



Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

MARCELO BAÍA DA SILVA
PEDRO FRANCO DE SÁ

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA
O ENSINO DE REGRAS DE TRÊS**

Belém-PA

2020

MARCELO BAÍA DA SILVA
PEDRO FRANCO DE SÁ

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE REGRA DE TRÊS

Produto Educacional apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém-PA

2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa	Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva	Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. Antonio José Lopes	Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado	Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha	Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão	Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira	Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Profa. Dra. Claudianne Amorim Noronha	Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz	Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior	Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira	Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva	Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves	Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva	Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo	Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha	Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias	Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Pedro Franco de Sá
Ducival Carvalho Pereira
Celsa Herminia de Melo Maranhão

SILVA, Marcelo Baía da e SÁ, Pedro Franco de. Uma sequência didática para o ensino de regras de três. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Regra de três.

RESUMO

Este trabalho apresenta um produto validado em uma dissertação de mestrado sobre o ensino das regras de três, e os resultados revelaram que os discentes tiveram desempenho satisfatório na resolução de questões de regra de três simples e composta e participaram ativamente das sessões de ensino. Este produto apresenta também aspectos da regra de três que tratam dos fatos históricos, fundamentação matemática e métodos de resolução da regra, aspectos curriculares, estudos científicos e a sequência didática composta de três atividades. Estas abordam situações sobre grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e a proporcionalidade composta através do ensino por atividades, pois esses conhecimentos são necessários para a utilização racional das regras de três. Espera-se que este produto educacional seja utilizado pelos professores de matemática em suas aulas quando ministrarem o assunto regra de três, e, assim, possa contribuir no processo de ensino e aprendizado dos alunos maneira funcional e coerente.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	5
2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA REGRA DE TRÊS	6
2.1. OS BABILÔNIOS E A REGRA DE TRÊS	6
2.2. OS EGÍPCIOS E A REGRA DE TRÊS	7
2.3. OS CHINESES E A REGA DE TRÊS	8
2.4. OS HINDUS E A REGRA DE TRÊS	10
2.5. OS ÁRABES E A REGRA DE TRÊS	14
3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DA REGRA DE TRÊS	19
3.1. CONHECIMENTOS PRÉVIOS PARA AS REGRAS DE TRÊS	20
3.2. GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS	21
3.2.1. TEOREMA FUDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE	23
3.3. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS	27
3.4. PROPORCIONALIDADE COMPOSTA	31
3.4.1. GRANDEZA DIRETAMENTE PROPORCIONAL A VÁRIAS OUTRAS	33
3.4.2. GRANDEZAS DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS A VÁRIAS OUTRAS	37
3.5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DA REGRA DE TRÊS	39
3.5.1. MÉTODO DAS PROPORÇÕES	39
3.5.2. MÉTODO DAS FLECHAS (OU REGRA DAS SETAS)	43
3.5.3. MÉTODO ALGÉBRICO (OU REGRA ALGÉBRICA)	47
3.5.4. MÉTODO DUPLEX	49
3.5.5. MÉTODO DE REDUÇÃO À UNIDADE	55
4. ASPECTOS CURRICULARES DA REGRA DE TRÊS	60
5. ESTUDOS SOBRE A REGRA DE TRÊS	64
5.1. ESTUDO DIAGNÓSTICO	66
5.2. ESTUDO EXPERIMENTAL	69
5.3. ESTUDO TEÓRICO/INVESTIGATIVO	71
6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	81
6.1. ATIVIDADE 1	83
6.2. ATIVIDADE 2	87
6.3. ATIVIDADE 3	91

7. SUGESTÕES DE LEITURA	108
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
9. REFERÊNCIAS	110

1. APRESENTAÇÃO

No âmbito da sala de aula, para que de fato se possa socializar e produzir novos conhecimentos e saberes, é necessário um planejamento que implique na realização de atividades para tornar as aulas mais dinâmicas e produtivas (OLIVEIRA, 2013, p. 53)

De acordo com o excerto acima a produção de conhecimento e de saber no âmbito da sala de aula está coadunada com a realização de atividades, não atividades quaisquer, mas que careçam de um planejamento prévio para que o objetivo pretendido de um dado conteúdo seja alcançado. Espera-se também que essas atividades tornem as aulas mais dinâmicas e produtivas, isto é, que o aluno passe a ser um agente ativo no processo de ensino e aprendizado, não um agente passivo que apenas recebe a informação e a guarda como sinônimo de aprendizado, como, geralmente, acontece na metodologia da aula tradicional.

Com a ambição de realizarmos o ensino de matemática conforme citado por Oliveira (2013), construímos um conjunto de atividades para o ensino de regra de três que configura uma proposta de sequência didática distinta do modo tradicional de ensino. Essa proposta agrega alguns dos assuntos que julgamos necessários para a compreensão e aplicação da regra, isto é, ela traz questões sobre grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e também sobre a proporcionalidade composta. Esta última com a pretensão de oportunizar os alunos a identificarem os princípios que norteiam a funcionalidade do algoritmo regra de três composta.

A sequência didática citada no parágrafo anterior foi executada em uma turma de alunos do 7º ano do ensino fundamental, onde normalmente o ensino da regra três acontece, e os resultados alcançados com a implementação dessa sequência didática indicaram que houve aprendizado por parte dos alunos com relação ao conteúdo regra de três, haja vista que, aproximadamente, 85% dos alunos apresentaram um desempenho igual ou superior a 50% frente a dez questões de um teste sobre esse assunto.

Como a proposta de sequência didática foi testada e trouxe resultados positivos no ensino da regra de três, acreditamos que sua utilização seja possível nas aulas de matemática, por isso recomendamos aos professores dessa disciplina

que façam uso dessa sequência, como uma metodologia alternativa que venha subsidiar o ensino e o aprendizado da regra de três.

Adiante apresentamos neste trabalho alguns aspectos sobre a regra de três, que trataram de sua relevância na história das civilizações antigas, fundamentação matemática, os documentos oficiais que abordam a regra, pesquisas sobre a regra de três, as atividades da sequência didática, sugestão de leituras e as considerações finais. Esperamos que as informações produzidas neste trabalho, servissem de estudo para professores, alunos e outros que se interessam pela temática regra de três, pois desse modo estaremos contribuindo com o ensino da Matemática e também com Educação Matemática.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA REGRA DE TRÊS

A nossa intenção aqui é apresentar a regra de três ao longo da história, recorrendo a alguns fatos históricos que indicaram o uso da regra por civilizações da antiguidade em atividades práticas e não práticas com matemática e também no ensino, mas sem a pretensão de trazer tais fatos históricos arramados numa abordagem cronológica linear, e nem mostrar o contexto político, social e cultural dessas civilizações, pois esses não são o fito deste texto. Na verdade, pretendemos mostrar a relevância da regra como ferramenta funcional para as civilizações ao longo do tempo e da mesma forma para a matemática.

Nesse pensar, apresentamos adiante civilizações que manusearam a regra, ou resquícios dela, em atividades, quase sempre, ligadas ao comércio de objetos. Essas civilizações foram os babilônios, egípcios, chineses, hindus e árabes. Estes últimos passaram a utilizá-la também no contexto do ensino.

2.1. OS BABILÔNIOS E A REGRA DE TRÊS

Os povos babilônios no período do rei Hamurabi (1700 a.C.) tinham consideráveis conhecimentos sobre Aritmética e Geometria. Esses povos sabiam resolver equações do primeiro e de segundo grau, esta última pelo método do complemento do quadrado, calculavam áreas e volumes, tinham conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e calcularam a diagonal de um quadrado de lado igual um com uma aproximação de: 1,414213. (GARBI, 2010, p. 11)

Quanto a isso, cabe ressaltar que as abordagens matemáticas babilônicas eram meramente numéricas, isto é, não utilizavam incógnitas em suas

resoluções para problemas práticos e não práticos, ao invés disso, utilizam palavras como comprimento, largura, área, volume etc., e os procedimentos adotados nessas resoluções estavam alicerçados na proporcionalidade, visto que “[...] o raciocínio proporcional, que era, de fato, uma das mais importantes áreas desenvolvidas pelo pensamento mesopotâmico [...]” (RADFORD, 2011, p. 119), e utilizado na resolução de problemas ligados à Geometria e Aritmética.

Dentre os registros matemáticos dos babilônios, havia, segundo Boyer (2010, p. 20-21), tabelas que abordavam potências sucessivas para um determinado valor, que se assemelhavam com as tabelas logarítmicas atuais. No entanto, tais tabelas não apresentavam a mesma linguagem e notação, bem como não utilizavam como base do logaritmo o mesmo número em outras situações. Também as tabelas babilônicas continham intervalos entre os seus valores maiores que os das tabelas de hoje. Essas tabelas eram utilizadas em situações específicas e não de maneira geral. Quanto aos espaços entre os números dispostos na tabela, os matemáticos babilônicos costumavam praticar a interpolação linear para encontrar valores intermediários aproximados e a notação posicional desses valores era consonante ao modo de fazer da regra de três.

Outros povos da antiguidade que manipularam a regra de três em problemas geralmente práticos foram os egípcios. Registros dessa prática foram encontrados em um papiro do século XVII a. C., que descrevia como a regra era aplicada em situações imersas num contexto com proporcionalidade, mesmo que de maneira tácita.

2.2. OS EGÍPCIOS E A REGRA DE TRÊS

O documento egípcio Papiro de Ahmes (ou Rhind), copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmes de um protótipo datado entre 2000 a 1800 a. C., e descoberto no século XIX pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, abordava 85 problemas sobre Aritmética e Geometria. Dentre esses problemas, aparece o problema 72 que relacionava a quantidade de pães com a força ou *pesu*¹ de grão. A solução apresentada para esse problema se assemelha à técnica da técnica da regra de três, como mostra o trecho a seguir: “qual o número de pães de força 45

¹ “Pesu é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão.” (BOYER, 2010, p. 11)

que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como $100/10 \times 45$ ou 450 pães.” (BOYER, 2010, p. 11)

O Papiro de Ahmes apresentava muitos problemas que relacionavam grandezas como, por exemplo, cerveja e pães e eram resolvidos através da aplicação da proporção. No entanto, também existiam problemas no Papiro de Rhind que eram de cunho algébrico, como por exemplo, determinar a solução de equações lineares. (GARBI, 2010, p. 13; BOYER, loc. cit.)

Quanto ao problema supracitado é fácil ver que a forma de resolução está ampara na ideia de proporção, pois a disposição dos termos em que o segundo é multiplicado com terceiro, e o resultado dividido pelo primeiro, deixa subentendido que essa configuração resulta da comparação de razões, o que em notação matemática atual seria o produto cruzado dos valores, amparado na propriedade da igualdade de frações ou propriedade fundamental da proporção, artifício utilizado na regra de três.

A apropriação pelos egípcios do modo semelhante de aplicar à regra de três em contextos que relacionavam grandezas de maneira proporcional, não garantiu a esses povos a posse sobre a origem da regra de três; que ora diz respeito aos chineses, ora aos hindus, como é mostrado, a seguir, com base nas colocações de Eves (2011) e Smith (1925).

2.3. OS CHINESES E A REGA DE TRÊS

Os registros históricos revelam que os chineses desenvolveram obras que travam de Matemática. Uma dessas obras chinesas, talvez a mais importante, era a chamada Chui Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, datada de 250 a. C., e escrita, provavelmente, por Chang Tsang. Essa obra continha 246 problemas sobre mensuração de terra, agricultura, sociedades, engenharia, impostos etc., além dos temas matemáticos sobre porcentagem e proporção, regra de sociedade, regra de três, entre outros. Dentre as soluções apresentadas no livro, havia problemas resolvidos por meio da regra de três. (CONTADOR, 2006, p. 477; BOYER, 2010, p. 133-134)

Para Carrera (2009, p. 58) a obra chinesa, Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, data de um período distinto do mencionado anteriormente, pois teria surgido entre 300 a. C. a 200 d. C. Também há divergência com relação à autoria da obra, já que para esse autor a mesma era de autoria desconhecida. A respeito do

conteúdo bordado nos Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, em linhas gerais, tratava de extração de raízes, proporção, regra de três, falsa posição, resolução de sistemas de equação, áreas e volumes de figuras planas e de sólidos e também triângulos retângulos.

Cada capítulo do livro chinês abordava um tema geral, que se adequava por meio de um contexto prático aos saberes matemáticos citados no parágrafo anterior. Desse modo, a regras de três, de acordo com Carrera (2009, p. 71), era mencionada no segundo capítulo desse livro, que abordava uma situação ligada comércio de cereais, assim, a regra era usada para resolver problemas sobre milho e arroz.

Outra perspectiva sobre a obra chinesa é apresentada por Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 13), estes afirmaram que os problemas contidos nos Nove Capítulos sobre a Arte Matemática eram de cunho prático e recreativo. A proporcionalidade teria sido à base de resolução desses problemas para os matemáticos chineses, tanto na Geometria quanto na Álgebra. Tendo em vista a primeira, a proporcionalidade era usada em problemas sobre semelhança de triângulos, com relação à segunda, a proporcionalidade foi utilizada para resolver problemas de equação do primeiro grau.

Quanto a Matemática chinesa, Eves (2011, p. 246) afirma que ela obteve destaque mundial após a Matemática da Grécia antiga entrar em decadência. Com isso, os chineses foram os pioneiros na criação de:

[...] um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de n , (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema Chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) desenvolver a regra de três [...]. (EVES, loc. cit., grifo nosso)

Em consonância com trecho supracitado sobre a origem da regra está à afirmação de Fragoso (1999, p. 13), que diz: “A denominação regra de três, deve-se aos hindus, e historicamente, a sua origem aos chineses.”

De fato, essas duas civilizações são consideradas, segundo Boyer (2010, p.133), as mais antigas, ficando atrás apenas do Egito e da Mesopotâmia, o que corrobora o uso e o aperfeiçoamento da regra por civilizações posteriores.

Acerca da utilização da regra de três pelo povo indiano, merecem destaque neste trabalho os matemáticos Aryabhata, Brahmagupta, Bhâskara e Mahâvira, que aplicaram a regra em situações com matemática e inclusive apresentaram nomes específicos para as quantidades envolvidas.

2.4. OS HINDUS E A REGRA DE TRÊS

O nome hindu para a regra de três termos é trairtifika ("três termos", portanto, "a regra de três termos"). O termo trairtifika pode ser rastreado para o início da era cristã como ocorre no Manuscrito Bakhshali, no Aryabhatiya e em todos outros trabalhos sobre matemática². (DATTA; SINGH, 1962, p. 203-204, tradução nossa)

Para Datta e Singh (1962, p. 204) os problemas de regra de três se configuram da seguinte maneira: "Se p rende f , quanto renderá i ?"³. Sendo que os termos p , f e i para os hindus são chamados, respectivamente, de pramâna (argumento), phala (fruta) e icchâ (requisição). Esses nomes são encontrados em todos os trados de matemática, também podem ser representados como primeiro, segundo e terceiro termos, nessa ordem.

Os termos mencionados são apresentados ao longo deste texto para representar as quantidades envolvidas em regra de três e, às vezes, com alguma variação, dependendo de como a regra era anunciada e por quem fosse anunciada.

A respeito do manuscrito Aryabhatiya, de autoria do matemático Aryabhata que viveu na Índia durante o sexto século (d.C), este continha regras de cálculos para a Agronomia e Matemática de mensuração. A obra também abordava problemas que eram resolvidos por meio da regra de três, com o uso da proporção simples para determinar o quarto termo desconhecido, como mostra o trecho: "Na regra de três multiplica-se o fruto pelo desejo e divide-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo." Em notação matemática, o trecho supracitado é entendido como $a/b = c/x$, onde $x = bc/a$, sendo 'a' chamado de "medida", 'b' de "fruto", 'c' de "desejo" e 'x' de "fruto do desejo". (BOYER, 2011, p. 143-144, grifo nosso)

Aryabhata, também conhecido como Aryabhata I (499), fornece, segundo Datta e Singh (1962, p. 204), uma regra para resolver os problemas de regra de três,

² The Hindu name for the Rule of Three terms is *trairtifika* ("three terms", hence "the rule of three terms"). The term *trairtifika* can be traced back to the beginning of the Christian era as it occurs in the Bakhshali Manuscript, in the Aryabhatiya and in all other works on mathematics.

³ If p yields f , what will i yield?

que consistia em utilizar as operações de multiplicação e divisão com as quantidades (termos) envolvidas, assim descrita no trecho:

Na Regra de Três, a phala (“fruta”), sendo multiplicada pela icchâ (“requisição”) é dividida pela pramâna (“argumento”). O quociente é o fruto correspondente ao icchâ. Os denominadores de um sendo multiplicado com o outro, dá o multiplicador (isto é, numerador) e o divisor (isto é, denominador)⁴. (DATTA; SINGH, loc. cit., tradução nossa)

Este modo de fazer também aparece na abordagem de Brahmagupta para a regra de três, dois séculos mais tarde. Ele viveu na Índia Central no período do século VII, e anuncia a regra como: ‘na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.’ Esse modo de pensar foi aplicado a um problema de regra de três, proferido por outro matemático hindu, Bhâskara, que dizia: ‘Se dois palas e meio de açafraão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?’ À solução apresentada busca relacionar os valores do problema com os termos mencionados por Brahmagupta, com isso temos: 3/7 e 9 são o Argumento e o Requisito, respectivamente, pois têm a mesma denominação, enquanto que 5/2 é considerado o Fruto. O resultado das operações é o Produto: $9 \times (5/2) / (3/7) = 52,5$. Em outras palavras, o problema apresentado por Bhâskara se resolveria por meio da proporção simples: $x : 9 = (5/2) : (3/7)$. (BOYER, 2010, p. 149; EVES, 2011, p. 263)

O anúncio da regra de três pelo indiano Mahâvira tem a mesma essência da anunciada por Brahmagupta, com relação à posição dos termos, isto é, o termo do meio fica multiplicado pelo último termo e dividido pelo primeiro, sendo que o primeiro e terceiro termos são de mesma natureza, como mostra o trecho a seguir: “Phala multiplicado por Icchâ e dividido por Pramâna torna-se a resposta, quando a Icchâ e Pramâna são semelhantes⁵.” (SMITH, 1925, p. 483, tradução nossa)

Ainda sobre o anúncio da regra de três, outro matemático apresenta a referida regra com pequenas variações acerca dos nomes dos termos. Este matemático indiano era Aryabhata II, que viveu na Índia, provavelmente, no período⁶

⁴ In the Rule of Three, the phala (“fruit”), being multiplied by the icchâ (“requisition”) is divided by the pramâna (“argument”). The quotient is the fruit corresponding to the icchâ. The denominators of one being multiplied with the other give the multiplier (i.e., numerator) and the divisor (i.e., denominator)

⁵ Phala multiplied by Icchâ and divided by Pramâna becomes the answer, when the Icchâ and Pramâna are similar.

de 920 a 1000 da nossa era. Ele declarava a regra da seguinte forma: “O primeiro termo é chamado mânia, o termo do meio vinimaya e o último icchâ. O primeiro e o último são da mesma denominação. O último multiplicado pelo meio e dividido pelo primeiro dá o resultado⁷.” (DATTA; SINGH, 1962, p. 205, tradução nossa)

Os indianos também apresentaram um método para descrever a regra de três inversa; a forma como era descrita, parece que a manipulação dos termos da regra estava de acordo com um contexto de proporcionalidade, pois essa regra só era aplicada, talvez, em situações que havia uma variação conjunta invertida, como é descrito por Bhâskara II no trecho: “Onde com o aumento da icchâ (requisição) o phala diminui ou, com a sua diminuição, o phala aumenta, os especialistas em cálculo sabem que o método é a Regra Inversa de Três.⁸” (DATTA; SINGH, 1962, p. 208, tradução nossa)

Para esses autores a regra de três inversa era chamada pelo nome hindu de ‘vyasta-trairâsika’, cujo significado quer dizer ‘regra inversa de três termos’. A forma como ela era utilizada consistia em multiplicar o termo do meio com o primeiro e o resultado era dividido pelo terceiro termo. No trecho a seguir estão algumas situações em que a regra inversa de três podia ser utilizada: “Onde o valor dos seres vivos é regulado por a idade deles; e no caso do ouro, onde o peso e o toque são comparados; ou quando os montes são subdivididos, use-se a regra inversa de três⁹.” (DATTA; SINGH, loc. cit., tradução nossa)

A proporcionalidade composta também esteve presente nos contextos hindu, à regra que hoje é conhecida como regra de três composta era chamada de proporção composta, em que envolvia cinco ou mais termos em sua composição, devido a isso a regra recebia alguns nomes específicos dependendo da quantidade de termos, como mostra o trecho:

⁶ Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata_II.html>. Acesso em: 22 out. 2017.

⁷ The first term is called mânia, the middle term vinimaya and the last one icchâ. The first and the last are of the same denomination. The last multiplied by the middle and divided by the first gives the result.

⁸ Where with increase of the iccha (requisition) the phala decreases or with its decrease the phala increases, there the experts in calculation know the method to be the Inverse Rule of Three.

⁹ Where the value of living beings is regulated by their age; and in the case of gold, where the weight and touch are compared; or when heaps are subdivided let the Inverse Rule of three be used.

O que foi chamado, por um século ou dois, pelo nome da proporção composta, foi originalmente por nomes como a Regra dos Cinco, quando cinco quantidades estavam envolvidas, a Regra de Sete se sete quantidades foram usadas, e assim por diante. Bhâskara, por exemplo, dá regras de cinco, sete, nove e onze¹⁰. (SMITH, 1925, p. 491, tradução nossa)

Sobre a proporção composta, esta, de acordo com Datta e Singh (1962, p. 211), também era conhecida como Regra de Termos Ímpares para representar as variações da regra. Nas afirmações de Smith (1925, p. 491-492), os nomes da regra para além de cinco quantidades eram raramente utilizados; ao invés disso se usou nomes como Regra Dupla de três, Regra de Três Composta, Proporção Plural, Regra Conjunta e Proporção Composta, esta última foi utilizada de maneira geral no século XVIII.

A respeito do funcionamento do método, o mesmo é descrito por Brahmagupta da seguinte forma:

No caso de termos estranhos que começam com três termos até onze, o resultado é obtido através da transposição dos frutos de ambos os lados, de um lado para o outro e, em seguida, dividindo o produto do conjunto maior de termos pelo produto do conjunto menor. Em todas as frações, a transposição dos denominadores, da mesma forma, ocorre em ambos os lados¹¹. (DATTA; SINGH, 1962, p. 211-212, tradução nossa)

Outros modos de resolver a proporção composta, segundo Datta e Singh (1962, p. 212), foram apresentados por matemáticos indianos, como é caso de Srîdhara, Bhâskara II, Mahâvira e Aryabhata II, estes dois últimos conforme o primeiro.

A forma como a regra de três esteve nos trados dos árabes e dos latino-americanos revela que o nome regra de três foi adotado, mas os nomes dos termos hindus foram descartados. Apesar disso, a maneira de aplicar a regra permaneceu, isto é, os termos eram organizados em linha, de tal modo que o primeiro e o último eram semelhantes, e o resultado obtido provinha da multiplicação do segundo termo com o último, e o produto dividido pelo primeiro. Essa regra foi aperfeiçoada na Índia durante os primeiros séculos da era cristã e, talvez, remetida aos árabes no século

¹⁰ What has been called, for a century or two, by the name of compound proportion originally went by such names as the Rule of Five when five quantities were involved, the Rule of Seven if seven quantities were used, and so on. Bhaskara, for example, gives rules of five, seven, nine, and eleven.

¹¹ In the case of odd terms beginning with three terms upto eleven, the result is obtained by transposing the fruits of both sides, from one side to the other, and then dividing the product of the larger set of terms by the product of the smaller set. In all the fractions the transposition of denominators, in like manner, takes place on both sides.

VIII, e a partir daí chegou à Europa, onde ficou conhecida como “Regra de Ouro”, esta denominação permaneceu na Inglaterra até o final do século XVIII, sendo abandonada, provavelmente, por ordem da igreja. (DATTA; SINGH, 1962, p. 210; SMITH, 1925, p. 486)

Para Smith (1925, p. 483) a regra de três, talvez, teve sua origem na Índia, inclusive sua nomenclatura era dita como regra mercantil de três, e foi mencionada dessa maneira por Brahmagupta (c. 628) e Bhâskara (c. 1150), e essa mesma denominação esteve também em escritos árabes e latinos medievais.

2.5. OS ÁRABES E A REGRA DE TRÊS

Os árabes adquiriram o conhecimento da regra de três dos hindus, no entanto não utilizaram os mesmos nomes específicos para as quantidades envolvidas, ao invés disso, eles aplicaram a técnica da regra, talvez, a princípio, sem associar os termos com a proporcionalidade, apesar de que, como mostrado anteriormente, os hindus, ao manipularem a regra de três, mencionavam a palavra proporção, de acordo com as afirmações de Datta e Singh (1962), em suas descrições sobre a regra e nas atividades com matemática; parece que havia aí um entendimento sobre as relações proporcionais.

Os trechos a seguir relatam com base nas ideias de Guerra e Silva (2014) como a regra de três esteve inserida em situações ligadas ao comércio, em atividades não práticas e no ensino, pois com o desenvolvimento da aritmética comercial no Ocidente durante os séculos XIII, XIV e XV, a regra de três era dita como uma ferramenta indispensável aos ofícios e atividades comerciais da época.

Para Guerra e Silva (2014, p. 206-207) a regra se apresentou de dois modos distintos, sendo o primeiro de maneira utilitária e prática utilizada pelos povos da Índia, em que regra era manuseada apenas com as operações de multiplicação e divisão como aparecem nos escritos antigos de Aryabhata, Mahāvira e Brahmagupta, com poucas diferenças a respeito dos nomes dos termos utilizados. Essa forma utilitária da regra também esteve presente nos ábacos italianos e nos escritos árabes de Ibn Thabāt, al-Karaji e Ibn al-Banna, que manusearam a regra de forma prática e sem preocupações teóricas em transações comerciais. No entanto, o segundo momento da regra de três esteve vinculado à teoria da proporcionalidade, como constavam nos escritos árabes e ibero-provençal.

Esse afeiçoamento, segundo Hoyrup (2007), teria sido formulado por escritores árabes, de al-Khawarismi em diante, quando passaram a estabelecer que as transações comerciais apresentavam quatro magnitudes em proporção, identificadas, não raro, com o preço solicitado e as magnitudes correspondentes (Thaman, muthaman, etc.). Assim, as transações seriam tratadas como problemas de proporção [...] (GUERRA; SILVA, 2014, p. 208)

A regra era usada pelos árabes, segundos os autores supracitados, sem a utilização de um nome específico e neste contexto havia outras formas de aplicar a regra, o que demonstra que a prática da regra de três não se desenvolveu de maneira cronológica, e que o modo árabe não sobrepujou as demais propostas, isto é, a italiana e a indiana. Com isso, pode-se firmar que “[...] as práticas da regra de três se faziam presentes em acordo com os contextos conformados pelas atividades que realizavam, tendo em conta, por exemplo, os tipos de problemas, o lócus, a linguagem ou a formação intelectual dos indivíduos.” (GUERRA; SILVA, loc. cit.)

A versão árabe da regra, antes das transações comerciais, era pautada em aplicações meramente mecânica com números puros, ou seja, a regra não era usada em contextos que retratassem a realidade; diferentemente da versão italiana, esta, quase sempre, era aplicada em problemas concretos. (GUERRA; SILVA, 2014, p. 211)

Para Smith (1925, p. 488) a regra de três era vista como uma regra sem razão, pois era anunciada sem uma justificativa, devido à maneira de fazer, que consistia em multiplicar o último número com o segundo e dividir o produto pelo primeiro número. Este modo de aplicar a regra foi difundido por outros aritméticos, geralmente em forma de verso. A disposição dos termos na regra de três lembra as primeiras obras hindus, tendo em vista que o primeiro termo e o último são de mesma natureza, o que levou alguns escritores a não relacionar a regra de três com a proporção.

Como a aplicação da regra era de maneira arbitrária, era preciso organizar os termos de tal modo que obedecesse a ordem correta, devido a isso os primeiros livros impressos apresentaram a regra nesse formato, como foram as obras de Borghi (1484) e Glareanus (1538). Entretanto, escritores posteriores que consideram a regra de três como caso de proporção, reorganizaram a forma de escreve os termos da regra, para tanto consideram que razão deveria ocorrer entre números (ou quantidades) de mesma natureza, diferentemente da forma original da regra. O trabalho de Blassière (1769) já apresentava a regra neste formato, isto é, a

razão ocorria entre termos de mesma natureza. Também outros trabalhos do século XVIII trouxeram a mesma abordagem. Apesar da mudança na disposição dos termos, os escritores mantiveram a posição do termo desconhecido à direita nos problemas comerciais em proporção, como na antiga forma da regra de três. (SMITH, 1925, p. 489-490)

Quanto à questão da regra está vinculada à teoria das proporções em obras do século XVIII, cabe ressaltar que Eves (2011, p. 263) afirma, no entanto, que tal acontecimento ocorreu já no final do século XIV.

A regra de três não esteve somente em contextos como os mencionados anteriormente, ela também esteve inserida no contexto do ensino. De acordo com Guerra e Silva (2014, p. 204-205) no período da revolução comercial, durante os séculos XIII a XV, os ofícios dos mercadores e artesões necessitavam de conhecimentos matemáticos de aritmética, não na sua forma teórica ou filosófica, mas sim nos aspectos utilitário, prático e profissional. Devido a isso, os senhores de negócio fundaram escolas com o propósito de fornecer instrução sobre conhecimentos ligados aos negócios. Tais conhecimentos estavam divididos em duas categorias, restrito e geral. Este último era destinado aos mercadores, que recebiam as instruções por meio de textos escolares desenvolvidos por mestres italianos, com orientações práticas por meio de problemas que retratavam a realidade deles.

Neste cenário, segundo os autores do parágrafo anterior, a regra de três se mostra necessária para a matemática comercial, por isso ela deveria constar nos livros de aritmética.

é a principal é a mais excelente regra de toda a aritmética. Para todas as outras regras há necessidade dela, e ela perpassa por todas as outras, para cujos casos, é chamada pelos filósofos de regra de ouro; mas nestes últimos dias, está sendo chamada por nós como regra de três, porque é requerido três números na operação. (BROOKS, 1880, p. 330 apud GUERRA; SILVA, 2014, p. 205-206)

A trajetória histórica da regra de três revelou que esta regra recebeu variados nomes em seu percurso, dependendo da época, do lócus e dos sujeitos que manipularam a regra em atividades com matemática. A respeito disso, o quadro a seguir expõe alguns desses nomes concedidos à regra.

Quadro 1 – Nomes da regra de três ao longo da história

Nome		Autoria	Fonte
Trairâsika	Três termos ou regra de três termos.	Hindu	Datta e Singh (1962, p.203)
The Merchants' Rule; Rule Merchants'key.	A regra dos comerciantes; Regra chave dos comerciantes.	Licht	Smith (1925, p. 488)
Vyasta- trairâsika; Rule Backer	Regra inversa de três termos; Regra de Backer.	Hindu Recorde	Datta e Singh (1962, p.207); Smith (1925, p. 490)
Rule of Odd terms	Regra dos termos ímpares	Hindu	Datta e Singh (1962, p.203)
Rule of proportions; Golden rule	Regra de proporções; Regra de ouro.	Recorde	Smith (1925, p. 484)
The Mercantile Rule of Three	A regra mercantil de três	Brahmagupta e Bhâskara	Smith (1925, p. 483)
Double Rule of three; Compuond Rule of Trhee; Conjoint Rule; Plural Proportion; Compound Proportion-Rule Five, Rule Seven, Rule Nine etc.	Regra dupla de três; Regra composta de três; Regra Conjunta; Proporção Plural; Proporção composta.	Recorde; Clavius; Coutereels; Hodder; Hindu.	Smith (1925, p. 491-492) Datta e Singh (1962, p.210-211)

Fonte: DATTA; SINGH (1962); SMITH (1925)

As informações produzidas com esse estudo tiveram como propósito apresentar os aspectos históricos da regra de três inseridos em contextos das civilizações antigas, e como estas manusearam e utilizaram a regra em atividades com matemática e no âmbito do ensino. Para tanto, recorreremos às fontes científicas, tais como livros de História da Matemática, dissertações e outras fontes que nos respaldassem na produção das informações que fundamentaram tal estudo.

Neste cenário, foi possível observar que a regra de três foi uma ferramenta amplamente utilizada pelas civilizações antigas em atividades envolvendo a matemática, desde o seu modo mais primitivo até em contextos com a proporcionalidade.

As informações revelaram também que a origem da regra de três esteve ancorada em duas ideias antagônicas, em que uma delas defende que a origem provém da China, e a outra afirma que a regra surgiu na Índia, sendo desenvolvida

por esta civilização nas primeiras eras do cristianismo. Entretanto, há consenso nas narrativas históricas a respeito do nome “regra de três” de provável origem indiana.

As produções das informações revelaram ainda que a regra foi difundida no Ocidente por meio dos Árabes e ficou conhecida com “regra de ouro”, por ser amplamente aplicada nas atividades dos mercadores. Estes também a chamavam de “regra chave dos mercadores”. Cabe ressaltar, que a chegada da regra na Europa só foi possível porque aos matemáticos indianos instruíram os árabes sobre a regra durante o século VIII.

Quanto ao papel da regra de três no âmbito do ensino, as informações produzidas revelaram que os artesões e mercadores precisavam conhecer o funcionamento da regra para atuarem em suas atividades, pois a regra era vista na época como uma ferramenta eficiente para os negócios. Mostraram também que a regra de três passou a constar nos currículos de Matemática a partir da década de 30 chegando aos dias atuais, como podemos observar nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental (1998).

As informações apresentadas aqui não esgotam o tema regra de três, pelo contrário, serviram para reiterar a importância desse assunto na história da humanidade, na matemática e para a Educação Matemática. Além do mais, serve também como norteador para que outros estudos sejam fomentados e, assim, possam trazer mais informações acerca dessa técnica, que foi de grande valia para as civilizações da antiguidade e continua sendo nos dias atuais, tanto em contextos escolares e não escolares com matemática, e da mesma forma nas demais áreas do conhecimento, como por exemplo, na biologia, química, física entre outras.

A seguir fazemos uma abordagem matemática sobre os conhecimentos que subsidiam e garantem o uso e a funcionalidade da regra de três, como por exemplo, as grandezas direta e inversamente proporcionais, teorema fundamental da proporcionalidade, proporcionalidade composta, propriedade das grandezas compostas, e também apresentamos cinco métodos distintos de resolução da regra de três, que podem ser utilizados na resolução de questões com duas ou mais grandezas.

3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DA REGRA DE TRÊS

Em nossa experiência, como professor de escola pública estadual há nove anos, observamos que as dificuldades dos alunos na resolução de problemas de regra de três estavam, quase sempre, relacionadas à falta de compreensão dos enunciados dos problemas, pouca ou nenhuma habilidade para analisar as relações proporcionais entre as grandezas e, às vezes, por não possuírem domínio matemático suficiente das operações aritméticas exigidas na aplicação da regra.

A técnica da regra de três que aparenta ser um processo simples, requer, no entanto, a aquisição de um conjunto de conhecimentos matemáticos prévios que vão além de efetuar operações aritméticas de multiplicação e divisão, como, por exemplo, conhecimentos sobre fração equivalente, operação com fração, equação do 1º grau, razão, proporção, propriedades da proporção (simples e composta) e os conceitos das relações proporcionais (direta e inversa) entre grandezas. Só de posse desse conjunto de conhecimentos, pressupomos ser possível de fato aprender aplicar a regra de três de forma consciente e eficiente em contextos com proporcionalidade simples e composta.

Diante do exposto, trazemos um esquema que descreve de maneira sucinta os conhecimentos que julgamos necessários para aplicar a regra de três em situações com proporcionalidade simples e composta, mencionados anteriormente. Em seguida, apresentamos alguns desses aspectos matemáticos que fundamentam e tornam a aplicação da regra de três exequível, e também cinco métodos de resolução dessa regra que podem ser aplicados tanto para a regra de três simples como para a regra de três composta.

Os fundamentos teóricos matemáticos supracitados sobre a regra de três estão conforme as ideias de Lima et al. (2010; 2013) e Marcondes (1969), já os métodos de resolução da regra seguem de acordo com Fragoso (1999).

3.1. CONHECIMENTOS PRÉVIOS PARA AS REGRAS DE TRÊS

Esquema 1– Conhecimentos prévios para as regras de três



Fonte: Pesquisa bibliográfica

Esse esquema traz um panorama sobre os conhecimentos que os alunos devem possuir antes de estudar a técnica da regra de três. É uma interpretação elementar, que tem o propósito apenas de ilustrar alguns dos saberes necessários para o aprendizado das regras; no entanto, pode ocorrer o acréscimo de outros saberes nesse esquema didático conforme o parecer do professor.

A nossa intenção com esse esquema, cabe ressaltar, é apenas enfatizar alguns dos conhecimentos que julgamos necessários para que o ensino e aprendizagem da regra ocorram de maneira eficaz, tornando a utilização da mesma para o aluno inteligível e consciente, evitando desse modo um ensino baseado na memorização mecânica e sem sentido da regra de três, que a transforma numa ferramenta matemática ineficiente para resolver problemas com grandezas proporcionais tanto em contextos escolares como não escolares ligados a realidade do aluno.

Doravante, trazemos os fundamentos teóricos matemáticos, que sustentam a funcionalidade da regra de três coaduna com a fundamentação matemática da proporcionalidade entre duas ou mais grandezas.

3.2. GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

A ideia de proporcionalidade remete à relação entre grandezas, essa relação pode ser direta ou inversa entre duas ou mais dessas quantidades. Sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas, apresentamos adiante a definição de Marcondes (1969, p. 304)

Definição 1: Duas grandezas denominam-se diretamente proporcionais, quando tornando um valor qualquer de uma delas um certo número de vezes maior (ou menor), o valor correspondente da outra torna-se maior (ou menor) o mesmo número de vezes, respectivamente.

Para esse autor a relação proporcional direta entre duas grandezas também acontece quando a razão de dois valores quaisquer de uma delas é exatamente igual à razão dos respectivos valores da outra grandeza.

A relação de proporcionalidade direta é perceptível em muitas situações do cotidiano, onde uma grandeza se corresponde com outra grandeza, de forma que para cada valor correspondente da primeira existe um valor determinado para a outra, isto é, se uma aumenta a outra também aumenta, e se aquela reduz essa também fica reduzida sempre na mesma razão. Sobre esse fato inerente as grandezas diretamente proporcionais, apresentamos a seguir um exemplo extraído da obra de Fragoso (1999, p. 20).

Exemplo 01

Considere o comprimento de uma peça de tecido e o seu custo. Suponha que o metro desse tecido custe R\$ 12,00. Nestas condições, tem-se

Comprimento (m)	Custo (R\$)
1	12,00
2	24,00
3	36,00
4	48,00

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 20)

Na maneira como as grandezas estão relacionadas na tabela acima, é fácil ver que ao dobrar, triplicar, quadruplicar o valor da grandeza comprimento o mesmo ocorre com a grandeza custo, e caso o comprimento fosse reduzido à metade, à terça parte e à quarta parte, o custo também se reduziria na mesma proporção, e vice-versa, isso caracteriza uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas comprimento e custo.

De posse disso, a razão entre as grandezas comprimento e custo vai ser sempre igual a uma constante diferente de zero, a qual é chamada de constante de proporcionalidade, geralmente representada pela letra **k**.

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{24} = \frac{3}{36} = \frac{4}{48} = \dots = k.$$

A relação proporcional direta entre duas grandezas está sustentada por uma relação funcional entre essas quantidades, de tal modo que cada grandeza exerce um papel definido nessa relação, ou seja, temos uma grandeza que é dependente da outra grandeza considerada independente. Sobre essa forma de pensar sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas, trazemos adiante a definição de Lima et al. (2010, p. 2).

Definição 2: Duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor de x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

- 1) Quanto maior for x , maior será y . Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
- 2) Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x , então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Essa ideia também se aplica quando reduzimos o valor de x à metade, à terça parte, à quarta parte etc., o valor de y também se reduz conjuntamente na mesma proporção, isto é, à metade, à terça parte, à quarta parte etc. Nesse pensar, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma proporcionalidade.

Para Lima et al. (2010, p. 5-6) a proporcionalidade numérica é uma função da forma $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que goza das seguintes propriedades:

- 1) f é uma função crescente, desse modo temos que para todo $x < x'$ implica sempre que $f(x) < f(x')$ para quaisquer que sejam os valores de $x, x' \in \mathbb{R}^+$.
- 2) Quando o valor de x for multiplicado por um número natural n , o valor corresponde em $y = f(x)$ também fica multiplicado por esse n , isto é, $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Sobre o valor de n na segunda propriedade, de acordo com os autores citados, não se limita ao conjunto $\mathbb{N}$, mas pode assumir qualquer valor real positivo. Essa afirmação é embasada no teorema fundamental da proporcionalidade mencionado e demonstrado a seguir conforme Lima et al. (2010, p. 6-15).

3.2.1. TEOREMA FUDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer x e c em $\mathbb{R}^+$.

Demonstração

Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função com as seguintes propriedades:

- 1) $x < x' \rightarrow f(x) < f(x')$;
- 2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$. Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

A priori, considera-se que todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(m \cdot x) = m \cdot f(x),$$

por (2), logo $f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é válida quando c é racional. Suponha-se, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$.

Considerando o primeiro caso, temos então $\frac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r um valor racional

aproximado de c , de modo que $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r

é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade (1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Acerca do segundo caso, $f(cx) > c \cdot f(x)$, nos propomos a demonstrar essa inverdade admitindo que exista um racional r aproximado de c , de tal sorte que $r > c$ e seja menor que $\frac{f(cx)}{f(x)}$. Com isso temos: $c < r < \frac{f(cx)}{f(x)}$.

Ao multiplicarmos as desigualdades por $f(x)$, as mesmas podem ser escritas da seguinte forma: $c \cdot f(x) < r \cdot f(x) < f(cx)$. Como dito anteriormente, a igualdade $r \cdot f(x) = f(rx)$ é válida por r ser racional. Então temos que $c \cdot f(x) < f(rx) < f(cx)$. De posse disso, vamos considerar para análise a desigualdade $f(rx) < f(cx)$.

Anteriormente, admitimos que $r > c$, então é verdade que $rx > cx$. Isso implica dizer também que $f(rx) > f(cx)$ e não $f(rx) < f(cx)$, como aparece na desigualdade apresentada no parágrafo anterior. Essa contradição garante que não é verdade que $f(cx) > c \cdot f(x)$. Assim, de acordo com os autores, é verdade que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Ainda sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade decorre o corolário a seguir e sua demonstração conforme em Lima et al. (2010).

Corolário: Se $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então tem-se, para todo $x > 0$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$.

Com efeito pelo Teorema Fundamental¹², para quaisquer $x, c \in \mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x \cdot f(c) = f(c) \cdot x$. Em particular, tomando $c = 1$, obtemos $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$. (LIMA et al., 2010, p. 6)

Nesse contexto onde a relação proporcional direta é entendida como uma relação funcional entre duas quantidades reais e positivas, apresentamos adiante essa relação como um caso particular da função linear de acordo com Lima et al. (2013), pois restringe os valores dessa função a valores reais estritamente positivos.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma função linear. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax , logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ [\dots]$, **toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear** a $\mathbb{R}^+$. O coeficiente

¹² Os autores se referem ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

a chama-se o fator de proporcionalidade. (LIMA et al., 2010, p. 6-7, grifo nosso)

Para os autores do excerto se $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ representa uma proporcionalidade, então, para todo x_1 e x_2 com $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, temos a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, cujo resultado das razões é o fator de proporcionalidade **a**, com isso a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ é uma proporção.

A ideia de proporção também está associada à utilização de uma técnica conhecida como regra de três, que, de acordo com Lima et al (2010, p. 7), é todo problema que busca determinar o quarto elemento de três elementos conhecidos na (x_1, y_1, x_2, y_2) . Geralmente, essa técnica pode ser resolvida por duas maneiras, segundo os autores. Uma delas é por meio da proporção, quando conhecemos três dos números dessa proporção, x_1, y_1, x_2 , e pretendemos achar o quarto elemento, y_2 . Assim, obtemos a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, e, seguida, devemos isolar o termo desconhecido, $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$, para resolver o problema via a regra de três.

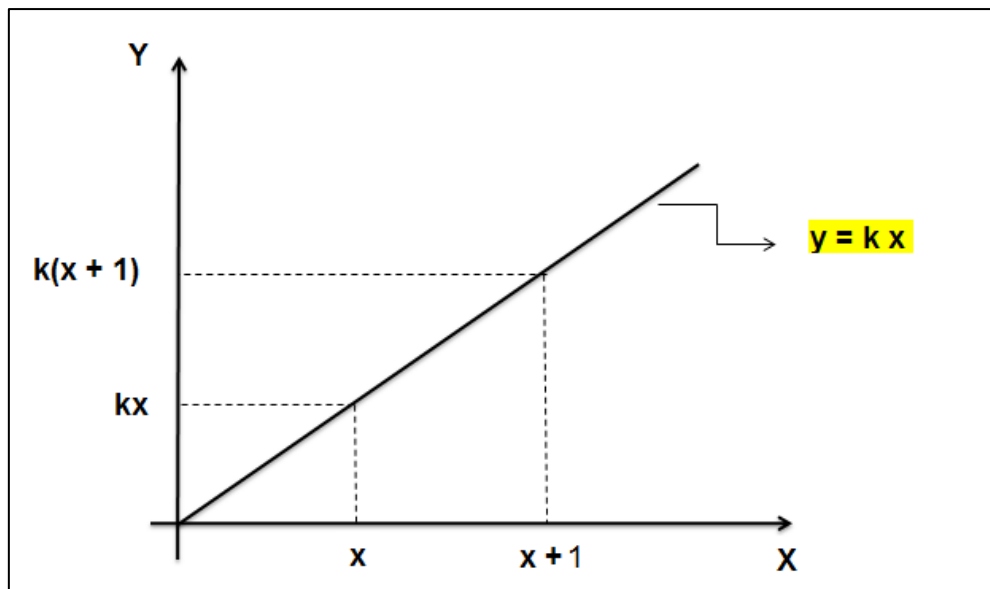
A outra maneira de resolver a regra de três, de acordo com os autores supracitados, é por meio da redução à unidade. Esta parte da seguinte ideia: sendo $f(x_1) = y_1$, temos $ax_1 = y_1$, e mais, $a = \frac{y_1}{x_1}$. Seguindo esse raciocínio, vamos encontrar o valor do termo desconhecido, y_2 , que falta na proporção $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Com isso temos que $f(x_2) = y_2$, e ainda $ax_2 = y_2$. Como se trata de uma relação proporcional, o valor de **a** é o mesmo, então é válido escrever $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$. Aqui cabe ressaltar que o nome redução à unidade é devido ao fato de que $f(1) = a$ (constante de proporcionalidade) quando o valor de $x = 1$.

Sobre essas duas maneiras de resolver a regra de três, falaremos com mais detalhes na sessão adiante que trata dos métodos de resolução dessa regra.

De posse do que foi mostrado sobre a proporcionalidade como um caso particular da função linear definida para valores reais estritamente positivos, é

necessário mostramos a representação dessa ideia por meio de um gráfico. Para tanto, consideramos y uma grandeza diretamente proporcional à grandeza x , com isso temos, conforme a definição mostrada anteriormente da função linear, $y = kx$, com x e $y \in \mathbb{R}^+$. Logo, o gráfico desse modelo matemático é uma reta que passa pela origem dos eixos cartesianos, e se encontra no primeiro quadrante, conforme é mostrado a seguir.

Gráfico 1– Proporcionalidade direta



Fonte: Pesquisa bibliográfica

Com base no comportamento do gráfico acima, podemos observar que para qualquer valor que se tome no eixo X com o valor corresponde em Y, temos que a razão entre esses valores é sempre igual a k , pois este é considerado a constante de proporcionalidade; desse modo, a relação entre os valores mencionados é uma relação diretamente proporcional.

A proporcionalidade é considerada uma das mais antigas noções Matemática e com grande aplicação em áreas como a Geometria, Física e Astronomia, bem como em atividades do cotidiano. O que faz da proporcionalidade um tema relevante para o ensino. Além do mais, a ideia de proporcionalidade se configura em um modelo matemático de fácil representação por meio das equações $y = k \cdot x$ e $y = \frac{k}{x}$, quando se trata de duas variáveis. No caso de mais de duas variáveis, a proporcionalidade pode ser representada por equações do tipo:

$y = k \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$. (LIMA, 1991, p. 139) A respeito desta última, abordaremos com mais detalhes na seção sobre grandezas diretamente ou inversamente proporcional a várias outras. A seguir apresentamos o conceito de grandezas inversamente proporcionais e a abordagem matemática que fundamenta esse conhecimento.

3.3. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

A relação de proporcionalidade inversa também está presente em situações do cotidiano, e ocorre quando duas quantidades variam proporcionalmente de maneira invertida, isto é, quando uma grandeza aumenta a outra reduz na mesma quantidade por meio das operações de multiplicação e divisão, respectivamente. A formalização dessa ideia é posta a seguir conforme Marcondes (1969, p. 305).

Definição 1: Duas grandezas são inversamente proporcionais, quando, tornando-se o valor de uma delas um certo número de vezes maior (ou menor), o valor correspondente da outra tornar-se-á o mesmo número de vezes menor (ou maior) [...]. Se duas grandezas são inversamente proporcionais, a razão de dois valores quaisquer de uma delas é igual à razão inversa dos valores correspondentes da outra.

Para representar a definição acima, tomamos como exemplo a situação abaixo extraída da obra do autor supracitado.

Exemplo 03

Comparando as grandezas velocidade de um automóvel e o tempo que ele gasta para percorrer uma distância de 120 km, tem-se:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	2
30	4
20	6
15	8

Fonte: MARCONDES, loc. cit.

Na relação inversa entre as grandezas velocidade e tempo, é fácil verificarmos que ao reduzir o valor da velocidade pela metade, o valor da grandeza tempo fica multiplicado por dois, e quanto reduzidos à terça parte o valor da velocidade, a grandeza tempo fica multiplicada por três, e assim sucessivamente.

Isso caracteriza uma relação inversamente proporcional entre as grandezas velocidade e tempo.

Com isso a razão entre os valores da grandeza velocidade vai ser igual à razão inversa dos valores da grandeza tempo.

$$\frac{60}{30} = \frac{4}{2}.$$

E mais, os produtos entre os valores das grandezas velocidade e tempo são sempre iguais a uma constante diferente de zero, quando as grandezas são inversamente proporcionais, a essa constante chama-se de constante de proporcionalidade.

$$60 \times 2 = 30 \times 4 = 20 \times 6 = 15 \times 8 = 10 \times 12 = \dots = k.$$

Essa igualdade também pode ser escrita como

$$\frac{60}{\frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{1}{6}} = \frac{15}{\frac{1}{8}} = \frac{10}{\frac{1}{12}} = \dots = k.$$

Outra forma de apresentar a ideia da relação proporcional inversa entre duas quantidades é por meio da representação funcional, onde as grandezas assumem papéis de variáveis, isto é, variável independente (x) e dependente (y), conforme apresentam Lima et al. (2013, p. 15-16) adiante.

Definição 2: Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando

- 1) As grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Escreve-se então $x \mapsto y$ e diz-se que y é função de x. Costuma-se também escrever $y = f(x)$.
- 2) Quanto maior for x menor será y. Simbolicamente: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y' < y$. Ou ainda: se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, tem-se a implicação $x < x' \rightarrow f(x') < f(x)$.

3) Se y_0 é o valor de y que corresponde ao valor x_0 de x e c é qualquer número, então ao valor cx_0 corresponde $\frac{1}{c}y_0$. Ou seja: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto \frac{1}{c}y_0$. Na notação funcional: $f(cx) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$.

Os autores fazem ainda uma observação com relação à validade do item (3) da definição acima, afirmando que basta considerar o número c como inteiro, isto é, se a correspondência $x \mapsto y$, sendo $y = f(x)$, cumprir as condições apresentadas nos itens (1) e (2) e, além disso, se for verdade que $f(nx) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$ quando n for inteiro, então valerá $f(cx) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$, tanto para c sendo um número inteiro ou não. Aqui cabe ressaltar, que esse fato é garantido pelo teorema fundamental da proporcionalidade, demonstrado anteriormente, onde o número c assume valores reais positivos.

Ainda acerca da proporcionalidade inversa entre duas grandezas, Lima et al. (2013, p. 17) consideram que se $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade inversa e k é o valor de y que corresponde a $x = 1$, isto é, $1 \mapsto k$, então o valor de y que corresponde a $x = x \cdot 1$ é $\frac{1}{x} \cdot k = \frac{k}{x}$.

Em notação funcional, o exposto acima, quando y ($y = f(x)$) for inversamente proporcional a x , pode ser escrito como:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = \frac{1}{x} \cdot f(1) = \frac{1}{x} \cdot k = \frac{k}{x}.$$

Em outras palavras, se y for inversamente proporcional a x , existirá uma constante k , conhecida como fator de proporcionalidade, de forma que $y = \frac{k}{x}$ ou $y \cdot x = k$, isso implica dizer que na relação inversa o produto do valor de x pelo valor de y é sempre constante. Além do mais, a igualdade $y = \frac{k}{x} = k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ quer dizer também que y é inversamente proporcional a x se, e somente se, y for diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$. (LIMA et al., 2013 p. 17)

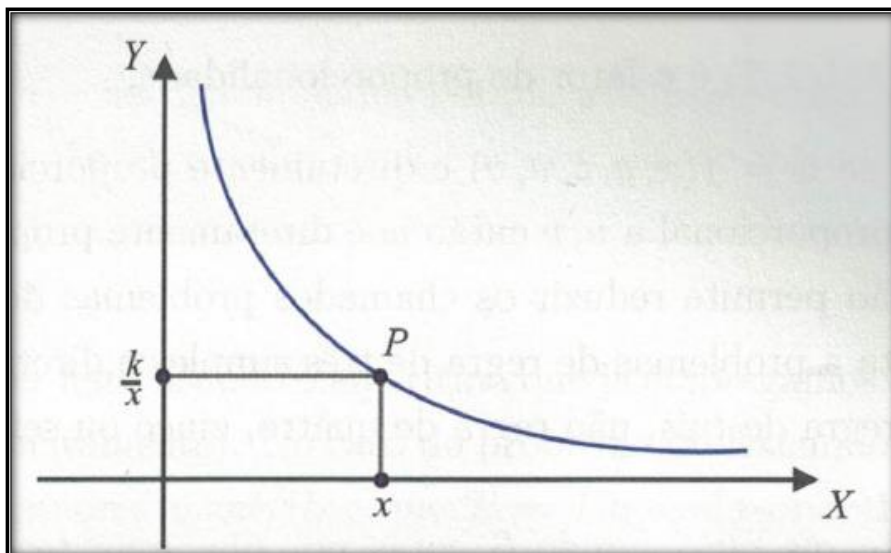
Para esses autores, como há na proporcionalidade direta a regra de três, o mesmo acontece com a proporcionalidade inversa, onde teremos a regra de três inversa. Nesta há uma grandeza y inversamente proporcional à grandeza x , e tendo os valores particulares x' e x'' de x , os quais estão relacionados, respectivamente, com os valores correspondentes de y , y' e y'' , com isso temos:

$$y' = \frac{k}{x'} \text{ e } y'' = \frac{k}{x''}, \text{ portanto } \frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}.$$

Na regra de três inversa, conhecidos três dos valores x' , x'' , y' , y'' , encontra-se o termo desconhecido por meio da proporção $\frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}$.

Assim, de acordo com Lima et al. (2013, p. 18), se y é inversamente proporcional a x então $y = \frac{k}{x}$, e essa relação entre x e y é representada graficamente pela curva denominada de hipérbole, determinada pelos pontos de $P = (x, \frac{k}{x})$, com $x > 0$.

Gráfico 2 – Grandezas inversamente proporcionais



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 19)

Na regra de três simples, tanto direta como inversa, usa-se apenas a propriedade fundamental da proporção ou propriedade da igualdade de frações para

encontrar o termo desconhecido. Nos problemas em que aparecem mais de duas espécies de grandeza, conhecidos como regra de três composta, a propriedade supracitada não é suficiente para resolução desses problemas. Desse modo, é necessário conhecermos a definição de proporcionalidade composta e sua propriedade que são apresentados a seguir.

3.4. PROPORCIONALIDADE COMPOSTA

Os contextos que relacionam mais de duas grandezas de modo proporcional são considerados de proporcionalidade composta, o que implica numa relação de dependência entre essas grandezas, conforme é mostrado a seguir na definição de Marcondes (1969, p. 306).

Definição: Uma grandeza composta é proporcional às grandezas das quais ela deriva quando é proporcional, separadamente, a cada uma delas, permanecendo constantes as demais.

Essa definição é amparada pela propriedade das grandezas compostas descrita adiante conforme o autor supracitado.

Propriedade: *se uma grandeza é proporcional a várias outras, existe uma proporcionalidade entre a medida dessa grandeza e o produto dos valores correspondentes das medidas das outras. (ibid., p. 307)*

A definição supracitada sempre se aplica no enfrentamento de problemas considerados de regra de três composta, onde se relacionam três ou mais espécies de grandezas, em que se deseja determinar o valor desconhecido de uma delas.

Uma representação acerca da proporcionalidade composta é apresentada por Marcondes (1969, p. 307-308), que utilizou um contexto geométrico, para relacionar proporcionalmente as dimensões de retângulos com os valores respectivos de suas áreas, como apresentamos a seguir por meio do exemplo:

Exemplo 4

Considere três retângulos com as seguintes dimensões:

Altura	Base	Área
a	B	S
a'	b'	S'
a	b'	S''

Fonte: MARCONDES (1969, p. 307)

Diante do exposto, é fácil ver que o primeiro e o terceiro retângulos têm a mesma altura, logo a razão entre as áreas é representada da seguinte forma:

$$\frac{S}{S''} = \frac{a \times b}{a \times b'} \rightarrow \frac{S}{S''} = \frac{b}{b'} \quad (1)$$

Como o segundo e o terceiro retângulos têm a mesma base, contados de cima para baixo, a razão entre suas áreas pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{S''}{S'} = \frac{a \times b'}{a' \times b'} \rightarrow \frac{S''}{S'} = \frac{a}{a'} \quad (2)$$

Agora, ao multiplicarmos as proporções (1) e (2) termo a termo, obtemos:

$$\frac{S}{S''} \times \frac{S''}{S'} = \frac{b}{b'} \times \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{a \times b}{a' \times b'} \quad .$$

Alterando-se os meios da igualdade, temos:

$$\frac{S}{a \times b} = \frac{S'}{a' \times b'} \quad .$$

Dessa forma, ao adotarmos outros retângulos com dimensões a'' , b'' e a''' , b''' , etc. obtemos as igualdades:

$$\frac{A}{a \times b} = \frac{A'}{a' \times b'} = \frac{A''}{a'' \times b''} = \frac{A'''}{a''' \times b'''} = \dots \quad .$$

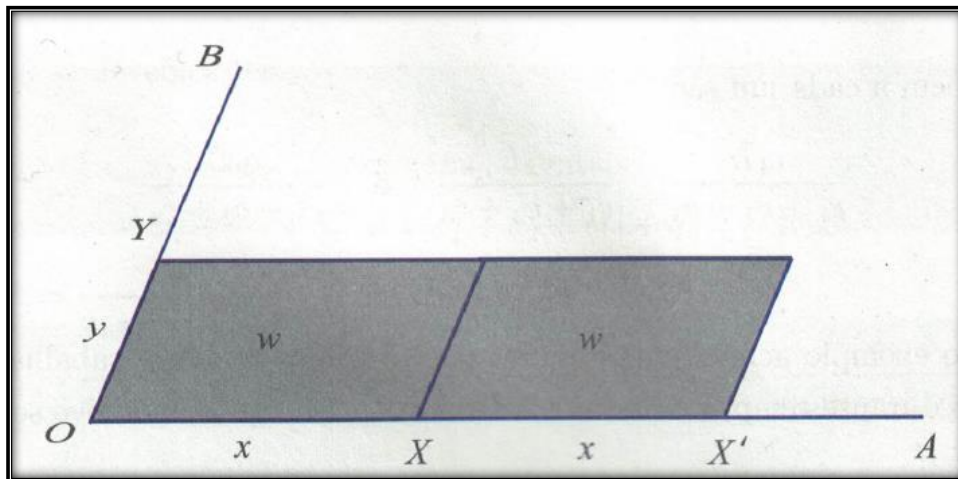
Logo, as áreas dos retângulos são diretamente proporcionais aos produtos de suas dimensões.

Ainda num contexto geométrico, Lima et al. (2013, p. 11-14) abordam a proporcionalidade composta via ao tratamento de função, por meio das relações entre as dimensões de um paralelogramo com sua área e as dimensões de um paralelepípedo com seu volume. Essas relações ocorrem de forma diretamente proporcionais, como são mostradas a seguir.

3.4.1. GRANDEZA DIRETAMENTE PROPORCIONAL A VÁRIAS OUTRAS

Na figura a seguir, de acordo com Lima et al. (2013, p. 11-12), há duas semirretas AO e OB e sobre elas, nesta ordem, toma-se os segmentos OX, cujo comprimento é x , e OY, de comprimento y . Essas medidas determinam um paralelogramo, cuja área é representada por w . Com isso, w é função de x e y , ou seja, $w = f(x, y)$. De posse disso, se mantivermos Y fixo e tomarmos OX de comprimento $2x$, obtemos um paralelogramo de área $2w$, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Proporcionalidade composta no paralelogramo



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 12)

Com isso, temos $f(2x, y) = 2f(x, y)$. Logo, a mesma observação garante se n for qualquer número natural então $f(nx, y) = n.f(x, y)$. Isto significa que, mantendo y fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a x . Da mesma forma podemos ter $f(x, ny) = n.f(x, y)$, ou seja: mantendo x fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a y .

Os autores afirmam ainda que, de acordo com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, é válida a igualdade $f(cx, y) = c.f(x, y)$ e $f(x, dy) = d.f(x, y)$ para quaisquer que sejam os números c, d inteiros ou não. Então segue que:

$$w = f(x, y) = f(x \cdot 1, y \cdot 1) = x \cdot f(1, y \cdot 1) = x \cdot y \cdot f(1, 1) = k \cdot x \cdot y, \text{ onde } k = f(1, 1).$$

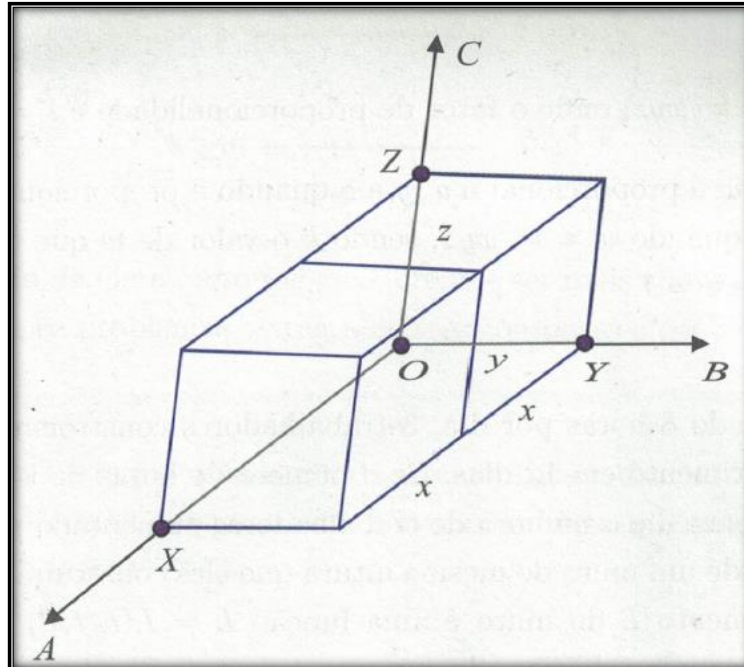
Ainda de acordo com os autores supracitados, se fixarmos as semirretas AO e OB, e tomamos sobre elas os segmentos OX e OY de comprimento x e y , respectivamente, a área do paralelogramo de lados adjacentes OX e OY é proporcional ao produto $x \cdot y$.

A mesma abordagem pode ser aplicada a três semirretas não coplanares, AO, OB e OC, de mesma origem, e marcado sobre elas os segmentos OX, OY e OZ, com os comprimentos x , y e z , nessa ordem. Com isso eles determinam as arestas de um paralelepípedo de volume representado pela função de três variáveis x , y , z , isto é, $V = V(x, y, z)$, descrito na figura adiante. (LIMA et al., 2013, p. 12)

Como procedemos anteriormente, variando as dimensões do paralelogramo, vamos fazer o mesmo com as do paralelepípedo, para tanto, vamos fixar os valores de y e z , e dobrar o valor de x , o volume do sólido dobra, ou seja, $V = V(2x, y, z) = 2 \cdot V(x, y, z)$. Esse procedimento pode ser aplicado para qualquer número natural n , que o volume ficará $V(nx, y, z) = n \cdot V(x, y, z)$. O mesmo raciocínio valerá para y e z , por exemplo, $V(x, ny, z) = n \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, nz) = n \cdot V(x, y, z)$. E mais, com base no Teorema Fundamental da Proporcionalidade, a afirmação anterior não se restringe somente para n natural, podendo este ser qualquer número real positivo. (LIMA et al., 2013, p. 12-13)

Sobre o exposto acima, a Figura 2 a seguir traz o sólido com a variação da aresta x mantendo as demais fixas. Também apresentamos a relação proporcional direta do volume com as dimensões do paralelepípedo.

Figura 2 – Proporcionalidade composta no paralelepípedo



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 13)

$$V = V(x, y, z) = V(x, 1, y, z) = x \cdot V(1, y, 1, z) = xy \cdot V(1, 1, z, 1) = xyz \cdot V(1, 1, 1) = k \cdot xyz.$$

Sendo $k = V(1, 1, 1)$ o volume do paralelepípedo de arestas de comprimento unitário, onde três delas têm origem em O e estão sobre as semirretas AO , OB e OC . (LIMA et al., 2013, p. 13)

De posse do exposto sobre a proporcionalidade composta direta entre grandezas, em que utilizamos como exemplos as relações proporcionais da área do paralelogramo com suas dimensões e também do volume do paralelepípedo com suas dimensões, cabe formalizarmos essa abordagem por meio de uma definição, a qual é apresentada a seguir conforme Lima et al. (2013, p. 13-14).

Definição: Consideremos uma grandeza cujo valor w depende dos valores x, y, z de três outras. Escrevemos então $w = f(x, y, z)$. Diremos que w é proporcional a x, y e z quando, mantendo fixos dois quaisquer desses valores, w for proporcional à variável restante. Quando este é o caso, tem-se:

$$w = f(x, y, z) = f(x, 1, y, z) = x \cdot f(1, y, 1, z) = xy \cdot f(1, 1, z, 1) = xyz \cdot f(1, 1, 1),$$

portanto $w = k \cdot xyz$, onde o fator de proporcionalidade é $k = (1, 1, 1)$.

Além do mais, os autores afirmaram que w é proporcional a x , y e z quando é proporcional ao produto xyz , ou seja, quando $w = k \cdot xyz$, sendo k o valor de w que corresponde a $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

De posse da definição de proporcionalidade composta direta entre grandezas, vamos aplicá-la na resolução de um problema em que estão relacionadas proporcionalmente quatro grandezas; para tanto, utilizamos o exemplo a seguir extraído da obra de Lima et al. (2013, p. 14).

Exemplo 05

Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construirão em 15 dias?

Resolução

O comprimento L do muro é uma função $L = L(h, t, d)$ do número h de horas de trabalho diárias, do número t de trabalhadores e do número d de dias de trabalho. É razoável admitir que, em condições normais, L é proporcional a cada uma dessas três variáveis. Portanto $L = k \cdot htd$. Sabemos que, quando valem $h=8$, $t=3$ e $d = 12$, temos $L = 40$. Portanto, $40 = k \times 8 \times 3 \times 12$, ou seja, $40 = 288 \times k$, então $k = \frac{40}{288}$.

Segue-se que, para $h=6$, $t= 5$ e $d = 15$, tem-se:

$$L = \frac{40}{288} \times 6 \times 5 \times 15 = 62,5 \text{ m.}$$

Logo, o comprimento do muro construído de mesma altura do primeiro é de 62,5 m.

A relação proporcional composta entre grandezas também pode ocorrer de forma direta e inversa ao mesmo tempo entre essas grandezas, isso depende do contexto do problema.

A respeito disso, apresentamos adiante uma definição formal sobre esse tipo de relação proporcional mista entre grandezas conforme Lima et al. (2013).

3.4.2. GRANDEZAS DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS A VÁRIAS OUTRAS

Algumas situações não triviais apresentam relações de proporcionalidade entre grandezas, de forma que a grandeza dependente se relaciona ora direta, ora inversamente proporcional com outras grandezas. A luz desse contexto, trazemos a Lei de Atração Universal de Newton, onde uma grandeza dependente se relaciona de direta e inversamente proporcionais com outras grandezas, como mostra o trecho a seguir.

[...] “a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”. Assim, se dois corpos com massas m_1 e m_2 acham-se situados a uma distância d um do outro, então, segundo Newton, eles se atraem segundo uma força cuja intensidade f é (diretamente) proporcional a m_1 e m_2 e inversamente proporcional a d^2 . (LIMA et al. 2013, p.19, grifo do autor)

De acordo com esses autores, o que foi dito no excerto supracitado é descrito matematicamente como $f = f(m_1, m_2, d) = k \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$, sendo que a constante k vai depender da unidade utilizada.

Sobre esse tipo relação proporcional mista, onde uma grandeza se relaciona direta e inversamente com outras grandezas, apresentamos a seguir uma definição conforme Lima et al. (2013, p. 19-20)

Definição: Seja $w = f(x, y, z, u, v)$ uma grandeza diretamente proporcional às grandezas x, y, z e inversamente proporcional a u e v . Isto quer dizer que

$$f(cx, y, z, u, v) = c \cdot f(x, y, z, u, v)$$

e

$$f(x, y, z, cu, v) = \frac{1}{c} \cdot f(x, y, z, u, v),$$

valendo relações análogas para y e z no lugar de x e v no lugar de u . Como se tem $f(x, y, z, u, v) = f(x \cdot 1, y \cdot 1, z \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1)$, segue-se daí que:

$$f(x, y, z, u, v) = xyz \cdot f(1, 1, 1, u \cdot 1, v \cdot 1) = \frac{xyz}{uv} \cdot f(1, 1, 1, 1, 1).$$

Logo,

$$f(x, y, z, u, v) = k \frac{xyz}{uv},$$

onde $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$ é o fator de proporcionalidade.

Em outras palavras, se $w = f(x, y, z, u, v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u e v , então w será diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$. Dessa maneira, é possível reduzir os ditos problemas de regra de três composta mista em problemas de regra de três simples e direta. (LIMA et al., 2013, p. 20)

Como forma de aplicar a definição formalizada acima, resolvemos o problema a seguir que relacionam cinco grandezas proporcionalmente e foi extraído da obra de Lima et al. (2013, p. 20)

Exemplo 06

Com 5 teares funcionando 6 horas por dia, uma tecelagem fabrica 1.800m de tecido com 1,20m de largura em 4 dias. Se um dos teares não puder funcionar e a largura do tecido for de 0,80m, em quanto tempo a tecelagem fabricará 2.000m do mesmo tecido, com as máquinas funcionando 8 horas por dia?

Resolução

O tempo T a determinar é uma função do tipo $T = T(t, h, m, \ell)$, onde t é o número de teares, h o número de horas diárias em que são utilizados, m o número de metros de tecidos e ℓ é a largura da peça. Por meio da análise proporcional da grandeza dependente com as demais grandezas independentes, temos que T é inversamente proporcional a t e h e diretamente proporcional a m e ℓ . Logo $T = k \cdot \frac{m \cdot \ell}{t \cdot h}$.

Como o tempo T é dado em dias, tem-se:

$$4 = k \cdot \frac{180 \times 1,2}{5 \times 6} = 72k = 4$$

$$k = \frac{4}{72} \rightarrow k = \frac{1}{18}.$$

Daí segue que

$$T = \frac{1}{18} \times \frac{200 \times 0,8}{4 \times 8} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9} \approx 3 \text{ dias.}$$

Logo, o tempo gasto pela tecelagem para produzir 2000 m do mesmo tecido será aproximadamente 3 dias.

Os exemplos que apresentamos até agora sobre a relação proporcional entre grandezas foram resolvidos utilizando apenas a definição de proporcionalidade (simples e composta), todavia problemas dessa natureza, também conhecidos como de regras de três, podem ser solucionados por outras formas ou métodos de resolução, sobre isso trazemos adiante cinco métodos de resolução da regra de três de acordo com Fragoso (1999).

3.5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DA REGRA DE TRÊS

Os métodos de resolução da regra de três que vamos apresentar aqui, seguem conforme as informações extraídas da obra de Fragoso (1999, p. 27). A seguir mostramos cada um desses cinco métodos de resolução da regra e também os seus respectivos procedimentos de utilização.

- Método das proporções;
- Método das flechas ou regra das flechas;
- Método algébrico ou regra algébrica;
- Método duplex ou método de Carroll;
- Método da redução à unidade.

Cabe ressaltar que os procedimentos de resolução desses métodos podem ser usados na resolução de problemas tanto de regras de três simples como de regra de três composta. O primeiro método a ser apresentado é o da proporção.

3.5.1. MÉTODO DAS PROPORÇÕES

De acordo com Fragoso (loc. cit.) o referido método se baseia no conceito de proporções, e esse método era utilizado na década de 40 para justificar a resolução de problemas de regra de três.

O funcionamento do método das proporções é basicamente igualar as razões das grandezas do problema quando essas forem diretamente proporcionais para achar o valor do termo desconhecido. Caso as razões forem inversamente

proporcionais, é preciso inverter uma delas para que a igualdade ocorra de fato entre as razões.

Para colocar em prática o método das proporções trazemos o exemplo a seguir retirado de Fragoso (1999, p. 28)

Exemplo 07

Com 120 kg de trigo, fabricam-se 60 kg de certo tipo de farinha. Quantos quilogramas de trigo serão necessários para fabricar 130 kg do mesmo tipo de farinha?

Resolução

A solução apresentado pelo autor parte da seguinte ideia de que com 120 kg de trigo são fabricados 60 kg farinha, logo para fabricar 130 kg de farinha serão necessários mais trigo. Assim, as grandezas trigo e farinha são diretamente proporcionais e podem ser escritas na forma da proporção a seguir:

$$\frac{120}{x} = \frac{60}{130} \rightarrow 60x = 120.130 \rightarrow x = \frac{15.600}{60} \rightarrow x = 260.$$

Logo, são necessários 260 kg de trigo para fabricar 130 kg de farinha.

Com relação à utilização do método das proporções na resolução da regra de três composta, o autor afirma que o valor da grandeza que se quer achar depende da razão direta ou inversa de várias outras grandezas envolvidas. Dessa forma há duas maneiras de resolução de regra de três composta pelo método das proporções, a saber, a Decomposição em Regra de Três Simples e a Redução a uma Regra de Três Simples, os quais são mostrados adiante.

Decomposição em regra de simples: a decomposição em regra de três Simples, de acordo com Fragoso (1999, p. 29), consiste em agrupar em uma tabela as grandezas envolvidas no problema com seus respectivos valores e cada grandeza de mesma espécie deve estar na mesma coluna da tabela, para que se possa calcular a proporção entre elas. Logo, para encontrar a solução de um dado problema com regra de três composta através do método das proporções, basta decompor esse problema em $(n - 1)$ regras de três simples, em que n representa o número de grandezas presente no problema. Vajamos como funciona na resolução do exemplo a seguir extraído de Fragoso (1999, p.30).

Exemplo 08

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Primeiro o passo: é organizar as grandezas no quadro com os seus respectivos valores.

Páginas	Linhas/páginas	Letras/linha
300	36	50
250	30	?

Como o problema apresenta três grandezas, vamos utilizar duas regras de três simples ($3 - 1 = 2$).

Segundo passo: a solução parcial (x) do problema é obtida por meio da regra de três simples mediante a análise proporcional das grandezas abaixo, mantendo fixo quantidade de páginas.

Linhas/páginas	Letras/linha
36	50
30	x

Como o livro possui 36 linhas e em cada linha há 50 letras, ao ser reimpresso, mantendo o número de páginas constante, com 30 linhas por páginas é necessário que se aumente o número de letras por página, o que caracteriza uma relação inversamente proporcional entre as grandezas envolvidas, assim temos a proporção:

$$\frac{30}{36} = \frac{50}{x} \rightarrow 30x = 36 \cdot 50 \rightarrow x = \frac{1.800}{30} \rightarrow x = 60.$$

Terceiro passo: com a solução parcial, a solução definitiva (y) do problema é obtida substituindo o valor da solução parcial na grandeza letras/linha, mantendo a grandeza linhas/páginas constante, conforme é mostrado a seguir.

Páginas	Letras/linha
300	60
250	y

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 31)

Como o livro tem 300 páginas com 60 letras/linha, ao ser reimpresso, com 250 páginas, é necessário que o livro possua mais letras por linha, desse modo à

relação é inversamente proporcional entre as grandezas páginas e letras/linha, com isso temos a proporção:

$$\frac{250}{300} = \frac{60}{y} \rightarrow 250y = 300 \cdot 60 \rightarrow y = \frac{18.000}{250} \rightarrow y = 72.$$

Portanto, com o livro reimpresso com 250 páginas é necessário ter 72 letras por linha.

A segunda maneira de resolver a regra de três composta por meio da proporção é reduzindo a uma única regra de três simples, como é detalhado a seguir.

Redução a uma regra de três simples: essa forma de resolver a regra de três composta por meio da proporção tem como finalidade simplificar os cálculos desse tipo regra, utilizando apenas uma única regra de três simples para solucionar o problema. Vajamos como funciona na resolução do exemplo a seguir extraído de Fragoso (1999, p.37).

Exemplo 09

Na abertura de um canal, 15 homens trabalhando 8 horas diárias, escavaram 400 m³ de terra em 10 dias. Quantos homens serão necessários para escavar 600 m³ trabalhando 15 dias de 6 horas?

Resolução

Em linhas gerais, a forma de resolver a regra de três composta reduzindo a uma única regra de três simples no método das proporções consiste em relacionar as grandezas do problema, geralmente as independentes, de tal modo que uma fique em função da outra, para, em seguida, ser relacionada por meio da regra de três simples com a grandeza que contém o termo desconhecido. Seguindo esse raciocínio para resolver o problema do exemplo acima, podemos relacionar a quantidade de terra escada com o tempo de duração em dia desse trabalho e depois com o tempo em dia, conforme mostrado adiante:

Encontrar a quantidade de terra escavada por dia e depois por hora de trabalho:

i) $400 \div 10 = 40 \div 8 = 5.$

Logo, 15 homens escavaram 5 m³ de terra por hora.

ii) $600 \div 15 = 40 \div 6 = 20/3.$

Portanto, x homens escavaram 20/3 m³ de terra por hora.

De posse desses valores, podemos resolver o problema proposto por meio da regra de três simples, conforme mostrado a seguir.

Homens	Quantidade de terra escavada (m ³)
15	5
X	20/3

Como as grandezas do quadro acima estão relacionadas diretamente proporcionais, uma vez que ao aumentarmos o número de homens a quantidade de terra escavada também aumenta na mesma razão; desse modo, podemos determinar o valor do termo desconhecido utilizando a proporção abaixo:

$$\frac{15}{x} = \frac{5}{20/3} \rightarrow 5x = \frac{15 \cdot 20}{3} \rightarrow x = \frac{100}{5} \rightarrow x = 20 .$$

Logo, serão necessários 20 homens para escavar 600m³ de terra trabalhando 6 horas diárias durante 15 dias.

Com isso, finalizamos funcionalidade o método das proporções na resolução de problemas de regra de três simples e composta, revelando a eficácia desse método no enfrentamento de problemas com grandezas proporcionais.

Adiante apresentamos outro método de resolução das regras conhecido como método das flechas.

3.5.2. MÉTODO DAS FLECHAS (OU REGRA DAS SETAS)

O método das flechas ou método das setas é, geralmente, o mais utilizado na resolução de problemas de regra de três. Esse método é considerado uma variação do método das proporções, pois utiliza flechas ou setas para representar a relação de proporcionalidade (direta e inversa) entre as grandezas do problema. Provavelmente, o método das flechas foi aplicado como recurso metodológico na década de 60. (FRAGOSO,1999, p. 38)

A execução do método das flechas nos problemas de regra de três simples requer alguns procedimentos norteadores na sua utilização, como os listados a seguir:

- I- Monta-se um quadro (tabela) com as duas grandezas envolvidas no problema e seus respectivos valores;

- II- Na coluna onde se encontra o valor a ser determinado (x), coloca-se uma seta apontando para a incógnita, ou seja, o valor desconhecido;
 III- Para se colocar a seta na outra coluna, e tomando-se como referência a grandeza onde se encontra o valor (x), faz-se a seguinte pergunta:
 Se aumentarmos a grandeza ligada a x , a outra grandeza aumenta ou diminui?
 Se a resposta for aumenta, as grandezas são diretamente proporcionais, caso contrário, elas são inversamente proporcionais.
 Obtida as respostas, colocar-se-á a seta na outra coluna, com o mesmo sentido da primeira seta, se as grandezas são direta, e oposto, se inversa.
 IV- Escreve-se a proporção, obedecendo-se a propriedade das proporções direta, ou inversa;
 V- Determina-se o valor do termo desconhecido (x), através da proporção construída. (FRAGOSO, 1999, p. 38-39)

Estes procedimentos do método das flechas caracterizam as etapas que devem ser seguidas na resolução de problemas de regra de três simples. Assim, aplicamos cada um desses procedimentos na resolução do exemplo adiante, cujo contexto relaciona duas grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 10¹³

Uma empresa de engenharia consegue asfaltar 60 km de estrada em 20 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma empresa asfaltar uma estrada de 84 km?

Resolução

A princípio devemos dispor num quadro as grandezas do problema com os seus respectivos valores, como recomenda o primeiro procedimento de resolução da regra de três simples.

I) Quadro das grandezas e respectivos valores:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
60	20
84	x

O próximo passo é colocar uma seta na grandeza que contém o termo desconhecido, apontada para o valor de x , conforme ilustrado abaixo.

II) Coloca-se a seta na coluna do termo desconhecido:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
60	20
84	x



13 [Exemplo do livro, p. 130] ENTRE jovens 1ª série do ensino médio: guia do tutor matemática. São Paulo: Instituto Unibanco/CAEd, 2013. 362 p.

Em seguida, no procedimento III, devemos realizar a análise proporcional entre as grandezas do problema, isto é, se elas são direta ou inversamente proporcionais por meio da pergunta:

III) Pergunta-se: Ao aumentarmos o tempo, a quantidade de asfalto, aumenta ou diminui na mesma quantidade?

Resposta: Aumenta.

Portanto, as grandezas acima são classificadas como grandezas diretamente proporcionais. Então, coloca-se uma seta na outra coluna de mesmo sentido da anterior:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
↓ 60	20 ↓
↓ 84	x ↓

Os dois procedimentos restantes a seguir dizem respeito à montagem da proporção simples e a determinação do valor de x por meio de uma equação do 1º grau.

IV) Montar a proporção:

$$\frac{60}{84} = \frac{20}{x}$$

V) Obter o valor da incógnita na proporção:

$$60x = 84 \cdot 20 \rightarrow x = \frac{1680}{60} \rightarrow x = 28.$$

Assim, para a empresa asfaltar 84 km da estrada são necessários 28 dias de trabalho.

O método das flechas também é utilizado na resolução de problemas de regra de três composta; e como na regra de três simples, devemos seguir cinco procedimentos de resolução, conforme descritos abaixo.

- I- Monta-se o quadro com as respectivas grandezas e seus valores;
- II- Coloca-se a primeira seta na coluna onde se encontra o valor a ser determinado (x);
- III- Uma a uma comparam-se as grandezas com a que corresponde à coluna da indeterminada, efetuando-se a mesma pergunta enunciada no procedimento para regra de três simples, uma coluna a cada vez, colocando-se a respectiva seta;

- IV) Escreve-se a proporção, obedecendo à propriedade das proporções compostas;
 V) Determina-se o valor do termo desconhecido. (FRAGOSO, 1999, p. 42)

Para mostrarmos a funcionalidade desses procedimentos de execução da regra de três composta, vamos resolver o exemplo adiante, onde estão relacionadas três grandezas proporcionalmente.

Exemplo 11

Um obra foi realizada por 5 operários com uma carga horária de trabalho de 6 horas por dia, durante 12 dias. Caso essa obra fosse realizada por 9 operários com as mesmas capacidades de trabalho dos primeiros e nas mesmas condições, trabalhando 10 horas por dia, em quantos dias ela seria finalizada?

Resolução

O primeiro procedimento recomenda que devemos organizar as grandezas do problema em um quadro com os seus respectivos valores, conforme mostrado abaixo.

I) Monta-se o quadro de grandezas com os respectivos valores:

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
5	6	12
9	10	x

Em seguida, no procedimento II, devemos colocar uma seta na grandeza que contém o termo desconhecido, apontada para a letra x.

II) Coloca-se a seta na coluna do termo desconhecido:

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
5	6	12
9	10	x

Depois disso, devemos fazer a análise proporcional das outras grandezas com relação à grandeza que contém o termo desconhecido, por meio das perguntas:

III) Pergunta-se em cada coluna:

i) Se aumentarmos o número de dias, o número de operários para realizar a obra, aumenta ou diminui?

Resposta: diminui.

Logo, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

ii) Se aumentarmos o número de dias, o número de horas trabalhadas por dia de trabalho aumenta, ou diminui?

Resposta: diminui.

Logo, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Depois de realizarmos as análises proporcionais das grandezas com relação à grandeza que contém o valor de x , colocamos as demais setas nessas grandezas de acordo com o tipo de relação proporcional existente, isto é, se a grandeza for diretamente proporcional a seta tem o mesmo sentido da primeira, caso seja inversamente proporcional, a seta tem o sentido contrário à primeira seta, conforme ilustramos abaixo.

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
↑ 5	↑ 6	12 ↓
↓ 9	↓ 10	x ↓

Os dois últimos procedimentos de resolução da regra de três composta adiante tratam, respectivamente, de montar a proporção composta e resolvê-la para encontrar o valor de x dessa proporção. Vejamos:

IV) Escreve-se a seguinte proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{5} \cdot \frac{10}{6}$$

V) Determina-se o valor de x , ou seja:

$$\frac{12}{x} = \frac{90}{30} \rightarrow 90x = 360 \rightarrow x = \frac{360}{90} \rightarrow x = 4$$

Assim, são necessários 4 dias para que a mesma obra fosse concluída nas condições apresentadas.

Desse modo, encerramos a aplicação do método das flechas na resolução de regras de três simples e composta. Desvelando, assim, a eficácia desse método em resolver problemas que relacionam grandezas proporcionais.

Adiante, apresentamos outro método eficaz na resolução de problemas de regra de três simples e composta, conhecido como método algébrico ou regra algébrica.

3.5.3. MÉTODO ALGÉBRICO (OU REGRA ALGÉBRICA)

O método algébrico utiliza o raciocínio algébrico para resolver os problemas considerados de regra de três por meio do uso de equação do 1º grau. Esta é resultante da descoberta de uma constante inerente ao contexto do problema. Desse modo, para cada situação será necessário o fomento de um

raciocínio distinto, o que torna o método mais complexo quando comparado com os demais. (FRAGOSO, 1999, p. 49)

Para mostrar o funcionamento do referido método, apresentamos adiante o exemplo extraído da obra de Fragoso (1999, p. 50) onde estão relacionadas proporcionalmente apenas duas grandezas.

Exemplo 12

Com 120 kg de trigo, fabricam-se 60 kg de certo tipo de farinha. Quantos quilos de trigo serão necessários para fabricar 130 kg do mesmo tipo de farinha?

Resolução

O primeiro passo para resolver o problema de regra de três posto por meio do método algébrico é identificar uma constante que esteja relacionada com as quantidades desse problema, para, em seguida, montar a equação do 1º grau com o termo desconhecido. Por isso, é necessário fazermos a pergunta: “o que é constante na fabricação de certa quantidade de farinha, tendo uma determinada quantidade de trigo?” (FRAGOSO, loc. cit.)

Como as grandezas supracitadas são grandezas diretamente proporcionais, elas variam sempre na mesma quantidade ou razão de proporcionalidade, logo, por meio da definição de proporcionalidade, existe uma constante k , diferente de zero, que garante tal relação entre essas grandezas. Desse modo podemos escrever as equações:

$$1^\circ \text{ caso: } 60 = k \cdot 120$$

$$2^\circ \text{ caso: } 130 = k \cdot x$$

Então, para encontrar o valor do termo desconhecido, x , basta igualarmos o valor da constante k , com isso temos as razões:

$$\frac{60}{120} = \frac{130}{x} \rightarrow 60x = 15600 \rightarrow x = \frac{15600}{60} \rightarrow x = 260.$$

Logo, são necessário 260 kg de trigo para a fabricação de 130 kg de farinha.

O próximo exemplo que vamos resolver mostra o método algébrico sendo aplicado num problema de regra de três composta. Para tanto, utilizamos o exemplo adiante retirado da obra de Fragoso (1999, p. 51-52).

Exemplo 13

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Já que o primeiro passo no método algébrico é identificar qual a constante inerente ao contexto do problema, e isso não é uma tarefa trivial em problemas de regra de três composta, sugerimos, então, recorrer a definição de *grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras*, apresentada anteriormente, a qual coloca em evidência essa constante de proporcionalidade.

Como as grandezas independentes do problema acima são inversamente proporcionais à grandeza dependente, pela definição mencionada, temos a representação:

$$L = k \frac{1}{p \cdot \ell} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{I) } 50 = k \frac{1}{300 \cdot 36} \rightarrow k = 50 \cdot 300 \cdot 36 \\ \text{II) } x = k \frac{1}{250 \cdot 30} \rightarrow k = x \cdot 250 \cdot 30 \end{array}$$

Grandezas :

L : letras; ℓ : linhas; p: páginas

Ao compararmos (I) e (II) pela constante k, temos a equação e o valor do termo desconhecido, x:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 300 \cdot 36 &= x \cdot 250 \cdot 30 \\ x &= \frac{540.000}{7500} \rightarrow x = 72 \end{aligned}$$

Logo, com o livro reimpresso teremos 72 letras em cada uma das 30 linhas desse livro.

Com isso, encerramos o método algébrico de resolver problemas de regra de três simples e composta. Adiante apresentamos outro método de resolver as regras de três, conhecido como método duplex.

3.5.4. MÉTODO DUPLEX

O método Duplex foi desenvolvido pelo matemático de Oxford e diácono chamado de Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) também era conhecido pela

nomeação de Lewis Carroll. Ele criou em 1879, um quebra-cabeça de palavras que chamou de duplex, o qual foi adequado ao estudo da regra de três e se tornou um método eficaz e de fácil entendimento na resolução de problemas, apoiado nos conceitos de proporcionalidade direta e inversa. O quebra-cabeça duplex parte de uma palavra para construir outra com a mesma quantidade de letras da primeira, onde são trocadas as letras uma de cada vez até obter outra palavra com sentido. (FRAGOSO, 1999, p. 53)

O autor supracitado mostra a seguir o passo a passo como o quebra-cabeça duplex funciona, quando transforma as palavras 'tia' em 'sol', 'ver' em 'mar' e 'terra' em 'marte'.

1) Dada a palavra TIA obter a palavra SOL.
 $TIA \rightarrow TIL \rightarrow TAL \rightarrow SAL \rightarrow SOL$
 2) Dada a palavra VER obter a palavra MAR.
 $VER \rightarrow LER \rightarrow LAR \rightarrow MAR$
 3) Dada a palavra TERRA obter a palavra MARTE.
 $TERRA \rightarrow BERRA \rightarrow BARRA \rightarrow BARCA \rightarrow MARCA \rightarrow MARTA \rightarrow MARTE$. (FRAGOSO, 1999, p. 54)

De acordo com esse autor, o quebra-cabeça duplex quando aplicado em contexto com matemática resolve todos os problemas de regra de três. Para tato, utiliza-se da noção de proporcionalidade para relacionar as grandezas envolvidas nos problemas e também das operações de multiplicação e divisão em um procedimento simples que consiste na troca de posição dessas operações para encontrar a solução do problema.

No exemplo a seguir apresentamos a execução de método Duplex seguindo três etapas, conforme sugeriu Fragoso (1999, p. 56), para a resolução da regra de três.

Exemplo 14

Um pessoa gasta 25 minutos para percorrer uma certa distância, caminhado 54 passos por minuto. Quanto tempo levaria para vencer a mesma distância se caminhar 45 passos por minuto?

Resolução

A aplicação do método Duplex requer seguir as três etapas abaixo:

- I. Montar um quadro com as grandezas e seus respectivos valores;
- II. Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas;
- III. Aplicar o método Duplex em cada grandeza.

Com isso, devemos primeiro identificar as grandezas do problema e seus respectivos valores para realizar o que recomenda a primeira etapa, assim temos:

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores

Tempo (min)	Velocidade (passos/min)
25	54
X	45

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 56)

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Para verificar qual a relação proporcional ocorre entre as grandezas, faz-se a seguinte pergunta: ao aumentar o valor da grandeza tempo o valor da grandeza velocidade aumenta ou diminui? Certamente, quando aumentamos o valor da grandeza tempo, o valor da grandeza velocidade tende a diminuir, na mesma proporção. Isso caracteriza que as grandezas 'tempo' e 'velocidade' são do tipo inversamente proporcionais.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Como no quebra-cabeça mencionado anteriormente, precisamos partir do valor 54 para obter o valor 45, correspondentes à grandeza velocidade, por meio das operações aritméticas da divisão e multiplicação. Dessa forma temos:

Velocidade → partir de 54 para obter 45

$$54 \div 6 \times 5 = 45.$$

Tempo → partir de 25 para obter x

$$25 \times 6 \div 5 = x \rightarrow x = 30.$$

Aqui cabe a pergunta: como o autor chegou aos valores 5 e 6, utilizados na aplicação do método Duplex?

Em nossa análise, foi possível observar que os números utilizados no método são os termos da fração irredutível dos valores da grandeza velocidade, quando simplificados ao máximo. Ver simplificação abaixo.

$$\frac{54 : 9}{45 : 9} = \frac{6}{5}.$$

Dessa forma, os valores 5 e 6 são combinados com as operações de divisão e multiplicação, de maneira que a partir do valor de uma grandeza possamos obter o outro valor dessa grandeza. O mesmo raciocínio é realizado para encontrar o valor de x da outra grandeza, uma vez que as grandezas estão relacionadas proporcionalmente.

Como as frações são equivalentes, o resultado da primeira expressão também poderia ser obtido multiplicando 54 por 5 e o resultado dividido por 6.

Ainda sobre aplicação do método Duplex, cabe ressaltar que a ordem invertida das operações aritméticas na segunda expressão é porque as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, caso não fossem, as operações seguiriam a ordem da primeira expressão.

Para verificar o que foi dito no parágrafo anterior, aplicamos o método Duplex no exemplo a seguir que relacionou duas grandezas diretamente proporcionais.

Um motorista abasteceu o tanque de seu carro com 15 litros de gasolina e pagou pelo combustível o valor de R\$ 60,00. Caso ele tivesse abastecido o seu carro com apenas 10 litros de gasolina, quanto pagaria pelo combustível?

Resolução

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores.

Quantidade de gasolina (L)	Preço (R\$)
15	60
10	x

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Na situação apresentada, observamos que as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, porque quando aumentamos o valor do preço a pagar a quantidade de combustível também aumenta na mesma proporção.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Antes de executarmos o método em cada uma das grandezas, devemos encontrar os valores que serão utilizados nas operações aritméticas de multiplicação e divisão, na busca de solucionar o problema. Para tanto, simplificamos os valores da grandeza 'quantidade de gasolina', representados na razão abaixo:

$$\frac{15 : 5}{10 : 5} = \frac{3}{2}$$

De posse dos valores 2 e 3, podemos aplicar o método Duplex e encontrar o valor de x.

Quantidade de gasolina → sair do valor 15 para obter o valor 10.

$$15 \times 2 \div 3 = 10.$$

Preço → sair do valor 60 para obter o valor de x.

$$60 \times 2 \div 3 = x \rightarrow x = 40.$$

Assim, concluímos que o motorista pagaria R\$ 40,00 pelos 10 litros de gasolina.

O método Duplex também pode ser aplicado para resolver problemas de regra de três compostas, com é mostrado a seguir.

Exemplo 15

Andando a pé, 8 horas por dia, um rapaz conseguiu, em 10 dias, percorrer a distância de 320 km. Quantos quilômetros esse rapaz poderia percorrer, em 8 dias, na mesma velocidade, se andasse 12 horas por dia?¹⁴

Como o problema acima relaciona mais de duas grandezas, o método Duplex deve ser aplicado mais de uma vez, como mostra o trecho: “[...] no caso da regra de três composta, o método é utilizado tantas vezes quanto o número total de grandezas subtraindo-se um.” (FRAGOSO, 1999, p. 57-58) Neste caso, o método será aplicado duas vezes, visto que o problema proposto possui três grandezas. As etapas do método são apresentamos a seguir:

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores

Horas/dia	Dias	Distância em km
8	10	320
12	8	X

Fonte: BIANCHINI (2011, p. 222)

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Como estão relacionadas três grandezas no problema, a verificação das relações proporcionais ocorre de duas em duas. Dessa forma, vamos verificar a proporcionalidade das grandezas ‘hora/dia’ e ‘distância’, por meio da pergunta: *se aumentarmos o valor da distância o valor da grandeza horas/dia aumenta?* Certamente que sim, pois o valor da última grandeza também aumentará e na mesma proporção. Assim, as grandezas relacionadas são ditas diretamente proporcionais.

Agora, *se aumentarmos o valor da grandeza distância o valor da grandeza dias aumenta?* Com certeza também aumentará na mesma razão. Isso caracteriza que as grandezas relacionadas, distância e dias, são diretamente proporcionais.

De posse das análises das grandezas, aplicamos o método em cada uma das grandezas, como é mostrado a seguir.

14 [Questão do livro, p. 222] BIANCHINI, E. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Como foi dito anteriormente, o método supracitado será aplicado duas vezes, conforme a relação proporcional existente entre as grandezas. No entanto, é necessário, a princípio, encontrar os valores da razão irredutível de cada grandeza envolvida no problema, para, em seguida, aplicar o método. Dessa forma, temos:

$$\text{Razão dos valores da grandeza 'Horas/ dia'} \rightarrow \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Razão dos valores da grandeza 'Dias'} \rightarrow \frac{10 : 2}{8 : 2} = \frac{5}{4}.$$

1º caso: grandezas diretamente proporcionais

Horas/dias: sair do valor 8 para obter o valor 12.

$$8 \times 3 \div 2 = 12.$$

Distância: sair do valor 320 para obter o valor x_1 (resultado parcial).

$$320 \times 3 \div 2 = x_1 \rightarrow x_1 = 480.$$

2º caso: grandezas diretamente proporcionais

Dias: sair do valor 10 para obter o valor 8.

$$10 \times 4 \div 5 = 8.$$

Distância: sair do valor $x_1 = 480$ para obter o valor x (resultado final).

$$480 \times 4 \div 5 = x \rightarrow x = 384.$$

De posse do resultado, é possível concluir que o rapaz percorreu 384 km nas condições apresentadas.

Em nossa análise, os exemplos aqui apresentados reforçam a eficácia do método Duplex para resolver problemas de regras de três de maneira elementar, visto que tal método exige apenas conhecimentos básicos de Matemática sobre simplificação de fração, fração equivalente, operações de multiplicação e divisão, além dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, indispensáveis para o uso da regra de três. Apesar da trivialidade do método, presumimos que o uso de tal proposta seja pouca utilizada nas aulas de Matemática, como uma das estratégias para resolver problemas que relacionam grandezas proporcionais, uma vez que os textos dos livros didáticos de matemática não apresentam o método Duplex como uma alternativa a ser utilizada em contextos com a proporcionalidade simples e composta.

De posse dessa constatação, é necessário que busquemos outras formas de ensino para os conteúdos de Matemática, dentro das capacidades cognitivas dos discentes, de tal sorte, a municiar nossos alunos com possibilidades que venham subsidiar o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Pensando nisso, apresentamos a seguir outra possibilidade de resolver problemas com grandezas proporcionais, chamado de método de redução à unidade.

3.5.5. MÉTODO DE REDUÇÃO À UNIDADE

O método de redução à unidade foi usado para o ensino na década de 40, assim como o método das proporções. Atualmente, entretanto, esse método deixou de ser utilizado nas aulas de matemática sem uma justificativa plausível (FRAGOSO, 1999, p. 66).

O referido método não recorre ao modelo da proporção e nem da equação do 1º grau. A solução do problema é encontrada mediante uma análise proporcional das grandezas, em que essas são relacionadas entre si utilizando as operações aritméticas de multiplicação e divisão.

[...] um método em um estilo de pensamento que não depende das proporções e nem das equações, são da análise para encontrar a solução sem ter que depender de recordar de regras mais ou menos artificiais. Uma das formas desse método analítico será conhecida pelo nome de método de redução à unidade. (GOMEZ, 2006, p. 59 apud GUERRA; SILVA, 2014, p.223)

Ainda com a intenção de compreender a funcionalidade do método de redução à unidade, recorreremos ao dicionário Oxford de Matemática Essencial, que apresenta a seguinte entendimento sobre esse método:

Esse método pode ser usado quando a relação entre duas quantidades é fixa, o valor de uma terceira quantidade é dado, e o valor da quarta quantidade tem de ser encontrado tendo a mesma relação com o terceiro que os do primeiro par têm entre si. *O método todo se baseia em transformar um dos valores do primeiro par de quantidades em valor unitário.* (TAPSON, 2012, p. 162, grifo do autor)

Em linhas gerais, o método de redução à unidade tem sua funcionalidade garantida na definição de proporcionalidade (simples e composta), e o valor da variável independente sempre é reduzido à unidade, e, nesta condição, o valor da variável dependente representa a constante de proporcionalidade. Cabe ressaltar,

todavia, que esse método não se preocupa em destacar a constante k , como acontecia no método algébrico, apresentado anteriormente.

Para Lima et al. (2013, p. 15) o método de redução à unidade é metodologicamente adequado aos problemas de regra de três composta, pois reduz esses tipos de problema a problemas de regra de três simples.

Com relação à funcionalidade do método de redução à unidade, vamos resolver o exemplo adiante extraído da obra de Fragoso (1999, p. 67), para mostrarmos o passo a passo do método na resolução de um problema de regra de três simples.

Exemplo 16

Uma pessoa gasta 25 minutos para percorrer uma certa distância, caminhando 54 passos por minuto. Quanto tempo levaria para vencer a mesma distância se caminhar 45 passos por minuto?

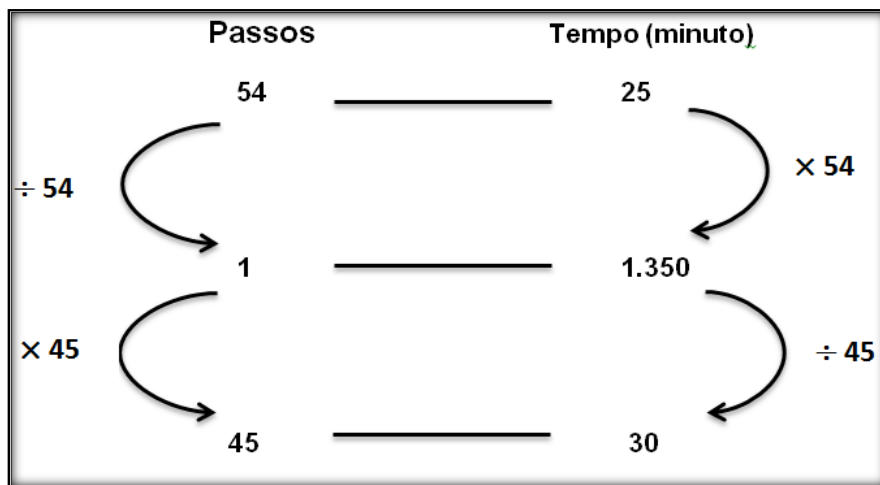
Resolução

Em primeiro lugar, precisamos verificar qual a relação proporcional existente entre as grandezas do problema, tempo e passos por minuto, para em seguida aplicarmos o método de redução à unidade. Nesse sentido, se o tempo gasto para completar o percurso aumentar, significa que a quantidade de passos por minuto foi reduzida na mesma proporção que aumentou a primeira grandeza; e se o tempo do percurso for reduzido, implica dizermos que a quantidade de passos por minuto aumentou na mesma proporção que diminuiu a primeira. Logo, com base nessa análise, podemos pressupor que as grandezas do problema são inversamente proporcionais.

De posse da relação proporcional das grandezas, vamos organizar essas quantidades no modelo do método de redução à unidade de Lima et al. (2013, p. 18) com as devidas adaptações dos valores do problema proposto.

O esquema abaixo traz a execução do método de redução à unidade e também a solução encontrada para o problema. Nesse método a grandeza independente, 'Passos', é sempre reduzida à unidade para, em seguida, ser multiplicada com o valor pretendido do problema. Enquanto que a grandeza dependente, 'Tempo', será multiplicada (ou dividida conforme à relação proporcional) pelo mesmo valor da primeira grandeza, e, em seguida, é dividida pelo valor pretendido da grandeza independente para encontrar a solução do problema.

Esquema 2 – Método de redução à unidade



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 18)

Logo, a pessoa gasta 30 minutos para percorrer a distância pretendida, executando 45 passos por minuto.

Ainda com relação à execução do método de redução à unidade no exemplo anterior, cabe um adendo sobre a utilização das operações aritméticas caso a relação proporcional entre as grandezas fosse direta; neste contexto, as operações aritméticas empregadas seriam as mesmas nos dois momentos da execução do método e não distintas como ocorreu no exemplo posto, ou seja, primeiramente utilizamos a divisão e, em seguida, a multiplicação para encontrar a solução do problema.

Doravante, vamos aplicar o método de redução à unidade no exemplo adiante, que já foi apresentado anteriormente, onde estão relacionadas mais de duas grandezas, com isso pretendemos mostrar a eficácia desse método também na resolução de problemas de regra de três composta.

Exemplo 17

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Em primeiro lugar, precisamos identificar qual a grandeza dependente e, em seguida, verificar a relação proporcional existente entre essa e as demais grandezas independentes. Desse modo, temos que a quantidade de 'Letras' é a grandeza dependente, pois contém o termo desconhecido, e se relaciona com as demais, 'página' e 'linhas', de maneira inversamente proporcional. Assim, a situação posta

pode ser modelada conforme a definição de *grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras* mostrada anteriormente. Nesse sentido, apresentamos a seguir o modelo matemático e as representações de cada grandeza do problema em questão.

$L = \frac{k}{p \cdot \ell} \rightarrow L = k \cdot \left(\frac{1}{p \cdot \ell} \right)$, sendo L diretamente proporcional a $\left(\frac{1}{p \cdot \ell} \right)$, e ' L ' representa a grandeza 'Letras', p e ℓ representam, respectivamente, as grandezas 'página' e 'linhas'.

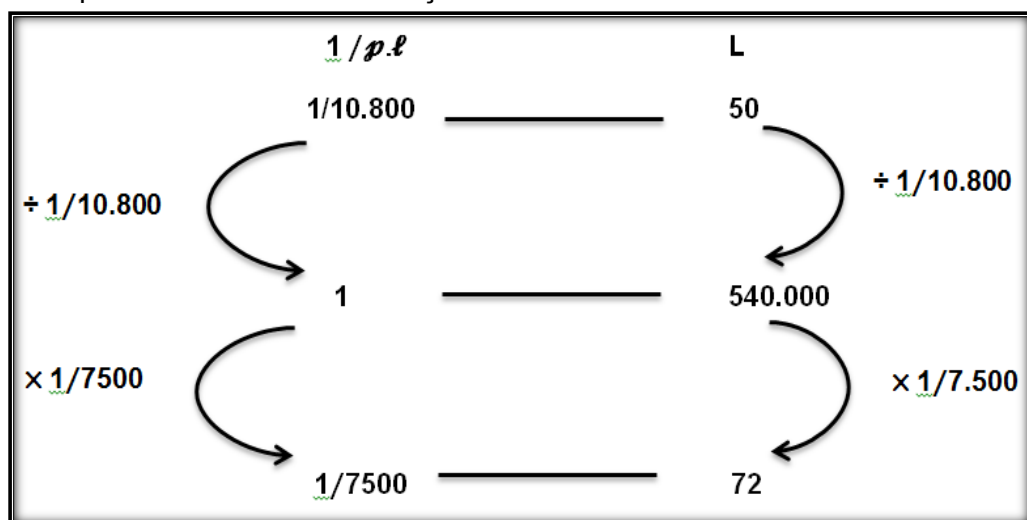
De posse dos dados do problema, podemos afirmar que quando a grandeza dependente assume o valor $L = 50$, a razão $\left(\frac{1}{p \cdot \ell} \right)$ assume o valor

$\left(\frac{1}{p \cdot \ell} \right) = \frac{1}{300 \times 36} = \frac{1}{10800}$. Seguindo esse raciocínio, queremos determinar qual o

valor de ' L ' quando o valor de $\left(\frac{1}{p \cdot \ell} \right) = \frac{1}{250 \times 30} = \frac{1}{7500}$.

De acordo com o modelo de Lima et al. (2013) para o método de redução à unidade à unidade que simplifica os problemas de regra de três composta em problemas de regra de três simples, já que por definição a grandeza dependente é diretamente proporcional ao valor inverso da grandeza independente, o problema proposto tem a seguinte resolução:

Esquema 3 – Método de redução à unidade



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 21)

Assim, o livro reimpresso tem 72 letras em cada linha, sendo que cada página possui 30 linhas.

Com base no esquema acima sobre o método de redução à unidade proposto por Lima et al. (2013, p. 21), cabe ressaltar que esses autores entendem que a regra de três composta mista ou com grandezas apenas inversamente proporcionais pode ser resolvida como uma regra de três simples e direta; já que tal fato é garantido na definição de proporcionalidade, uma vez que a grandeza dependente é sempre diretamente proporcional à razão das grandezas independentes (ou ao valor inverso das grandezas independentes). Essa compreensão confere ao método de redução à unidade ser considerado uma ferramenta matemática viável, prática e exequível metodologicamente para o ensino de matemática, já que os problemas de regra de três composta são tratados como problemas de regra de três simples, com isso, pressupomos que as dificuldades dos alunos com relação à aplicação do algoritmo da regra em contextos com mais de três grandezas podem ser minimizadas ou erradicadas, e, assim, facilitar a compreensão e o aprendizado desse conhecimento, que, na maioria dos casos, ocorrem de maneira superficial, levando o aluno a aplicar a regra de forma mecânica e sem nenhum sentido em sua funcionalidade.

Ainda que o método de redução à unidade se mostre um recurso metodológico eficaz no ensino das regras de três, como os demais métodos, é necessário, entretanto, que os conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais estejam consolidados de fato antes da aplicação de qualquer um dos métodos mostrados anteriormente, caso contrário o ensino da regra de três não alcançará o seu objetivo fundamental, que é servir de ferramenta matemática para resolver problemas com grandezas proporcionais.

Diante das colocações nesta seção sobre os métodos de resolução da regra de três, entendemos que esses métodos podem funcionar como caminhos metodológicos para o ensino e aprendizado do conteúdo regra de três, tão necessário como estratégia para a resolução de problemas com grandezas proporcionais em contextos escolar e extraescolar, haja vista que cada método apresenta um modo próprio de resolver a regra, o que deve ser utilizado em favor do ensino de matemática, escolhendo dentre os modelos apresentados àquele que melhor se adequa a facilitar a compreensão dos alunos no ensino da regra de três, que, quase sempre, recorre a um único método de ensino nas aulas de matemática,

aumentando, assim, as chances dos alunos não aprenderem esse conteúdo, da mesma forma se executa um ensino reducionista e limitado, pois nega a possibilidade dos discentes conhecerem outras maneiras de resolver a regra de três e de ampliar seus horizontes de conhecimento. De posse do apresentado sobre a importância da regra de três no contexto histórico, social, matemático e do ensino, trazemos também os documentos oficiais da educação brasileira que abordam o ensino da regra de três ao nível fundamental da educação básica.

4. ASPECTOS CURRICULARES DA REGRA DE TRÊS

Nesta seção fazemos um apanhado do assunto regra de três nos documentos oficiais da educação brasileira ao nível de educação básica. Para tanto, recorreremos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)¹⁵ de Matemática do ensino fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (2018)¹⁶, as Matrizes de Referência do Sistema Nacional da Avaliação da Educação Básica (2008)¹⁷ e a matriz de matemática do Sistema Paraense de Avaliação Educacional (2016)¹⁸.

Nos PCN (1998) de Matemática do ensino fundamental o assunto regra de três aparece no quarto ciclo na parte de números e operações como uma das estratégias de resolução de problemas com grandezas proporcionais, como relata o trecho: “Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.” (BRASIL, 1998, p. 87) Ainda nesse pensar, a regra de três é mencionada nos critérios de avaliação para o quarto ciclo: “[...] o professor verifica se o aluno é capaz de resolver situações-problema (escalas, porcentagem e juros simples) que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias como as regras de três [...]” (Ibid., p. 92)

Na BNCC (2018) foi possível observar em nossa análise que o uso da regra de três não é recomendado nos textos desse documento. Isso pode ser comprovado na unidade temática Álgebra quando se trata da resolução de

15 PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

16 BNCC: Base Nacional Comum Curricular

17 SAEB: Matrizes de Referência do Sistema Nacional da Avaliação da Educação Básica

18 SisPAE: Sistema Paraense de Avaliação Educacional

problemas envolvendo a interdependência de grandezas diretamente proporcionais, como afirma o trecho: “[...] A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a **variação proporcional direta** entre duas grandezas (**sem utilizar a regra de três**) [...]” (BRASIL, 2018, p. 268, grifo nosso) A mesma recomendação pode ser vista nos Objetos de Conhecimento das Unidades Temáticas Números do 6º ano do ensino fundamental ao se referir ao cálculo de porcentagens, como é mencionado no trecho: “Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da **regra de três**.” (BRASIL, 2018, p. 298, grifo nosso) Também o mesmo pensar pode ser visto nas Habilidades (EF06MA13), quando recomenda resolver e elaborar problemas de porcentagem por meio da proporcionalidade sem utilizar a regra de três, como mostra o excerto adiante:

Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (Ibid., p. 299, grifo do autor)

Em uma última análise, percebemos que apesar dos objetos de conhecimento para o 7º ano das Unidades Temáticas, na parte de Álgebra, sugerirem a abordagem de “Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.” (BRASIL, 2018, p. 304), as habilidades recomendadas para a resolução desses problemas não envolve a regra de três, mas sim o uso de equações, como mostra o trecho: “(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.” (Ibid., p. 305) Também no 8º ano do ensino fundamental nessa mesma unidade temática, Álgebra, um dos objetos de conhecimento se refere ao estudo da variação de grandezas direta e inversamente proporcionais e não proporcionais. Entretanto, as habilidades a serem utilizadas em contextos que envolvam esse objeto de conhecimento matemático não se referem às regras de três, mas sim as sentenças algébricas e a estratégias diversas, sem especificar que estratégias são essas, como mostra o excerto a seguir.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (BRASIL, 2018, p. 311)

Como podemos observar no trecho citado do documento, a regra de três não é recomendada como estratégia de ensino, ou não fica claro o seu uso, para resolver e elaborar problemas com variação proporcional direta e/ou inversa, pelo contrário, sugere apenas a utilização de sentenças algébricas e variadas estratégias. Sobre esta última, seria aconselhável que BNCC (2018) deixasse claro que tipos de estratégias os alunos deveriam fomentar, pois, a nosso ver, não é tão simples criar modelos matemáticos que retratem uma determinada situação, sobretudo, quando esta relaciona grandezas não proporcionais, e, ainda, quando há mais de duas grandezas envolvidas. Nesse pensar, pressupomos que a regra de três exerce um papel fundamental como estratégia para resolver problemas com variação proporcional, uma vez que seu algoritmo está embasado na propriedade da proporção simples e na propriedade das grandezas compostas. Além do mais, oportuniza os alunos a utilizarem mais de um método de resolução, os quais serão apresentados neste trabalho, inclusive a regra pode ajudar a identificar as situações não proporcionais, pois quando a mesma não é aplicável significa que não há a relação proporcional entre as quantidades. É claro que para alcançar esse nível de análise, é necessário que aluno tenha a plena compreensão dos conceitos sobre as relações proporcionais (direta e inversa).

A pouca relevância dada à regra de três nos textos da BNCC (2018) contrasta com a abordagem das Matrizes de referência do Saeb (2008). Estas disponibilizam o descrito (D29) que pretende avaliar as habilidades dos alunos em “Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.” (BRASIL, 2008, p. 153) Para esse descritor, a estratégia da regra de três simples é, geralmente, a mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas proposto. (BRASIL, 2008, p. 185)

A recomendação das Matrizes do Saeb com relação a melhorar a habilidade citada no parágrafo anterior recai sobre a ênfase a ser dada na compreensão das relações proporcionais entre as grandezas envolvidas no problema, recomendação essa que acreditamos ser o entrave para o ensino e aprendizagem das regras de três.

A montagem da regra de três simples é rapidamente assimilada pelos alunos. A ênfase deve ser dada no reconhecimento de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Diversos exemplos do cotidiano dos alunos devem ser explorados para verificar se as duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais. (BRASIL, 2008, p. 186)

Com relação aos exemplos a serem utilizados do cotidiano dos alunos que tratem da relação proporcional (direta e inversa) entre duas grandezas, sugerimos que sejam exploradas situações ligadas ao comércio, que relacionam quantidade de um produto com o seu preço, pois tais situações estão, quase sempre, presentes nas atividades diárias dos alunos, isso para as grandezas diretamente proporcionais. Já para as grandezas inversamente proporcionais, podem ser exploradas as situações que relacionam velocidade de um veículo com o tempo de chega num destino, quantidade de operários o tempo de construção de uma obra, capacidade de um recipiente com a quantidade deles utilizada para armazenar determinado líquido, entre outras.

Quanto a utilização da regra de três na matriz de matemática do SisPAE (2016) do ensino fundamental, observamos que não está explícita entre as habilidades arroladas nessa matriz. Entretanto, em uma das habilidades, MPA 49, exigidas no tema grandezas e medidas, possibilita uma interpretação quanto ao uso da regra, haja vista que essa habilidade requer que o aluno consiga resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade entre duas grandezas. Nesse caso, a regra de três simples pode ser ensinada como uma estratégia que subsidie os alunos a adquirirem a habilidade mencionada.

Diante das posições dos documentos oficiais citadas no decorrer desta seção, percebemos que a regra de três ora ocupa seu lugar no rol dos conteúdos matemáticos a serem ensinados ora não. Talvez, por se tratar de uma regra o seu uso seja visto por alguns estudiosos com restrições para o ensino, já que, em muitas situações, a regra é utilizada de maneira estanque com pouca ou nenhuma compreensão do seu algoritmo pelo aluno na resolução de questões com proporcionalidade.

Todavia, não devemos esquecer que a regra de três tem seu valor histórico e social, pois o uso dessa técnica foi de grande valia nas práticas comerciais de épocas passadas, e que por isso, segundo a história, teve seu lugar garantido entre os conteúdos de Matemática que deveriam ser ensinados nas escolas.

[...] o ensino com ênfase nas práticas da regra de três não seria casual porque nele se reconheceria objetos culturais que teriam uma história que revelaria a regra de três, por exemplo, como ferramenta útil para o enfrentamento de problemas que se tornaram rotineiros e tradicionais no dia a dia, ou ainda, como partícipe da história da construção do conhecimento matemático científico e também do ensino da matemática, com relevância particular como passagem da aritmética à álgebra. (GUERRA; SILVA, 2014, p. 202)

Desse modo, acreditamos a regra de três é uma forma eficiente que deve ser utilizada pelo aluno na resolução de problemas que tratam de relações proporcionais (direta e inversa). No entanto, é imperativo que o seu ensino nas escolas ocorra de maneira eficiente, que leve o aluno a perceber e compreender as relações proporcionais existentes entre as grandezas do problema, pois só assim a regra de três tem relevância para o ensino de matemática, como uma das estratégias a ser empregada, de forma consciente, na resolução de problemas que envolvam a proporcionalidade, pois, assim, a regra não se configura como um fazer mecânico e sem sentido para o aluno.

A respeito de como a regra de três é ensinada nas aulas de matemática no 7º ano do ensino fundamental, procuramos estudos científicos que fornecem informações sobre como o ensino e aprendizado desse conteúdo estava ocorrendo entre os alunos. A respeito disso, apresentamos na seção seguinte às pesquisas que abordaram a regra de três como tema de investigação.

5. ESTUDOS SOBRE A REGRA DE TRÊS

Nesta seção apresentamos um levantamento bibliográfico de trabalhos científicos sobre o ensino de regra de três, com o propósito de apresentar as abordagens dos pesquisadores acerca do ensino desse conteúdo, uma vez que o levantamento da “literatura especializada, anotações, leituras e tratamento adequados dos textos selecionados são partes imprescindíveis para o trabalho acadêmico de qualidade [...]” (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 79); além do mais, esses estudos científicos serviram como parâmetros para a elaboração da nossa questão de pesquisa a respeito do ensino da regra de três.

As pesquisas foram feitas no Repositório de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em periódicos de revistas, capítulo de livros e em publicações de eventos científicos.

Para tanto, buscamos produções brasileiras dos últimos seis anos, entre 2008 a 2014, por meio das seguintes palavras-chave: ensino de regra de três, regra de três e proporcionalidade.

A sistematização dos estudos bibliográficos sobre a regra de três ocorreu em três categorias, a saber, Estudo Diagnóstico, Estudo Experimental e Estudo Teórico/Investigativo.

Na primeira categoria, Estudo Diagnóstico, busca-se investigar e analisar, por meio de instrumentos, os obstáculos que influenciam no aprendizado do aluno frente a um conteúdo matemático, em especial a regra de três, com o intuito de apontar encaminhamentos que subsidiem na melhoria da aprendizagem desse conteúdo. Já o Estudo Experimental é característico de pesquisas em que o fenômeno em estudo é submetido a uma experimentação e uma intervenção sistemática por parte do pesquisador, em que tais intervenções ocorrem por meio de atividades que subsidiem a apreensão, por parte do aluno, do conteúdo matemático, em particular, o conteúdo da regra de três. E no Estudo Teórico/Investigativo prevalece à investigação sobre estratégias e/ou métodos que viabilizem o ensino da Matemática, no nosso caso o ensino de regra de três.

A seguir trazemos um quadro com os estudos bibliográficos utilizados dispostos nas categorias mencionadas acima.

Quadro 2 – Estudos sobre o ensino de regra de três

(continua)

Categoria	Título	Local e data de publicação	Tipo de publicação
Estudo Diagnóstico	➤ Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três	Universidade Federal do Pará: Belém, 2012.	Dissertação
	➤ REGRAS DE TRÊS: prática escolar de modelagem matemática	Universidade Federal do Pará: Belém, 2011.	Dissertação
Estudo Experimental	➤ O ensino de matemática por atividades: experiência com regra de três	2014	Capítulo de livro
Estudo Teórico/Investigativo	➤ Pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas	Universidade Tuiuti do Paraná: Curitiba, 2008.	Dissertação
	➤ Raciocínio proporcional: estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul: Campo grande, 2010.	Dissertação

Quadro 2 – Estudos sobre o ensino de regra de três

(conclusão)

Categoria	Título	Local e data de publicação	Tipo de publicação
Estudo Teórico/Investigativo	➤ A regra de três nos currículos ao longo da história	I Simpósio Educação Matemática em Debate, 2014, Joinville-SC	Artigo
	➤ Modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação	Universidade Federal do Pará: Belém, 2013.	Dissertação

Fonte: Pesquisa bibliográfica

A seguir apresentamos os objetivos, a fundamentação teórica e os resultados de cada um dos estudos bibliográficos citados no Quadro 2, que auxiliaram na construção da nossa pesquisa sobre o ensino de regra de três, e da mesma forma serviram de aporte teórico na análise dos resultados alcançados com este estudo.

5.1. ESTUDO DIAGNÓSTICO

O trabalho de Meira (2012) teve como objetivo a análise dos procedimentos realizados pelos alunos do ensino fundamental na interpretação e na utilização de regras matemáticas ao resolverem os problemas de regra de três simples e composta e o processo de tratamento da linguagem, em particular, à linguagem matemática, com o intuito de responder a questão norteadora da pesquisa: “Que regras matemáticas os alunos aplicam na resolução de problemas de regra de três?”

A pesquisa de Meira (2012) teve como aporte teórico a Virada Linguística e surgimento da nova concepção de filosofia, a Filosofia da Linguagem, de Gustav Bergmann e também a teoria de Múltiplos Jogos de Linguagem de Wittgenstein.

A referida pesquisa iniciou-se em outubro de 2010, em uma escola de nível Federal da região metropolitana de Belém. Teve um caráter qualitativo e participaram da pesquisa 32 alunos do 7º ano do ensino fundamental e o professor da turma.

Desse total de alunos, a autora selecionou de maneira aleatória 15 alunos para uma entrevista que contou com a participação do docente, na intenção de observar as relações que ocorreram no estudo da regra de três no ambiente de sala de aula.

De acordo com a autora, o levantamento do material empírico para análise ocorreu por meio de testes com regra de três, que foram apresentados aos

alunos através de três cenas. A primeira cena ocorreu com a aplicação dos testes sobre regra de três simples, após o professor ministrar o referido conteúdo para os alunos. A segunda cena aconteceu como a anterior, isto é, primeiro a aula e depois o teste com problemas de regra de três composta. A última cena apresentou um teste com problemas de regra de três simples e regra de três composta, com o propósito de verificar se os alunos conseguiriam identificar e resolver os problemas de cada tipo.

Com os dados dos instrumentos de pesquisas, que foram os testes e as duas entrevistas, uma com os alunos e outra com professor, a autora sistematizou sua análise em três seções, a saber, confusão/interpretação equivocada de regras na Matemática; seguimento de algoritmo e interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três, como forma de viabilizar suas apreciações por meio das ideias wittgensteinianas com relação ao uso de regra pelos alunos e também da Matemática em geral.

Para Meira (2012) a pesquisa mostrou que na aprendizagem da Matemática a aplicação de regras pelos alunos ocorre de maneira mecânica, quase sempre sem sentido. Da mesma forma, aconteceu com a utilização dos algoritmos na resolução dos problemas analisados.

Com relação a isso a autora, afirmou que

O amadurecimento dos alunos em relação à regra na matemática, possivelmente acontece quando esses alunos apresentam uma vivência de uso das técnicas de resoluções que contribuem para a certeza do domínio sobre a sua aplicação correta. Desse modo, o professor estará promovendo sua aprendizagem, pois essas ações implicam que os alunos construam significado sobre os conceitos matemáticos. (IBID., p.85)

Por fim, a autora reconhece a importância da regra de três como ferramenta no enfrentamento de situações-problema, além de possibilitar ao aluno a compreensão de modelos e conceitos matemáticos. Assim, uma vez consolidada a teoria e regra na utilização do algoritmo a aprendizagem ocorre de forma significativa.

O trabalho de Silva (2011) teve como objetivo mostrar caminhos que levassem a compreensão do ensino da regra de três de maneira crítica, revelando que os modelos matemáticos são resultados de intenções e interesses de sujeitos culturais em atividades com matemática, por isso, tais modelos estão subordinados

a algo que vai além da matemática. O trabalho desse autor trouxe também uma discussão sobre a incerteza na aplicação da proporcionalidade ao resolver problemas de regra de três. Aliado a esse objetivo o autor apresentou a questão norteadora da pesquisa: *“como podemos pensar a modelagem matemática no âmbito do ensino da matemática escolar para evidenciar, ainda que parcialmente, o necessário algo mais, em geral, não evidente no fazer matemático escolar?”*

Quanto aos sujeitos e o lócus da pesquisa, Silva (2011) afirmou que a mesma ocorreu com um grupo de trinta professores que participaram de um curso de formação continuada para professores das séries finais do ensino fundamental implementado pelo IEMCI/UFPA de Rondon do Pará, sendo que alguns desses professores eram oriundos de outros municípios do Estado como Bom Jesus do Tocantins e Abel Figueiredo.

A formação desses professores, de acordo com o autor, aconteceu por meio de encontros presenciais e a distância. No que tange o encontro presencial, os professores cursistas foram submetidos à resolução de uma lista de questões em grupos para, em seguida, socializarem as respostas construídas.

De acordo com Silva (2011) as questões da lista tratavam sobre os assuntos: operações com fração, expressões algébricas e matemática financeira. Aqui cabe relatar, que as questões sobre expressão algébrica foram resolvidas pelos professores cursistas como questões de regra de três simples e composta.

No momento da apresentação das repostas das expressões algébricas, os professores em formação, segundo o autor, assumiam que tais questões eram de regra de três, sem fazerem uma análise prévia da situação, pois, para o autor, o enunciado da questão levava o professor assumir que se tratava de regra de três. Então, aplicava-se o algoritmo da regra de maneira mecânica, tanto para a regra de três simples como para a regra de três composta.

De posse das resoluções dos professores, Silva (2011) afirmou que esses docentes resolveram as questões assumidas como de regra de três sempre do mesmo jeito e por um único método, o das setas. Já a respeito da proporcionalidade, o autor relatou que momento algum as falas e os gestos dos professores cursistas indicaram que havia uma teoria que respaldasse o modo de fazer deles, tampouco, a equação que resultou na solução da questão. Sobre esse fazer dos professores, o autor o considera como caráter técnico, reduzindo a regra de três a problemas característicos, que é aplicada sem razão ou justificativa plausível.

Ainda sobre as resoluções dos professores cursistas, Silva (2011) relatou que entre as questões de expressão algébrica havia uma que não relacionava duas grandezas de maneira proporcional, mas todos os professores resolveram essa questão como se fosse de regra de três, sem fazerem uma análise prévia das quantidades envolvidas para saberem se estavam relacionadas proporcionalmente ou não, ao invés disso, se basearam unicamente no enunciado da questão para assumirem como regra de três e aplicarem a técnica.

Para Silva (2011) o ensino da regra de três não oportuniza a conscientização de que os problemas resolvidos pela regra são de proporcionalidade e também não explica a natureza das relações e nem o modelo matemático resultante, uma vez que a técnica possuiu seu modo próprio de fazer e pensar, bastando apenas uma análise breve das grandezas para saber se são direta ou inversa e, em seguida, aplica-se a equação. Desse modo a ideia de proporcionalidade não fica evidente no processo de resolução do problema, como ocorreu no fazer dos professores cursistas.

Quanto à relação de proporcionalidade no fazer da regra de três, Silva (2011) recorreu à história da matemática para afirmar que a regra de três, em seu percurso histórico, não era utilizada inicialmente coadunada com a proporcionalidade, e qual tal relação só ocorreu, posteriormente, para justificar o fazer da regra no âmbito da matemática. Para o autor, o modo como a regra é apresentada nas escolas, isto é, sem uma discussão e análise da proporcionalidade imersa na situação, é resultado do fazer cultural e histórico do homem diante de situações características consideradas como de regra de três.

Por fim o autor considera que o questionamento que norteou a pesquisa foi respondido parcialmente, haja vista que a regra de três pode ser entendida como prática de modelagem matemática e desse modo pode requerer a compreensão da proporcionalidade não por meio da verificação empírica, mas como ideia presente no contexto analisado, como acontece em geometria com a semelhança.

5.2. ESTUDO EXPERIMENTAL

O trabalho de Sá e Costa (2014) teve como objetivo analisar a viabilidade do ensino de regra de três por meio de atividades, que constavam das seguintes etapas: primeira avaliação diagnóstica, construção das atividades, aplicação das atividades, segunda avaliação diagnóstica e análise dos resultados obtidos.

A pesquisa dos autores foi realizada com uma amostra de 30 alunos da 6ª série do ensino fundamental de uma escola municipal do bairro do Guamá em Belém-PA. Esses alunos responderam um questionário, que revelou, entre outras coisas, que 95% da turma não gostavam de matemática.

Na avaliação diagnóstica de Sá e Costa (2014), foi aplicado um pré-teste com dez questões, sem que os alunos soubessem que tratavam de questões sobre regra de três simples e composta. Esse pré-teste revelou para os autores, que a maioria dos alunos apresentava muita dificuldade em resolver questões acerca do assunto regra de três.

Diante desse cenário, os autores desenvolveram atividades de ensino e de fixação, como sendo a segunda etapa da pesquisa. Tais atividades foram: uma atividade para apresentar o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais, o jogo do galo, uma atividade com problemas de regra de três e o jogo pif-paf das regras de três.

Após a execução dessas atividades, com o propósito de construir e fixar os conhecimentos de grandezas proporcionais e regra de três, os autores aplicaram um pós-testes idêntico ao primeiro, para avaliar a eficiência das atividades de ensino junto aos alunos participantes, o que gerou os resultados apresentados pelos autores no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Comparativo do desempenho nos pré e pós-testes

Questões	Acerto		Erro		Em branco
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste
A	15	24	13	5	1
B	11	23	17	6	1
C	1	22	27	7	1
D	1	23	27	6	1
E	0	0	28	29	1
F	1	17	27	12	1
G	0	0	28	29	1
H	3	17	25	12	1
I	4	17	24	12	1
J	1	20	27	9	1

Fonte: SÁ; COSTA (2014, p. 111)

De posse dos resultados, as análises dos autores revelaram que:

- O número de acertos aumentou significativamente na maioria das questões;

- Ocorreu redução significativa do número de erros na maioria das questões;
- O número de questões em branco foi reduzido à metade em relação ao pré-teste;
- Em relação às questões E e G, os erros aumentaram em um ponto após a aplicação das atividades, o que pode ter ocorrido em consequência de ter havido mais de um discente que tentou resolvê-las. (SÁ; COSTA, 2014, p. 111)

Em suas considerações, os autores afirmam que o ensino de matemática por atividades é uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, todavia essa forma de ensinar ainda não faz parte da realidade da sala de aula das escolas.

Para Sá e Costa (2014) a pesquisa mostrou que o ensino da regra de três é viável através do uso de atividades de ensino concomitante com o uso de jogos, pois estes auxiliaram os alunos a superarem as dificuldades na identificação das grandezas com relação à proporcionalidade, ou seja, se as mesmas são direta ou inversamente proporcionais. O que para os autores é a maior causa de fracasso frente aos problemas de regra de três.

5.3. ESTUDO TEÓRICO/INVESTIGATIVO

A pesquisa de Silva (2008) teve por objetivo verificar se as estratégias utilizadas pelos alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, proporção simples, indicam a compreensão do conceito de proporcionalidade, com o intuito de responder a problemática de pesquisa: “Na resolução de problemas de proporção, os alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental demonstram a compreensão deste conteúdo por meio das estratégias que utilizam?”.

A motivação da pesquisa pela autora supracitada partiu da premissa que o estudo da proporcionalidade tem sua relevância por ser uma interface entre os vários tópicos importantes da Matemática e de outras disciplinas curriculares.

O trabalho de Silva (2008) esteve ancorado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Essa pesquisa teve um caráter qualitativo e foi direcionada aos alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental com faixa etária entre 11 a 15 anos de uma escola pública estadual do município de Curitiba no Estado do Paraná.

A pesquisa de Silva (2008) ocorreu em dois momentos. O primeiro tratou da aplicação de uma investigação escrita (utilização de problemas), onde

participaram 72 alunos, sendo 42 da 6ª série e 30 da 8ª série do ensino fundamental, ocorrido em outubro de 2007. O segundo momento, ocorreu em novembro do mesmo ano, consistiu de uma entrevista com 10 alunos de cada uma das séries supracitadas, escolhidos ao acaso do total de alunos que participaram do primeiro momento.

Os problemas que foram utilizados para a investigação escrita estavam distribuídos em 4 tipos, a saber: **1º problema:** Problema de Proporção Direta Unitária Unidade Diferente (multiplicação); **2º problema:** Problema de Proporção Direta Múltipla Unidade Diferente (divisão cotitiva/partitiva); **3º problema:** Problema de Proporção Direta Não-Múltipla Unidade Diferente; **4º problema:** Problema de Proporção Direta Múltipla e Não-Múltipla, Mesma Unidade. Este por sua vez, estava dividido em três subseções:

- ✓ 4.1 A.B. – proporção direta múltipla, quantidades discretas e continuas.
- ✓ 4.2 A.B. – proporção direta múltipla e não-múltipla, quantidades discretas e continuas.
- ✓ 4.2 C. – proporção direta não-múltipla, quantidades continuas.

Além disso, Silva (2008) caracterizou cinco categorias de resolução de problemas de proporção, com base na observação e comprovação na literatura consultada. Essas categorias foram: **1) Operação Aritmética (multiplicação); 2) Operação Aritmética (Divisão cotitiva/partitiva); 3) Adição Sucessiva de Parcelas; 4) Regra de Três; 5) Fator Proporção.** Tais categorias serviram como parâmetros para analisar as estratégias utilizadas pelos dos alunos na resolução dos problemas citados no parágrafo anterior.

Os resultados da eficácia das estratégias utilizadas pelos alunos das séries consultadas (6ª e 8ª séries) revelaram que na resolução do problema 1, os alunos da 6ª série optaram pela categoria 1, onde alcançaram um percentual de acerto integral de 76,3% (29) e um percentual de acertos parciais de 21% (8). Com relação aos alunos da 8ª série, estes escolheram também a categoria 1 e obtiveram um percentual de acerto integral de 86,3% (19), contra um desempenho parcial de 13,6% (3) na resolução do problema 1.

A autora ressaltou ainda que apenas um aluno da 6ª série optou pela categoria 4 (regra de três), porém não obteve sucesso ao utilizar a mesma na resolução do problema. Já um grupo de três alunos da 8ª série utilizou uma estratégia não mencionada nas categorias acima, todavia os alunos resolveram o

problema com eficácia de 100%. Além desses, houve ainda dois alunos da 6ª série e quatro da 8ª série que utilizaram estratégias não identificadas e não conseguiram resolver o problema proposto.

Silva (2008) salientou que ao analisar o êxito dos alunos nos dois grupos pesquisados, foi possível observar que tantos os alunos da 6ª série como os alunos da 8ª série lançaram mão de várias estratégias na resolução dos problemas 2, 3 e 4.2. A.B., enquanto que frente aos problemas 1 e 1.4 A.B. os dois grupos utilizaram uma única estratégia. No caso do problema 4.2 C, prevaleceu o uso de estratégia não prevista, onde utilizaram de estimativas e outras estratégias não registradas na busca da solução do problema.

Ainda sobre o êxito das estratégias utilizadas pelos alunos, a autora observou que os dois grupos pesquisados tiveram sucesso no uso das categorias 1 e 3. Além dessas, a autora relatou que os alunos da 8ª série tiveram êxito integral na utilização da regra de três (categoria 4), todavia os alunos da 6ª série não utilizaram de forma expressiva essa categoria.

Em última análise, a autora afirmou que:

A análise dos resultados mostrou que houve tentativa dos alunos em buscar estratégias variadas para resolver os problemas. A preferência pelos alunos recaiu sobre a utilização de estratégias próprias, provenientes de conhecimentos acumulados de séries anteriores, embora muitas vezes tolhidos pelas limitações na aritmética necessária para a solução dos problemas, [...] ou ainda, por dificuldades conceituais e algorítmicas. (SILVA, 2008, p. 183)

Com relação às estratégias provenientes de conhecimentos anteriores, a autora relatou que os alunos da 8ª série utilizaram, geralmente, a regra de três na resolução dos problemas propostos, todavia de maneira mecânica.

A respeito disso, Silva (2008) defendeu que o ensino de proporção não deve está atrelado somente ao uso do algoritmo da regra de três. É necessário fazer o aluno pensar modos alternativos de resolução de um problema, amparados em seus conhecimentos prévios e em outros conhecimentos que poderá construir.

Por fim, Silva (2008) acrescentou que o ensino de proporção deve enfatizar o raciocínio proporcional, de forma que o aluno fomente estratégias amparadas em seus conhecimentos adquiridos por meio de situações de sua realidade, pois assim o aluno terá a possibilidade de estabelecer relações entre o que é ensinado na escolar e a realidade em que vive.

O trabalho de Gonçalves (2010) teve como objetivo identificar e analisar as principais estratégias sobre o raciocínio proporcional fomentada por alunos do 7º ano do ensino fundamental na resolução de problemas sobre proporções (direta e inversa) e problemas que não apresentavam relações proporcionais, tendo em vista uma abordagem por meio da oralidade. Para tanto, a autora buscou aporte teórico de sua pesquisa nas Situações Didáticas de Brousseau, e a metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática de Michele Artigue. A pesquisa contou com um grupo de 17 alunos voluntários que não haviam recebido instrução formal sobre proporcionalidade. A investigação desses alunos ocorreu no contraturno do horário regular das aulas.

Para colocar em prática o objetivo da pesquisa, Gonçalves (2010) elaborou cinco sessões com os alunos voluntários que duraram em média 50 minutos cada uma, no intuito de investigar as estratégias aplicadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos. Dessa forma, a 1ª sessão continha somente problemas com grandezas diretamente proporcionais. A 2ª e 3ª sessões apresentavam problemas com grandezas diretamente proporcionais e não proporcionais. Já a quarta sessão continha problemas com grandezas inversamente proporcionais e problemas não proporcionais e, por último, a quinta sessão foi organizada com problemas proporcionais (direto e inverso) e não proporcionais.

Nas análises da autora acerca das estratégias utilizadas pelos alunos colaboradores frente aos problemas propostos da primeira sessão, ela constatou que os discentes entenderam a relação de proporcionalidade direta existente entre as grandezas no problema. A estratégia escalar foi a que prevaleceu na resolução dos cinco problemas que compunham a referida sessão. No entanto, a estratégia funcional foi utilizada para resolver os problemas 3 e 5, e a estratégia da regra de três foi empregada apenas por uma aluna, que aplicou a técnica da regra corretamente, porém de maneira mecânica, o que, segundo a autora, se caracterizou numa falta de compreensão da proporcionalidade.

Com relação à segunda sessão, Gonçalves (2010) enfatizou que os alunos desenvolveram estratégias próprias não convencionais frente aos problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais. Nos problemas em que não continham números múltiplos ou sua identificação não era imediata, os alunos utilizaram da estratégia funcional (redução à unidade) para resolver os problemas. Com isso, a autora constatou que alguns alunos conseguiram desenvolver o

raciocínio proporcional por meio das estratégias utilizadas. No entanto, a aluna que usou a regra de três não apresentou a compreensão devida sobre a proporcionalidade. Em última análise, a autora afirmou que alguns alunos não conseguiram, a princípio, distinguir os problemas que apresentavam grandezas proporcionais dos que não apresentavam tais grandezas.

Na terceira sessão, a autora apresentou três problemas e constatou que a estratégia funcional (redução à unidade) foi a mais utilizada para resolver os problemas 1 e 3, e os alunos perceberam as relações proporcionais que havia entre as grandezas. Com isso, autora declarou que houve a compreensão da ideia de proporcionalidade pelos alunos. Com relação ao problema 2, Gonçalves (2010) relatou que os alunos compreenderam que as relações entre as grandezas não eram proporcionais, no entanto eles não aceitaram que tal problema não apresentava resposta, o que ocasionou o erro por parte dos alunos, ao tratarem o problema como grandezas diretamente proporcionais.

Na quarta sessão, Gonçalves (2010) afirmou que todos os problemas da referida sessão foram tratados, a princípio, como problemas de grandezas diretamente proporcionais, pois as estratégias aplicadas pelos alunos indicaram tal tratamento. Todavia, após algumas intervenções e discussões, segundo a autora, os alunos entenderam que as relações entre as grandezas eram inversamente proporcionais e, assim, conseguiram, através da estratégia escalar, resolver os problemas propostos. Por fim, a autora concluiu que alguns alunos expressaram a compreensão do raciocínio proporcional, ao proferirem os argumentos e explicações das estratégias por eles adotadas.

Na última rodada de problemas, quinta sessão, a autora salientou que os alunos ao resolverem os problemas 1 e 4 sobre grandezas diretamente proporcionais, eles reempregaram os conhecimentos adquiridos anteriormente. De acordo com a autora, apesar do problema 1 ter ocasionado dúvidas e erros nos alunos, esses não se referiram ao raciocínio proporcional, e sim a operação aritmética da divisão ao aplicarem ao método de redução à unidade.

Para Gonçalves (2010) as estratégias que predominaram na resolução dos problemas citados no parágrafo anterior foram a escalar e a funcional. No problema 4, a estratégia utilizada pelos alunos foi a escalar, talvez, segundo a autora, devido os dados do problema estarem dispostos em tabela e os valores das grandezas de mesma espécie serem múltiplos. Com relação ao problema 2, que

apresentava grandezas inversamente proporcionais, a autora conjecturou que os erros na tentativa de resolver o problema podem estar associados ao contrato didático ou falta de compreensão, visto que os alunos tentaram resolver o referido problema como sendo de grandezas diretamente proporcionais. Para a autora, essas dificuldades foram minimizadas com reflexões e reformulação das estratégias, devia a colaboração dos colegas, durante o que a autora chamou de retroações do *meio*.

Sobre a resolução dos problemas 3 e 4, Gonçalves (2010) afirmou que a relação proporcional entre grandezas não foi entendida por alguns alunos, pois estes acharam que a relação proporcional ocorria quando as grandezas aumentavam concomitantemente, sem atentar para a razão proporcional.

Por fim, a autora afirmou que as dúvidas surgidas foram erradicadas pelas intervenções e pela institucionalização de certos conceitos referentes ao assunto estudado.

Em suas considerações, Gonçalves (2010) ressaltou que a pesquisa possibilitou averiguar que as estratégias mobilizadas, pela maioria dos alunos, na resolução dos problemas sobre proporção foram três, a saber, a estratégia escalar, a estratégia funcional e a regra de três. Com relação a esta última, a autora acrescentou que a regra foi utilizada somente na 1ª e na 2ª sessões por uma única aluna que já conhecia a regra. Apesar disso, a autora afirmou que a aluna aplicava a técnica de maneira mecânica, pois não sabia justificar as soluções apresentadas para os problemas.

Acerca dos problemas, Gonçalves (2010) afirmou que a escolha destes contribuiu para que os alunos os resolvessem e expusessem suas estratégias oralmente, visto que seus enunciados eram de fácil compreensão e estavam ligados a temas do cotidiano dos alunos. Dessa forma, segundo a autora, foi possível alcançar os objetivos da pesquisa, por meio da verificação do pensamento qualitativo e quantitativo dos alunos.

O trabalho de Silva Neto (2014) teve por objetivo investigar a História da regra de três ao longo do tempo, a partir da reforma Francisco Campos, década de 30, passando pelo Movimento da Matemática Moderna até os dias atuais. Além disso, o autor procurou discutir se uso da regra de três se mostra indispensável na resolução de problemas de proporcionalidade e quais outras maneiras de resolver tais problemas podem ser utilizadas no ensino fundamental.

A pesquisa também procurou responder alguns questionamentos sobre a relevância da regra no ensino de Matemática, como mostra o trecho a seguir:

que lugar a Regra de Três ocupava nos currículos de Matemática durante a vigência da Reforma Campos? E durante o Movimento da Matemática Moderna? E nos Parâmetros Curriculares Nacionais? Quais são as críticas à Regra de Três? Quais são as alternativas para se resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais sem a utilização dessa regra no Ensino Fundamental? Pode-se, de fato, substituir a Regra de Três dos conteúdos escolares e utilizá-la apenas como ferramenta auxiliar? (SILVA NETO, 2014, p. 106)

A metodologia empregada pelo autor para alcançar o objetivo da pesquisa e responder os questionamentos levantados foi dividida em três etapas, descritas a seguir:

a) elaborar um texto levantando o lugar que a Regra de Três ocupou e ainda ocupa nos currículos escolares; b) pesquisar em livros da época da Reforma Campos, do MMM e atuais, de que maneira o tópico “Razões e Proporções” é desenvolvido; c) fazer pesquisa em livros didáticos atuais, visando ao levantamento de dados que mostrem se a Regra de Três ainda é ensinada e se é tida como única forma de resolução de problemas de razão e proporção. (SILVA NETO, 2014, p. 107)

A pesquisa de Silva Neto (2014) mostrou que a regra de três esteve presente no documento de 1931, chamado de Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário. Neste documento, segundo o autor apoiado em Alvarez (2014), a proporcionalidade deveria ser ensinada na segunda série no tópico II conhecido como ‘Aritmética e Álgebra’.

Outro documento publicado em 1952 é a Portaria de nº 1045 de dezembro de 1951. Esse documento apresentava os planos de desenvolvimento dos programas do ensino secundário e as instruções metodológicas. Nele a regra de três era recomenda a ser ensinada para alunos da terceira série ginasial.

A pesquisa apontou também que durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil na década de 60, ocorreu a segunda modernização do ensino de Matemática por Osvaldo Sangiorgi. Este reorganizou o ensino de Matemática por meio da proposta, ‘Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática’. O autor relata que nos vinte e quatro itens da nova proposta, não aparece o termo regra de três. No lugar desta, constam razões e proporções e aplicações.

O autor destaca também que nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), na parte de conteúdos propostos para o ensino de Matemática para o quarto ciclo e no tópico 'Números e Operações', sugerem que a resolução de problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais seja por meio de estratégias variadas, inclusive pela regra de três. Frente a isso, o autor mencionou as três propostas de Lima (2005) para resolver os problemas de regra de três, que são: método direto, redução à unidade e proporção.

Em suas considerações o autor defende que os problemas de proporcionalidade sejam resolvidos sem o uso de 'receituários prontos e mágicos', pois estes impendem que o aluno desenvolva sua capacidade crítica ao analisar o problema. Dessa forma, o autor é favorável que a resolução de problemas de proporcionalidade seja por meio de função e não pela utilização da regra de três. Assim, segundo Silva Neto (2014), o professor pode inicializar seus alunos no conceito de função e ensiná-los a resolver os problemas de proporcionalidade sem memorização de fórmulas.

Por fim, o autor concluiu que o uso de função no sétimo ano do ensino fundamental é viável para a resolução dos problemas de proporcionalidade. Com isso, a regra de três poderia ser esquecida ou ocupar um papel secundário no livro didático, isto é, como ferramenta de auxílio para outros assuntos.

O trabalho de Sodré (2013) buscou investigar a problemática *“Que contribuições à modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação possibilita para a matemática escolar?”* e aliado a essa questão de pesquisa o autor apresentou o seguinte objetivo: *“analisar contribuições da modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação para a matemática escolar.”*

O estudo desse autor teve como base a teoria da modelagem matemática crítica de acordo com Burgermeister (2007; 2010) e a metodologia de pesquisa utilizada foi de caráter qualitativo de natureza participante. Os sujeitos da pesquisa foram 43 alunos do 1º ano do ensino médio, os quais foram submetidos à análise de dois modelos matemáticos para uma dada questão numa abordagem sobre a luz da modelagem matemática crítica. Desse modo, os alunos tinham que julgar qual dos dois modelos apresentados era o mais adequado para o contexto do problema, e tal julgamento deveria apresentar argumentos matemáticos oriundo dos saberes prévios dos alunos. As produções dos alunos seriam analisadas pelo esquema

Herbartiano de Burgemeister (2007; 2010), o qual, segundo o autor, avalia modelos matemáticos para uma questão, com a intenção de apontar o modelo mais aceitável ao contexto do problema.

A coleta de dados da pesquisa de Sodré (2013) ocorreu durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática crítica, que se configurou em três momentos, a saber, o primeiro consistiu na formação dos grupos de alunos; o segundo tratou da apresentação da tarefa (questão), bem como dos dois modelos matemáticos a serem julgados pelos alunos como o mais adequado para a questão posta e o terceiro momento foi marcado pela socialização das produções dos alunos. Essas informações produzidas durante o desenvolvimento da atividade de modelagem bem como os registros fotográficos serviram de material para a análise da pesquisa apoiada no esquema Herbartiano.

Quanto a análises das produções dos alunos sobre os dois modelos apresentados, aditivo e linear, aconteceram com base nas tomadas de posição dos grupos estabelecidos. Desse modo, os grupos I, V, VI e VII julgaram o modelo aditivo e os grupos II, III e IV o modelo linear para a situação posta. Com relação aos quatro primeiros grupos, as respostas construídas durante a investigação revelaram que esses grupos julgaram à adequação ou não do modelo aditivo com base na utilização da regra de três. O que para o autor foi imprescindível para justificar matematicamente a incompatibilidade desse modelo com a situação apresentada, pois o mesmo era viável apenas para uma única situação, algo que foi constatado pelos grupos. Entretanto o grupo V admitiu que o modelo mencionado, aditivo, era viável para a questão apresentada, embora esse grupo tenha também recorrido à regra de três. Sobre esse fato, o autor destaca que as decisões de um grupo podem ser determinadas, às vezes, pelo emocional aliado a praticidade do modelo ao invés do racional. Já com relação à tomada de posição dos grupos I, VI e VII Sodré (2013) destaca que esses recorreram à regra de três para justificar seus argumentos perante a investigação do modelo.

Quanto aos três outros grupos, II, III, IV, o autor destaca a tomada de posição de cada um deles com relação ao julgamento de adequação do modelo linear para a questão posta. Nesse sentido, o grupo II utilizou também a regra de três para qualificar a funcionalidade do modelo mencionado, apresentando argumentos consistentes embasados na regra. O autor defendeu que o uso dessa ferramenta matemática pelos alunos para respaldar as alegações levantadas na

situação em estudo é devido à facilidade e praticidade da regra de três. As atitudes dos alunos, de acordo com Sodré (2013), indicaram traços de investigação na atividade escolar, indicando, ainda que parcial, o fomento da competência crítico reflexiva como anseia a modelagem matemática crítica.

Com relação ao posicionamento do grupo III sobre o modelo linear, as repostas desses alunos tenderam para o outro modelo, o aditivo, como válido para a questão analisada. Para Sodré (2013) tal atitude sofreu influencia do grupo V, e também da agilidade e segurança oferecidas pelo modelo aditivo.

Diferentemente dessa tomada de posição do grupo III, o grupo IV defendeu o uso do modelo linear para a questão posta, justificando sua funcionalidade por meio da regra de três.

Nesse cenário, onde a regra de três foi utilizada como justificativa para mostrar a funcionalidade ou não dos modelos aditivo e linear junto à questão analisada, Sodré (2013) tem a afirmar que:

[...] a regra de três articulada para justificar a 'adequação' ou não dos modelos para a questão em debate predominou com mais intensidade no posicionamento dos grupos, exercendo papel significativo no confronto de ideias e estratégias articuladas para a produção da resposta. (SODRÉ, 2013, p. 57, grifo do autor)

Para o autor do excerto, a atividade desenvolvida oportunizou os alunos pesquisados a construírem conhecimentos e também a revisitarem saberes como forma de justificar a validade ou não dos modelos apresentados para a questão em debate. Além do mais, possibilitou os discentes a exercitarem a capacidade de argumentação na defesa de ideias construídas durante atividade com matemática, atitude que, quase sempre, é inibida nos moldes tradicionais de ensino. Nesse pensar, Sodré (2013) defende que a modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação auxilia no trabalho em equipe e na patilha de diferentes conhecimentos matemáticos para julgarem a adequação ou não de modelos para uma determinada situação em análise.

Ainda sobre a relevância da regra de três na atividade com modelagem matemática, o autor afirmou que a regra teve um papel fundamental nas argumentações dos alunos durante os debates tanto no decorrer da atividade como da mesma forma na fase de socialização das respostas, em que foram postos em juízo os modelos aditivo e linear para a questão em análise.

Por fim, o autor afirmou que a pesquisa mostrou a eficiência da prática com modelagem matemática no contexto escolar, o que respondeu, ainda que parcialmente, o questionamento de pesquisa que buscou investigar: *“Que contribuições à matemática crítica como atividade de ensino e investigação possibilita para a matemática escolar?”*

Os estudos apresentados anteriormente trouxeram relatos importantes sobre o ensino das regras de três como estratégia valiosa na resolução de problemas com grandezas proporcionais e também apontaram as dificuldades dos alunos quanto ao uso da regra. Nesse cenário, observamos que apenas o trabalho de Sá e Costa (2014) abordou o ensino das regras de três por meio de atividades e com resultados positivos, cabe ressaltar; o que corrobora a eficácia do ensino por atividades para os conteúdos matemáticos, e da mesma forma a carência do uso dessa metodologia no ensino das regras de três. Pensando nisso, apresentamos adiante uma proposta de sequência didática distinta da tradicional para o ensino das regras de três por meio de atividades, que foi testada com alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual.

6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os conteúdos matemáticos que devem ser ensinados nas escolas da educação básica são geralmente ministrados por meio de aulas expositivas, em que o professor apresenta o conteúdo em sua totalidade por meio da definição, propriedades seguidos de exemplos e exercícios, o que limita a participação do aluno na descoberta e construção do conhecimento.

As pesquisas em Educação Matemática têm apresentado meios alternativos que podem ser utilizados pelo professor no ensino da Matemática, que possibilitem o engajamento do aluno no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina. Assim o discente, passa da posição passiva para uma postura participativa na aquisição dos saberes e na construção do conhecimento, uma vez que “[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou sua construção.” (FREIRE, 2017, p. 24)

Nesse pensar, apresentamos um conjunto de atividades didáticas como proposta de uma sequência didática, cujo objetivo é subsidiar o aluno na compreensão dos conceitos de proporcionalidade simples (direta e inversa), e também de proporcionalidade composta direta, envolvidos em contextos variados

com grandezas. Pois acreditamos que esses conceitos são fundamentais para o uso consciente e não mecanizado das regras de três.

Para Zabala (1998, p. 18) uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” Esse autor denomina também as sequências de atividades como *unidade didática*, *unidade de programação* ou *unidade de intervenção pedagógica*. Além do mais, chama a sequência didática como sequência de ensino/aprendizagem.

Outro conceito de sequência didática semelhante ao descrito no parágrafo anterior é apresentado por Oliveira (2013), que considera uma sequência didática como um:

Procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem.” (OLIVEIRA, 2013, p. 53)

A primeira ideia de sequência didática que se teve notícia ocorreu na França no início dos anos de 1980, e tinha por objetivo melhorar o ensino da língua materna, que, na época, era ensinada de maneira separada e sem elo com a ortografia, sintaxe e as classes gramáticas. Desse modo, a sequência didática se apresentou como uma nova proposta de educação, cuja intenção era integrar o ensino. A princípio, essa proposta sofreu resistências com relação a sua implementação, mas depois foi aceita pelos estudiosos da didática do ensino, que passaram a produzir pesquisas com os resultados alcançados ao aplicarem os procedimentos da sequência didática. Esta proposta de ensino só chegou ao Brasil em 1992, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e foi utilizada também no ensino da língua materna. (OLIVEIRA, 2013, p. 53-54)

A nossa sugestão de sequência didática foi construída para subsidiar o ensino da regra de três, como comentamos anteriormente. E para alcançar essa pretensão elaboramos um conjunto de três atividades didáticas, a saber, uma para o a compreensão do conceito de grandezas diretamente proporcionais, constituída de quatro situações que abordaram a relação proporcional direta entre duas quantidades, e uma em que essa relação proporcional não acontece. Já a segunda,

foi elaborada para entendimento do conceito de grandezas inversamente proporcionais, e sua configuração seguiu a mesma ideia da primeira atividade, ou seja, quatro situações com grandezas inversamente proporcionais e uma em que tal relação proporcional não ocorre. Por último a terceira atividade, cujo objetivo era conduzir os alunos participantes da pesquisa a perceberem alguma relação que indicasse a proporcionalidade composta direta entre três grandezas. Essa atividade foi estruturada com três situações em que a proporcionalidade composta direta ocorre, e uma situação onde tal relação não acontece.

Essas atividades são apresentadas a seguir e também as devidas orientações didáticas ao professor para execução das mesmas.

6.1. ATIVIDADE 1

Atividade 1

Título: Grandezas diretamente proporcionais

Objetivo: Conceituar grandezas diretamente proporcionais

Material: Folha de situações, calculadora, caneta ou lápis e borracha.

Procedimento:

Leia cuidadosamente cada uma das situações apresentadas;

Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação;

Responda as questões propostas.

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo x volume de água
1	5			
2	10			
	15			
4				
5	25			
6				
	35			
8				
	45			
10				
11	55			
	60			

Observações:

Situação 2¹⁹: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

¹⁹ [Questão adaptada] BIACHINI, E. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5			8		10
Produção de açúcar em sacas	4		12		20	24	28		36	

O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R\$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2		4	5	6		8	9	10
Valor a pagar em reais	8		24				56			80

As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos

A quantidade de triângulos e quantidade de palitos são diretamente proporcionais? Por quê?

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6		8	9	
Distância percorrida em km	12	24			60		84			120

O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais**.

- a) A idade de uma pessoa e o valor da sua massa ("peso") ()
- b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. ()
- c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ()
- d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ()
- e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ()
- f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ()
- g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ()
- h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. ()
- i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ()
- j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. ()

Orientações didáticas

Nessa primeira atividade, que deve ser feita em grupo, o professor, a princípio, solicitará que os alunos preencham os espaços em branco do quadro da situação 1 com os devidos valores das grandezas relacionadas na situação, para tanto os alunos deverão utilizar da observação e de seus conhecimentos prévios sobre multiplicação.

Após esse momento, cabe ao professor verificar se os alunos preencheram as duas primeiras colunas, da esquerda para a direita, de maneira correta.

Depois de preenchidas as duas primeiras colunas, o docente deve solicitar aos alunos que determinem as razões entre as grandezas e também o produto delas, o que corresponderão ao preenchimento da terceira, quarta e quinta colunas do quadro, respectivamente. Terminado o preenchimento total do quadro, o professor deve pedir aos alunos que escrevam observações sobre o comportamento dos valores nesse quadro. Com isso, esperar-se que os discentes identifiquem os princípios do conceito das grandezas diretamente proporcionais, ou seja, percebam que as razões entre as grandezas são constantes e que os produtos entre elas não seguem o mesmo padrão. É recomendável, que o professor faça intervenções adequadas, que levem os alunos a observarem tais regularidades.

Com essa primeira etapa finalizada e com as observações construídas, o docente deve escrever no quadro branco a primeira informação sobre grandezas diretamente proporcionais, apresentada adiante, com o intuito de levar os alunos a vincular tal informação com o realizado na primeira situação.

✓ Primeira informação

Quando a razão entre os valores de duas grandezas é constante dizemos que as grandezas são diretamente proporcionais.

Em seguida, o professor deverá fazer perguntas aos alunos sobre o comportamento dos valores das grandezas da situação 1, de tal sorte que eles percebam que a variação entre esses valores ocorre de forma conjunta, e as perguntas devem ser as seguintes:

→O que acontece com o valor da grandeza volume de água quando multiplicamos por 2 o valor da grandeza tempo?

→O que acontece com o valor da grandeza volume de água quando multiplicamos por 3 o valor da grandeza tempo?

→O que ocorre com o valor da grandeza tempo quando dividimos por 2 o valor da grandeza volume de água?

→O que ocorre com o valor da grandeza tempo quando dividimos por 3 o valor da grandeza volume de água?

De posse das respostas esperadas acerca da variação proporcional, o professor deverá escrever no quadro da sala de aula a segunda informação sobre as grandezas diretamente proporcionais, como abaixo:

✓ Segunda informação

Duas grandezas são diretamente proporcionais se e somente se quando multiplicando ou dividindo o valor de uma delas por um número, diferente de zero, o valor da outra fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.

Com esta última informação, os alunos passam a ter um conceito estruturado sobre grandezas diretamente proporcionais, que é complementado pela primeira informação. Então, deverão responder as demais situações, 2, 3, 4, 5 e a questão extra ao final da atividade 1, tomando como base esse conceito.

O professor deve acompanhar o aluno no preenchimento do quadro em cada situação e, quando necessário, fazer as intervenções pedagógicas adequadas para que o discente tenha êxito na execução da tarefa, mas sempre incentivando e permitindo que esse aluno adquira autonomia e confiança no fazer matemático.

Com o fim da primeira atividade, é necessário que os alunos resolvam questões de aprofundamento sobre grandezas diretamente proporcionais, como forma de fixar os conceitos apresentados no experimento.

6.2. ATIVIDADE 2

Atividade 2

Título: Grandezas inversamente proporcionais

Objetivo: Conceituar grandezas inversamente proporcionais.

Material: Folha de situações, calculadora, caneta ou lápis e borracha.

Procedimento:

Leia cuidadosamente cada uma das situações apresentadas;

Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação;

Responda as questões propostas.

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras $\times$ Tempo
1	72			
2	36			
3				
	18			
6				
8				
9	8			
12				

Observações

Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3		6	7	12	14
Litros de leite	84	42		21	14			6

As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3		5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90		45					15

As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120° C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110° C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3		5		7	8	9	
Temperatura (° C)	120	110		90		70				30

As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3		5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120		60		40			

As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais**.

- a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ()
- b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. ()
- c) A altura de um prédio e o número de andares. ()
- d) A velocidade e o tempo de uma viagem. ()
- e) Hora do dia e a temperatura. ()
- f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. ()
- g) Comprimento do passo e o número de passos. ()
- h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ()
- i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ()
- j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ()

Orientações didáticas

Na segunda atividade, onde será abordado o conceito de grandezas inversamente proporcionais, o professor deve seguir a mesma linha de execução da primeira atividade, ou seja, os alunos preencherão o quadro da situação 1, onde estão relacionadas duas grandezas e depois construirão observações sobre as regularidades ocorridas no quadro. Assim, espera-se que os alunos notem que as razões entre as grandezas da situação são diferentes, entretanto, os produtos dos valores dessas grandezas são iguais. Cabe ao docente acompanhar os alunos no realizar da situação 1, fazendo as devidas orientações para que esses alunos percebam tais regularidades.

Depois de construídas as observações, o professor deve escrever no quadro branco da sala de aula a primeira informação sobre as grandezas inversamente proporcionais, com o propósito de levar o aluno a construir relações

com o que foi observado na situação 1 desta atividade com a informação apresentada.

✓ Primeira informação

Duas grandezas são chamadas inversamente proporcionais quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo.

Após a apresentação da informação, o professor deverá fazer perguntas aos alunos sobre o comportamento dos valores das grandezas da situação 1, de tal sorte que eles percebam que esses valores variam de maneira inversa, e as perguntas devem ser as seguintes:

→O que ocorre com o valor do tempo para encher o reservatório quando multiplicamos por 2 a quantidade de torneiras?

→O que ocorre com o valor do tempo para encher o reservatório quando multiplicamos por 3 a quantidade de torneiras?

→O que acontece com a quantidade de torneiras quando dividimos por 2 o valor do tempo?

→O que acontece com a quantidade de torneiras quando dividimos por 3 o valor do tempo?

De posse das respostas esperadas a respeito da variação proporcional, o professor deverá escrever no quadro da sala de aula a segunda informação acerca das grandezas diretamente proporcionais, como abaixo:

✓ Segunda informação

Duas grandezas são inversamente proporcionais, quando o valor de uma delas é multiplicado por dois, por três, por quatro etc., o valor da outra grandeza fica dividido por dois, por três, por quatro etc., respectivamente.

Com esta última informação, os alunos passam a ter um conceito estruturado sobre grandezas inversamente proporcionais, que é complementada como a primeira informação. Então, deverão responder as demais situações, 2, 3, 4, 5 e as questão extra ao final da atividade 2, tomando como base esse conceito.

O professor deve acompanhar o aluno no preenchimento do quadro em cada situação e, quando necessário, fazer as intervenções pedagógicas adequadas para que o discente tenha êxito na execução da tarefa, mas sempre incentivando e permitindo que esse aluno adquira autonomia e confiança no fazer do trabalho matemático.

Com o fim da segunda atividade, é necessário que os alunos resolvam questões de aprofundamento sobre grandezas inversamente proporcionais, como forma de fixar os conceitos apresentados no experimento.

Com a execução dessas duas atividades e das questões de aprofundamento sobre a relação proporcional (direta e inversa) entre duas grandezas, o professor deverá apresentar a técnica da regra de três simples, seguindo quatro procedimentos de resolução da regra, descritos abaixo.

- I- Identificar as grandezas no problema;
- II- Montar o quadro com as grandezas e seus respectivos valores;
- III- Classificar as grandezas em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais;
- IV- Determinar o valor de 'x' por meio da proporção simples (para as grandezas diretamente proporcionais) ou por meio da igualdade de produtos (para as grandezas inversamente proporcionais).

Aqui cabe um adendo sobre o procedimento IV com relação às grandezas inversamente proporcionais, isto é, recomendamos que o professor não utilize a igualdade entre duas razões, quando uma delas for invertida, mas sim a igualdade de produtos dos valores correspondentes de cada grandeza, pois foi dessa forma que os alunos constataram tal princípio das grandezas inversamente proporcionais na situação 1.

A atividade 3 diante traz contextos onde estão relacionadas proporcionalmente três grandezas; a nossa intenção com essa atividade é levar o aluno a descobrir uma relação entre as grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza, relação essa que diz respeito a proporcionalidade composta direta.

A referida atividade é composta de quatro situações, sendo que para três delas estão disponíveis folhas anexas de figuras geométricas, que auxiliarão na execução dessa atividade.

6.3. ATIVIDADE 3

Atividade 3**Título:** Proporcionalidade composta**Objetivo:** Descobrir uma relação entre grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza.**Material:** Folha de situações, quadro da atividade, calculadora, caneta ou lápis e borracha.**Procedimento:**

Leia atentamente cada uma das situações apresentadas;

Preencha os espaços em branco dos quadros a respeito de cada situação;

Com base no realizado, preencha o quadro da atividade.

Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: _____

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 3

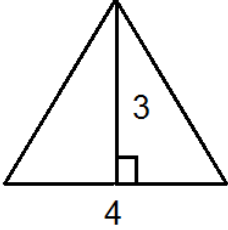
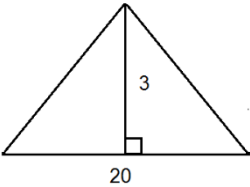
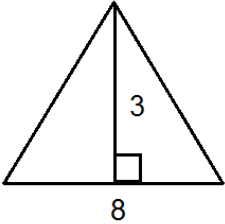
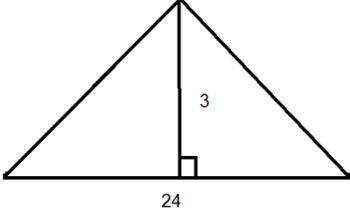
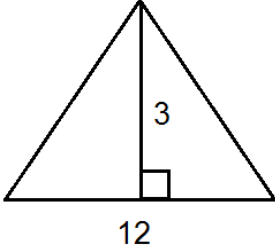
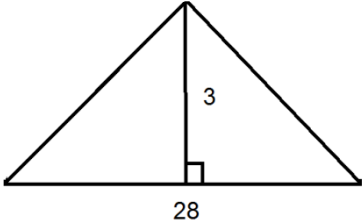
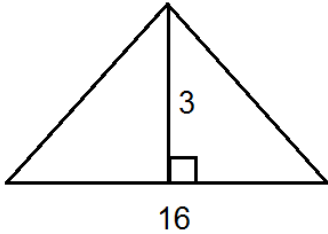
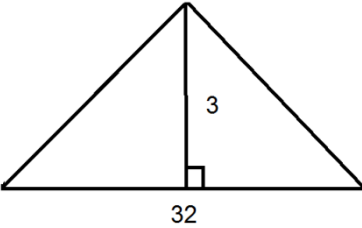
Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: _____

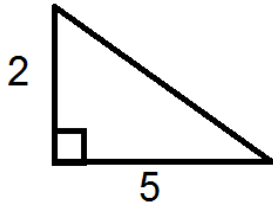
FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

QUADRO 1

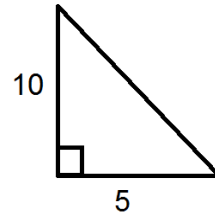
<u>Triângulo 1</u>  Base = 4 Altura = 3 Área = 6	<u>Triângulo 5</u>  Base = 20 Altura = 3 Área = 30
<u>Triângulo 2</u>  Base = 8 Altura = 3 Área = 12	<u>Triângulo 6</u>  Base = 24 Altura = 3 Área = 36
<u>Triângulo 3</u>  Base = 12 Altura = 3 Área = 18	<u>Triângulo 7</u>  Base = 28 Altura = 3 Área = 42
<u>Triângulo 4</u>  Base = 16 Altura = 3 Área = 24	<u>Triângulo 8</u>  Base = 32 Altura = 3 Área = 48

FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

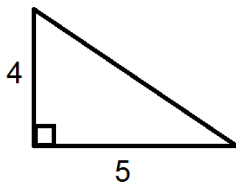
QUADRO 2

Triângulo 1

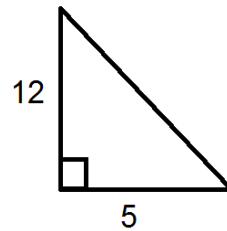
Base = 5
Altura = 2
Área = 5

Triângulo 5

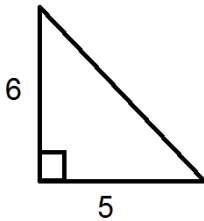
Base = 5
Altura = 10
Área = 25

Triângulo 2

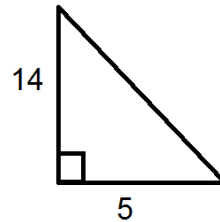
Base = 5
Altura = 4
Área = 10

Triângulo 6

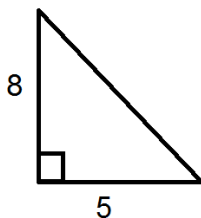
Base = 5
Altura = 12
Área = 30

Triângulo 3

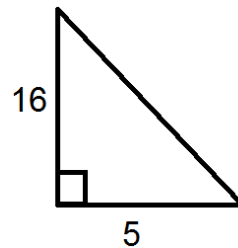
Base = 5
Altura = 6
Área = 15

Triângulo 7

Base = 5
Altura = 14
Área = 35

Triângulo 4

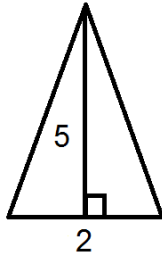
Base = 5
Altura = 8
Área = 20

Triângulo 8

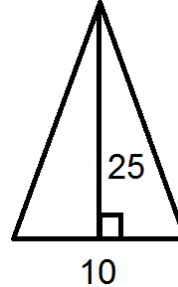
Base = 5
Altura = 16
Área = 40

FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

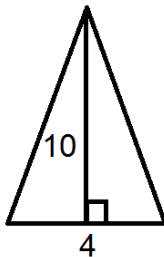
QUADRO 3

Triângulo 1

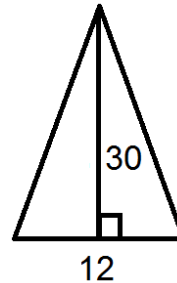
Base = 2
 Altura = 5
 Base x Altura = 10
 Área = 5

Triângulo 5

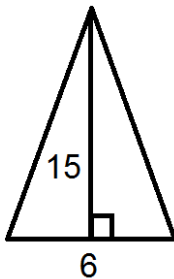
Base = 10
 Altura = 25
 Base x Altura = 250
 Área = 125

Triângulo 2

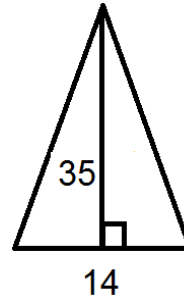
Base = 4
 Altura = 10
 Base x Altura = 40
 Área = 20

Triângulo 6

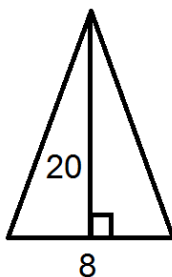
Base = 12
 Altura = 30
 Base x Altura = 360
 Área = 180

Triângulo 3

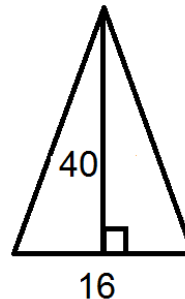
Base = 6
 Altura = 15
 Base x Altura = 90
 Área = 45

Triângulo 7

Base = 14
 Altura = 35
 Base x Altura = 490
 Área = 245

Triângulo 4

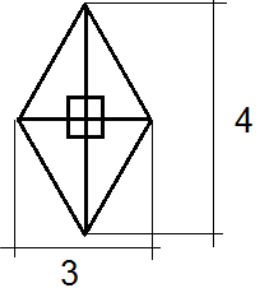
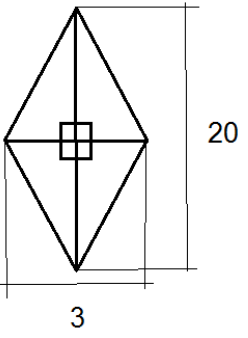
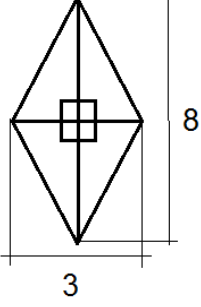
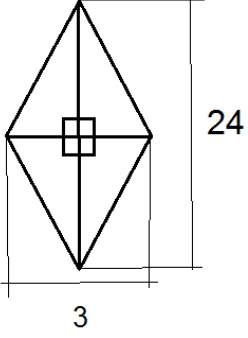
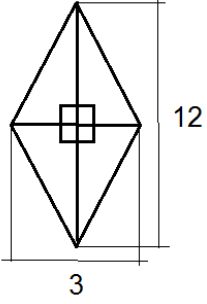
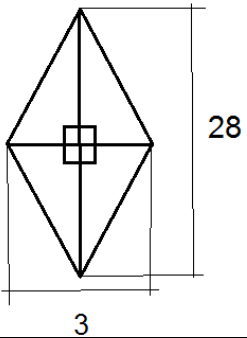
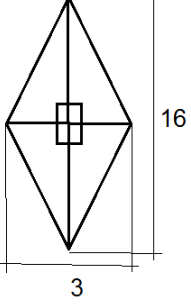
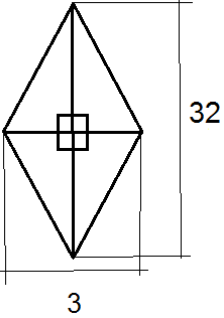
Base = 8
 Altura = 20
 Base x Altura = 160
 Área = 80

Triângulo 8

Base = 16
 Altura = 40
 Base x Altura = 640
 Área = 320

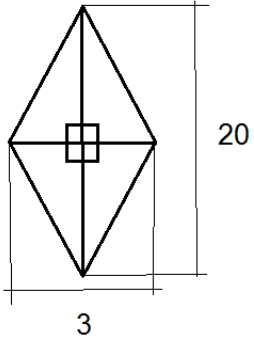
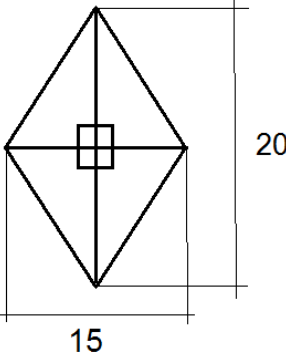
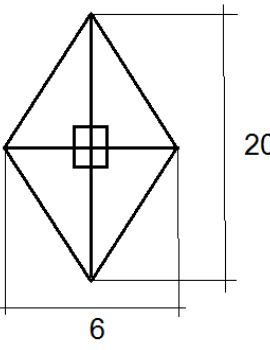
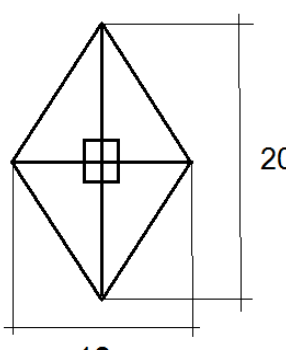
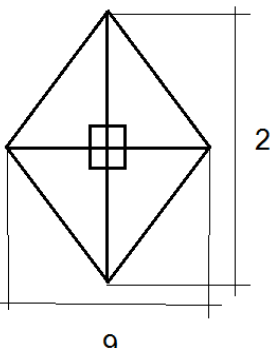
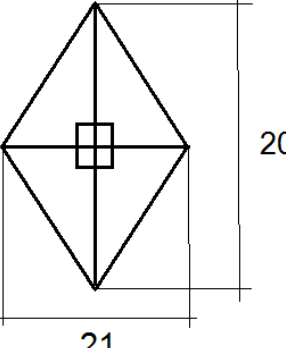
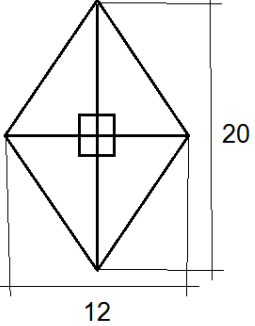
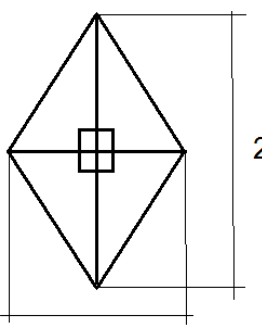
FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 1

<u>Losango 1</u> Diagonal maior = 4 diagonal menor = 3 Área = 6 	<u>Losango 5</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 3 Área = 30 
<u>Losango 2</u> Diagonal maior = 8 diagonal menor = 3 Área = 12 	<u>Losango 6</u> Diagonal maior = 24 diagonal menor = 3 Área = 36 
<u>Losango 3</u> Diagonal maior = 12 diagonal menor = 3 Área = 18 	<u>Losango 7</u> Diagonal maior = 28 diagonal menor = 3 Área = 42 
<u>Losango 4</u> Diagonal maior = 16 diagonal menor = 3 Área = 24 	<u>Losango 8</u> Diagonal maior = 32 diagonal menor = 3 Área = 48 

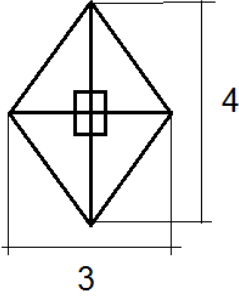
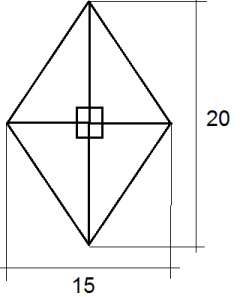
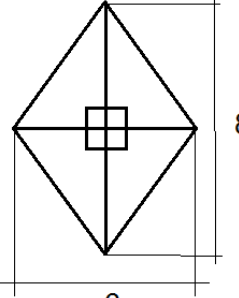
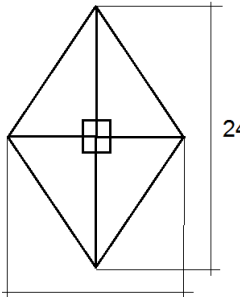
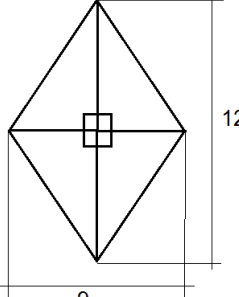
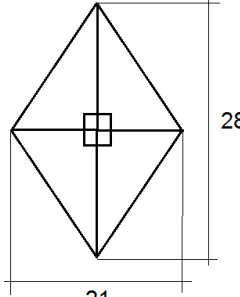
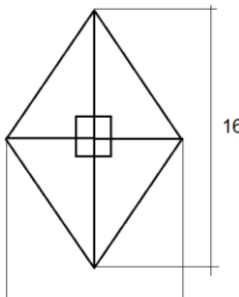
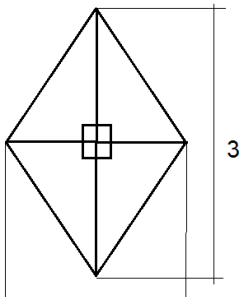
FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 2

<u>Losango 1</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 3 Área = 30 	<u>Losango 5</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 15 Área = 150 
<u>Losango 2</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 6 Área = 60 	<u>Losango 6</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 18 Área = 180 
<u>Losango 3</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 9 Área = 90 	<u>Losango 7</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 21 Área = 210 
<u>Losango 4</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 12 Área = 120 	<u>Losango 8</u> Diagonal maior = 20 diagonal menor = 24 Área = 240 

FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 3

<u>Losango 1</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 12 Área = 6	<u>Losango 5</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 300 Área = 150
<u>Losango 2</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 48 Área = 24	<u>Losango 6</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 432 Área = 216
<u>Losango 3</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 108 Área = 90	<u>Losango 7</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 588 Área = 294
<u>Losango 4</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 192 Área = 96	<u>Losango 8</u>  Diagonal maior $\times$ diagonal menor = 768 Área = 384

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: _____

Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: _____

Quadro 3

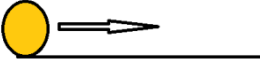
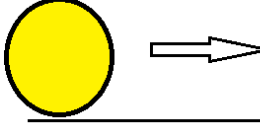
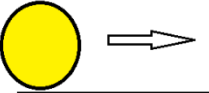
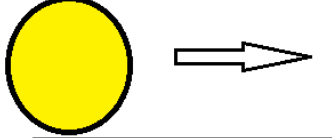
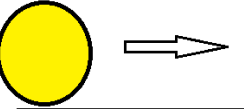
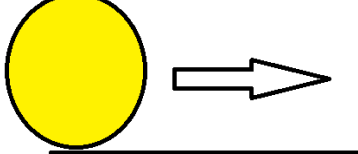
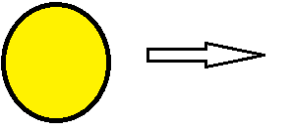
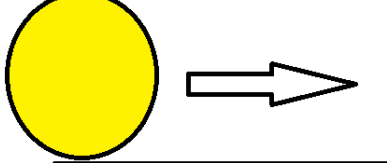
Figura	Massa × Velocidade	Energia
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

Resposta: _____

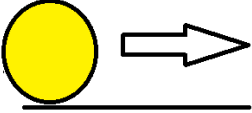
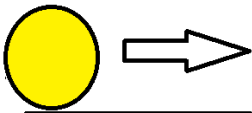
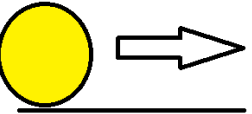
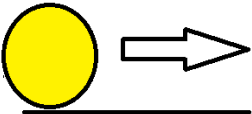
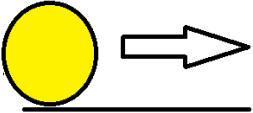
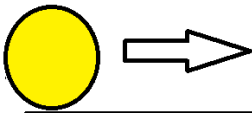
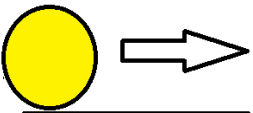
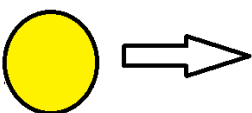
FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

QUADRO 1

<u>Figura 1</u>  Velocidade = 2 m/s (metros por segundo) Massa = 3 kg (quilograma) Energia = 6 J (Joule)	<u>Figura 5</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 15 kg Energia = 30 J
<u>Figura 2</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 6 kg Energia = 12 J	<u>Figura 6</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 18 kg Energia = 36 J
<u>Figura 3</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 9 kg Energia = 18 J	<u>Figura 7</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 21 kg Energia = 42 J
<u>Figura 4</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 12 kg Energia = 24 J	<u>Figura 8</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 24 kg Energia = 48 J

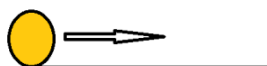
FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

QUADRO 2

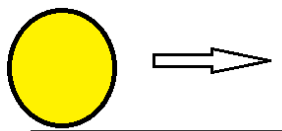
<u>Figura 1</u>  Velocidade = 1 m/s Massa = 4 kg Energia = 2 J	<u>Figura 5</u>  Velocidade = 5 m/s Massa = 4 kg Energia = 50 J
<u>Figura 2</u>  Velocidade = 2 m/s Massa = 4 kg Energia = 8 J	<u>Figura 6</u>  Velocidade = 6 m/s Massa = 4 kg Energia = 72 J
<u>Figura 3</u>  Velocidade = 3 m/s Massa = 4 kg Energia = 18 J	<u>Figura 7</u>  Velocidade = 7 m/s Massa = 4 kg Energia = 98 J
<u>Figura 4</u>  Velocidade = 4 m/s Massa = 4 kg Energia = 32 J	<u>Figura 8</u>  Velocidade = 8 m/s Massa = 4 kg Energia = 128 J

FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

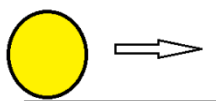
QUADRO 3

Figura 1

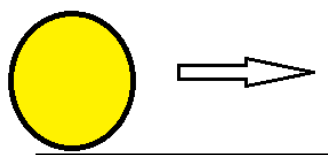
Velocidade = 1 m/s
 Massa = 2 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 2$
 Energia = 1 J

Figura 5

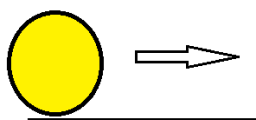
Velocidade = 5 m/s
 Massa = 10 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 50$
 Energia = 125 J

Figura 2

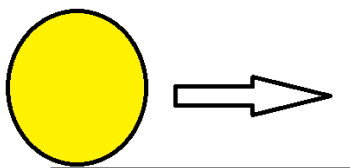
Velocidade = 2 m/s
 Massa = 4 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 8$
 Energia = 8 J

Figura 6

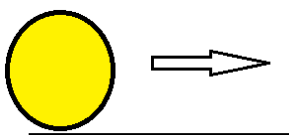
Velocidade = 6 m/s
 Massa = 12 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 72$
 Energia = 216 J

Figura 3

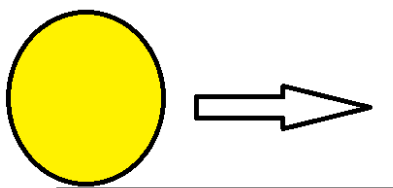
Velocidade = 3 m/s
 Massa = 6 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 18$
 Energia = 27 J

Figura 7

Velocidade = 7 m/s
 Massa = 14 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 98$
 Energia = 343 J

Figura 4

Velocidade = 4 m/s
 Massa = 8 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 32$
 Energia = 64 J

Figura 8

Velocidade = 8 m/s
 Massa = 16 kg
 $\text{Velocidade} \times \text{Massa} = 128$
 Energia = 512 J

Quadro da atividade 3

SITUAÇÃO	GRANDEZA	É DIRETAMENTE PROPORCIONAL A		É DIRETAMENTE PROPORCIONAL A		É DIRETAMENTE PROPORCIONAL AO PRODUTO	
		BASE		ALTURA		BASE × ALTURA	
1	ÁREA DO TRIÂNGULO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
2	ÁREA DO TRAPÉZIO	ALTURA		BASE MAIOR + BASE MENOR		(BASE MAIOR + BASE MENOR) × ALTURA	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
3	ÁREA DO LOSANGO	DIAGONAL MAIOR		DIAGONAL MENOR		DIAGONAL MAIOR × DIAGONAL MENOR	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
4	QUANTIDADE DE ENERGIA	MASSA		VELOCIDADE		MASSA × VELOCIDADE	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO

Observação

Conclusão

Orientações didáticas

Na atividade 3 os alunos deverão preencher três quadros por situação, 1, 2, 4, com o auxílio de folhas de figuras anexas à atividade, com exceção da situação 3, pois os dados desta já estão dispostos nos quadros.

Após do preenchimento de cada quadro, o professor deve orientar os alunos do grupo a responderem uma pergunta referente os valores do quadro, isto é, se esses valores estão relacionados proporcionalmente ou não, além do mais os discentes deverão construir uma justificativa para defender a tomada de posição com relação à afirmação ou a negação dada. Para tanto, esperamos que essas justificativas dos alunos recorram aos saberes construídos na atividade 1 sobre as grandezas diretamente proporcionais, pois desse modo, pressupomos que os discentes passarão a adquirir habilidade de análise proporcional envolvendo grandezas e também a consolidarem o conceito de proporcionalidade direta.

Esse processo de execução se dará nas quatro situações que compõem a atividade 3, com isso, esperamos que os alunos percebam a relação proporcional direta entre as três grandezas em cada situação tomadas duas a duas e também a proporcionalidade existente entre a grandeza dependente e o produto das outras duas grandezas da qual ela deriva, pois, assim, os alunos presenciarão empiricamente os princípios que norteiam a proporcionalidade composta, ainda que tal conhecimento não esteja formalizado. Na verdade, a atividade 3 se mostra eficaz, porque permite o aluno vivenciar através do experimento os fatos que garantem a veracidade do conceito da proporcionalidade composta entre três grandezas, e isso é necessário para justificar o funcionamento consciente da regra de três composta, bem como o porquê do uso da operação de multiplicação nessa regra. Aqui é importante ressaltar, o cuidado que o docente deve ter em relação às construções dos alunos, para que os fatos percebidos por eles na execução da atividade 3 estejam devidamente registrados, pois, desse modo, será possível ao final dessa atividade construir observações e conclusões sobre a proporcionalidade composta entre três grandezas, que auxiliem na compreensão desse conceito e, conseqüentemente, na utilização consciente da regra de três composta.

Aqui cabe ressaltar que a situação 4 não traz a relação proporcional direta em duas das três relações existentes entre as grandezas. Essa situação funciona

como um contra exemplo da atividade 3, com a pretensão de conduzir o aluno a perceber que nem toda relação entre três grandezas será diretamente proporcional.

Após os alunos finalizarem as quatro situações, que corresponde ao preenchimento dos quadros e as construções das respostas, o professor deve solicitar a esses alunos que preencham um quadro síntese, onde estão relacionadas às grandezas de cada situação, para serem julgadas segundo a proporcionalidade direta, isto é, espera-se que os alunos indiquem quando tal relação ocorre entre as grandezas analisadas, sobretudo, como relação ao produto. Em seguida, os alunos devem produzir observações e conclusões a respeito das análises realizadas no quadro síntese. Nesse momento, é recomendável que o professor oriente esses alunos nas construções das escritas para que as observações e conclusões estejam coerentes com as experiências vivenciadas nas situações anteriores, pois, quase sempre, os discentes apresentam dificuldade em registrar por meio da escrita as constatações do experimento.

A ambição da atividade 3 é levar o aluno a identificar indícios da proporcionalidade composta entre três grandezas de maneira empírica, além do mais é uma tarefa que busca justificar o uso da multiplicação no algoritmo da regra de três composta, que não aparece explícito nos livros didáticos de matemática, quando abordam esse conteúdo. Pensando nisso, é recomendável que o professor apresente, ao término da atividade, a propriedade das grandezas compostas, a qual garante a funcionalidade da relação proporcional direta entre três ou mais quantidades e, conseqüentemente, fundamenta também o uso da multiplicação entre grandezas na regra de três composta. Desse modo, os alunos poderão associar os fatos presenciados na atividade 3 com a informação prestada, dando ao trabalho matemático significado e funcionalidade.

Uma última ponderação sobre a atividade 3, é com relação a quantidade de situações a serem realizadas, pois percebemos que os alunos demonstraram cansaço e desinteresse durante sua execução, devido ao número elevados de situações. Por isso, ao invés de serem resolvidas quatro situações, recomendamos que sejam apenas três. Logo, deve ser retirada a situação 2, que é semelhante a primeira, deixando as demais. Com isso, a atividade fica otimizada e pode ser realizada em menor tempo sem prejudicar o propósito da mesma.

Com a finalização dessa terceira atividade, o professor deverá apresentar a técnica da regra de três composta aos alunos, seguindo cinco procedimentos de resolução, descritos a seguir:

- I) Montar o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores;
- II) Analisar se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais em relação à grandeza que contém o termo desconhecido 'x';
- III) Indicar a grandeza diretamente proporcional pela seta (ou flecha) $\downarrow$ e a grandeza inversamente proporcional pela seta (ou flecha) $\uparrow$ em relação à grandeza que contém o valor de 'x';
- IV) Montar a proporção de acordo com a propriedade das grandezas compostas;
- V) Determinar o valor de 'x'.

O professor deve mostrar, paulatinamente, cada um desses cinco procedimentos na resolução das questões de regra de três composta. Desse modo, é aconselhável que o docente primeiro resolva questões que tenham somente grandezas diretamente proporcionais, depois com grandezas inversamente proporcionais e, por último, questões com grandezas direta e inversamente proporcionais, pois dessa maneira os alunos conseguem assimilar mais facilmente cada um daqueles procedimentos de resolução da regra.

Nesse momento da sequência didática, quando os alunos passam a trabalhar com a proporcionalidade composta, sugerimos que o professor apresente a esses alunos as grandezas inversamente proporcionais por meio da igualdade de razões com uma delas invertida, uma vez que é desse modo que os alunos deverão escrever essa grandeza no algoritmo da regra de três composta. Cabe ressaltar, que tal abordagem deve ocorrer antes de resolver as questões com grandezas inversamente proporcionais.

Depois de resolvido pelo professor os três tipos de questões de regra de três composta, em que foi mostrado como cada um dos cinco procedimentos de resolução da regra deve ser realizado, é recomendável que os alunos sejam submetidos à resolução de outras questões para fixarem tais procedimentos. Desse modo, fica a cargo do professor aferir a quantidade necessária de questões para que

os alunos adquiram a habilidade em resolver problemas com regra de três composta.

Com essa última etapa concluída, a sequência didática para o ensino da regra de três está finalizada.

A seguir trazemos algumas sugestões de leituras sobre a regra de três e também sobre o uso de sequência didática no ensino de conteúdo.

7. SUGESTÕES DE LEITURA

As obras aqui sugeridas como leituras para a regra de três dizem respeito aos aspectos históricos da regra, a fundamentação matemática, os seus métodos de resolução e o ensino da regra por meio de atividades. Além dessas, apresentamos também outras que tratam de sequência didática para o ensino e aprendizado de conteúdos diversos. Esperamos que essas obras satisfaçam as expectativas dos leitores interessados em conhecer um pouco mais sobre a regra de três, cuja abordagem difere da maneira como é tratada nos livros didáticos de matemática.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história**. v. 1., 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Aprendendo e ensinado regra de três**. Ijuí: Sedigraf, 1999. 104 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2011.

GUERRA, Renato Borges; SILVA, Denivaldo Pantoja da. As práticas sociais da regra de Três. In: MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

_____. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 335 p.

OLIVERIA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

SÁ, Pedro; COSTA, Ana Rita Silva. O ensino de matemática por atividade: uma experiência com regra de três. In: SÁ, Pedro Franco; JUCÁ, Rosineide de Sousa (Org.). **Matemática por atividades: experiências didáticas bem-sucedidas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014. p. 97-112.

SILVA NETO, Oscar. A regra de três nos currículos ao longo da história. In: SIMPÓSIO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM DEBATE, 1., 2014, Joinville. **Anais...** Joinville: UDESC, 2014. p. 105-119.

SMITH. David Eugene. **History of mathematics**. v. 2. Dover publications, New York, 1925.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que as metodologias alternativas para o ensino de matemática produzem, quase sempre, resultados satisfatórios, o que faz desse modo de trabalho uma proposta viável para minorar as dificuldades enfrentadas pelos alunos com a matemática, além do mais, é uma maneira de tornar as aulas dessa disciplina mais atrativas, dinâmicas e participativas para os discentes, diferentemente como acontece no modelo tradicional de ensino, onde o aluno é um agente passivo no processo de ensino e aprendizagem, e tal metodologia parte da premissa que todos os alunos aprendem da mesma forma e no mesmo ritmo, ou seja, pela transferência de conhecimento.

O estudo apresentado aqui sobre a regra de três é parte de uma pesquisa de mestrado sobre esse assunto, e a sequência didática, mostrada anteriormente, para o ensino da regra, enquadra-se como uma metodologia alternativa que foi testada junto a uma turma do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual de ensino fundamental e médio localizada em um bairro da cidade de Belém-PA, e os resultados alcançados nos fizeram pressupor que tal proposta é eficaz e exequível para o ensino da regra de três, pois viabilizou o ensino e aprendizado dos alunos a respeito desse conteúdo nas aulas de matemática.

Nesse pensar que visa à melhoria do ensino de matemática nas escolas, sobretudo, nas públicas, apresentamos a nossa proposta de sequência didática para o ensino da regra de três, como um produto educacional a ser utilizado pelos professores de matemática comprometidos com um ensino dessa disciplina, em especial, com o ensino da regra de três, pois a referida sequência didática pode subsidiar o aprendizado dos alunos no 7º ano do ensino fundamental.

Aqui cabe ressaltar que mesmo com os resultados satisfatórios obtidos no ensino da regra de três por meio da sequência didática citada anteriormente, tal

proposta não esgota a abordagem sobre o tema, pelo contrário, esperamos que outras propostas de ensino possam ser engendradas com o intuito de facilitar a compreensão da regra, tornando o ensino desse conteúdo matemático acessível e funcional para os alunos, que, na maioria das vezes, é apresentado de forma mecânica e desprovido de entendimento e compreensão.

9. REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Traduzido por Elza Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucer, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2018.

_____. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: **Prova Brasil**: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

CARRERA, Josep Pla i. **Liu hui**: nueve capítulos de la matemática china. España: NIVOLA libros y ediciones, S. L., 2009.

CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** v. 1., 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadresh Narayan. **History of hindu mathematics.** ASI Publishing House, Bombay, 1962.

ENTRE jovens 1ª série do ensino médio: guia do tutor matemática. São Paulo: Instituto Unibanco/CAEd, 2013. 362 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 55. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Aprendendo e ensinado regra de três.** Ijuí: Sedigraf, 1999. 104 p.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, Maria José Santana Vieira. **Raciocínio proporcional:** estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade. 2010. 193 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande.

GUERRA, Renato Borges; SILVA, Denivaldo Pantoja da. As práticas sociais da regra de Três. In: MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas socioculturais e educação matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

_____. **Temas e problemas elementares.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 335 p.

MARCONDES, Oswaldo. **Aritmética.** São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1969.

MATRIZES SISPAE matemática – ensino fundamental. Disponível em: <https://sispae.vunesp.com.br/matriz/MAT_EnsinoFundamental.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2017.

MEIRA, Janeisi de Lima. **Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três**. 2012. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém-PA.

OLIVERIA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Tradução de Bernadete Moraes, Iran Abreu Mendes, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SÁ, Pedro Franco de; COSTA, Ana Rita Silva. O ensino de matemática por atividade: uma experiência com regra de três. In: SÁ, Pedro Franco; JUCÁ, Rosineide de Sousa (Org.). **Matemática por atividades: experiências didáticas bem-sucedidas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014. p. 97-112.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três: prática escolar de modelagem matemática**. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém.

SILVA, Eolália Artifon. **Pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas**. 2008. 208 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba.

SILVA NETO, Oscar. A regra de três nos currículos ao longo da história. In: SIMPÓSIO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM DEBATE, 1., 2014, Joinville. **Anais...** Joinville: UDESC, 2014. p. 105-119.

SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. v. 2. Dover publications, New York, 1925.

SODRÉ, Gleison de Jesus Marinho. **Modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação**. 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém.

TAPSON, Frank. **Dicionário Oxford de matemática essencial**. Tradução Fábio Pelicano Borges Vieira. São Paulo: Oxford University Press, 2012.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem