) Sequência 3, multiplicar por 2 (3, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)
d) Sequência 4, dividir por 2 (480, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

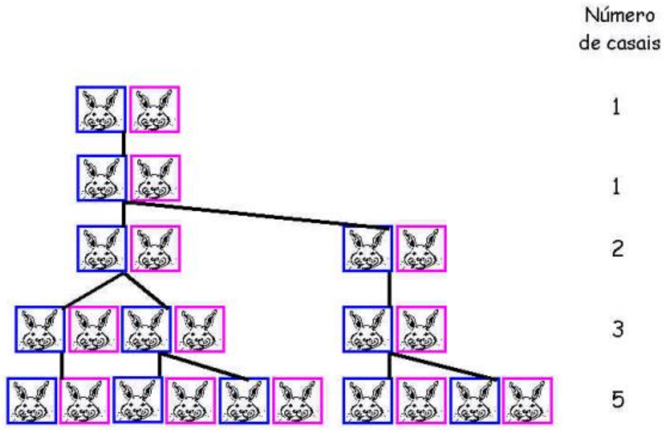
2) Observe as sequências e complete-as:
a) (2, 4, 6, 8, 10, ___)
b) (2, 5, 9, 14, 20, 27, ___)
c) (10, 6, 2, -2, -6, ___)
d) (24, 12, 6, ___)
e) (12, 8, 4, ___)
f) (16, 8, 4, ___)
g) (-35, -30, -25, ___)

3) Das sequências da questão 6, qual a característica de cada uma?
a) ____
b) ____
c) ____
d) ____
e) ____
f) ____
g) ____

4) A sequência a seguir é uma sequência especial conhecida por Sequência de Fibonacci, em homenagem a Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), matemático italiano, de grande influência na idade média. Muitos consideram Fibonacci como o maior matemático da idade média. Introduziu os algarismos arábicos na Europa, observou essa sequência na natureza e a descreveu.

http://www.math.ethz.ch/fibonacci/Eroeffnung

Em 1202, aos 32 anos ele escreveu o "Liber Abaci" (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo) que é um tratado completo sobre métodos e problemas algébricos. Nesse livro, foi proposto um problema sobre coelhos que se tornou muito conhecido. Esse foi o primeiro modelo matemático de descrição do crescimento de populações. “Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?”



http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/coelhos.htm

Observe a situação descrita na tabela, e complete-a.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de casais	1	1	2	3	5							

Analisando os termos da sequência descreva o que você percebeu que cada termo, após os dois primeiros?

R:____

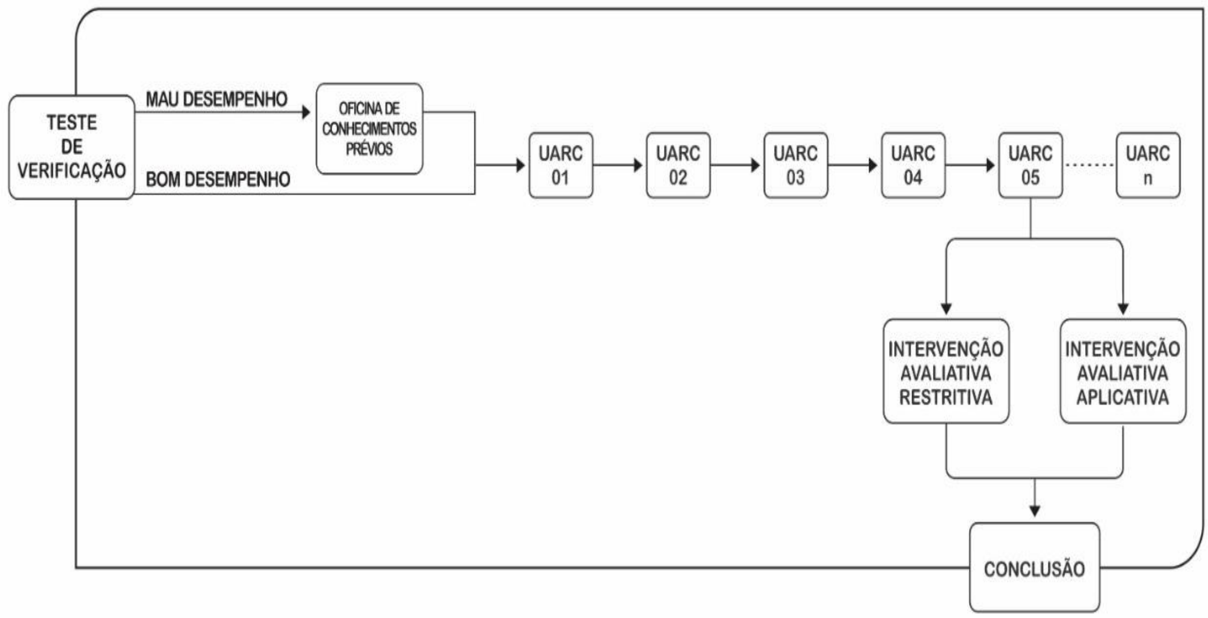
____

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo vamos apresentar uma sequência didática com cinco atividades proposta para ensino das Progressões Aritméticas, elaborada e estruturada no modelo proposto por Cabral (2017), onde cada atividade será intitulada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) e em cada uma dessas UARCs será definido o título, o objetivo e os procedimentos para sua devida realização. Para ajudar no entendimento dessas atividades, faremos um teste (Apêndice B) para verificação do conhecimento dos alunos e em seguida a aplicação de uma oficina de conhecimentos básicos, no conteúdo das sequências numéricas, como pré-requisitos para um melhor entendimento do assunto investigado. Ao finalizar as aplicações das UARCs, faz-se a aplicação da Intervenção Avaliativa Restritiva que aferem a aprendizagem do aluno nos aspectos fundamentais do saber matemático e a Intervenção Avaliativa Aplicativa ligadas a Resolução de Problemas de Aplicação aos diversos contextos reais para finalmente concluir o processo.

O diagrama a seguir, mostra os caminhos de nossa Sequência didática.

Figura 3 – Processo da Sequência Didática de Progressão Aritmética



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2019.

4.1 METODOLOGIA E CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Considerando a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), elaboramos uma sequência didática composta de 05 atividades, visando o ensino das Progressões Aritméticas no modelo proposto por Cabral (2017), a cada atividade, ou seja, a cada UARC, deve ocorrer uma intervenção formalizante pelo professor, a fim de fixar as ideias (re)construídas e em seguida, proceder uma intervenção avaliativa, com a intenção de tornar o ensino das Progressões Aritméticas mais atrativo, com a finalidade de minimizar as dificuldades de aprendizagem apontadas pela literatura sobre Progressões Aritméticas. Esta Sequência Didática será aplicada em uma escola pública, na cidade de Belém do Pará. Claro, respeitando todas as fases da Teoria das Situações Didáticas.

4.2 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A mesma consta de 05 UARCs estruturadas da seguinte forma:

- UARC 1: SEQUÊNCIA NUMÉRICA REGULAR
- UARC 2: RECONHECENDO UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA
- UARC 3: CLASSIFICAÇÃO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA
- UARC 4: TERMO GERAL DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA
- UARC 5: PROPRIEDADES DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

4.3 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta fase da pesquisa, produzimos uma sequência didática no estudo da Progressão Aritmética que foi aplicada a um grupo de 18 alunos que cursam o 1º ano do Ensino Médio na Escola Pública, em Belém, Estado do Pará.

4.3.1 Material do Aluno

UARC 1:

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

[Intervenção Inicial 01] Observando a sequência de números em destaque:

0; 2; 6; 14; 30; 62; …

Responda as questões de [I_r – 01] até [I_r – 05] dadas abaixo.

[I_r – 01] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação desta sequência?

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 02] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

R:

____

____

____

[I_r – 03] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 04] Baseado na sua resposta do item [I_r – 02], qual número ocuparia o lugar imediatamente após o elemento 62?

R: ____

[I_r – 05] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na [I_R – 02]:

R: ____

[Intervenção Inicial 02] Iniciando com o 1° elemento escrito na tabela, preencha os espaços destinados aos outros elementos, a partir do 2° e até o sexto elemento, obedecendo o procedimento a seguir:

***"multiplique por 3 o elemento anterior e adicione duas unidades"*.**

Tabela dos elementos da sequência obtida

1° elemento	2° elemento	3° elemento	4° elemento	5° elemento	6° elemento
1					

Responda as questões de [I_r – 06] e [I_r – 07].

[I_r – 06] Nesta sequência, há entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 07] Apresente a expressão matemática que represente o padrão descrito na tabela:

R: ____

UARC 2:

Procedimento: Analise as sequências dadas e faça o que se pede.

[Intervenção Inicial] Observe as seguintes sequências numéricas A e B a seguir e responda:

Sequencia A (3, 7, 15, 31, 63, …)

Sequencia B (2, 5, 8, 11, 14, …)

[I_r – 01] As sequencias A e B são sequências numéricas regulares:

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 02] Descubra e descreva a expressão matemática dessas sequências:

Sequencia A: -

____

Sequencia B:

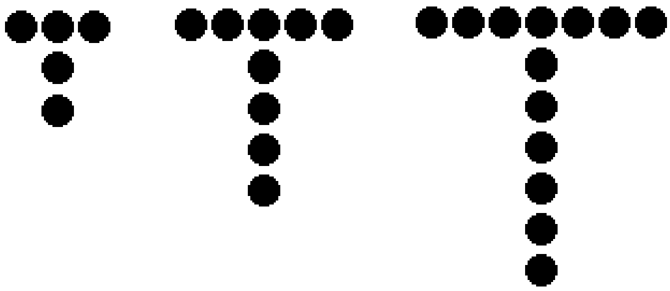
____

[I_r – 03] Qual das sequências A ou B, a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: ____

[I_e – 04] Observe a seguinte imagem da figura 1

Figura 1:



Fonte:
http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/progressoes/progressao_aritmetica/images/progressao_aritmetica_ufsm.gif

Responda:

a) O que você observa quanto ao número de "bolinhas" que formam cada T?

R: ____

b) O T posterior é formado por quantas "bolinhas" a mais do que o T anterior?

R: ____

c) Este valor a mais a cada T formado posteriormente, é constante?

( ) Sim

( ) Não

[I_e – 05] Desenhe, no espaço abaixo, o 4º T da sequência da figura 1. Quantas bolinhas ele tem?

Número de bolinhas: ______________________

[I_e – 06] Complete o quadro abaixo que relaciona a ordem da figura 1 e o número de bolinhas que cada T ela possui.

Ordem	1	2	3	4	5	6
Número De bolinhas						

[I_r – 07] Na sequência do quadro de [I_E – 06], a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: ____

[I_r – 08] Sem a construção do desenho, pode-se dizer que o 8º T da figura 1 tem quantos pontos?

R: ____

[I_r – 09] O T que possui 37 bolinhas, baseado na figura 1, ocupa qual posição na sequência?

R: ____

[I_r – 10] Escreva uma expressão matemática para descobrir o número de bolinhas de acordo com a posição que ela ocupa na sequência.

R: ____

[I_e – 11] Preencha o quadro, baseado na seguinte sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,15, \ldots, a_{k-1}, a_k)$:

Expressão	**Valor de “X”**
$a_2 = a_1 + x$	
$a_3 = a_2 + x$	

$a_4 = a_3 + x$	
$a_6 = a_5 + x$	
$a_k = a_{k-1} + x$	

Descreva que o que ocorreu com o valor de “x”:

R: ____

UARC 3:

Procedimento: Leia as instruções a seguir e responda

[Intervenção Inicial] Preencha as tabelas, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Aritmética e suas devidas razões (r) e responda:

[I_r – 01] O primeiro termo é “6” e a razão “4”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente

(   ) Constante

(   ) Sempre Decrescente

[I_r – 02] O primeiro termo é “10” e a razão é “– 3”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente

(   ) Constante

(   ) Sempre Decrescente

[I_r – 03] O primeiro termo é “4” e a razão é “0”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor nulo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente

(   ) Constante

(   ) Sempre Decrescente

[I_e – 04] Complete o quadro para cada PA apresentada

	PA	**Razão**	**Classifique se é crescente, decrescente ou constante**
PA1	(1, 5, 9, 13, 17, 21)		
PA2	(30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5)		
PA3	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)		
PA4	(- 6, - 9, - 12, - 15, …)		
PA5	(- 6, -3, 0, 3, 6, …)		
PA6	(- 8, - 8, - 8, - 8, …)		
PA7	(4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6, …)		

UARC 4:

Procedimento: Análise as informações abaixo e responda as questões

[I_r – 01] Dada a Progressão Aritmética $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$, complete o quadro

Expressão $\boldsymbol{a_n - a_1}$	**Valor obtido**	**Razão**	**Relação entre o valor obtido e a Razão**
$a_1 - a_1$	0	3	0 = (1-1).3
$a_2 - a_1$	3	3	3 = (2-1).3
$a_3 - a_1$			

$a_4 - a_1$			
$a_5 - a_1$			
…..	….	….	….
$a_n - a_1$	X		

[Ir – 02] Na PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots, n)$, preencha o quadro com os dados para encontrar os termos da sequência proposta na atividade:

Posição do Termo	**Representação do termo**	**Valor do termo**	**Relação entre cada termo com o 1º termo e a razão**
1º	$\boldsymbol{a_1}$	**3**	a_1
2º	$\boldsymbol{a_2}$	**5**	a_2 = 3 + (2-1).2
3º	$\boldsymbol{a_3}$	**7**	a_3 = 3 + (3-1).2
4º			
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
nº			

Observe que em uma P.A o termo geral (a_n) relaciona o primeiro termo (a_1), a posição que ele ocupa (n) e a razão (r).

[Ir – 03] Neste contexto de [Ir – 02], qual o valor deve ser colocado entre parênteses na Expressão para encontrarmos o termo geral de uma P.A?

a) $a_n = a_1 + (\qquad\qquad).r$

b) $a_n = a_2 + (\qquad\qquad).r$

c) $a_n = a_3 + (\qquad\qquad).r$

d) $a_n = a_p + (\qquad\qquad).r$

UARC 5:

Procedimento: Análise as situações abaixo e responda as questões.

1. **Primeira propriedade da PA.**

[Intervenção Inicial 01] Observe a PA (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) e responda:

[I_r – 01] Qual é o valor da soma de:

a) a_1 com a_8?

R:___________________

b) a_2 com a_7?

R: ___________________

c) a_3 com a_6?

R: ___________________

d) a_4 com a_5?

R: ___________________

[I_r – 02] Descreva o que você percebeu com essas somas?

R: ____

[I_r – 03] Seja a PA (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41).

Fazendo os mesmos procedimentos que foram feitos na [Intervenção Inicial 01]. Você pode comparar a resposta encontrada aqui com a resposta da questão anterior?

R: ____

2. Segunda propriedade da PA

[Intervenção Inicial 02] Considere a PA (3, 9, 15, 21, 27, 33)

[I_r – 04] Qual a média aritmética dos valores de a_1 com a_3?

R: ______________________

[I_r – 05] O valor encontrado pertence a sequência dada?

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 06] Caso a resposta de [I_R – 05] seja “sim”, em qual termo está situado o valor da média aritmética de a_1 com a_3?

R: _______________________

[I_e – 07] Encontre a média aritmética entre os termos:

a) a_2 e a_4

R: ____________

b) a_3 e a_5

R: ____________

c) a_4 e a_6.

R: ____________

[I_e – 08] Os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** são termos da Sequência dada?

( ) Sim ( ) Não

[I_e – 09] Que posição eles ocupam na PA?

R: ____

4.3.2 Material do Professor

Orientações ao Professor:

- ✓ Organizar a turma em grupos de dois ou no máximo cinco alunos;
- ✓ Fazer a distribuição das atividades aos grupos para cada UARC que for trabalhada;
- ✓ Fazer uma breve discussão sobre o Título de cada UARC para estimular o raciocínio inicial dos alunos;
- ✓ Ler com bastante clareza aos alunos os textos cada Intervenção Inicial das UARCs e exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos;
- ✓ Cada UARC, desta Sequência Didática, foi elaborada baseada nas dificuldades que são encontradas na aprendizagem dos alunos em relação ao tema Progressão Aritmética, encontrada, principalmente, nos livros didáticos e na forma expositiva em sala de aula.

UARC 1:

Sequência Numérica Regular

Título: Sequência numérica regular a partir de sua lei de formação

Objetivo: Reconhecer uma sequência numérica regular e sua lei de formação

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

[Intervenção Inicial 01] Observando a sequência de números em destaque:

0; 2; 6; 14; 30; 62; …

Responda as questões de [I_r – 01] até [I_r – 05] dadas abaixo.

[I_r – 01] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação desta sequência?

(X) Sim

( ) Não

[I_r – 02] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

R: O crescimento é da forma 2^n

[I_r – 03] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

(X) Não

[I_r – 04] Baseado na sua resposta do item [I_r – 02], qual número ocuparia o lugar imediatamente após o elemento 62?

R: 126

[I_r – 05] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na [I_R – 02]:

R: $2x + 2$, onde "x" é cada termo da sequência a partir do primeiro.

[Intervenção Inicial 02] Iniciando com o 1° elemento escrito na tabela, preencha os espaços destinados aos outros elementos, a partir do 2° e até o sexto elemento, obedecendo o procedimento a seguir:

"multiplique por 3 o elemento anterior e adicione duas unidades".

Tabela dos elementos da sequência obtida

1° elemento	2° elemento	3° elemento	4° elemento	5° elemento	6° elemento
1	5	17	53	161	485

Responda as questões de [I_r – 06] e [I_r – 07].

[I_r – 06] Nesta sequência, há entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

(X) Não

[I_r – 07] Apresente a expressão matemática que represente o padrão descrito na tabela:

R: $3x + 2$

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1
Sequência Numérica Regular a partir de sua Lei de Formação é uma sequência numérica que admite um termo qualquer (termo geral, a_n) a partir de relações entre seus termos e sua posição, obedecendo uma determinada lei.

Análise a priori: Com esta UARC 1, esperamos que os alunos possam ser capazes de desenvolver as sequências através da lei que lhe foi informada e possa encontrar a regularidade da sequência.

UARC 2:

Reconhecendo uma Progressão Aritmética

Título: Reconhecimento de uma Progressão Aritmética (PA)

Objetivo: Reconhecer quando uma sequência numérica é uma Progressão Aritmética e formalizar o seu conceito.

Procedimento: Analise as sequências dadas e faça o que se pede.

[Intervenção Inicial] Observe as seguintes sequências numéricas A e B a seguir e responda:

Sequencia A (3, 7, 15, 31, 63, …)

Sequencia B (2, 5, 8, 11, 14, …)

[I_r – 01] As sequencias A e B são sequências numéricas regulares:

(X) Sim

( ) Não

[I_r – 02] Descubra e descreva a expressão matemática dessas sequências:

Sequencia A: $2x + 1$, onde “x” é cada termo da sequência a partir do primeiro.

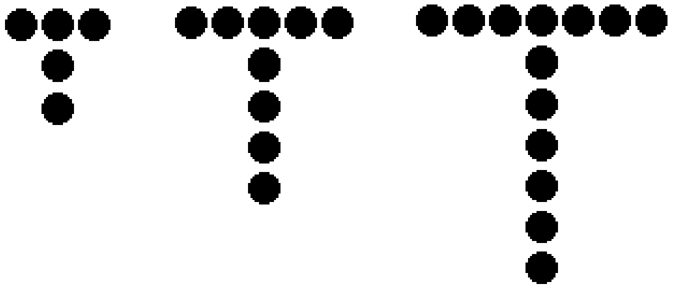
Sequencia B: $x + 3$, onde “x” é cada termo da sequência a partir do primeiro.

[I_r – 03] Qual das sequências A ou B, a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: A sequência B.

[I_e – 04] Observe a seguinte imagem da figura 1

Figura 1:



Fonte: http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/progressoes/progressao_aritmetica/images/progressao_aritmetica_ufsm.gif

Responda:

d) O que você observa quanto ao número de “bolinhas” que formam cada T?

R: Aumentam sempre quatro “bolinhas”.

e) O T posterior é formado por quantas “bolinhas” a mais do que o T anterior?

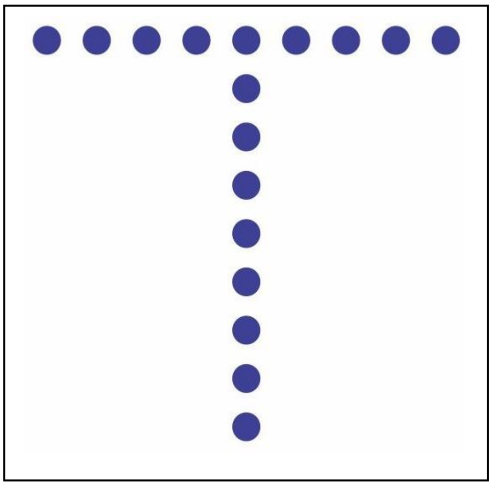
R: 4

f) Este valor a mais a cada T formado posteriormente, é constante?

(X) Sim

( ) Não

[I$_e$ – 05] Desenhe, no espaço abaixo, o 4º T da sequência da figura 1. Quantas bolinhas ele tem?



Número de bolinhas: 17

[I$_e$ – 06] Complete o quadro abaixo que relaciona a ordem da figura 1 e o número de bolinhas que cada T ela possui.

Ordem	1	2	3	4	5	6
Número De bolinhas	5	9	13	17	21	25

[I$_r$ – 07] Na sequência do quadro de [I$_E$ – 06], a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: Sim

[I$_r$ – 08] Sem a construção do desenho, pode-se dizer que o 8º T da figura 1 tem quantos pontos?

R: 33

[I$_r$ – 09] O T que possui 37 bolinhas, baseado na figura 1, ocupa qual posição na sequência?

R: 9ª

[I$_r$ – 10] Escreva uma expressão matemática para descobrir o número de bolinhas de acordo com a posição que ela ocupa na sequência.

R: $a_n = a_{n-1} + 4$

[I$_e$ – 11] Preencha o quadro, baseado na seguinte sequência

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,15, \ldots, a_{k-1}, a_k)$:

Expressão	Valor de “X”
$a_2 = a_1 + x$	2
$a_3 = a_2 + x$	2
$a_4 = a_3 + x$	2
$a_6 = a_5 + x$	2
$a_k = a_{k-1} + x$	$a_k - a_{k-1}$

Descreva que o que ocorreu com o valor de “x”:

R: Tem como resultado um valor constante igual a 2.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

Progressão Aritmética (P.A) é uma sequência numérica (finita ou infinita) em que qualquer termo (a_n), a partir do segundo (a_2) é o antecessor somado a um valor constante representado por “r”, denominado de **Razão**, que é a diferenca entre o termo posterior e o termo imediatamente antecessor.

Análise a priori: Com esta UARC 2, esperamos que os alunos, já com informações prévias da UARC anterior, possam ser capazes de reconhecer e entender que as sequências dadas, formam Progressões Aritméticas.

UARC 3:

Classificação da Progressão Aritmética

Título: Classificando a Progressão Aritmética

Objetivo: Identificar se PA é crescente, decrescente ou constante.

Procedimento: Leia as instruções a seguir e responda

[Intervenção Inicial] Preencha as tabelas, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Aritmética e suas devidas razões (r) e responda:

[I_r – 01] O primeiro termo é “6” e a razão “4”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
6	10	14	18	22

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(X) Sempre crescente

(   ) Constante

(   ) Sempre Decrescente

[I_r – 02] O primeiro termo é “10” e a razão é “– 3”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
10	7	4	1	-2

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente

(   ) Constante

(X) Sempre Decrescente

[I_r – 03] O primeiro termo é “4” e a razão é “0”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
4	4	4	4	4

Ao atribuir um valor nulo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(   ) Sempre crescente

(X) Constante

(   ) Sempre Decrescente

[I_e – 04] Complete o quadro para cada PA apresentada

	PA	Razão	Classifique se é crescente, decrescente ou constante
PA1	(1, 5, 9, 13, 17, 21)	4	Crescente
PA2	(30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5)	-5	Decrescente
PA3	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	0	Constante
PA4	(- 6, - 9, - 12, - 15, ...)	-3	Decrescente
PA5	(- 6, -3, 0, 3, 6, ...)	3	Crescente
PA6	(- 8, - 8, - 8, - 8, ...)	0	Constante
PA7	$(4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6, \ldots)$	0,5	Crescente

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

Classifica-se uma PA, pela sua **Razão:**
Se **r** > **0**, a PA é **Crescente**.
Se **r** = **0**, a PA é **Constante**.
Se **r** < **0**, a PA é **Decrescente**.

Análise a priori: A UARC 3, foi elabora para que os alunos ao verificarem o valor da razão de cada Progressão Aritmética analisada, possam reconhecer se a mesma é Crescente quando r > 0, Decrescente quando r < 0 ou Constante se r = 0.

UARC 4:

Termo Geral da Progressão Aritmética

Título: Termo geral da Progressão Aritmética

Objetivo: Descobrir o termo geral da PA.

Procedimento: Análise as informações abaixo e responda as questões

[Ir – 01] Dada a Progressão Aritmética $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$, complete o quadro

Expressão $\boldsymbol{a_n - a_1}$	**Valor obtido**	**Razão**	**Relação entre o valor obtido e a Razão**
$a_1 - a_1$	0	3	0 = (1-1).3
$a_2 - a_1$	3	3	3 = (2-1).3
$a_3 - a_1$	7 – 1 = 6	3	6 = (3-1).3
$a_4 - a_1$	10 – 1 = 9	3	9 = (4-1).3
$a_5 - a_1$	13 – 1 = 12	3	12 = (5-1).3
…..	….	….	….
$a_n - a_1$	X	3	X = (n-1).3

[Ir – 02] Na PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots, n)$, preencha o quadro com os dados para encontrar os termos da sequência proposta na atividade:

Posição do Termo	**Representação do termo**	**Valor do termo**	**Relação entre cada termo com o 1º termo e a razão**
1º	$\boldsymbol{a_1}$	**3**	a_1
2º	$\boldsymbol{a_2}$	**5**	a_2 = 3 + (2-1).2
3º	$\boldsymbol{a_3}$	**7**	a_3 = 3 + (3-1).2
4º	a_4	9	$a_4 = 3 + (4 - 1).2$
5º	a_5	11	$a_5 = 3 + (5 - 1).2$
6º	a_6	13	$a_6 = 3 + (6 - 1).2$
7º	a_7	15	$a_7 = 3 + (7 - 1).2$
8º	a_8	17	$a_8 = 3 + (8 - 1).2$
9º	a_9	19	$a_9 = 3 + (9 - 1).2$
nº	a_n	$a_1 + (n - 1).r$	$a_n = a_1 + (n - 1).r$

Observe que em uma P.A o termo geral (a_n) relaciona o primeiro termo (a_1), a posição que ele ocupa (n) e a razão (r).

[I_r – 03] Neste contexto de [I_r – 02], qual o valor deve ser colocado entre parênteses na Expressão para encontrarmos o termo geral de uma P.A?

e) $a_n = a_1 + (n - 1).r$

f) $a_n = a_2 + (n - 2).r$

g) $a_n = a_3 + (n - 3).r$

h) $a_n = a_p + (n - p).r$

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4
A expressão $a_n = a_1 + (n - 1).r$ é denominada de **termo geral de uma P.A.** Com ela podemos encontrar o valor de um **termo qualquer** da P.A a partir do **primeiro termo** e da **razão**.

Análise a priori: Com essa UARC 4, esperamos que os alunos possam desenvolver o conhecimento a respeito da fórmula do termo geral da PA. Acreditamos que nessa UARC os alunos enfrentarão dificuldades, mas ao final da mesma irão alcançar o seu objetivo.

UARC 5:

Propriedades da Progressão Aritmética

Título: Propriedades da PA

Objetivo: Entender e aplicar as propriedades de PA.

Procedimento: Análise as situações abaixo e responda as questões.

1. **Primeira propriedade da PA.**

[Intervenção Inicial 01] Observe a PA (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) e responda:

[I_r – 01] Qual é o valor da soma de:

e) a_1 com a_8?

R: 90

f) a_2 com a_7?

R: 90

g) a_3 com a_6?

R: 90

h) a_4 com a_5?

R: 90

[I$_r$ – 02] Descreva o que você percebeu com essas somas?

R: O resultado é sempre constante.

[I$_r$ – 03] Seja a PA (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41).

Fazendo os mesmos procedimentos que foram feitos na [Intervenção Inicial 01]. Você pode comparar a resposta encontrada aqui com a resposta da questão anterior?

R: No procedimento aplicado na sequência anterior, todos os elementos foram usados, já nesta sequência restou o elemento central que é a média aritmética dos elementos extremos correspondentes.

2. Segunda propriedade da PA

[Intervenção Inicial 02] Considere a PA (3, 9, 15, 21, 27, 33)

[I$_r$ – 04] Qual a média aritmética dos valores de a_1 com a_3?

R: 9

[I$_r$ – 05] O valor encontrado pertence a sequência dada?

(X) Sim

( ) Não

[I$_r$ – 06] Caso a resposta de [I$_R$ – 05] seja “sim”, em qual termo está situado o valor da média aritmética de a_1 com a_3?

R: a_2

[I$_e$ – 07] Encontre a média aritmética entre os termos:

d) a_2 e a_4

R: 15

e) a_3 e a_5

R: 21

f) a_4 e a_6.

R: 27

[Ie – 08] Os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** são termos da Sequência dada?

(X) Sim

( ) Não

[Ie – 09] Que posição eles ocupam na PA?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5
Primeira propriedade: Numa PA finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistantes dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$. **Segunda Propriedade:** Tomando-se quaisquer três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a media aritmética dos outros dois.

R: a_1, a_4 e a_5

Análise a priori: Na aplicação da UARC 5, esperamos que os alunos verifiquem a importância das propriedades, aqui colocadas, nas Progressões Aritméticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BARBOZA, D. ZANELLA, A. V. **Integrando análise de conteúdo e análise microgenética em pesquisas no campo psi: a constituição do sujeito como foco.** Revista *PSICO*, Porto Alegre, PUCRS, v. 36, n. 2, pp. 189-196, maio/ago. 2005.

COSTA, Marco Antônio F. da; **COSTA,** Maria de Fátima Barrozo da. **Projeto de Pesquisa: Entenda e Faça.** 3. Ed. Petrópolis- RJ: Vozes, 2012.

GÓES, M. C. R. de. **A Abordagem Microgenética na Matriz Histórico-Cultural:** Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes, ano XX, n. 50. abril, p. 9-25, 2000, ISSN 1678-7110.

MENDES, Iran Abreu**. Números: o simbólico e o racional na história.** Natal: Editorial Flecha do Tempo, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autentica 2002.

______________. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa.* 3 e.d. Belo Horizonte: Autêntica., 2011.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares**: Um desafio motivador para alunos do Ensino Médio. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP, 2008.

RÚDIO, Franz Victor. **Introdução ao projeto de pesquisa científica.** 30 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp: v. 21, n. 39, p. 135- 169 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602. Acesso em 20/fevereiro/2018.

TOMIO, D. SCHROEDER, E. ADRIANO, G. A. C. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural.** *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, Set./Dez. 2017.

VYGOTSKY. L. S. *Formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

______________. Psicologia pedagógica. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

ZABALA, Antoni (2007). **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani F. da Rosa – Porto Alegre: ArtMed, 1998.

Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n, Telégrafo
66113-200 – Belém – PA
www.uepa.br