Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Luiz Carlos Soares da Silva

Pedro Franco de Sá

Uma Sequência Didática para o Ensino de Relações Trigonométricas no Triângulo

Belém – PA
2020

Luiz Carlos Soares da Silva
Pedro Franco de Sá

Uma Sequência Didática para o Ensino de Relações Trigonométricas no Triângulo

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

SILVA, Luiz Carlos Soares da e SÁ Pedro Franco de. Uma Sequência Didática para o Ensino de Relações Trigonométricas no Triângulo. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por Atividades. Matemática Financeira.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Prezado professor(a), o ensino de relações trigonométricas se revela em diversos instantes como um desafio em sala de aula, iniciado no 9º ano do ensino fundamental apresenta déficits que seguem pelo ensino médio podendo ter extensão a educação superior, algumas barreiras se revelam na linguagem utilizada, o que parece muito claro para quem fala nem sempre é para quem recebe a informação.

Termos como cateto oposto, os quais são expostos no início do conteúdo dessa área da matemática que se alonga a estudos superiores, podem causar confusão e por consequência não gerar o conhecimento de forma significativa, o uso das relações trigonométricas ultrapassa os limites da escola, tendo aplicações dentro da trigonometria passando por utilização de outros campos do conhecimento, como a construção civil e a realização de grandes medidas expostos na astronomia.

Entre as dificuldades que os estudantes encontram durante o processo de ensino aprendizagem Cunha (2010) aponta que os estudantes envolvidos em sua pesquisa conseguem identificar os triângulos, porém não sabem classifica-los sobre os ângulos, Fortes (2012) ao realizar pesquisa com professores sobre as dificuldades dos estudantes na compreensão das relações trigonométricas mostra que entre as respostas, os professores apontam que "o que mais falta nos colégios são aulas práticas".

O produto aqui apresentado é resultado da dissertação de mestrado de Silva (2019), com o título **O Ensino de Relações Trigonométricas por Atividades,** onde o objetivo do autor estava pautado na verificação dos efeitos de uma sequência didática com base no ensino por (re)descoberta, realizada em uma turma do 9º do ensino fundamental de uma escola pública estadual, localizada no bairro do Guamá na cidade de Belém no estado do Pará, que possibilitasse aos estudantes a construção do conhecimento por meio de suas percepções sobre os temas explorados nas atividades.

O objetivo deste produto é apresentar uma sequência didática para o ensino de relações trigonométricas. Assim temos como pretensão contribuir com a prática docente em sala de aula ofertando mais uma ferramenta a ser utilizada no ensino de relações trigonométricas. Propomos esse produto educacional, o qual se apoiou em diversas pesquisas da área e buscou oportunizar aos estudantes uma participação colaborativa na aquisição do conhecimento.

A seguir apresentamos aspectos históricos sobre trigonometria.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

A história da matemática nem sempre se faz presente nas aulas da disciplina, onde a noção que temos é que tudo já esteve sempre pronto, e nos perguntamos, quem inventou isso? Ou por que devo estudar isso? Todos os que já estiveram em aulas de matemática em algum momento já fizeram essa pergunta ou já ouviram essa pergunta.

A matemática quase nunca contada junto aos acontecimentos de sua evolução pode ser um momento de estímulo e de saída dos cálculos enrijecidos pela própria cobrança da ciência, Mendes e Chaquiam (2016) nos revelam a importância de transformamos a história da matemática como ferramenta facilitadora da aprendizagem.

> Uma das justificativas que mais encontramos à respeito da indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de matemática, aparecem no sentido de contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício de ensino (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 18).

No trabalho de Silva (2019), a evolução histórica da trigonometria está dividida em três momentos, a sociedade escravista com as contribuições de **Eratóstenes (275 – 194 a. C.), Hiparco de Niceia (aproximadamente 190 – 125 a. C), Menelao de Alexandria (100 a. C.), Claudio Ptolomeu (180 d. C)**, passando pelo feudalismo com contribuições de **Abu Al-Wafa (940 – 997), Al Battani (Albatenus 858—929), Al-Kashani (Irán 1350-1439)**, e no capitalismo, as contribuições de **Georg Von Peurbach (1423-1461), Johan Muller (1435- 1476), François Vieta (1540-1610), Edmundo Gunter (1581-1626), Jhon Napier o Neper (1550-1617), Leonardo Euler (1707- 1783),** entre outros.

A trigonometria não se deve a um só homem, mas a um composto esforço e contribuições de vários homens em vários instantes da história, esperamos que possa contribuir para a difusão da história da trigonometria nas aulas de matemática.

Em seguida, apresentamos estudos sobre o ensino de razões trigonométricas.

3 ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção apresentamos alguns resultados de estudos anteriores sobre razões trigonométricas que nos auxiliaram na construção de nossa Sequência

Didática. Os trabalhos aqui apresentados foram divididos em: estudos diagnósticos; estudos sobre livros didáticos e estudos experimentais. No quadro abaixo temos uma síntese dos estudos.

Quadro XX – Síntese dos trabalhos revisados

Estudos Diagnósticos	Resultados
Gomes (2013); Cunha (2010); Fortes (2012); Sousa (2014);	- 64% dos estudantes apontavam como maior dificuldade a lei dos cossenos, e 37% apontavam como a menor dificuldade, problemas envolvendo as relações trigonométricas com imagem. - Os estudantes sabem identificar triângulos, mas não sabem classificá-los quanto a seus lados; Sabem identificar triângulos, mas não sabem classificá-los quanto a seus lados; não sabem classificar quanto a seus ângulos. - Os alunos precisam, antes de mais nada, fazer uso de transferidor, régua, esquadro...para entenderem as noções básicas de Trigonometria. Penso que através de atividades práticas o aluno é motivado a buscar novos conhecimentos ou mobilizar aqueles que já possui. - 10% dos estudantes em pré-teste possuíam habilidade de calcular o valor de sen(α), cos(α) e tg(α), no pós-teste subiu para 79%.
Estudos sobre livros didáticos	**Resultados**
Matemática e Realidade - Iezzi, Dolce e Machado; Matemática - Imenes e Lellis; A Conquista da Matemática - Giovanni Jr. e Castrucci; Matemática - Bianchini	- Apenas um dos livros apresenta o significado da palavra “Trigonometria”. - Dois livros apresentam a importância que a Trigonometria teve na antiguidade. - Todos os livros apresentam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Porém apenas um deles apresenta relações entre as razões. - Em todos os livros aparecem seno, cosseno e tangente dos ângulos principais (30, 45 e 60), em um deles aprece como atividade. - As relações trigonométricas em um triângulo qualquer (lei dos senos e cossenos), aparecem em dois livros apenas, nos outros dois estão ausentes.
Matemática - SMOLE, K; DINIZ; Matemática. Uma nova abordagem. Volume 1, versão Trigonometria - GIOVANNI, J; BONJORNO, J; Matemática. Contexto e Aplicações -	- O primeiro livro apresenta - Trigonometria no triângulo retângulo – Ângulos, arcos de circunferência e círculo trigonométrico – Funções trigonométricas: definição, periodicidade

DANTE, LUIZ ROBERTO	e gráfico – Relações trigonométricas no triângulo qualquer. - O segundo livro apresenta no capítulo sobre trigonometria nos triângulos as razões trigonométricas, seno e cosseno de ângulos complementares, lei dos cossenos, lei dos senos e área de um triângulo qualquer. - O terceiro livro apresenta trigonometria no triângulo retângulo e resolução de triângulos quaisquer.
Estudos experimentais	**Resultados**
Gomes (2013); Arantes (2013); Souza; Silva; Ramos e Rangel (2012); Melo (2013); Marques (2014); Oliveira (2013); Souza (2016)	- Com aplicação de uma sequência didática pautada no ensino por atividades os estudantes saíram de 0% de acertos no pré-teste para uma média de 72% no pós-teste. - Para retomar o ensino das relações trigonométricas no ensino médio, é necessário fazer uma revisão sobre os elementos dos triângulos, pois os estudantes estudaram tais assuntos no ensino fundamental e esse assunto retoma no 2º ano do ensino médio. - Medições realizadas pelos estudantes no próprio ambiente escolar revelando a contextualização da trigonometria, proporcionou maior motivação neles, promovendo aprendizagem significativa e saída da sala de aula para testar o que estava na teoria despertou mais interesse nos estudantes. - Apresentar problemas aos estudantes, os estimulou na criação de estratégias para resolução dos problemas, e trazer para eles a possibilidade de manipulação de instrumentos como o teodolito, trouxe bastante participação. - O uso de monumentos artísticos culturais como exemplos para problemas que precisem de conhecimentos de trigonometria são considerados atrativos pelos estudantes e os impulsionam na participação das atividades. - O uso do software geométrico Geogebra é um aliado poderoso no ensino de relações trigonométricas, pois proporcionou aos alunos visualizarem comportamentos e manipularem resultados até alcançarem o que era

	esperado. - Objetos manipuláveis que ajudam na simulação de situações problemas, permitiu aos estudantes que elaborassem suas observações, medições e chegaram a respostas que a aula pedia, o uso de maquetes de prédios e escada de canudos, ajudou na resolução da situação problema. - O uso do Geogebra possibilitou aos estudantes motivação e empenho durante as atividades, pois com o software os estudantes puderam visualizar as construções e tiveram o valor exato das razões. - O uso da informática foi essencial para sair do que era cotidiano para os estudantes e trouxeram eles para uma compreensão formada, onde eles puderam descobrir regularidades. - Após a aplicação de atividades nos triângulos retângulos para decompor triângulos quaisquer, os estudantes melhoraram problemas que relacionam dois lados e dois ângulos do triângulo; e que relacionam três lados e um ângulo obtuso do triângulo, quando o objetivo é encontrar a medida do lado oposto a tal ângulo. - 90 dos estudantes acha interessantes métodos alternativos para resolução de questões.

Fonte: Silva (2019)

4 PROPOSTA DE SEQUENCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentamos uma sequência didática para o ensino de razões trigonométricas, composta por 11 atividades de aprendizagem na perspectiva do ensino por atividades por re(descoberta) e questões de fixação.

4.1 Ensino por atividades

As atividades desenvolvidas nas aulas de matemática buscam revelar o nível de aprendizagem dos alunos, muitos são os trabalhos que abordam o ensino por atividades nas aulas de matemática, e como essas atividades levadas a sala de aula pode favorecer a aprendizagem significativa.

O ensino de matemática muitas vezes fechados apenas em conteúdos específicos são apontados como dificuldades em compreender e relacionar a matemática com o cotidiano e como explorar a matemática fora dos cálculos que se exaurem nos algoritmos rigorosos da matemática.

O ensino por atividades segundo Correa (2014) traz “configuração prática do método da descoberta”, Ferreira (S.d.) revela que a descoberta possui três características, são elas “procedimentos indutivos, possibilidade de erros e a participação do aluno”, atividades de ensino voltadas para o método da descoberta devem proporcionar aos alunos manusear o conteúdo para que ele possa discutir e descobrir as relações existentes em dado conteúdo.

Para Ausubel (1980 apud Zynger; Aizman; Carvalho e d’Orey. 2002. p. 18) “o aprendizado significativo acontece quando uma informação nova é adquirida mediante um esforço deliberado por parte do aprendiz em ligar tal informação com conceitos ou proposições relevantes preexistentes em sua estrutura cognitiva”.

A aprendizagem por descoberta, trazida por Jerome Bruner (1976) defende que as assimilações se mostram ao sujeito capazes de retomar a compreensão de hipóteses, com auxilio daquilo que já foi estudado em um momento anterior, faz com que o aluno faça suas próprias inferências, dessa maneira ele redescobre o conhecimento, sobre a redescoberta, Zynger; Aizman; Carvalho e d’Orey (2002) revelam que.

Um aspecto a ser destacado é que o aprendizado é um processo ativo pelo qual o aprendiz constrói novas ideias tendo como base seus conhecimentos passados, o que lhe permite formular hipóteses e tomar decisões contando, para isto, com suas estruturas cognitivas. São elas que permitem ao sujeito buscar mais informações além daquelas já oferecidas pelos professores ou das que encontra em livros e textos. Nessa busca ele redescobre o conhecimento, e estabelece relações com o saber, com autonomia. (Zynger; Aizman; Carvalho e d’Orey, 2002, p. 68).

Para Sá (1999) o método da redescoberta possui três técnicas sendo uma delas, a técnica da redescoberta, sendo dividida em duas maneiras: demonstrações e experimentações, nas experimentações os alunos farão suas análises em sala de um assunto já estudado, cabendo ao professor a mediação das rupturas que possa surgir, Sá (1999) destaca que o professor deve:

- Elaborar um título atraente que não deixe indícios do resultado do experimento a ser realizado. Caso não consiga, é conveniente deixar sem título, que poderá ser adotado no final pelos próprios alunos.
- Estabelecer o procedimento da atividade de acordo com as possibilidades do momento.

O método da redescoberta também fala em habilidades que devem ser desenvolvidas como planejar, analisar, pesquisar avaliar entre outras, sempre com objetivo que o aluno possa encontrar regularidades para aí fazer suas próprias conclusões.

Buscamos atividades que possam proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa, facilitando nas deduções das definições pertinentes ao conteúdo de relações trigonométricas, dessa forma, colaborando para a descoberta ou redescoberta dessas definições, Sá (2009) ao falar do ensino de matemática por atividades, explica que este visa "conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos das atividades".

Sá e Nascimento (2014) revelam que quando se colocam situações para que os próprios alunos possam descobrir a matemática que está envolvida nas situações, acontece um desenvolvimento mais interessante e motivador para os alunos, pois para os autores, "o aluno é levado a descobrir a matemática, e não apenas decorar fórmulas e relações matemáticas que ele não entende".

Assim, buscamos com as informações levantadas sobre as dificuldades dos alunos, com atividades baseados no método da descoberta ou redescoberta proporcionar uma aprendizagem significativa, construiremos nossa sequência de atividades voltadas para essas metodologias de ensino, ensino capaz de levar os alunos a descobrirem as relações trigonométricas. Atividades que não seja necessária memorizar, mas sim descobrir.

4.1.1 Ensino de matemática por atividades

Para ir ao encontro de uma aula de matemática que esteja centrada no ensino da disciplina por atividades, vamos nos apoiar no que revela Sá (2019) no livro intitulado: Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades, onde o autor divide as atividades em atividade por conceituação e atividade por redescoberta.

Sá (2019, p. 14) define atividade de conceituação como aquela que "tem como objetivo levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático. A definição deste objeto percebido é o objetivo da atividade de conceituação.".

Para o autor a atividade de redescoberta é aquela que:

> "tem como objetivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado." (SÁ, 2019, p. 14-15).

Nessas atividades, o professor deve desenvolver a função de observador, assim como atentar para o auxílio dos estudantes e possíveis intervenções que cominem para sanar dúvidas, Sá (2019, p. 15), nos leva aos momentos que as atividades de conceituação assim como as atividades de redescoberta contém, uma ficha com esses momentos se encontra nos anexos do trabalho de Silva (2019).

Dentre os momentos temos: **organização** onde o professor divide as equipes que farão as atividades entre 2 e 4 estudantes, **apresentação** onde o professor explica para as equipes como devem proceder, **execução** momento o qual as equipes começam a executar o que é proposto na atividade, para cada momento temos marcações que será realizada pelo professor/observador como por exemplo se as equipes não desperdiçaram com tempo com assuntos alheios ao que está sendo estudado na atividade.

Temos também o momento do **registro** onde os estudantes anotam em espaço destinado para tal as informações que eles colheram na execução da atividade, na **análise** verifica-se as relações, as regularidades advindas do objeto e na **institucionalização** é o momento que o professor faz acomodação das anotações dos estudantes revelando o conceito buscado.

4.2 Atividade 1

Título: Classificação de triângulo quanto ao ângulo – parte 1

Objetivo: Classificar triângulos quanto ao ângulo conhecendo os ângulos internos de um triângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos, papel, caneta ou lápis.

Questão motivadora

Com base em seus conhecimentos matemáticos diga se é verdade ou falso.

I - Um triângulo retângulo é aquele que possui dois ângulos retos.

II - Um triângulo acutângulo é aquele que possui apenas um ângulo agudo.

III - Um triângulo obtusângulo é aquele que possui apenas um ângulo obtuso.

Procedimentos:

Para cada triângulo do quadro de triângulos:

a) Meça os ângulos internos de cada triângulo.
b) Faça anotações dos valores das medidas encontradas em cada triângulo.
c) Responda as questões.

1. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem um ângulo interno de 90°?

2. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem um ângulo interno maior que 90°?

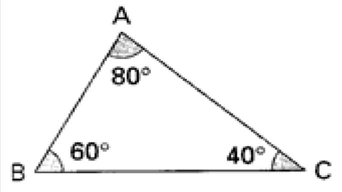
3. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem todos os ângulos interno menores que 90°?

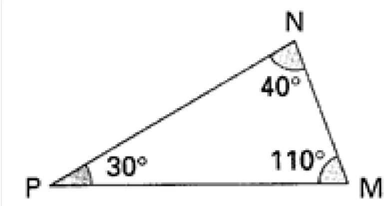
Observações.

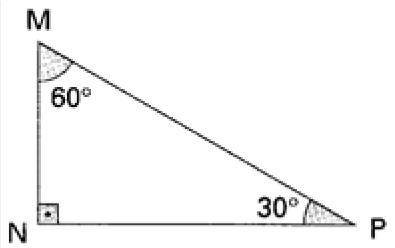
Conclusão.

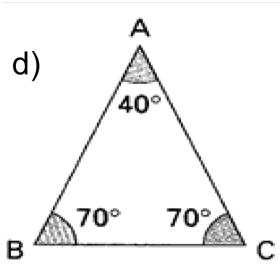
Lista de Questões.

1) Diga se os triângulos com os lados escritos nas letras abaixo são acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Observe a imagem abaixo e responda: A forma triangular do prédio pode ser classificada como:

a) Triângulo acutângulo.

b) Triângulo retângulo.

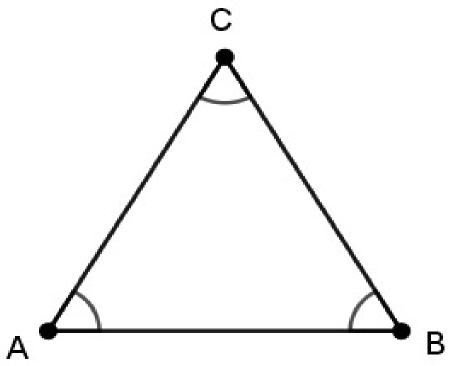
c) Triângulo obtusângulo.

d) Faltam dados e não podemos classificar.

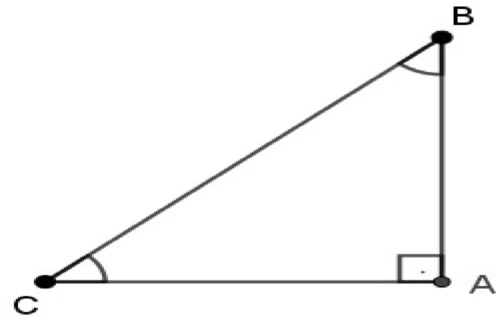
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 1.

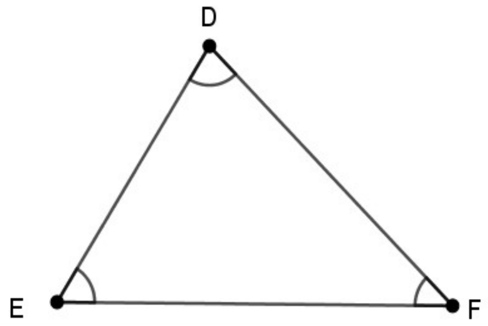
Triângulo 1



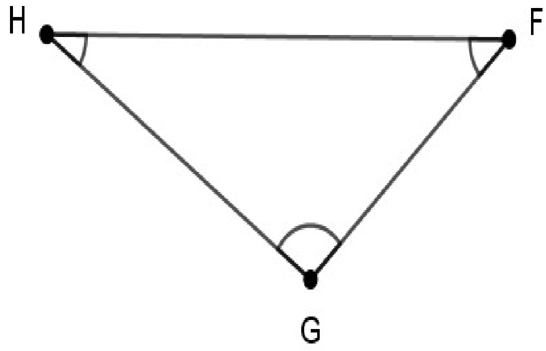
Triângulo 2



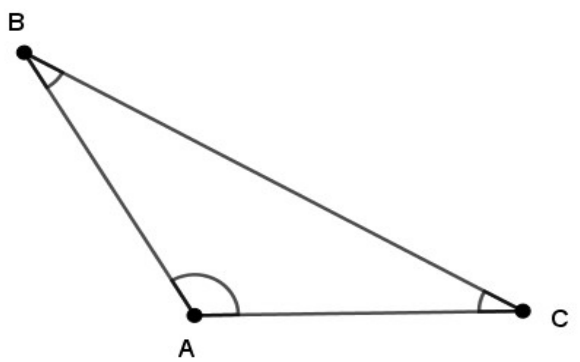
Triângulo 3



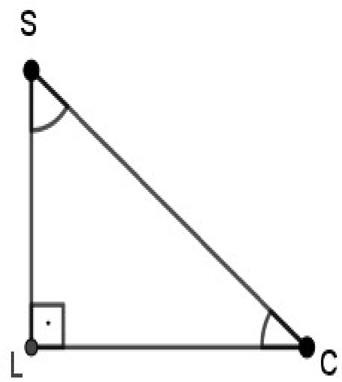
Triângulo 4



Triângulo 5



Triângulo 6

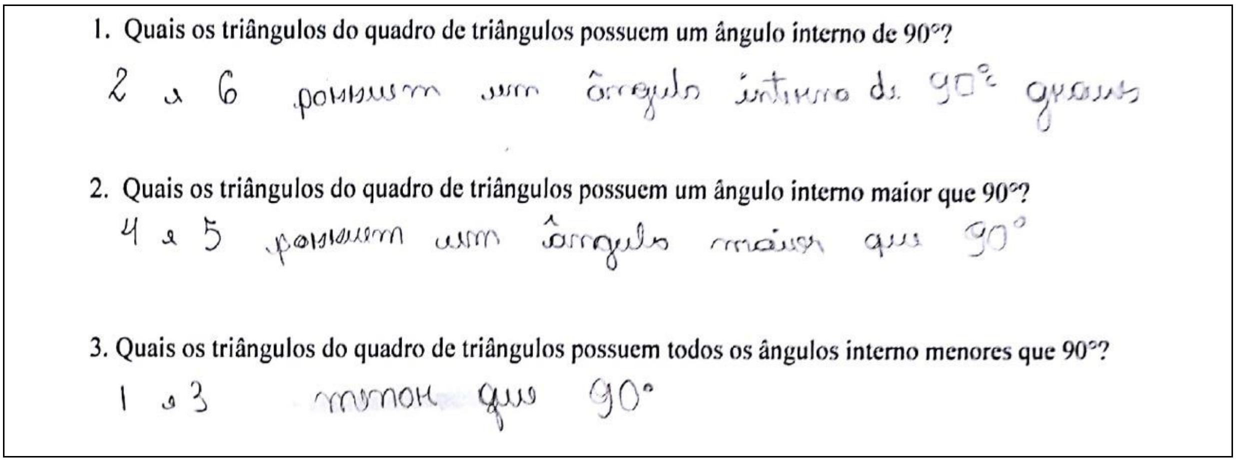


Recomendações didáticas

Esta atividade inicia nossa sequencia didática e permite aos estudantes o manuseio da régua e do transferidor para realizar as mensurações propostas a eles.

O estudantes ficam motivados ao manusearem objetos que sejam uteis durante as aulas, saem da reprodução do quadro no caderno, apontamos que seria melhor o uso de um transferidor de 180º, pois os estudantes tiveram dificuldades em manusear os de 360º. Ao responderem as questões esperamos que as respostas fique como na figura 1 abaixo.

.Figura 1 – Respostas dadas pelos estudantes na atividade 01



1. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem um ângulo interno de 90°?

2 e 6 possuem um ângulo interno de 90° graus

2. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem um ângulo interno maior que 90°?

4 e 5 possuem um ângulo maior que 90°

3. Quais os triângulos do quadro de triângulos possuem todos os ângulos interno menores que 90°?

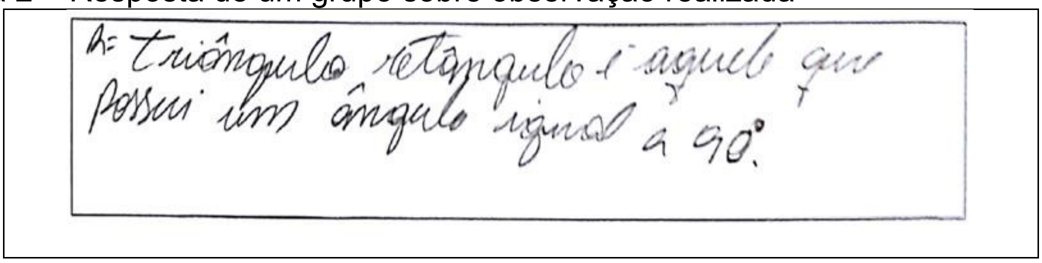
1 e 3 menor que 90°

Fonte: Silva (2019)

Em seguida, concluímos com eles sobre a classificação dos triângulos quanto aos ângulos quando se conhecem os ângulos internos desses triângulos e os nomes , depois solicitamos aos estudantes que retornem a questão motivadora, pois eles não conseguiram realizar a solução, ao solicitarmos as observações, eles alegaram que usar o transferidor é difícil, a seguir exemplo de uma possível observação realizada pelos estudantes.

A figura 2 a seguir, representa o que desejamos que os discentes respondam.

Figura 2 – Resposta de um grupo sobre observação realizada



R: triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo igual a 90°.

Fonte: Silva (2019)

Em seguida, pedimos aos estudantes que realizassem a resolução do exercício com intuito de fixação dos conteúdos vistos na atividade, dessa maneira reforçando a classificação desejada em nossa atividade.

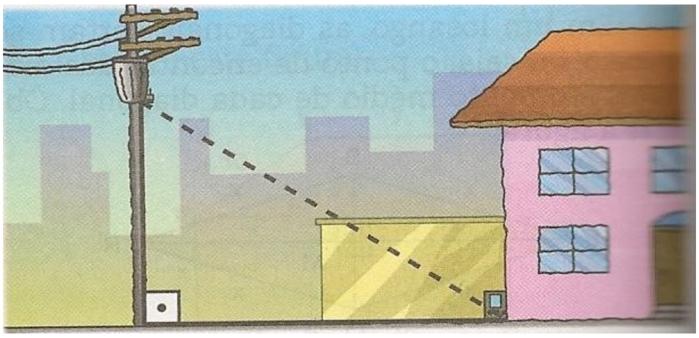
4.3 Atividade 2

Título: Classificação de triângulo quanto ao ângulo - parte 2

Objetivo: Classificar triângulos quanto ao ângulo conhecendo os lados.

Materiais necessários: Quadro de triângulos, papel, caneta ou lápis.

Quantos metros de fio são necessários para ligar os fios de um poste de 6 m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8 m da base do poste?



Procedimento: Dado os triângulos no quadro, com os lados a, b e c.

- Em todos os triangulo contidos no quadro, para cada triângulo.
  a) Determine **a** como o maior lado em cada triângulo,
  b) Determine os lados **b** e **c**.
  c) Determine $\mathbf{a^2}$, $\mathbf{b^2}$ e $\mathbf{c^2}$.
  d) Determine a soma $\mathbf{b^2 + c^2}$,
  e) Determine marcando com **x** na tabela se $\mathbf{a^2}$ é maior que $\mathbf{b^2 + c^2}$ ou se $\mathbf{a^2}$ é igual a $\mathbf{b^2 + c^2}$ ou se $\mathbf{a^2}$ é menor que $\mathbf{b^2 + c^2}$.
  f) Escreva qual a classificação, se é **acutângulo, retângulo** ou **obtusângulo** no local indicado **tipo de triângulo** na tabela.

Triângulo	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	a^2 é maior que $b^2 + c^2$	a^2 é igual a $b^2 + c^2$	a^2 é menor que $b^2 + c^2$	Tipo de triângulo
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

Observações.

Conclusão.

Lista de Questões.

2) Diga se os triângulos com os lados escritos nas letras abaixo são acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

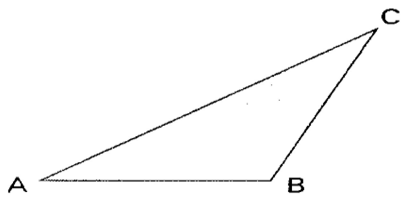
a) Triângulo com lados 14 cm, 10 cm e 8 cm.

b) Triângulo com lados 10 cm, 8 cm e 6 cm.

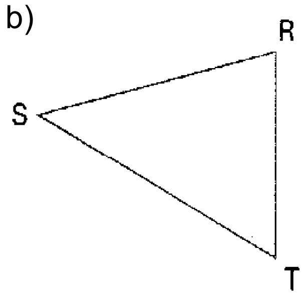
c) Triângulo com lados 8 cm, 7 cm e 6 cm.

3) Observe os triângulos e classifique-os em acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Utilize régua para fazer as medições dos lados dos triângulos.

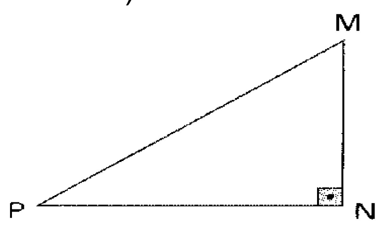
a)



b)



c)



4) Qual a relação entre os lados **a, b** e **c** de um triângulo, tendo **a** como maior lado de um triângulo ABC para que se tenha:

a) ABC triângulo retângulo?

b) ABC triângulo acutângulo?

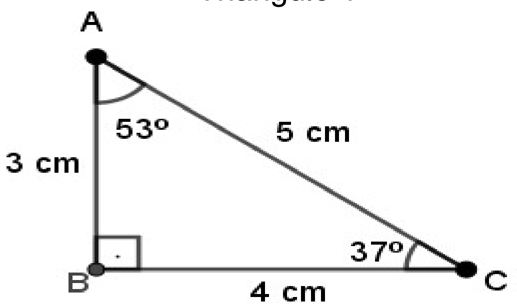
c) ABC triângulo obtusângulo?

5) Em um triângulo retângulo, os catetos medem 6 cm e 8 cm, qual é o valor da hipotenusa?

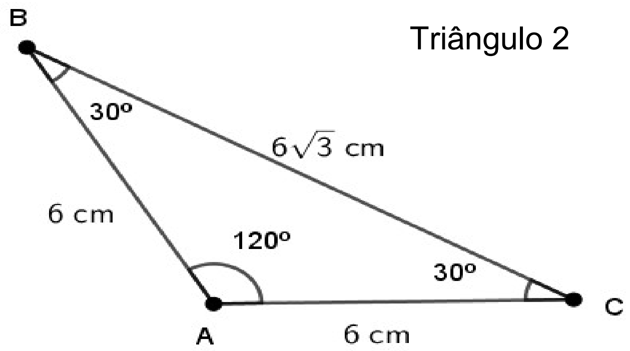
6) Qual o perímetro de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 12 cm?

Quadro de Triângulos 2

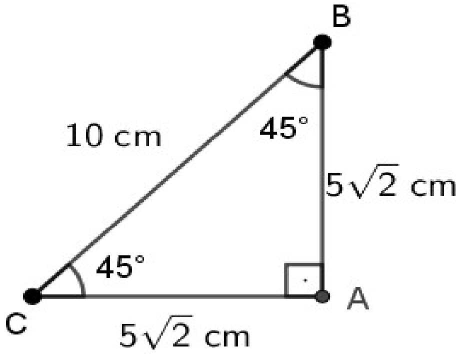
Triângulo 1



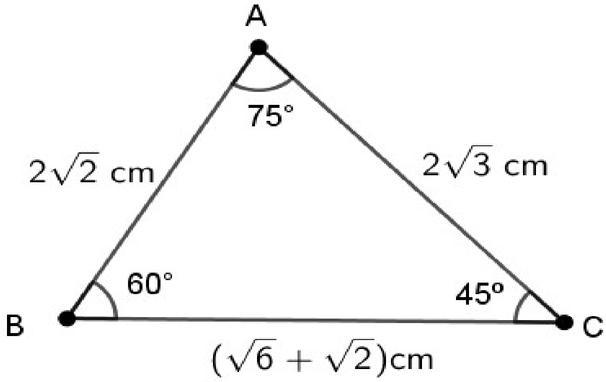
Triângulo 2



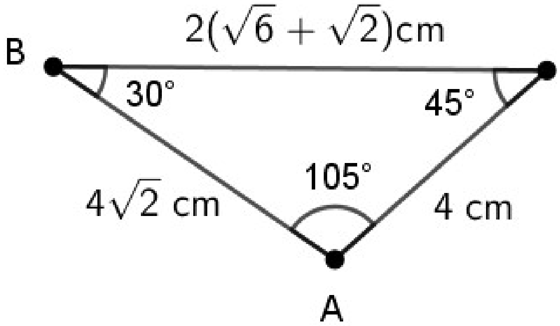
Triângulo 3



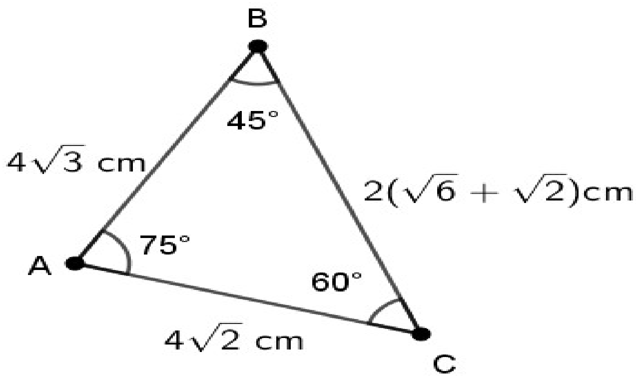
Triângulo 4



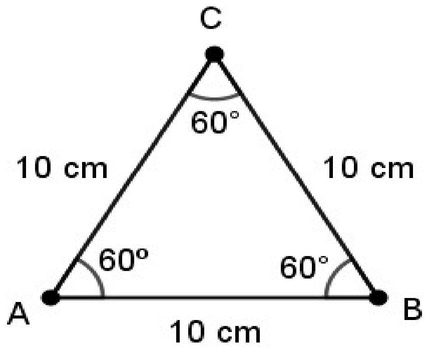
Triângulo 5



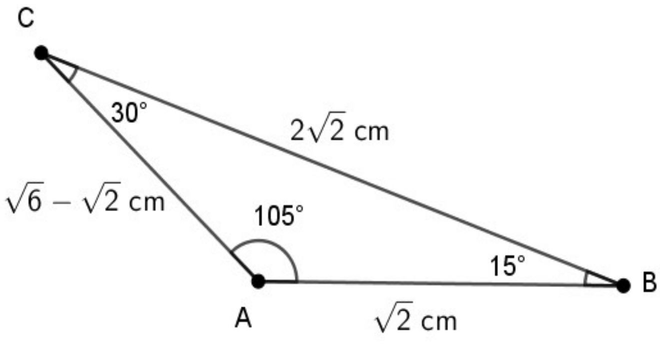
Triângulo 6



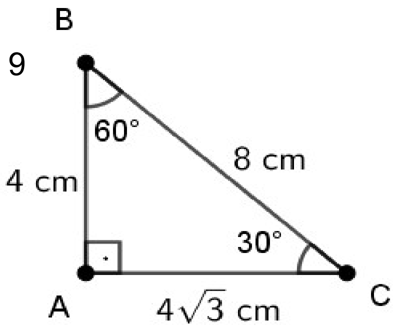
Triângulo 7



Triângulo 8



Triângulo 9



Recomendações didáticas

Esta atividade é continuação da atividade 1 que começou com a classificação dos triângulos quanto ao ângulo conhecendo os ângulos internos de cada triângulo, agora temos os lados do triângulo como também os ângulos internos de cada triângulo.

Os estudantes dando continuidade ao que foi visto na atividade anterior e já conhecendo a classificação dos triângulos quantos aos ângulos, partiram para o procedimento, e realizaram o que se pedia elevando os quadrados e fazendo a soma desses quadrados, escolhendo o maior lado e nomeando-o como **a.**

E após, solicitamos que preenchessem o quadro disponibilizado, assim como o espaço para a classificação que eles já conheciam, assim temos na figura 3 o preenchimento de uma das equipes.

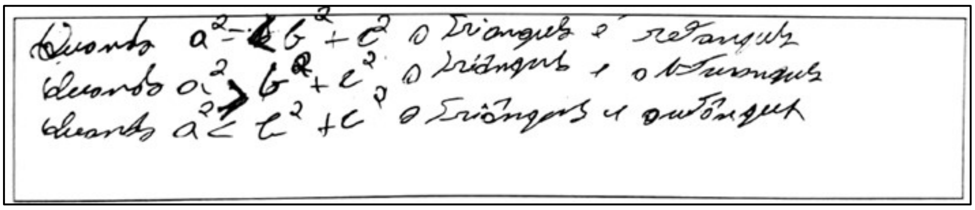
Figura 3 – Resultado das medições de um aluno com o auxílio da fita métrica

Triângulo	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	a^2 é maior que $b^2 + c^2$	a^2 é igual a $b^2 + c^2$	a^2 é menor [redacted] que $b^2 + c^2$	Tipo de triângulo
1	5	3	4	25	9	16	25		X		retângulo
2	$6\sqrt{3}$	6	6	108	36	36	72	X			Obtusâng
3	10	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	100	50	50	100		X		retângulo
4	[illegible]	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	14,92	8	12	20			X	acutângulo
5	[illegible]	$4\sqrt{2}$	4		32	16	48	X			obtusângulo
6	[illegible]	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	59,71	48	32	80			X	acutângulo
7	10	10	10	100	100	100	200			X	acutângulo
8	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	8	2	1,07	3,07	X			obtusângulo
9	8	4	[illegible]	64	16	48	64		X		Retângulo

Fonte: Silva (2019)

Os estudantes após o preenchimento do quadro fizeram as observações e conclusões, próximas do que esperávamos, pois faltou definir o lado a como sendo o maior lado de cada triângulo para que a relação seja verdadeira, como vemos na figura 4 abaixo.

Figura 4 – Conclusão de um dos grupos sobre a relação que existe entre os lados de um triângulo e a classificação quanto ao ângulo.


Quando $a^2 = b^2 + c^2$ o triangulo é retangulo
Quando $a^2 > b^2 + c^2$ o triangulo é obtusangulo
Quando $a^2 < b^2 + c^2$ o triangulo é acutangulo

Fonte: Silva (2019)

Após esse momentos acomodamos o que eles estavam apontando que as relações são válidas, mas que o lado a precisa ser definido como o maior lado do triângulo dado. Aproveitamos para retomar o teorema de Pitágoras o qual estava relacionado com a questão inicial, assim como trata-se do da relação entre os lados que eles realizaram para os triângulos retângulos.

4.4 Atividade 3

Título: Cateto oposto e cateto adjacente de um ângulo.

Objetivo: Identificar o ângulo e o seu cateto oposto no triangulo retângulo, o ângulo e o seu cateto adjacente no triangulo retângulo e a hipotenusa.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos, papel, caneta ou lápis.

Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos, com os lados AB, BC e CA e os ângulos agudos contidos

Em todos os triângulos retângulos contidos na ficha, para cada ângulo agudo formado por um cateto e a hipotenusa de cada triangulo retângulo.

a) Determine qual dos catetos não faz parte da formação do ângulo.
b) Determine qual cateto faz parte da formação do ângulo e a hipotenusa, preencha a tabela com as informações encontradas.

Triangulo	Ângulo agudo	Medida do Cateto que não faz parte da formação do ângulo agudo	Medida do Cateto que faz parte da formação do ângulo agudo	Medida da Hipotenusa
1				
1				
2				
2				
3				
3				
4				
4				
5				
5				
6				
6				
7				
7				
8				
8				

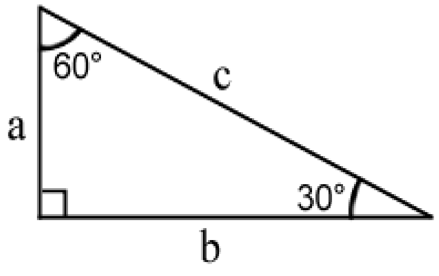
Observações.

Conclusão.

Lista de Questões.

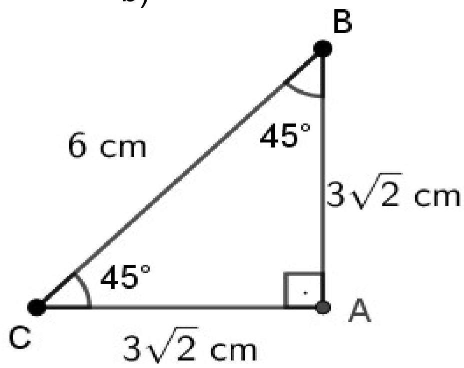
7) Nos triângulos abaixo complete o quadro com os catetos oposto, adjacente e a hipotenusa em cada caso.

a)



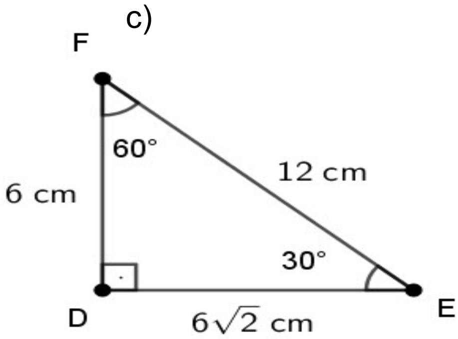
Lados	Ângulo agudo 30º	Ângulo agudo 60º
Cateto Oposto		
Cateto Adjacente		
Hipotenusa		

b)



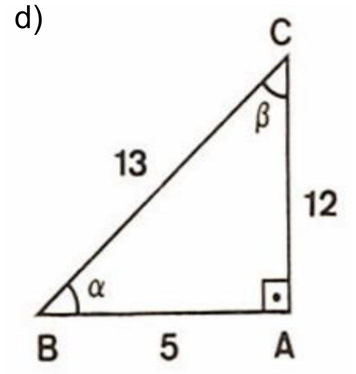
Lados	Ângulo agudo	Ângulo agudo
	45º	45º
Cateto Oposto		
Cateto Adjacente		
Hipotenusa		

c)



Lados	Ângulo agudo	Ângulo agudo
	30º	60º
Cateto Oposto		
Cateto Adjacente		
Hipotenusa		

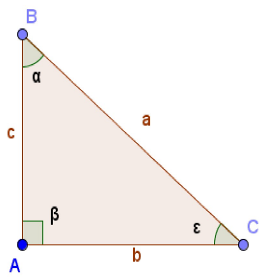
d)



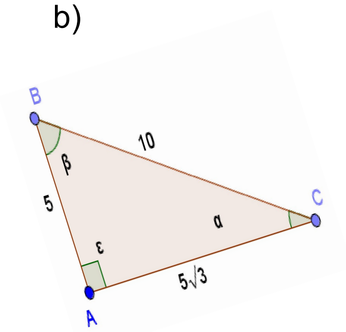
Lados	Ângulo agudo	Ângulo agudo
	α	β
Cateto Oposto		
Cateto Adjacente		
Hipotenusa		

2. Determine nos triângulos retângulos abaixo quais são os catetos oposto e adjacente ao ângulo α?

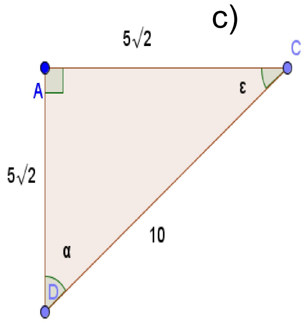
a)



b)

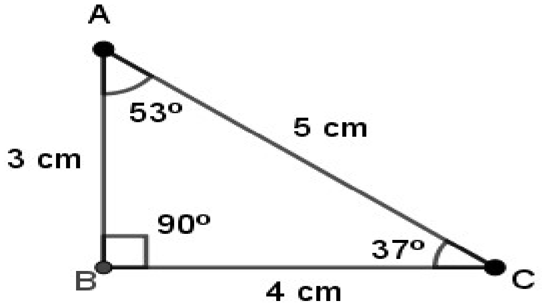


c)

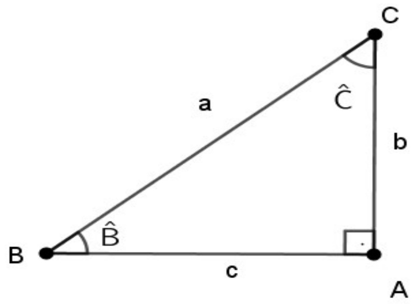


Quadro de Triângulos 3

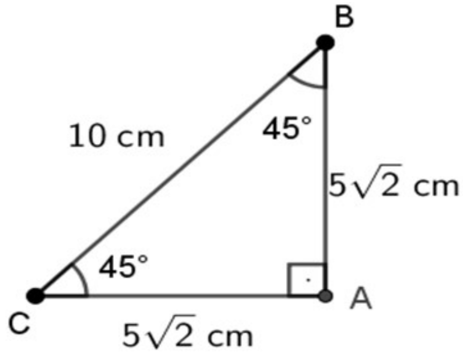
Triângulo 1.



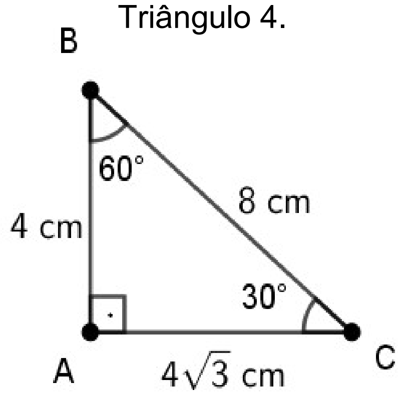
Triângulo 2.



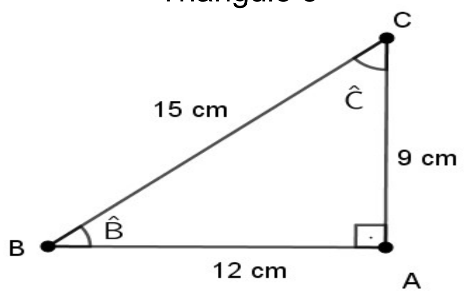
Triângulo 3.



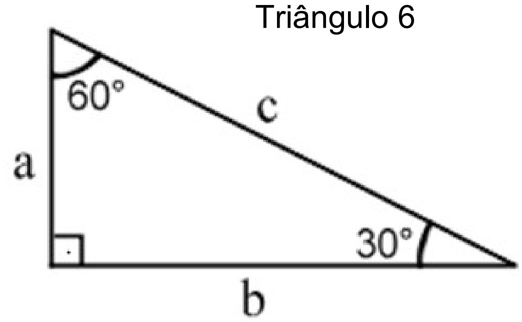
Triângulo 4.



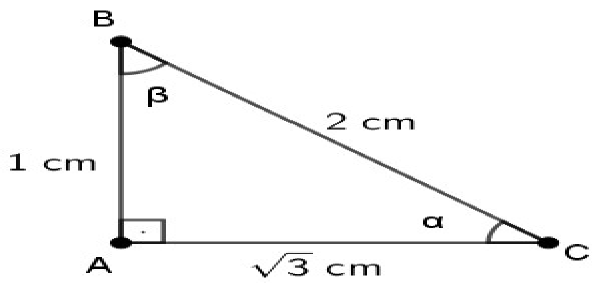
Triângulo 5



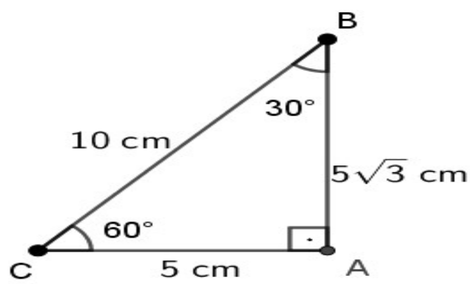
Triângulo 6



Triângulo 7



Triângulo 8



Recomendações didáticas

Esta atividade foi desenvolvida para conceituar cateto oposto e cateto adjacente de um triângulo retângulo, para isso na atividade anterior quando falamos do teorema de Pitágoras, relembramos os componentes de um triângulo retângulo: os catetos e a hipotenusa. Orientamos que as atividades sejam realizadas a partir de três estudantes.

Os grupos organizados e após deve entregar o material necessário, isso deve se repetir em todas as atividades e prosseguir com a orientação dos grupos, deixá-los manipulando as fichas.

Na execução, os estudantes devem preencher o quadro disponibilizado na atividade com a ideia de ângulo e os lados que formam tais ângulos, usando quando catetos, os temos: aquele que faz parte da formação do ângulo e aquele que não faz parte da formação do ângulo. Como está disposto na figura 5.

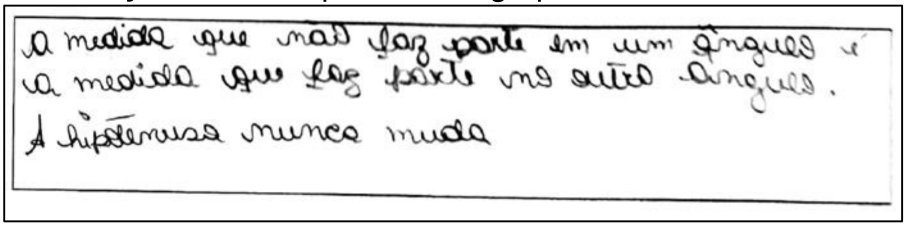
Figura 5 – Preenchimento do quadro da atividade 3 por um dos grupos

Triangulo	Ângulo agudo	Medida do Cateto que não faz parte da formação do ângulo agudo	Medida do Cateto que faz parte da formação do ângulo agudo	Medida da Hipotenusa
1	53	4	3	5
1	37	3	4	5
2	[illegible]	6	6	[illegible]
2	[illegible]	6	6	[illegible]
3	45	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	10
3	45	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	10
4	60	$4\sqrt{3}$	4	8
4	30	4	$4\sqrt{3}$	8
5	[illegible]	12	9	15
5	[illegible]	9	12	15
6	60	6	[illegible]	6
6	30	[illegible]	6	6
7	[illegible]	3	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	3	3	[illegible]
8	30	5	$5\sqrt{3}$	10
8	60	$5\sqrt{3}$	5	10

Fonte: Silva (2019)

Posteriormente, após eles terem internalizado a ideia de cateto que faz parte da formação do ângulo escolhido e cateto que não faz parte do ângulo escolhido, pedimos que realizassem o preenchimento da observação e da conclusão, esperávamos que eles observassem as regularidades como mostra a figura 6 abaixo.

Figura 8 – Observação realizada por um dos grupos



A medida que não faz parte em um ângulo é a medida que faz parte no outro ângulo.
A hipotenusa nunca muda

Fonte: Silva (2019)

Os estudantes perceberam que o cateto que fará parte da formação e o que não fará depende da escolha do ângulo, em seguida formalizamos a nomenclatura para tais catetos, como sendo cateto oposto a um ângulo e cateto adjacente a um ângulo, solicitamos a resolução da lista de questões. E em cada atividade perguntamos aos estudantes o que eles achavam da aula e pedíamos que escrevessem.

4.5 Atividade de aprofundamento 01

Título: Baralho dos lados do triângulo retângulo.

Objetivo: Ampliar o aprendizado dos elementos dos triângulos retângulos.

Participantes: de 02 a 04

Material: 52 cartas, entre elas, cartas triângulos (13), cartas hipotenusa (13), cartas cateto oposto (13) e cartas cateto adjacente (13).

Regras:

1. Organize a turma em grupos e para cada um desses grupos de participantes dê um Baralho das Relações de lados do triângulo retângulo;
2. Embaralhe as cartas;
3. Distribua 06 (seis) cartas para cada aluno;
4. Sobre a mesa, coloque as cartas restantes com a face virada para baixo;
5. Um dos alunos inicia comprando uma carta do monte de cartas, analisa a possibilidade de formar um jogo de quatro cartas (exemplo: caso o jogador faça um jogo com as cartas: carta com um triângulo que tenha como destaque para o ângulo $\alpha = 30°$; carta com a medida do cateto oposto a 30°; carta com a medida do cateto adjacente a 30° e carta com a medida da hipotenusa correspondente a carta triângulo. Caso não seja possível formar jogos, ele faz o descarte de uma carta passa a vez.
6. O jogo continua, com os alunos tendo duas opções de compra, ou do monte de cartas ou a última carta descartada do jogo;

7. Ganha o jogo quem conseguir forma, primeiro, 02 (dois) jogos de quatro cartas.

Veja os exemplos a seguir:

Recomendações didáticas

Nesta atividade os estudantes podem ter dificuldades para iniciar as partidas e formar os jogos, então o ideal é o professor fazer uma demonstração de como se monta um jogo para ganhar a partida. Essas atividades saem da normalidade de sala de aula e podem mostrar que a matemática está presente em outras situações, assim como estimula o desenvolvimento de estratégias para solução de problemas e o trabalho em equipe.

4.6 Atividade 4

Título: Relações trigonométricas dos ângulos agudos no triangulo retângulo.

Objetivo: Descobrir as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triangulo retângulo.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos e no inicio um problema envolvendo o assunto, papel, caneta ou lápis.

Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos.

a) Determine as medidas das razões entre as medidas dos catetos opostos e as medidas das hipotenusas.

b) Determine as medidas das razões entre as medidas dos catetos adjacentes e as medidas das hipotenusas.

c) Determine as medidas das razões entre as medidas dos catetos opostos e as medidas dos catetos adjacentes.

d) Preencha a tabela com as informações encontradas

Triangulo	Ângulo agudo	Cateto Oposto / Hipotenusa	Cateto Adjacente / Hipotenusa	Cateto Oposto / Cateto Adjacente
1				
1				
2				
2				
3				
3				
4				
4				
5				
5				
6				
6				

Observações

Conclusão.

Lista de Questões.

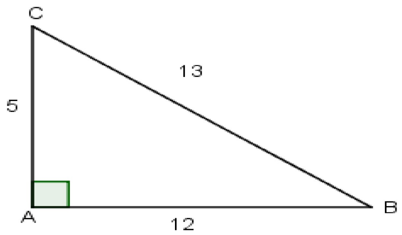
1. Calcule cosseno e tangente do ângulo $\hat{B}$, quando:

a) $sen\ \hat{B}\ = \frac{4}{5}$

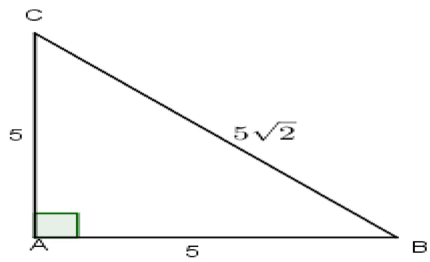
b) $sen\ \hat{B}\ = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2. Determine as razões trigonométricas.

a) $sen\ \hat{C}, cos\ \hat{B}; tg\ \hat{B}$



b) $sen\ \hat{B}, cos\ \hat{B}; tg\ \hat{C}$



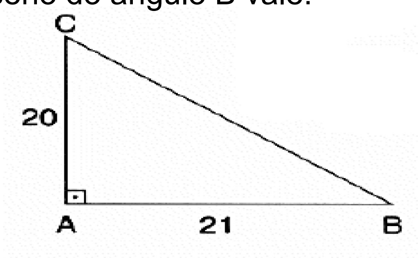
3. Na figura abaixo, o seno do ângulo B vale:

a) $\frac{20}{21}$

b) $\frac{20}{29}$

c) $\frac{21}{29}$

d) $\frac{29}{20}$



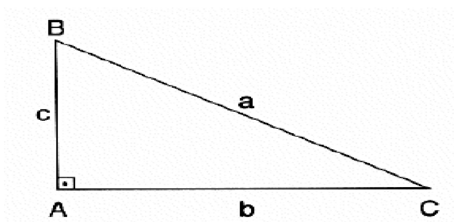
4. Para o triângulo retângulo ABC, a relação correta é:

a) $sen\ B = \frac{b}{a}$

b) $cos\ B = \frac{b}{a}$

c) $tg\ B = \frac{c}{b}$

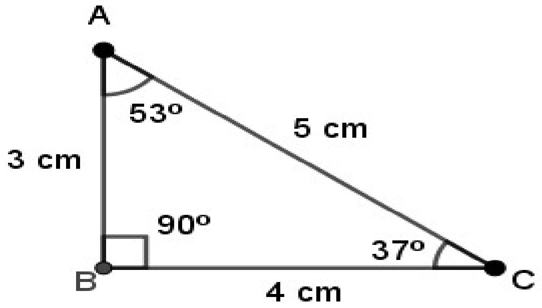
d) $tg\ C = \frac{b}{c}$



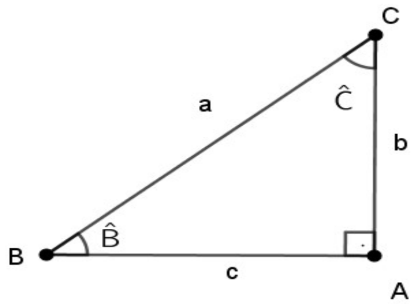
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 4

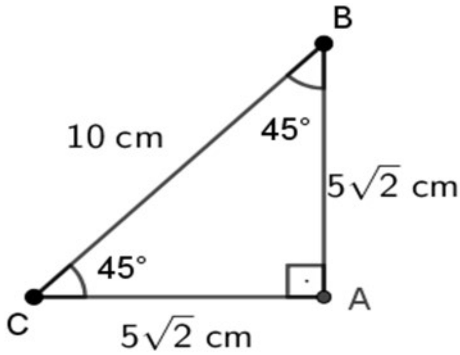
Triângulo 1.



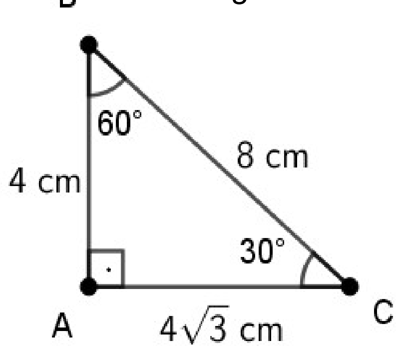
Triângulo 2.



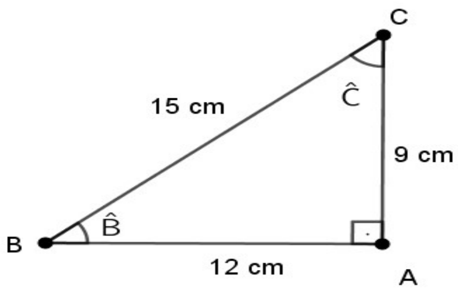
Triângulo 3.



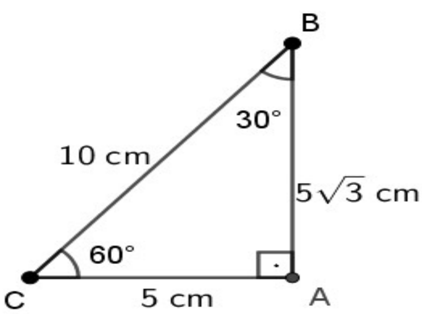
Triângulo 4.



Triângulo 5



Triângulo 6



Recomendações didáticas

Esta atividade de aprendizagem dá continuidade a atividade de descoberta dos nomes: cateto oposto e cateto adjacente, sobre tudo de que isso dependerá de um ângulo escolhido, os estudantes precisam conhecer o fato de o cateto oposto não ser um só para o triângulo retângulo. Como as outras atividades, esta também será em grupo.

O professor deve dirigir as ações, distribuir as fichas aos grupos, os grupos poderão ser formados pelas afinidades construídas dentro de sala, os estudantes devem ter liberdades para executarem a atividade, o professor deve estar envolvido indo a todos os grupos quando solicitado.

Os estudantes devem completar o quadro com as informações contidas na ficha contendo os triângulos, vale ressaltar que eles irão necessitar de alguns cálculos que podem ser realizados com calculadora, assim como poderá ser necessário uma revisão sobre divisão de fração assim como simplificação.

Esperamos encontrar o preenchimento como mostra a figura 9 abaixo.

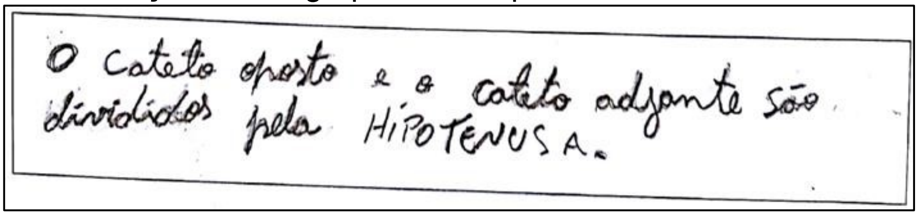
Figura 9 – Preenchimento da atividade 04 por um grupo

Triangulo	Ângulo agudo	Cateto Oposto / Hipotenusa	Cateto Adjacente / Hipotenusa	Cateto Oposto / Cateto Adjacente
1	53	4/5	3/5	4/3
1	37	3/5	4/5	3/4
2	$\hat{B}$	b/a	c/a	b/c
2	$\hat{C}$	c/a	b/a	c/b
3	45	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/5\sqrt{2}$
3	45	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/5\sqrt{2}$
4	60	$4\sqrt{2}/8$	4/8	$4\sqrt{2}/4$
4	30	4/8	$4\sqrt{2}/8$	$4/4\sqrt{2}$
5	$\hat{C}$	12/15	9/15	12/9
5	$\hat{B}$	9/15	12/15	9/12
6	60	$5\sqrt{2}/10$	5/10	$5\sqrt{2}/5$
6	30	5/10	$5\sqrt{2}/10$	$5/5\sqrt{2}$

Fonte: Silva (2019)

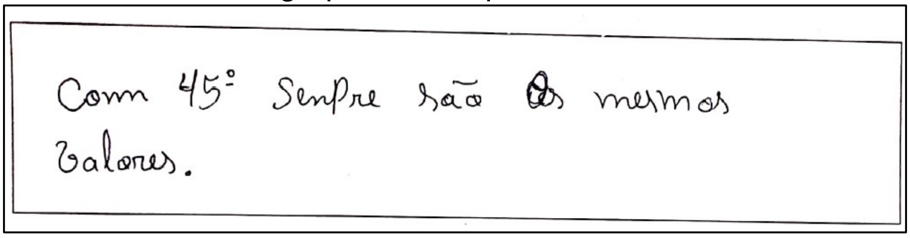
Nas observações dos estudantes e as conclusões deles deixamos abertas, esperando que eles possam elaborar de acordo com as regularidades que eles perceberam como mostram as figuras abaixo.

Figura 10 – Observação de um grupo sobre o preenchimento da atividade 04


O cateto oposto e o cateto adjante são dividido pela HIPOTENUSA.

Fonte: Silva (2019)

Figura 11 – Conclusão de um grupo sobre o preenchimento da atividade 04


Com 45º Sempre são os mesmos valores.

Fonte: Silva (2019)

Com base nas observações dos estudantes que perceberam as regularidades onde o cateto oposto de um ângulo agudo é o cateto adjacente do outro ângulo agudo desse triângulo, e na conclusão que as divisões entre cateto oposto de 45º e hipotenusa, e a divisão entre cateto adjacente de 45º e hipotenusa tem o mesmo valor, formalizamos com eles que essas divisões possuem uma nomenclatura específica: seno, cosseno e tangente de um ângulo.

Em seguida propomos exercícios para eles procederem nas resoluções.

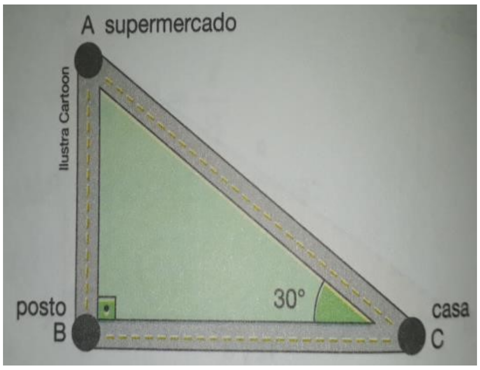
4.7 Atividade 5

Título: Relações trigonométricas no triangulo retângulo usando ângulos notáveis.

Objetivo: Descobrir as regularidades das razões ou relações trigonométricas seno (30º), cosseno (30º) e tangente (30º), seno (45º), cosseno (45º) e tangente (45º), seno (60º), cosseno (60º) e tangente (60º)

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos e a questão problema, papel, caneta ou lápis.

Após seu trabalho, Carolina foi de carro ao supermercado (ponto A). Ao sair, ela percebeu que o nível de combustível do carro estava muito baixo. Ela optou em antes passar no posto que fica na esquina de duas avenidas (ponto B) para depois ir para casa (ponto C). Observando o esquema abaixo e sabendo que pela Avenida AC o percurso tem 18 km, quantos quilômetros Carolina percorreu a mais indo pelas avenidas AB e BC? (Faça $\sqrt{3} = 1,7$)



Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos e o problema contido na ficha.

a) Determine o seno de 30º, cosseno de 30º e tangente de 30º.
b) Determine o seno de 45º, cosseno de 45º e tangente de 45º.
c) Determine o seno de 60º, cosseno de 60º e tangente de 60º.
d) Preencha a tabela com as informações encontrada

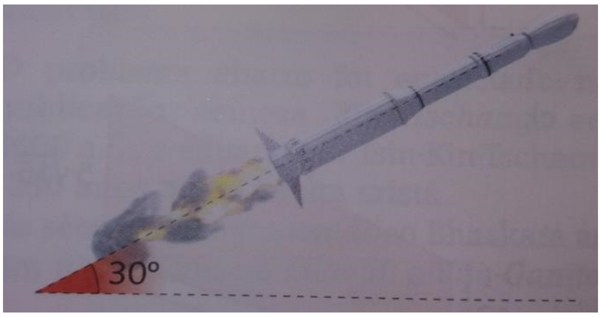
Triangulo	Ângulo agudo	Seno	Cosseno	Tangente
1				
1				
2				
2				
3				
3				
4				
4				
5				
5				

Observações

Conclusão.

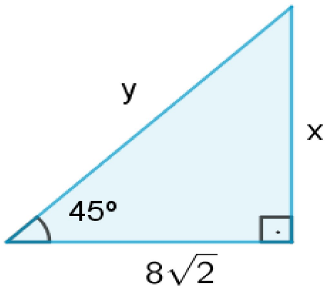
Lista de Questões.

1. Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de 30°. A que altura estará o foguete após percorrer 8 km em linha reta?

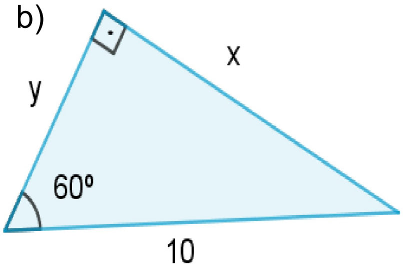


2. Calcule o valor de x e y nos triângulos retângulos.

a)



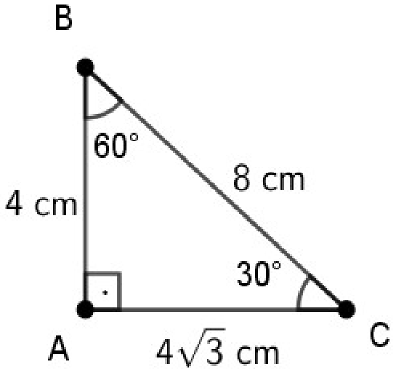
b)



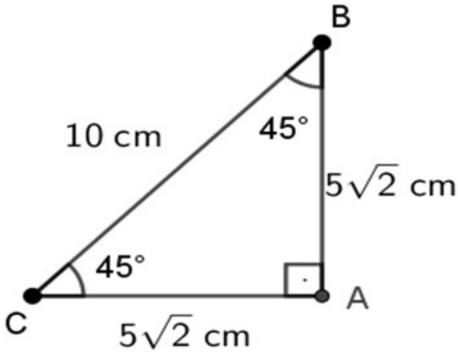
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 5

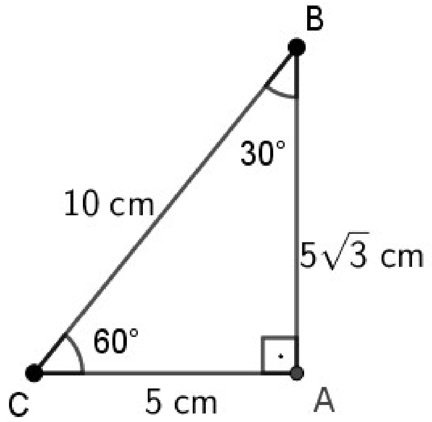
Triângulo 1.



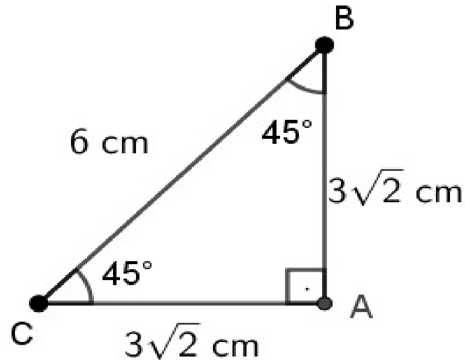
Triângulo 2.



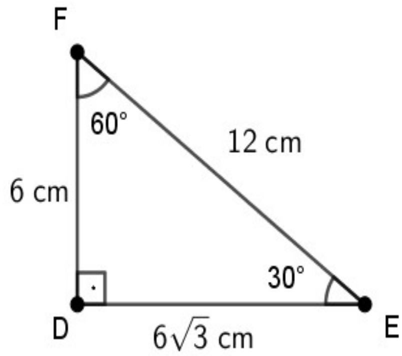
Triângulo 3.



Triângulo 4.



Triângulo 5



Recomendações didáticas

Esta atividade envolve os ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º, assim algumas regularidades sejam mais marcantes para os estudantes, como o fato do cateto oposto ao ângulo de 30º sempre ser igual a metade da hipotenusa desse triângulo retângulo.

Os estudantes devem montar as equipes e sobre supervisão do professor que entregará o material didático aos grupos já formados, novamente uma atividade que poderá ter necessidade das simplificações de fração, até mesmo radiciação, os estudantes devem ter liberdade para trabalhar no preenchimento do quadro, o qual deverá ter sido preenchido como na afigura 12 abaixo.

Figura 12 – Preenchimento do quando da atividade 05 por um grupo

Triangulo	Ângulo agudo	Seno	Cosseno	Tangente
1	30°	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{4\sqrt{3}}=$ [illegible]
1	60°	$\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$
2	45°	$\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=1$
2	45°	$\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=1$
3	60°	$\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}$
3	30°	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	45°	$3\sqrt{2}/6$	$3\sqrt{2}/6$	$3\sqrt{2}/3\sqrt{2}$
4	45°	$3\sqrt{2}/6$	$3\sqrt{2}/6$	$3\sqrt{2}/3\sqrt{2}$
5	60°	$6\sqrt{3}/12$	$6/12$	$6\sqrt{3}/6$
5	30°	$6/12$	$6\sqrt{3}/12$	$6/6\sqrt{3}$

Fonte: Silva (2019)

Em seguida, os discentes devem elaborar as observações e conclusões sobre a atividade. Sobre o que eles perceberam na atividade, dentre as observações que podem surgir nos grupos temos a que mostra figura 13.

Figura 13 – Observação de um grupo sobre a atividade 05

Todo ângulo 30° o seno simplificado sempre vai dar $\frac{1}{2}$

Fonte: Silva (2019)

O grupo apresentou a seguinte observação: "TODO ÃNGULO DE 30º O SENO SIMPLIFICADO SEMPRE VAI DAR ½", outro grupo observou que a tangente de 45º sempre será 1, dado as regularidades que eles observaram acontecer no quadro preenchido, após a conclusão que eles expressarem e juntando com as observalões deve-se construir o quadro com os senos, cossenos e tangentes de 30º, 45º e 60º.

Por fim, o professor solicita aos estudantes que retornem a questão motivadora para discussão e depois que eles resolvam as questões de fixação da atividade.

4.8 Atividade 6

Título: Relação entre a razão seno (α) / cosseno (α) e o valor da tangente (α).

Objetivo: Descobrir as relações entre seno (α) / cosseno (α) e o valor da tangente (α) no triangulo retângulo.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos, papel, caneta ou lápis.

Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos contido na ficha.

a) Determine as medidas do seno dos ângulos agudos dos triângulos retângulos.
b) Determine as medidas do cosseno dos ângulos agudos dos triângulos retângulos.
c) Determine as medidas da tangente dos ângulos agudos dos triângulos retângulos.
d) Determine as medidas das razões entre o seno e o cosseno dos ângulos agudos nos triângulos retângulos.
e) Preencha a tabela com as informações encontradas

Triangulo	Ângulo agudo	Seno do ângulo agudo	Cosseno do ângulo agudo	Seno do ângulo agudo / Cosseno do ângulo agudo	Tangente do ângulo agudo
1					
1					
2					
2					
3					
3					
4					
4					
5					
5					
6					
6					

Observações

Conclusão.

Lista de Questões.

1. Identifique as sentenças verdadeiras

a) sen 45º = cos 45º = tg45º

b) tg35º = $\frac{sen\ 35°}{\cos 35°}$

c) $tg\ \hat{B} = \frac{sen\ \hat{B}}{\cos \hat{B}}$

d) $tg\ \hat{C} = \frac{cos\ \hat{C}}{\text{sen}\ \hat{C}}$

e) $tg\ 60° = \frac{cos\ 60°}{\text{sen}\ 60°}$

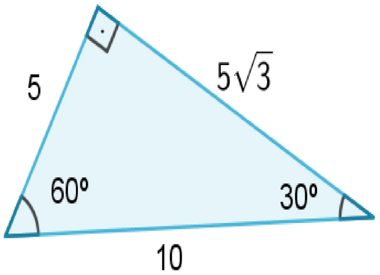
f) $tg\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}$

g) $tg\ 30° = \frac{cateto\ adjacente\ a\ 30°}{cateto\ oposto\ a\ 30°}$

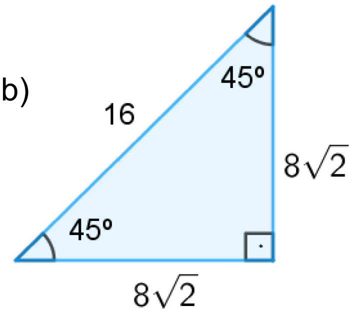
h) $tg\ 45° = \frac{cateto\ oposto\ a\ 45°}{cateto\ adjacente\ a\ 45°}$

2. Determine a tangente dos ângulos agudos nos triângulos retângulos abaixo, de duas formas diferentes.

a)



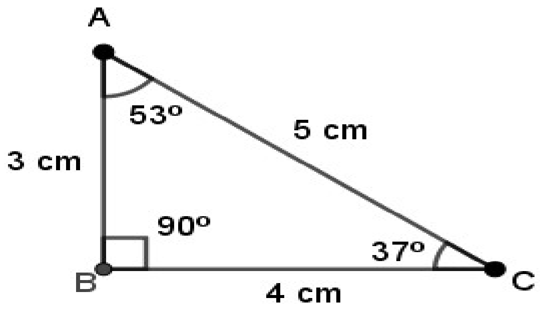
b)



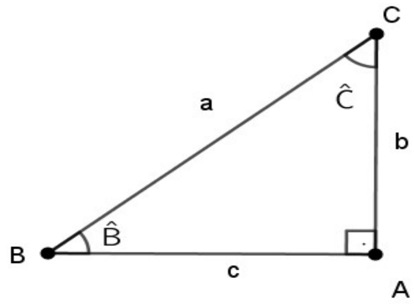
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 4

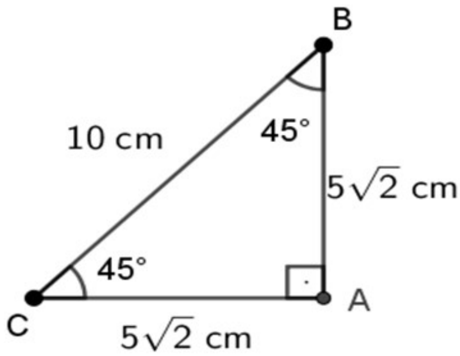
Triângulo 1.



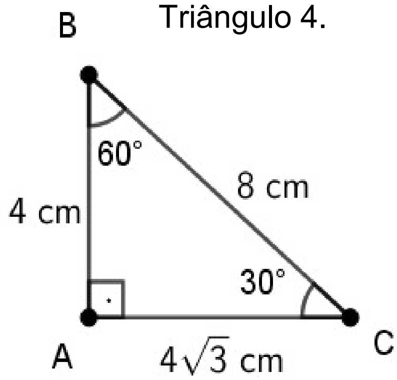
Triângulo 2.



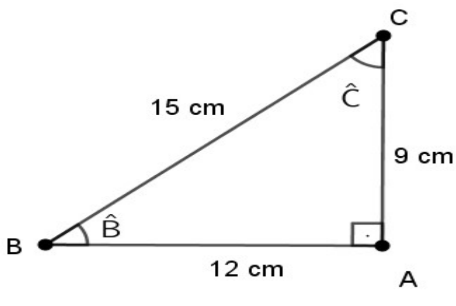
Triângulo 3.



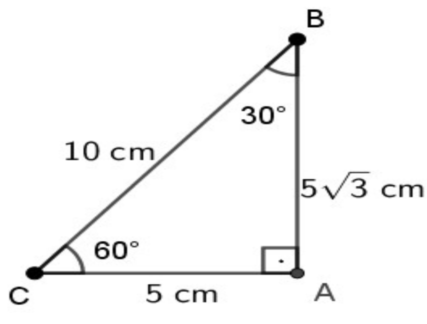
Triângulo 4.



Triângulo 5



Triângulo 6



Recomendações didáticas

Esta atividade envolve a relação que existe entre a razão de seno sobre cosseno de um ângulo e a tangente desse mesmo ângulo. Nesta atividade os grupos devem ser formados sobre orientação do professor que entregará novamente o material didático.

Os estudantes após realizados os procedimentos e preenchido o quadro como mostra a figura 14 abaixo, não terão dificuldades em perceberem tal relação, vejamos um exemplo de preenchimento do quadro.

Figura 14 – Preenchimento do quadro da atividade 06 por um grupo

Triangulo	Ângulo agudo	Seno do ângulo agudo	Cosseno do ângulo agudo	Seno do ângulo agudo / Cosseno do ângulo agudo	Tangente do ângulo agudo
1	37	3/5	4/5	$\frac{3}{5} / \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$	3/4
1	53	4/5	3/5	$\frac{4}{5} / \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$	4/3
2	$\hat{B}$	b/a	c/a	$\frac{b}{a} / \frac{c}{a} = \frac{b}{c}$	b/c
2	$\hat{C}$	c/a	b/a	$\frac{c}{a} / \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$	c/b
3	45	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/10$	$\frac{5\sqrt{2}}{10} / \frac{5\sqrt{2}}{10} = 1$	$5\sqrt{2}/5\sqrt{2} = 1$
3	45	$5\sqrt{2}/10$	$5\sqrt{2}/10$	$\frac{5\sqrt{2}}{10} / \frac{5\sqrt{2}}{10} = 1$	$5\sqrt{2}/5\sqrt{2} = 1$
4	30	4/8	$4\sqrt{3}/8$	$4/8 / \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$4/4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
4	60	$4\sqrt{3}/8$	4/8	$\frac{4\sqrt{3}}{8} / \frac{4}{8} = \sqrt{3}$	$4\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}$
5	$\hat{B}$	9/15	12/15	$\frac{9}{15} / \frac{12}{15} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	9/12 = 3/4
5	$\hat{C}$	12/15	9/15	$\frac{12}{15} / \frac{9}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	12/9 = 4/3
6	30	5/10	$5\sqrt{3}/10$	$\frac{5}{10} / \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$5/5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
6	60	$5\sqrt{3}/10$	5/10	$\frac{5\sqrt{3}}{10} / \frac{5}{10} = \sqrt{3}$	$5\sqrt{3}/5 = \sqrt{3}$

Fonte: Silva (2019)

Em seguida, o professor deve solicitar as observações e conclusões dos estudantes, esperamos que os estudantes não encontrem dificuldades em perceber que as duas últimas colunas possuem os mesmos valores. Observe a figura 15 a seguir.

Figura 15 – Conclusão de um grupo sobre a atividade 06

A razão do seno pelo cosseno de um ângulo é igual a tangente desse mesmo ângulo

Fonte: Silva (2019)

Após a conclusão que eles mesmos poderão chegar, propor aos estudantes que façam a resolução dos exercícios e por fim, que eles emitam opinião sobre a aula ministrada.

4.9 Atividade 7

Título: Relação dada pela soma de sen^2 (α) + cos^2 (α) no um triângulo retângulo.

Objetivo: Descobrir uma relação dada pela soma de sen^2 (α) + cos^2 (α) no triângulo retângulo.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos, papel, caneta ou lápis e calculadora.

Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos contido na ficha.

a) Determine o seno de cada ângulo agudo.
b) Determine o cosseno de cada ângulo agudo.
c) Preencha a tabela com as informações encontradas

Triangulo	Ângulo agudo	Seno do ângulo	Cosseno do ângulo	Seno^2 do ângulo	Cosseno^2 do ângulo	Seno^2 do ângulo + Cosseno^2 do ângulo
1						
1						
2						
2						
3						
3						
4						
4						
5						
5						
6						
6						

Observações

Conclusão.

Lista de Questões.

1. Sabendo que $sen\, x = \frac{1}{2}$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\cos x$ e $tg\, x$.

2. Se $cos^2\, x = 0{,}4$, então $sen^2\, x$ é igual a:
   a) $\frac{3}{10}$
   b) $\frac{2}{5}$
   c) $\frac{5}{10}$
   d) $\frac{3}{5}$

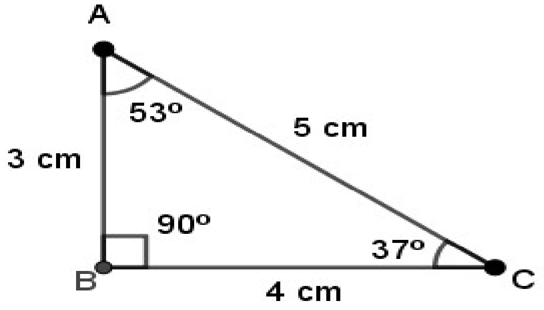
3. Indique quais as sentenças são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

   a) $sen^2\, 15° + cos\,^2 15° = 10$ ( )
   b) $sen^2\, 45° + cos\,^2\, 45° = 1$ ( )
   c) $sen^2\, a + cos\,^2 a = 1$ ( )
   d) $sen^2\, 30° + cos\,^2 60° = 1$ ( )

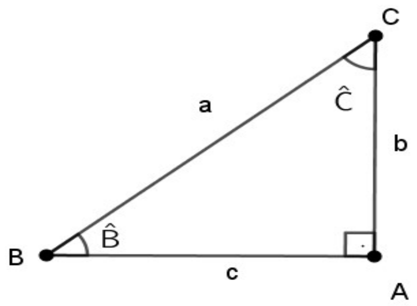
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 4

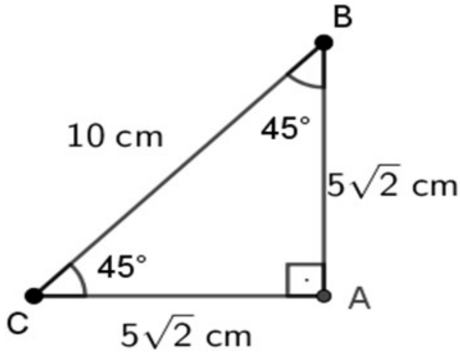
Triângulo 1.



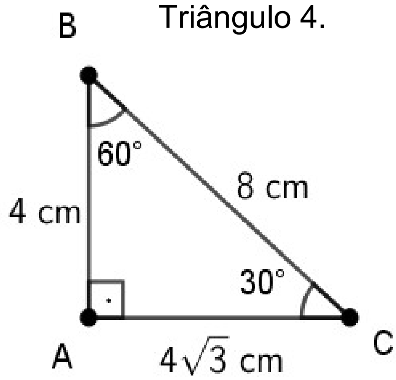
Triângulo 2.



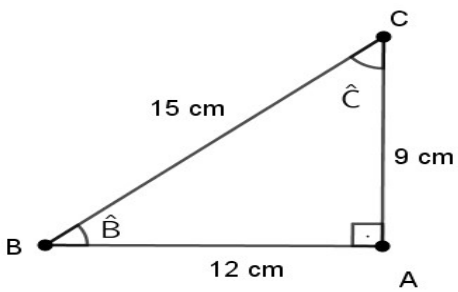
Triângulo 3.



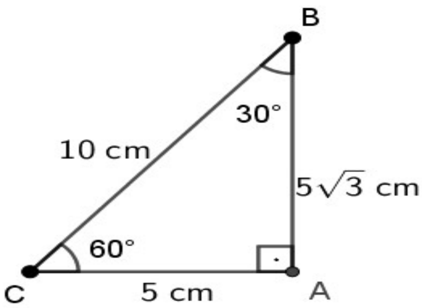
Triângulo 4.



Triângulo 5



Triângulo 6



Recomendações didáticas

Esta atividade serve para a descoberta do teorema fundamental da trigonometria, onde o seno elevado ao quadrado de um ângulo somado com o cosseno elevado ao quadrado desse mesmo ângulo possui resultado igual a 1.

O professor deve solicitar a formação dos grupos e em seguida distribuir o material da atividade e solicitar aos estudantes que realizem o procedimento indicado na ficha. Os estudantes podem ter dificuldades para encontrar os valores elevados ao quadrado, pode ser necessário a intervenção do professor para uma revisão sobre o assunto, ou que ele possa sanar dúvidas dos grupos específicos, espera-se encontrar o quadro preenchido como na figura 16 a seguir.

Figura 16 – Quadro da atividade 07 preenchida por um grupo

Triangulo	Ângulo agudo	Seno do ângulo	Cosseno do ângulo	Seno^2 do ângulo	Cosseno^2 do ângulo	Seno^2 do ângulo + Cosseno^2 do ângulo
1	37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{25}{25}=1$
1	53	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1$
2	C	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{c^2}{a^2}$	$\frac{b^2}{a^2}$	$\frac{c^2+b^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$
2	B	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b^2}{a^2}$	$\frac{c^2}{a^2}$	[illegible] $=\frac{a^2}{a^2}=1$
3	45°	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}=1$
3	60°	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16\cdot3}{64}=\frac{48}{64}$		
4	60°	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16\cdot3}{64}=\frac{48}{64}$	16 : 64	$\frac{48}{64}+\frac{16}{64}=\frac{64}{64}=1$
4	30°	$\frac{4}{8}$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	16 64	48/64	$\frac{16}{64}+\frac{48}{64}=\frac{64}{64}=1$
5	C	$\frac{12}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{144}{225}$	$\frac{81}{225}$	$\frac{144}{225}+\frac{81}{225}=\frac{225}{225}=1$
5	B	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	81/225	$\frac{144}{225}$	$\frac{225}{225}=1$
6	30°	$\frac{5}{10}$	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100}$ [illegible]	$\frac{100}{100}=1$
6	60°	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{75}{100}$	25/100	$\frac{100}{100}=1$

Fonte: Silva (2019)

As observações e conclusões dos estudantes devem ser socializadas para que os grupos tomem conhecimento, dentre as observações e conclusões desejamos que os grupos percebam que a soma tem resultado igual a 1, como mostra a figura 17 abaixo.

Figura 16 – Quadro da atividade 07 preenchida por um grupo

INDEPENDENTE DO TRIÂNGULO RETÂNGULO, SENO² + COSSENO² É IGUAL A 1.

Fonte: Silva (2019)

Depois disso, a formalização para acomodar o que os estudantes desconfiavam que aquela sentença é igual a 1, em seguida propor os exercícios e depois tomar as opiniões dos estudante sobre a aula.

4.10 Atividade 8

Título: Relações entre medidas do seno e do cosseno dos ângulos complementares em um triângulo retângulo.

Objetivo: Descobrir as relações entre o seno e o cosseno dos ângulos complementares em um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos retângulos, papel, caneta ou lápis e calculadora.

Procedimento:

Dado os triângulos retângulos no quadro de triângulos contido na ficha.

a) Determine o seno de cada ângulo agudo.
b) Determine o cosseno de cada ângulo complementar.
c) Determine o cosseno de cada ângulo agudo.
d) Determine o seno de cada ângulo complementar.
e) Preencha a tabela com as informações encontradas

Triangulo	Seno do ângulo agudo	Cosseno do ângulo complementar	Cosseno do ângulo agudo	Seno do ângulo complementar
1				
1				
2				
2				
3				
3				
4				
4				
5				
5				
6				
6				

Observações

Conclusão.

Lista de Questões.

1. cos 76º é igual a:
   a) –cos 76º

b) sen 76º
c) tg 14º
d) sen 14º
e) tg 14º

2. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, calcule:

a) $sen\ \hat{B}$ quando $cos\ \hat{C}\ = \frac{4}{5}$

b) $tg\ \hat{C}$ quando $cos\ \hat{C}\ = \frac{8}{10}$ e $cos\ \hat{B} = \frac{6}{10}$

c) $cos\ \hat{B}$ quando $sen\ \hat{C}\ = \frac{2}{3}$

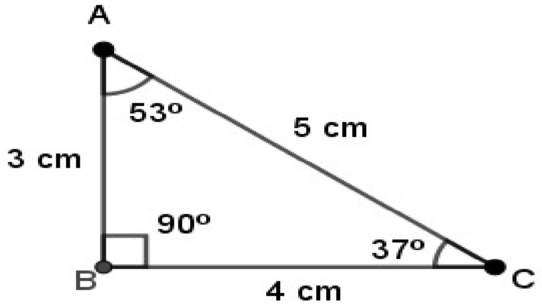
3. Indique quais as sentenças são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

e) Se A e B são ângulos complementares, então o $sen\ \hat{A} = \cos \hat{B}$. (   )
f) sen 40º = cos 50º. (   )
g) cos 30° = sen 80°. (   )
h) sen 45º = cos 45º. (   )

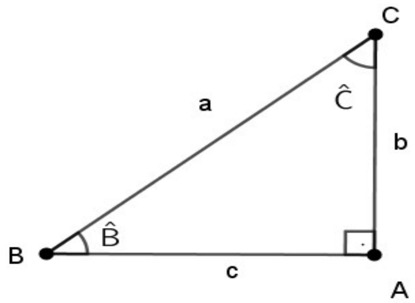
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 4

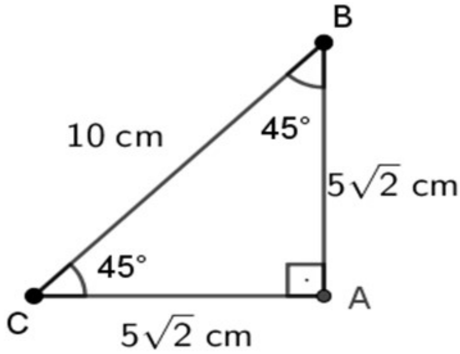
Triângulo 1.



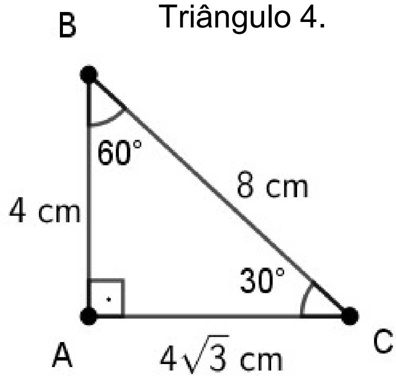
Triângulo 2.



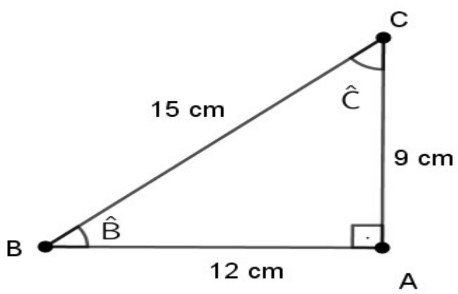
Triângulo 3.



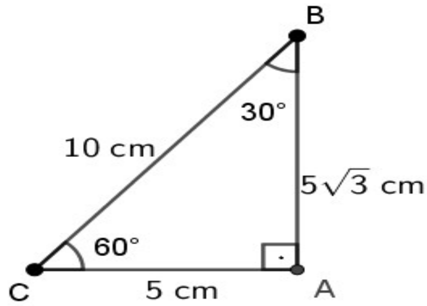
Triângulo 4.



Triângulo 5



Triângulo 6

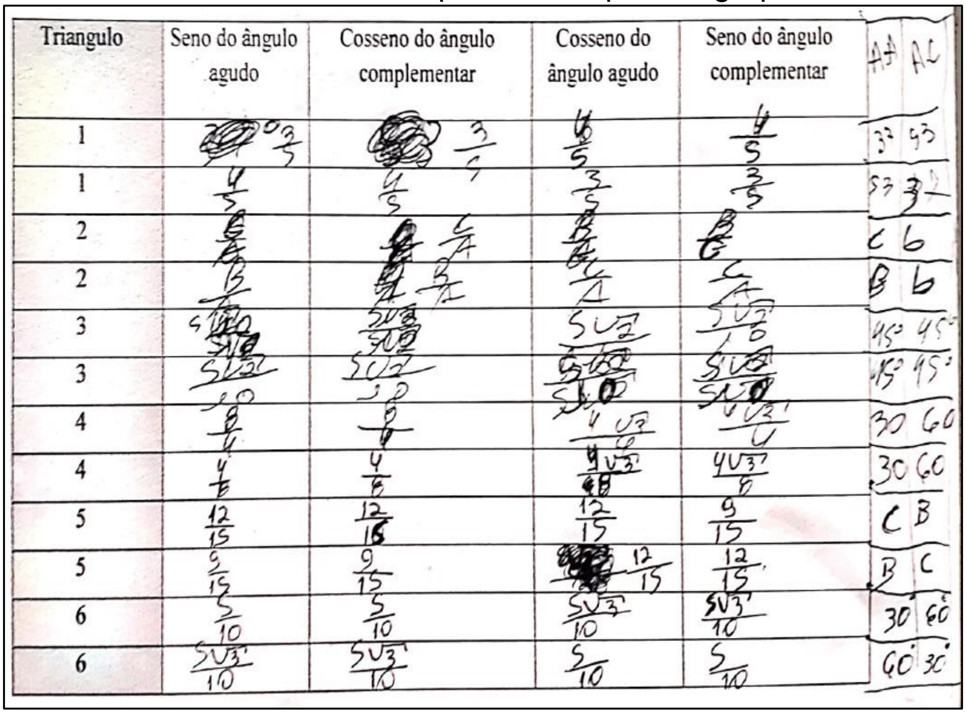


Recomendações didáticas

Nesta atividade os estudantes devem descobrir a relação entre o seno de um ângulo e o cosseno de seu ângulo complementar, atividade para ser desenvolvida em grupo de até estudantes.

Após a formação dos grupos que a cada atividade estrão em constante repetição de participantes dada as afinidades construídas pelos estudantes. O professor novamente deve entregar o material didático e percorrer aos grupos quando solicitado para sandar dúvidas sobre o preenchimento do quadro e até mesmo de transformações matemáticas como a simplificação das razões. O quadro deverá está preenchido como na figura 18 abaixo.

Figura 18 – Quadro da atividade 08 preenchida por um grupo

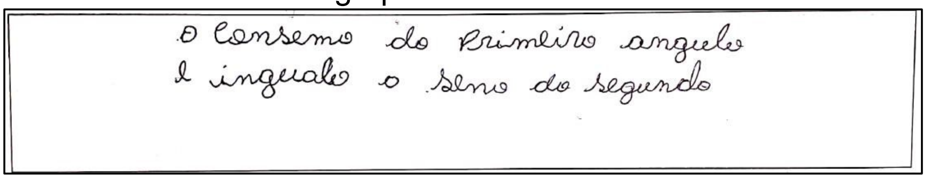


Triangulo	Seno do ângulo agudo	Cosseno do ângulo complementar	Cosseno do ângulo agudo	Seno do ângulo complementar	AA	AC
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	37	53
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	53	37
2	[illegible]	$\frac{C}{A}$	[illegible]	$\frac{B}{C}$	C	b
2	[illegible]	$\frac{B}{A}$	$\frac{C}{A}$	$\frac{C}{A}$	B	b
3	[illegible]	[illegible]	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	45°	45°
3	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	$\frac{5\sqrt{2}}{10}$	[illegible]	[illegible]	45°	45°
4	[illegible]	[illegible]	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	30	60
4	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	30	60
5	$\frac{12}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{9}{15}$	C	B
5	$\frac{9}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{12}{15}$	B	C
6	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	30	60
6	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	$\frac{5\sqrt{3}}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	60	30

Fonte: Silva (2019)

O quadro acima revela uma falha, onde foi preciso com uma régua traçar colunas para escolha dos ângulos, algo que já está na atividade proposta aqui, partindo para observações e conclusões dos estudantes, podemos obter relatos que os valores do seno de um ângulo agudo e o cosseno de seu complementar são iguais, vejamos a figura 19.

Figura 19 – Conclusão de um grupo sobre a atividade 08



o Consemo do Primeiro angulo
e inguale o seno do segundo

Fonte: Silva (2019)

Após a socialização entre observações e conclusões dos estudantes, o professor deve entrar com a formalização da relação entre o seno e cosseno de ângulos complementares e pedir aos estudantes que resolvam os exercícios propostos para fixação.

4.11 Atividade aprofundamento 02

Título: Baralho de trigonometria no triângulo retângulo.

Objetivo: Ampliar o aprendizado dos componentes e das Relações Trigonométricas no triângulo retângulo por meio de um jogo educativo.

Participantes: de 02 a 04

Material: 49 cartas, entre elas, cartas triângulos (curingas), cartas razões e cartas relações trigonométricas.

Regras:

1. Organize a turma em grupos e para cada um desses grupos de participantes dê um Baralho das Relações Trigonométricas;

2. Embaralhe as cartas;

3. Distribua 06 (seis) cartas para cada aluno;

4. Sobre a mesa, coloque as cartas restantes com a face virada para baixo;

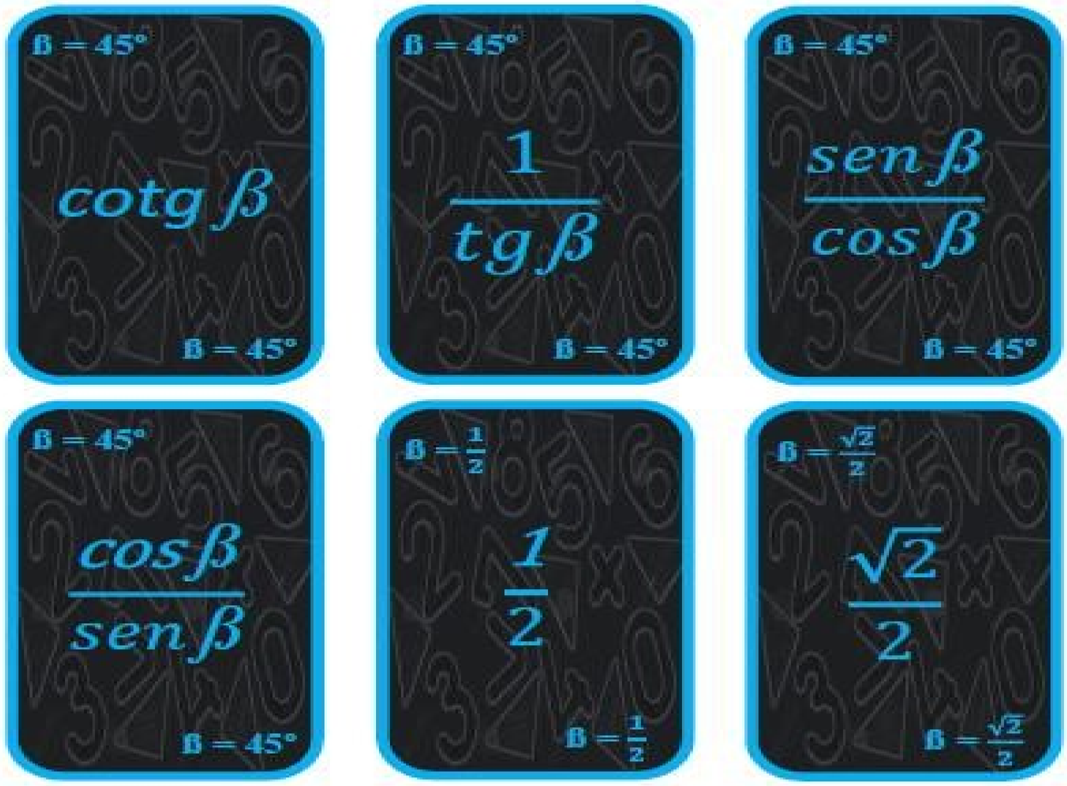
5. Um dos alunos inicia comprando uma carta do monte de cartas, analisa a possibilidade de formar uma trinca (exemplo: caso o jogador faça um jogo com as razões do seno30°: a medida do $cateto\ oposto$ (30°) divido pela medida da $hipotenusa$ = sen30°=$\mathbf{1/2}$. A carta triângulo (com ângulos de 30°,60° e 90°) que será um coringa da razão acima), caso não seja possível, o mesmo deve descarta-la;

6. O jogo continua, com os alunos tendo duas opções de compra, ou do monte de cartas ou a última carta descartada do jogo;

7. Ganha o jogo quem conseguir forma, primeiro, 02 (duas) trincas.

8. As jogadas que tiverem a mesma representação como: $\mathbf{1/2}$, $\mathbf{1/2}$ e $\mathbf{1/2}$ não serão válidas, pois o intuito é associar cartas equivalentes e representações distintas

Veja os exemplos a seguir:



FONTE: Adaptado de (Zeferino 2015).

Recomendações didáticas

Nesta atividade assim como na atividade de aprofundamento 01, os estudantes podem apresentar dificuldades em entender as regras do jogo, assim pede-se que o professor faça uma partida demonstrativa e depois possa auxiliar os grupos na brincadeira.

4.12 Lista de questões 1

Título: Exercício envolvendo as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

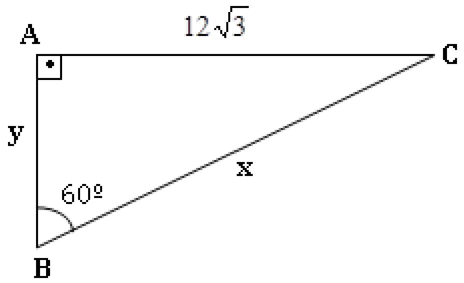
Objetivo: Ampliar o aprendizado das Relações Trigonométricas em um triângulo retângulo por meio de uma lista de exercícios.

Material Necessário: Folha de exercícios.

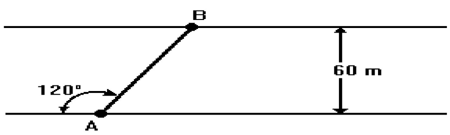
Procedimento: Entregar a cada aluno uma cópia da folha de exercício, e solicitar que resolva as questões.

Questões:

1. Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo. Algumas de suas medidas estão indicadas, em metros, na figura. Determine as medidas x e y dos lados desse terreno.

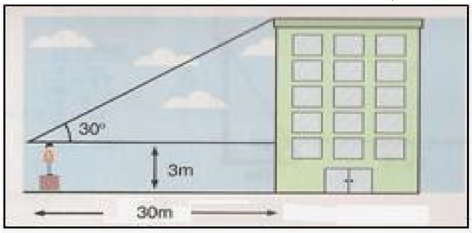


2. Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de

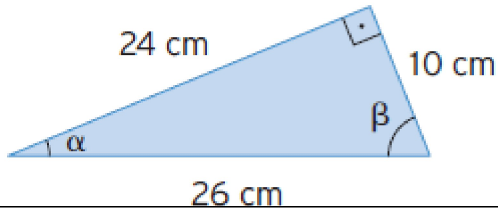


a) 40 $\sqrt{2}$
b) 40 $\sqrt{3}$
c) 45 $\sqrt{3}$
d) 50 $\sqrt{3}$
e) 60 $\sqrt{2}$

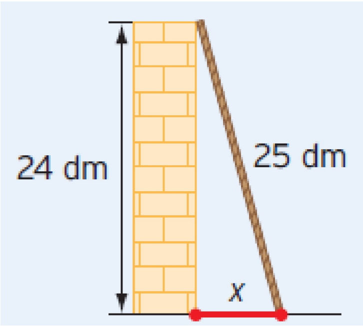
3. Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30º, conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal. Dado $\sqrt{3}$ = 1,73



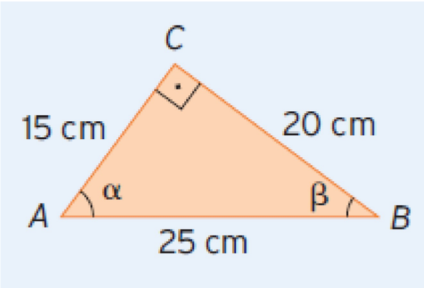
4. No triângulo abaixo determine os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β.



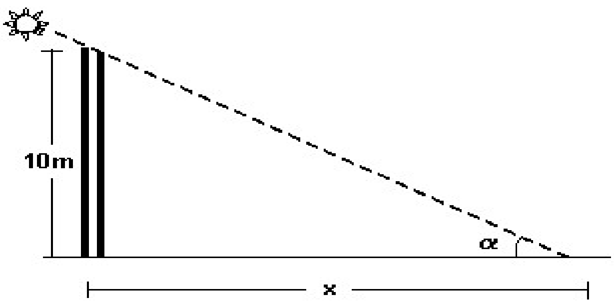
5. Uma escada de 25 dm está apoiada, na vertical, em um muro, e a parte mais alta da escada está a 24 dm do chão. Deseja-se amarrar com uma corda o pé da escada no muro, para evitar que ela escorregue. Qual deve ser o comprimento da corda, sabendo que são necessários 5 dm para fazer as amarrações?



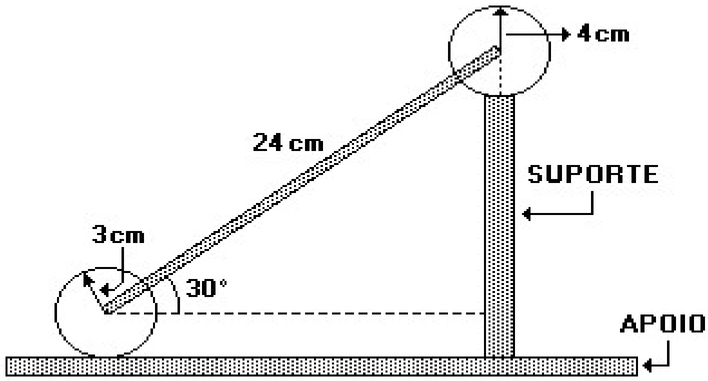
6. Na figura a seguir, determinar os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos a e b.



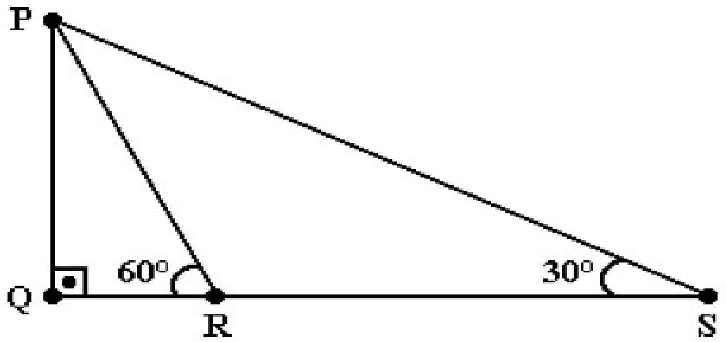
7. Milena, diante da configuração representada abaixo, pede ajuda aos vestibulandos para calcular o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que o sen α = 0,6. Calcule o comprimento da sombra x.



8. A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal. A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é?



9. Considere os triângulos retângulos PQR e PQS da figura a seguir. Se RS=100, quanto vale PQ?



10. Se sen x = $\frac{3}{4}$, então cos x, vale?

11. Identifique as sentenças verdadeiras

a) cos 30º = cos 60º

b) sen^2 60º + cos^2 30º = 1

c) sen 45º = cos 45º

d) tg20º = $\frac{sen\ 35°}{\cos 35°}$

e) $tg\ \hat{A} = \frac{sen\ \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

f) O maior lado triângulo retângulo é a hipotenusa.

12. Classifique os triângulos quanto como acutângulo, retângulo e obtusângulo, quando:

a) Com lados 5 cm, 12cm e 13 cm.

b) Com lados 7 cm, 8 cm e 10 cm.

c) Com lados 12 cm, 13 cm e 20 cm.

Recomendações didáticas

A lista de questões deve ser entregue aos estudantes ao final de todas as atividades referente as relações trigonométricas no triângulo retângulo, com intuito de colocarem em prática o conhecimento adquirido.

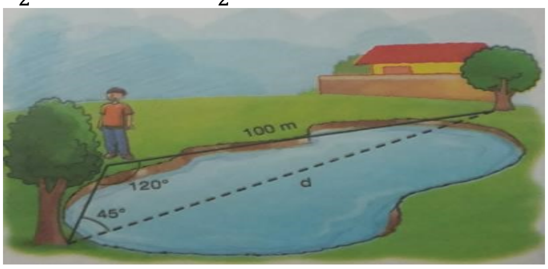
4.13 Atividade 9

Título: Relações entre medidas dos lados e do seno de cada respectivo ângulo oposto de um triângulo qualquer.

Objetivo: Descobrir as relações entre medidas dos lados e do seno de cada respectivo ângulo oposto de um triângulo qualquer.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos quaisquer, papel, caneta ou lápis.

Duas arvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê és 120º, e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45º. Sabendo que uma das árvores está a 100 metros do observador, determine a distância **d** entre as árvores. (Use: $sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{6} = 2{,}44$)



Procedimento:

Dado os triângulos contidos no quadro de triângulos e a questão problema contidos na ficha.

a) Faça a leitura das medidas dos lados fornecidos.
b) Faça a leitura das medidas dos ângulos fornecidos.
c) Determine o seno dos ângulos fornecidos.
d) Determine a relação entre as razões dos lados e os respectivos valores do seno do ângulo oposto a esses lados.
e) Preencha a tabela com as informações encontradas

Triangulo	Lado a	Lado b	Lado c	Seno (Â)	Seno $(\hat{B})$	Seno $(\hat{C})$	Lado a / Seno (Â)	Lado b / Seno $(\hat{B})$	Lado c / Seno $(\hat{C})$

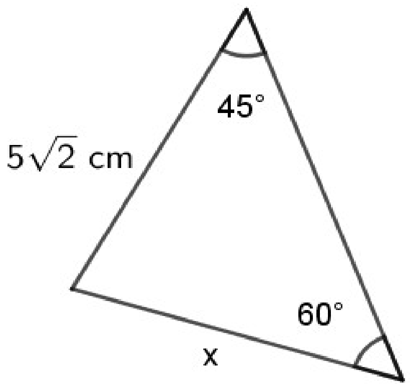
1									
2									
3									
4									
5									
6									

Observações

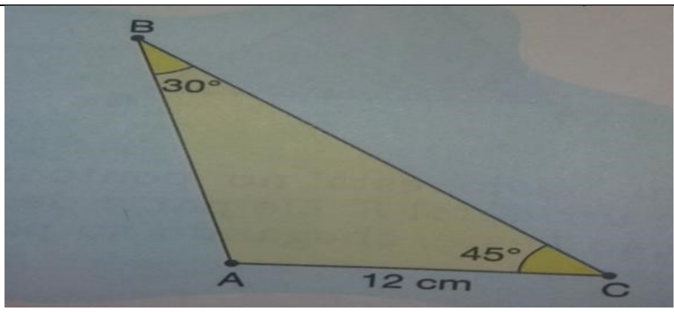
Conclusão.

Lista de Questões.

1. . Determine a medida x indicada no triângulo da figura



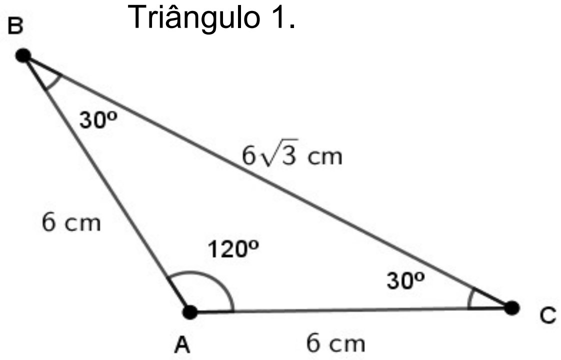
2. Três ilhas, A, B e C, aparecem em um mapa com a mesma disposição da figura abaixo. Sabendo que nesse mapa 1 cm equivale a 0,1 km no real, qual a distância real, em quilômetros, entre as ilhas A e B? (Faça $\sqrt{2} = 1{,}4$)



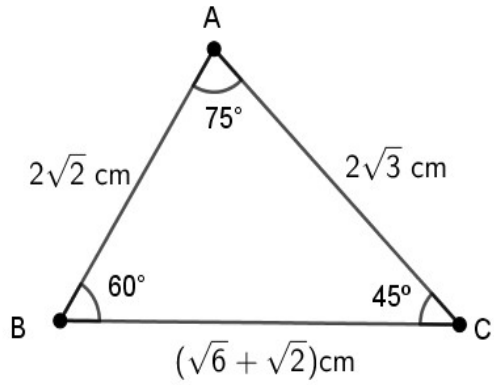
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 6

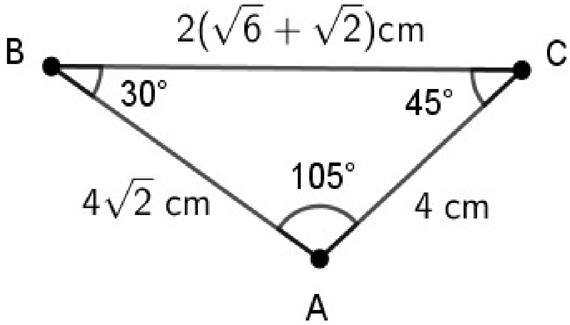
Triângulo 1.



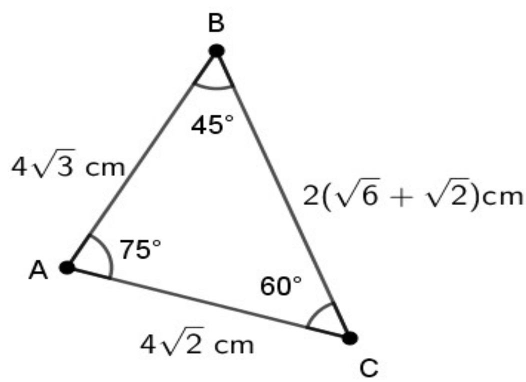
Triângulo 2.



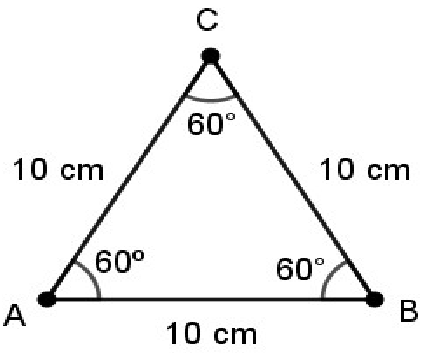
Triângulo 3.



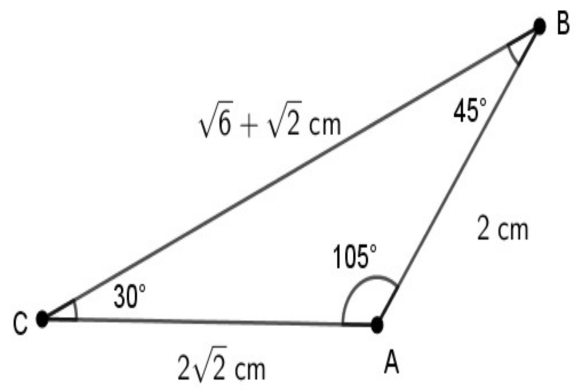
Triângulo 4.



Triângulo 5



Triângulo 6



Recomendações didáticas

Esta atividade dá início as relações nos triângulos quaisquer, onde os estudantes devem encontrar valores iguais para as três últimas colunas do quadro a ser preenchido, essa atividade deve ser desenvolvida em grupo de até 04 estudantes.

O professor inicia a aula com o pedido de formação dos grupos aos estudantes e novamente direciona os esclarecimentos sobre a atividade, entrega o material didático aos grupos e deixa os grupos trabalharem nos procedimentos indicados, como trata-se de uma atividade que possui uma questão inicial motivadora, deve ser incentivada no início sua resolução, passado tempo e nenhuma equipe tenha resolvido, então deve o professor orientar a turma proceder no preenchimento do quadro, a fim de encontrar o quadro como mostra a figura 20 a seguir.

Figura 20 – Quadro da atividade 09 preenchida por um grupo

Triangulo	Lado a	Lado b	Lado c	Seno ($\hat{A}$)	Seno ($\hat{B}$)	Seno ($\hat{C}$)	Lado a / Seno ($\hat{A}$)	Lado b / Seno ($\hat{B}$)	Lado c / Seno ($\hat{C}$)
1	6	6	$6\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$	$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$	$\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$
2	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,96	$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 4	$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 4	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{0,96}$ [illegible]
3	$2\sqrt{6}+\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	0,96	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	8	8	8
4	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,96	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	8	8	8
5	10	10	10	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	10	10	10
6	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2	$\frac{0,96}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	4	4

Fonte: Silva (2019)

Os senos de 120º, 105º e 75º deve ser dado aos estudantes para que eles possam realizar os cálculos necessários para o preenchimento, nas observações e conclusões dos estudantes após o momento do preenchimento do quadro e de posse das regularidades, espera-se que os estudantes montem observações como mostra a figura 21.

Figura 21 – Observação de um grupo sobre a atividade 09

SEMPRE A RAZÃO A $\frac{a}{\text{SEN}\hat{A}}$, $\frac{B}{\text{SEN}\hat{B}}$ E $\frac{c}{\text{SEN}\hat{C}}$

SÃO SEMPRE IGUAIS

Fonte: Silva (2019)

A observação onde os estudantes percebem que essas razões possuem o mesmo valor e se as conclusões também estiverem nesse sentido, o professor deve formalizar afirmando que trata-se de um valor constante o qual denomina-se Lei dos senos. Depois pedir aos estudante que retomem a questão motivadora e em seguida a resolução dos exercícios propostos.

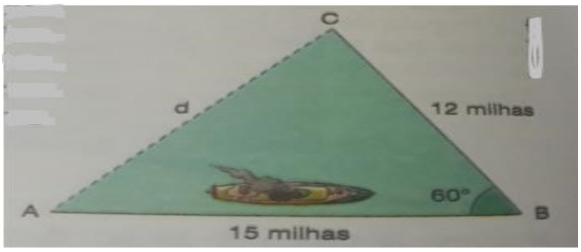
4.14 Atividade 10

Título: Relação entre as medidas do quadrado de um dos lados de um triângulo qualquer, com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados e o cosseno do ângulo oposto a esse lado.

Objetivo: Descobrir as relações entre as medidas do quadrado de um dos lados de um triângulo qualquer, com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados e o cosseno do ângulo oposto a esse lado.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos quaisquer, papel, caneta ou lápis.

Um navio se desloca, em linha reta de um ponto A para um ponto B, percorrendo 15 milhas. No ponto B, sob um ângulo de 60°, o navio muda de rumo e, continuando em linha reta, atinge um ponto C distante 12 milhas do ponto B. Qual a distância d em linha reta, do ponto C ao ponto A? (Use: $\sqrt{21} = 4{,}58$)



Procedimento:

Dado os triângulos quaisquer no quadro de triângulos e a questão problema contidos na ficha.

a) Faça a leitura das medidas dos lados fornecidos.
b) Faça a leitura das medidas dos ângulos fornecidos.
c) Determine o cosseno dos ângulos fornecidos.
d) Determine o valor da expressão
e) Preencha a tabela com as informações encontradas

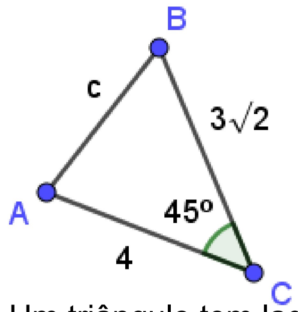
Triangulo	Ângulo α	Cosseno (α)	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									

Observações

Conclusão.

Lista de Questões.

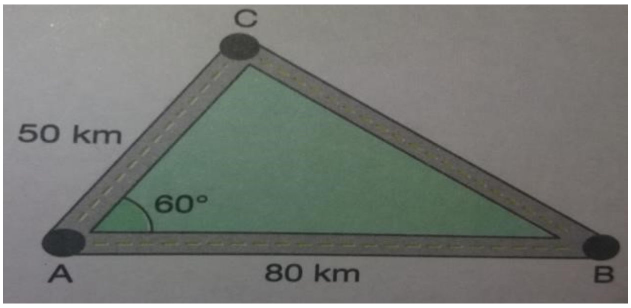
8) Calcule o valor de c no triângulo abaixo.



9) Um triângulo tem lados $a = 10\ cm$, $b = 13\ cm$ e $c = 15\ cm$, qual o valor do cosseno de $\hat{A}$?

3. Três cidades, A, B e C, se encontram nos vértices de um triângulo qualquer, como nos mostra a figura abaixo.

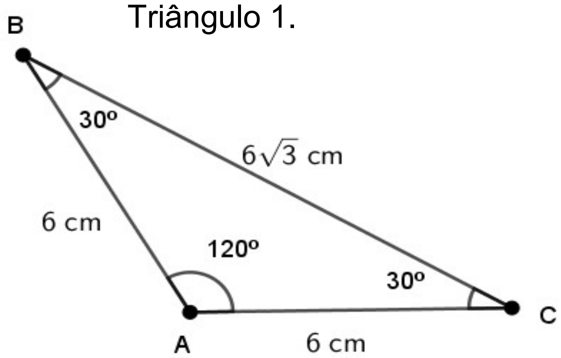
As distancias em linha reta entre A e B e entre A e C estão assinaladas no desenho. Qual a distância em linha reta e em quilômetros, entre as cidades B e C?



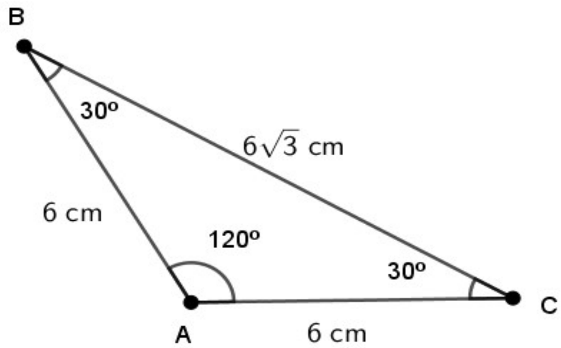
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 7

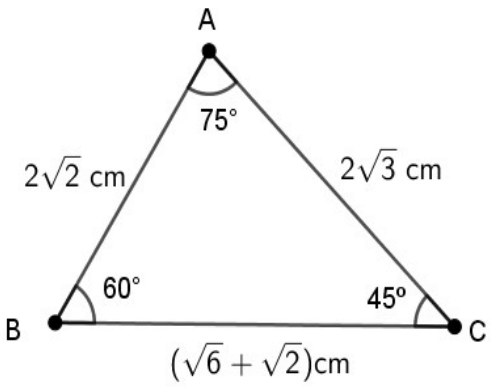
Triângulo 1.



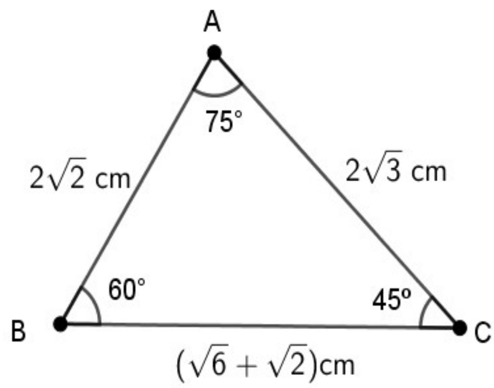
Triângulo 2.



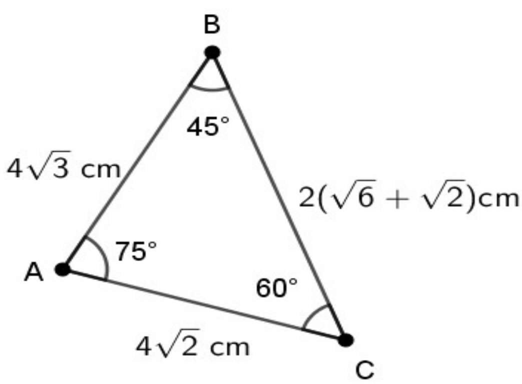
Triângulo 3.



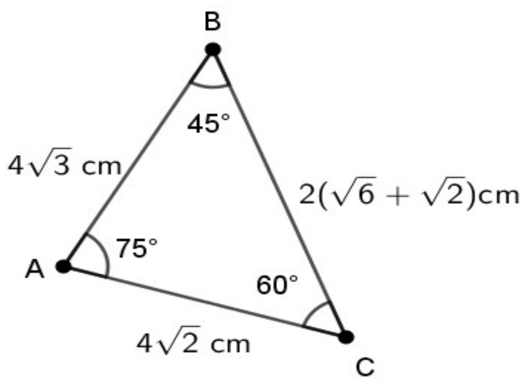
Triângulo 4.



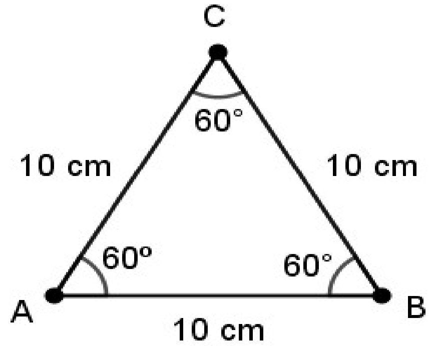
Triângulo 5



Triângulo 6



Triângulo 7



Recomendações didáticas

Esta atividade dá continuidade as relações trigonométricas nos triângulos quaisquer, os estudantes devem perceber que a coluna que tem o valor do lado a elevado ao quadrado deve ser igual ao valor da última coluna, essa atividade deve ser desenvolvida em grupo de até 04 estudantes.

Ao professor iniciar a atividade, o professor deve auxiliar na organização dos grupos e em seguida distribuir o material didático para que os estudantes possam iniciar, novamente com uma questão motivadora e depois os procedimentos indicados no material, ao término do preenchimento do quadro pelos grupos, esperamos encontrar tal preenchimento como mostra a figura 22.

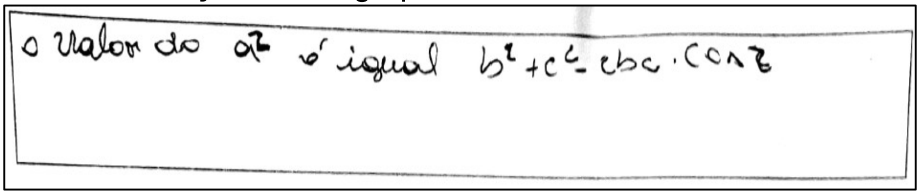
Figura 22 – Quadro da atividade 10 preenchida por um grupo

Triangulo	Ângulo α	Cosseno (α)	a	b	c	a^2	b^2	c^2	[redacted] $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$	
1	90°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	6	6	$6\sqrt{3}$	36	36	108	$36+108-2.6.6\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=36$
2	120	$-\frac{1}{2}$	$6\sqrt{3}$	6	6	108	36	36	$36+36-2.6.6(\frac{1}{2})=108$	
3	60	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	12	$8+2\sqrt{2}$	8	$8+2\sqrt{2}+8-2(\sqrt{6}+\sqrt{2}).2\sqrt{2}.(\frac{1}{2})$	$=12$
4	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	8	$8+2\sqrt{2}$	12	$8+2\sqrt{2}+12-2(\sqrt{6}+\sqrt{2}).2\sqrt{3}.(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$=8$
5	105	-0,26	$2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$4\sqrt{2}$	4	59,71	32	16	$32+8-2(4\sqrt{2}).4.(-0,26)=59,76$	
6	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	4	$2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$4\sqrt{2}$	16	59,71	32	$32+59,71-2(\sqrt{6}+\sqrt{2}).4\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=15,99$
7	60	$\frac{1}{2}$	10	10	10	100	100	100	$100+100-2.10.10.(\frac{1}{2})=100$	

Fonte: Silva (2019)

A dificuldade em perceber a regularidade desejada está na linha de preenchimento dos triângulos 6 e 7, pois os valores da coluna de a2 e da última coluna não exatamente iguais, mas sim aproximados. Algo que precisa da intervenção do professor para falar sobre as casas decimais escolhidas. Nas observações e conclusões dos estudantes espera-se que eles percebam essa relação entre as duas colunas e que elaborem como mostra a figura 23 abaixo.

Figura 23 – Observação de um grupo sobre a atividade 10


o valor do a^2 é igual $b^2+c^2-2bc \cdot \cos \hat{A}$

Fonte: Silva (2019)

Após as observações e conclusões dos estudantes, o professor deve formalizar o que eles apontaram, dizendo que essa igualdade é válida e que chamamos de Lei dos cossenos. Depois novamente como nas outras atividades com questões iniciais, o professor deve pedir aos estudantes que retomem a questão motivadora e em seguida a resolução dos exercícios propostos.

4.15 Atividade 11

Título: constante da lei dos senos e o diâmetro da circunferência circunscrita.

Objetivo: Identificar a relação entre a constante da lei dos senos e o valor do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Materiais necessários: Ficha com o quadro de triângulos quaisquer inscritos nas respectivas circunferências, papel, caneta ou lápis.

Procedimento: Dado triângulos quaisquer inscritos nas respectivas circunferências no quadro de triângulos, com os lados a, b e c, e o valor do raio de cada circunferência.

Em todos os triângulos inscritos nas respectivas circunferências.

f) Faça a leitura das medidas dos lados fornecidos.

g) Faça a leitura das medidas dos ângulos fornecidos.

h) Determine o seno dos ângulos fornecidos.

i) Determine as razões dos lados e os respectivos valores do seno do ângulo oposto a esses lados.

j) Determine o raio da circunferência circunscrita.

Preencha a tabela com as informações encontradas

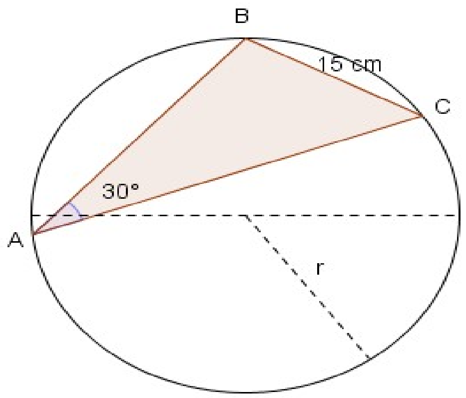
Triângulo	a	b	c	Seno (Â)	Seno $(\hat{B})$	Seno $(\hat{C})$	a / Seno (Â)	b / Seno $(\hat{B})$	c / Seno $(\hat{C})$	raio
1										
2										
3										
4										
5										

Observações

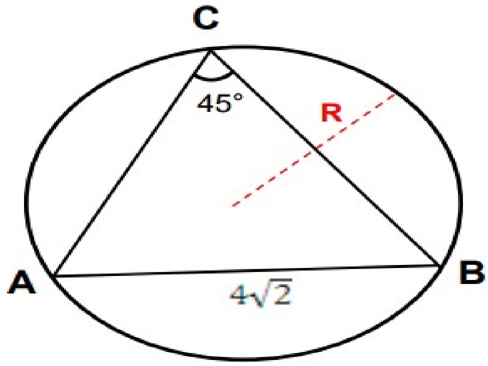
Conclusão.

Lista de Questões.

1. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 15\ cm$ e $\hat{A} = 30°$ como na figura abaixo.



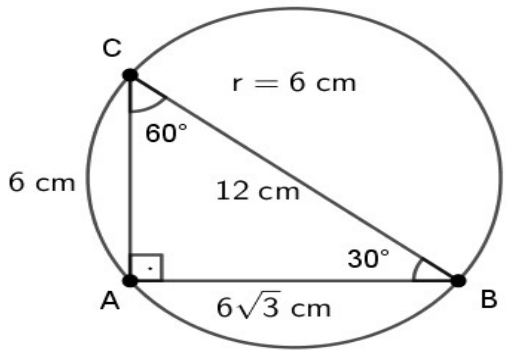
2. Em um triangulo ABC o lado AB mede $4\sqrt{2}$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado AB, mede 45º. Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.



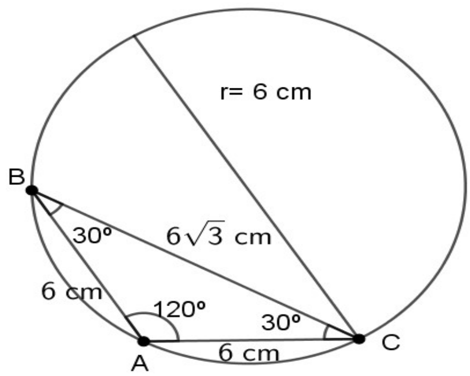
Dê sua opinião sobre a aula de hoje?

Quadro de Triângulos 8

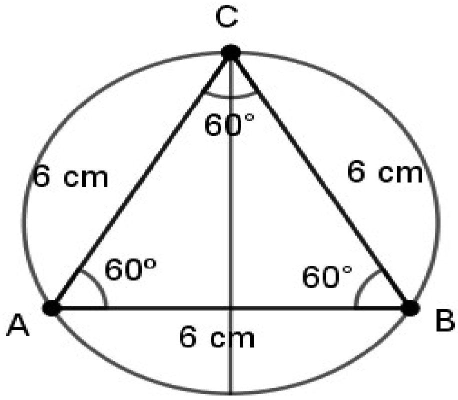
Triângulo 1.



Triângulo 2.

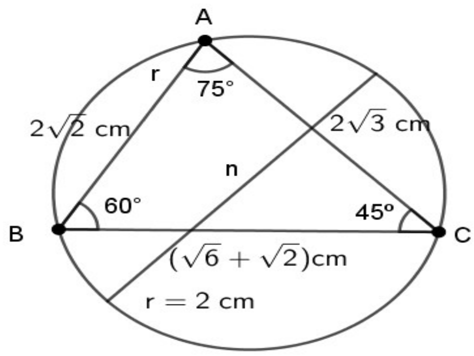


Triângulo 3.

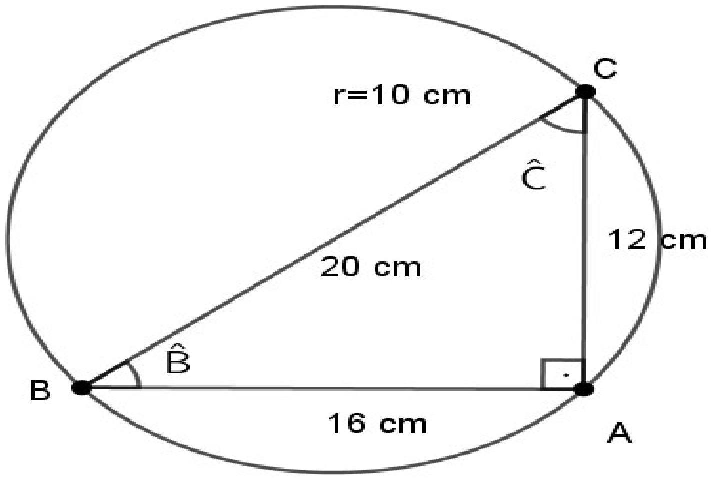


$r = 2\sqrt{3}$

Triângulo 4.



Triângulo 5



Recomendações didáticas

Esta atividade tem como objetivo revelar aos estudantes a relação que existe entre o valor constante resultante da lei dos senos e a circunferência circunscrita ao triângulo. A atividade deve ser desenvolvida em grupo de até 04 estudantes.

Ao professor iniciar a atividade, deve conduzir a organização da sala de aula até que os grupos estejam montados e fazer a distribuição do material didático, partindo para execução da atividade e orientando os grupos quando necessário, o preenchimento do quadro da atividade deve ser como mostra a figura 24.

Figura 24 – Quadro da atividade 11 preenchida por um grupo

Triângulo	a	b	c	Seno (Â)	Seno ($\hat{B}$)	Seno ($\hat{C}$)	a / Seno (Â)	b / Seno ($\hat{B}$)	c / Seno ($\hat{C}$)	raio
1	$6\sqrt{3}$	6	12	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	[illegible]	$\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$	$\frac{12}{1}$	6
2	$6\sqrt{3}$	6	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=12$	$\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$	$\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$	6
3	6	6	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$	$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$	$6/\sqrt{3}/2=4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
4	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	0,96	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{0,96}=0$	$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}=4$	2
5	20	16	12	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{20}{1}$	$\frac{16}{\frac{4}{5}}=20$	$\frac{12}{3/5}=20$	10

Fonte: Silva (2019)

Os estudante não terão dificuldade de perceber o valor dado pela constante que representa a lei dos cossenos é duas vezes o raio da circunferência circunscrita ou que o raio é a metade do valor da lei dos cossenos, nas observações e conclusões esperamos como mostra as figuras abaixo.

Figura 25 – Observação de um grupo sobre a atividade 11

RAIO É SEMPRE A METADE DA LEI DOS SENOS

Fonte: Silva (2019)

Figura 26 – Conclusão de um grupo sobre a atividade 11

no triangulo o raio da circuferencio e metade das razões

Fonte: Silva (2019)

De posse das observações conclusões dos estudantes, o professor deve formalizar o que os estudantes já colocaram nas observações e em seguida propor que os estudantes procedam-na resolução dos exercícios.

4.16 Lista de questões 2

Título: Exercício envolvendo as relações Trigonométricas no triângulo qualquer.

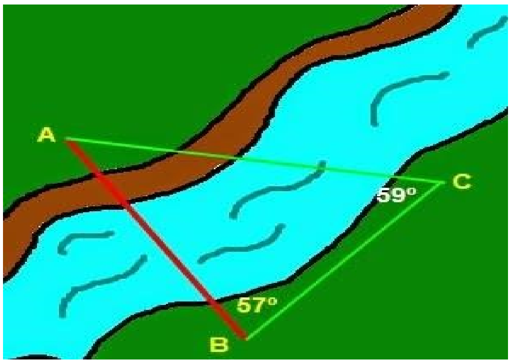
Objetivo: Ampliar o aprendizado das Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer por meio de uma lista de exercícios.

Material Necessário: Folha de exercícios.

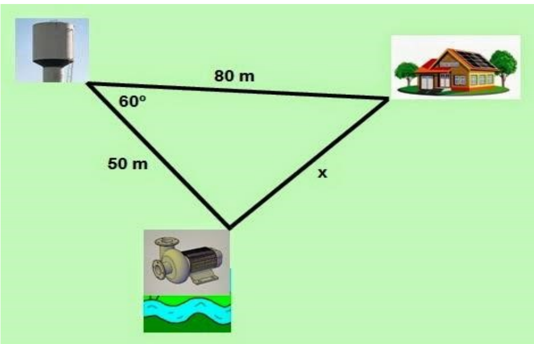
Procedimento: Entregar a cada aluno uma cópia da folha de exercício, e solicitar que resolva as questões.

Questões:

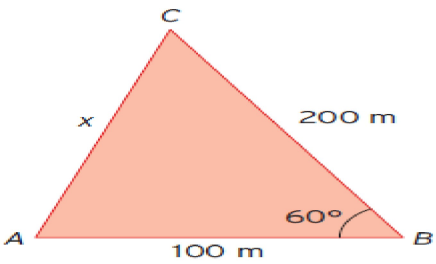
1. Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura a seguir. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos CBA = 57° e ACB = 59°. Sabendo que BC mede 30m, calcule, em metros, a distância AB . (Dado: use as aproximações sen(59°) ≈ 0,87 e sen(64°) ≈ 0,90)



2. A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50m de distância. A casa está a 80m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-casa é de 60º. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?



3. O triângulo a seguir representa um canteiro delimitado pelas ruas representadas por *AB*, *BC* e *AC*.



De acordo com os dados da figura, qual é o comprimento da rua representada por AC?

4. Em um triângulo ABC são conhecidas as medidas de dois de seus lados, AC = 3m e BC = 4m. Chamando de α o ângulo $B\hat{A}C$, formado pelos lados AC e AB, responda.

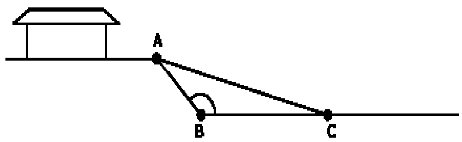
a) Se AB = 3 m, calcule o valor de cos α.

b) Se sen $(A\hat{B}C) = \frac{1}{4}$, calcule o valor de sen α.

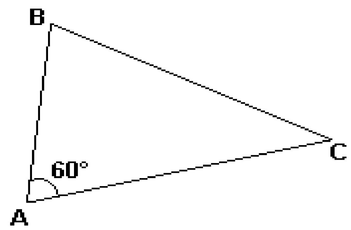
5. No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8cm e 6cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°.

O seno do ângulo B vale?

6. A figura abaixo mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta, **AC**, que servirá para o acesso de veículos à casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de **A** a **B** é de **6m**, de **B** a **C** é de **10m** e, o menor ângulo formado entre **AB** e **BC** é de **120°**. Então, o valor do comprimento da rampa deve ser de:



7. Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB=80km e AC=120km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura anterior. Logo, a distância entre B e C, em km, é:



8. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

a) Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 6 e 7?

b) Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

c) Num triângulo com lados medindo 5 e 6 e ângulo entre eles de 60º, qual o lado oposto ao ângulo informado?

d) Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 2, 3 e 5?

9. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale?

10. Sendo a o lado oposto ao ângulo α, b oposto β e c oposto θ , em um triângulo, calcule:

a) o seno de β para a = 4 cm, α = 30º e b = 8 cm;

Recomendações didáticas

A lista de questões deve ser entregue aos estudantes ao final de todas as atividades referente as relações trigonométricas no triângulo qualquer, com intuito de colocarem em prática o conhecimento adquirido

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As disciplinas realizadas no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática nos conduziu a reflexões sobre a construção do conhecimento matemático de relações trigonométricas. Assim, elaboramos essa SEQUÊNCIA DIDÁTICA com base no ensino por atividades, para isso utilizamos estudo sobre trabalhos já realizado sobre a temática, a opinião de discentes sobre o ensino dessa temática.

A sequência didática desenvolvida foi validada na dissertação de mestrado de Silva (2019), a qual obteve resultados significativos de participação dos estudantes na aula, de uma turma que era considerada a menos participativa do colégio pesquisado como no desempenho desses estudantes frente a resolução de problemas envolvendo relações trigonométricas.

Os resultados alcançados nos levaram ao desenvolvimento deste produto educacional destinado a você, professor que ensina matemática, com intuito de fornecer mais uma ferramenta que possibilite o aprendizado significativo e que possa trazer uma maior participação dos estudantes nas aulas. Destacamos que assim como os planos e planejamento, esta sequência didática e compatível com mudanças e adaptações que você professor julgar necessárias.

Dessa forma, o produto educacional aqui apresentado, torna-se uma possibilidade metodológica a qual busca colaborar no processo de ensino-aprendizagem das relações trigonométricas. Esperamos contribuir para educação deste país, e que tal produto seja útil nas salas de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cínthia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área. (2006)** Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/CinthiaSoaresdeAlmeida.pdf.> Acesso em: 08 out. 2016.

ALMEIDA, Marlisa Bernardi de; PERON, Luciana Del Castanhel; DESIDÉRIO, Ricardo. **Concepções de avaliação de professores e alunos da rede pública do Estado do Paraná. (s.d.)** Disponível em: <http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1530/1530.pdf.> Acesso em: 22 out. 2016.

ARANTES, Priscila Paschoali Crivelenti Vilela. **As razões trigonométricas no triângulo retângulo e as rampas de acesso** / Priscila Paschoali Crivelenti Vilela Arantes. – São Carlos: UFSCar, 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de São Carlos, 2013.

BRASIL, **Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental: Matemática.** Brasília: MEC/SEB. 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais** / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB –Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria da educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRUNER, J.S. **Uma Nova Teoria da Aprendizagem.** Rio de Janeiro: Ed. Bloch, 1976.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARVALHO; João Bosco Pitombeira. **Trigonometria Números Complexos.** Rio de Janeiro: Sbm, 1992. 122 p.

CHAER, Galdino; DINIZ, Rafael Rosa Pereira; RIBEIRO, Elisa Antônia. **A técnica do questionário na pesquisa educacional. (2011)** Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/sociologia_artigos/pesqusia_social.pdf.> Acesso em: 02 out. 2016.

CORDEIRO, Euzane Maria; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de**. As Metodologias de Ensino Predominantes nas Salas de Aula. (2015)** Disponível em: <http://www.uniube.br/eventos/epeduc/2015/completos/23.pdf.> Acesso em: 10 out. 2016.

CORREA, Rosana dos Passos; MONTEIRO, Rúbia Soraia Barata; SÁ; Pedro Franco de.**TRAJETÓRIA DAS TRIGONOMETRIAS: uma incursão histórica.**

(2015). Disponível em:<http://www.sbhmat.org/wa_files/P34.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2017.

CUNHA, Márcia Loureiro da. **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Uma Experiência Diferente. (2010)** Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_artigos/artigo_ml_cunha.pdf.> Acesso em: 28 nov. 2016.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**/Bruno D'Amore; [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DEPONTI, C. M.; ECKERT, C.; AZAMBUJA, J.L.B de. **Estratégia para construção de indicadores para avaliação da sustentabilidade e monitoramento de sistemas**. Agroecologia e Desenvolvimento Rural Sustentado. Porto Alegre, v.3, n.4, out/dez 2002.

DOLCE, Osvaldo; PMPEO, José Nicolau. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR:** GEOMETRIA PLANA. 7. ed. São Paulo: Atual, 1997. 451 p.

EDITORES LUMBRERAS, Asociación Fondo de Investigadores y. **Trigonometría Plana y Esférica e Introducción al Cálculo.** Perú: Lumbreras, 2016. 848 p.

FERNANDES, Piedade Maria Inglês; MATTOS, Gabriel Gonçalves. **O FUNCIONAMENTO DA SOCIEDADE CAPITALISTA NA CONCEPÇÃO DE ÉMILE DURKHEIM E KARL MARX.** (2008). Disponível em: <http://faef.revista.inf.br/imagens_arquivos/arquivos_destaque/T3U70zKu6gaMFwr_2013-5-10-16-46-37.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2017.

FERREIRA, Anderson Portal. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades.** 2018. 213f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

FERREIRA, Edna Cristina. **O ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DO MÉTODO DA DESCOBERTA: UM ESTUDO DE CASO.** (S.d.). Disponível em: <http://docplayer.com.br/22240656-O-ensino-de-geometria-atraves-do-metodo-da-descoberta-um-estudo-de-caso.html>. Acesso em: 18 nov. 2016.

FORTES, Adriana Wachtmann Borges. **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Uma Análise de Erros no Ensino Médio** / Adriana Wachtmann Borges Fortes. – Santa Maria: UNIFRA, 2012. Dissertação (Mestrado profissional) – Centro Universitário Franciscano, 2012.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática 9° ano**. Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2009. – (Coleção a conquista da matemática)

GOMES, Aline Neves**. Proposta de Seqüência Didática com Secção Áurea: Geometria dinâmica e arquitetura** / Aline Neves Gomes, orientação de Antônio José Barros Neto. Belém, 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Belém, 2009.

GOMES, Rosana Pereira. **O Ensino das relações trigonométricas no triângulo por atividades** / Rosana Pereira Gomes; Orientador: Pedro Franco de Sá. Belém, 2013. 218 f.; 30 cm Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, 2013.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

IEZZI, Gelson. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR:** TRIGONOMETRIA. 8. ed. São Paulo: Atual, 2010. 312 p.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 3. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1991. 206 p.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio:** Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2005. 237 p.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello. **O ensino de radicais por Atividades**. 2015. 304 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.

MARQUES, Michelly Niára Dias. **O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: Uma experiência com material manipulativo a partir do PIBID. (2014)** Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/6628/1/PDF%20-%20Michelly%20Ni%C3%A1ra%20Dias%20Marques.pdf.> Acesso em: 07 dez. 2016.

MELO, Anderson da Silva. **O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica** / Anderson da Silva Melo. – Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Dissertação (Mestrado profissional) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

MENDES, Iran abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática** – Belém: EdUFPA, 2008.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016. 124 p.

OLIVEIRA, Henrique. **Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo** / Henrique Oliveira. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 75 f. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de São Carlos, 2013.

ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho; AGUIAR, Glauco Silva. **Repetência escolar nos anos iniciais do ensino fundamental: evidências a partir dos dados da Prova Brasil 2009. (2013)** Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbeped/v94n237/a03v94n237.pdf.> Acesso em: 10 out. 2016.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PINHEIRO, Evandro. **O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico** / Evandro Pinheiro. – Belo Horizonte: PUCMinas, 2008. Dissertação (Mestrado Profissional) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.

REIS, Leonardo Rodrigues dos Reis. **Rejeição à Matemática: Causas e Formas de Intervenção. (2005)** Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/LeonardoRodriguesdosReis.pdf.> Acesso em: 15 out. 2016.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008. 124 p.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o Ensino de Matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Ensinando Matemática através da Redescoberta.** Disponível em:http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfLakAF/ensinandomatematicaatravesredescoberta. Acesso em 14 set. 2016.

SÁ, Pedro Franco de. **Relações trigonométricas nos triângulos**. Belém, Universidade do Estado do Pará, 2016.

SÁ, Pedro Franco de; JUCÁ, Rosineide de Sousa; NASCIMENTO, Antonio Paulo Martins do. **Matemática por atividades: experiências bem sucedidas**. Petrópolis, RJ : Vozes , 2014.

SÁ, Pedro Franco de; PINHEIRO, Keily Leonez. JOGOS E PROBLEMAS ARITMÉTICOS. In: NORONHA, Claudianny Amorim et al. **ENSINO, FORMAÇÃO DOCENTE:** PROPOSTA, REFLEXÕES E PRÁTICAS. Belém: Fundação Biblioteca Nacional, 2002. Cap. 10. p. 135-150.

Sá, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de matemática por atividades**. Belém, PA. 60. p. 2019.

SILVA, Luiz Carlos Soares da. **O Ensino de Relações Trigonométricas por Atividades**. 2019, 355 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática: compreensão e prática.** – 2. Ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

SIQUEIRA, Thiago Carneiro de Barros. **Trigonometria no Triângulo Retângulo: conhecimentos para seu ensino na formação de professores** / Thiago Carneiro de Barros Siqueira. – Campo Grande: UFMS, 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2013.

SOUSA, Miguel Angelo Moraes de. **Experimentos de Trigonometria em Sala de Aula** / Miguel Angelo Moraes de Sousa. – Santarém: UFOPA, 2014. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal do Oeste do Pará, 2014.

SOUZA, Fabiano dos Santos; SILVA, Isabela Cristina da Silveira e; RAMOS, Leiliane da Silva Coutinho; RANGEL, Luciano dos Santos. **CONSTRUINDO CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. (2012)** Disponível em: <http://www.sinprosp.org.br/congresso_matematica/revendo/dados/files/textos/Relatos/CONSTRUINDO%20CONCEITOS%20TRIGONOM%C3%89TRICOS%20ATRAV%C3%89S%20DA%20RESOLU%C3%87%C3%83O%20D.pdf.> Acesso em: 20 nov. 2016.

SOUZA, Roberta Sodré de; CORDEIRO, Maria Helena**. A contribuição da Engenharia-Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica. (2005)** Disponível em: <http://www.pucpr.edu.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI200.pdf.> Acesso em: 20 set. 2016

SOUZA, Roberto Barcelos; GOULART, Claudiney. **O impacto causado pelo uso de jogos no ensino de matemática** In: III CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG – CONPEEX, 3. 2006, Goiânia. Anais eletrônicos do III Seminário PROLICEN [CDROM],Goiânia: UFG, 2006. n.p.

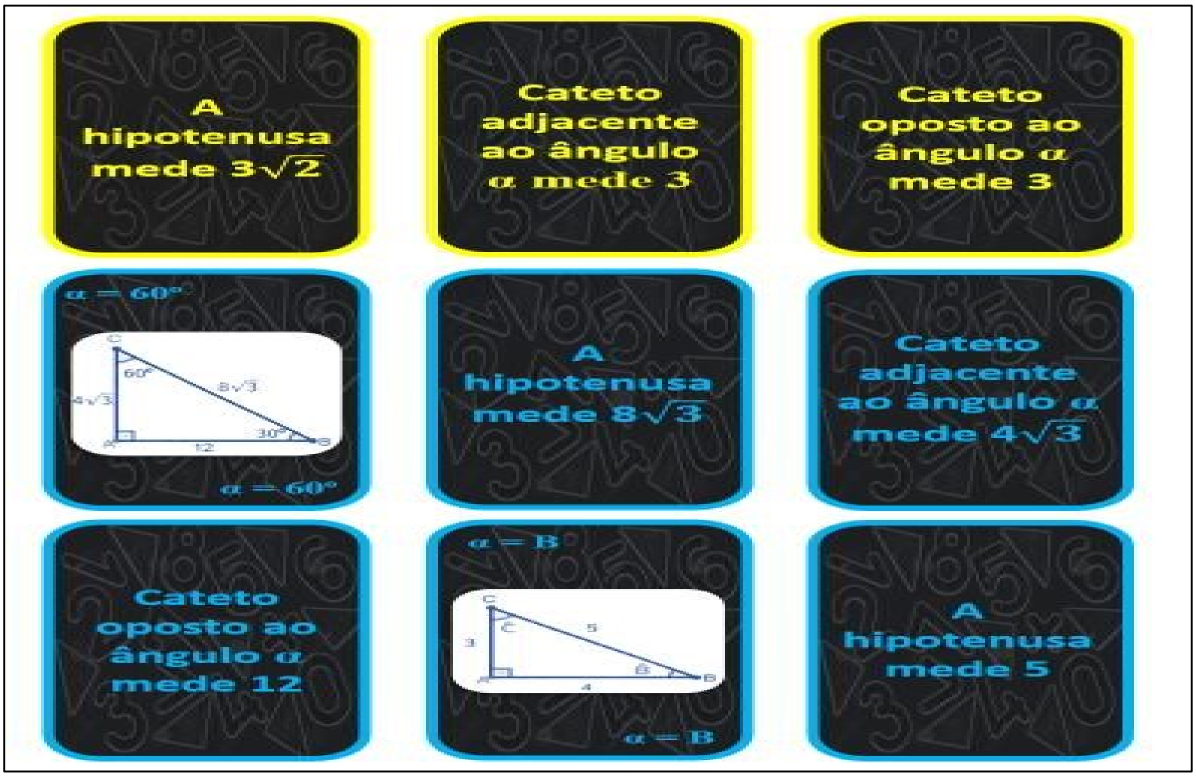
SOUZA, Wagner Santiago de. **Trigonometria em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos** / Wagner Santiago de Souza. – Juazeiro: UNIVASF, 2016 97f; 29 cm Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2016.

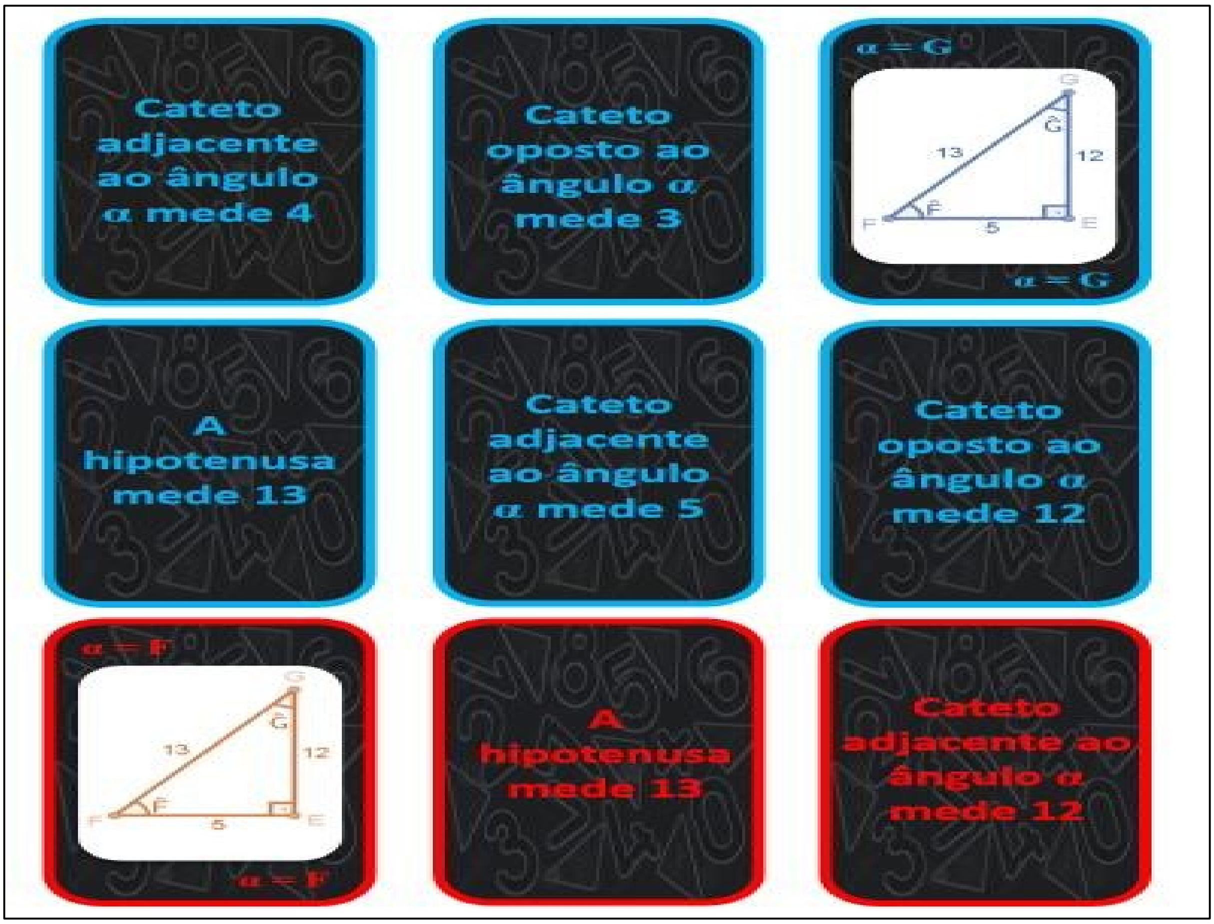
ZEFERINO, Leandro. **Jogos Matemáticos nas aulas do Ensino Médio: Pife Trigonométrico.** Curso de Licenciatura em Matemática / Leandro Zeferino. - São Paulo: IFSP, 2015.Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

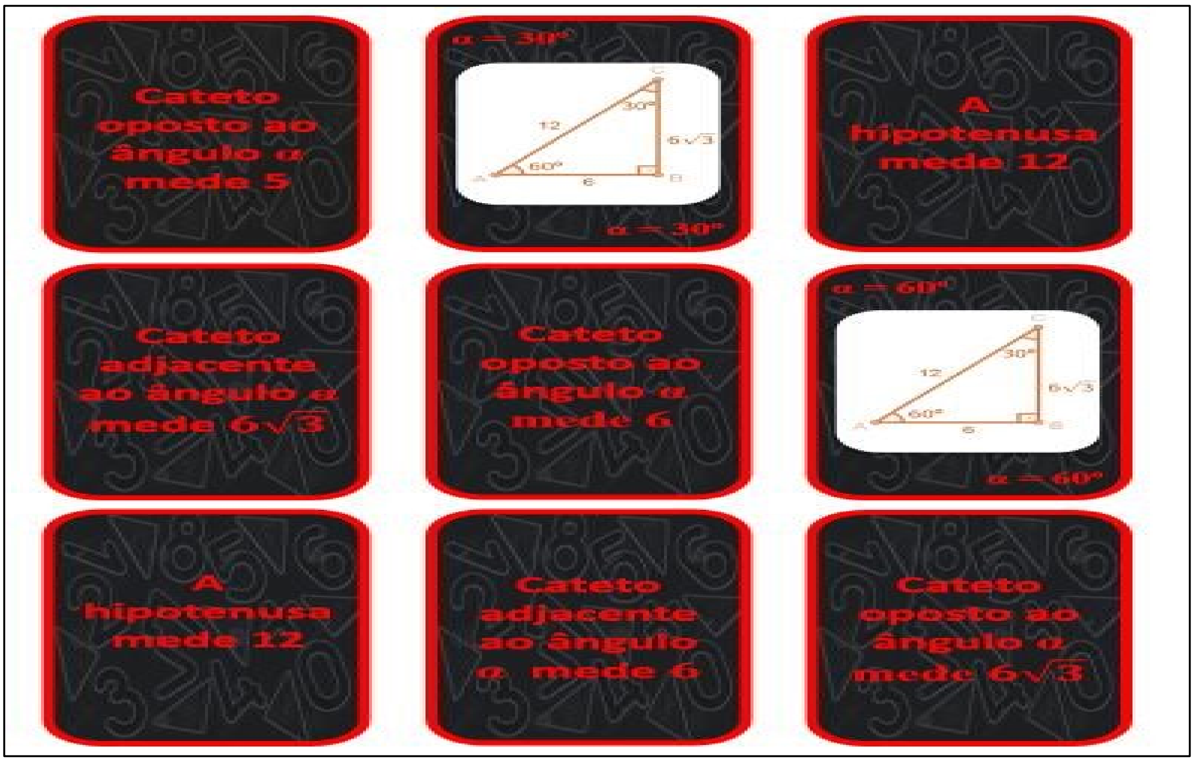
ZYGER; Elisabeth Aizman; AIZMAN, Leia; CARVALHO, Rosita Edler; D'OREY, Vera. **Como eles aprendem, como podemos ensinar. (2002)** Disponível em: <http://pigead.lanteuff.org/pluginfile.php/41931/mod_resource/content/5/UAB%20Mod2%20aula%2002.pdf.> Acesso em: 03 nov. 2016.

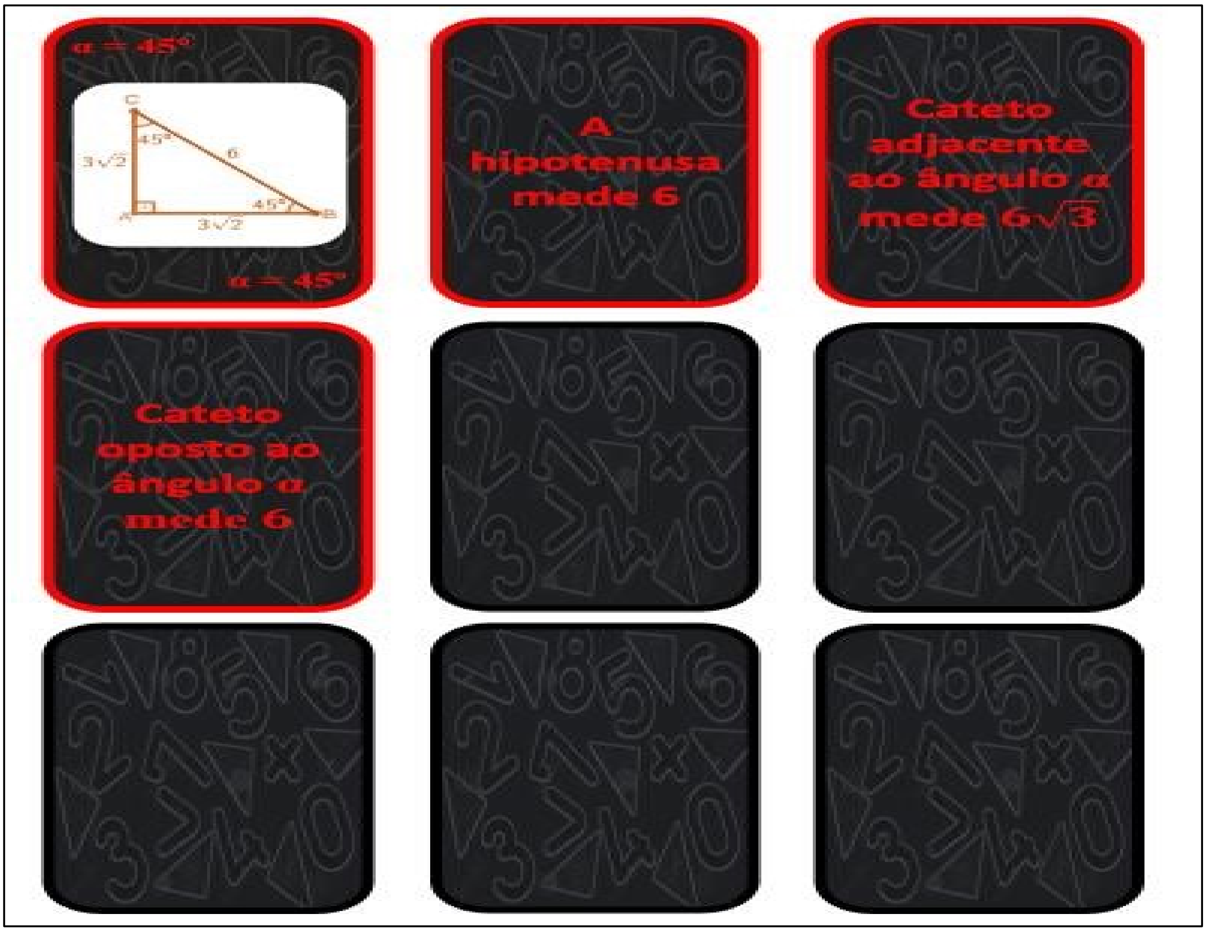
ANEXOS

ANEXO A – Baralho 1

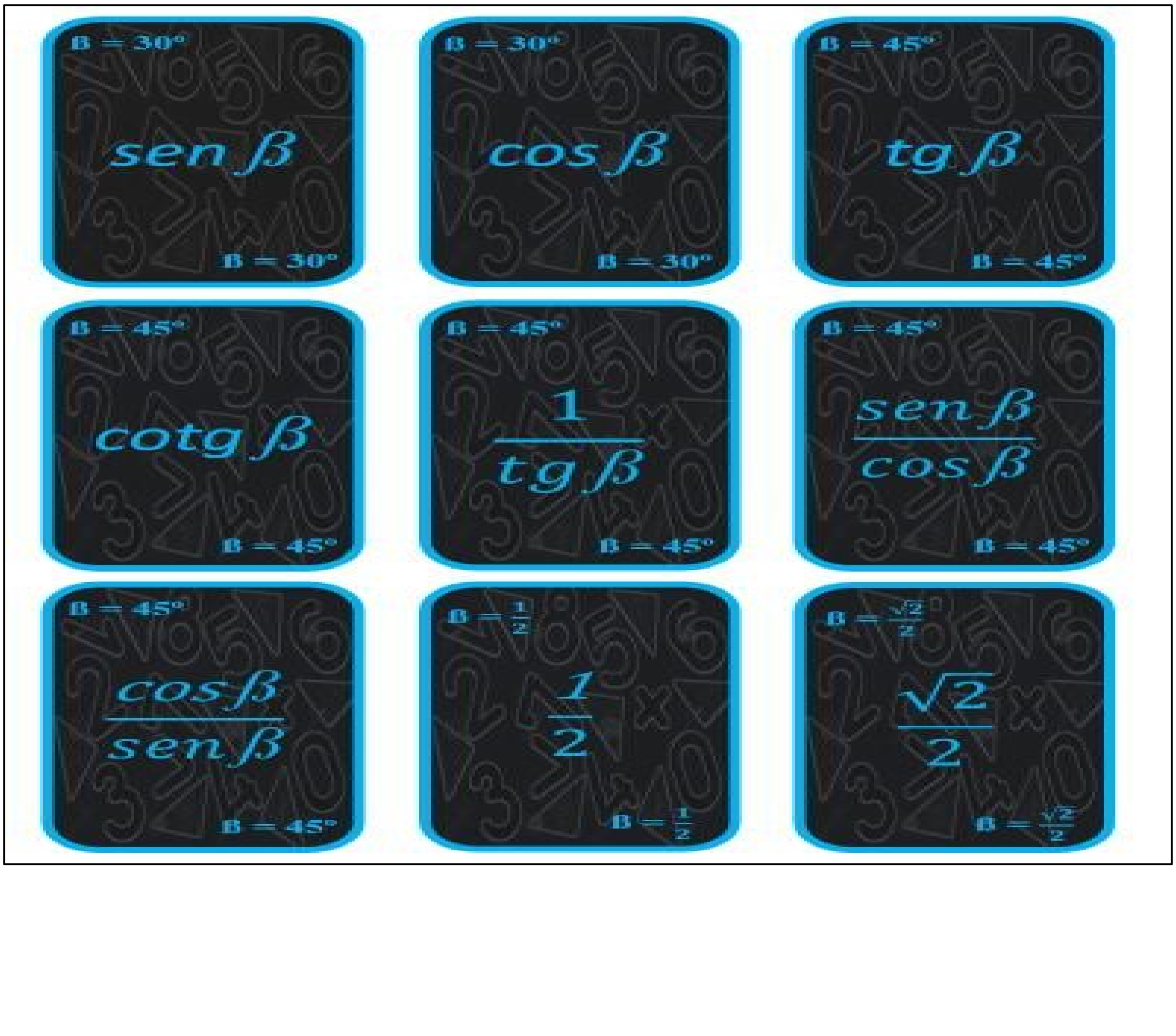

A hipotenusa mede $3\sqrt{2}$
Cateto adjacente ao ângulo α mede 3
Cateto oposto ao ângulo α mede 3
$\alpha = 60°$
C
60°
$8\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$
A
12
30°
$\alpha = 60°$
A hipotenusa mede $8\sqrt{3}$
Cateto adjacente ao ângulo α mede $4\sqrt{3}$
Cateto oposto ao ângulo α mede 12
$\alpha = B$
C
$\hat{C}$
5
3
$\hat{B}$
B
4
$\alpha = B$
A hipotenusa mede 5

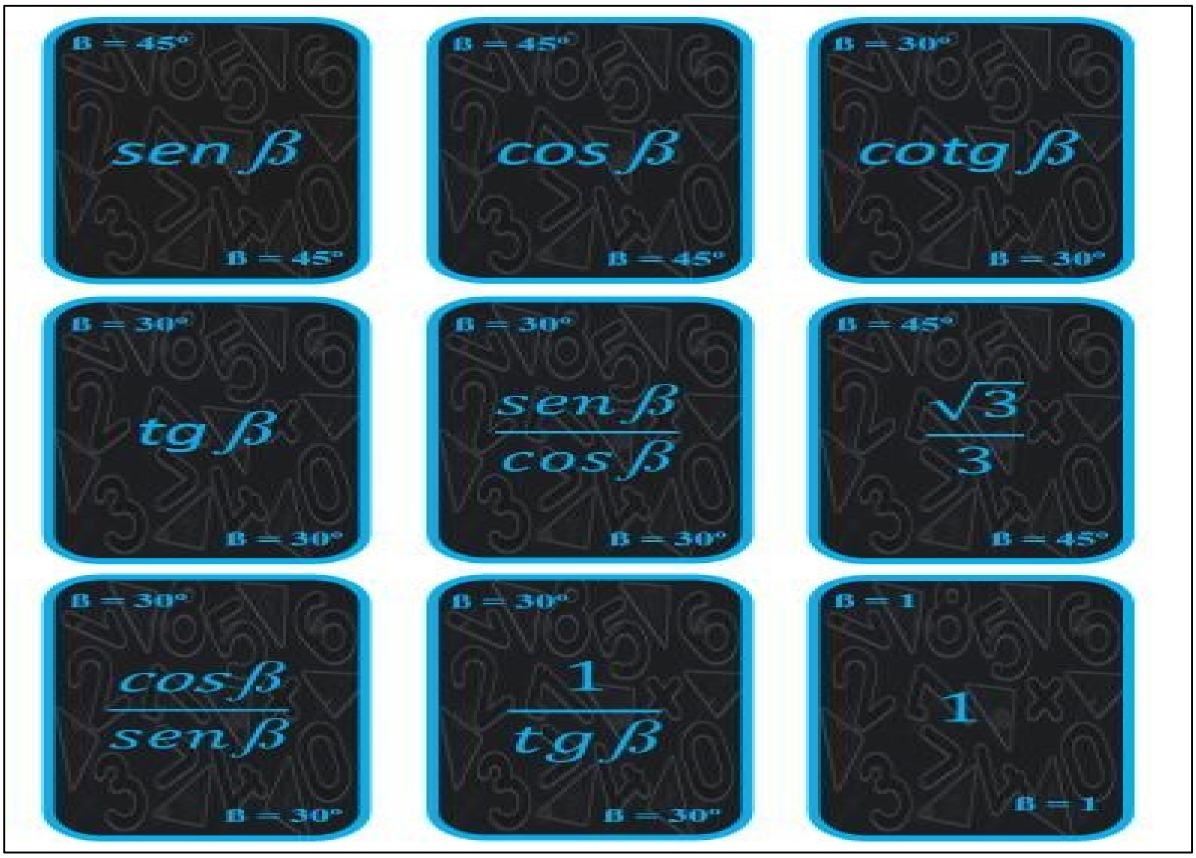

Cateto adjacente ao ângulo α mede 4
Cateto oposto ao ângulo α mede 3
$\alpha = G$
G
$\hat{G}$
13
12
F
$\hat{F}$
5
E
$\alpha = G$
A hipotenusa mede 13
Cateto adjacente ao ângulo α mede 5
Cateto oposto ao ângulo α mede 12
$\alpha = F$
G
$\hat{G}$
13
12
F
$\hat{F}$
5
E
$\alpha = F$
A hipotenusa mede 13
Cateto adjacente ao ângulo α mede 12

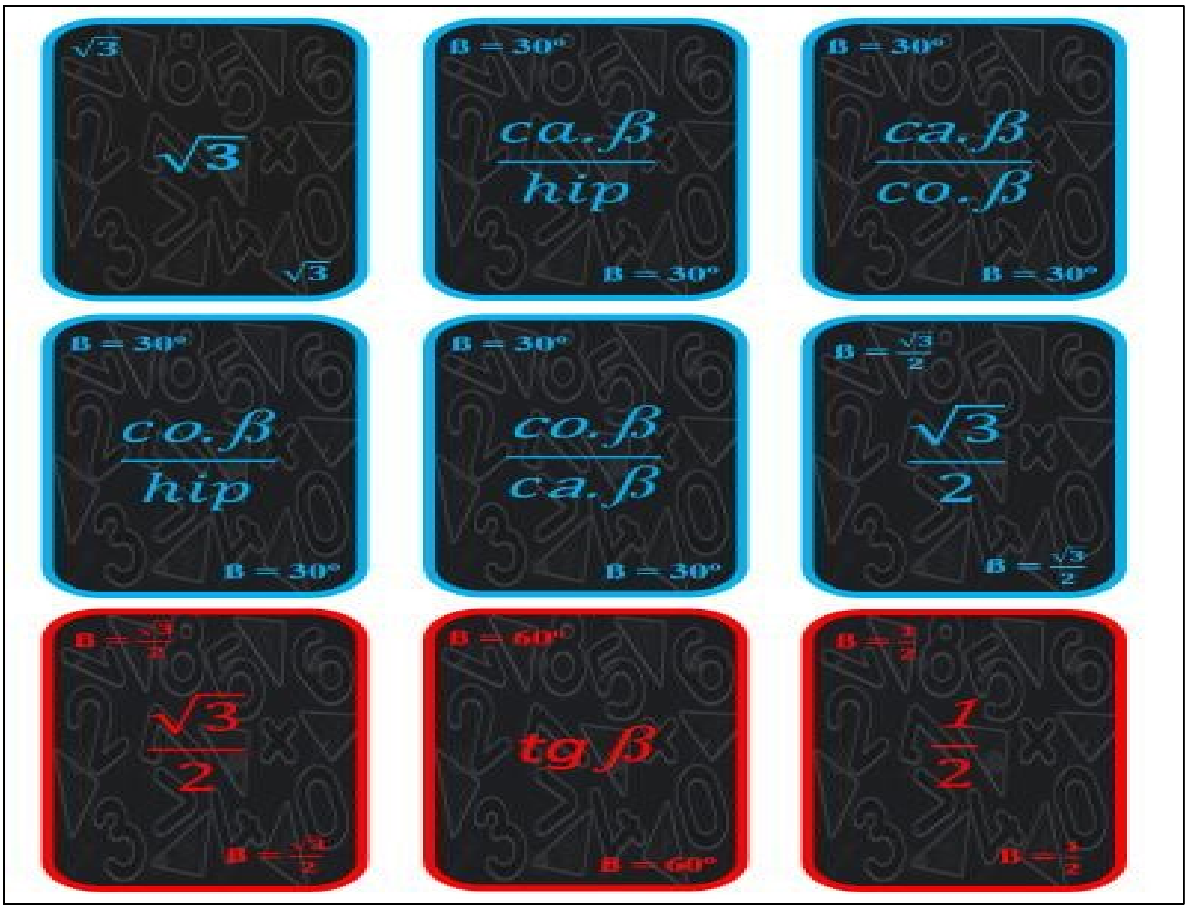

Cateto oposto ao ângulo α mede 5
α = 30°
C
30°
12
6√3
A
60°
6
B
α = 30°
A hipotenusa mede 12
Cateto adjacente ao ângulo α mede 6√3
Cateto oposto ao ângulo α mede 6
α = 60°
C
30°
12
6√3
A
60°
6
B
α = 60°
A hipotenusa mede 12
Cateto adjacente ao ângulo α mede 6
Cateto oposto ao ângulo α mede 6√3

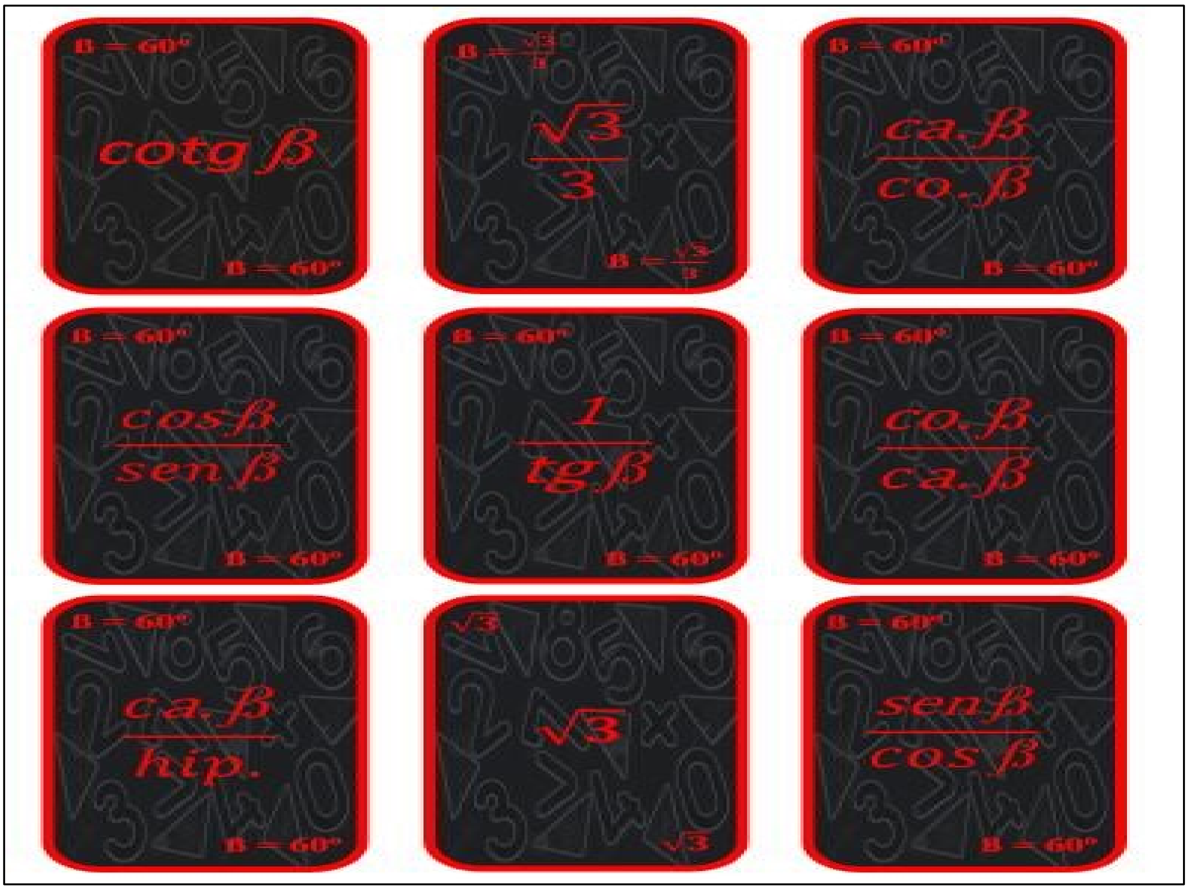

α = 45°
C
45°
3√2
6
A
45°
B
3√2
α = 45°
A hipotenusa mede 6
Cateto adjacente ao ângulo α mede 6√3
Cateto oposto ao ângulo α mede 6

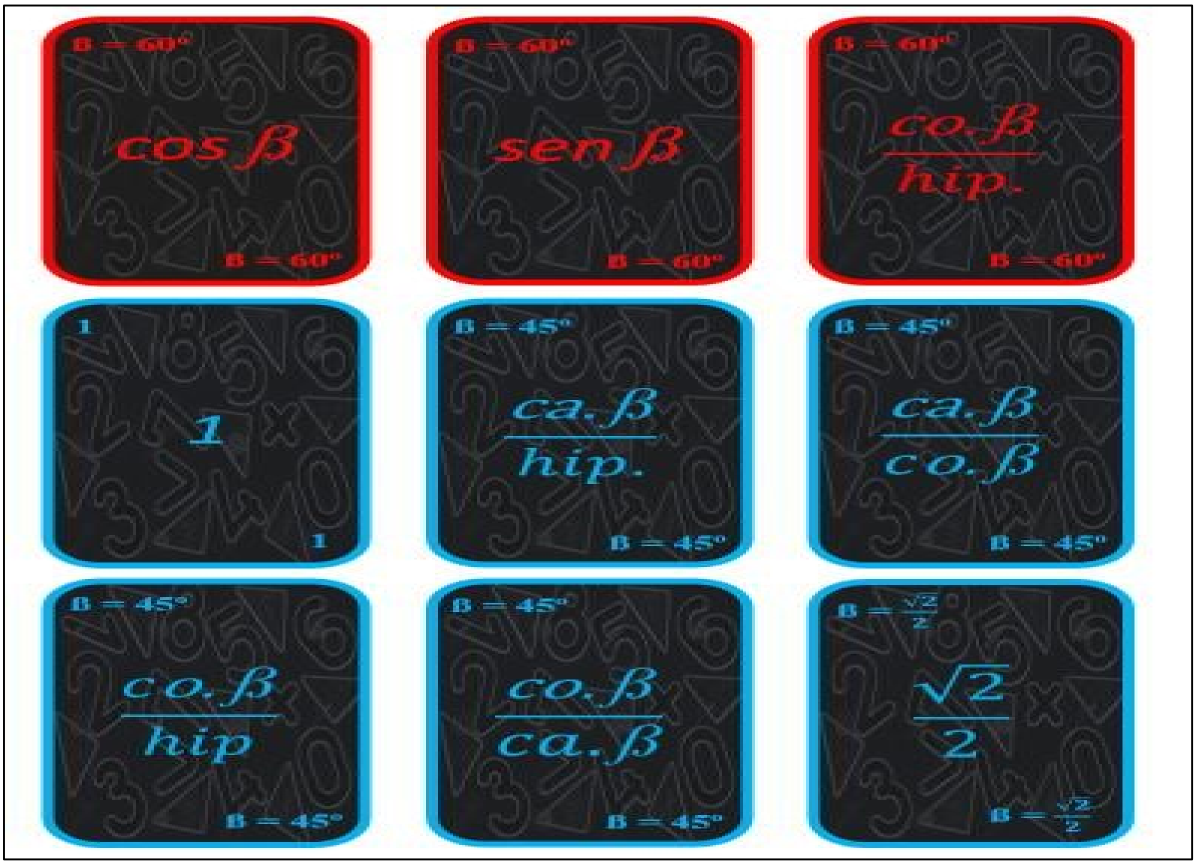
ANEXO B – Baralho 2

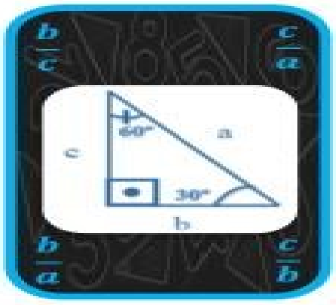


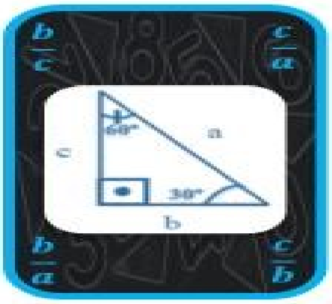

β = 45°
sen β
β = 45°
β = 45°
cos β
β = 45°
β = 30°
cotg β
β = 30°
β = 30°
tg β
β = 30°
β = 30°
sen β / cos β
β = 30°
β = 45°
√3 / 3
β = 45°
β = 30°
cos β / sen β
β = 30°
β = 30°
1 / tg β
β = 30°
β = 1
1
β = 1

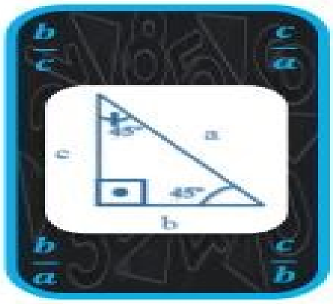

√3
√3
√3
β = 30°
ca.β / hip
β = 30°
β = 30°
ca.β / co.β
β = 30°
β = 30°
co.β / hip
β = 30°
β = 30°
co.β / ca.β
β = 30°
β = √3/2
√3 / 2
β = √3/2
β = √3/2
√3 / 2
β = √3/2
β = 60°
tg β
β = 60°
β = 1/2
1 / 2
β = 1/2

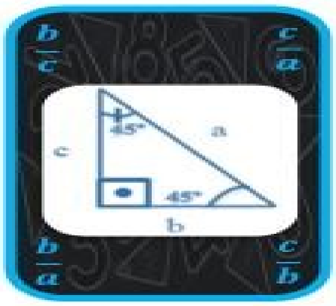

ß = 60°
cotg β
ß = 60°
√3/3
ca.β/co.β
ß = 60°
ß = 60°
cos β/sen β
ß = 60°
ß = 60°
1/tg β
ß = 60°
ß = 60°
co.β/ca.β
ß = 60°
ß = 60°
ca.β/hip.
ß = 60°
√3
√3
√3
ß = 60°
sen β/cos β
ß = 60°


ß = 60°
cos β
ß = 60°
ß = 60°
sen β
ß = 60°
ß = 60°
co.β/hip.
ß = 60°
1
1
1
ß = 45°
ca.β/hip.
ß = 45°
ß = 45°
ca.β/co.β
ß = 45°
ß = 45°
co.β/hip
ß = 45°
ß = 45°
co.β/ca.β
ß = 45°
√2/2


b/c
c/a
60°
a
c
30°
b
b/a
c/b


b/c
c/a
60°
a
c
30°
b
b/a
c/b


b/c
c/a
45°
a
c
45°
b
b/a
c/b


b/c
c/a
45°
a
c
45°
b
b/a
c/b

Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Tr. Djalma Dutra, s/nº - Telégrafo
660113-010 Belém – PA
www.uepa.br