Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Marconni Augusto Pock de Oliveira
Miguel Chaquiam

Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial

Belém
2020

Marconni Augusto Pock de Oliveira
Miguel Chaquiam

Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade do Estado do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Belém

2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock e CHAQUIAM, Miguel. Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Função exponencial.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

O presente produto educacional é resultante de uma dissertação de mestrado elaborada por Oliveira (2018), que teve como intuito gerar uma sequência didática para o ensino de função exponencial. Para tanto, o interesse em elaborar este trabalho surgiu por conta das dificuldades de ensino e aprendizagem de Matemática, vivenciado durante a prática docente e constatado em levantamentos bibliográficos.

Primeiramente, fizemos uma investigação sobre o panorama do ensino de função exponencial na educação básica, em especial no Ensino Médio, por meio de levantamento bibliográfico de artigos científicos, monografias de especialização *Lato-Sensu* e dissertações de mestrado *Strictu-Sensu*, onde desse levantamento analisamos alguns pontos considerados pertinentes, tais como objetivos, questões de pesquisa, estratégias metodológicas e resultados obtidos.

Posteriormente, fizemos a análise de alguns livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), haja vista que o livro é um instrumento que contribui para o processo de ensino e aprendizagem e funciona como um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno.

Procuramos investigar de que maneira o conceito de função exponencial é tratado nestes livros, considerando os seguintes aspectos: abordagem inicial, conceito de função exponencial, restrições da base "a", interpretação gráfica e características, e tipos de exercícios, tanto os exemplos resolvidos quanto os propostos.

Em seguida, realizamos uma consulta aos alunos egressos do 1° ano do Ensino Médio, por meio de questionários, cujo objetivo foi investigar os aspectos sociais dos alunos, fatores didático-pedagógicos dos professores e, principalmente, as dificuldades em aprender conceitos de função exponencial. Os alunos foram submetidos também a um teste, a fim de verificar as dificuldades em resolver exercícios sobre o referido conteúdo.

Por conseguinte, realizamos também uma consulta aos professores que lecionaram ou lecionam o conteúdo de função exponencial, por meio de questionários, com o intuito de verificar como vem sendo ensinado o referido conteúdo, isto é, as práticas docentes adotadas em sala de aula, dificuldades verificadas pelos professores em relação aos alunos no que tange o aprendizado do conteúdo, assim como suas próprias dificuldades em trabalhar o assunto.

A sequência didática proposta visa minimizar as dificuldades apontadas nos trabalhos analisados, como por exemplo as detectadas por Brucki (2011), quando diz que alunos apresentam dificuldades de interpretar o conceito de potenciação e de trabalhar com suas propriedades, costumam confundir o conceito de função exponencial com a sua lei de formação, e também, afirma que o fato do exponente ser a variável dificulta o entendimento, assim como lidar com uma expressão matemática e não compreender seu significado em relação ao conceito.

Com base nesses levantamentos, foi possível elaborar esta proposta de sequência didática para o ensino de função exponencial. Os aportes teóricos que fundamentaram o desenvolvimento deste trabalho foram a Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988), o uso de Materias Didáticos Manipuláveis, com base nos estudos de Fiorentini e Miorim (1990) e Lorenzato (2006), Investigação Matemática com base nos estudos de Luiz e Col (2013), Ponte, Brocado e Oliveira (2006), as Sequências Didáticas, baseado em Zabala (1998), as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual - UARC, proposta por Cabral (2017), a Análise Microgenética elaborada por Góes (2000) e a Análise do Discurso de Scott e Mortimer (2002). Para melhores esclarecimentos, visitar a dissertação de mestrado de Oliveira (2018).

Para elaborar a sequência didática proposta, tomamos como base os trabalhos de Oliveira e Busse (2006), Silva (2014) e Rozanski (2015), por considerarmos que tais trabalhos eram os que mais se aproximavam de nossos objetivos. Além disso, ela foi elaborada e estruturada sob a ótica das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), que corresponde a um modelo de sequência didática para servir de referência para a produção de novas propostas didáticas, com o objetivo de ensinar conteúdos curriculares da disciplina de Matemática na Educação Básica.

Mesmo sendo uma concepção recente, muitos trabalhos já foram desenvolvidos segundo essa ideia, e apresentaram resultados positivos, com melhorias no processo de aprendizagem. Para saber mais sobre as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), recomendamos a leitura da obra intitulada “*Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração*”, de Cabral (2017).

Para a análise e validação dos resultados, fizemos uso da Análise Microgenética proposta por Góes (2000) e a Análise do Discurso das Interações Verbais entre professor e aluno. Tais resultados apontaram que os alunos participantes do experimento manifestaram indícios de aprendizagem, registrados durante o processo, e passaram a ter um bom entendimento dos conceitos e propriedades referentes ao tema, além de um bom desempenho na realização das atividades. Trata-se de um estudo que precisa ser revalidado.

Para ampliar as possibilidades de uso da sequência didática, este produto foi concebido para ser reaplicado ou utilizado para que o leitor que tenha interesse em buscar outras alternativas de ensinar função exponencial. A sua estrutura está dividida em três capítulos: o primeiro trata dos conteúdos matemáticos relacionados à função exponencial, afim de contribuir para a formação continuada do professor; o segundo desdobra a sequência didática. O segundo trata da sequência didática, dividido entre orientações gerais para os professores, apresentação da sequência didática, materiais do aluno e materiais para o professor.

Em relação às atividades que compõem a sequência didática, o quadro abaixo sistematiza os objetivos de cada uma das cinco atividades propostas.

Quadro 1: Atividades que compõem a sequência didática

ATIVIDADES	OBJETIVOS
O Lego	Descobrir uma relação entre variáveis
Benefícios da Massa de Modelar	Descobrir uma relação entre variáveis
Preenchimento de Tabela	Verificar restrição da base "a" da relação exponencial
Construção e Reconhecimento de Gráfico	Explorar os elementos do gráfico da relação exponencial $y = a^x$
Características da Relação Exponencial	Explorar os elementos da relação exponencial $y = a^x$

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Este produto educacional, assim como a dissertação mencionada podem ser acessadas no site do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA), por meio do endereço ccse.uepa.br/pmpem.

2. SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL

A seguir, apresentamos um texto matemático sobre função exponencial. Embora o foco do trabalho seja uma proposta de Sequência Didática para o ensino do tema para turmas de 1° Ano do Ensino Médio, acreditamos ser importante fazer uma abordagem mais profunda, com o intuito de contribuir na formação continuada do professor. Utilizou-se como referências as obras de Lima (2000), Pinedo (2007), Oliveira (2015), Neto et. al. (2010), Stewart (2006).

2.1. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja o elemento $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$. Então a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é chamada de *função exponencial de base a*. É importante ressaltar que as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$, mas sim uma indeterminação (será abordado mais adiante).
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$, mas sim em $\mathbb{C}$.
- Para $a = 1$ e x qualquer número real, teremos uma função constante.

A função exponencial é um tipo de função onde a variável independente funciona como o expoente de uma base positiva. Esta função deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ ou $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(ii) $f(1) = a^1 = a$

(iii) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ $quando$ $a > 1$ e

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ $quando$ $0 < a < 1$

2.2. PROPOSIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

É interessante observar que se uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade (i) acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula.

Consideremos a proposição que retrata o zero da função. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencial. Então f assume o valor 0, somente se for identicamente nula, ou seja, $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A demonstração é bastante simples, para tanto torna-se necessário fazer algumas considerações. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

Logo, f será identicamente nula.

■

A proposição a seguir mostra-nos a positividade da função exponencial. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencial que tem a propriedade (i) e que não seja identicamente nula. Então, $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sua demonstração decorre de que para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

■

Assim, diante da propriedade (i), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^+$, pois a vantagem de tomar $\mathbb{R}^+$ como contradomínio é que se terá f sobrejetiva.

A proposição a seguir nos ajudará na demonstração de outras. Para tanto, seja $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$. Então, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$, existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Para demonstra-la deve-se inicialmente considerar $0 < \alpha < \beta$, de modo que encontrar o número $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que:

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Da última relação decorrem sucessivamente,

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M \left(a^{1/n} - 1\right) < \beta - \alpha$$

Logo, $\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$

Assim, as potências $a^0 = 1,\ a^{2/n},\ a^{2/n}, \dots, a^M$, são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

■

A função exponencial não possui limite superior, ou seja, a proposição a seguir nos garante que, dado $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente. Sua demonstração está baseada na proposição anterior, isto é, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o Lema da seção anterior. Mais precisamente: se $a > 1$, então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

■

A proposição anterior reitera o fato de que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \text{ , } se\ a > 1 \text{ ou ainda } \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ , } se\ 0 < a < 1$$

O qual será demonstrado mais adiante.

Um teorema da análise nos garante que toda sequência monótona limitada é convergente. Sua demonstração está baseada na consideração de um tipo qualquer de sequência monótona, isto é, dada (x_n) uma sequência monótona não-decrescente e limitada. Escrevendo os termos da sequência dada como um conjunto

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, então ele possui um supremo denotado por $a = supX$. Dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X, pois a é a menor das cotas. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n0} \leq a$. Portanto, $n > n_0 \Longrightarrow a - \varepsilon < x_{n0} \leq x_n < a + \varepsilon$, onde $\lim x_n = a$. De modo análogo prova que se (x_n) for não-crescente então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores de x_n.

■

Numa função exponencial qualquer $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, tem-se que $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

De fato, devemos provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |a^x < 1| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Suponhamos, por absurdo, que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |a^x - a^0| \geq \varepsilon_0$. Tomando $\delta_n = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, então existe $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x_n - 0| < \frac{1}{n} \Longrightarrow |a^{x_n} - a^0| = |a^{x_n} - 1| \geq \varepsilon_0 \quad (1.2)$$

É claro que $x_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Podemos escolher uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) de forma que (x_{n_k}) seja monótona (decrescente ou crescente). Suponhamos que (x_{n_k}) seja decrescente (caso crescente é análogo). Notemos que $0 \leq x_{n_k}$ e que $1 = a^0 \leq \cdots \leq a^{x_{n_k}} \leq \cdots \leq a^{x_{n_1}}$. Então $(a^{x_{n_k}})$ é monótona decrescente e limitada. Logo ela é convergente, onde segundo o Teorema 1 , $a^{x_{n_k}} \to y = inf a^{x_{n_k}} = 1$. Mas como $(a^{x_{n_k}})$ é uma subsequência de (a^{x_n}), segue que vale (1.2) e isso contraria o fato de que $a^{x_{n_k}} \to 1 = inf\{a^{x_{n_k}}, k \in \mathbb{N}\}$.

■

Para demonstrar que a função exponencial é contínua, é necessário considerar que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ e que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x

quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}, isto é, $\lim_{x \longrightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Para provar isto, escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Sabe-se que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que se tome h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim_{x \longrightarrow x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \longrightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

■

A prova de que a função exponencial $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é *sobrejetiva* está centrada em afirmar que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Pelo Lema 1, escolhe-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$, portanto $\lim_{x \longrightarrow x_0} a^{r_n} = b$. Suponhamos $a > 1$, escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que $a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$. Assim, (r_n) é uma sequência monótona, ilimitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \longrightarrow x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \longrightarrow x_0} a^{r_n} = b$.

■

Para demonstrar as duas afirmações a seguir é necessário considerar que, dado $a \in \mathbb{R}^+$ e $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, tem-se que:

$$(i) \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \text{ , } se\ a > 1$$

$$(ii) \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ , } se\ 0 < a < 1$$

Faremos apenas a demonstração de (i), visto que para demonstração de (ii) é análoga a primeira. Para tanto, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \Leftrightarrow \exists\ A > 0;\ \forall x > 0 \Longrightarrow |a^x - 0| < \varepsilon$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como f é sobrejetora, existe $A\ \in \mathbb{R}$ tal que $a^A = \varepsilon$. Portanto, para todo $x > A$ tem-se: $a^x < a^A = \varepsilon$, ou seja, $|a^x - 0| < \varepsilon, \forall\ x > 0$

■

Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1\ (x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$, decrescente se $0 < a < 1$ $(x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

A *injetividade* da função $x \mapsto a^x$ decorre da sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, temos que $x > y \Longrightarrow a^x > a^y$, e mais, $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$. Portanto $x \neq y \Longrightarrow a^x \neq a^y$. Tem-se ainda que:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\ ,\ se\ a > 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0\ ,\ se\ 0 < a < 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0\ ,\ se\ a > 1 \text{ e}$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty\ ,\ se\ 0 < a < 1$$

Diante das definições e proposições até aqui citadas, podemos analisar o gráfico da função exponencial $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$. A figura a seguir exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos dois casos.

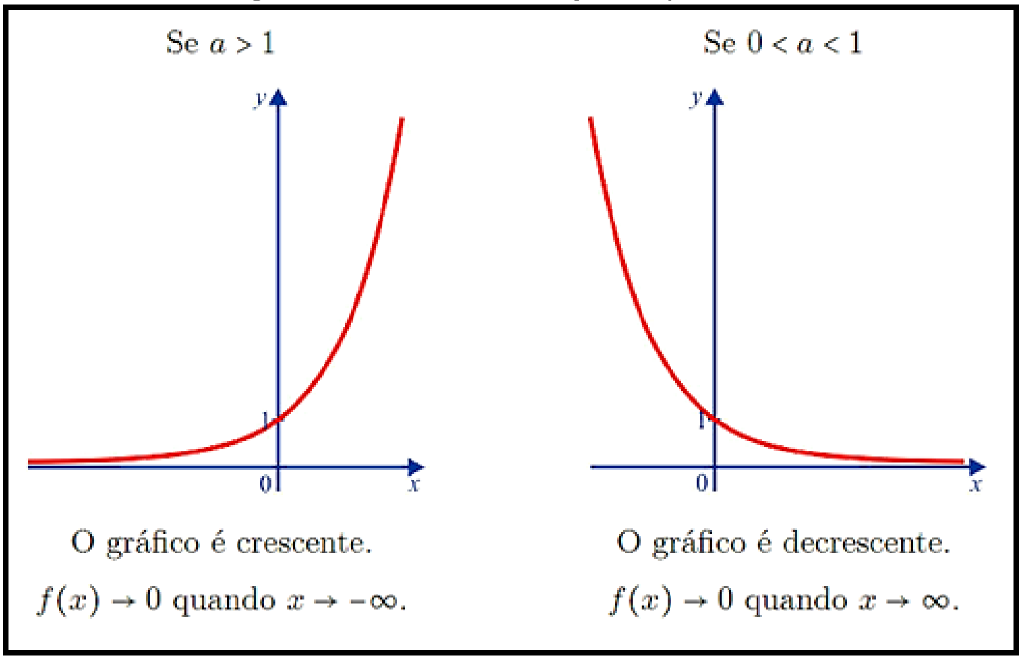
2.3. GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

As características comuns aos gráficos de funções exponenciais na forma $f(x) = a^x$ e $a \neq 1$, são:

- O gráfico é contínuo (proposição 6)
- O domínio é $(-\infty, +\infty)$ e o conjunto-imagem é $(0, +\infty)$

- Não é simétrica: não é função par nem função ímpar
- Limitada inferiormente, mas não superiormente.
- Não tem extremos locais
- O gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$ e não intercepta o eixo das abcissas em nenhum ponto.

Figura 1: Gráfico da Função Exponencial



Fonte: Stewart (2006)

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grande de x, a tangente é quase vertical.

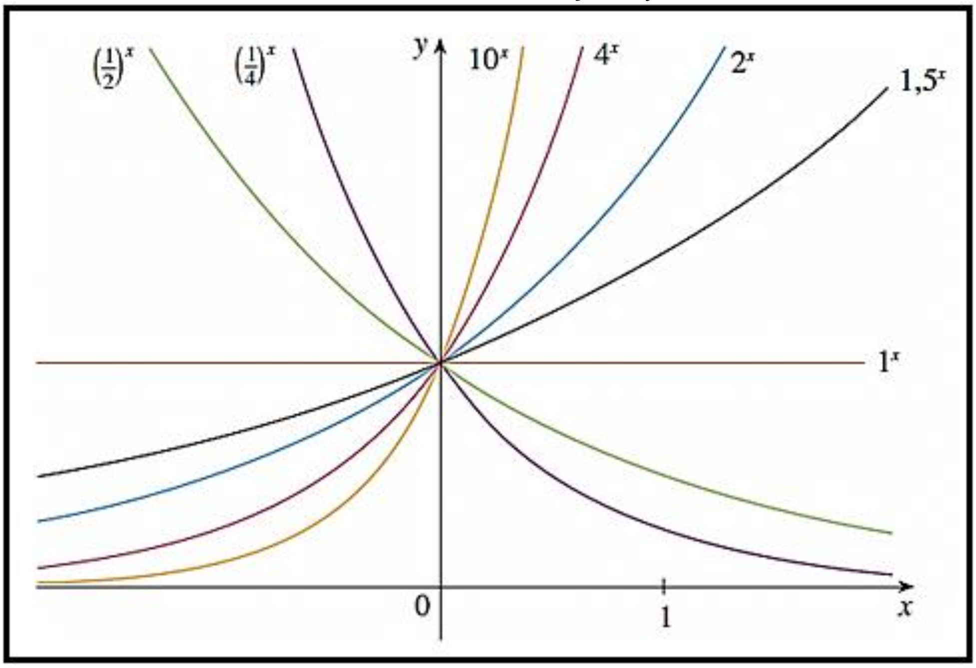
Da mesma forma, quando $0 < a < 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um decrescimento acelerado enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o decrescimento de y se torna cada vez mais lento. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grande de x, a tangente é quase horizontal.

Uma das características mais importantes da função exponencial é o fato de seu gráfico se aproximar do eixo das abcissas (eixo x) de modo que não ocorra a intersecção. Para $a > 1$, a função tende a zero quando x decresce (ou $x \longrightarrow \infty$). Já para $0 < a < 1$, a aproximação com o eixo x se dá à medida que x cresce (isto é, $x \longrightarrow \infty$). Nesse caso, podemos dizer que o eixo x (ou seja, a reta $y = 0$) é uma *assíntota horizontal* do gráfico da função exponencial.

Diz-se que a reta $y = b$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico da função quando a imagem da função $f(x)$ tende ao valor *b* da reta, isso é, $quando\ x \longrightarrow \infty$ ou $x \longrightarrow -\infty$ o gráfico da função tende ao valor *b*.

Os gráficos dos membros da família de funções $f(x) = a^x$ estão na figura a seguir para vários valores da base a. Pode-se observar que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto $(0, 1)$, como dito anteriormente, porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Percebemos que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$) e decresce mais rapidamente à medida que a fica menor (para $0 < a < 1$). Já para $a = 1$, qualquer número real x, $f(x) = 1^x$ sempre será constante.

FIGURA 2: Família de Funções $f(x) = a^x$



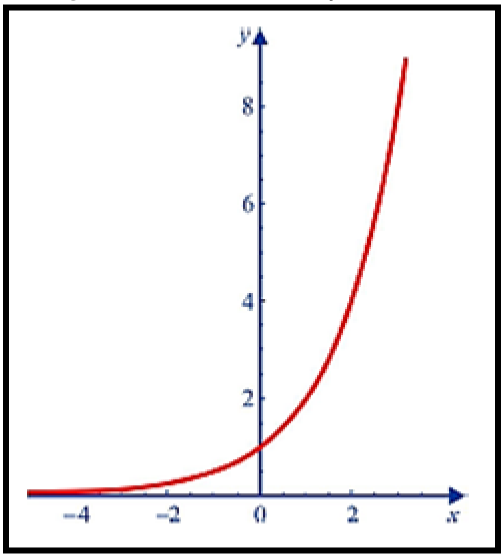
Fonte: Stewart (2006)

A função exponencial é dada por $f(x) = a^x$, porém, podemos fazer algumas transformações em seu modelo e, consequentemente em seu gráfico. Lima et. al. (2001) afirma que nas aplicações, a função exponencial pura $f(x) = a^x$ raramente ocorre. Desta forma, acreditamos ser interessante analisar algumas dessas transformações, particularmente aquelas que podem ser apresentadas de forma alternativa.

2.4. TRANSFORMAÇÕES DO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para analisarmos as possíveis transformações do gráfico da função exponencial, iremos tomar como referência a função exponencial definida por $f(x) = 2^x$, cujo gráfico é dado na figura abaixo, e assim verificar qual é o comportamento da função g definida em cada caso abaixo, analisando a utilidade de cada transformação.

Figura 3: Gráfico de $f(x) = 2^x$

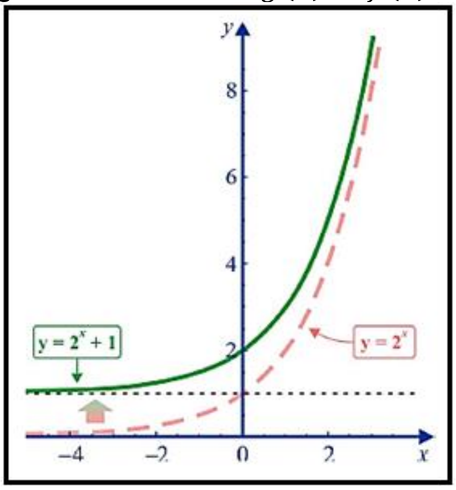


Fonte: Stewart (2006)

Em primeiro lugar mostraremos o caso $g(x) = f(x) + a$

A soma de uma constante ao valor de $f(x)$ provoca um deslocamento vertical no gráfico de uma função. Essa transformação é particularmente importante quando se deseja mudar a posição da assíntota horizontal. Se quisermos, por exemplo, que a assíntota passe a ser definida pela reta $y = 1$, basta tomarmos $g(x) = 2^x + 1$, como mostra a figura.

Figura 4: Gráfico de $g(x) = f(x) + a$



Fonte: Stewart (2006)

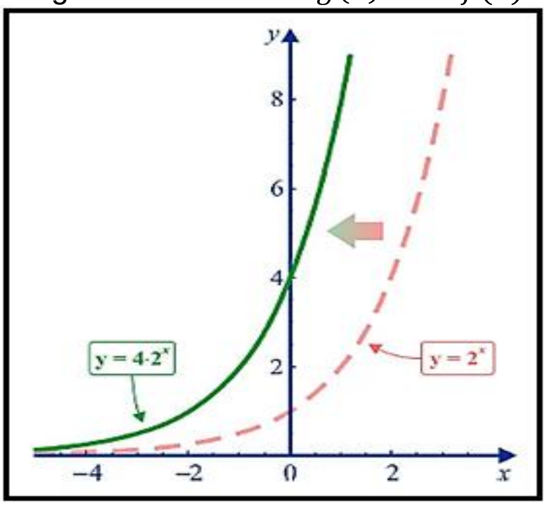
O Segundo caso é dado por $g(x) = c \cdot f(x)$

Multiplicar a função por uma constante c é equivalente a definir $g(x) = f(x + d)$, em que d também é uma constante. Como exemplo, vamos usar a função $g(x) = 4 \cdot 2^x$. Utilizando as propriedades de potenciação, podemos reescrever g da seguinte forma: $g(x) = 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2+x}$

Nesse caso particular, $g(x) = 4f(x) = f(x + 2)$

Como se sabe, ao somarmos uma constante positiva a x, deslocamos o gráfico de $f(x)$ na horizontal. Em particular, o gráfico de $g(x) = 4 \cdot 2^x$ pode ser obtido deslocando-se o gráfico de $f(x)$ duas unidades para a esquerda. Essa transformação é útil para mudar a intersecção da função com o eixo y, sem alterar a posição da assíntota. Como exemplo, a função $g(x) = 4 \cdot 2^x$ cruza o eixo y no ponto $(0, 4)$, em lugar de fazê-lo no ponto $(0, 1)$, como se vê na figura abaixo.

Figura 5: Gráfico de $g(x) = c \cdot f(x)$

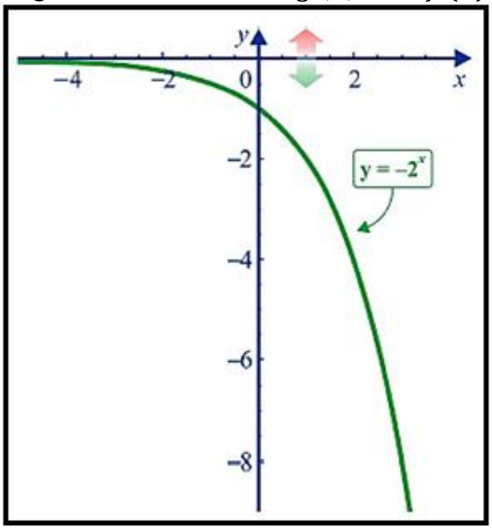


Fonte: Stewart (2006)

O terceiro caso retrata a função oposta da função exponencial, ou seja, $g(x) = -f(x)$.

A troca de sinal de $f(x)$ provoca uma reflexão de seu gráfico em torno do eixo x. Assim, o gráfico de $f(x) = -2^x$ é uma reflexão do gráfico de $f(x) = 2^x$, mantendo o eixo x como assíntota, conforme figura abaixo.

Figura 6: Gráfico de $g(x) = -f(x)$

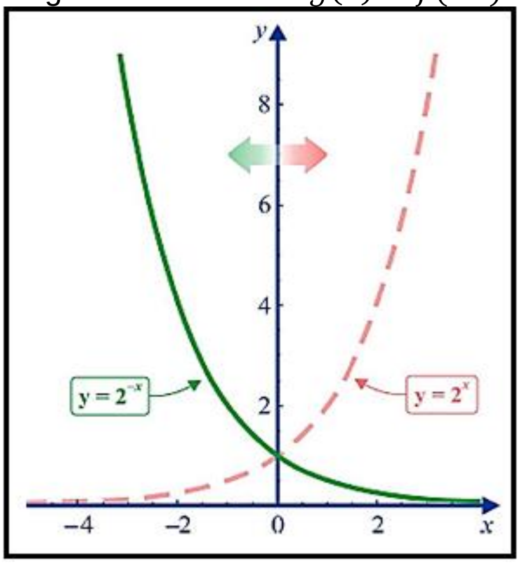


Fonte: Stewart (2006)

O quarto caso representa uma reflexão, ou seja, $g(x) = f(-x)$

Ao definirmos $f(-x)$, refletimos o gráfico de $f(x)$ em torno do eixo y. Se quisermos, então, traçar o gráfico de $g(x) = 2^{-x}$, podemos simplesmente refletir a curva $y = 2^x$ em torno do eixo y, como ilustra a figura a seguir.

Figura 7: Gráfico de $g(x) = f(-x)$



Fonte: Stewart (2006)

Funções exponenciais na forma $h(x) = a^{-x}$ são usadas para definir modelos nos quais a função é decrescente e tende a zero quando $x \longrightarrow 0$.

O quinto caso é definido por: $g(x) = f(cx)$

Multiplicar a variável x por uma constante é equivalente a promover uma mudança da base da função exponencial, como mostrado abaixo

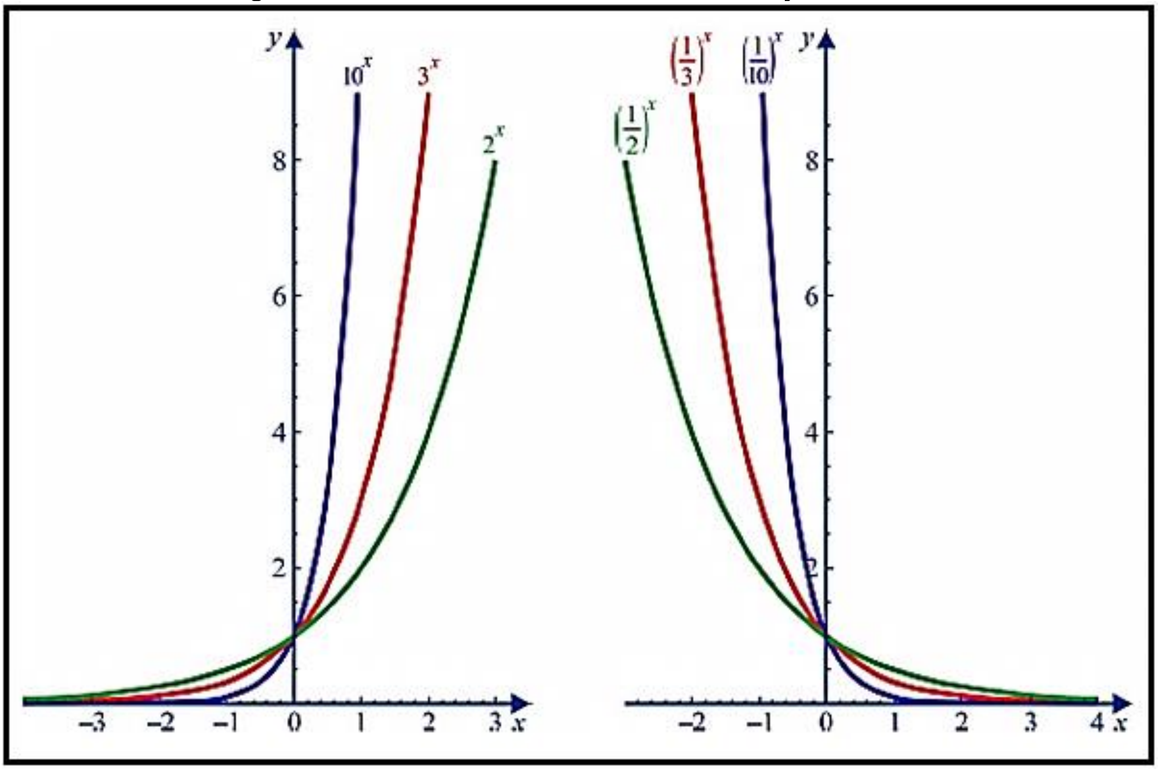
$$g(x) = a^{cx} = (a^c)^x$$

Logo, $g(x) = d^x$, em que $d = a^c$ é uma constante real que satisfaz $d > 0$ e $d \neq 1$. Como exemplo, a função $g(x) = 2^{3x}$ pode ser reescrita como

$$g(x) = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$$

Se $c < 0$, além da mudança de base, há também uma reflexão do gráfico em torno do eixo y. A figura abaixo mostra os gráficos de funções exponenciais com bases diferentes. Pode-se notar que a base está relacionada à curvatura do gráfico.

Figura 8: Análise dos Gráficos em Relação a Base



Fonte: Stewart (2006)

Diante das análises feitas até aqui, sabe-se que a função exponencial $f(x) = a^x$ é definida para $a > 1$ e $0 < a < 1$. Mas o que acontece se o valor da base e expoente forem zero, isto é, $f(x) = 0^x \ com \ x = 0$? Nesta parte, iremos fazer um breve comentário sobre esta situação, tomando por base as palavras de Lima (2000).

2.5. COMENTÁRIOS SOBRE O SIMBOLO 0^0

Quando se pergunta "qual é o valor de 0^0?", a resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria assim: 0^0 é uma expressão indeterminada. Para explicar estas respostas, é interessante analisarmos duas situações mais simples, desprovidas de significado matemático, que são $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$.

De acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$. Portanto, se escrevermos $\frac{0}{0} = x$ e $\frac{1}{0} = y$, estas igualdades significariam que $0 = 0 \cdot x$ e $1 = 0 \cdot y$. Com isso, percebe-se que todo número x é tal que $0 \cdot x = 0$ e nenhum número y é tal que $0 \cdot y = 1$. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada" e que $\frac{1}{0}$ é "uma divisão impossível" (geralmente, toda divisão do tipo $\frac{a}{0}$, com $a \neq 0$ é impossível).

Em relação ao símbolo 0^0, devemos lembrar que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, que é evidente quando $m > n$, continue ainda válida para $m = n$. Pondo $a^m = b$ teremos então $\frac{b}{b} = b^0$, logo $b^0 = 1$ se $b \neq 0$. No caso $b = 0$, a igualdade $\frac{b}{b} = b^0$ tomaria a forma $\frac{0}{0} = 0^0$, o que leva a considerar 0^0 como uma expressão indeterminada.

Esta conclusão ainda pode ser reforçada pelo seguinte argumento: como $0^y = 0$ para todo $y \neq 0$, seria natural pôr $0^0 = 0$; por outro lado, como $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$, seria também natural pôr $0^0 = 1$. Logo, o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considera-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, abordada nos cursos de nível superior, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual $\frac{0}{0}$ e 0^0, bem como outras fórmulas análogas, são expressões indeterminadas.

Para significar que o número A é o limite para o qual tende o valor $f(x)$ da função f quando x se aproxima de a, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Sabe-se que se $\lim_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim_{x \to a} g(x) = B$ então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, desde que seja $B \neq 0$. Por outro lado, quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então nada se pode garantir a respeito do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x se aproxima de a. Dependendo das funções f e g que se escolham, pode-se conseguir que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenha como limite qualquer valor c dado de antemão, ou mesmo que não tenda para limite algum. Por exemplo, tomando $f(x) = c(x - a)$ e $g(x) = x - a$ então $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ para todo $x \neq a$. Logo,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c(x-a)}{x-a} = c$$

Por este motivo se diz que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada.

De modo análogo, dado a priori qualquer número real $c > 0$, podemos achar funções f, g tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, tomar $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{\log c}{\log x}$; isto faz com que $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\log c}{\log x}} = c$. Portanto, quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ pode ter qualquer valor c, dado de antemão, desde que escolhamos convenientemente as funções f e g. Então se diz que 0^0 é uma expressão indeterminada.

2.6. CONTROVÉRSIAS SOBRE O SÍMBOLO 0^0

Na obra de Lima (2000), um professor escreveu uma carta ao autor, que embora concorde com as explicações dadas sobre 0^0 ser uma indeterminação, traz dois argumentos que o levam a concluir que $0^0 = 1$.

Apresento a seguir dois argumentos favoráveis e dois contra-argumentos. Para o primeiro, tomemos a função $f: X \longrightarrow Y$, definida no conjunto X e tomando valores no conjunto Y, é um subconjunto f do produto cartesiano $X \times Y$ com as seguintes propriedades.

(i) para todo $x \in X$, existe um par $(x, y) \in f$ cujo primeiro elemento é x.

(ii) se os pares (x, y') e (x, y''), ambos tendo x como primeiro elemento, pertencem a f, então $y' = y''$.

Desta definição formal de função, resulta que, quando $X = \emptyset$ é o conjunto vazio, então existe uma única função $f: X \to Y$, a saber, o conjunto vazio $f \subset X \times Y$.

Dados m e n inteiros positivos, a potência n^m é o número de funções definidas num conjunto com m elementos e tomando valores num conjunto com n elementos. Se $m \neq 0$, não há função definida num conjunto com m elementos e tomando valores no conjunto vazio, logo $0^m = 0$, para $m \neq 0$. Por outro lado, mesmo que seja $n = 0$, existe uma única função definida no conjunto vazio (que tem 0 elementos) e tomando valores num conjunto com n elementos. Logo $n^0 = 1$ para todo $n \geq 0$. Em particular, $0^0 = 1$.

O segundo argumento envolve o símbolo $\binom{n}{p}$ que representa o número de subconjuntos com p elementos num conjunto com n elementos. Portanto, $\binom{0}{p} = 0$ se $p \neq 0$ e $\binom{n}{0} = 1$, pois em qualquer conjunto há um único subconjunto com 0 elementos, a saber, o conjunto vazio. Em particular, $\binom{0}{0} = 1 =$ número de subconjuntos vazios do conjunto vazio. A fórmula do binômio de Newton se escreve então $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,\ onde\ n \geq 0\ e\ \binom{n}{0} = 1$

Tomando $a = 1$ e $b = -1$, obtemos $0^n = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$

Em particular, $n = 0$, dá: $0^0 = 1$.

Lima (2000), ao verificar os argumentos do professor, afirma que ao apresentar os dois raciocínios que “levam a concluir que $0^0 = 1$”, em nenhum momento se afirma provar esta igualdade. Além disso, o autor faz uma outra interpretação dos argumentos que foram apresentados.

Como primeiro contra-argumento considere (i): a definição usual de potência n^m não tem sentido quando $m = n = 0$. Entretanto, se adotarmos a *convenção* $0^0 = 1$, isto fará com que a igualdade “$n^m =$ número de funções de um conjunto X com m elementos num conjunto Y com n elementos” continue válida quando X e Y são conjuntos vazios.

Para além disso, o segundo contra-argumento (ii) perpassa pela mesma convenção $0^0 = 1$ fará com que a fórmula do binômio de Newton $(a+b)^m$ continue válida para $m = 0$ e $a + b = 0$.

O primeiro deles diz apenas que se for possível atribuir um significado ao símbolo 0^0 de modo que n^m continue igual ao número de funções de um conjunto de m elementos num conjunto com n elementos, então deve ser $0^0 = 1$. Interpretação semelhante pode ser dada ao segundo argumento.

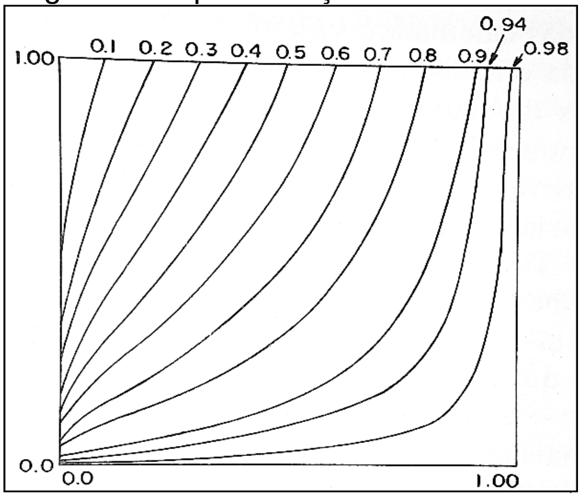
De modo análogo, podemos raciocinar da mesma maneira com o símbolo $\frac{0}{0}$. Uma fração $\frac{m}{n}$, cujo numerador é igual ao denominador, vale sempre 1, desde que seja $m \neq 0$. Se convencionássemos que $\frac{0}{0} = 1$, teríamos $\frac{m}{m} = 1$, para qualquer número m. É o mesmo princípio: dar um significado à expressão $\frac{0}{0}$ de tal maneira que a igualdade $\frac{m}{m} = 1$ seja válida sem exceção, para qualquer $m = 0$ ou $m \neq 0$. Assim, $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada. Mas por quê? A expressão $\frac{x}{y}$, para valores muito pequenos de x e de y, não assume necessariamente valores próximos de 1.

Tomando um número arbitrário c, podemos escolher números x, y tão pequenos quanto desejemos, de tal forma que $\frac{x}{y} = c$. Ou seja, quando x e y tendem a zero, o quociente $\frac{x}{y}$ pode tender para qualquer valor c dado a priori, tudo dependendo de como x e y são escolhidos. O mesmo ocorre com x^y. Esta expressão tem um significado bem preciso quando $x > 0$, valendo $x^y = e^{y \cdot \log x}$. Quando $y \neq 0$, embora a fórmula $e^{y \cdot \log 0}$ não tenha sentido, é natural escrevermos $0^y = 0$ porque, fixado $y \neq 0$, a expressão x^y assume valores cada vez mais próximos de zero, à medida que atribuímos a x valores que tendem a zero. Por outro lado, é impossível raciocinar da mesma maneira quando $x = y = 0$.

Com efeito, ao atribuir a x e y valores cada vez menores, que se aproximam de zero, a potência x^y não tende para nenhum limite bem determinado; tudo depende de como se escolhem x e y. Abaixo, tem-se as chamadas “curvas de nível” da função x^y quando $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$.

No alto de cada curva está assinalado o valor (constante) da função x^y em todos os pontos da curva. Todas as curvas convergem para o ponto $x = 0$ e $y = 0$. Logo, x^y não se aproxima de nenhum valor determinado quando x e y tendem a zero. Para cada uma das curvas desenhadas, a função x^y assume um valor constante, Por acaso, esse valor é exatamente a abcissa do ponto em que a curva corta a reta horizontal $y = 1$.

Figura 9: Representação Gráfica de 0^0



Fonte: Lima (2000)

Caminhando ao longo de qualquer uma dessas curvas, teremos $x^y = c$ (constante) para qualquer ponto de coordenada x, y na curva. É natural que, ao atingirmos o vértice $(0, 0)$, esperemos ainda ter $x^y = c$, ou seja, $0^0 = c'$, com $c' \neq c$. Isto significa que o limite de x^y quando $x \to 0$ e $y \to 0$ tende a zero depende do modo como x e y tendem a 0. Por isso é que 0^0 é uma expressão indeterminada.

Podemos perceber o quão é complexo a discussão sobre o símbolo 0^0. Com isso, estando de acordo com o que foi abordado, temos que para a função exponencial $f(x) = a^x$, ter a base $a = 0$ e expoente $x = 0$ é uma indeterminação. A nível de Ensino Médio, trataremos este caso como uma indeterminação, sem precisar justificar de modo formal.

Lima (1996) afirma que “as funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares”. Uma vez decidido qual o modelo adequado para resolver determinado problema, o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. Mas para isso, com o objetivo de saber que espécie de função deve ser empregada, é necessário conhecer as propriedades características de cada função, pois como reforçado em Lima (1996), “as situações da vida real, quer no cotidiano, quer na Tecnologia, quer na Ciência, não surgem acompanhadas de fórmulas explicitas”. A seguir, será feita a caracterização das funções exponenciais.

2.7. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

A caracterização da função exponencial é feita por meio de uma proposição, isto é, seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

$(i)\ f(nx) = f(x)^n\ para\ todo\ n \in \mathbb{Z}\ e\ todo\ x \in \mathbb{R}$

$(ii)\ f(x) = a^x\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}, onde\ a = f(1)$

$(iii) f(x+y) = f(x) \cdot f(y)\ para\ quaisquer\ x, y \in \mathbb{R}$

Para demonstrar essa proposição é necessário provar as implicações $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$.

De $(i) \Longrightarrow (ii)$, iniciemos provando que a hipótese (1) é valida para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), onde $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, temos $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$,

Logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Se fixarmos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Para completar a demonstração de que $(1) \Longrightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ pode ser tratado de modo análogo). Então, pelo lema 3.3, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Longrightarrow (2)$.

■

Para seguir de $(ii) \Longrightarrow (iii)$, seja $f(x) = a^x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

■

De $(iii) \Longrightarrow (i)$, seja $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), x,\ y\ \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = \underbrace{f(x + x + x + \cdots + x)}_{n\ vezes} = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \ldots \cdot f(x) = f(x)^n}_{n\ vezes}$$

Por último, provemos o caso $f(nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Então,

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Logo, $f(-nx) = \underbrace{f(-x - x \ldots - x)}_{n\ vezes} = \underbrace{f(-x) \cdot f(-x) \ldots \cdot f(-x)}_{n\ vezes} =$

$$= \underbrace{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{f(x)}}_{n\ vezes} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$$

■

É importante destacar que o Teorema das Caracterizações pode ser enunciado de um modo ligeiramente diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo (1) ⟹ (2) muda apenas no caso x irracional. Então, tem-se $x = \lim_{n \to \infty} r_n = r_n, r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, deve ser $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^x$

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente. Se a função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer x, $h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Em seguida, será mostrado que a recíproca é verdadeira.

Para demonstrar a proposição a seguir, cujo enunciado é dado por: seja $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se$g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para sua demonstração deve-se considerar a hipótese acima feita equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f continua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(x) = f(x+h)/f(x)$, monótona e injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer x, y $\in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b \cdot a^x$. ■

2.8. AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E PROGRESSÕES

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot a^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores $f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$, $f(x_2) = b \cdot a^{x_2}$, ... , $f(x_n) = b \cdot a^{x_n}$, ... formam uma progressão geométrica de razão a^h, pois,

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_{n+h}} = (b \cdot a^{x_n}) \cdot a^h$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, logo $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$. A seguir, será melhor detalhado.

Para provar que toda sequência aritmética é transformada numa sequência geométrica, considera-se a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere inicialmente $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, coninua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidente é $g(x)$. Então seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema da Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

A seguir será apresentado a sequência didática, as orientações gerais para os professores e os materiais dos alunos e professores.

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos o conjunto de cinco unidades articuladas de reconstrução conceitual quem compõem a sequência didática proposta para o ensino de função exponencial. Entretanto, antes de expor a sequência propriamente didática propriamente dita, apresentamos algumas orientações para que o leitor possa se familiarizar com a proposta e tomar alguns cuidados para que se tenha êxito em sua aplicação. Caso você não tenha o domínio da metodologia utilizada neste trabalho, recomenda-se a leitura do capítulo 4 da dissertação de Oliveira (2018).

3.1. ORIENTAÇÕES GERAIS PARA OS PROFESSORES

O conteúdo de função exponencial é comumente trabalhado no 1° ano do Ensino Médio, geralmente após o estudo das funções afim, quadrática e modular. Apesar dos alunos chegarem ao ensino médio, sabe-se que na maioria das vezes, estes sujeitos trazem consigo muitas dificuldades em matemática básica devido a inúmeros fatores.

Para Rozanski (2015), um dos fatores que pode desestimular os alunos é com relação às dificuldades em conteúdos, os quais não são esclarecidos e, ao passar para os anos seguintes, carregam estas dificuldades, que muitas vezes não são supridas por professores de sequência. Ou seja, como consequência, este aluno que está de certa forma atrasado com a matéria, dificilmente consegue compreender os conteúdos de sequência, uma vez que falta a base para a nova aprendizagem, o que ocasiona um efeito “bola de neve” de dificuldades, que por sua vez causam desinteresse nesses alunos.

Por conta disso, para minimizar as possíveis dificuldades que possam vir a ocorrer durante o processo de aplicação da sequência didática, optamos por utilizar dois instrumentos de apoio, chamados de “Teste de Verificação” e “Oficina de Nivelamento”.

O Teste de Verificação corresponde a um instrumento em folha de papel A4, contendo questões sobre assuntos considerados como pré-requisito para a realização da sequência didática relativa ao tema que se pretende abordar. Para a função exponencial, os conteúdos elegidos e abordados no teste são:

Quadro 2: Conteúdos abordados no teste de verificação

CONTEÚDOS	JUSTIFICATIVA
Conjuntos Numéricos	Trabalhar domínio e imagem da função exponencial
Multiplicação de Frações	Trabalhar com função exponencial decrescente
Potenciação	Principal conteúdo, uma vez que a variável principal encontra-se no exponente
Par Ordenado e Sistema Cartesiano	Base para construção de gráfico
Noção de Função	Identificar e trabalhar a relação entre variáveis
Construção de Gráfico	Construir o gráfico e identificar a curva suave

Fonte: elaborado pelo autor (2018)

O objetivo deste teste é verificar se os alunos apresentam as condições mínimas para a execução das atividades relacionadas a sequência didática. O professor pode ficar a vontade para incluir outros conteúdos que achar necessário ou retirar alguns, trabalhar com questões objetivas, entretanto, sugerimos que as questões do teste sejam todas ou em sua maioria discursivas, pois desta forma, é melhor para analisar as respostas dos alunos e evita os “chutes” nas questões objetivas.

Recomenda-se que o teste seja aplicado individualmente, sem consulta a qualquer tipo de material (livro, caderno, calculadora, celular, etc.) e sem a interferência do professor, pois assim será possível verificar em que nível os alunos se encontram. A seguir, apresentamos o teste de verificação que foi aplicado aos alunos.

TESTE DE VERIFICAÇÃO

01. Use ∈ (pertence) ou ∉ (não pertence) nas lacunas abaixo:

a) 2 ______ $\mathbb{N}$

b) -5 ______ $\mathbb{Z}$

c) -21 ______$\mathbb{N}$

d) 0,56 ______$\mathbb{Z}$

e) $\frac{1}{4}$ ______$\mathbb{Q}$

f) $\sqrt{9}$ ______$\mathbb{R}$

g) 0,555... ______$\mathbb{R}$

h) $-\frac{2}{3}$ ______$\mathbb{N}$

i) $\sqrt{3}$ ______$\mathbb{Q}$

j) 0 ______$\mathbb{R}$

02. Escreva os números abaixo como um produto de dois fatores:

a) 2 = ________________

b) 4 = ________________

c) 8 = ________________

d) 6 = ________________

e) 10 = _______________

f) 12 = __________________

g) 15 = __________________

h) 16 = __________________

i) 20 = __________________

j) 24 = __________________

03. Escreva os números abaixo na forma de um produto composto por fatores iguais:

a) 4 = ________________

b) 8 = ________________

f) 27 = __________________

g) 32 = __________________

c) 9 = ___________________

h) 36 = _____________________

d) 16 = __________________

i) 64 = _____________________

e) 25 = __________________

j) 100 = ____________________

04. Efetue as multiplicações abaixo indicadas:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ = _____________

b) $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5}$ = _____________

c) $160 \cdot \frac{1}{3}$ = ___________

d) $80 \cdot \frac{1}{3}$ = ____________

e) $10 \cdot \frac{1}{5}$ = ____________

f) $\frac{6}{4} \cdot 8$ = ___________________

g) $\frac{1}{2} \cdot 2$ = ___________________

h) $\frac{1}{4} \cdot 40$ = __________________

i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ = ________________

j) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ =______________

05. Escreva as multiplicações abaixo na forma de potenciação:

a) $2 \cdot 2 =$ ______________

b) $1 \cdot 1 \cdot 1 =$ ____________

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ __________

d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ __________

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ = ____________

f) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ ____________

g) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ =_________________

h) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 =$ ______________

i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ =______________

j) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ = ____________

06. Calcule as potências abaixo:

a) 2^2 = ____________________

b) 3^2 = ____________________

c) 3^1 = ____________________

d) 6^0 = ____________________

e) 1^4 = ____________________

f) 2^0 = ____________________

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ = ____________________

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ = ____________________

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^1$ = ____________________

j) 0^3 = ____________________

k) 3^{-1} = ____________________

l) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ = ____________________

07. Reduza os produtos a uma potência de mesma base:

a) $2^2 \cdot 2^3$ = ____

b) $3^3 \cdot 3^4$ = ____

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ = ____

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ = ____

e) $4^5 \cdot 4^2 \cdot 4^0$ = ____

f) $2^2 \cdot 2^{-4} \cdot 2^7$ = ____

08. Identifique a abcissa e a ordenada de cada par ordenado:

a) A (2; 3) abcissa = ______ e ordenada = ______

b) B $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ abcissa = ______ e ordenada = ______

c) C (−1; 0) abcissa = ______ e ordenada = ______

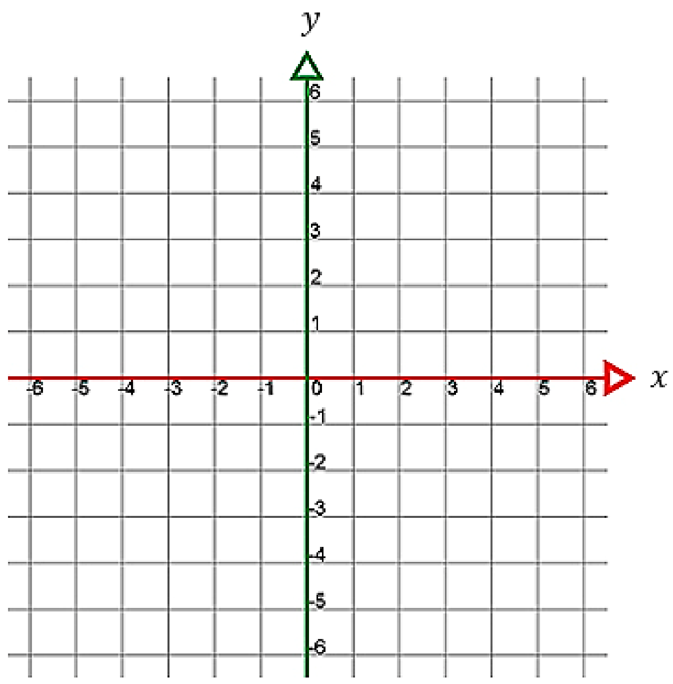
d) D (0; 3) abcissa = ______ e ordenada = ______

e) E (−4; −5) abcissa = ______ e ordenada = ______

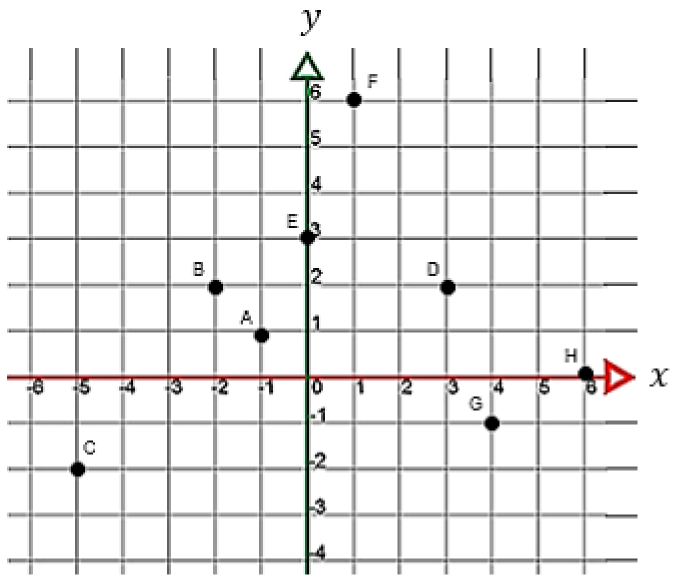
09. Localizar os pontos abaixo no sistema de coordenadas cartesiano:

A (1; 2)
B (2; 1)
C (3; 3)
D (−6; 3)

E (−4; −6)
F (0; 1)
G (0; 0)
H (5; 0)



10. Identifique as coordenadas dos pontos localizados no plano cartesiano:



A (;   )

B (;   )

C (;   )

D (;   )

E (;   )

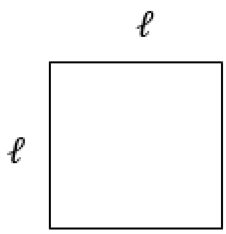
F (;   )

G (;   )

H (;   )

11. Observe na tabela a medida do lado (em cm), de uma região quadrada e sua área (em cm^2).

MEDIDA DO LADO	ÁREA
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
⋮	⋮



a) O que é dado em função do que?

b) Qual é a variável dependente?

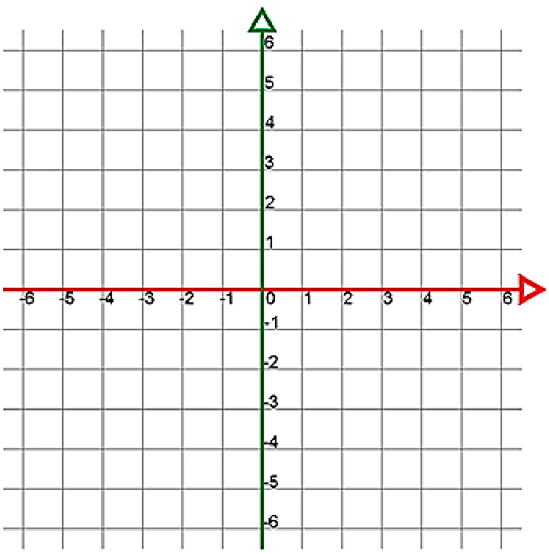
c) Qual é a variável independente?

d) Qual é a lei que associa a medida do lado com a área?

e) Qual é a área de uma região quadrada cujo lado mede 12 cm?

12. Construa o gráfico da função $f(x) = 2$ para os valores de x na tabela abaixo:

x	f(x)
−2	
−1	
0	
1/2	
1	
2	



Ao aplicar o teste de verificação e analisar os resultados, se o professor constatar que os alunos participantes apresentaram um bom desempenho, estes podem ser submetidos de imediato as UARC's propostas na sequência didática. Caso contrário, o professor deverá realizar o que nós definimos de "Oficina de Nivelamento". A Oficina de Nivelamento corresponde a uma aula, em forma de revisão, juntamente com uma apostila impressa, onde o professor deve resgatar os conteúdos considerados preliminares que foram explorados no teste de verificação.

A oficina dos conteúdos básicos para a função exponencial utilizada neste trabalho foi na forma de aula expositiva e dialogada, entretanto, ressaltamos que neste momento, o professor é livre para fazer adaptações que venham atender as suas necessidades. A seguir, apresentamos o teste que foi elaborado e aplicado aos alunos.

OFICINA DE NIVELAMENTO

- CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$): chama-se conjunto dos números naturais (símbolo $\mathbb{N}$) o conjunto formado pelos números $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$): chama-se conjunto dos números inteiros (símbolo $\mathbb{Z}$) o seguinte conjunto: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$): chama-se conjunto dos números racionais (símbolo $\mathbb{Q}$) o conjunto formado por números que podem ser representados por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Além das **frações**, neste conjunto estão presentes os **números decimais** (números com vírgula), dízimas periódicas (ex: 0,333...) os **números naturais** e também os **números inteiros**.

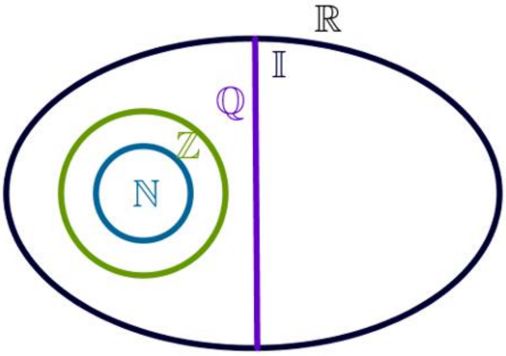
$$\mathbb{Q} = \left\{\dots, -\frac{13}{4}, -2{,}3, -\frac{8}{3}, -1, -0{,}4, 0, \frac{1}{2}, 1{,}5, 3, \dots\right\}$$

Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$): chama-se conjunto dos irracionais (símbolo $\mathbb{I}$) o conjunto formado por todos os números que **<u>não</u> são racionais**. Caracterizam-se por ser números decimais que não são exatos e não periódicos.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\dots$$

$$\pi = 3{,}141593\dots$$

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$): chama-se conjunto dos números reais (símbolo $\mathbb{R}$) o conjunto formado por todos os números racionais e os números irracionais. É a união dos racionais com os irracionais.



- MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Para multiplicar frações, multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador. Sempre que possível, simplificamos o resultado.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

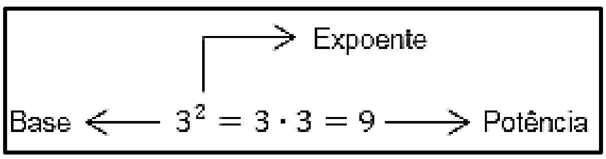
- POTENCIAÇÃO

É uma operação utilizada para representar uma multiplicação de fatores iguais.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Elementos da potenciação:



Base: é o fator que multiplica

Expoente: indica a quantidade de vezes que o fator se repete.

Potência: é o resultado da multiplicação

Generalizando, é todo número da forma:

$$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$$

Obs.: para potência de **base negativa**, temos duas situações:

Expoente **par** ⟶ resultado **positivo**

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

Expoente **ímpar** ⟶ resultado **negativo**

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Propriedades das Potências

a) **Potência de Expoente 0**: qualquer base não nula, elevado a 0 é igual a 1.

$$\boxed{a^0 = 1 \ \ , \ \ (a \neq 0)}$$

$$7^0 = 1 \quad ; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1 \quad ; \quad (-2)^0 = 1 \quad ; \quad (1{,}76)^0 = 1$$

b) **Potência de Expoente 1**: qualquer base elevada ao expoente 1 é igual a ele mesmo.

$$\boxed{a^1 = a}$$

$$3^1 = 3 \quad ; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad (-5)^1 = -5 \quad ; \quad (-0{,}6)^1 = -0{,}6$$

c) **Potência de expoente negativo**: é uma potência cujo resultado é igual ao inverso desse número elevado ao mesmo expoente de sinal oposto.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ \ , \ a \neq 0}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} \quad ; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{1}\right)^4 = 3^4$$

d) **Potência de expoente fracionário**: é uma potência que pode ser escrita como radical.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ ,\ n \geq 2}$$

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2} \qquad ; \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

e) **Multiplicação de potências de mesma base**: mantem-se as bases e somam-se os expoentes.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} \qquad ; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1+3} \qquad ; \qquad (0{,}4)^2 \cdot (0{,}4)^3 = (0{,}4)^{2+3}$$

f) **Divisão de potências de mesma base**: mantém-se as bases e subtrai-se os expoentes.

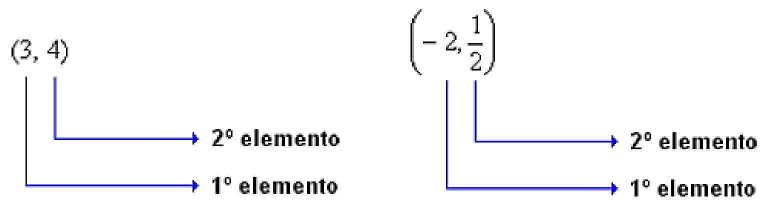
$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

$$4^5 : 4^3 = 4^{5-2} \qquad ; \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\,-\,2} \qquad ; \qquad (-2{,}5)^6 \cdot (-2{,}5)^3 = (-2{,}5)^{2+3}$$

- PAR ORDENADO

Muitas vezes, para localizarmos um ponto num plano, utilizamos dois números reais, numa certa **ordem**. Denominamos esses números de **pares ordenados**.

Exemplo:



Assim, indicamos por (x, y) o par ordenado formado pelos elementos x e y, onde x é o 1° elemento e y é o 2° elemento. Para o par ordenado $(3, -1)$, temos que $x = 3$ e $y = -1$.

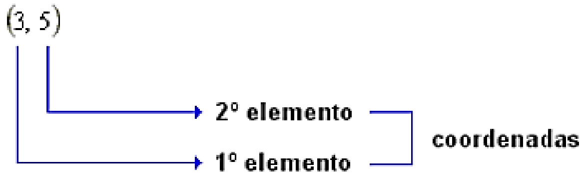
Observações:

De um modo geral, sendo x e y dois números reais quaisquer, temos que $(x, y) \neq (y, x)$.

Dois pares ordenados (x, y) e (r, s) serão iguais somente se $x = r$ e $y = s$.

- COORDENADAS CARTESIANAS

Os números do par ordenado são chamados de **coordenadas cartesianas**.Por exemplo, seja o ponto $A\ (3, 5)$. 3 e 5 são as coordenadas do ponto A. Denominamos de **abscissa** o 1° número do par ordenado (x), e **ordenada** o 2° número desse par (y).

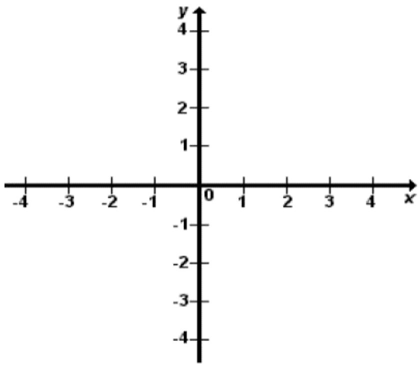


- SISTEMA CARTESIANO

É utilizado para localizar pontos e possui as seguintes características:

- Esse plano é formado por duas retas numeradas, perpendiculares entre si, chamadas de **eixos**;
- O **eixo horizontal** $\boldsymbol{x}$ é chamado de eixo das abscissas; O **eixo vertical** $\boldsymbol{y}$ é chamado de eixo das ordenadas;
- O ponto de encontro dos eixos é chamado **origem** do plano e indica o zero para cada um dos eixos, isto é, o par ordenado $(0, 0)$;

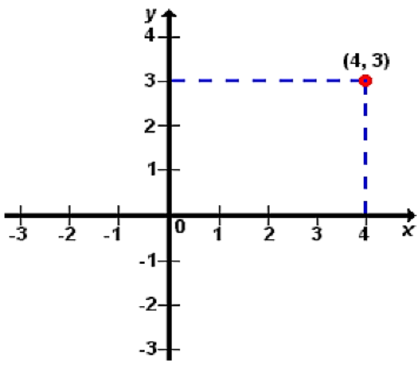
- Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas de **quadrantes**. Os quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do quadrante em que x e y são positivos.
- **O 1° quadrante apresenta todos os valores positivos**. O 2° quadrante tem valores negativos para x e positivos para y. **O 3° quadrante apresenta todos os valores negativos**. E no 4° quadrante tem valores positivos para x e negativos para y.



Para localizar um ponto num plano cartesiano, utilizamos a sequência prática:

- O 1º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das abscissas.
- O 2º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das ordenadas.
- No encontro das perpendiculares aos eixos x e y, por esses pontos, determinamos o ponto procurado.

Para localizar o ponto $(4, 3)$, temos

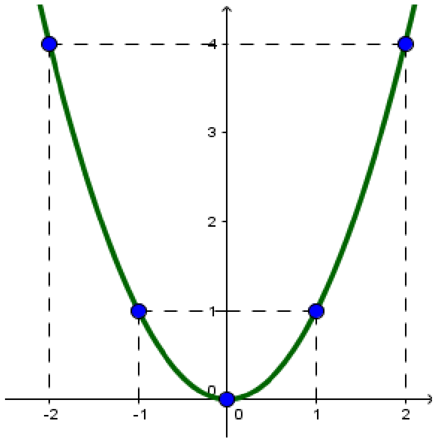


- FUNÇÕES E GRÁFICOS

Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$) de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f. Para determinar o gráfico de uma função, assinalamos uma serie de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas.

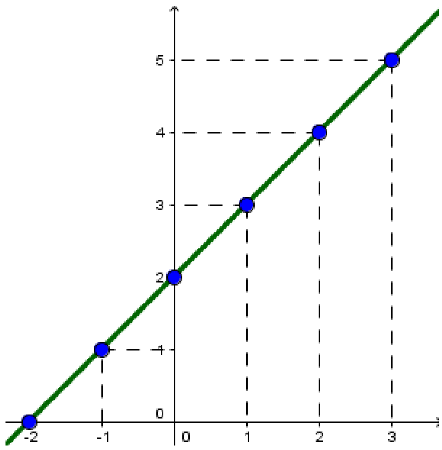
Ex.: Construa o gráfico de $f(x) = x^2$

x	$y = f(x)$	$(x\,;y)$
-2	4	(−2; 4)
-1	1	(−1; 1)
0	0	(0; 0)
1	1	(1; 1)
2	4	(2; 4)



Ex.: Construa o gráfico de $f(x) = x + 2$

x	$y = f(x)$	$(x\,;y)$
-2	0	(−2; 0)
-1	1	(−1; 1)
0	2	(0; 2)
1	3	(1; 3)
2	4	(2; 4)
3	5	(3; 5)

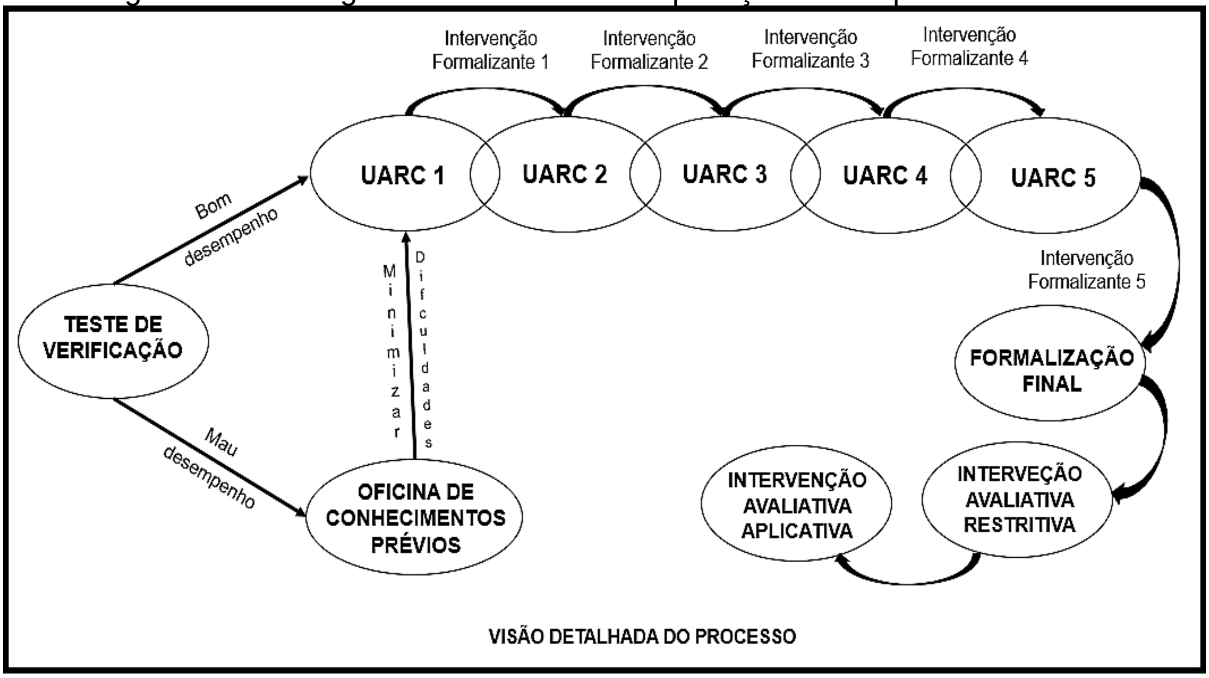


Os temas abordados na oficina foram os mesmos do teste de verificação, porém, foi dado mais ênfase em alguns conteúdos, como potenciação, sistema cartesiano, construção de gráfico e noção de função. Orientamos os professores que sejam disponibilizados os materiais para todos os alunos participantes, orientando-os a lerem cuidadosamente o material, bem como tirar o máximo de duvidas durante a oficina.

A elaboração do Teste de Verificação e a Oficina de Nivelamento tem como objetivo minimizar as possíveis dificuldades que possam vir a ocorrer durante a aplicação da sequência didática. Vem a ser como um apoio pedagógico extra para que o professor tenha êxito na sua aplicação.

O diagrama abaixo mostra os possíveis caminhos que o professor pode seguir antes de iniciar a sequência didática.

Figura 10: Visão geral do Processo de Aplicação da Sequência Didática



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Como foi ressaltado, inicia-se com o Teste de Verificação, se os alunos apresentarem um bom desempenho, pode-se iniciar a sequência didática. Se apresentarem um baixo desempenho, trabalha-se a Oficina de Nivelamento para depois trabalhar a sequência didática. Ainda assim, se o professor achar interessante, sugerimos a realização da oficina, mesmo para os alunos que tiveram êxito no teste de verificação, pois assim a chance dá experimentação dar certo podem aumentar.

Antes de iniciar a sequência didática, é importante que o professor tenha cuidado ao estabelecer a disposição dos alunos. Sugerimos que os alunos sejam organizados em grupos de 3 a 5 pessoas, devido ao número de atividades, e a forma como serão escolhidos esses grupos fica a critério do professor.

Caso o professor queira fazer uma avaliação minuciosa usando a Analise Microgenética e a Análise do Discurso, será necessário registrar o processo em áudio e/ou vídeo. Dessa forma, recomendamos que pelo menos duas pessoas estejam presentes para dar apoio durante o registro das interações verbais dos alunos.

3.2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Como já foi mencionado, as atividades que compõem a sequência didática foram elaboradas com o objetivo de amenizar os problemas referentes ao processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos relativos à função exponencial, apontados na revisão de estudos e nas pesquisas de campo realizada com alunos e professores de Matemática da Educação Básica. Com isso, procuramos organizar as atividades partindo da relação entre variáveis até o estudo de algumas propriedades e características, que no final permitem chegar a definição de função exponencial.

Apresentamos a seguir a proposta de sequência didática para o ensino de função exponencial, composta por cinco Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, no qual cada uma trata de um ou mais tópicos relacionados ao tema em questão. As UARC 1 e UARC 2 tratam da ideia inicial de relação entre variáveis na forma exponencial, a UARC 3 trata da restrição da base “a”, a UARC 4 trata do gráfico e assíntota, e a UARC 5 trata de algumas propriedades desta função tais como domínio e imagem, crescimento e decrescimento. Após cada UARC, é feita uma intervenção formalizante, a fim de concretizar as ideias construídas em cada um dos instantes.

Optamos por usar o termo “relação” durante a execução das UARC’s, pois toda relação é uma função, e o termo “função” foi abordado após a realização das cinco UARC’s, na intervenção formalizante final. Orientamos o leitor para um melhor desenvolvimento da sequência, ao entregar os materiais da sequência didática, é importante que seja feita a leitura em voz alta dos comandos, promover e mediar a discussão entre os alunos sobre as respostas e resultados encontrados, esclarecer as dúvidas e, por fim, realizar a formalização do conceito estudado.

Em cada uma das UARCS que compõem a sequência didática proposta, você poderá identificar os seguintes elementos: título, objetivo de aprendizagem do aluno, orientações ao professor e material a ser utilizado. Além disso, propomos a quantidade de aulas destinadas a execução de cada uma das atividades, no quadro abaixo.

Quadro 3: Duração das Atividades

Encontros	**Título da UARC**	**Tempo Estimado**
1	O Lego + Intervenção Formalizante 1	2 aulas de 45 min
2	Benefícios da Massa de Modelar + Intervenção Formalizante 2	2 aulas de 45 min
3	Preenchimento de Tabela + Intervenção Formalizante 3	2 aulas de 45 min
4	Construção e Reconhecimento de Gráfico + Intervenção Formalizante 4	2 aulas de 45 min
5	Características da Relação Exponencial Intervenção Formalizante 5 + Formalização Final	1 aula de 45 min

Fonte: elaborado pelo autor (2018)

3.2.1 MATERIAL DO ALUNO

UARC 1

Lego: o brinquedo que fascina crianças e adultos

No site da *Infoescola* constam algumas informações sobre o lego, dentre elas, que o lego foi criado pelo dinamarquês e marceneiro de profissão, Ole Kirk Christiansen, em 1934, o *Leg Godt,* mundialmente conhecido como **LEGO**, significa "brincar bem". É um brinquedo formado por diversos módulos de tamanhos diferentes, os quais se encaixam perfeitamente, originando diversas combinações, e desde o final do ano de 1950, tornou-se popular em todo o mundo. O LEGO segue quatro princípios básicos, são eles: alta qualidade, é seguro, estimula a criatividade e a imaginação, auxiliando no desenvolvimento das crianças, de qualquer faixa etária, e diverte. O LEGO se tornou um tipo de brinquedo universal.

Mesmo depois do advento dos computadores e toda tecnologia, a LEGO continua no topo das vendas de brinquedos, sempre antenada as tendências e desenvolvendo conjuntos dos mais variados e recentes temas. O que começou como uma brincadeira, impressiona com os dados atuais: são fabricadas mais de 30 bilhões de peças, provindas das 4 fábricas, sendo que a sua sede está localizada na cidade de Billund, Dinamarca.

[**Intervenção Inicial**] Uma caixa de lego contém peças encaixáveis, de formato idêntico, nas cores amarelo ou vermelho, das quais são possíveis construir torres verticais, de cores iguais ou não. Considere que cada peça de lego corresponde a um andar da torre. Começa-se construindo torres com apenas um andar, depois torres com dois andares, e assim sucessivamente, acrescentando um andar a cada torre formada. Dessa forma:

[I$_R$ – 01] Quantos tipos de torres de apenas um andar poderão ser construídas?

____

[I$_R$ – 02] Quantas tipos de torres de dois andares poderão ser construídas?

____

[I$_R$ – 03] Quantas tipos de torres de três andares poderão ser construídas?

____

[I$_R$ – 04] De acordo com o experimento acima, o que provoca a modificação do número de torres construídas?

____

[I$_R$ – 05] Como se comporta o número de torres construídas após cada acréscimo de andar?

____

[I$_E$ – 06] Preencha o quadro abaixo, relacionando os dados que você obteve das questões anteriores.

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS

[I$_R$ – 07] Existe alguma regularidade na sequência de números que descrevem o número de torres? Qual?

____

[I$_R$ – 08] Existe alguma regularidade que estabelece uma relação de dependência entre o número de andares e o número correspondente de torres formadas? Qual?

____

[I$_R$ – 09] Da forma como o problema foi proposto inicialmente, quem você elege para ser a variável principal? O número de torres construídas ou o número de andares? Justifique sua resposta.

____

[I$_R$ – 10] Dos resultados que você preencheu no quadro da questão 06, em relação ao número de torres construídas, é possível escrevê-los como produto (multiplicação) de dois ou mais números?

(   ) Sim (   ) Não

[I$_R$ – 11] Se sim, como poderíamos escrever o número inicial de torres?

(   ) $1 \cdot 2$ (   ) $2 \cdot 2$

[I$_R$ – 12] É possível escrever os outros números de torres construídas como produto (multiplicação) de números iguais?

(   ) Sim (   ) Não

[I$_E$ – 13] Se a resposta anterior for 'sim', preencha a terceira coluna da tabela abaixo

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS	NÚMERO DE TORRES ESCRITO COMO PRODUTO DE DOIS OU MAIS NÚMEROS

[I$_R$ – 14] Dos resultados que você obteve da terceira coluna do quadro anterior, existe uma forma mais simples de representar essas multiplicações?

(   ) Sim (   ) Não

[I$_R$ – 15] É possível escrever os termos da sequência de números da terceira coluna em forma de potenciação?

(   ) Sim (   ) Não

[I_R – 16] Como você representa de forma simplificada o número de torres com um andar?

( ) 1 + 1 ( ) $2 \cdot 1$ ( ) 2^1

[I_E – 17] Preencha a quarta coluna da tabela abaixo, escrevendo de forma simplificada as multiplicações que representam o número de torres construídas.

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS	NÚMERO DE TORRES ESCRITO COMO PRODUTO DE DOIS OU MAIS NÚMEROS	FORMA SIMPLES

[I_R – 18] Analise os valores da primeira e da quarta coluna do quadro da questão 17 (anterior). Você consegue perceber alguma regularidade entre esses valores? Qual?

____

[I_R – 19] Quantas torres serão construídas se utilizarmos **"n"** andares?

____

[I_R – 20] Com base na quarta coluna da tabela da questão 17, é possível escrever uma expressão que relaciona o número de torres construídas com o número de andares utilizados?

( ) Sim ( ) Não

[I_R – 21] Se a resposta anterior for 'sim', se chamarmos de **"T"** o número de torres e de **"a"** o número de andares, qual seria essa expressão?

____

[I_R – 22] Qual será o número de torres se utilizarmos 4 andares?

____

[I_R – 23] Qual será o número de torres se utilizarmos 5 andares?

____

[I_R – 24] O que você observou em relação a lei de formação que coloca o número de torres **T** em dependência do número de andares **a**?

____

UARC 02

Benefícios do uso da massinha de modelar no desenvolvimento de habilidades na educação infantil

Trabalhar habilidades motoras finas é de suma importância para o posterior desenvolvimento da escrita e de outras atividades no decorrer da vida diária das crianças. Nos momentos em que manipulam massinha de modelar as crianças utilizam músculos pequenos das mãos enquanto apertam, beliscam, puxam, enrolam, recortam etc., o que auxilia de forma potencial no desenvolvimento da motricidade fina. Não bastasse tudo isso, a massinha de modelar dá ao professor oportunidade de introduzir os mais diversos temas em sala de aula e contextualizá-los de forma super divertida.

Fonte*: http://www.ideiacriativa.org/2015/05/beneficios-do-uso-da-massinha-de.html*

[Intervenção Inicial] Considere uma massa de modelar, que foi esticada até o comprimento de 160 centímetros (cm). Em seguida, esta massa é dividida pela metade e se retira uma das partes. Para a outra metade, repete-se o procedimento anterior, e assim sucessivamente. Dessa forma:

[I$_R$ – 01] Qual a medida do comprimento da massa no instante inicial?

____

[I$_R$ – 02] Se após a divisão da massa, fizermos uma primeira retirada, qual a medida do comprimento da massa que sobrou?

____

[I$_R$ – 03] Da massa que sobrou da primeira retirada, após uma nova divisão, se fizermos uma segunda retirada, qual será a medida do comprimento da massa que sobrou?

____

[I$_R$ – 04] Da massa que sobrou da segunda retirada, ao dividir novamente, se fizermos uma terceira retirada, qual será a medida do comprimento da massa restante?

____

[I$_R$ – 05] De acordo com o experimento acima, o que provoca a modificação do comprimento da massa?

____

[I$_R$ – 06] Como se comporta os valores do comprimento da massa após cada retirada?

____

[I$_E$ – 07] Preencha o quadro abaixo, relacionando os dados que você obteve das questões anteriores.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)

[I$_R$ – 08] Existe alguma regularidade na sequência de números que descreve o comprimento da massa? Qual?

____

[I$_R$ – 09] Existe alguma regularidade que estabelece uma relação de dependência entre o número de retiradas e o comprimento da massa? Qual?

____

[I$_R$ – 10] Da forma como o problema foi proposto inicialmente, quem você elege para ser a variável principal? O comprimento da massa final ou o número de retiradas? Justifique sua resposta.

____

[I_R – 11] Dos resultados que você preencheu na tabela da questão 07, em relação ao comprimento da massa (segunda coluna), é possível escrevê-los como produto (multiplicação) de dois números?

( ) Sim ( ) Não

[I_R – 12] Se sim, como poderíamos escrever o comprimento inicial da massa como produto de dois números?

( ) 160 · 1 ( ) 160 · 2

[I_R – 13] Como poderíamos escrever o comprimento da massa como produto de dois números, após a segunda retirada?

( ) 80 · 1 ( ) $80 \cdot \frac{1}{2}$

[I_R – 14] Como poderíamos escrever o comprimento da massa como produto de dois números, após a terceira retirada?

( ) 20 · 2 ( ) $40 \cdot \frac{1}{2}$

[I_E – 15] Preencha a terceira coluna da tabela abaixo, com as respostas que você marcou nos itens anteriores.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)	COMPRIMENTO DA MASSA COMO PRODUTO DE DOIS NÚMEROS

[I_R – 16] É possível escrever os termos da sequência de números da terceira coluna em forma de potenciação?

( ) Sim ( ) Não

[I_R – 17] Relembrando as propriedades de potenciação, como você escreveria o comprimento inicial da massa como produto por $\frac{1}{2}$?

( ) $160 \cdot 1 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ( ) $160 \cdot 1 = 80 \cdot 2$ ( ) $160 \cdot 1 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$

[I_E – 18] Preencha a quarta coluna da tabela abaixo, escrevendo os dados da terceira coluna como produto do comprimento inicial por ½.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)	COMPRIMENTO DA MASSA COMO PRODUTO DE DOIS NÚMEROS	COMPRIMENTO INICIAL MULTIPLICADO POR ½

[I_R – 19] Com a tabela acima preenchida, analise os valores da primeira e da quarta coluna do quadro da questão 19 (anterior). Você consegue perceber alguma regularidade entre esses valores? Qual?

____

[I_R – 20] Quanto medirá o comprimento da massa, em centímetros, após **"n"** retiradas?

____

[I_R – 21] Com base na quarta coluna da tabela da questão 19, é possível escrever uma expressão que relaciona o comprimento da massa com o número de retiradas?

(   ) Sim   (   ) Não

[I_R – 22] Se a resposta anterior for 'sim', se chamarmos de **"C"** o comprimento da massa e de **"n"** o número de retiradas, qual seria essa expressão?

____

[I_R – 23] Qual será o comprimento da massa após a 4° retirada?

____

[I_R – 24] Qual será o comprimento da massa após a 5° retirada?

____

[I_R – 25] O que você observou em relação a lei de formação que coloca o comprimento final da massa **C** em dependência do número de retiradas **n**?

____

UARC 3

PREENCHIMENTO DE TABELA

[Intervenção Inicial] A tabela a seguir mostra algumas expressões matemáticas e alguns valores de x. Com o auxílio da calculadora, preencha a tabela com os resultados os valores de x para cada expressão.

$x \backslash a^x$	$(-2)^x$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^x$	$(-1)^x$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^x$	0^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	1^x	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$	2^x
-2									
$\left(-\frac{3}{2}\right)$									
-1									
$\left(-\frac{1}{2}\right)$									
0									
$\frac{1}{2}$									
1									
$\frac{3}{2}$									
2									

Com base nos dados obtidos da tabela, responda:

[I$_R$ – 01] Das expressões $(-2)^x$ até $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ o que elas têm em comum?

____

[I$_R$ – 02] Dos resultados obtidos das expressões $(-2)^x$ até $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$, o que você observou?

____

[I_R – 03] Na expressão 0^x, o que você observou ao utilizar:

a) Valores negativos para x?

___

b) valores positivos para x?

___

[IR – 04] Dos resultados obtidos da expressão 1^x, o que você observou?

___

[IR – 05] Das expressões $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ até 2^x, o que elas têm em comum?

___

[IR – 06] Na expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, todos os valores de x utilizados deram algum resultado existente?

( ) Sim   ( ) Não

[IR – 07] Das expressões $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ e 2^x, todos os valores de x utilizados deram algum resultado existente?

( ) Sim   ( ) Não

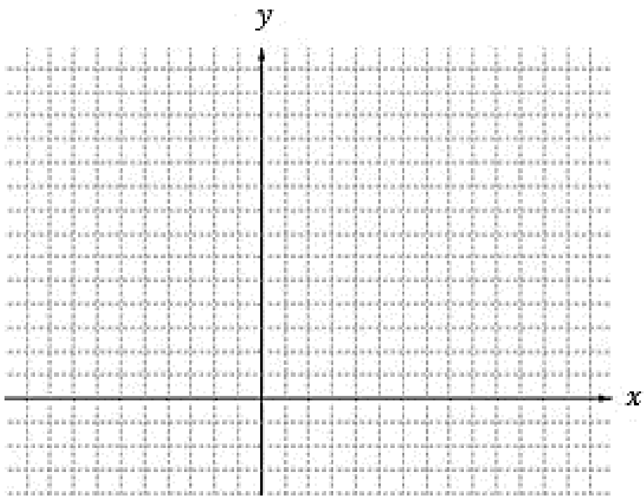
UARC 4

[I_E – 01] Dadas as tabelas a seguir e o plano cartesiano. Para cada situação, construa o gráfico da relação definida por $y = 2^x$ e por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Se for necessário, utilize a calculadora para efetuar os cálculos.

a.1)

$y = 2^x$

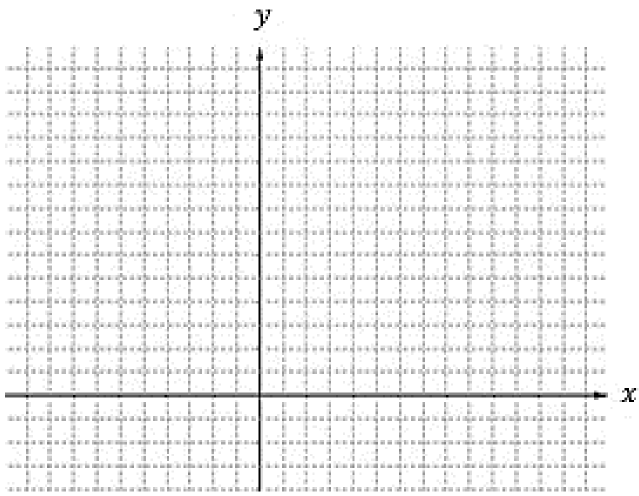
x	y	(x, y)
–3		
0		
3		



a.2)

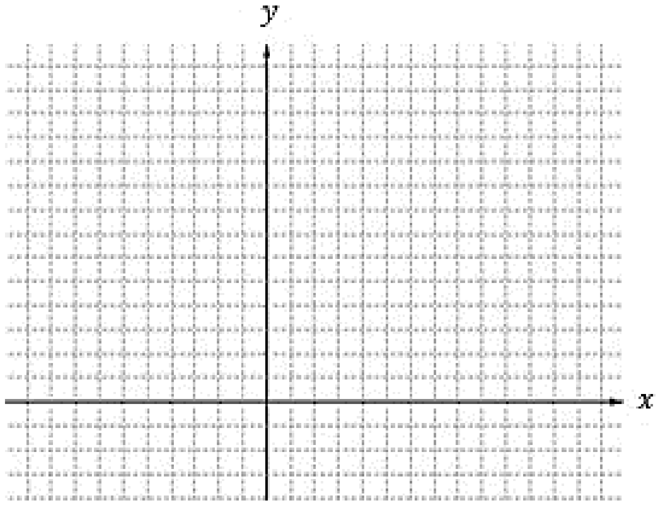
$y = 2^x$

x	y	(x, y)
–3		
–2		
0		
2		
3		



a.3)

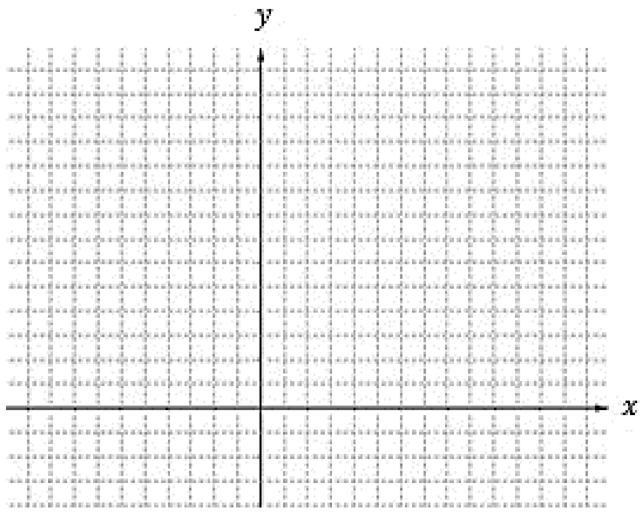
x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		



b.1)

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

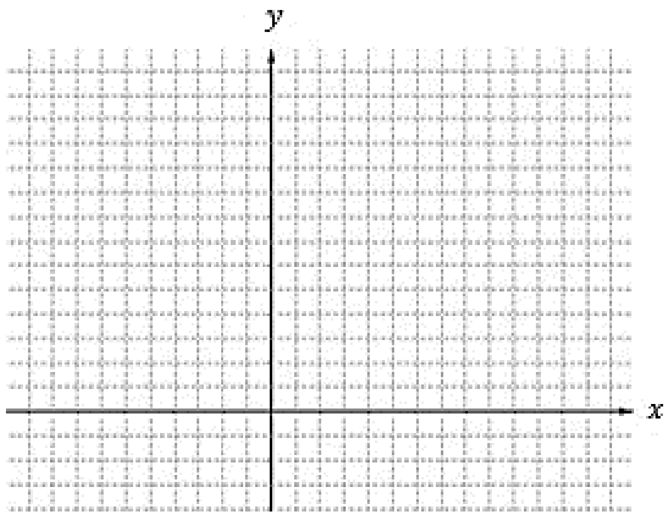
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



b.2)

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

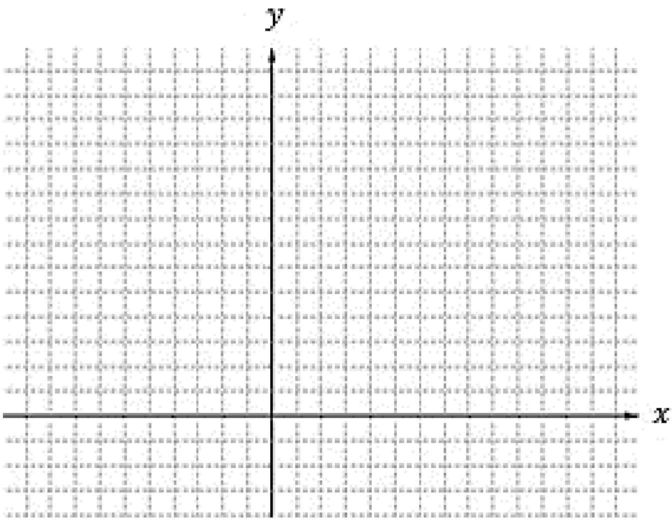
x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b.3)

x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

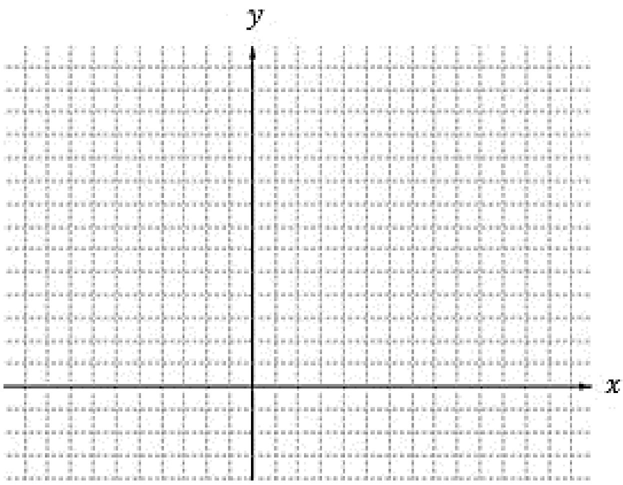


[IE – 02] Dadas as tabelas a seguir e o plano cartesiano. Para cada situação, construa o gráfico da relação definida por $y = 3^x$ e por $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Se for necessário, utilize a calculadora para efetuar os cálculos.

$y = 3^x$

a.1)

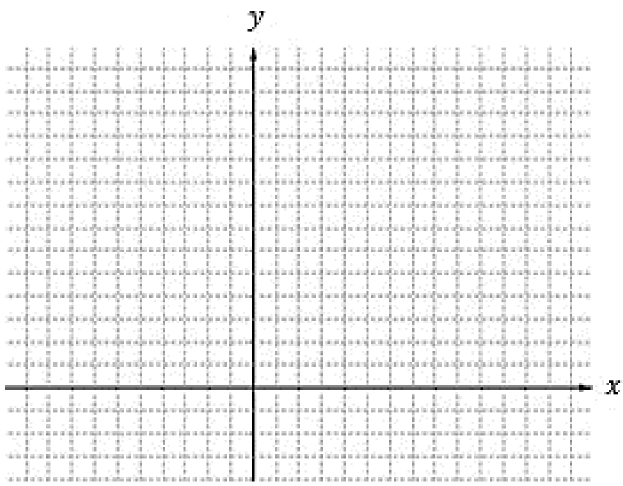
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



$y = 3^x$

a.2)

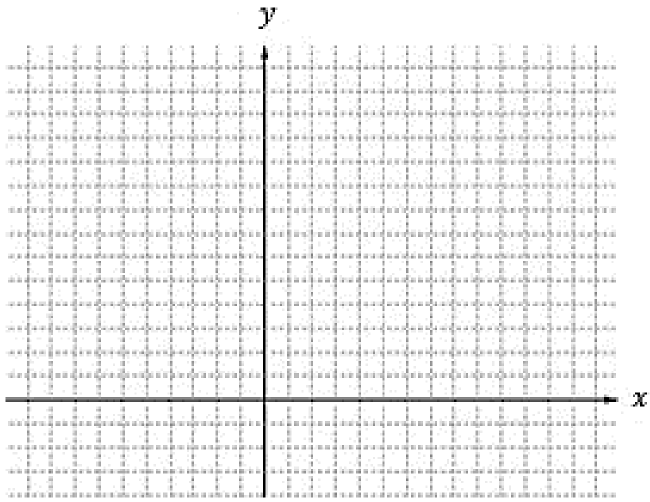
x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



$y = 3^x$

a.3)

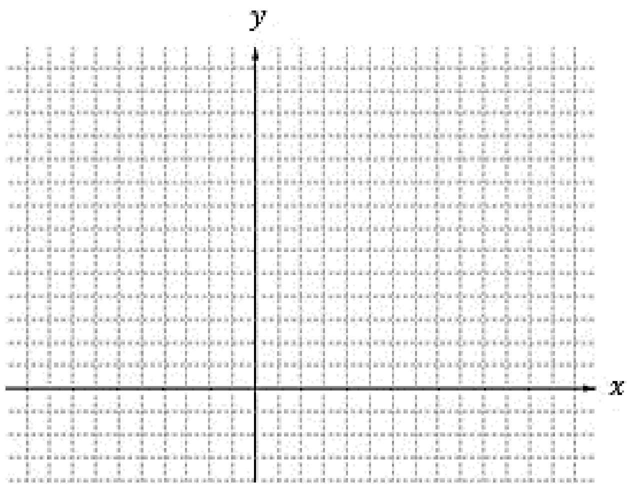
x	y	(x, y)
–3		
–2		
–1		
0		
1		
2		
3		



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b.1)

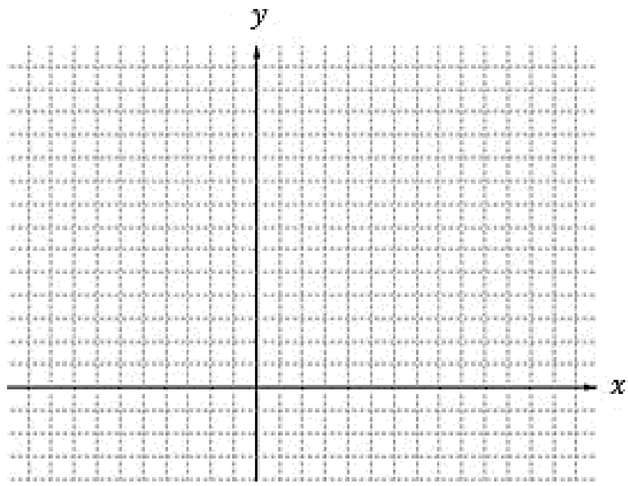
x	y	(x, y)
–3		
0		
3		



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b.2)

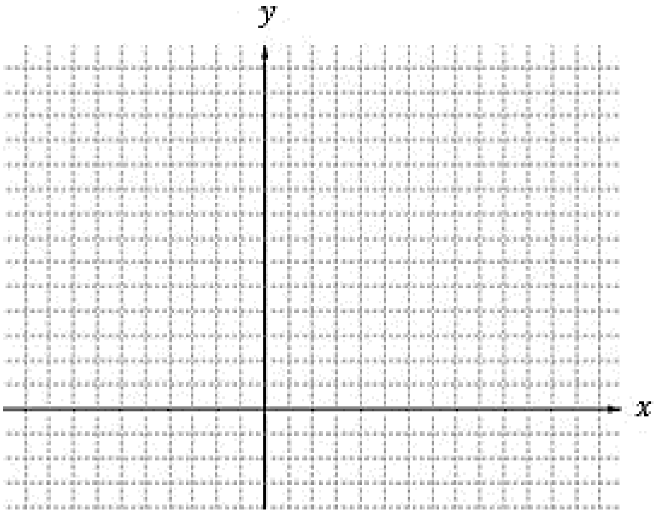
x	y	(x, y)
–3		
–2		
0		
2		
3		



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b.3)

x	y	(x, y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



[IR – 03] Para as relações $y = 2^x$ e $y = 3^x$:

a) o que acontece se atribuirmos para x valores cada vez menores? Verifique, com o auxílio da calculadora adotando para x os valores -4, -5, -8 e -10.

____

b) Para valores de x cada vez menores, é possível que o valor de y seja zero? Ou ele se aproxima de zero? Justifique sua resposta.

____

[IR – 04] Para as relações $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

a) o que acontece se atribuirmos para x valores cada vez maiores? Verifique, com o auxílio da calculadora adotando para x os valores 4, 6, 9 e 10.

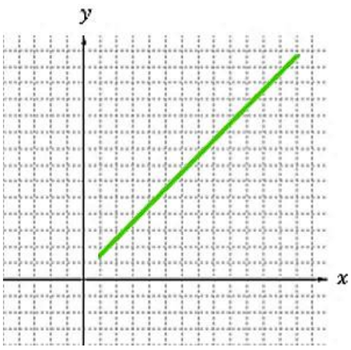
____

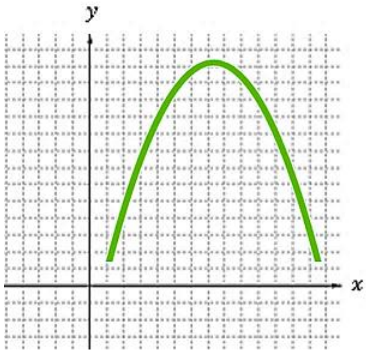
b) Para valores de x cada vez maiores, é possível que o valor de y seja zero? Ou ele se aproxima de zero? Justifique sua resposta.

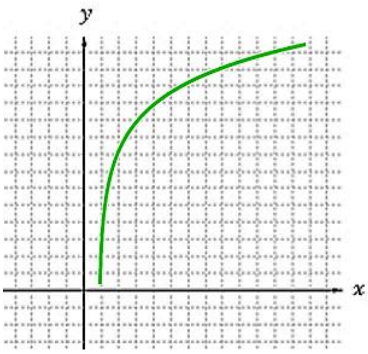
____

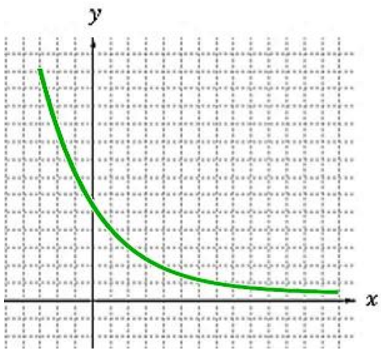
[I$_R$ – 05] Observe o quadro com representações de curvas que você recebeu e responda:

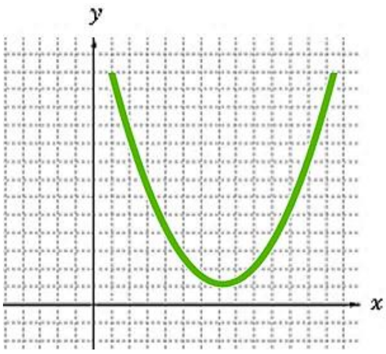
a) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 01, com $y = 2^x$?

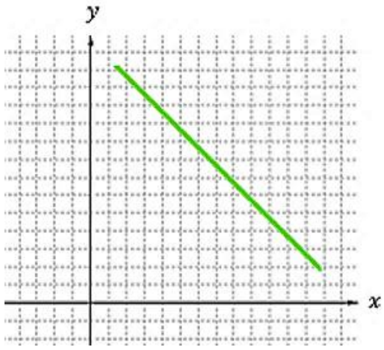
( ) 

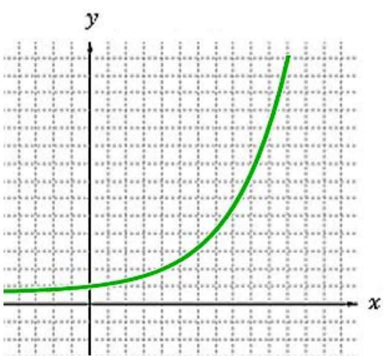
( ) 

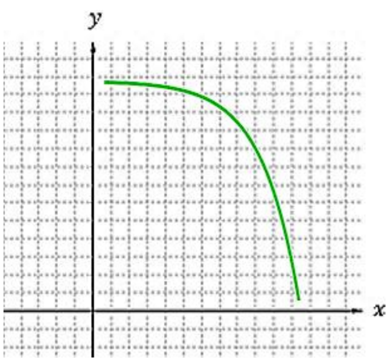
( ) 

( ) 

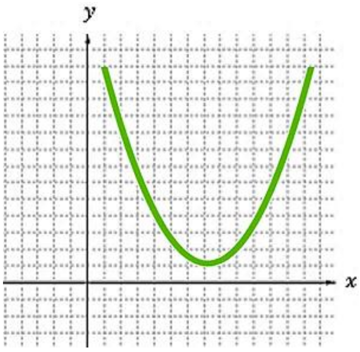
( ) 

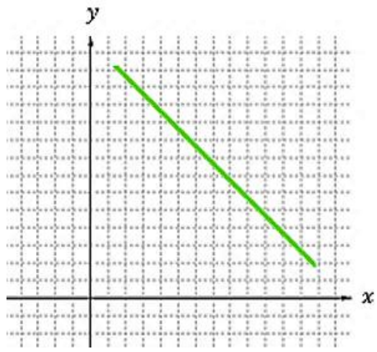
( ) 

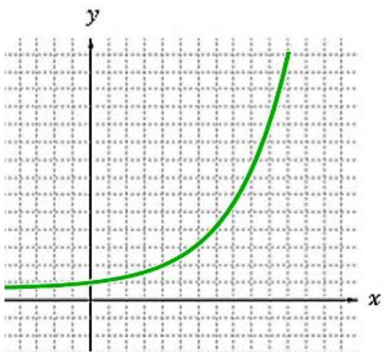
( ) 

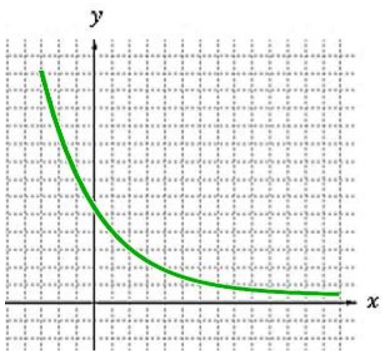
( ) 

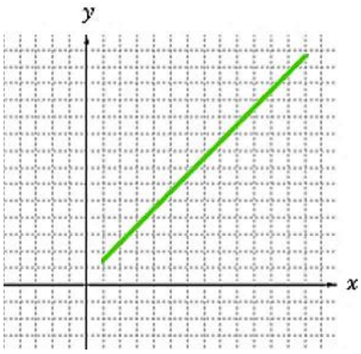
b) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 01, com $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

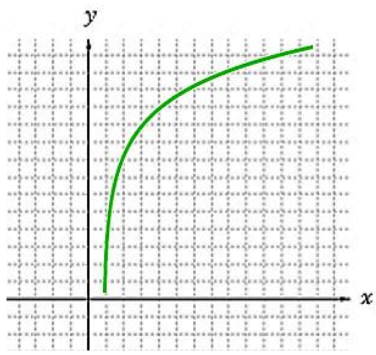
( ) 

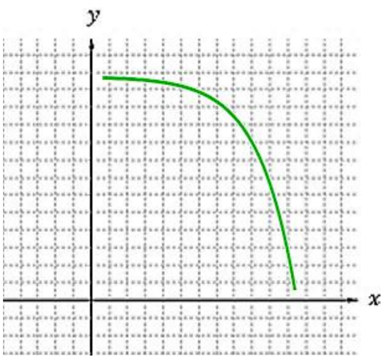
( ) 

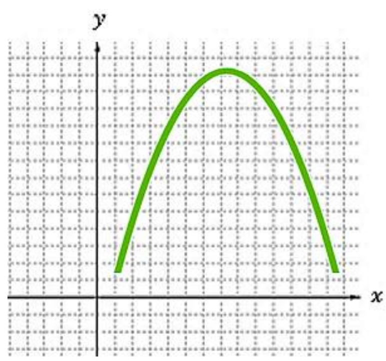
( ) 

( ) 

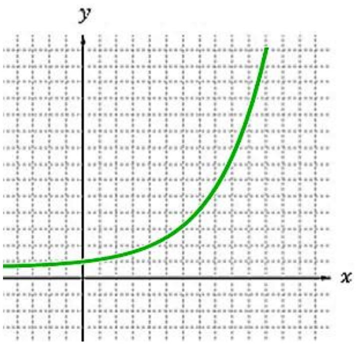
( ) 

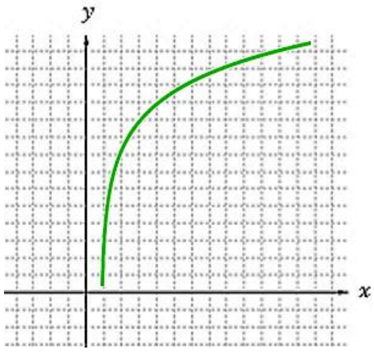
( ) 

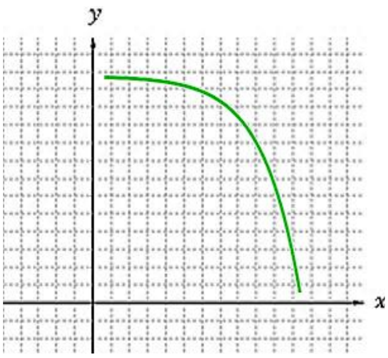
( ) 

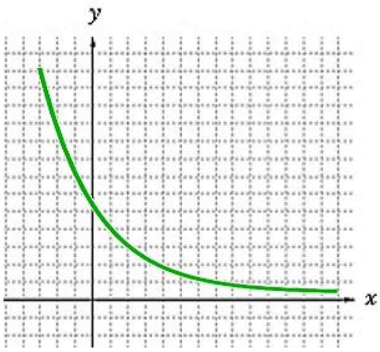
( ) 

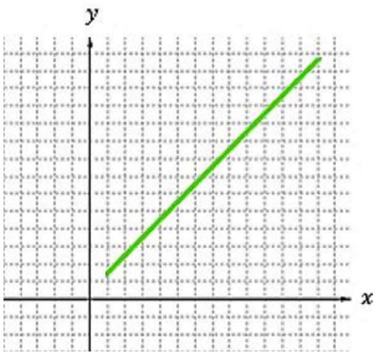
c) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 02, com $y = 3^x$?

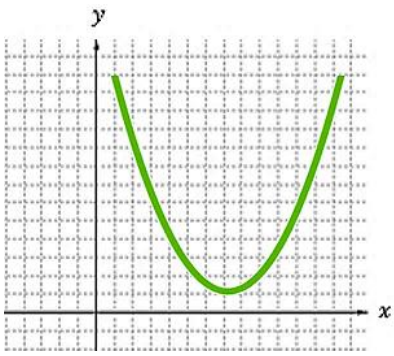
( )


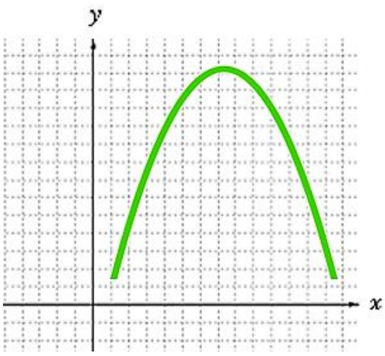
( )


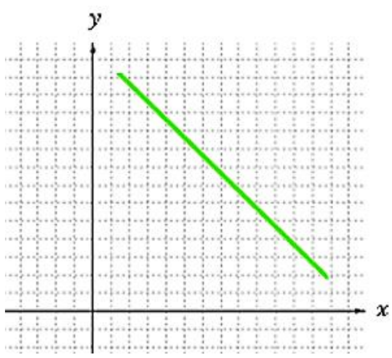
( )


( )


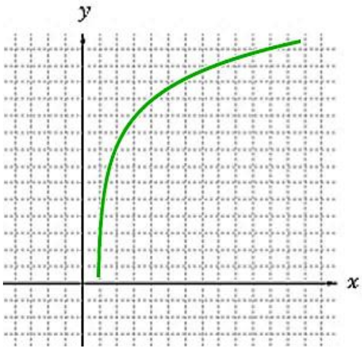
( )


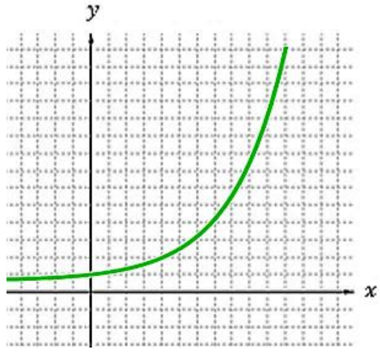
( )


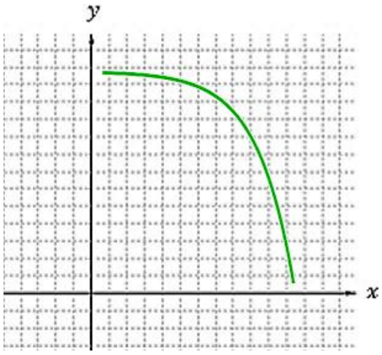
( )


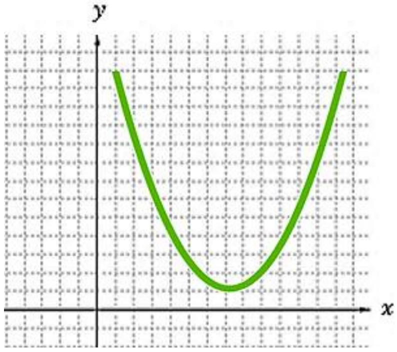
( )


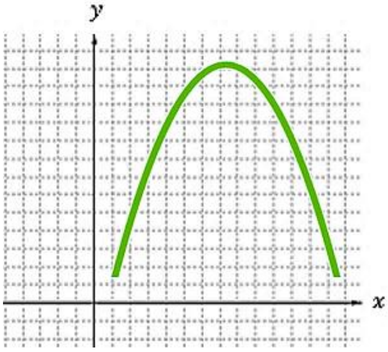
d) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 02, com $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

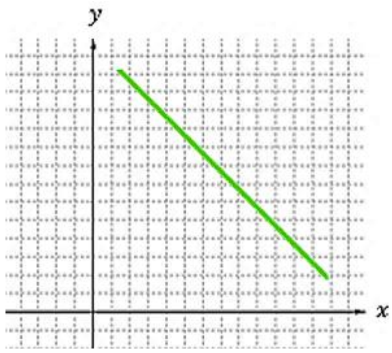
( ) 

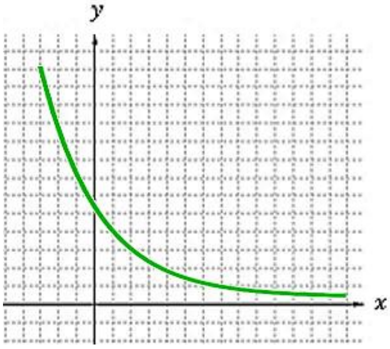
( ) 

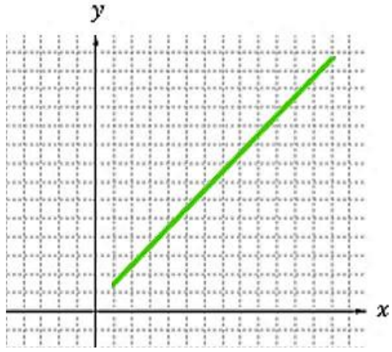
( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

[I$_R$ – 04] Dos itens 01, 02 e 03 da Atividade 04, o que você pode afirmar em relação as figuras obtidas?

UARC 05

[I_R – 01] Para as relações $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) É possível utilizar valores **negativos** para x?

____

b) É possível utilizar o **número 0** para x?

____

c) É possível utilizar valores **positivos** para x?

____

[I$_R$ – 02] Para as relações $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

a) É possível utilizar valores **negativos** para x?

____

b) É possível utilizar o **número 0** para x?

____

c) É possível utilizar valores **positivos** para x?

____

[I$_R$ – 03] Para a relação definida por $y = 2^x$, responda os itens a seguir:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I$_R$ – 04] Para a relação definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, responda os itens a seguir:

a) Ao atribuir **valores negativos** para y, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para y, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I$_R$ – 05] Para a relação definida por $y = 3^x$, responda os itens a seguir:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I$_R$ – 06] Para a relação definida por $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, responda os itens a seguir:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

( ) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I$_R$ – 07] De todas as representações construídas por você, existe a possibilidade de alguma delas ficar abaixo do eixo x?

( ) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 08] De todas as representações construídas por você, existe a possibilidade de alguma delas intersectar ("tocar") o eixo x?

( ) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 09] De modo geral, o que podemos concluir a respeito dos valores de y em relação aos valores de x?

____

[[I$_R$ – 10] Em relação aos gráficos das relações $y = 2^x$ e $y = 3^x$, o que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

____

[I$_R$ – 11] Em relação aos gráficos das relações $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, o que acontece com os valores de $f(x)$ quando aumentamos os valores de x?

____

[I$_R$ – 12] Observando as funções da questão 10 e 11, é possível relacionar o crescimento ou decrescimento com as bases dessas funções? Justifique.

____

[I$_R$ – 13] De modo geral, o que você pode concluir sobre a representação gráfica em relação ao eixo x?

____

3.2.2 MATERIAL DO PROFESSOR

UARC 1

TÍTULO: O Lego

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre variáveis

MMATERIAIS: Blocos de montar, Lápis, caneta, papel A4

Orientações ao Professor

- Organizar a turma em grupos de, no máximo cinco alunos.
- Distribuir o conjunto de atividades que compõem a UARC 1.
- Fazer a leitura de motivação sobre os blocos de montar, promovendo uma breve discussão sobre que influência este brinquedo teve na infância dos alunos.
- Ler atentamente cada comando, exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos
- Promover discussões para as respostas que forem surgindo.
- Esta UARC foi elaborada com a pretensão de que os alunos observassem, por meio da interação com o brinquedo Lego, a relação de dependência entre o número de andares e o número de torres formadas. Em alguns itens, serão preenchidas tabelas a fim de que se perceba as regularidades dos dados obtidos.
- A UARC também foi elaborada visando superar um obstáculo observado nos livros didáticos, que corresponde a não exploração da relação exponencial entre as variáveis. A ideia é de que o aluno perceba o crescimento exponencial do número de torres em função da quantidade de andares (bloquinhos) utilizados.

[Intervenção Inicial] Uma caixa de lego contém peças encaixáveis, de formato idêntico, nas cores amarelo ou vermelho, das quais são possíveis construir torres verticais, de cores iguais ou não. Considere que cada peça de lego corresponde a um andar da torre. Começa-se construindo torres com apenas um andar, depois torres com dois andares, e assim sucessivamente, acrescentando um andar a cada torre formada. Dessa forma:

[I$_R$ – 01] Quantos tipos de torres de apenas um andar poderão ser construídos?

Dois tipos de torres (é possível que os alunos escrevam quais as torres que poderão ser formadas).

[I$_R$ – 02] Quantas tipos de torres de dois andares poderão ser construídos?

Quatro tipos de torres (é possível que os alunos escrevam quais as torres que poderão ser formadas).

[I$_R$ – 03] Quantas tipos de torres de três andares poderão ser construídas?

Oito torres (é possível que os alunos escrevam quais as torres que poderão ser formadas).

[I$_R$ – 04] De acordo com o experimento acima, o que provoca a modificação do número de torres construídas?

O acréscimo de um bloco/andar

[I$_R$ – 05] Como se comporta o número de torres construídas após cada acréscimo de andar?

Aumenta o número de torres/ dobra / duplica

[I$_E$ – 06] Preencha o quadro abaixo, relacionando os dados que você obteve das intervenções anteriores.

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS
1	*2*
2	*4*
3	*8*

[I$_R$ – 07] Existe alguma regularidade na sequência de números que descrevem o número de torres? Qual?

Sim, o número de torres vai dobrando

[I$_R$ – 08] Existe alguma regularidade que estabelece uma relação de dependência entre o número de andares e o número correspondente de torres formadas? Qual?

Sim, as torres construídas dependem da quantidade de andares utilizados

[I$_R$ – 09] Da forma como o problema foi proposto inicialmente, quem você elege para ser a variável principal? O número de torres construídas ou o número de andares? Justifique sua resposta.

O número de andares, pois sem os andares não seria possível construir as torres

[I$_R$ – 10] Dos resultados que você preencheu no quadro da intervenção 06, em relação ao número de torres construídas, é possível escrevê-los como produto (multiplicação) de dois ou mais números?

(x) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 11] Se sim, como poderíamos escrever o número inicial de torres?

(x) $1 \cdot 2$ ( ) $2 \cdot 2$

[I$_R$ – 12] É possível escrever os outros números de torres construídas como produto (multiplicação) de números iguais?

(x) Sim ( ) Não

[I$_E$ – 13] Se a resposta anterior for 'sim', preencha a terceira coluna do quadro abaixo:

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS	NÚMERO DE TORRES ESCRITO COMO PRODUTO DE DOIS OU MAIS NÚMEROS
1	*2*	*$2 \cdot 1$*
2	*4*	*$2 \cdot 2$*
3	*8*	*$2 \cdot 2 \cdot 2$*

[I$_R$ – 14] Dos resultados que você obteve da terceira coluna do quadro anterior, existe uma forma mais simples de representar essas multiplicações?

(x) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 15] É possível escrever os termos da sequência de números da terceira coluna em forma de potenciação?

(x) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 16] Como você representa de forma simplificada o número de torres com um andar?

( ) 1 + 1 ( ) $2 \cdot 1$ (x) 2^1

[I$_E$ – 17] Preencha a quarta coluna do quadro abaixo, escrevendo de forma simplificada as multiplicações que representam o número de torres construídas:

NÚMERO DE ANDARES	NÚMERO DE TORRES CONSTRUÍDAS	NÚMERO DE TORRES ESCRITO COMO PRODUTO DE DOIS OU MAIS NÚMEROS	FORMA SIMPLES
1	*2*	$2 \cdot 1$	2^1
2	*4*	$2 \cdot 2$	2^2
3	*8*	$2 \cdot 2 \cdot 2$	2^3

[I$_R$ – 18] Analise os valores da primeira e da quarta coluna do quadro da intervenção 17. Você consegue perceber alguma regularidade entre esses valores? Qual?

Sim, os valores da primeira coluna estão nos expoentes dos valores da quarta coluna

[I$_R$ – 19] Quantas torres serão construídas se utilizarmos "n" andares?

2^n

[I$_R$ – 20] Com base na quarta coluna do quadro da intervenção 17, é possível escrever uma expressão que relaciona o número de torres construídas com o número de andares utilizados?

(x) Sim ( ) Não

[I$_R$ – 21] Se a resposta anterior for 'sim', se chamarmos de "T" o número de torres e de "a" o número de andares, qual seria essa expressão?

$$T = 2^a$$

[I$_R$ – 22] Qual será o número de torres se utilizarmos 4 andares?

$$T = 2^4 \quad \therefore \quad T = 16\ torres$$

[I$_R$ – 23] Qual será o número de torres se utilizarmos 5 andares?

$$T = 2^5 \quad \therefore \quad T = 32\ torres$$

[I$_R$ – 24] O que você observou em relação a lei de formação que coloca o número de torres T em dependência do número de andares a?

A variável principal (andares), está no expoente

Após a socialização das atividades feitas pelos grupos, o professor deve formalizar o conceito de relação exponencial, tomando como base o modelo gerado nesta atividade.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

A expressão ou lei de formação que foi gerada na UARC 1 é chamada de **relação exponencial**, representadas por $y = a^x$.

(Aqui tem-se a construção da primeira UARC)

UARC 2

TÍTULO: Benefícios da massa de modelar

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre variáveis

MATERIAIS: Massa de modelar Lápis, caneta, papel A4

Orientações ao Professor

- Organizar a turma em grupos de, no máximo cinco alunos.
- Distribuir o conjunto de atividades que compõem a UARC 2.
- Fazer a leitura de motivação sobre os blocos de montar, promovendo uma breve discussão sobre que influência este brinquedo teve na infância dos alunos.
- Ler atentamente cada comando, exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos
- Promover discussões para as respostas que forem surgindo.
- Esta atividade também foi elaborada com a pretensão de que os alunos observassem, por meio da interação com a massa de modelar, a relação de dependência entre o comprimento da massa e o número de retiradas.
- Assim como foi na UARC 1, em algumas intervenções serão preenchidos quadros a fim de que se perceba as regularidades dos dados obtidos, além disso, também foi criada para superar um o problema de trabalhar a relação entre as grandezas observado nos livros didáticos. A ideia é e que o aluno perceba o decrescimento exponencial do comprimento da massa de modelar e o número de retiradas.

[Intervenção Inicial] Considere uma massa de modelar, que foi esticada até o comprimento de 160 centímetros (cm). Em seguida, esta massa é dividida pela metade e se retira uma das partes. Para a outra metade, repete-se o procedimento anterior, e assim sucessivamente. Dessa forma:

[I$_R$ – 01] Qual a medida do comprimento da massa no instante inicial?

160 centímetros

[IR – 02] Se após a divisão da massa, fizermos uma primeira retirada, qual a medida do comprimento da massa que sobrou?

80 centímetros

[IR – 03] Da massa que sobrou da primeira retirada, após uma nova divisão, se fizermos uma segunda retirada, qual será a medida do comprimento da massa que sobrou?

40 centímetros

[IR – 04] Da massa que sobrou da segunda retirada, ao dividir novamente, se fizermos uma terceira retirada, qual será a medida do comprimento da massa restante?

20 centímetros

[IR – 05] De acordo com o experimento acima, o que provoca a modificação do comprimento da massa?

Número de retiradas

[IR – 06] Como se comporta os valores do comprimento da massa após cada retirada?

Vai diminuindo / diminui / cai pela metade

[IE – 07] Preencha o quadro abaixo, relacionando os dados que você obteve das intervenções anteriores.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)
0	*160*
1	*80*
2	*40*
3	*20*

[IR – 08] Existe alguma regularidade na sequência de números que descreve o comprimento da massa? Qual?

Sim, o comprimento cai pela metade

[IR – 09] Existe alguma regularidade que estabelece uma relação de dependência entre o número de retiradas e o comprimento da massa? Qual?

Sim, o comprimento final da massa depende do número de retiradas

[IR – 10] Da forma como o problema foi proposto inicialmente, quem você elege para ser a variável principal? O comprimento da massa final ou o número de retiradas? Justifique sua resposta.

Número de retiradas, pois se não houver retiradas, o comprimento da massa não se modifica

[IR – 11] Dos resultados que você preencheu no quadro da intervenção 07, em relação ao comprimento da massa (segunda coluna), é possível escrevê-los como produto (multiplicação) de dois números?

(x) Sim ( ) Não

[IR – 12] Se sim, como poderíamos escrever o comprimento inicial da massa como produto de dois números?

(x) $160 \cdot 1$ ( ) $160 \cdot 2$

[IR – 13] Como poderíamos escrever o comprimento da massa como produto de dois números, após a segunda retirada?

( ) $80 \cdot 1$ (x) $80 \cdot \frac{1}{2}$

[IR – 14] Como poderíamos escrever o comprimento da massa como produto de dois números, após a terceira retirada?

( ) $20 \cdot 2$ (x) $40 \cdot \frac{1}{2}$

[IE – 15] Preencha a terceira coluna do quadro abaixo, com as respostas que você marcou nas intervenções anteriores.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)	COMPRIMENTO DA MASSA COMO PRODUTO DE DOIS NÚMEROS
0	*160*	$160 \cdot 1$
1	*80*	$160 \cdot \frac{1}{2}$
2	*40*	$80 \cdot \frac{1}{2}$
3	*20*	$40 \cdot \frac{1}{2}$

[I_R – 16] É possível escrever os termos da sequência de números da terceira coluna em forma de potenciação?

(x) Sim ( ) Não

[I_R – 17] Relembrando as propriedades de potenciação, como você escreveria o comprimento inicial da massa como produto por $\frac{1}{2}$?

(x) $160 \cdot 1 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ( ) $160 \cdot 1 = 80 \cdot 2$ ( ) $160 \cdot 1 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$

[I_E – 18] Preencha a quarta coluna do quadro abaixo, escrevendo os dados da terceira coluna como produto do comprimento inicial por $\frac{1}{2}$.

NÚMERO DE RETIRADAS	COMPRIMENTO DA MASSA (cm)	COMPRIMENTO DA MASSA COMO PRODUTO DE DOIS NÚMEROS	COMPRIMENTO INICIAL MULTIPLICADO POR ½
0	160	$160 \cdot 1$	$160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	80	$160 \cdot \frac{1}{2}$	$160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	40	$80 \cdot \frac{1}{2}$	$160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	20	$40 \cdot \frac{1}{2}$	$160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

[I_R – 19] Com a tabela acima preenchida, analise os valores da primeira e da quarta coluna do quadro da intervenção 19. Você consegue perceber alguma regularidade entre esses valores? Qual?

Sim, o número de retiradas encontra-se no expoente

[I_R – 20] Quanto medirá o comprimento da massa, em centímetros, após "n" retiradas?

$160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

[IR – 21] Com base na quarta coluna da tabela da intervenção 19, é possível escrever uma expressão que relaciona o comprimento da massa com o número de retiradas?

(x) Sim ( ) Não

[IR – 22] Se a resposta anterior for 'sim', se chamarmos de "C" o comprimento da massa e de "n" o número de retiradas, qual seria essa expressão?

$$C = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

[IR – 23] Qual será o comprimento da massa após a 4° retirada?

$$C = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \therefore \quad C = 10 \; centimetros$$

[IR – 24] Qual será o comprimento da massa após a 5° retirada?

$$C = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \therefore \quad C = 5 \; centimetros$$

[IR – 25] O que você observou em relação a lei de formação que coloca o comprimento final da massa C em dependência do número de retiradas n?

A variável principal (número de retiradas) está no expoente.

Após a socialização das atividades feitas pelos grupos, o professor deve novamente formalizar o conceito de relação exponencial, tomando como base o modelo gerado nesta atividade.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2
A expressão ou lei de formação que foi gerada na UARC 2 também é um exemplo de **relação exponencial**, representadas por $y = a^x$.

(Aqui tem-se a construção da segunda UARC)

UARC 3

TÍTULO: Preenchimento de Tabela

OBJETIVO: Verificar a restrição da base "a" da relação exponencial

MATERIAIS: Lápis, caneta, borracha, calculadora

PROCEDIMENTO: leia as instruções a seguir

Orientações ao Professor

- Organizar a turma em grupos de, no máximo cinco alunos.
- Distribuir o conjunto de atividades que compõem a UARC 3.
- Distribuir as calculadoras para cada grupo
- Ler atentamente cada comando, exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos
- Esta UARC foi elaborada com a pretensão de se trabalhar as restrições da base da função exponencial ($a > 0$ e $a \neq 1$). A tabela apresenta na primeira linha potências de base racional, inteira e natural, com exponente x, e na primeira coluna, valores pré-definidos para a variável x. Com o auxílio da calculadora, os alunos deverão efetuar os cálculos utilizando os valores de x para cada potência e preencher toda a tabela.
- A UARC 3 foi criada para superar a dificuldade de se justificar corretamente o porquê dessas restrições, pois pelas análises preliminares, dos livros didáticos analisados, verificou-se que alguns não justificam tais restrições e, quando ocorre, há algum equívoco, como observado em um dos livros, onde é mencionado que para a base $a = 0$, tem-se uma função constante para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 1$.
- A ideia central é de que os alunos possam comparar os dados obtidos e perceber que para as potências de base negativa e base zero não podem ser utilizadas para qualquer valor de x, e para base 1, qualquer x utilizado sempre dará resultado 1, não caracterizando assim um modelo exponencial, servindo então apenas as expressões maiores que zero e diferente de 1, uma vez que para estas, qualquer valor de x utilizado dará um valor correspondente.

PREENCHIMENTO DE TABELA

[Intervenção Inicial] A tabela a seguir mostra algumas expressões matemáticas e alguns valores de x. Com o auxílio da calculadora, preencha a tabela com os resultados os valores de x para cada expressão.

$x \backslash a^x$	$(-2)^x$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^x$	$(-1)^x$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^x$	0^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	1^x	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$	2^x
-2									
$\left(-\frac{3}{2}\right)$									
-1									
$\left(-\frac{1}{2}\right)$									
0									
$\frac{1}{2}$									
1									
$\frac{3}{2}$									
2									

Com base nos dados obtidos da tabela, responda:

[IR – 01] Das expressões $(-2)^x$ até $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ o que elas têm em comum?

As bases são negativas

[IR – 02] Dos resultados obtidos das expressões $(-2)^x$ até $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$, o que você observou?

Deram resultados inválidos/inexistentes

[IR – 03] Na expressão 0^x, o que você observou ao utilizar:

a) Valores negativos para x?

resultado inválido, não é possível dividir por zero

b) valores positivos para x?

Deram zero

[IR – 04] Dos resultados obtidos da expressão 1^x, o que você observou?

Sempre deu 1

[IR – 05] Das expressões $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ até 2^x, o que elas têm em comum?

As bases são positivas

[IR – 06] Na expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, todos os valores de x utilizados deram algum resultado existente?

(x) Sim ( ) Não

[IR – 07] Das expressões $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ e 2^x, todos os valores de x utilizados deram algum resultado existente?

(x) Sim ( ) Não

Após a socialização das atividades feitas pelos grupos, o professor deve novamente formalizar o conceito de relação exponencial, tomando como base o modelo gerado nesta atividade.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

As relações exponenciais do tipo $y = a^x$ devem ter base $a > 0$ e $a \neq 1$. Tais restrições são necessárias, pois:

- Se $a = 0$ e x negativo ou $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$ por exemplo, não existiria uma relação definida em $\mathbb{R}$.

Exemplo: $a = -8$ e $x = \frac{1}{2}$, onde $y = (-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8}$ não está definido em $\mathbb{R}$.
$a = 0$ e $x = -1$, onde $y = 0^{-1} = \frac{1}{0}$, o qual não está definido em $\mathbb{R}$.

- Para $a = 1$ e x real qualquer, teríamos $y = 1^x$, uma relação constante.

(Aqui tem-se a construção da terceira UARC)

UARC 4

TÍTULO: Construção e reconhecimento de gráfico da relação exponencial
OBJETIVO: Explorar os elementos do gráfico da relação exponencial
MATERIAIS: Lápis, caneta, borracha, calculadora, papel A4, quadro de curvas
Orientações ao Professor

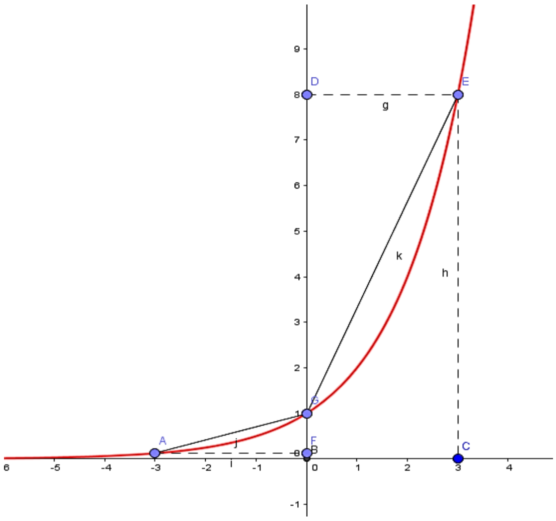
- Organizar a turma em grupos de, no máximo cinco alunos.
- Distribuir o conjunto de atividades que compõem a UARC 4.
- Fazer a leitura de motivação
- Ler atentamente cada comando, exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos
- Promover discussões para as respostas que forem surgindo.
- Esta UARC foi criada com a pretensão de trabalhar a construção gráfica da função exponencial e reconhecimento do seu esboço. Primeiramente, serão trabalhadas as construções dos gráficos dos modelos $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, onde para cada exemplo, serão apresentadas tabelas com valores pré-estabelecidos para x, iniciando com três números, -3, 0 e 3, em seguida com cinco números, -3, -2, 0, 2 e 3, e por fim, com sete números, -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3. Posteriormente, serão trabalhadas as construções dos gráficos dos modelos $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- No entanto, não descartamos a hipótese de que os alunos esbocem o gráfico utilizando "retas", uma vez que a função afim é estudada antes da exponencial. Então, no caso de os alunos tentarem esboçar por meio de retas, este acréscimo de valores para x é necessário, pois trata-se de uma tentativa de aproximar a representação para uma curva suave.
- Após a construção dos gráficos, será trabalhado o reconhecimento visual do gráfico da relação exponencial, por meio de um quadro de curvas. A ideia é que os alunos percebam que todas as construções feitas são, ou se aproximam (caso tenham utilizado retas na construção) de uma curva suave crescente (nos casos 2^x e 3^x) e de uma curva suave decrescente (nos casos $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^x$).
- A ideia central desta atividade é de que os alunos percebessem que o gráfico da relação exponencial é uma curva suave, que não intercepta o eixo das abcissas.

[I$_E$ – 01] Dadas as tabelas a seguir e o plano cartesiano. Para cada situação, construa o gráfico da relação definida por $y = 2^x$ e por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Se for necessário, utilize a calculadora para efetuar os cálculos.

a.1)

$y = 2^x$

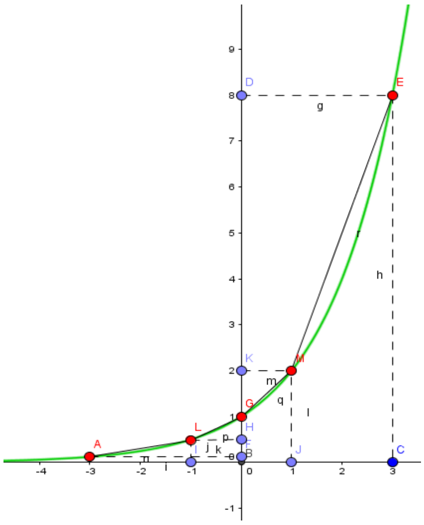
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



a.2)

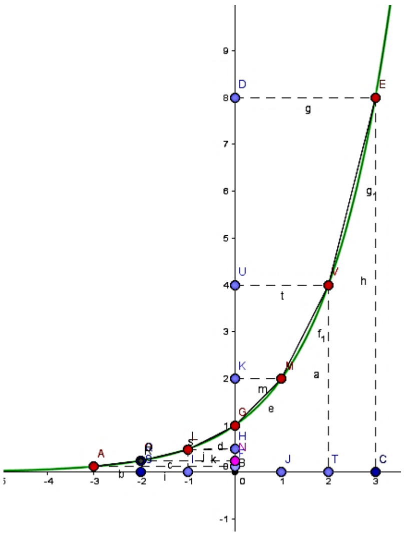
$y = 2^x$

x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



a.3)

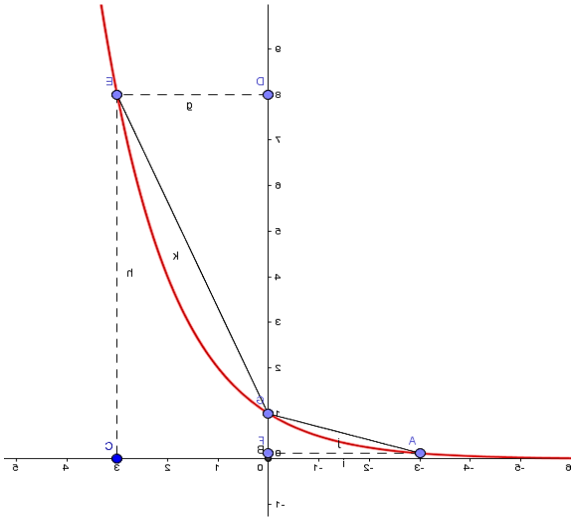
x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b.1)

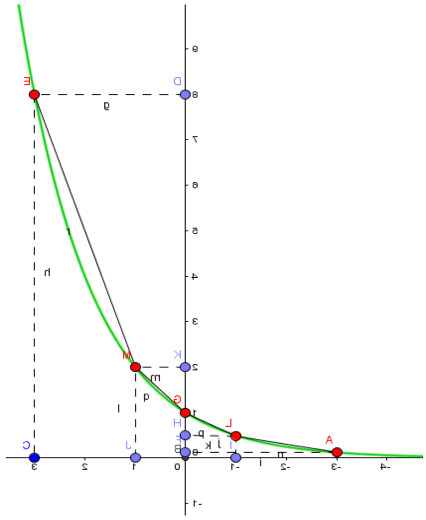
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b.2)

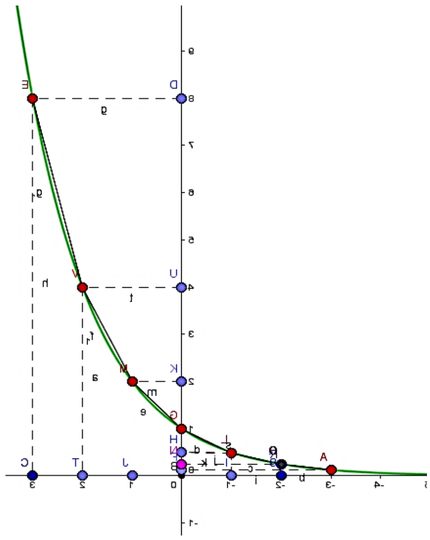
x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b.3)

x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

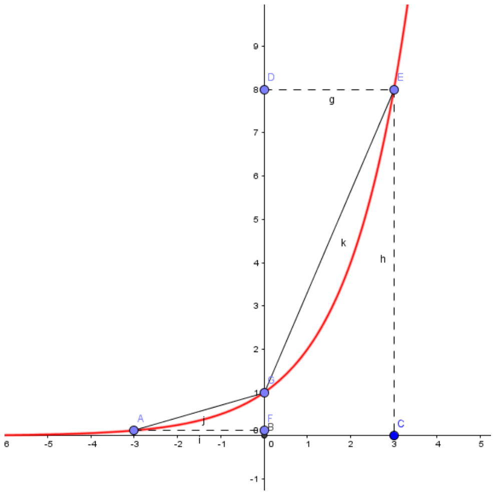


[IE – 02] Dadas as tabelas a seguir e o plano cartesiano. Para cada situação, construa o gráfico da relação definida por $y = 3^x$ e por $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Se for necessário, utilize a calculadora para efetuar os cálculos.

a.1)

$y = 3^x$

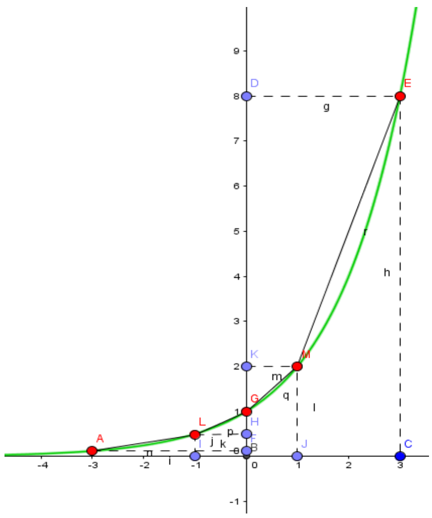
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



a.2)

$y = 3^x$

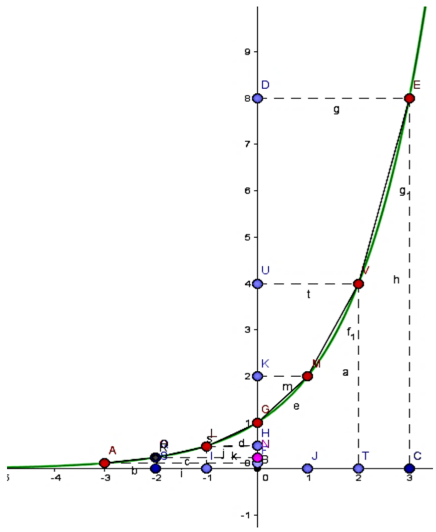
x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



a.3)

$y = 3^x$

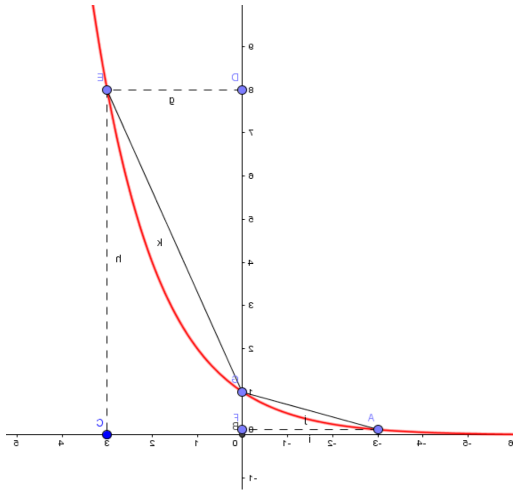
x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		



$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

b.1)

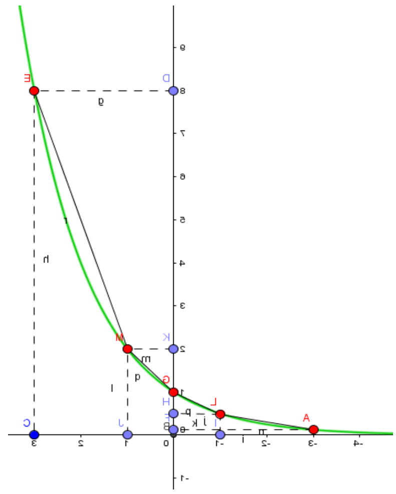
x	y	(x, y)
−3		
0		
3		



$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

b.2)

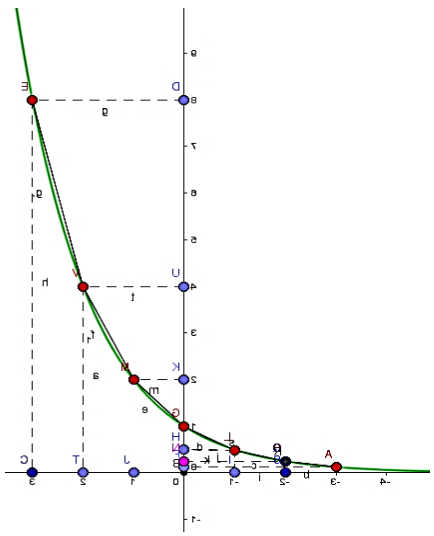
x	y	(x, y)
−3		
−2		
0		
2		
3		



$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

b.3)

x	y	(x, y)
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		



[I$_R$ – 03] Para as relações $y = 2^x$ e $y = 3^x$:

a) o que acontece se atribuirmos para x valores cada vez menores? Verifique, com o auxílio da calculadora adotando para x os valores -4, -5, -8 e -10.

Os valores de y diminuem

b) Para valores de x cada vez menores, é possível que o valor de y seja zero? Ou ele se aproxima de zero? Justifique sua resposta.

Não, ele apenas se aproxima de zero

[I$_R$ – 04] Para as relações $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

a) o que acontece se atribuirmos para x valores cada vez maiores? Verifique, com o auxílio da calculadora adotando para x os valores 4, 6, 9 e 10.

Os valores de y vão aumentando

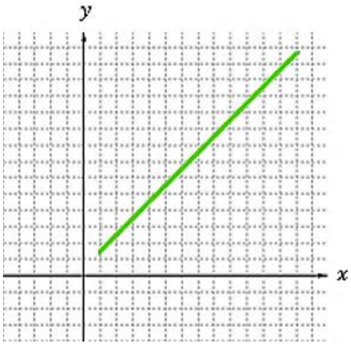
b) Para valores de x cada vez maiores, é possível que o valor de y seja zero? Ou ele se aproxima de zero? Justifique sua resposta.

Não, apenas se aproximam de zero

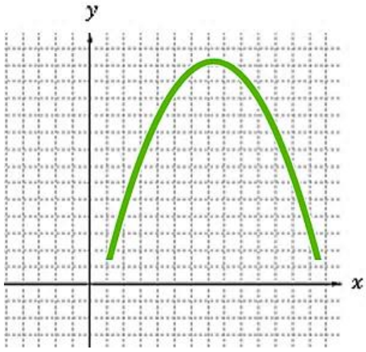
[I$_R$ – 05] Observe o quadro com representações de curvas que você recebeu e responda:

a) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 01, com $y = 2^x$?

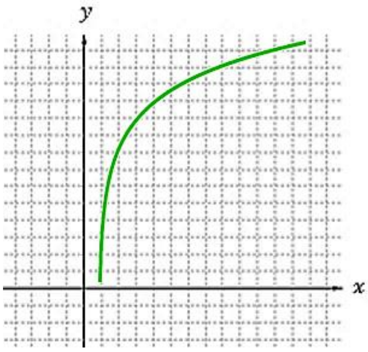
( )



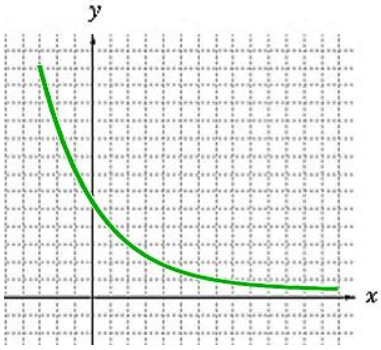
( )



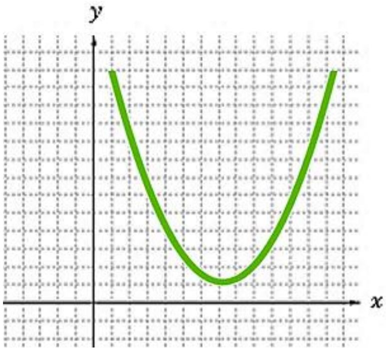
( )



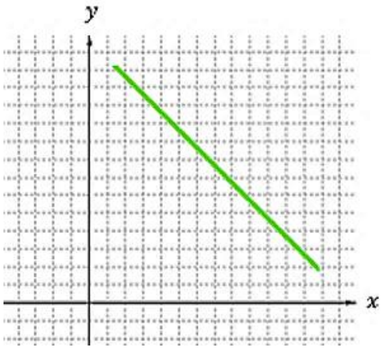
( )



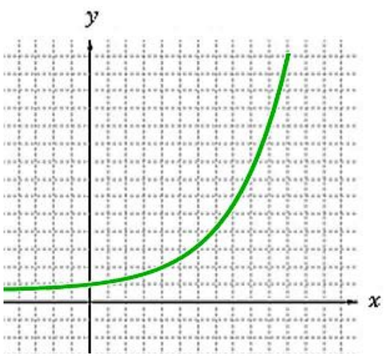
( )



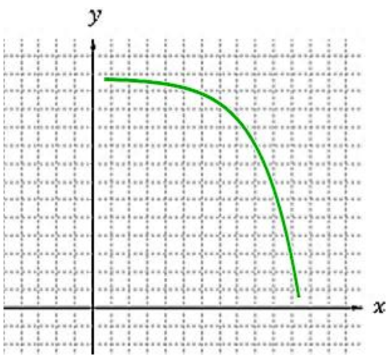
( )



(x)

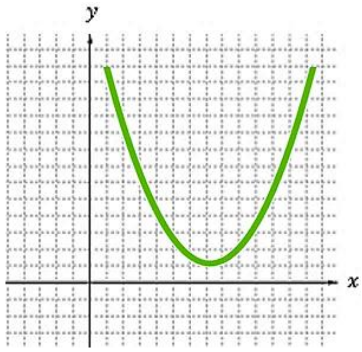


( )

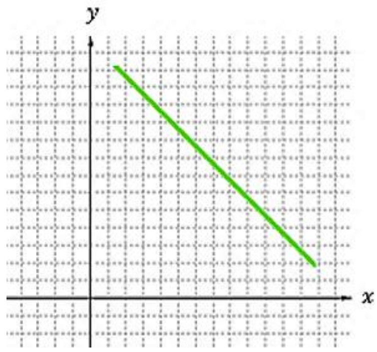


b) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 01, com $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

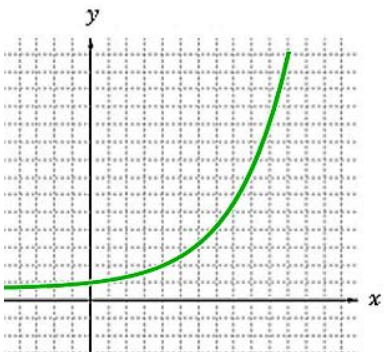
( )



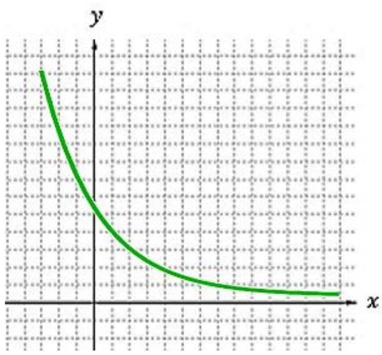
( )



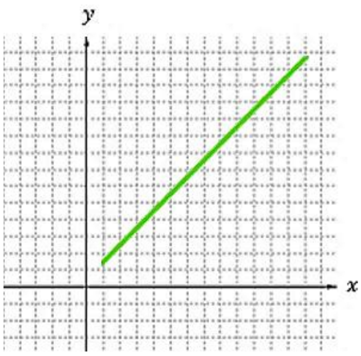
( )



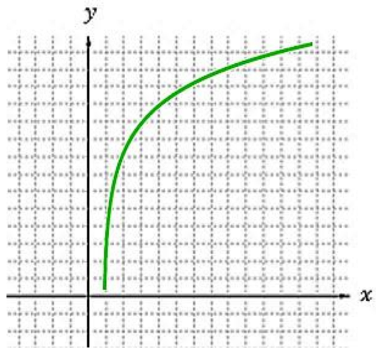
(x)



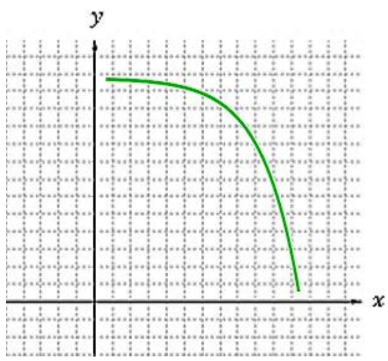
( )



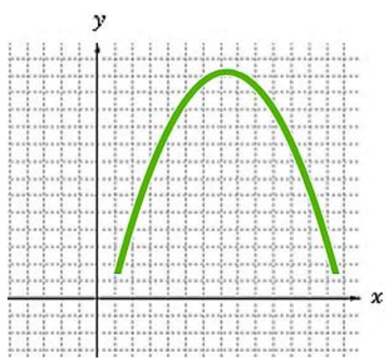
( )



( )

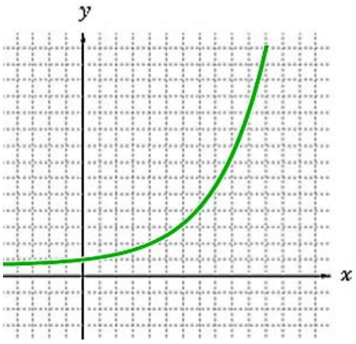


( )

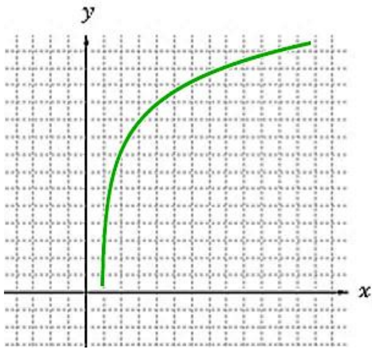


c) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 02, com $y = 3^x$?

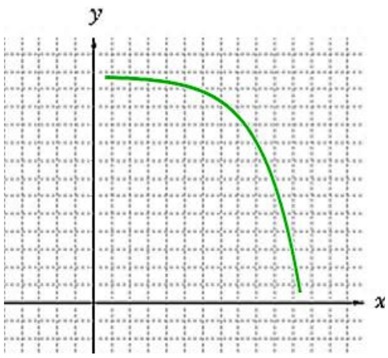
(x)



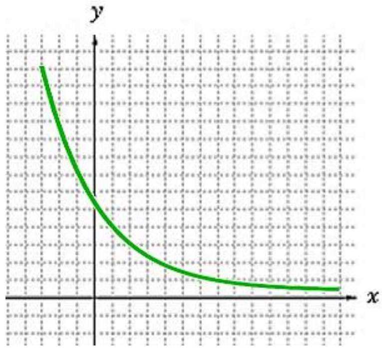
(   )



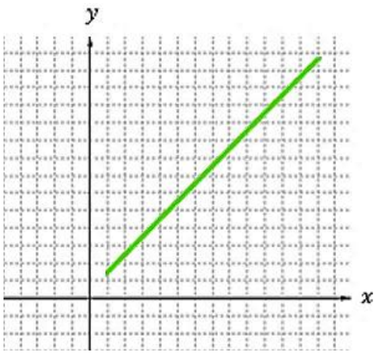
(   )



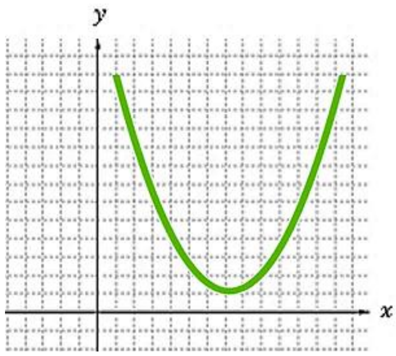
(   )



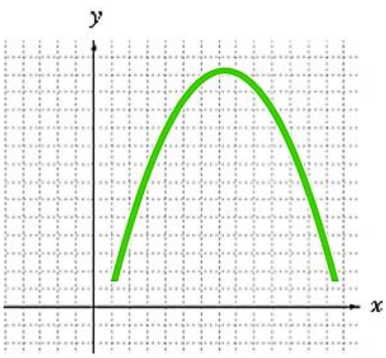
(   )



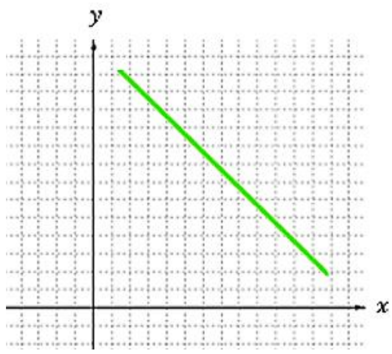
(   )



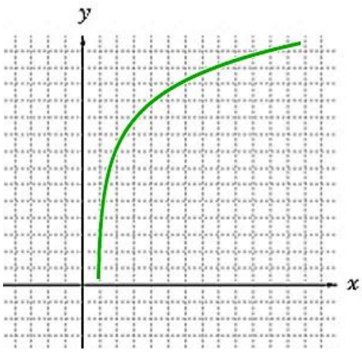
(   )

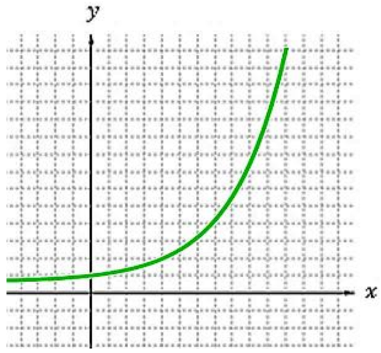


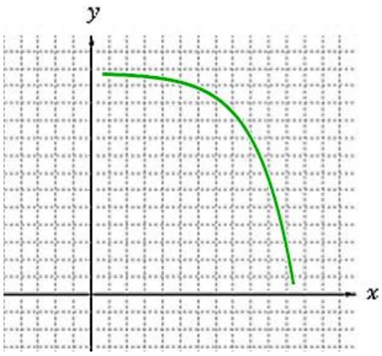
(   )

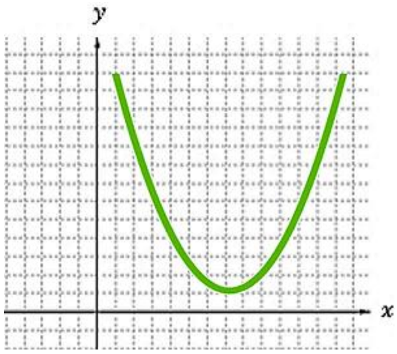


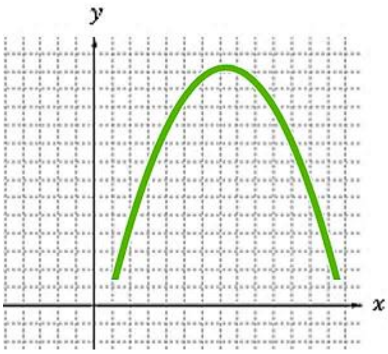
d) Qual das representações abaixo melhor se aproxima das representações construídas por você na intervenção 02, com $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

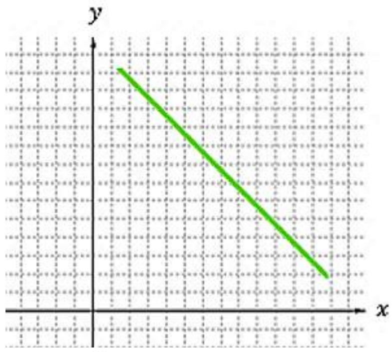
( )


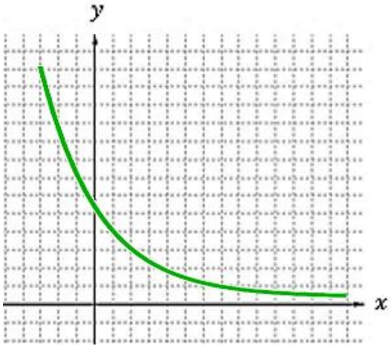
( )


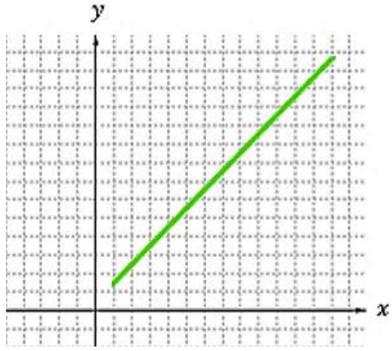
( )


( )


( )


( )


(x)


( )


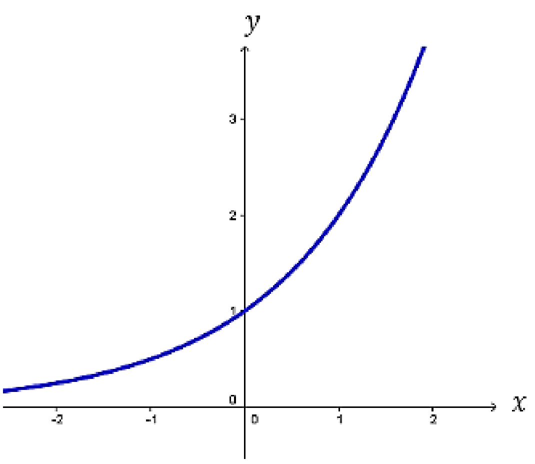
[I_R – 04] Dos itens 01, 02 e 03 da Atividade 04, o que você pode afirmar em relação as figuras obtidas?

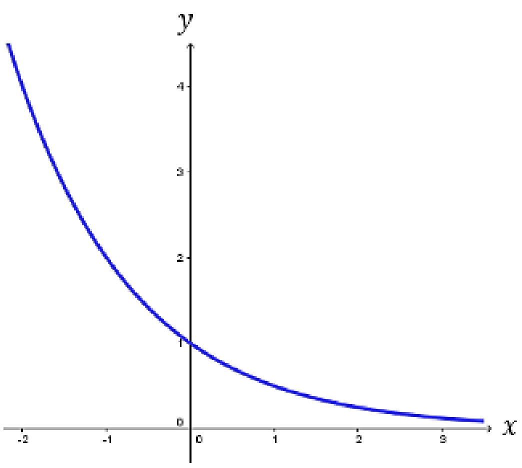
As figuras formadas são curvas suaves

Após a socialização das atividades feitas pelos grupos, o professor deve novamente formalizar o gráfico de uma relação exponencial.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

O gráfico de uma relação exponencial $y = a^x$ é uma curva suave, que se aproxima do eixo das abcissas, porém não a intercepta. Este eixo é chamado de Assíntota da relação exponencial.





(Aqui tem-se a construção da quarta UARC)

UARC 5

TITULO: Características da Relação Exponencial

OBJETIVO: Explorar os elementos da relação exponencial $y = a^x$

MATERIAIS: Lápis, borracha, Papel A4, calculadora (se necessário)

Orientações ao Professor

- Organizar a turma em grupos de, no máximo cinco alunos.
- Distribuir o conjunto de atividades que compõem a UARC 4.
- Fazer a leitura de motivação
- Ler atentamente cada comando, exigir que os alunos tenham bastante atenção nos comandos
- Promover discussões para as respostas que forem surgindo.
- Esta UARC foi elaborada com a pretensão de se trabalhar algumas características da relação exponencial, com base nas construções que foram feitas na UARC 4. Primeiramente será trabalhado o domínio, onde os alunos deverão verificar quais os valores de x podem ser utilizados. Em seguida, será trabalhado a imagem, onde com base nos itens sobre o domínio e nos gráficos construídos, quais os valores que y podem obter. Por fim, será trabalhado a ideia de assíntota, pela análise do comportamento do gráfico em relação ao eixo x e o crescimento e decrescimento em relação a base dos modelos propostos.
- A ideia central é de que os alunos percebessem que o domínio e a imagem da função exponencial são, respectivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$, a assíntota corresponde a uma reta no qual a função nunca estará definida (eixo x) e que ela é crescente para $a > 0$ e decrescente para $0 < a < 1$.

[I$_R$ – 01] Para as relações $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) É possível utilizar valores **negativos** para x?

Sim

b) É possível utilizar o **número 0** para x?

Sim

c) É possível utilizar valores **positivos** para x?

Sim

[I_R – 02] Para as relações $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

a) É possível utilizar valores **negativos** para x?

Sim

b) É possível utilizar o **número 0** para x?

Sim

c) É possível utilizar valores **positivos** para x?

Sim

[I_R – 03] Para a relação definida por $y = 2^x$:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I_R – 04] Para a relação definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) Ao atribuir **valores negativos** para y, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para y, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I_R – 05] Para a relação definida por $y = 3^x$:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[I_R – 06] Para a relação definida por $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

a) Ao atribuir **valores negativos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

b) ao atribuir o **valor 0** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

c) ao atribuir **valores positivos** para x, observa-se que o valor y será:

(x) sempre positivo ( ) Nulo ( ) sempre negativo

[IR – 07] De todas as representações construídas por você, existe a possibilidade de alguma delas ficar abaixo do eixo x?

( ) Sim (x) Não

[IR – 08] De todas as representações construídas por você, existe a possibilidade de alguma delas intersectar ("tocar") o eixo x?

( ) Sim (x) Não

[IR – 09] De modo geral, o que podemos concluir a respeito dos valores de y em relação aos valores de x?

Os valores de y sempre serão positivos

[IR – 10] Em relação aos gráficos das relações $y = 2^x$ e $y = 3^x$, o que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

Os valores de y aumentam/crescem

[IR – 11] Em relação aos gráficos das relações $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, o que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

Os valores de y diminuem/decrescem

[I$_R$ – 12] Observando as relações das intervenções 10 e 11, é possível relacionar o crescimento ou decrescimento com as bases dessas funções? Justifique.

Sim, quando a base "a" é maior que 1, ela é crescente, quando a base "a" está entre 0 e 1, ela é decrescente.

[I$_R$ – 13] De modo geral, o que você pode concluir sobre a representação gráfica em relação ao eixo x?

As figuras formadas são curvas que nunca vão interceptar o eixo x.

Após a socialização das atividades feitas pelos grupos, o professor deve novamente formalizar o domínio, imagem, crescimento e decrescimento gráfico de uma relação exponencial.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

Para uma relação exponencial do tipo $y = a^x$, o domínio é $\mathbb{R}$, a imagem é $\mathbb{R}_+^*$, a assíntota corresponde a uma reta no qual a função nunca estará definida (eixo x) e que ela é crescente para $a > 0$ e decrescente para $0 < a < 1$.

(Aqui tem-se a construção da quinta UARC)

Após as cinco intervenções formalizantes, o professor deve formalizar o conceito de função exponencial, partindo da ideia de que toda relação é uma função, portanto:

FORMALIZAÇÃO FINAL

Todas essas informações que foram tratadas nas Intervenções Formalizantes de 1 a 5, a esta relação de dependência entre duas variáveis na forma exponencial, chamamos de **função exponencial** de base "a" $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, indicado por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

REFERÊNCIAS

BRUCKI, Cristina Maria. **O uso de modelagem no ensino de função exponencial**. 2011. 140 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - PUC-SP. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10900/1/Cristina%20Maria%20Brucki.pdf>. Acesso em: 14 de julho de 2017.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017.

FIORENTINI, Dario. MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. SBEM - São Paulo. n.7, 1990. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/meb/files/Umareflexao_sobre_o_uso_de_materiais_concretos_e_jogos_no_ensino_da_Matematica.doc>. Acesso em: 04/04/2017.

GOES, Marília Cecília Rafael. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural**: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes. Ano XX. n. 50. 2000. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/%0D/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf>. Acesso em: 21 de fevereiro de 2018.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3. ed - Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LIMA, et. al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUIZ, Elisete Adriana José. COL, Lidiane. **Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa**. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1015/115>. Acesso em 03 de fevereiro de 2018

MORTIMER, Eduardo F. SCOTT, Phil. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sóciocultural para analisar e planejar ensino**. Investigações em Ensino de Ciências. v. 7. n. 3. p. 283-306. 2002. Disponível em: <www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID94/v7_n3_a2002>. Acesso em: 30 de maio de 2018.

NETO, Aref Antar. et. al. **Noções de Matemática** Conjuntos e Funções - Volume 1. Fortaleza: Vestseller, 2010.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial**. 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

OLIVEIRA, Rafael Henrique. **Um estudo sobre a função exponencial**. 2015. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". 2015. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/132123/000853553.pdf?sequence=1>. Acesso em: 28/02/2017.

OLIVEIRA, Rosana. BUSSE, Ronaldo. **Materiais concretos para o ensino das funções exponencial e logarítmica**. IV EEMAT - Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO75591618715T.doc> Acesso em: 27 de fevereiro de 2017.

PONTE, J. P. BROCADO, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PINEDO, Christian Quintana. **Fundamentos da matemática**. Universidade Federal do Tocantis. Campus de Araguaina, Curso de Ciências - Habilitação plena em Matemática, 2007. Disponível em: < https://docplayer.com.br/5682783-Fundamentos-da-matematica.html>. Acesso em: 08 de outubro de 2017.

ROZANSKI, Emilene Funez. **Metodologia do ensino do conceito de função exponencial à luz das situações didáticas**. 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2015. Disponível em: <repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1734>. Acesso em: 04 de fevereiro de 2017.

SILVA, Sílvio Tadeu Teles. **Ensino de função exponencial e logarítmica por atividades**. 2014. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará. Disponível em: <https://paginas.uepa.br/mestradoeducacao/index.php?option=com...view...>. Acesso em: 03 de março de 2017.

STEWART, James. **Cálculo volume 1**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra S/N - Telégrafo
66087-480 Belém-PA
www.uepa.br