Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Uma sequência didática para o ensino de probabilidade

Marcel Brito Soares
Pedro Franco de Sá

Belém - PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

SOARES, Marcel Brito e SÁ, Pedro Franco. Uma sequência didática para o ensino de probabilidade. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PMPEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Probabilidade.

SUMÁRIO

1. Apresentação

No âmbito da Educação Matemática, estudos confirmam a prevalência de dilemas ligados à aprendizagem da maioria dos conteúdos referentes a esta área de conhecimento, intensificando a produção de trabalhos e propondo a partir destes, novas ferramentas de incentivo ao seu processo de ensino-aprendizagem.

No Ensino Básico é comum os alunos apresentarem dificuldades em resolver questões sobre probabilidade, questões que envolvem os conceitos iniciais como os de espaço amostral e eventos e conceitos mais complexos como a probabilidade da união de eventos disjuntos e não disjuntos, probabilidade condicional e de eventos independentes, contribuindo para que a matemática seja vista como uma disciplina difícil de ser apreendida pelos discentes. Segundo Sá (2009, p. 14), às dificuldades relacionadas ao aprendizado da matemática são oriundas de seu caráter seletivo caracterizado desde os primeiros anos de sua sistematização e implantação nas escolas.

Tais dificuldades estão relacionadas a leitura e a interpretação incorretas do enunciados das questões, na interpretação das probabilidades subjacentes aos eventos dados nas situações de interpretação de probabilidade em contextos sociais ou no contexto do livro didático, bem como na identificação de espaços amostrais e eventos para o cálculo de probabilidades envolvendo eventos simples e eventos compostos. Ademais, temos as probabilidades dos eventos complementares e não complementares, condicionais e de eventos independentes com suas características específicas.

As dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da probabilidade são objetos de pesquisas que buscam alternativas para amenizar, ou quem sabe sanar, os obstáculos encontrados por professores em sua prática docente e, principalmente, para os discentes no aprendizado de variados conceitos concernentes ao conteúdo em questão.

Como educador pretendemos pôr em foco este assunto percebido em variadas situações do cotidiano e estudos em diversas áreas de conhecimento e que, por sua aplicabilidade e relevância, deve ser compreendido com clareza pelos estudantes de matemática.

Nesta perspectiva, no desenvolvimento deste trabalho, utilizamos uma das tendências atuas da educação matemática – o ensino por atividades- e a partir desta tencionamos, estimular os alunos a progredir sucessivamente exercitando seus conhecimentos, a partir de uma aprendizagem duradoura de todas as sequencias conceituais do conteúdo de probabilidade para o ensino médio.

Neste sentido em questão, apresentamos a presente sequencia didática para o ensino de probabilidade como produto da pesquisa desenvolvida Soares (2018) a qual foi objeto da dissertação do autor aprovada pela banca avaliadora no dia 05 de março de 2018.

A dissertação objetivou avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade por meio de atividades sobre os aspectos conceituais e desempenho da resolução de questões envolvendo o assunto. Os resultados desse estudo mostraram que a sequência didática elaborada, a metodologia de ensino por atividades e o trabalho docente proporcionaram uma efetiva participação dos discentes nas aulas de matemática e um aumento no desempenho de resolução de questões sobre probabilidades.

Assim o referido produto de pesquisa, apresenta uma proposta de atividade para o ensino dos conceitos relacionados a probabilidade no nível médio, de forma a contribuir para minimizar dificuldades apresentadas por estes alunos em relação a aprendizagem de tais conceitos.

A seguir apresentamos uma abordagem histórica sobre Probabilidade.

2. Aspectos Históricos da Probabilidade

A Probabilidade tem sua origem nos jogos de "azar" – "dado" em árabe. Documentos do tipo arqueológicos ou históricos mostram a existência dos jogos de azar desde a antiguidade, porém nunca foram objetos de estudo até a Idade Média. (MORAES, 2014)

Segundo Moraes, o *jogo de ossos* – formas primitivas de dados feitos de ossos-, conhecidos como *astrágalo* esteve presente em quase todas as civilizações, encontradas por historiadores em pinturas de tumbas egípcias feitas em 3500 a.c.; na Índia e no norte do Iraque – antes Mesopotâmia - em 3000 a.c.; polinésia e siberianos; difundido para o mundo grego, romano e chegando no mundo Cristão Medieval através dos comerciantes marítimos italianos; e durantes as cruzadas trazidos para o Ocidente.

Nessa perspectiva a probabilidade, historicamente esteve associada a práticas baseadas em estimativas empíricas tais como: jogos de dados, baralhos, surgimento dos seguros aplicados a perda de carga de navios em naufrágios e roubos, jogos e apostas, previsão de futuro, decisão de disputas, divisão de heranças, acidentes para estipular as taxas e prêmios correspondentes.

Estabeleceu-se ao longo do tempo aproximação com experiências frequentes, comuns ou simples do cotidiano, atribuindo-se aos deuses as suposições de vitória ou de derrota diante de um jogo ou fato e por acreditarem em superstições e insistirem na verdade absoluta provadas pela lógica, tinham dificuldade em aceitar a ideia de aleatoriedade.

De acordo com Moreira (2015), os romanos foram os primeiros a utilizar o processo de aleatoriedade. Eram mais preocupados com a medição e a contagem do que com a geometria. Porém, o desenvolvimento do cálculo de probabilidade teve início apenas no século XVI, mostrados por trabalhos relevantes sobre a teoria da probabilidade.

O italiano ***Girolamo Cardano*** **(1501 – 1576)** escreveu um tratado de 32 capítulos sobre um estudo de jogos em que ele mesmo apostava: dados, gamão, cartas, astrágalos, xadrez com o título "O Livro dos Jogos de Azar", primeiro trabalho a introduzir princípios de probabilidade, mostrando que eventos sujeitos ao acaso são dependentes de fatores incertos; a probabilidade de um evento sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados; indicando uma nova metodologia ao associar métodos combinatórios no desenvolvimento de uma teoria da probabilidade; representando avanços na compreensão da natureza da incerteza. Cardano, por ter escrito em uma época ainda sob forte influência das aferições empíricas, apresentou alguns equívocos, por exemplo, quando associava uma sequência de derrotas ocorridas, pôr supor que a sorte estava adversa, uma maneira de mudar o resultado seria jogar o dado com bastante força. Cardano, em outro trabalho com o título “Novo Trabalho em Proporções” trata de vários problemas ligados à combinatória. (MORAES,2014; MOREIRA,2015).

O italiano ***Niccoló Tartaglia*** **(1499 – 1557)** escreveu um trabalho com o título “Tratado Geral Sobre Números e Medidas” abordando o assunto de cálculos de probabilidades e combinatórias em que utiliza um problema proposto em 1494 por Luca Pacciole. O italiano ***Galileu Galilei*** **(1564 – 1642)** físico, astrônomo, matemático e filosofo. Dedicando-se ao estudo da probabilidade, fez um estudo do número possível de resultados em jogos de dados com o título “Ideias Sobre o Jogo de Dados” presumindo que um dado tem probabilidade igual de cair em qualquer um dos seis lados. (MOREIRA,2015, p.10).

O francês ***Blaise Pascal*** **(1623 – 1662)**, em 1654 desenvolveu em parceria com o também francês ***Pierre de Fermat (1601 – 1662)***, uma abordagem sistêmica e generalizável, inicialmente por correspondências, estabelecendo os fundamentos para cálculo de probabilidade; e solução do problema/desafio proposto anos antes por Paccioli, divulgado como o “problema dos pontos”, que consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do seu final, este problema foi exposto a Pascal por Chavalier de Méré, um intelectual francês lembrado por sua participação na teoria da probabilidade. Em 1679 as correspondências de Pascal e Fermat apresentam abordagem próprias, resolvendo diversas versões do problema proposto por Paccioli, foram publicadas em Toulouse na França. Um conjunto de documentos históricos considerados patrimônio da história da matemática, composto por sete cartas, originarias da teoria da matemática da probabilidade. Os estudos de Pascal e Fermat foram baseados no aperfeiçoamento da regra geral de Cardano e na aplicação do cálculo combinatório. (MORAES,2014; MOREIRA,2015).

O holandês ***Christiaan Huygens* (1629 – 1695)** em 1657 ao perceber o surgimento de uma importante teoria matemática escreveu um livro com o título “De Ratiociniis in Ludo Aleae” (O Raciocínio em jogos de azar), resultado da resolução de uma sequência de 14 problemas relacionados a jogos de azar sem utilização da combinatória, estes que compõe o primeiro livro publicado em teoria da probabilidade, utilizado até o século XVIII. Huygens teve forte influência do matemático francês René Descartes (1596 – 1650) em sua educação matemática. (MORAES,2014).

O suíço ***Jakob Bernoulli* (1654 – 1705)** escreveu um tratado de probabilidade com o titilo “Ars Conjectand” (A Arte da Conjectura), falecendo antes de conclui-lo foi finalizado por seu sobrinho também matemático Nicolaus Bernouli (1687 – 1759) e publicado postumamente em 1713. Neste livro Bernoulli prova a Lei dos Grandes Números, resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de probabilidade e frequência relativa; contendo considerações sobre esperança matemática e probabilidade a priori e a posteriori. O tratado contem quatro partes: a primeira representa a reedição do livro de Huygens complementados por comentários; a segunda com o título “A Doutrina de Permutação e Combinações”; a terceira aplicou a teoria da combinatória na resolução de 24 problemas de jogos de azar; e a quarta parte com o título “Pars Quarta” onde fez aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Bernoulli defendia a tese de que as tomadas de decisões para determinar probabilidade deveriam ser auxiliadas por métodos matemáticos, posto que, com o aumento do número de observações, as frequências observadas deveriam ser cada vez mais precisas. (MORAES,2014; MOREIRA, 2015).

O suíço **Leonhard Euler (1707-1783)** obteve forte influência da família Bernoulli que produziu vários grandes matemáticos, alguns dos quais com contribuição na teoria da probabilidade: Johann Bernoulli (1667-1748), Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Daniel Bernoulli (1700 – 1782). Em 1726, aos 19 anos, ocupou a vaga de Nicolaus II Bernoulli (1695 – 1726), que havia falecido, na Academia de Ciências de São Petersburgo. Dentre vários, Euler, desenvolveu um trabalho com o título “Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain” (Pesquisa sobre a mortalidade geral e a multiplicação da humanidade), publicado em 1760, propondo resoluções a vários problemas na área da demografia matemática, contribuindo na aplicação da probabilidade na área de loteria, demografias e seguros. (MORAES, 2014).

O francês ***Abraham De Moivre*** **(1667 – 1754)**, conhecido por seu trabalho com o título “Doctrine of Chances” (Doutrina das Chances) publicado em 1718 em inglês, composto por muito material sobre a teoria das probabilidades e *Miscellanea analytica*, contendo contribuições a séries recorrentes, probabilidade e geometria analítica. De Moivre foi o primeiro a trabalhar com a integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, em probabilidade e mesmo de forma implícita, as técnicas de reduzir problemas de probabilidade a equações e de usar funções geratrizes para solucionar essas equações. (EVES, 2004)

O francês ***Georges-Louis Leclerc*** **(1707 – 1788)** conhecido como Conde de Buffon, membro da Academia Francesa, segue a tendência da aplicação da teoria da probabilidade às ciências naturais influenciando vários naturalistas, entre os quais se destacou o britânico Charles Darwin. Buffon desenvolveu um trabalho sobre espécies perdidas; e origem dos planetas como produto de colisão associados a cálculos de probabilidades. Seus estudos serviram de fundamento para o aperfeiçoamento da paleontologia. Em 1777 apresenta o “problema da agulha de Buffon” propondo determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento I atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de a $> \mathrm{I}$, quando lançada aleatoriamente. (MORAES,2014).

O francês, ***Pierre-Simon Laplace*** **(1749 – 1827)** produziu seus melhores trabalhos nas áreas da mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodesia. Sobre probabilidade publicou em 1812 um tratado com o título “Théorie Analytique des Probabilitées” (Teoria Analítica de Probabilidade), obra que consta dos estudos de Cardano em probabilidade que desenvolveu entre os anos de 1771 e 1786. A fundamentação feita por Laplace em sua obra reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores, incluindo aplicações na teoria de análise de erro de medições, inicialmente desenvolvida em 1756, pelo matemático inglês Thomas Simpson (1730 – 1761). Adepto do determinismo, Laplace não acreditava na aleatoriedade da natureza, agregando a probabilidade, a incerteza das causas exatas dos fenômenos estudados. O aleatório sempre foi objeto de controvérsia filosóficas para o qual a teoria quântica trouxe respostas em contraposição ao determinismo da física do matemático e físico inglês Isaac Newton (1643 – 1727). Atualmente essa obra de Laplace é conhecida como: “Definição Clássica de Probabilidade”, posto que deu início ao período clássico da teoria probabilística se mantendo inalterada até o século XX. (MORAES,2014; MOREIRA, 2015).

O alemão ***Carl Friedrich Gauss*** **(1777 – 1855)** desenvolveu o método dos mínimos quadrados, estabelecendo a relação da distância de erros de medidas com a curva normal, formulado de forma independente da proposta do matemático americano Robert Adrian (1775 – 1843), e pelo matemático francês Adrian-Marie Legendre (1752 - 1833). (MORAES,2014).

O francês ***Siméon-Denis Poisson (1781 – 1840)*** publicou em 1837 seu trabalho com o título “Recherches sur la Probabilité des Jugements” (Pesquisa sobre a probabilidade dos julgamentos (das decisões)), defendendo a tese da aplicação da teoria da probabilidade em analises de decisões judiciais. A distribuição proposta por Poisson é básica na verificação de variados problema relativos a ocorrências de eventos aleatórios no tempo e no espaço, hoje conhecida como “Lei dos Pequenos Números contendo a distribuição de Poisson”. (MORAES,2014).

O russo ***Pafnuty L’vovich Chebyshev*** **(1821 – 1894)** marca a fundação da conceituada escola de São Petersburgo formando relevantes matemáticos russos com contribuições fundamentais à teoria da probabilidade. Obtendo forte influência dos matemáticos: o russo Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889), que publicou o livro “Fundamentos da teoria matemática das probabilidades”; e o ucraniano Mikhail Vassiliovich Ostrogradski (1801 – 1862), ambos produtos da linhagem inaugurada por Daniel Bernoulli e Euler em São Petersburgo. Período que se iniciam aplicações de probabilidade na física, com trabalhos de Boltzmann, mostrando evidentes limitações dos fundamentos matemáticos na teoria da probabilidade, enfatizado através de paradoxos, sendo o mais famoso o “Paradoxo de Bertrand”, que mostra que a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma corda com comprimento maior que $\sqrt{3}$ em um circuito de raio unitário pode ter várias respostas. Chebyshev foi o primeiro a raciocinar de forma sistematizada termos de variáveis aleatórias e seus momentos, estabelecendo uma simples desigualdade que permitiu uma prova trivial da lei dos grandes números enunciado como: “*A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de provas cresce indefinidamente”.* (LIMA,2013; MORAES,2014).

O russo **Andrei Andreiwich Markov (1856 – 1922)** por influência de Chebyshev, seu professor, utilizou o conceito de movimento para dar uma prova rigorosa do teorema central do limite, além de estudos sobre dependência de variáveis aleatórias, hoje denominadas cadeias de Markov. O russo **Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918)** outro famoso estudioso da teoria da probabilidade, usou o conceito de funções características para dar uma prova mais simples das cadeias de Markov. (MORAES,2014).

O russo **Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987)** publicou em 1924 seu primeiro trabalho em probabilidade junto com Aleksander Yakovlevich (1894 – 1959); desenvolveu um trabalho sobre as cadeias de Markov em tempo contínuo. A contribuição teórica de Kolmogorov marca o início do desenvolvimento da teoria moderna da probabilidade, publicando em 1931 um importante artigo “Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade” no qual estabelece os fundamentos da teoria moderna de processos estocásticos, período em que a teoria da probabilidade já era considerado um instrumento eficaz, exato e confiável do conhecimento. (MOREAS,2014)

Como observado em Moraes (2014) e Moreira (2015) a teoria da probabilidade é caracterizada pelo alargamento cada vez mais constante do alcance de suas aplicações práticas, percebida na tradição e estudos de variadas nações e por ser usada diariamente de forma intuitiva, em situações do cotidiano, chances de jogos, passar em concursos públicos, probabilidade de chover, da situação do trânsito, além de estudos em diversas áreas: estatística, economia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, na análise de decisão entre outros ramos do conhecimento.

3. Estudos Sobre o Ensino de Probabilidade

Nesse momento apresentaremos os resultados de um estudo sobre o ensino de probabilidade, realizado com vista a obter informações necessárias ao desenvolvimento e construção da sequência didática, as tendências

Temáticas e os enfoques teóricos e metodológicos, indicando os caminhos que estão sendo trabalhados em pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade. As pesquisas foram encontradas nos repositórios de teses e dissertações dos programas de pós-graduação de diversas universidades a nível nacional.

Para tanto, foram organizados e analisados em categorias distribuídos em Estudos Diagnósticos estes tem como objetivo encontrar algumas dificuldades dos discentes no ensino de Probabilidades e, depois trata-los durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática; Estudos Experimentais os quais apresentam trabalhos no sentindo de propor atividades que possam contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno no ensino de Probabilidade e os estudos Teórico/Investigativo apresentam uma sequência de investigação conceitual com o intuito de colaborar para o processo de ensino e aprendizado da Probabilidade.

3.1. Estudos Diagnósticos

A dissertação de Oliveira(2015), teve por objetivo compreender a relação aluno e o aprendizado de probabilidade. Como metodologia de pesquisa utilizou um questionário direcionado aos alunos com perguntas de cunho social e educacional contendo 16 itens. O questionário foi aplicado a 80 alunos concluintes do ensino médio de uma escola pública estadual do bairro de Nazaré da cidade de Belém- Pará.

De maneira geral o trabalho apresentou que os problemas de aprendizagem, em relação ao assunto probabilidade, são enormes e que novas técnicas e novas maneiras de se tratar o conteúdo, com os educandos, devem ser experimentados, com o intuito de melhorar o entendimento desses conceitos, que são tão importantes para o dia-a-dia do cidadão.

Oliveira(2015) deixa como sugestão uma sequência de atividades que poderá ser utilizado pelos professores ao trabalharem o conteúdo de probabilidade dando ênfase a melhorar o aprendizado dos alunos de maneira dinâmica, utilizando material concreto como apoio.

Neves (2014), em se trabalho sobre Tipos de Eventos que objetivou verificar o conhecimento deste assunto por parte dos alunos concluintes do ensino médio em algumas escolas públicas do estado do Pará.

O referido estudo diagnóstico baseado na análise de questionários e dos livros didáticos utilizados no ensino médio direcionou aos alunos perguntas de cunho social e educacional e também, contendo 13 questões específicas de probabilidade com o intuito de obter informações sobre o aprendizado dos alunos em: espaço amostral, evento, definição de probabilidade, probabilidade de eventos certos e impossíveis, probabilidade de eventos complementar e outros.

O autor concluiu que os resultados encontrados estão muito longe do ideal, o que reflete o grande “déficit” dos alunos nos conhecimentos sobre probabilidade, além de não terem um acompanhamento necessário para ajudá-lo em casa em suas tarefas. Após analisarem os questionários perceberam que, em média, os alunos obtiveram menos de 15% de índice de acerto para cada questão.

Neves(2014) notou que os alunos concluintes do ensino médio não estão preparados para resolver as questões do Enem, sofrendo bastante com a utilização da metodologia tradicional em sala de aula. Verificou também, as limitações apresentadas pelos livros didáticos em relação a probabilidade, deixando como sugestão uma proposta de material para o ensino e aprendizado de probabilidade.

Caberlim (2015) desenvolveu um estudo sobre Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. O objetivo do trabalho foi diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos discentes em situações de resolução de problemas sobre probabilidade, envolvendo o enfoque clássico e frequêntista do conceito de probabilidade. A autora utilizou como fundamentação a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1998) articulado com o letramento probabilístico proposto por Gal (2005)

Um estudo de caso foi utilizado como metodologia de pesquisa, participaram sete alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola da rede privada da cidade de São Paulo. Tendo como pressuposto que os alunos já tinham conhecimentos prévios de probabilidade. O estudo foi separado em: Situação “A”, situação “B” e situação “C”. Ressaltando que para realização das três situações foi necessário distinguir três estágios: o concreto, pseudo-concreto e o abstrato.

A situação “A” foi uma atividade de cunho introdutório para que os alunos pudessem distinguir experiências reprodutíveis e não reprodutíveis e reconhecerem uma experiência aleatória. Em seguida, a autora trabalhou o reconhecimento da configuração da “Urna de Bernoulli” em experiência aleatória.

A situação “B” foi uma atividade que relacionou a probabilidade clássica com a probabilidade geométrica. Esta atividade foi oferecida a partir de um desenho construído com Cabri-Geomètre II, seguidas de três perguntas que relacionavam as medidas dos comprimentos dos lados de um retângulo e das suas respectivas áreas.

A situação “C” através do jogo Franc-Carreau, por meio do software Cabri-Geomètre consistiu em implementar as simulações do experimento aleatório “sortear um pixel ao acaso e observar a região do retângulo no qual ele se localiza” teve como foco observar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos nas atividades anteriores como o raciocínio proporcional e espaço amostral.

Para a autora, a participação e os questionamentos dos alunos na identificação do que era proposto nas atividades, implicou num desenvolvimento dos alunos em probabilidade no nível básico, principalmente no letramento probabilístico, e a utilização do software surtiu como facilitador na identificação dos invariantes operatórios e para os alunos na resolução das atividades.

Contudo Caberlim(2015) enfatizou a importância da abordagem articulada de probabilidade nos termos clássico e frequentista, de forma diferenciada o geométrico. E também, sugeriu para que sejam feitas pesquisas nas licenciaturas em matemáticas abordando o enfoque clássico e o frenquentista e a realização de uma pesquisa empírica, com o intuito de generalizar os invariantes operatórios de letramento probabilísticos.

Santana (2011) em sua pesquisa: “O acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental”. Centrado no objetivo geral de “analisar concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre Probabilidade”.

A metodologia de pesquisa utilizada foi de cunho qualitativa, tendo como mecanismo para levantamento dos dados a entrevista semi-estruturada, e a análise de conteúdo, ocorrendo análise de atividades sobre o ensino de probabilidade, com o intuito de inferir sobre o que os professores dos anos iniciais do ensino fundamental e professores dos anos finais do ensino fundamental concebiam sobre o ensino de probabilidade.

Segundo Santana(2011) os professores do ensino fundamental, ao menos os de sua amostra, exploram muito pouco os conceitos probabilísticos, justificando pela falta de uma formação acadêmica inicial que os orientasse para que incorporassem saberes e práticas relativas aos conhecimentos de probabilidade, e também a abordagem nos livros didáticos não oferecer subsídios para se trabalhar com o referido conteúdo.

Silva (2014) investigou a Estatística e a Probabilidade nos Currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. A autora fundamentou-se na pesquisa de cunho estatístico e documental, baseado em uma análise de conteúdo, este segundo Silva (2014, apud BARDIN, 1977) sendo um conjunto de ferramentas que auxilia metodologicamente e melhora de forma constante, podendo ser aplicada a diferentes formas práticas.

A autora concluiu que a falta de enumerações nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática, dê conteúdos que devam ser ensinados, falando apenas que devem ser trabalhados os assuntos dos Ensinos Fundamental e Médio, faz com que cada IES eleja os conteúdos a serem abordados assim como, quanto, quantidade de horas aula destinados ao assunto. E nesse argumento observa-se ainda a falta de um acordo entre as IES. Abordaram os elementos da estatística e da probabilidade em todas as IES, em tópicos de assuntos em disciplina única, e em componentes separados.

Desta feita, sugeriu como novas pesquisas podem contribuir para entendermos as práticas no ensino da Estatística e Probabilidade, compreendendo como os princípios da Educação Estatística localizados nos currículos analisados são utilizados, assim como, examinar o uso de softwares para esse assunto, uma vez que, comprovando Silva (2014, apud BEN-ZVI, 2011), a disciplina da Estatística e da Probabilidade deve se dá numa total coesão entre conteúdo-pedagogia-tecnologia. A seguir uma síntese destes trabalhos revisados:

Quadro 1: Síntese dos trabalhos revisados

Trabalhos Diagnósticos	Resultados
Oliveira (2015)	Pesquisa diagnóstica sobre o relação dos discentes com o aprendizado da probabilidade, utilizou questionário socioeconômico e educacional especifico sobre a probabilidade para verificar o desempenho dos discentes no assunto probabilidade.
Neves (2014)	Pesquisa diagnóstica sobre os conhecimentos dos discentes sobre tipos de eventos. Analisou questionários socioeconômico, educacional e livros didáticos com o intuito de obter informações sobre o aprendizado dos alunos em probabilidade.
Caberlim (2015)	Diagnosticou invariantes operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas na busca de elementos para identificar o letramento probabilístico desses alunos. Utilizou como metodologia de pesquisa um estudo de caso, bem como a configuração da Urna de Bernoulli em experiência aleatória e a utilização do Cabri-Geomètre II.
Santana (2011)	Analisou concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre Probabilidade. Utilizou em sua metodologia de cunho qualitativa, a entrevista semiestr Conclusão análise do conteúdo.
Silva (2014)	Investigou a Estatística e a Probabilidade nos currículos de cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, fundamentou-se na pesquisa de cunho estatístico e documental, baseado em uma análise de conteúdo.

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Vale ressaltar a contribuição destes estudos com nossa pesquisa, pois nos proporcionou um melhor entendimento do nosso objeto de estudo, mostrando a necessidade de desenvolvermos estratégias de ensino, a utilização de recursos teóricos e metodológicos, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, reforçando a ideia de se trabalhar de forma relacionada os diferentes enfoques probabilísticos como o clássico, frequentista, geométrico e subjetivo. Com o intuito de promover descobertas nos alunos, assim como utilizar atividades, jogos, software como recursos pedagógicos no ensino de probabilidade. Estes trabalhos foram importantes para que pudéssemos entender a atual realidade sobre o ensino de probabilidade e assim construirmos nossa sequência didática, a partir das dificuldades dos alunos, percebidas e destacadas nestes estudos. Em seguida, vamos analisar os estudos experimentais, com o intuito de compreender as atividades direcionadas para o ensino de Probabilidade.

3.2. Estudos Experimentais

Em Silva(2013) “Jogos no Processo de Ensino-Aprendizagem em Probabilidade”. Cujo objetivo foi “incentivar boas práticas pedagógicas almejando a melhor aprendizagem dos alunos em probabilidade, através de aplicações cotidianas ou dos jogos.”

A pesquisa se deu a partir do desenvolvimento de uma sequência didática que foi idealizada por um programa de televisão (“o último passageiro”) desenvolvida por simulações do jogo, debates, cálculo de probabilidade e construção de gráficos com estudantes dos 2º e 3º ano do ensino médio, por meio de sete atividades de estruturadas.

O autor concluiu que o aspecto lúdico na educação decompõe o ensino em algo mais encantador, idealizando uma aprendizagem mais atraente e divertida. No entanto, mudanças são de essencial importância, porquanto intervém espontaneamente no efeito do processo de aprendizagem. Pois ao escolher o jogo como estratégia de ensino de probabilidade, favoreceu uma aprendizagem agradável, expressiva e de evolução, estimando o raciocínio lógico e colaborando para o desenvolvimento da personalidade e crescimento gradativo do educando indo mais à frente de suas estimativas tradicionais.

Na dissertação de Ribeiro(2012) intitulada “Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio” cujo objetivo foi elaborar, investigar e analisar atividades para o ensino de probabilidade visando despertar nos alunos o interesse e a compreensão do seu cotidiano em relação aos conceitos probabilísticos.

O autor enfatiza que e a prática docente e a analise realizada na pesquisa estão fundamentadas nos conceitos de aprendizagem de Skovsmose e na Resolução de Problemas, segundo Polya e Pozo. A metodologia adotada na pesquisa é qualitativa levando-se em consideração a participação e os questionamentos dos alunos no processo de ensino aprendizagem, para apoiar a pesquisa qualitativa foi usado a abordagem de Estudo de Caso. Foi aplicada uma sequência didática, dividida em sete aulas, em uma turma de ensino médio no município de Osório/RS.

Segundo o autor "... Podemos afirmar que nossa sequência didática propiciou a construção de um ambiente de aprendizagem de cenários para investigação e abriu espaço para movimentos dentro da matriz proposta por Skovsmose..."(RIBEIRO,2012,p.87.), pois os resultados obtidos são que as atividades contextualizadas sobre os conceitos de probabilidade despertaram maior interesse e participação dos alunos nas aulas, visto que houve questionamentos, interação, com a participação ativa dos alunos e não passiva, diferente do ensino tradicional.

Em Moreira (2015) encontramos um estudo sobre "Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio" que objetivou apresentar a probabilidade e suas diferentes interpretações, bem como inserir no currículo do Ensino Médio a teoria da decisão e a relação com a estatística, proporcionando ao aluno uma abordagem diferente da tradicional para o ensino de probabilidade.

Fez parte da metodologia de ensinar conceitos da teoria da decisão, a apresentação de vídeos aos alunos para promover debate, a interdisciplinaridade da estatística e da probabilidade e também a utilização de jogos em sala de aula. As atividades realizadas envolvendo probabilidades, estatística e a teoria da decisão para a sala de aula foram: "role os dados"; "as médias podem não ser significativas"; "Sorte ou Azar"; "Ciência Forense e Probabilidade" e a atividade "Qual a melhor decisão?" Viajar para a praia, para um hotel fazenda ou uma casa de campo?

Os resultados obtidos mostram que os alunos perceberam a presença da probabilidade nas situações de incerteza e sua importância nas tomadas de decisão, além de participarem de forma efetiva nas aulas, questionando, interagindo e indagando sobre a matemática em diversas situações do cotidiano.

Na concepção de Moreira(2015), “há necessidade urgente de aliar às aulas tradicionais uma nova maneira de ensinar, onde professor e aluno são os elementos mais importantes desse contexto”. E que a matemática deve ser apresentada de forma integrada ao cotidiano do aluno e em outras áreas do conhecimento, favorecendo a interdisciplinaridade, a contextualização evitando um tratamento isolado da matemática.

Lima (2013) em seu estudo sobre “O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos”, teve por objetivo apresentar uma proposta de aulas não tradicionais para iniciar as aulas de probabilidade por intermédio de uma atividade denominada “Jogos dos Discos” envolvendo experimentação, modelagem, gráficos e funções quadráticas.

O autor utilizou a metodologia investigativa, dando intervalos de tempo razoáveis para os estudantes pensarem em como resolver um problema cujo tema ainda não havia sido apresentado.

Além disso, utilizou uma sequência didática, criando uma situação na qual os alunos precisaram fazer uso da criatividade para conseguir resolver a atividade, já que o que fizeram foi apenas apresentá-la a eles e deixaram com que resolvessem sozinhos, com o professor palpitando o mínimo possível.

Para Lima(2013) os alunos compreenderam que vários acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que os resultados podem ser estimados pelas possibilidades de resultados observados nos experimentos, conseguindo perceber a proximidade existente entre a probabilidade teórica de um evento e a frequência relativa com que este evento ocorre na natureza.

Em Duarte(2013) “Introdução a Estatística e Probabilidade: Uma Abordagem Contextualizada no Cotidiano dos Alunos” com o objetivo principal de “[...] mostrar como abordar a Estatística de uma forma mais interessante e interativa com os alunos com uma sequência de aulas, envolvendo também a probabilidade”. (DUARTE,2013, p.15).

Duarte(2013) aplicou uma sequência de aulas estruturadas partindo da pesquisa sobre o último pleito eleitoral no município de Caucaia-CE; o caso as eleições para vereadores e prefeito; das planilhas de licitação de merenda escolar; com o intuito de atingir de forma mais precisa os alunos, dando ênfase aos conceitos de População e amostra, variáveis, gráficos e tipos de variáveis e a associação com o livro didático “Conexões com a Matemática”, adaptado pela escola em que trabalha.

Na sequência das aulas, ocorreu a solicitação aos alunos de uma pesquisa de campo, para trazer os preços do kg de arroz de várias marcas de um estabelecimento comercial mais próximo de sua casa, para que fosse trabalhado os conceitos de frequência absoluta, relativa e acumulada e a construção de gráficos. Uma outra pesquisa direcionada na turma foi encaminhada pela coleta dos resultados da primeira rodada dos jogos internos da escola, associando-os aos conceitos de média aritmética simples e ponderada, mediana e moda. A sequência também explorou a relação entre estatística e probabilidade, através do exemplo da tabela construída sobre o preço do arroz para tratar de alguns conceitos probabilísticos.

Os resultados obtidos por Duarte(2013) mostrou os desdobramentos para o ensino de estatística e probabilidade, que o professor possa utilizar outros recursos metodológicos nas aulas como: planilhas eletrônicas para se fazer cálculos, dentro das possibilidades da escola; registros dos cardápios da escola; registro da popularidade do grêmio estudantil, estes podendo subsidiar o processo de aprendizagem dos alunos. Segundo o autor a metodologia adotada nas aulas teve um resultado satisfatório sobre as demais aulas ministradas com o método tradicional.

No trabalho Biajoti (2013) “Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II” com o objetivo de “relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utiliza jogos para ensinar Probabilidade no Ensino Fundamental II”. Como metodologia de pesquisa o autor utiliza a Engenharia Didática, pois:

> “[...]a engenharia didática leva esse nome por ter semelhança com o trabalho do engenheiro, que se apoia em seus sólidos conhecimentos teóricos e científicos para elaborar um projeto, mas que em certo momento, na execução, pode se deparar com problemas práticos e imprevisíveis”. (ALMOULOUD,2008, apud BIAJOTI,2013, p.19).

Biajoti(2013), elaborou e aplicou uma sequência didática contendo 4 atividades, partindo dos pressupostos da engenharia didática, baseando-se na elaboração de jogos e experimentação em sala de aula, direcionada para quatro turmas de 7º ano do Ensino Fundamental II, para um total de 94 alunos, divididos em 47 duplas.

Relacionando a história das probabilidades com os jogos de azar, a sequência didática teve como objetivo trabalhar as noções elementares de probabilidades como: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples, a construção de tabelas de dupla entrada, experimentos determinísticos e aleatórios frequência relativa e analise de padrões. Cada atividade elaborada continha, a priori, seus objetivos e justificativas, além das expectativas que poderiam ser apresentadas pelos alunos antes da aplicação.

Segundo o autor a aplicação das folhas de atividades proporcionou uma participação ativa dos alunos na realização dos experimentos bem como na construção dos conceitos e nas tomadas de decisão sobre as situações envolvidas nas mesmas. Os alunos mostraram-se interessados em aprender fazendo perguntas e questionamentos durante o desenvolvimento das situações propostas. Observou ainda, que as duplas reconhecem situações que envolvem incertezas e utilizam uma linguagem cotidiana para justificar as respostas. A seguir, o quadro 2, mostra uma síntese destes trabalhos:

Quadro2: Síntese dos trabalhos revisados

Continua

Trabalhos	Resultados
Silva (2013)	Apresentou o uso de uma sequência didática idealizada a partir de um programa de televisão, utilizando simulações de jogos, debates, conceitos de probabilidades, relatando a ocorrência de mudanças na postura dos alunos frente às atividades.
Ribeiro (2012)	Trabalhou em sala de aula com uma sequência didática estruturada dividida em 7 aulas com questões contextualizadas, despertando interesse e participação dos alunos.
Moreira (2015)	Em sua pesquisa apresentou a probabilidade e suas diferentes concepções, através de vídeos, interdisciplinaridade da Probabilidade com a Estatística e o uso de jogos, promovendo debates e questionamentos entre os alunos.
Lima (2013	O autor utilizou uma sequência didática para o ensino da Probabilidade em que os alunos precisaram de criatividade e percepção ao observarem os experimentos envolvendo a

	probabilidade teórica de um evento e a frequência relativa.
Duarte (2013)	Aplicou uma sequência de aulas envolvendo Estatística e Probabilidade numa abordagem contextualizada com o cotidiano dos alunos.
Biajoti (2013)	Elaborou uma sequência didática contendo 4 atividades com jogos e experimentação em sala de aula de Ensino Fundamental, enfatizando a importância de valorizar o trabalho e as discussões dos alunos.

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

3.3. Estudos Teóricos/Investigativo

No estudo de Gondim(2013) “Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e exemplos aplicáveis no Ensino Básico” a pesquisa teve como objetivo abordar atividades de interação em grupos para que os discentes adquirissem conhecimentos de forma autônoma, tendo o professor como mediador nesse processo. A autora fez uma breve Abordagem Histórica sobre probabilidade, o desenvolvendo da teoria desde de sua origem até problemas atuais com algumas aplicabilidades dando ênfase a importância da probabilidade para a sociedade.

O estudo tratou definições e conceitos sobre os conteúdos de probabilidade, as definições de probabilidade de Laplace e a definição de frequência, explorando também probabilidade condicional, arvore de possibilidades, probabilidade geométrica sua origem e importância para a sociedade. Assim como a análise de documentos como: Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e “Orientações Curriculares Complementares” (PCN)$^{+}$ sobre o ensino de probabilidade no ensino básico.

Na sequência da análise a autora sugere o uso de jogos e a resolução de problemas no ensino de probabilidades. Destacando a importância de uma sequência didática para o ensino ao pesquisar problemas e experimentos que podem ser utilizados como ferramentas para o ensino de probabilidades no ensino Fundamental ou Médio.

Em suas considerações finais a autora propõe “inserir atividades diferenciadas das trabalhadas em sala de aula, abrindo um leque maior de possibilidades de situações, uma vez que é preciso explorar com mais afinco essa área, pois a mesma é rica em aplicações" (GODIM,2013, p.62), deixando como sugestão atividades que possam auxiliar de forma significativa o processo de aprendizagem.

Em Moraes(2014) "Ensino de Probabilidade: Historicidade e interdisciplinaridade" que teve como objetivo "que o aluno possua uma postura crítica do conceito estudado". O Autor faz uma abordagem histórica detalhada desde a antiguidade 3500 a.C. citando a origem dos jogos de dados, baralhos e seguros, as primeiras publicações em teoria da probabilidade. Enfatizando os principais trabalhos, tratados probabilísticos que se deram através dos renomados cientistas da época que iniciaram e contribuíram para o desenvolvimento da teoria probabilística. A importante participação dos matemáticos russos dando uma axiomatização moderna da probabilidade.

A metodologia da pesquisa está baseada na utilização da história da matemática como ferramenta fundamental para o processo de ensino e aprendizado. A utilização de jogos bem elaborados de forma cuidadosa com objetivos definidos para que o aluno possa aprender de forma efetiva, contribuindo em seu aprendizado e na sua formação pessoal e profissional. Com ênfase na interdisciplinaridade como recurso metodológico para o professor.

Moraes(2014) elaborou como proposta de ensino e aprendizagem atividades que são construídas a partir do enfoque histórico de probabilidades, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos no processo de elaboração dos conceitos para em seguida apresentar as definições sistematizadas.

No estudo de Silva Filho (2016) "Probabilidade e Valor Esperado Discussão de Problemas para o Ensino Médio" teve como objetivo: "[...] a discussão de problemas envolvendo os conceitos de probabilidade e valor esperado." (SILVA FILHO,2016, p,35.)

A investigação apresentou alguns aspectos da história da probabilidade em problemas clássicos associados a recurso didático para serem implementados no Ensino Médio, como os problemas ligados a jogos de azar propostos por Chevalier de Méré ao matemático francês Blaise Pascal(1623-

1662), mostrando o famoso problema sobre a divisão do bolo das apostas quando um jogo é interrompido antes do final.

O autor fez simulações para mostrar de forma empírica o resultado da Lei dos Grandes Números, do cálculo do valor esperado, determinar a função probabilidade, construir gráficos e calcular o desvio padrão, utilizando como recurso didático ferramentas computacionais como o Geogebra e o Excel.

Na sequência o estudo abordou a “Discussão de Problemas” onde o conceito de valor esperado pode ser apresentado aos alunos sem maiores dificuldades. Fazendo uma simulação através do Excel para mostrar o resultado do lançamento de dois dados. Utilizando jogos como o da raspadinha Portuguesa, jogos com dois ou três dados, jogo do bicho, resolvendo problema desafiadores de vestibulares como da IME-USP, desafios apresentando problemas que fujam do padrão normalmente apresentados nas salas de aula.

Na concepção de Silva Filho(2016), o conceito de valor esperado, deveria ser lecionado no Ensino Médio, visto que em diversas situações de tomadas de decisões o valor esperado será o critério principal para tomada de decisões, ou seja, uma média do que vai ocorrer a longo prazo.

A dissertação de Nunes (2015) intitulada, “A Utilização dos Jogos Lotéricos para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio”, trouxe como objetivo: “[...] elaborar uma metodologia diferenciada de ensino, com base na análise das loterias federais […] (NUNES,2015, p,14.).

A análise dos jogos de azar foi utilizada como metodologia estratégica de envolvimento do aluno por se tratar de uma situação de seu cotidiano, o intuito foi o de despertar nele o interesse pelo assunto probabilidade de forma a facilitar seu aprendizado. Para tanto foi construído uma estrutura sistematizada em 4 capítulos versando desde uma abordagem histórica dos jogos de azar e surgimento da probabilidade; exposição conceitual da teoria da probabilidade; prognostico de arrecadação e apostas da loteria federal no Brasil; finalizando com a proposição de uma atividade pedagógica chamada “Quem quer ser um milionário”.

Como observado na estrutura da dissertação de Nunes, a proposta de atividade pedagógica trabalhada no 4 capitulo, também segue a mesma tendência de sistematização para se alcançar entendimento entre os alunos. A atividade envolve os jogos lotéricos e foi planejada para ser desenvolvida em sala de aula em 4 etapas com previsão de 30 a 60 minutos de duração.

A partir da utilização de um material concreto “moeda”, a *primeira etapa* tem como objetivo dar ao aluno uma ótima noção de interpretação dos números no cálculo de probabilidade e da dificuldade em ser premiado numa loteria federal;

Na *segunda etapa* os alunos agrupados em equipe de 4 e 6 alunos debatem alguns questionamentos em relação a Mega Sena com o objetivo de perceber que cada sorteio é um evento independente;

Na *terceira etapa* os alunos são convidados a refletir sobre a seguinte questão: Com R$ 24 ,50, consegue-se fazer uma aposta com 7 números no mesmo cartão ou 7 apostas de 6 números, ambas na Mega Sena. Pergunta-se o que seria mais vantajoso: apostar 7 números num mesmo cartão ou apostar em 7 cartões com 6 números em cada, todas as dezenas distintas? o objetivo e leva os alunos a concluírem que para se acerta a Sena, marcar 7 números num mesmo cartão ou marcar 6 números em 7 cartões distintos, as chances se equiparam, porém, se pensado o acerto da Quina e considerado os sete cartões marcados com todas as dezenas distintas, concluiremos que é mais vantajoso apostar em 7 cartões distintos com 6 números;

Na *etapa final*, é solicitado aos alunos a reflexão da questão: “Será que existe uma loteria federal mais indicada para se apostar? O objetivo é de leva o aluno a concluir que para se comparar dois jogos de azar, devemos considera suas premiações e probabilidades. Ainda na sequência da reflexão leva-se os alunos a fazer o questionamento:” E se as probabilidades e prêmios pagos não forem iguais? Como compara-los?” Como resposta espera-se o valor esperado de um jogo que é uma medida estatística que leva em consideração a premiação e sua probabilidade.

As resposta dos questionamentos deverá ser alcançada mediante atividade realizada com os alunos baseada no valor esperado de cada jogo. Contudo as premiações dependem da arrecadação de cada jogo e do número de acertadores do total a ser pago, necessitando calcular a média das premiações pagas a cada jogo. Observando, que o valor calculado de R$0,75 não leva em consideração que o apostador deve pagar R$3,50 para realizar uma aposta simples da Mega Sena, logo o valor esperado de todo jogo é dado por R$0,75-R$3,50= -R$2,75.

Ao final da atividade o aluno deverá ser capaz de tirar algumas conclusões, tais como: que a loteria mais indicada é a LOTOMANIA pois possui o maior valor esperado (R$-0,83); a MEGA SENA possui o menor valor esperado(R$-2,75); todas essas loterias serem equivalentes se possuírem o mesmo valor esperado; estratégias nos jogos envolvendo partidas de futebol; maximizar o valor esperado de sua aposta, apostando quando as premiações estiverem acumuladas.

Como observado todas as etapas devem ser intermediadas e coordenadas pelo professor além de indicar uma sequência sistêmica de compreensão das questões e questionamentos.

Concluiu-se que a aprendizagem de probabilidade, será mais significativa se houver uma aproximação do conteúdo com o cotidiano do aluno. Acreditando que situações da realidade do aluno no caso utilizado do jogo de azar, as aulas tornam-se mais atraentes um dos entraves no ensino aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. A seguir, o quadro 3, apresenta uma síntese desses trabalhos:

Quadro 3: Síntese dos trabalhos revisados

Trabalhos Teóricos	Resultados
Gondim(2013)	Realizou uma abordagem histórica da probabilidade com seus conceitos e definições, as concepções clássica e geométrica da probabilidade.
Moraes (2014)	Pesquisou a probabilidade em um contexto Histórico e Interdisciplinar para o ensino da probabilidade.
Silva Filho (2016)	Pesquisou problemas envolvendo os conceitos de probabilidade e valor esperado.
Nunes (2015)	Pesquisou uma metodologia diferenciada de ensino baseada na análise das loterias federias.

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A revisão desses estudos contribuíram em nossa visão a respeito das dificuldades apresentadas por nossos estudantes em relação ao aprendizado e domínio dos conceitos probabilísticos, e direcionaram para a possibilidade de sucesso para o uso de uma sequência didática estruturada com atividades que favoreçam a percepção e a descoberta dos conceitos e ideias sobre Probabilidade. A seguir, trataremos do modo como a Probabilidade está inserida no currículo da educação básica.

4. Probabilidade no Currículo

Ao versar sobre o ensino da matemática é necessário entender a importância deste conhecimento na formação do indivíduo no tocante a compreensão e participação no mundo, caracterizado pela sua interação entre os aspectos naturais, culturais e sociais, bem como seu caráter de abstração, raciocínio lógico e suas aplicações em nosso cotidiano e em diversas áreas. Em relação ao ensino de Probabilidade, embora seja um tema presente no currículo da educação básica de nosso país, tem sido mostrado por pesquisadores não ser um assunto simples de ser ensinado e apreendido pelos estudantes.

Fischbein (apud FERNANDES et al., 2015, p.43) “atribui mesmo à visão determinista do mundo, que tem sido largamente dominante na escola, desde a época do renascimento, a origem das dificuldades que as pessoas enfrentam em probabilidades[...]”. Neste sentido, para compensar tal visão determinista, os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática recomendam que desde os primeiros anos de escolaridade o ensino de probabilidade seja oferecido nas escolas, tendo como objetivo:

> [...] a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços amostrais equiprováveis) (BRASIL,1998, p.52).

Para tanto, há de se considerar uma série de significados entrelaçados precisando ser apreendido para que ocorra um efetivo aprendizado. Batanero (2001), Batanero e Godino (2002) (apud CAZORLA et al., 2011) reforçam que: “para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico é necessário que o aluno vivencie atividades que possibilitem: a percepção do acaso; a ideia de experiência aleatória e a noção de probabilidade”

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, o raciocínio probabilístico também é uma das finalidades recomendas para os anos finais do Ensino Fundamental, sua implementação sugeri exploração de situações de aprendizagem que conduzam o aluno a assimilar conceitos de eventos, espaço amostral e estimativas de probabilidade. O PCN (Brasil, 2006) para o Ensino Médio, os estudantes devem apreender que a probabilidade é uma medida de incerteza e que está presente em nosso dia-a-dia, principalmente nos meios de comunicação, isto é:

> Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descreve-las em termos de eventualidades, associa-las a um conjunto de eventos elementares e representa-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipótese de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatísticas das frequências para estimar a probabilidade de um evento dado. (BRASIL,2006, p.80)

Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) em sua Matriz de referência de Matemática e suas tecnologias, a probabilidade está inserida na competência de área 7: compreender o caráter aleatório e não – determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística de forma específica nas habilidades:

> H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
> H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para construção de argumentação.
> H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. (BRASIL, 2012, p.7)

Em âmbito Estadual, o Pará implementou o Sistema Paraense de Avaliação Educacional – SISPAE, com a finalidade de avaliar de forma mais especifica o grau de aprendizado dos estudantes paraenses nas disciplinas de Matemática e de Língua Portuguesa. A Matriz do SISPAE – 2014, trata da probabilidade no tema tratamento da informação na MPA61: – Resolver problemas que envolvam ideias básicas de probabilidade - direcionado para o 8º e 9º anos do ensino fundamental e no ensino médio, na MPA33 – Resolver problemas que envolvam probabilidades - no 2º ano, também no tema tratamento da informação.

No Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, a matriz de matemática está estruturada por anos e séries, sendo definido os descritores, estes organizados e agrupados por temas educacionais, indicando uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. A Probabilidade, está inserida no tema III Números e Operações/Álgebra e Funções e no descritor D33 Calcular probabilidade de um evento.

Portanto a probabilidade está inserida em documentos oficiais de nosso pais desde o ensino fundamental, sua importância se dá com base no fato de auxiliar na capacidade de raciocínio, abstração e prevenção, contribuindo para a formação de cidadãos atuantes de forma expressiva em suas comunidades/sociedade, implicando numa formação em que o indivíduo possa entender melhor o seu cotidiano, a natureza dos acontecimentos sociais, participando de forma efetiva em sua sociedade. A seguir, apresentaremos a metodologia de ensino utilizada na sequência didática deste produto.

5. O Ensino por Atividades: uma Alternativa Metodológica para o Ensino de Matemática

Com o objetivo de direcionar o discente ao aprendizado dos principais conceitos matemáticos envolvidos no conteúdo de probabilidade, desenvolvemos uma sequência de atividades baseado no ensino por atividade, pois segundo Mendes e Sá (2006, p. 13) a principal peculiaridade desta metodologia está no fato de que os conteúdos a serem apreendidos possam ser descobertos pelos próprios alunos durante o processo de ensino, até que sejam assimilados, tendo o professor como orientador.

O ensino por atividade pressupõe a possibilidade de conduzir o aluno ao aprendizado das noções matemáticas de forma gradual e constante, de maneira dinâmica, participativa e construtiva, desenvolvendo no educando descobertas cognitivas dos conteúdos matemáticos de acordo com os objetivos de cada atividade. Portanto, trata-se de uma metodologia de ensino que conduz o estudante a redescoberta dos objetivos propostos em cada atividade, elaborados de acordo com a especificidade do conteúdo em questão. De acordo com Sá (2009,p.24) “ [...] as atividades de redescoberta contribuem para a compreensão de propriedades, relações, regras e teoremas matemáticos, bem como a construção de conceitos [...]".

A metodologia de ensino baseada em atividade infere a perspectiva de orientar o aprendiz a concepção da construção progressiva dos conhecimentos matemáticos contidos em cada atividade, culminando-se na elaboração de um produto capaz de subsidiar e direcionar o trabalho pedagógico docente.

Esta metodologia de ensino apresenta sugestões importantes que devem fazer parte da construção das atividades:

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> - Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller(1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÀ, 2009, p.18).

Desta feita, elaboramos atividades que nortearam o processo de ensino e aprendizagem, com o intuito de dar suporte aos professores de matemática em resolver entraves em suas práticas em sala de aula de acordo com as características do conteúdo matemático e, principalmente contribuir para o desenvolvimento cognitivo do estudante, possibilitando-o o aprendizado significativo das noções matemáticas importantes para sua formação pessoal, acadêmica e profissional.

A seguir, apresentaremos nossa sequência didática juntamente com as questões propostas para fixação.

6. Atividades para o Ensino de Probabilidade

Neste momento do estudo, apresentamos uma sequência didática baseada no ensino por atividades com o intuito de conduzir os estudantes para um aprendizado mais efetivo dos conceitos probabilísticos, por meio da percepção dos conceitos matemáticos presentes em cada atividade proposta. Posto que o ensino por atividade viabiliza um roteiro dinâmico de interação, participação e descobertas de conhecimentos de forma cognitiva.

Esta sequência didática está constituída por 12 atividades e questões de fixação propostas para cada uma das atividades explorando o conteúdo de probabilidade para o ensino médio.

As atividades propostas para compor a nossa sequência abordam os seguintes conteúdos:

- Experimentos Aleatórios e Determinísticos;
- Espaço Amostral;
- Eventos;
- Conceito Clássico de Probabilidade;
- Intervalo de Variação de Probabilidade;
- Probabilidade do Evento Complementar;
- Probabilidade de Eventos não Disjuntos;
- Probabilidade Condicional;
- Conceito de dois Eventos Independentes;
- Probabilidade de Eventos Independentes;

Em cada atividade serão apresentados o título, o objetivo, os materiais necessários e os procedimentos a serem realizados, solicitação de observações para que os alunos possam expor suas ideias acerca da atividade e o espaço para conclusão da atividade, para sistematizar os conhecimentos matemáticos adquiridos na atividade, bem como uma sugestão para o professor(a) no final cada uma das atividades. A seguir apresentaremos essas atividades com suas respectivas questões de fixação:

6.1. Atividade 1

Título: **Experimentos Aleatórios e Determinísticos**

Objetivo: Descobrir a diferença entre experimentos determinísticos e não-determinísticos.

Material: Caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

EVENTO(SITUAÇÃO)	**ANTES DE OCORRER É POSSÍVEL SABER O RESULTADO?**	
	SIM	**NÃO**
Da temperatura em que a água ferve(ebulição)?		
Ao lançarmos um dado uma única vez, qual a face que ficara voltada para cima(1,2,3,4,5,6)?		
De uma partida de futebol?		
Que ao Lançarmos uma moeda uma única vez, qual a face ficará voltada para cima (cara ou coroa)?		
Que acenda a luz ao apertar o interruptor?		
Que amanhã choverá em nossa cidade?		
Dê ao Lançarmos uma pedra ao rio, se ela vai ao fundo?		
Da cor de uma bola retirada de uma urna que só contém bolas pretas?		
Do efeito de um tratamento anticancerígeno em um paciente?		
Do gênero (masculino ou feminino) no nascimento de uma criança?		

Um evento em que é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de evento **determinístico**.

De dois exemplos de eventos determinísticos:

____

____

Um evento em que não é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de **evento aleatório**.

Dê dois exemplos de eventos aleatórios:

____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação, para que os discentes percebam as diferenças nos acontecimentos de cada um dos eventos;
2) Fazer questionamentos a respeito dos eventos contidos no quadro sobre seu acontecimento ou não, instigando os estudantes a pensarem em variadas situações envolvendo experimentos determinísticos e não determinísticos;
3) Auxiliar os discentes na formalização dos conceitos de experimento aleatório e não aleatório;
4) Pesquisar alguns exemplos sobre os experimentos determinísticos e não determinísticos para mostrar para aos estudantes depois do preenchimento da atividade;
5) Orientar os estudantes para que resolvam as questões propostas para fixação do conceito de espaço amostral.

Questões Propostas

Estas questões foram adaptadas da dissertação de Brito (2015).

Analise os experimentos seguintes e classifique-os em determinísticos ou aleatórios:

1. Determinar o tempo que uma pedra, largada de uma altura de 50 m, leva para atingir o solo.
2. Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e verificar seu naipe.
3. O espaço percorrido por um automóvel que se desloca a uma velocidade média de 80Km/h durante 2 h.
4. Sortear um número em uma rifa e verificar o número.

5) Dentro de certas condições, é possível prever a que temperatura o leite ferve.

6) O sorteio da quina da Loto.

7) O sorteio do primeiro prêmio da Loteria Federal.

8) De uma urna contendo 4 bolas brancas e 5 vermelhas, retirar 1 bola e observar sua cor.

9) Quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h?

6.2. Atividade 2

Título: **Espaço Amostral**

Objetivo: Identificar o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes experimentos:

EXPERIMENTO	**CONJUNTO DOS RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO**	**NÚMERO DE RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO**
A) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima		
B) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima.		
C) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima.		
D) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material.		
E) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).		
F) Lançar um dado duas vezes		
G) Uma letra é escolhia entre as letras da palavra PROBABILIDADE.		
H) Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a sequência de sexos dos 3 filhos.		

I) Três pessoas A, B e C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.		

Ao conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório chamamos de **Espaço Amostral.** Podemos representar o conjunto dos elementos de um espaço amostral por **S.**

O número de elementos de um espaço amostral $\boldsymbol{S}$ pode ser representado por $\boldsymbol{N}\ (\boldsymbol{S})$**.**

Orientações didáticas:

1) Oriente os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Auxiliar os estudantes na identificação e representação dos eventos por meio da notação de conjuntos e do número de elementos de cada conjunto;
3) Para os espaços amostrais compostos, pode-se intervir por meio de uma tabela de dupla entrada ou por meio do diagrama de possibilidades, dentre outras;
4) Orientar os discentes para que fiquem atentos quanto as diferenças existentes em lançamentos consecutivos de moedas e dados e suas possibilidades de resultados como um par ordenado, uma terna ordenada, etc.;
5) Auxiliar os estudantes na formalização e sistematização do conceito de espaço amostral;
6) Orientar os estudantes para resolvam as questões propostas com o objetivo de fixar do conceito de espaço amostral.

Questões Propostas.

Qual é o espaço amostral e o número de elementos deste espaço dos seguintes experimentos?

01) Lançar um dado duas vezes e observar o número da face de cima.

02) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

03) Lançar uma moeda três vezes e observar as sequências de caras e coroas.

04) Um lote tem 20 peças. Uma a uma, elas são ensaiadas e observa-se o número de defeituosas.

05) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (C) ocorra pela primeira vez. Observa-se em qual lançamento esse fato ocorre.

6.3. Atividade 3

Título: **Eventos**

Objetivo: Identificar e representar subconjuntos.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes experimentos:

EXPERIMENTOS	**ESPAÇO AMOSTRAL (RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO)**	**SUBCONJUNTOS DO EXPERIMENTO**	**POSSIBILIDADES DOS SUBCONJUNTOS.**	**NÚMERO DE ELEMENTOS DOS SUBCONJUNTOS.**
A) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima	S =	A = “Sair cara”	A =	N (A) =
		B = “Sair coroa”	B =	N (B) =
		C = “Sair cara ou coroa”	C =	N (C) =
B) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima.	S =	A = “Obter número par”	A =	N (A) =
		B = “Obter número ímpar”	B =	N (B) =
		C = “Obter número maior que 6”	C =	N (C) =
C) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima.	S =	A = “Sair duas Caras”	A =	N (A) =
		B = “Sair pelo menos uma cara”	B =	N (B) =

		C = "Sair exatamente duas Coroas."	C =	N (C) =
D) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material.	S =	A = "Sair Bola Verde"	A =	N (A) =
		B = "Sair Bola Preta"	B =	N (B) =
		C = "Retirar bola verde e Preta."	C =	N (C) =
E) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).	S =	A = "Sair cara na moeda."	A =	N (A) =
		B = "Sair par no dado"	B =	N (B) =
		C = "Sair número primo ou coroa"	C =	N (C) =
F) Lançar um dado duas vezes	S =	A = "Obter soma 5"	A =	N (A) =
		B = "Obter resultados iguais"	B =	N (B) =
		C = "Obter soma 13"	C =	N (C) =

A qualquer subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório denominamos de **Evento**

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Auxiliar os estudantes na identificação e representação dos eventos por meio da notação de conjuntos e do número de elementos de cada conjunto ou subconjunto;
3) Após o preenchimento do quadro pelos estudantes, socializar com os mesmos o conceito de eventos por meio de subconjuntos de um conjunto e do número de elementos destes conjuntos, contribuindo para entendimento e aprendizado do conceito pelo estudantes;
4) Auxiliar os estudantes na formalização e sistematização do conceito de eventos de um espaço amostral;
5) Orientar os estudantes para que resolvam as questões propostas para fixação do conceito de eventos de um espaço amostral.

Questões Propostas

Quais são os eventos dos seguintes espaços amostrais?

01) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima:

a) Ocorrência de um número menor que 3.

b) Ocorrência de um número menor que 7.

c) Ocorrência de um número maior ou igual a 7.

02) Uma moeda é lançada 3 vezes e observa-se o número de caras e coroas nas faces voltadas para cima. Descreva os eventos:

a) Ocorrência de Cara (C) no primeiro lançamento.

b) Ocorrência de exatamente uma coroa.

c) Ocorrência de no máximo duas coroas.

03) Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e observado o seu número. Seja S = { 1,2,3,4...,29,30}. Descreva os eventos:

a) O número obtido é par

b) O número obtido é ímpar

c) O número obtido é primo

d) O número obtido é maior que 16

e) O número é múltiplo de 2 e de 5

f) O número não é múltiplo de 6

04) A família Silva gosta de jogar bingo em casa, sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação.

05) Se no início de uma rodada de bingo da família Silva alguém disser “vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento(evento) **muito provável**(não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e o espaço amostral.

06) Ainda considerando a situação da família Silva, se alguém disser “vai sair um número maior que 90”, não existe chance de acerto, pois o acontecimento(evento) é **impossível.** Elabore enunciados para: um evento impossível e um evento certo.

07) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Pedro acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é maior de todas as escolhas.

b) José a Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já eu há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é menor de todas.

6.4. Atividade 4

Título: **Probabilidade Clássica**

Objetivo: Conceituar probabilidade de um evento.

Material: Caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa

Procedimento: Responda as questões:

01) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez, e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de resultado par existem? Qual é o total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair par e o total de possibilidades?
02) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez: Quantas possibilidades de resultado ímpar existem? Qual é o total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair ímpar e o número total de possibilidades?
03) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de resultado sair o número 3 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair o número 3 e o número total de possibilidades?
04) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de sair um número maior que 4 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número maior que 4 e o número total de possibilidades?
05) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de sair um número menor que 3 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número menor que

3 e o número total de possibilidades?
06) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor branca existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor branca e o número total de possibilidades?
07) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor amarela existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor amarela e o número total de possibilidades?
08) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor preta existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor preta e o número total de possibilidades?
09) Ao lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado). Quantas possibilidades de sair cara na moeda existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair cara na moeda e o número total de possibilidades?
10) Ao Lançarmos um dado normal duas vezes e observamos a face que ficará voltada para cima. Quantas possibilidade de obter soma 5 nas faces voltadas para cima? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de obter soma 5 e o número total de possibilidades?

A razão entre o número de possiblidades desejadas em um evento e o número total de possibilidades do evento é denominada de **<u>probabilidade</u>** do evento desejado, ou seja:

$$\text{Probabilidade de um evento ocorrer} = \frac{\text{Número de possibilidades desejadas do evento}}{\text{Número total de possibilidades do evento}}$$

E pode ser representado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Orientações didáticas:

1) Orientar os estudantes quanto a leitura e interpretação corretas dos enunciados de cada uma das questões;
2) Orientar os estudantes para a identificação e representação das possibilidades dos eventos e do número de elementos dos eventos em cada pergunta;
3) Instigar os estudantes para que observem as regularidades presentes no desenvolvimento da atividade;
4) Após o preenchimento do quadro pelos estudantes, socializar com os mesmos o conceito clássico de probabilidade de um evento desejado por meio da razão entre o número de casos desejados pelo número de casos possíveis;
5) Apresentar aos estudantes a formalização e sistematização do conceito clássico de probabilidade por meio da razão entre o número de casos desejados e o número de casos possíveis;
6) Comentar ou mostrar para os estudantes outras concepções de probabilidade como a frequentista, a geométrica, a subjetiva e etc.
7) Pode-se intervir, se necessário, sobre as possíveis maneiras de se representar o resultado de uma probabilidade (fração, número decimal e porcentagem);
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do conceito do cálculo da probabilidade de um evento desejado.

Questões Propostas

01) Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de esse número ser:

a) menor que 3?

b) maior ou igual a 3?

02) Escreva o espaço amostral do lançamento sucessivo de duas moedas preenchendo a tabela de dupla entrada abaixo:

Lançamento de duas moedas	Cara (C)	Coroa (K)
Cara (C)		
Coroa (K)		

a) Qual a probabilidade de sair duas caras?

b) Qual a probabilidade de sair duas coroas?

c) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma cara?

03) Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos:

a) Exatamente uma cara?

b) No máximo duas caras?

04) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecem duas coroas, André lavará a louça; se aparecem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

a) 25% b) 27,5% c) 30%
d) 33,3% e) 50%

05) Ao lançar dois dados clássicos, A e B, a probabilidade de que o número que aparece na face superior do dado A seja divisor do número que aparece na face superior do dado B é de:

a) 1/6 b) 7/9 c) 7/12
d) 7/17 e) 1/3

06) A delegação esportiva de um certo país participou de uma festa e, involuntariamente, quatro jogadores do time de basquetebol, cinco do time de voleibol e nove do time de futebol ingeriram uma substancia proibida pelo comitê antidoping. Um jogador de cada time será sorteado para passar por um exame desse comitê. Considerando-se que o time de basquetebol tem 10 jogadores, o de voleibol 12, e o de futebol 22, e ordenando-se os times pela

ordem crescente da probabilidade de ser “pego” um jogador que tenha ingerido a substancia proibida, tem-se:

a) basquetebol, futebol, voleibol
b) basquetebol, voleibol, futebol
c) futebol, voleibol, basquetebol
d) futebol, basquetebol, voleibol
e) Voleibol, futebol, basquetebol

07) Em uma urna há 10 cartões, cada qual marcado com apenas um dos números: 2,5,6,7,13,14,19,21 e 24. Para compor uma potência, devem ser sorteados sucessivamente e sem reposição dois cartões: no primeiro número assinalado deverá corresponder a base da potência e no segundo, ao expoente. Assim, a probabilidade de que a potência obtida seja equivalente a um número par é de:

a) 45%
b) 40%
c) 35%
d) 30%
e) 25%

6.5. Atividade 5

Título: **Variação de Probabilidade**

Objetivo: Descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento.

Material: Roteiro da atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos o seguinte experimentos:

		EVENTOS				**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**				**PROBABILIDADES DO EVENTOS**			
Experimento	Espaço Amostral	Evento A	Evento B	Evento C	Evento D	A	B	C	D	P(A)	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$
A) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima	{Cara, Coroa}	Sair Cara e Coroa.	Sair Cara	Sair Coroa.	Sair Cara ou Coroa								
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Sair o número zero.	Sair o número 2.	Sair número par.	Sair número entre zero(0) e sete(7).								

C) Colocamos uma bola verde e uma Azul num saco, extraímos uma aleatoriamente e observamos sua cor.	{Verde, Azul}	Sair bola Branca.	Sair bola Verde.	Sair bola Azul.	Sair bola verde ou azul.								
D) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Obter número 0.	Obter número par.	Obter número ímpar.	Obter número entre 0 e 7.								
E) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** branca;	Sair bola branca;	Sair bola preta;	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

F) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** preta	Sair bola branca **ou** preta	Sair bola branca **ou** vermelha	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

Observação:____

____

Conclusão:____

____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação e representação das possibilidades dos eventos A, B, C e D em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A, B, C e D em cada situação;
4) Direcionar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização do intervalo de variação da probabilidade, após o preenchimento da atividade pelos discentes;
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do conceito do intervalo de varação da probabilidade.

Questões Propostas

01) Um dado é lançado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de esse número ser:

a) maior que 6?

b) menor que 3?

c) maior ou igual a 3?

d) maior que zero(0) e menor 7?

e) o número 1? O número 2? O número 3? O número 4? O número 5? O número 6?

e) Qual é o valor da soma $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$?

02) Uma moeda é viciada, de modo que as caras são três vezes mais prováveis de sair do que as coroas. Determine a probabilidade de em um lançamento sair coroa.

03) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C. Qual a probabilidade de A ou C vencer?

04) Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É 3 vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?

05) Um dado de 6 faces apresenta a seguinte irregularidade: a probabilidade de sair a face dois é o dobro da probabilidade de sair a face um. As probabilidades de saírem as demais faces são iguais a $\frac{1}{6}$. Então:

a) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{3}$

b) a probabilidade de sair a face dois é igual a 2

c) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{9}$

d) a probabilidade de sair a face dois é igual a $\frac{2}{12}$

e) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{2}{9}$

6.6. Atividade 6

Título: **Eventos complementares**

Objetivo: Conceituar eventos complementares

Material: Folha de atividade, lápis, caneta

Procedimento: Preencha o quadro a seguir:

	ELEMENTOS DOS EVENTOS				**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**	
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	$Evento\ A \cup B$	$P(A)$	$P(B)$
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair número primo	Sair número composto				
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3				
C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair a face Cara	Sair a face Coroa				
D) Numa urna com 10 bolas verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta				

observamos a cor.						
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta				
F) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3				
G) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
H) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
I) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
J) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.				

Quando a intersecção de dois eventos é **vazia** e a união deles é o **espaço amostral** do experimento, dizemos que os eventos são complementares.

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A e B em cada situação;
4) Direcionar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, ou seja, quanto a interseção e a união dos eventos em cada situação;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização de quando dois eventos são complementares;
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do conceito de dois eventos complementares.

Resolva as questões

1) Quais dos pares de eventos do quadro são complementares?

2) Quais dos pares de eventos do quadro não são complementares?

6.7. Atividade 7

Título: **Eventos complementares**

Objetivo: Descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos complementares

Material: Folha de atividade, lápis, caneta

Procedimento: Preencha o quadro a seguir:

	ELEMENTOS DOS EVENTOS				**OS EVENTOS A E B SÃO COMPLEMENTARES?**		**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**	
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	$Evento\ A \cup B$	SIM	NÃO	P(A)	P(B)
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair número primo	Sair número composto						
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3						
C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair a face Cara	Sair a face Coroa						
D) Numa urna com 10 bolas	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta						

verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.								
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta						
F) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3						
G) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.						
H) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.						
I) Uma caixa contém 20 fichas	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.						

numeradas de 1 a 20.								
J) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.						

Observação:____

Conclusão:____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A e B em cada situação;
4) Direcionar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, ou seja, quando os eventos são ou não complementares;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização de quando dois eventos são complementares por meio da expressão $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(B)}$;
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação da expressão para o cálculo de dois eventos complementares.

Questões Propostas

01) Em certa cidade, de cada 10 rapazes, 4 em média, tem olhos verdes. Sorteando-se ao acaso um rapaz dessa cidade, qual é a probabilidade de ele não ter olhos verdes?

02) Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral, com $P(A\ B) = 0{,}75$. Em cada caso, calcule $P(B)$, admitindo que $P(A) = 0{,}35$ e A e B são mutuamente exclusivos.

03) Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

04) A probabilidade de um piloto vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse piloto vença a corrida, se não pode haver empate?

05) Em uma eleição em que não pode haver empate, a probabilidade de um candidato vencer é $\frac{X+3}{4}$ e a de perder é $\frac{X}{6}$. Essa informação permite concluir que a probabilidade de esse candidato vencer a eleição é:

a) 20% b) 50 % c) 10% d) 15 % e) 90%

6.8. Atividade 8

Título: **Probabilidade do Evento complementar**

Objetivo: Descobrir uma expressão para calcular a probabilidade da união de dois eventos complementares
Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis
Procedimento: Preencha o quadro a seguir
01) Consideremos o seguinte experimentos:

		Eventos				Possibilidades dos Eventos				Probabilidades do Eventos			
Experimento	Possibilidades do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	Evento $A \cup B$	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima		Sair número primo	Sair número composto	Sair número primo e composto	Sair número primo ou composto								
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima		Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3	Obter múltiplo de 3 e não obter múltiplo de 3	Obter múltiplo de 3 ou não obter múltiplo de 3								

C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima		Sair a face Cara	Sair a face Coroa	Sair a face Cara e a face Coroa	Sair a face Cara ou a face Coroa								
D) Numa urna com 10 bolas verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor:		Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta	Sair uma bola de cor Verde e Preta	Sair uma bola da cor Verde ou Preta								
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor:		Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta	Sair uma bola de cor Verde e Preta	Sair uma bola da cor Verde ou da cor Preta								

Observação:____

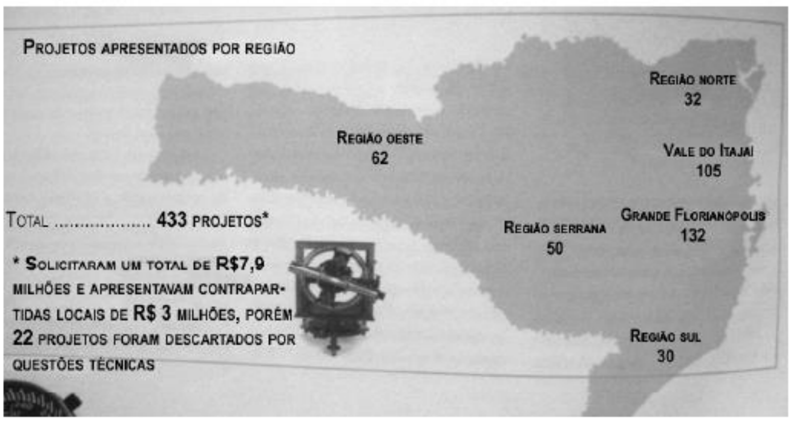
Conclusão: ____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
4) Direcionar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, verificarem se os eventos são ou não complementares e perceberem o que acontece com P(AUB) quando os eventos são complementares;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização de quando dois eventos são complementares a probabilidade da união destes eventos pode ser calculada por meio da expressão expressão $\boldsymbol{P(AUB) = P(A) + P(B)}$**;**
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação da expressão para o cálculo da união de dois eventos complementares.

Questões propostas

01) A economia do estado de Santa Catarina esteve, em 2002, fortemente voltada para a exportação de manufaturados com maior valor agregado. Isso exigiu, na época, maior empenho de pesquisadores de diversas áreas das esferas municipal, estadual, federal e privada. A tarefa da *funcitec* é financiar Ciência & Tecnologia por meio da abertura frequente de editais abertos e com referências competitivas claras. A figura abaixo apresenta alguns dados que ilustram a busca para financiamento de pesquisas de um desses editais promovidos pela *funcitec.*

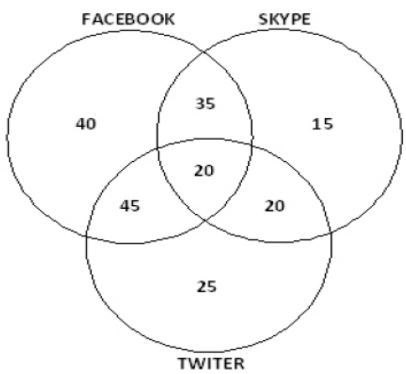


Fonte: NEXUS, Ciência & Tecnologia, Nº 2 , ANO II de

Nessas condições, afirma-se que a probabilidade de um projeto escolhido aleatoriamente, dentre o total dos projetos apresentados, não ser da região sul é de:

$a)\ 233/433$ $b)\ 403/433$ $c)\ 517/433$ $d)\ 530/433$

2) Uma pesquisa num grupo de jovens revelou que os meios de comunicação mais utilizados são facebook, twiter e Skype, distribuídos conforme o diagrama abaixo. A probabilidade de sortear ao acaso um jovem que **NÃO** utiliza Skype é:



$a)$ 92,5 % $b)$ 65 % $c)$ 55 % $d)$ 45 % $e)$ 35%

03) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T; V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00. A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

04) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$400;00 é Igual a:
a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

05) Suponha que, dos imigrantes que chegaram aos Estados Unidos, 120 mil fossem brasileiros. Um dos 15 milhões de imigrantes teve sorte grande naquele país: ficou rico. A probabilidade de que esse imigrante NÂO seja brasileiro é de:

a) 0,80% b) 9,92% c) 80,00%

d) 99,20% e) 97,20%

6.9. Atividade 9

Título: **Probabilidade de eventos não disjuntos (Não complementares)**

Objetivo: Descobri uma expressão para a probabilidade de dois eventos não disjuntos.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos os seguintes experimentos:

		EVENTOS				**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**				**PROBABILIDADES DO EVENTOS**			
Experimento	Possibilidades do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	Evento $A \cup B$	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
A) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	S = {1,2, 3...,9,10}	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3	Sair uma ficha par e múltiplo de 3.	Sair uma ficha par ou múltiplo de 3								
B) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	S = {1,2, 3...,9,10}	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar e múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar ou múltiplo de 3.								
C) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha par e múltiplo de 3.	Sair uma ficha par ou múltiplo								

1 a 20.					de 3.								
D) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar e múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar ou múltiplo de 3.								
E) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.	Sair uma ficha divisor de 20 e múltiplo de 2.	Sair uma ficha divisor de 20 ou múltiplo de 2.								

Observação:____

Conclusão:____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A, B, A∩B e AUB em cada situação;
4) Direcionar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, verificarem se os eventos são ou não complementares e perceberem o que acontece com P(AUB) quando os eventos não são complementares;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização de quando dois eventos não são complementares a probabilidade da união destes eventos pode ser calculada por meio da expressão expressão $\boldsymbol{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$**;**
8) Orientar os discentes para que percebam e compreendam que a probabilidade da união de dois eventos não complementares é igual a soma das probabilidades de cada um destes eventos menos a probabilidade da ocorrência conjunta destes eventos;
9) Orientar os discentes para ficarem atentos quanto as diferenças existentes quando os eventos não são complementares;
10) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação da expressão para o cálculo da união de dois eventos não complementares.

Questões Propostas

01) Na lista de chamada de uma classe, os alunos são numerados de 1 a 30. Para uma chamada oral, o professor sorteou um desses números. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par ou múltiplo de 6?

02) Em uma urna serão colocadas 4 bolas azuis, numeradas de 1 a 4, e 5 bolas amarelas, numeradas de 1 a 5. Sorteando uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de ela ser azul ou ter número ímpar?

03) Os cursos ofertados pela UEPA no PROSEL e PRISE, no município de IGARAPÉ AÇU, com as respectivas vagas, constam na tabela abaixo:

CURSO OFERTADO	PROSEL	PRISE
Licenciatura em Letras	20	20
Licenciatura em Matemática	20	20

Supondo que todas as vagas serão preenchidas, qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um aluno do Curso de Licenciatura em Matemática ou um aluno aprovado no PRISE?

04) O professor Francisco de Assis realizou uma pesquisa em uma de suas turmas de 2ª série do ensino médio para saber a preferência dos alunos a respeito do tema a ser escolhido para a feira cultural da escola. Assim, apresentou aos alunos dois temas: Cidadania e Meio Ambiente, obtendo os seguintes resultados:

40 alunos escolheram Cidadania

25 alunos escolheram Meio Ambiente

10 alunos escolheram ambos os temas

5 alunos não escolheram nenhum dos dois temas:

Desta forma, selecionando um aluno da sala, qual é a probabilidade dele ter escolhido apenas Meio Ambiente como tema?

05) Uma pesquisa com três marcas concorrentes de refrigerantes, A; B e C, mostrou que 60% das pessoas entrevistadas gostam de A, 50% gostam de B, 57% gostam de C, 35% gostam de A e C, 18% gostam de A e B, 24% gostam de B e C, 2% gostam das três marcas e o restante das pessoas não gosta de nenhuma das três. Sorteando-se aleatoriamente uma dessas pessoas

entrevistadas, qual é a probabilidade de que ela goste de uma única marca de refrigerante ou não goste de marca alguma?

06) Em um colégio foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares de seus alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 frequentavam um curso de idiomas e 120 realizavam estas duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e frequentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes um é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades, isto é, pratique um tipo de esporte ou frequente um curso de idiomas?

6.10. Atividade 10

Título: **Probabilidade Condicional**

Objetivo: Descobrir uma expressão para o cálculo de probabilidades de ocorrer um evento, sabendo da ocorrência de um outro.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes eventos:

	EVENTOS			**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**			**PROBABILIDADES DOS EVENTOS**		**PROBABILIDADE DO EVENTO B TENDO OCORRIDO O EVENTO A.**
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	A	B	$A \cap B$	P(A)	$P(A \cap B)$	$P(B/A)$
A) Consideremos uma urna com 12 bolas, numeradas de 1 a 12. Sorteia-se uma bola e observa-se o número: Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser maior que 6?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é maior de 6	A bola sorteada é par e maior que 6						
B) Se a bola sorteada foi ímpar, qual a probabilidade dela ser maior que 6?	A bola sorteada foi ímpar.	A bola sorteada é maior de 6	A bola sorteada é ímpar e maior que 6						

C) Se a bola sorteada foi ímpar, qual a probabilidade dela ser menor que 6?	A bola sorteada foi ímpar.	A bola sorteada é menor de 6	A bola sorteada é ímpar e menor do que 6						
D) Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser menor que 10?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é menor de 10.	A bola sorteada é par e menor que 10.						
E) Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser divisor de 12?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é divisor de 12.	A bola sorteada é par e divisor que 12.						
F) Em uma turma temos 25 meninas e 20 meninos. Na disciplina língua estrangeira, todos tem a opção de escolher inglês ou espanhol, 10 meninas escolhem espanhol e 12 meninos fazem a mesma opção. Um aluno vai ser sorteado ao acaso: Sabendo-se que o aluno escolhido foi menina, qual a probabilidade dela ter	O aluno escolhido foi menina.	O aluno escolhe inglês.	O aluno escolhido foi menina e escolheu inglês.						

escolhido inglês?									

Observação:____

Conclusão:____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes quanto a notação dada para a probabilidade Condicional P(A/B) ou P(B/A), para que os mesmos possam prosseguir o preenchimento da atividade;
3) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B e A∩B em cada situação;
4) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades dos eventos A, A∩B e (B/A) em cada situação;
5) Auxiliar os estudantes, se necessário, no preenchimento dos eventos e suas possibilidades e probabilidades da primeira experiência aleatória, para que os discentes possam prosseguir a atividade;
6) Orientar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, verificarem de que forma as probabilidades dos eventos se relacionam;
7) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
8) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
9) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização da probabilidade condicional que pode ser calculada por meio da expressão $\boldsymbol{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$**;**
10) Orientar os discentes para que percebam e compreendam que a probabilidade condicional pode ser obtida por meio da interpretação e "redução" do espaço amostral, dependo do evento em questão;
11) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do conceito e da expressão da probabilidade condicional.

Questões propostas

01) Um dado é lançado e o número da face de cima é observado.

a) Se o resultado obtido for par, qual a probabilidade de ele ser maior ou igual a 5?

b) Se o resultado obtido for maior ou igual a 5, qual a probabilidade de ele ser par?

c) Se o resultado obtido for ímpar, qual a probabilidade de ele ser menor que 3?

d) Se o resultado obtido for menor que 3, qual a probabilidade de ele ser ímpar?

02) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade de o número ser par?

b) Qual a probabilidade de o número ser par, sabendo que ele é menor que 50?

c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5, sabendo que é par?

03) Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual é a probabilidade de que seja ímpar?

04) Jogue um dado duas vezes. Calcule a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

05) Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela:

	Solteiro (S)	Casado (C)	Desquitado (D)	Viúvo (V)	
Masculino(M)	50	60	40	30	180
Feminino(F)	150	40	10	20	220
	200	100	50	50	

a) Uma pessoa é escolhida ao acaso, sabendo que a pessoa é do sexo masculino, qual a probabilidade de a pessoa ser solteira?

b) Uma pessoa é escolhida ao acaso, sabendo que a pessoa é desquitada, qual a probabilidade de a pessoa ser do sexo feminino?

06) Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

6.11. Atividade 11

Título: **Conceituar eventos independentes**

Objetivo: Descobrir quando dois eventos são independentes.

Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

	EVENTOS		**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**		**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**			
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	A	B	$P(B)$	$P(B/A)$	$P(A)$	$P(A/B)$
A) O lançamento de um dado, uma única vez.	O resultado é par.	O resultado é maior do que 4.						
B) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do primeiro lançamento é par.	o resultado do segundo lançamento é par.						

C) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do primeiro lançamento é par.	A soma dos resultados é par.						
E) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do segundo lançamento é par.	A soma dos resultados é par.						
F) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O primeiro dado mostra um número par	O segundo dado mostra um 5 ou um 6.						

Observação:____

Conclusão:____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades P(B), P(B/A) e P(A), P(A/B) em cada situação;
4) Orientar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, verificarem de que forma as probabilidades dos eventos P(B), P(B/A) e P(A), P(A/B) se relacionam;
5) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
6) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
7) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização do conceito de dois eventos independentes;
8) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do conceito de dois eventos independentes.

Questões propostas

01) Quais dos experimentos acima tem pares de eventos independentes?

02) Uma moeda é lançada três vezes. Sejam os eventos:

A: Ocorrem pelo menos duas caras.

B: Ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Os eventos $A\ e\ B$ são independentes?

03) Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que ela pouse num homem (P(H))?

b) Qual a probabilidade de que ela pouse numa mulher (P(M))?

c) Os eventos H e M são independentes? Justifique.

04) Dois eventos $A\ e\ B$ são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Três eventos A, B e C são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, $P(B \cap C) = P(B).P(C)$, $P(A \cap C) = P(A).P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$. Jogue um dado duas vezes. Considere os eventos A = { o resultado do primeiro lançamento é par}, B= {o resultado do segundo lançamento é par} e C= { a soma dos resultados é par}.

a) A e B são independentes?

b) A e C são independentes?

c) B e C são independentes?

d) A, B e C são independentes?

6.12. Atividade 12

Título: **Probabilidade de eventos independentes**

Objetivo: Descobrir uma expressão para a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos.
Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis
Procedimento: Preencha o quadro a seguir
01) Considere os seguintes experimentos:

		EVENTOS			**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**			**PROBABILIDADE DOS EVENTOS NA FORMA DE FRAÇÃO IRREDUTÍVEL.**		
Experimento	Espaço amostral do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	A	B	$A \cap B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$
A) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e número primo?		Ocorrer Coroa.	Ocorrer número primo.	Sair coroa e número primo.						
B) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e número maior que 4?		Ocorrer Coroa.	Ocorrer número maior que 4.	Ocorrer coroa e número maior que 4.						
C) Uma moeda é lançada 3 vezes.		Ocorrem pelo menos duas caras.	Ocorrem resultados iguais	Ocorrem pelo menos duas caras e resultados iguais nos						

			nos três lançamentos.	três lançamentos						
D) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer Cara e o número 1?		Ocorrer Cara.	Ocorrer o número 1.	Ocorrer cara e o número 1.						
E) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer Cara e o número 1?		Ocorrer Cara.	Ocorrer o número 1.	Ocorrer cara e o número 1.						
F) Consideremos o experimento que consiste no lançamento simultâneo de duas moedas normais. Qual a probabilidade de sair face cara na primeira e na segunda moeda?		Ocorrer Cara na primeira.	Ocorrer cara na segunda.	Ocorrer cara na primeira e na segunda.						

Observação:____

Conclusão:____

Orientações didáticas:

1) Orientar os alunos para o preenchimento do quadro, quanto a leitura e a interpretação correta do enunciado dos eventos em cada situação;
2) Orientar os estudantes sobre identificação dos elementos dos eventos A, B e A∩B em cada situação;
3) Orientar os estudantes quanto ao cálculo das probabilidades P(A), P(B) e P(A∩B) em cada situação;
4) Orientar os alunos para observação das regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade, verificarem de que forma as probabilidades se relacionam;
5) Orientar os estudantes para que percebam com o auxílio do quadro de atividades e compreendam que a probabilidade de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades da ocorrência de cada um destes eventos;
6) Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações e conclusões após o preenchimento do quadro;
7) Orientar os estudantes para socializarem suas observações e conclusões registradas;
8) Orientar os estudantes quanto a da importância da interpretação correta do enunciado das questões para verificarem se os eventos são independentes;
9) Apresentar aos estudantes a formalização, sistematização para o cálculo da probabilidade de dois eventos independentes que pode ser calculada pela expressão $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;
10) Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas para fixação do cálculo da probabilidade de dois eventos independentes.

Questões propostas

01) Dos 30 funcionários de uma empresa, 10 são canhotos e 25 vão de ônibus para o trabalho. Escolhendo ao acaso um desses funcionários, qual a probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho?

02) Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observamos cara nos 10 lançamentos?

03) Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que a face “2” apareça pelo menos uma vez nos 5 lançamentos?

04) Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a primeira pessoa atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade de a segunda pessoa atingir o alvo é $P(B) = \frac{2}{3}$. Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo?

b) Ao menos um atingir o alvo?

05) As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são: $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) Ambos resolvam o problema?

b) Ao menos um resolva o problema?

c) nenhum resolva o problema?

06) A probabilidade de um certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de uma certa data, é de 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?

b) ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

07) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a) 0,72 b) 0,56 c) 0,24 d) 0,16 e) 0,14

08) No Estado do Pará, 94% dos estudantes do Ensino Médio estão matriculados em escolas públicas. Se a probabilidade de esses estudantes

serem negros (pretos + pardos) é de 75% então a probabilidade de o estudante do Ensino Médio estar matriculado em escola pública e ser negro é:

a) 23,5% b) 55,5% c) 70,5% d) 45,5% e) 67,5%

09) Em um supermercado, a probabilidade de que um produto da marca A e um produto da marca B estejam a dez dias, ou mais, do vencimento do prazo de validade é de 95% e 98%, respectivamente. Um consumidor escolhe, aleatoriamente, dois produtos, um produto da marca A e outro da marca B. Admitindo eventos independentes, a probabilidade de ambos os produtos escolhidos estejam a menos de dez dias do vencimento do prazo de validade é:

a) 0,001% b) 0,01% c) 0,1% d) 1% e) 10%

10) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$, eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P > \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P > \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P > \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P > \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \geq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:

a) excelente b) bom c) regular d) ruim e) péssimo

11) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,2. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048 b) 0,08192 c) 0,24000 d) 0,40960 e) 0,49152

12) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7% b) 30,0% c) 44,1% d) 65,7% e) 90,0%

7. Sugestões de Leituras

A seguir, algumas sugestões de leitura sobre o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade, sobre a história da Probabilidade e da Estatística, sobre o comportamento humano etc.

BRITO, Bosco Silveira. **Ensino de probabilidade:** Proposta de ensino através de experimentação. 2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Tradução Diego Alfaro; consultoria Samuel Jurkiewicz. — Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

MLODINOW, Leonard. **Subliminar**: Como o inconsciente influencia nossas vidas. Tradução Cláudio Carina; - 1.ed. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2014.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de probabilidade**: historicidade e interdisciplinaridade.2014.130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ,2014.

NEVES, Fábio Costa de Oliveira. **Ensino de probabilidade:** Tipos de Eventos.2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

SILVA, Marcio José. **Questões Sociais via Probabilidade.** 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém, 2016.

SOARES, Marcel Brito. **O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades.**2018. 294f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Belém, 2018.

OLIVEIRA, Marcos Oliveira de. **Análise do Ensino de probabilidade**.2015.112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

8. Considerações Finais

A sequência didática desenvolvida foi validada na dissertação de mestrado de Soares (2018), a qual obteve resultados significativos tanto na participação de alunos nas aulas de matemática quanto no desempenho de resolução de questões envolvendo probabilidade. Este produto visa contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da probabilidade que é um conhecimento importante na formação do estudante, pois lhe proporciona uma visão de eventos não determinísticos observados na natureza, auxiliando-os em suas análises e decisões. Com o intuito de construir uma educação de melhor qualidade, esperamos que os docentes da Educação Básica apreciem esse produto e possam utilizá-lo em suas aulas.

9. Referenciais

ALCÂNTARA, R.R. **Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina 2014.

BATANERO, Mª. C.; GODINO, J. D.; CAÑIZARES, Mª. J. Azar y Probabilidad. **Matematicas: Cultura y Aprendizaje**. Editorial Sintesis. Espanha. 1996.

BIAJOT, Emerson Donizet. **Experimentos Probabilísticos**: noções probabilidade no ensino fundamental II.2013.107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, São Carlos,2013.

BRASIL, (2006). Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica - Brasília. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em:<http:portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/matemática.pdf>. Acesso em 27 de outubro de 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Prova Brasil. Matrizes de referência, tópicos e descritores: Brasília, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Matrizes de referência, tópicos e descritores:** Brasília, 2012. Disponível em:https://download.inep.gov.br/educação_basica/enem/downloads/2012/matriz_referência_enem.pdf. Acesso em:27 de outubro de 2016.

BRITO, Bosco Silveira. **Ensino de probabilidade:** Proposta de ensino através de experimentação. 2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões coma matemática.** 1ª edição. Editora Moderna. São Paulo-SP. 2010.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **Letramento probabilístico no ensino médio:** um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos.2015.141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CONDURÚ, Marise Teles; MOREIRA Maria da Conceição Ruffeil. **Produção científica na universidade**: normas para apresentação. Belém. UEPA, 2007.130 p.

DUARTE, Rafael Luz. **Introdução à Estatística e Probabilidade**: uma abordagem contextualizada no cotidiano dos alunos.2013.55f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza,2013.

BRASIL, (2013) – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em 15 dezembro de 2015.

FERNANDES, J.A, CORREIA, P.F., & CONTRERAS, J.M.(2013). **Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.** Avances de Investigación em Educación Matemática,4,5-26. Disponível em: <https//www.researchgate.net>publication>. Acesso em: 20 de janeiro de 2016.

FERNANDES, José Antônio et al. **Comparação de probabilidade de acontecimentos formulados de forma explicita e implícita.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.10, n.2, p.42-60,2015. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p42. Acesso em: 20 janeiro de 2016.

FLOR, Reginaldo Pereira. **Um Estudo Sobre a Teoria das Probabilidades Discretas:** Contribuição para a Formação Continuada de Professores .2014.64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2014.

GONDIM, Hellen Fernandes. **Probabilidade e probabilidade geométrica**: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino médio.2013.78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS,2013.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª edição. Atual Editora. São Paulo-SP. 2007.

IEZZI, Gelson et. al. **Matemática: volume único.** São Paulo: Atual, 2011.

LIMA, Felipe Mascagna Bitencourt . **O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos**.2013.119p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, São Carlos,2013.

LIMA, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. Rio de Janeiro-RJ. 1998.

LIPSCHUTZ, S. **Probabilidade**. 4ª edição. São Paulo-SP. 1993.

MENDES, Iran Abreu; SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por Atividade:** sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Tradução Diego Alfaro; consultoria Samuel Jurkiewicz. — Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

_______________ . **Subliminar**: Como o inconsciente influencia nossas vidas. Tradução Cláudio Carina; - 1.ed. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2014.

MORGADO, A. C. et.al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª edição. Editora SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2006.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de probabilidade**: historicidade e interdisciplinaridade.2014.130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ,2014.

MORAES, José Agissander Oliveira de. **Probabilidade Geométrica e Aplicações**.2014.35 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia-Go,2014.

MOREIRA, Andrea de Paula Machado. **Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio.**2015.159 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, 2015.

NEVES, Fábio Costa de Oliveira. **Ensino de probabilidade:** Tipos de Eventos.2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

NUNES, Victor Arantes. **A Utilização dos Jogos Lotéricos Para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio**.2015.102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Seropédica, RJ, 2015.

OLIVEIRA, Marcos Oliveira de. **Análise do Ensino de probabilidade**.2015.112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

PARÁ, Secretaria de Estado de Educação. Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE). **Revista Pedagógica**. Ensino Médio Matemática. 2014.

RIBEIRO, Rossano Evaldt Steinmetz. **Uma proposta de ensino de probabilidade no ensino médio.**2012.116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SÁ, Pedro Franco de e ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: **alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos**. In: MARCONDES, Maria Inês, OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de, TEIXEIRA, Elizabeth (Org.). Abordagens Teóricas e Construções Metodológicas na Pesquisa em Educação – Belém: EDUEPA, 2011.p.145-160.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SANTANA, Michaelle Renata Moares de. **O Acaso, o Provável, o Determinístico**: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.2011.94f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Recife,2011.

SILVA, Lucicleide Bezerra da. **A Estatística e a Probabilidade nos Currículos dos Cursos em Licenciatura de Matemática no Brasil.**2014. 127f. Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife,2014.

SILVA, Marcio José. **Questões Sociais via Probabilidade.** 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém, 2016.

SILVA, Fabrício Menezes Netto da. **Jogos no Processo de Ensino - Aprendizagem de Probabilidade.**2013. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

SILVA FILHO, Haroldo Costa. **Probabilidade e Valor Esperado Discussão de Problemas para o Ensino Médio**.2016.73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,2016.

SOARES, Marcel Brito. **O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades.**2018. 294f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Belém, 2018.