

Marcos Fabrício F. Pereira
Miguel Chaquiam

SEMELHANÇA

de figuras planas

atividades e condições para um ensino eficaz

Belém - PA

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Profa. Dra. Acylena Coelho Costa	Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva	Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Prof. Dr. Antonio José Lopes	Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Prof. Dr. Benedito Fialho Machado	Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha	Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhão	Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira	Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha	Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz	Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior	Profa. Dra. Maria Lúcia P. Chaves Rocha
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira	Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Profa. Dra. Eliza Souza da Silva	Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves	Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva	Prof. Dr. Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo	Profa. Dra. Rita Sidmar Alencar Gil
Profa. Dra. Glaudianny Amorim Noronha	Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias	Profa. Dra. Talita Carvalho da Silva de Almeida

Comitê de Avaliação

Miguel Chaquiam
Natanael Freitas Cabral
Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha

PEREIRA, Marcos Fabrício F. e CHAQUIAM, Miguel. Semelhança de figuras planas – Atividades e condições para o Ensino eficaz. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Educação Matemática; Semelhança de figuras planas; Ensino eficaz.

Sumário

Apresentação	5
1 Atividades propostas	9
1.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA	9
1.1.1 Primeira Parte	11
1.1.2 Segunda Parte	17
2 Tópicos de Semelhança	25
2.1 SOBRE RETAS PARALELAS	27
2.2 POLÍGONOS SEMELHANTES	38
2.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	40
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

Apresentação

Desde que nascemos, somos levados a interpretar e explorar o ambiente que nos rodeia. Antes mesmo de dominarmos a linguagem, percebemos através da visão e do tato, o espaço e as formas nele presentes. Para Toledo e Toledo (2009), a escola deixa de explorar essa capacidade infantil de percepção espacial nos trabalhos de Geometria, estando sempre mais preocupada com a linguagem e a quantificação. Grande parte da nossa formação matemática, na Educação Básica, ocorreu neste cenário.

Ao cursar a disciplina Geometria Plana, ainda na graduação, o contato com teoremas que utilizavam semelhança de triângulos em suas demonstrações, como por exemplo, os teoremas de Pitágoras, Tales, Ceva, Pappus e Menelau, nos proporcionou um gosto particular por Geometria, em particular por semelhança de figuras planas. Já na função de supervisor escolar no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), buscamos realizar nossas ações apoiados em estudos que enfatizam a importância do ensino de geometria na Educação Básica.

Nesse sentido, Davis e Hersh (1985) apontam a geometria como o ramo mais adequado da matemática no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades intelectuais dos alunos, dentre elas podemos citar a percepção espacial e a criatividade, sendo a geometria um campo ideal para o desenvolvimento desse tipo de raciocínio. No mesmo sen-

tido, Lorenzato (1995) salienta a importância do ensino de geometria pela grande possibilidade contextualização e interdisciplinaridade.

Essa importância também pode ser observada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1997), quando afirmam que os alunos costumam se interessar naturalmente pelos conteúdos geométricos, pois tais conhecimentos estimulam a observação, percepção e identificação de semelhanças, diferenças e regularidades de formas e medidas, sendo a geometria um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e sendo trabalhado a partir da exploração dos objetos do mundo físico, como por exemplo, obras de arte, pinturas e desenhos, esculturas e artesanato, permitirá ao aluno estabelecer conexões tanto com outros campos da Matemática, quanto com outras áreas do conhecimento humano.

No entanto, a experiência profissional, adquirida ao longo de vários anos frente ao ensino de Matemática na Educação Básica, nos permitiu observar nos alunos muitas dificuldades no que se refere à aplicação de conceitos geométricos como ferramenta na resolução de problemas matemáticos no Ensino Fundamental. Essa dificuldade é notada também em estudos feitos por Lorenzato (1995), Pavanello (1993), Pais e Freitas (1999), Silva (2013), Filho e Souza (2013), Crescenti (2005), Almouloud e Manrique (2000) e Ferreira (2013).

Tais pesquisas mostram que o ensino de geometria vem passando por algumas dificuldades, dentre as quais podemos citar o ensino predominantemente tradicional, ou seja, um modelo que se caracteriza pela reprodução do conhecimento, apresentando-se como um processo inflexível, cerimonioso, que tem como função a preparação moral e intelectual dos estudantes, dando ênfase a aulas expositivas, demonstrações e sistematização do conteúdo de forma sequencial, lógica e ordenada, sem relação com outras disciplinas do currículo e o cotidiano, onde o livro didático ainda figura como a principal - ou único - recurso metodológico utilizado por professores em sala de aula. Esse fator pode indicar a necessidade do desenvolvimento de novas propostas metodológicas que possam proporcionar ambientes mais favoráveis para a aprendizagem de geometria, bem como, outros objetos nos diversos campos da Matemática.

Outro ponto importante apontado pelas pesquisas supracitadas é que o livro didático ainda figura como uma das únicas, ou a única, ferramenta metodológica utilizada pelos professores durante as aulas de matemática. Neste sentido, as pesquisas de Fontes e Fontes (2011), Medeiros (2008), Lomas (2004), Leles (2013) e Albuquerque (2011)

que realizara análises em livros didáticos em relação ao conteúdo de semelhança de figuras planas mostram que quanto especificamente à abordagem matemática, percebeu-se uma evolução muito grande, em relação aos exemplares mais recentes, quanto à maneira como os autores propõe os novos assuntos, pois anteriormente, os autores iniciavam o conteúdo de semelhança com a definição da semelhança de triângulos, e aplicando exercícios de fixação na sequência. Já nas publicações mais recentes, notou-se a preocupação de se mostrar aplicações da semelhança, e mesmo na proposta dos exercícios, que são baseados em problemas práticos, mesmo que alguns exemplares analisados ainda apresentem contextualização necessária para uma aprendizagem efetiva.

Quando ouvimos a opinião de professores em relação ao ensino de semelhança de figuras planas, percebemos a predominância da utilização de aulas expositivas como ferramenta educacional, apresentando definições, exemplos e propondo questões para serem resolvidas pelos alunos. Os conhecimentos prévios dos alunos poucas vezes são levados em consideração durante as aulas e os métodos de fixação mais utilizados pelos professores é a resolução de questões do livro didático e listas de questões de elaboração do próprio professor. Todos os professores consultados utilizam a prova como principal método avaliativo (Pereira, 2017).

Sobre a concepção de alunos egressos do Ensino Fundamental, percebemos (Pereira, 2017) que os mesmos apresentam grandes dificuldades na aprendizagem de semelhança de figuras planas, confirmando as informações dos professores quanto à metodologia predominante utilizada e sala de aula, os métodos de fixação e avaliativos. Observamos ainda que o gosto por matemática, a frequência com que os alunos estudam matemática fora da escola e a ajuda com as tarefas que os mesmos recebem são fatores determinantes no desempenho dos mesmos.

Deste modo, discutimos nesta proposta o ensino de geometria, de modo particular o ensino de semelhança de figuras planas, a partir de uma proposta que enfatiza o caráter investigativo do processo de construção do conhecimento, de modo a resgatar situações problematizadoras que favoreçam a aprendizagem. Segundo Mendes (2010), experiências manipulativas ou visuais contribuem para que o aluno manifeste as primeiras impressões do conhecimento aprendido durante a sua interação com o objeto, sendo essas primeiras impressões comunicadas de forma verbal num processo de socialização das ideias aprendidas o que implica na necessidade de uma representação simbólica dessa

aprendizagem. Nesse sentido, John Dewey¹ afirma que não há uma aprendizagem significativa quando o aluno recebe de forma passiva um conceito transmitido pelo professor, mas sim quando esse aluno executa uma ação e por meio dessa ação, o mesmo constrói e se apropria do conhecimento de forma plena.

¹Ver Westbrook e Teixeira (2010)

Atividades propostas

Neste capítulo apresentaremos o conjunto de atividades que compõem a sequência didática proposta para o ensino de semelhança de figuras planas e o detalhamento da aplicação do experimento em sala de aula.

No quadro 1 mostramos os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais (Zabala, 1998) trabalhados com as atividades propostas nesta Sequência Didática.

Vale ressaltar que não pretendemos que as atividades aqui propostas sejam vistas como verdades absolutas e sim atividades-modelo que podem sofrer adaptações sempre que o professor achar necessário. Outro ponto importante é o fato dessas atividades não abrangerem por completo todos os conceitos relacionados à semelhança de figuras planas, dada a amplitude desse tema, assim atividades adicionais devem ser inseridas à sequência didática sempre que houver necessidade.

1.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

As atividades aqui propostas foram divididas em duas partes: a primeira parte contém atividades envolvendo os conceitos semelhança

Quadro 1.1: Conteúdos trabalhados nas atividades

Conceituais	• Conceito de ampliação, redução e deformação. • Conceito de semelhança. • Teorema fundamental da semelhança. • Proporcionalidade entre os lados correspondentes. • Razão de semelhança. • Semelhança de retângulos. • Semelhança de triângulos.
Procedimentais	• Utilização correta de instrumentos geométricos. • Interpretação algébrica e geométrica dos conceitos de semelhantes, razão de semelhança e proporcionalidade entre segmentos. • Aplicação correta dos conceitos na resolução de situações-problema. • Utilização correta dos procedimentos aritméticos, algébricos e geométricos.
Atitudinais	• Valorizar a importância do estudo de semelhança de figuras planas. • Disposição para a realização das atividades individuais e em grupo. • Ordem, clareza e cientificidade na apresentação e defesa das conclusões das atividades. • Desenvolvimento de habilidades e destreza para o manuseio de instrumentos geométricos. • Mostrar hábitos de cortesia e solidariedade no trato com os colegas. • Manter o diálogo aluno - professor - aluno.

Fonte: Autor (2017)

em figuras planas de modo geral e em retângulos, a segunda parte é mais específica e envolve os conceitos de semelhança em triângulos.

1.1.1 Primeira Parte

A primeira parte da sequência didática é composta por 4 atividades, nas duas primeiras atividades nos preocupamos em formalizar os conceitos de ampliação e redução de figuras (Atividade 1), favorecendo a percepção, por parte dos alunos, para a noção de semelhança que segundo Machado (2000) pode ser percebida intuitivamente pelo aluno, mesma que estes não conheçam inicialmente os critérios que a definem.

A percepção do conceito de razão de semelhança e a percepção da proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras semelhantes são trabalhados na atividade 2 com o intuito de superar a dificuldade no entendimento destes conceitos identificada nas pesquisas realizadas com professores e alunos mostradas no capítulo 2.

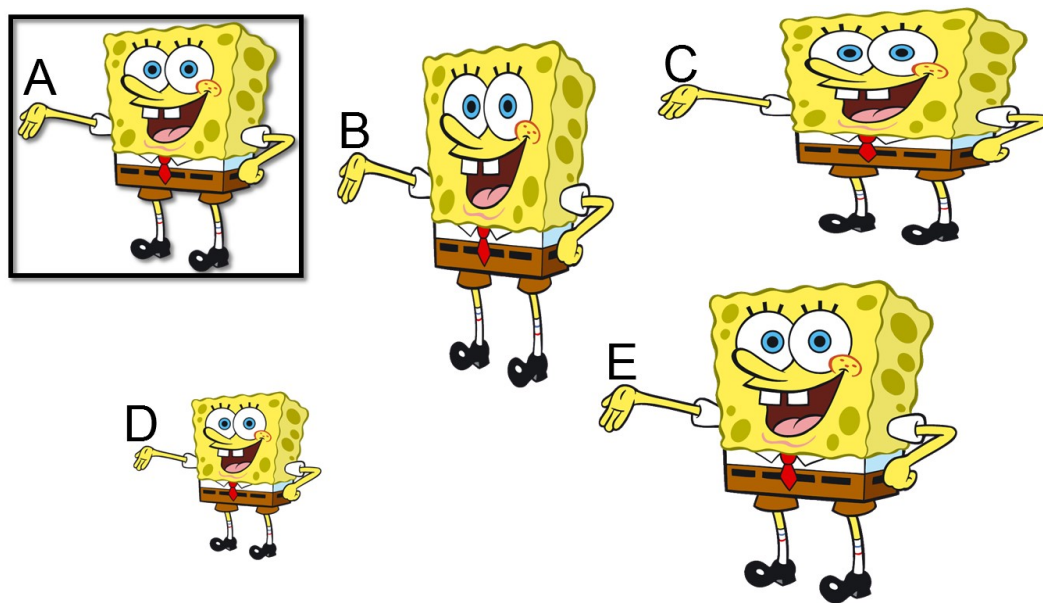
A sequência didática segue com atividades relacionadas à semelhança entre retângulos por concordarmos com González (1997) e Bigode (2016)¹, que acreditam que a congruência entre os ângulos correspondentes é de fácil percepção por parte dos alunos, sendo a proporcionalidade entre os lados correspondentes, um critério que necessita ser especialmente trabalhado, com atividades significativas, de modo a conseguir sua percepção.

Para o desenvolvimento das atividades, concordamos com Ferreira (2013) quando afirma que o ensino de geometria ainda se dá de maneira desconectada da realidade e ainda a visão de Leles (2013) sobre a necessidade de apresentar um conceito por meio de uma situação-problema e com a presença de figuras para um melhor entendimento por parte dos alunos.

¹Comunicação oral ocorrida durante o Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática realizado em Curitiba - PR.

Atividade 1

Pretende-se estampar em algumas camisas o desenho do Bob Esponja representado na figura **A**, para isso é necessário aumentar a escala da figura **A**. Observe as figuras representadas em **B**, **C**, **D** e **E**.



1. Qual das imagens (**B**, **C**, **D** ou **E**) melhor representa a figura **A**, para estampar as camisas? Justifique.

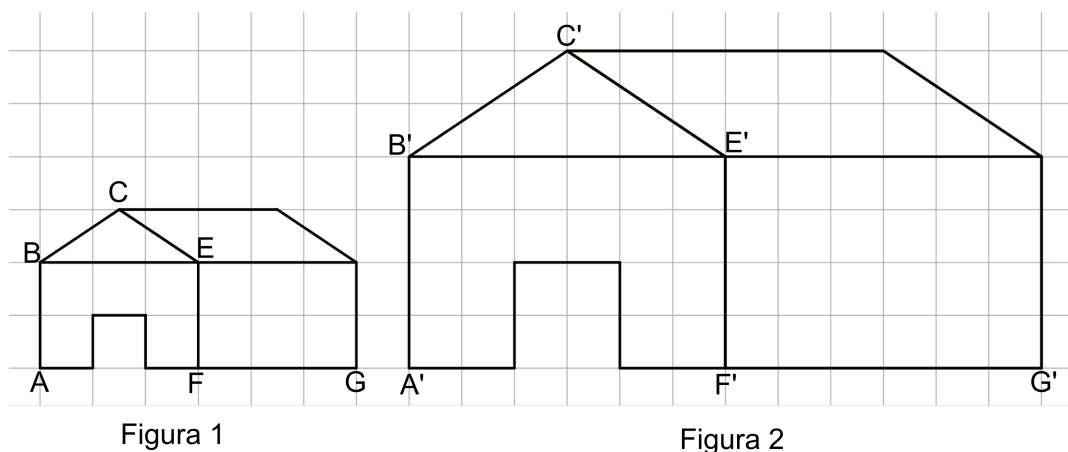
Neste caso, o objetivo da atividade foi utilizar uma situação do cotidiano do aluno para relacionar a ideia de “mesma forma” com o conceito de semelhança.

Assim é esperado que os alunos não tenham dificuldade na percepção de que a imagem melhor representa a figura **A** é a figura **E**, justificando a não escolha da figura **B** pelo fato desta ter sido ampliada apenas verticalmente, já a figura **C** foi ampliada horizontalmente, ou seja, essas figuras são distorções da figura **A**.

Dessa forma, deverão concluir que as condições necessárias para se fazer a escolha da figura que melhor representa uma figura admitida como modelo é o fato da figura manter a mesma forma da figura original.

Atividade 2

A Figura 1 foi desenhada na malha quadriculada e a Figura 2 é uma ampliação da Figura 1.



Supondo que os lados de cada quadrado da malha quadriculada seja igual a 1 cm, observe a medida de cada segmento e responda as seguintes perguntas:

1. Qual o valor da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
2. Qual o valor da razão $\frac{\overline{B'E'}}{\overline{BE}}$
3. Qual o valor da razão $\frac{\overline{F'G'}}{\overline{FG}}$
4. Qual o valor da razão entre a altura do triângulo $\triangle B'C'E'$ e a altura do triângulo $\triangle BCE$
5. O que podemos concluir?

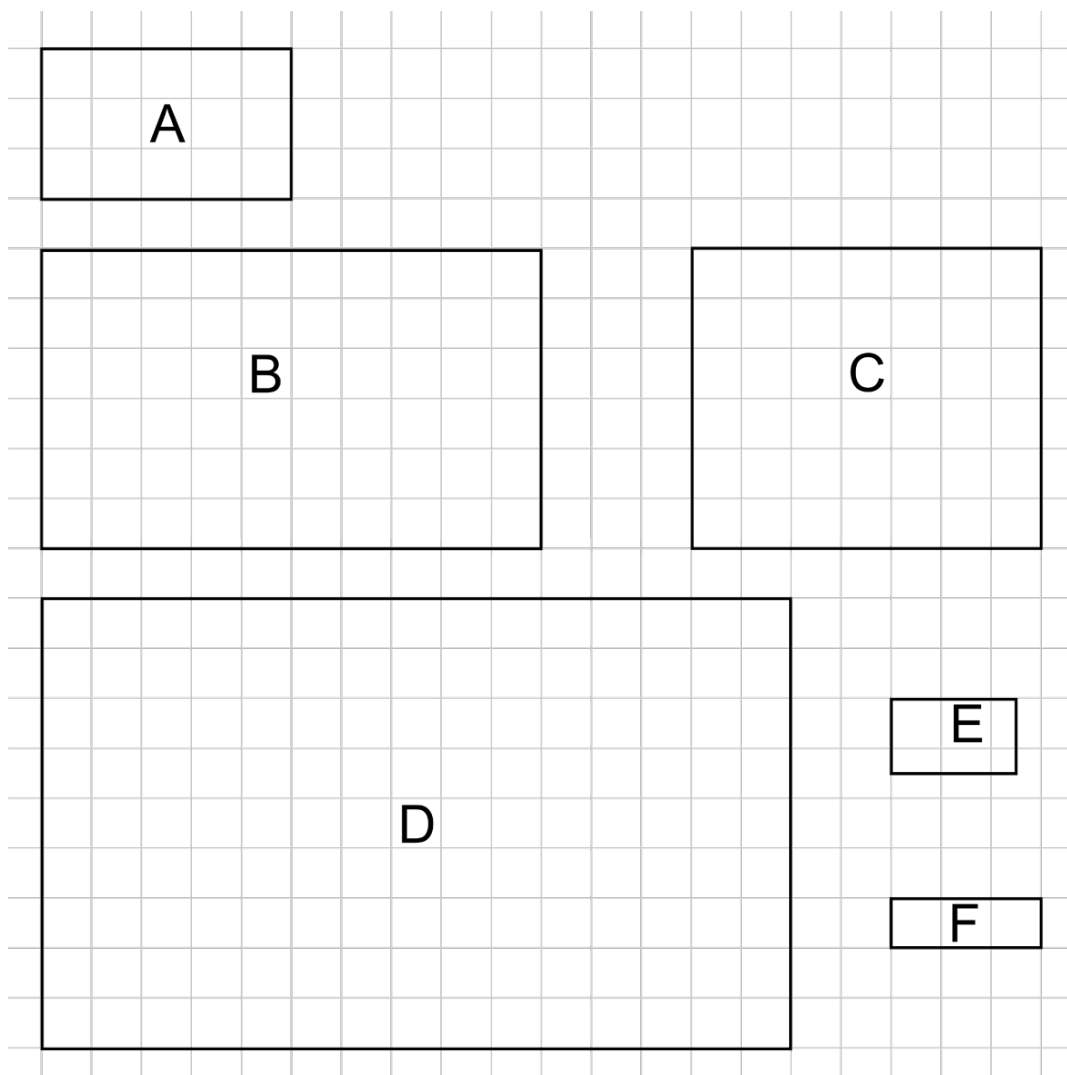
Nesta atividade, o objetivo foi fazer com que os alunos percebessem a proporcionalidades entre os segmentos correspondentes das figuras 1 e 2, e de que modo os alunos poderiam utilizar o valor da razão na resolução de questões.

Deste modo, é esperado que ao serem indagados os alunos não tenham dificuldade e concluir que o valor de todas as razões é igual a

2. E ao criar hipóteses para justificar tal fato, os alunos percebiam que isso aconteceu pelo fato das duas figuras serem semelhantes.

Atividade 3

Observe os retângulos a seguir e responda as perguntas:



1. Quanto medem os lados do retângulo **A**?
Lado Maior: _____ Lado Menor: _____
2. Qual (ais) retângulo (os) representa (am) uma ampliação do retângulo **A**?
3. Qual (ais) retângulo (os) representa (am) uma redução do retângulo **A**?

4. Preencha o quadro com os dados dos retângulos acima e calcule as razões indicadas.

Retângulo	Lado Maior	Lado Menor	$\frac{(LadoMaior)}{(LadoMaiordeA)}$	$\frac{(LadoMenor)}{(LadoMenordeA)}$
B				
C				
D				
E				
F				

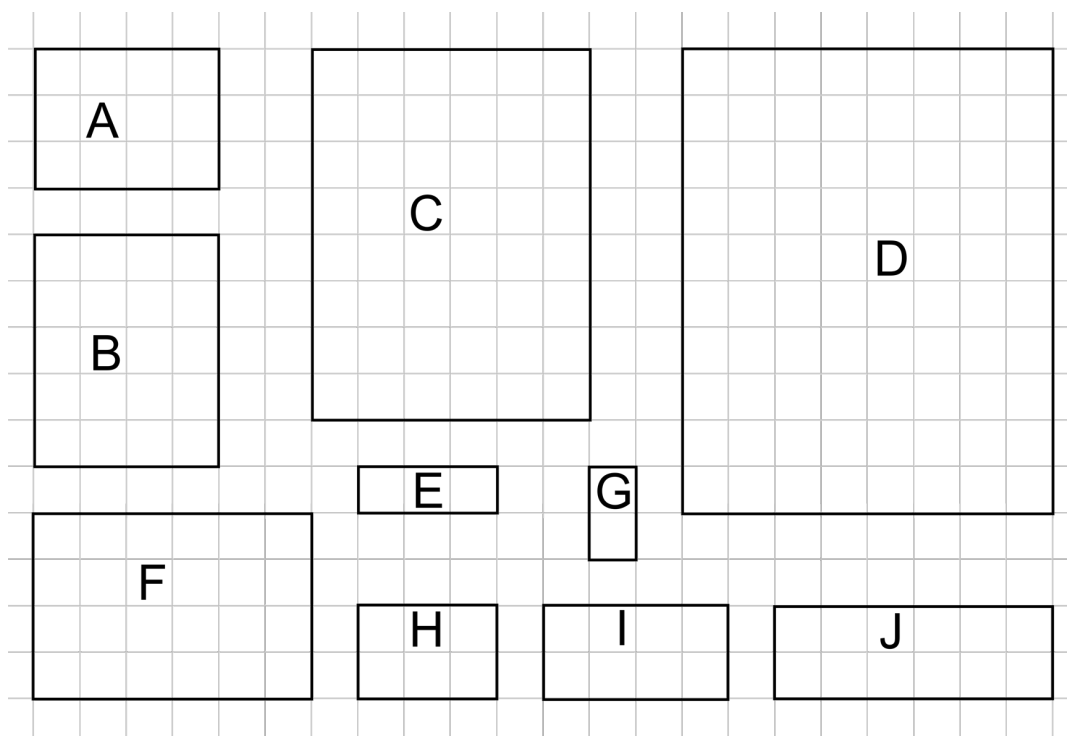
5. O que podemos concluir ao observarmos as razões no quadro acima?

Esta atividade tem o objetivo de conceituar a semelhança entre retângulos, para isso os alunos irão utilizar os conceitos adquiridos nas atividades anteriores para responder quais os retângulos são semelhantes ao retângulos **A**.

Após o preenchimento do quadro, é esperado que os alunos notem a igualdade entre as razões em **A**, **B**, **D** e **E**, sendo a razão maior que 1 nos retângulos **B** e **D** e menor que 1 no retângulo **E**, assim deve-se concluir que esses retângulos são semelhantes ao retângulo **A**, sendo **B** e **D** ampliações e **E**, redução de **A**.

Atividade 4

Dados os seguintes retângulos responda:



1. Quais os pares de retângulos semelhantes?
2. Preencha o quadro a seguir com as dimensões dos retângulos acima e calcule as razões indicadas:

Retângulo	Lado Maior	Lado Menor	$\frac{(\text{Lado Maior})}{(\text{Lado Menor})}$	$\frac{(\text{Lado Menor})}{(\text{Lado Maior})}$
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				

3. A qual conclusão pode-se chegar analisando os dados constantes no quadro acima?

Nesta atividade, buscamos superar a dificuldade identificada por Pereira (2017) na resolução de questões deste tipo. Os alunos apresentaram grande dificuldade com a resolução que utiliza o produto dos meios pelo produto dos extremos ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$), devido os cálculos com números decimais. Com o conceito adquirido nesta atividade, o alunos poderão proceder de uma modo mais simples na resolução deste tipo de questão.

Assim, é esperado que os alunos concluam que as razões $\frac{\text{Lado maior}}{\text{Lado menor}}$ são iguais entre os retângulos semelhantes, o mesmo acontecendo com as razões $\frac{\text{Lado menor}}{\text{Lado maior}}$.

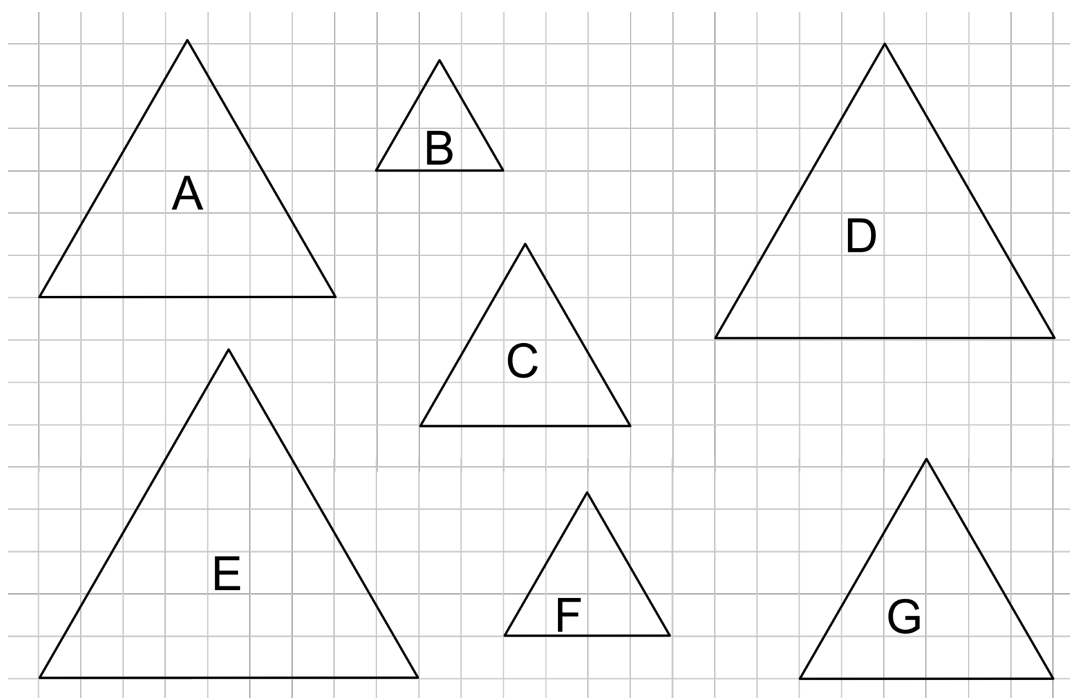
1.1.2 Segunda Parte

A segunda parte da sequência didática contém atividades que envolvem o conceito de semelhança em triângulos. Concordamos com González (1997) quando afirma que o estudo de semelhança entre triângulos tem uma dificuldade não existente no estudo de semelhança entre retângulos: o fato de que, nos retângulos, os ângulos são todos iguais, retos, e em triângulos podem ser todos diferentes.

Para superar está dificuldade, iniciamos a segunda parte da sequência didática com uma atividade que envolve semelhança entre triângulos equiláteros, seguida que uma atividade com triângulos retângulos e, por fim, triângulos quaisquer.

Atividade 5

Observe os seguintes triângulos equiláteros:



1. Meça seus ângulos e preencha o quadro a seguir.

Triângulo	Lado	Ângulo
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

2. Divida os lados do triângulo **A** com os lados correspondentes do triângulo **C**. Repita o mesmo procedimento para outros triângulos. O que podemos concluir?

3. Qual a relação entre os esses triângulos?

Durante toda a sequência didática, é na atividade 5 que mencionamos pela primeira vez a medida dos ângulos, com o intuito de que o aluno volte sua atenção não apenas para a proporcionalidade entre os

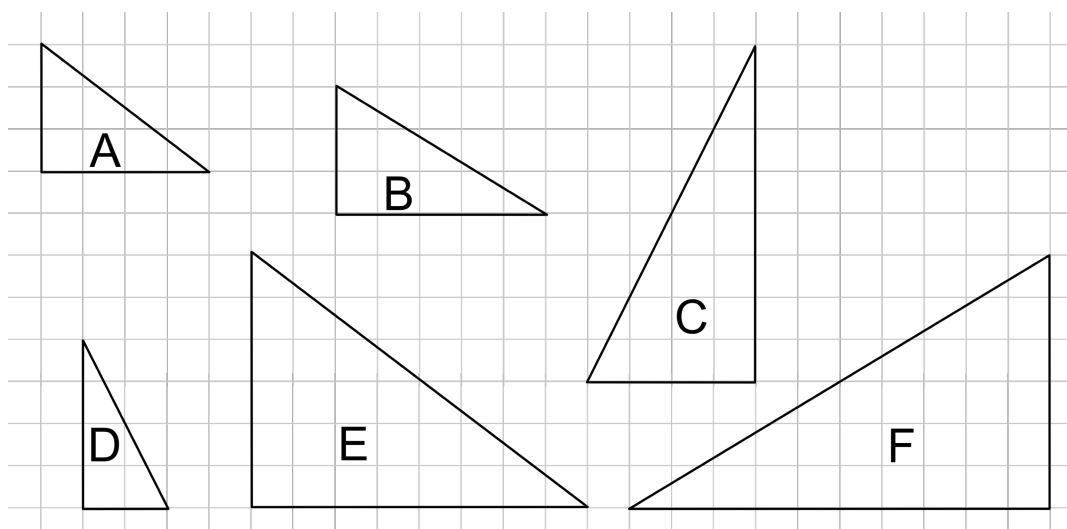
lados, mas também para a congruência entre os ângulos correspondentes de triângulos semelhantes.

É interessante que o professor discuta entre os alunos a semelhança ou não entre quadrados, circunferências, cubos, cilindros, esferas, pirâmides, etc.

Com essa atividade é esperado que os alunos percebam que todos os triângulos contidos na atividade são semelhantes entre si e que tal semelhança se dá pela congruência entre os ângulos correspondentes, também pela proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Atividade 6

Observe os triângulos retângulos a seguir:



1. Os triângulos são todos semelhantes entre si?
2. Preencha o quadro abaixo com os dados dos triângulos acima e calcule as razões indicadas:

Triângulos	Ângulo Maior	Ângulo Menor	Cateto Maior	Cateto Menor	$\frac{(CatetoMaior)}{(CatetoMenor)}$
A					
B					
C					
D					
E					
F					

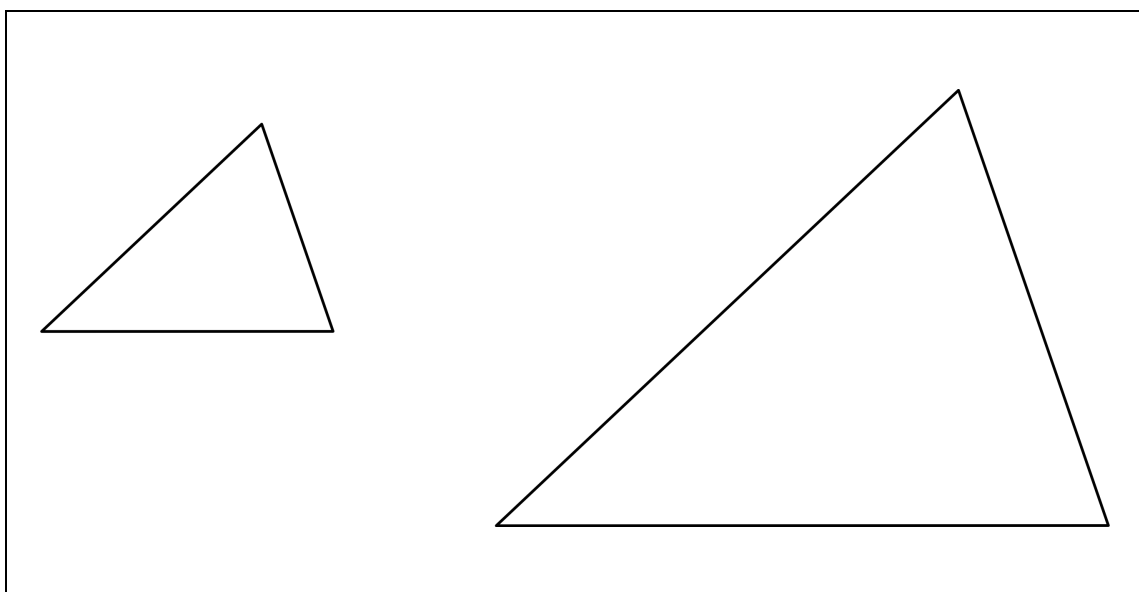
3. A qual conclusão pode-se chegar analisando os dados constantes no quadro acima?

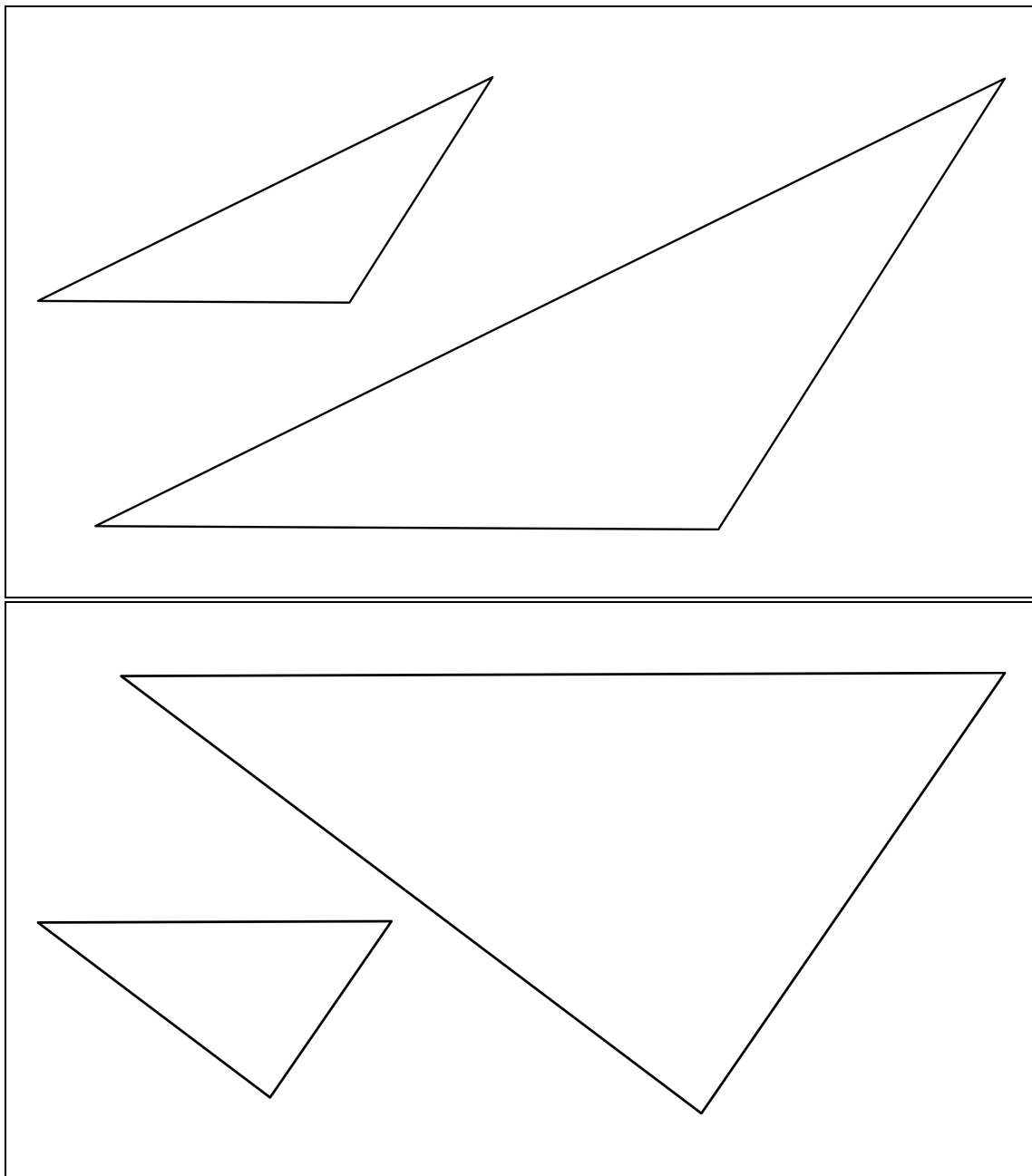
Assim como na atividade 4, nesta atividade buscamos municiar os alunos com uma importante ferramenta para a resolução de questões envolvendo semelhança de figuras semelhantes.

Neste sentido, é esperado que os alunos percebam a igualdade entres as razões $\frac{Cateto\ maior}{Cateto\ menor}$ dos triângulos retângulos semelhantes e que nesses pares de triângulos semelhantes, além dos ângulos retos, os outros ângulos também são congruentes.

Atividade 7

Dados os pares de triângulos semelhantes:





1. Compare seus ângulos fazendo sobreposição das figuras. O que você observa?
2. Qual a razão de semelhança entre os triângulos?
3. Quais são as condições para que dois triângulos sejam semelhantes?

A última atividade da sequência didática tem o objetivo de fazer com que os alunos identifiquem as condições que garantam a semelhança entre triângulos.

Assim, é esperado que, ao sobrepor os triângulos, os alunos concluam que os ângulos correspondentes são congruentes e posteriormente também concluirão que as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Após a aplicação da sequência didática é esperado que os alunos, de posse dos conceitos trabalhados em cada atividade, tenham um desempenho acima da média na resolução de questões referentes ao tema.

A avaliação que propomos nesta Sequência Didática tem como finalidade constatar, durante o desenvolvimento das atividades, o progresso dos alunos com relação aos objetivos estabelecidos. Tudo isso ajudará o professor a detectar se em cada atividade, a estratégia e os recursos utilizados foram os mais adequados, caso contrário, realizar os ajustes necessários.

Assim, a avaliação deve ser realizada de três maneiras em momentos diferentes: Diagnóstica ao início, formativa no processo e somativa ao final.

A **avaliação diagnóstica** permitirá indagar sobre os conhecimentos prévios que os estudantes possuem e que são necessários para a construção dos novos conhecimentos. Nesta pesquisa, preferimos assegurar a aprendizagem dos conceitos de razão e proporção, por acreditar que tais conceitos são indispensáveis para o estudo de semelhança de figuras planas. Para tanto, os alunos participaram de uma oficina de razão e proporção ministrada pela própria professora da turma.

Ao final da oficina, foi proposta aos alunos a resolução de questões envolvendo os conceitos de razão e proporção e ainda, questões de semelhança de figuras planas onde eram necessários conhecimentos de razão e proporção para a resolução.

Podemos perceber que os alunos não tiveram problemas para resolver as questões sobre razão e proporção, o mesmo não aconteceu com as questões sobre semelhança de figuras planas. Os alunos não conseguiram utilizar os conhecimentos adquiridos na oficina para resolver tais questões, podemos então comprovar que os conceitos de semelhança

ainda não eram conhecidos pelos alunos.

Por fim, com a realização da oficina e a proposta de resolução de questões específicas, podemos conhecer quais aqueles conhecimentos que os alunos possuem para a construção de novos conhecimentos e ainda, com base nas suas deficiências, orientar as atividades de modo a superá-las.

Com a **avaliação formativa** pretendemos dar seguimento de forma constante e sistemática a todo o processo de aprendizagem dos alunos. Nesta etapa de avaliação, sugerimos que o professor atenda as demandas de cada grupo de trabalho corrigindo informações e procedimentos equivocados durante a realização de cada atividade.

Para a realização desta etapa de avaliação podemos destacar os seguintes aspectos: Compreensão e fixação dos novos conceitos; habilidades matemáticas; destreza na utilização de instrumentos geométricos; reconhecimento por parte dos alunos da importância do estudo do tema para sua vida cotidiana e capacidade de trabalho individual e coletivo.

A percepção destes aspectos podem ser feitas por meio dos diálogos do professor com os grupos durante a realização das atividades e ainda de posse das soluções apresentadas pelos alunos na conclusão de cada atividade.

Ao fim da aplicação das atividades, é conveniente reservar um tempo para comprovar o que os alunos aprenderam em relação aos objetivos previstos. Para a realização da **avaliação somativa**, propomos a resolução de questões de um teste (anexo ??, página ??) com questões relacionadas à situações concretas, onde podemos avaliar a capacidade de interpretação, a correta aplicação dos conceitos de semelhança de figuras planas, assim como raciocinar logicamente as distintas formas de resolução.

Essas etapas de avaliação foram realizadas nesta pesquisa durante e após a aplicação da Sequência Didática proposta e serão melhor esclarecidas nas seções posteriores.

Tópicos de Semelhança

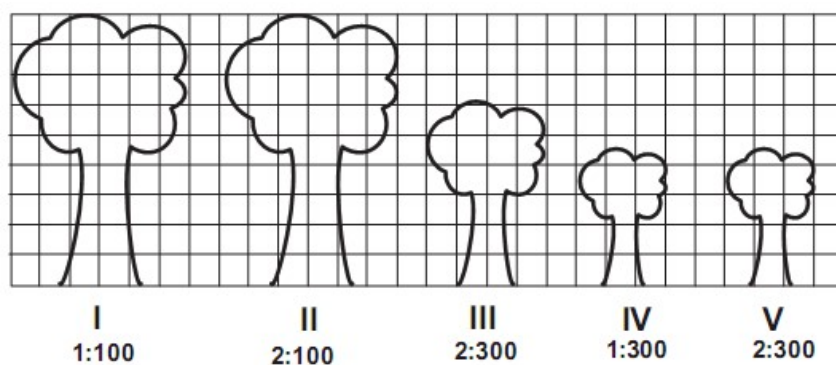
A semelhança entre figuras planas constitui uma ferramenta importante em muitas áreas, como na Engenharia e Arquitetura por exemplo, na ampliação e redução de plantas mapas, maquetes. Neste processo é fundamental a precisão nas formas idênticas entre duas figuras, obedecendo à mesma proporção entre suas dimensões.

A Semelhança de Triângulos também é um conceito geométrico muito usado na Matemática, que nos permite calcular, através da proporcionalidade, distâncias inacessíveis ao ser humano. Dizemos, em nosso cotidiano, que duas pessoas ou dois objetos são semelhantes quando estes são parecidos. Na matemática, este conceito é bem mais específico, designando apenas figuras que tenham a mesma forma, podendo ter o mesmo tamanho. Ampliar ou reduzir uma figura são métodos de se obter outra figura semelhante à primeira, pois apenas mudamos seu tamanho e não sua forma.

O conceito geométrico de semelhança está presente em diversas situações do cotidiano.



Podemos perceber a semelhança em qualquer tipo de ampliação ou redução que cometemos, como fotos, mapas, documentos. Miniaturas de carros, de bonecos ou de qualquer objeto também podem respeitar o conceito de semelhança. Até mesmo as maquetes podem ser consideradas semelhantes aos ambientes reais, contanto que ambos possuam os mesmos parâmetros de formatos.



As telas de televisão são outros exemplos de semelhança, pois, mesmo com diferentes polegadas, a maioria delas possui o mesmo formato, o que permite que transmitam a mesma imagem. Também com a noção de semelhança, podemos entender por que os filmes que passam nas telas dos cinemas não possuem as mesmas imagens quando são passados em uma televisão. Isso acontece visto que as telas de cinemas não

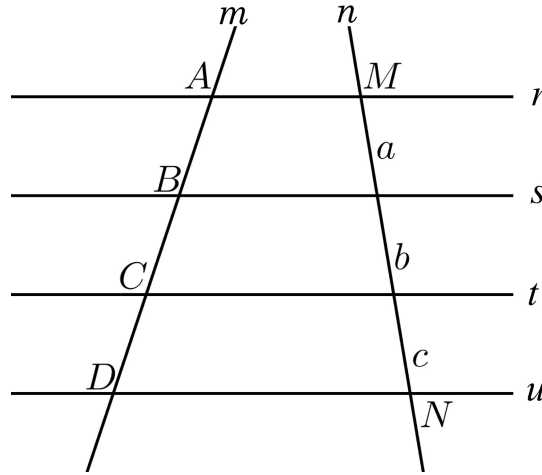
possuem o mesmo formato das telas das televisões, ou seja, elas não são semelhantes. Com esse conhecimento algumas situações foram facilitadas ao ser humano e é a isso que se dá a importância da semelhança de figuras planas.

Antes de iniciarmos com os conceitos de semelhança, alguns teoremas sobre retas paralelas se fazem necessário de modo a utilizarmos esses resultados em demonstrações posteriores. Os teoremas e demonstrações aqui apresentados foram adaptados de Barbosa (1997), Quintella (sd), Brandão (sd), Rezende e Queiroz (2008) e Neto (1982).

Vale ressaltar que a opção por inserirmos neste momento tais Teoremas e suas devidas demonstrações se devem ao fato de comungarmos com as ideias de Pais e Freitas (1999) sobre a importância do método dedutivo para o ensino de matemática, mesmo que a sequência didática aqui proposta não se volte para este método, acreditamos que o conhecimento dessas demonstrações sejam de fundamental importância para o professor, afinal, segundo Lorenzato (1995) uma das dificuldades do ensino de geometria é a falta de conhecimentos específicos dos conceitos geométricos pelos próprios professores.

2.1 SOBRE RETAS PARALELAS

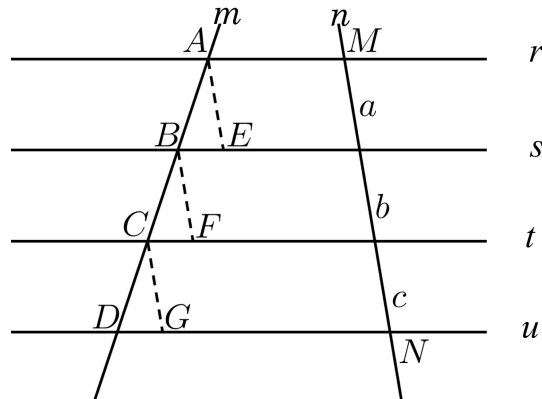
Teorema 2.1. *Se um feixe de paralelas divide uma transversal em partes iguais, dividirá também qualquer outra transversal em partes iguais.*



Sejam as paralelas r, s, t, u e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, então $a = b = c$.

Demonstração:

Tracemos segmentos paralelos à reta n que passem pelos pontos A, B e C , respectivamente, com indicado na figura a seguir

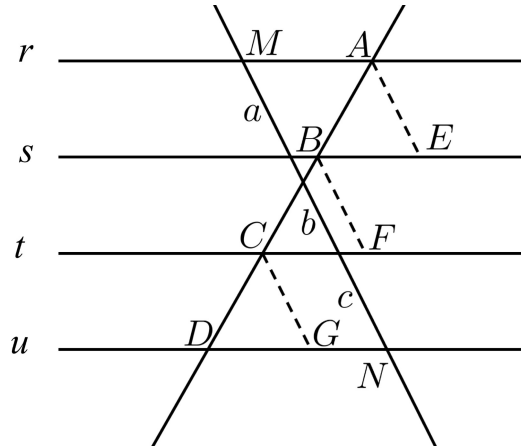


Consideremos às seguintes medidas dos segmentos de reta:

$$a = \overline{AE}, b = \overline{BF} \text{ e } c = \overline{CG}.$$

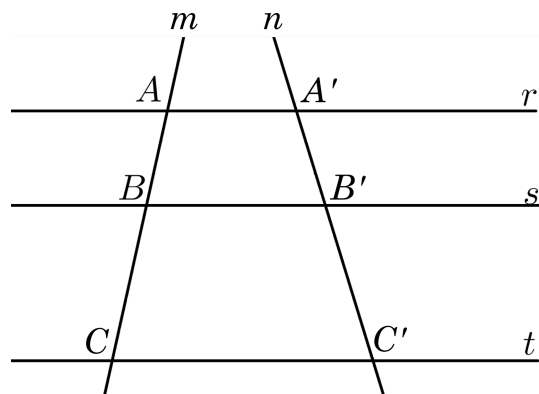
Agora basta provar que os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ têm a mesma medida, ou seja, são congruentes. A congruência destes segmentos resulta imediatamente da congruência dos triângulos $\triangle ABE$, $\triangle BCF$ e $\triangle CDG$, pois, por construção e por hipótese, possuem um lado igual e ângulos correspondentes congruentes. ■

O raciocínio é o mesmo para o caso de retas concorrentes representados da figura a seguir.



Teorema 2.2 (Teorema de Tales). *Um feixe de retas paralelas divide duas transversais quaisquer em segmentos correspondentes proporcionais.*

Primeiramente consideremos um feixe de três retas paralelas r , s e t e duas transversais m e n .

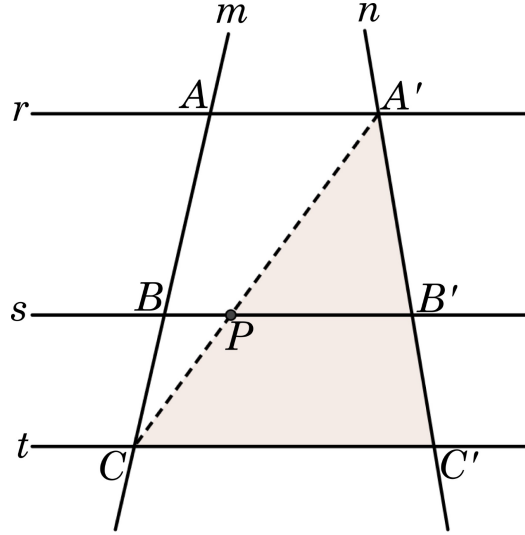


Teremos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Demonstração:

Podemos supor que B está entre A e C e B' está entre A' e C' como indicado na figura a seguir.



A reta $A'C$ corta a reta s no ponto P . Nessas condições, temos que $\triangle A'PB'$ é semelhante a $\triangle A'CC'$, donde $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$ e também $\triangle CPB$ é semelhante a $\triangle CA'A$, donde $\frac{\overline{A'C}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Com isso temos $\frac{\overline{A'C} - \overline{A'P}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{A'C'} - \overline{A'B'}}{\overline{A'B'}}$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \quad (2.1)$$

e também $\frac{\overline{A'C} - \overline{PC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{BC}}{\overline{BC}}$

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad (2.2)$$

Comparando (3.1) e (3.2), vem $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$. Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

■

Observação 2.1. *A proporcionalidade existe, ainda entre os segmentos totais das transversais, compreendidos em as paralelas extremas, e dois correspondentes quaisquer.*

Recíproca 2.3. *Se um feixe dividir duas transversais em parte proporcionais, as retas do feixe são paralelas.*

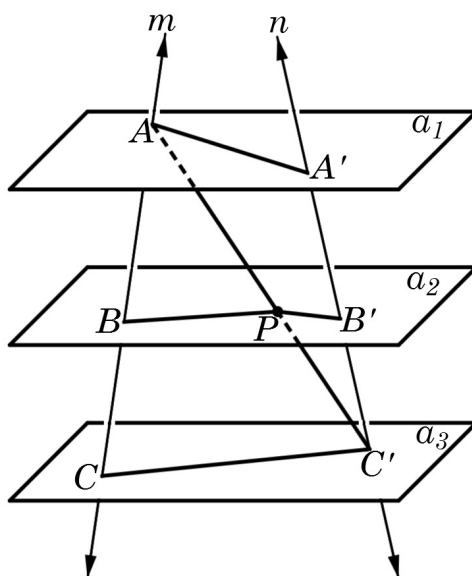
Apesar deste trabalho se referir a semelhança de figuras planas, apresentamos a seguir o teorema de Tales no espaço.

Teorema 2.4 (Teorema de Tales no espaço). *Dados três planos α_1 , α_2 e α_3 , paralelos dois a dois, furados por duas retas (não necessariamente coplanares) m e n , nos pontos A , B , C e A' , B' , C' , respectivamente. Os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais, isto é,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Demonstração:

Observemos a figura a seguir que a reta AC' encontra α_2 em P . Para o triângulo $\triangle AA'C'$ temos (utilizando o teorema de Tales no plano)



$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{PC'}} \quad (2.3)$$

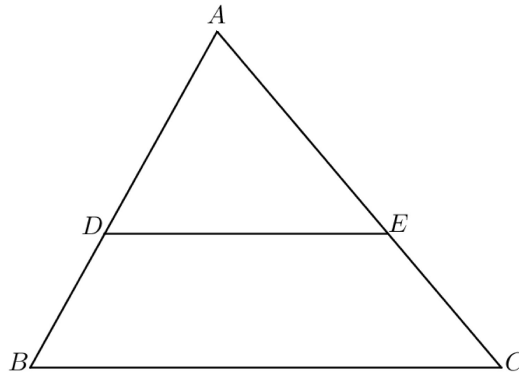
e para o triângulo $\triangle ACC'$ temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC'}} \quad (2.4)$$

Assim, dividindo (3.3) por (3.4):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Teorema 2.5 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em partes proporcionais.*

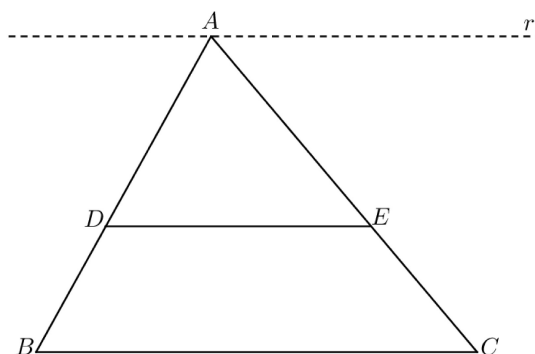


Dado o triângulo $\triangle ABC$ e $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$, temos que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

Demonstração:

Ao traçarmos uma reta r paralela ao segmento $\overline{BC}$ passando pelo vértice A , as três paralelas r , $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ permitem concluir, em virtude da propriedade do feixe de paralelas que:



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

■

Recíproca 2.6. *A reta que divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais é paralela ao terceiro lado.*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

Demonstração:

Realmente, se pelo ponto D traçarmos uma paralela a $\overline{BC}$, os lados ficarão divididos em partes proporcionais em virtude do teorema direto. Como, sobre o lado $\overline{AC}$, existe um único ponto que o divide numa razão dada, conclui-se que a reta traçada confundir-se-a com $\overline{DE}$. ■

Observação 2.2. *A proporção pode ser formada com os lados inteiros e duas partes correspondentes quaisquer, pois, se aplicarmos à última proporção a propriedade da soma dos dois primeiros e dois últimos termos, resulta:*

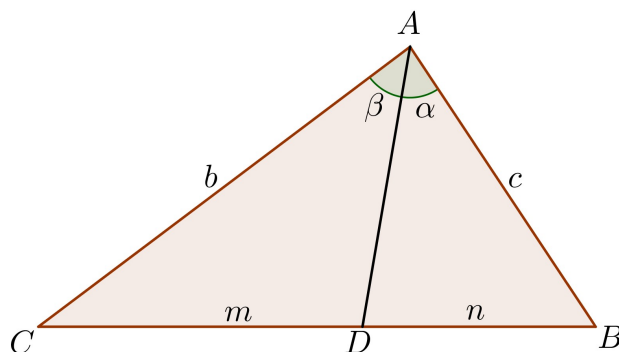
$$\frac{(\overline{AD} + \overline{DB})}{\overline{DB}} = \frac{(\overline{AE} + \overline{EC})}{\overline{EC}}$$

Ou

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

Uma aplicação importante do Teorema Fundamental da Proporcionalidade é o Teorema da Bissetriz.

Teorema 2.7. *A bissetriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos aditivos proporcionais aos dois outros lados.*



$$\alpha \cong \beta \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Demonstração:

Prolonguemos o segmento $\overline{CA}$ e tracemos pelo vértice B , o segmento $\overline{BE}$ paralelo à bissetriz $\overline{AD}$. Forma-se com isso o triângulo $\triangle BCE$, onde $\overline{AD}$ é paralelo ao lado $\overline{BE}$. Logo, podemos concluir que:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{\overline{AE}} \quad (2.5)$$



Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong \theta && \text{(alternos internos)} \\ \beta &\cong \delta && \text{(correspondentes)} \\ \alpha &\cong \beta && \text{(hipótese)} \end{aligned}$$

De onde resulta:

$$\theta \cong \delta$$

Temos que o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles, e o lado $\overline{AE}$ é igual a c . Substituindo em (3.5), temos:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$



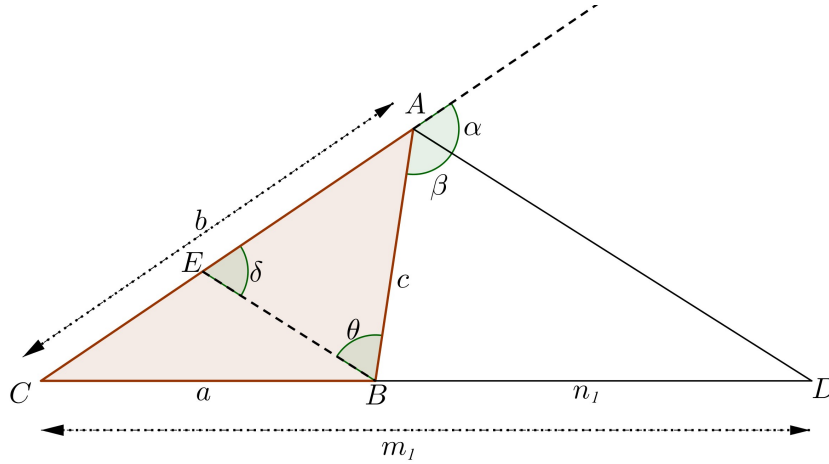
Teorema 2.8. *A bissetriz do ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto, exteriormente, em dois segmentos subtrativos, proporcionais aos dois outros lados do triângulo.*

$$\alpha \cong \beta \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Demonstração:

Tracemos pelo vértice B , o segmento $\overline{BE}$ paralelo à bissetriz $\overline{AD}$. Considerando o triângulo $\triangle ACD$, podemos concluir, do teorema (3.5), que:

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{AE} \quad (2.6)$$



Por outro lado, temos:

$$\alpha \cong \delta \quad (\text{correspondentes})$$

$$\beta \cong \theta \quad (\text{alternos internos})$$

$$\alpha \cong \beta \quad (\text{hipótese})$$

Resulta:

$$\theta \cong \delta$$

Temos que o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles, e o lado $\overline{AE}$ é igual a c . Substituindo em (3.6), temos:

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{c}$$

Teorema 2.9. *As bissetrizes interna e externa, traçadas do mesmo vértice de um triângulo, dividem o lado oposto harmonicamente.*

Demonstração:

Dos teoremas (3.7) e (3.8), podemos escrever, considerando as bissetrizes interna e externa traçadas do mesmo vértice A que:

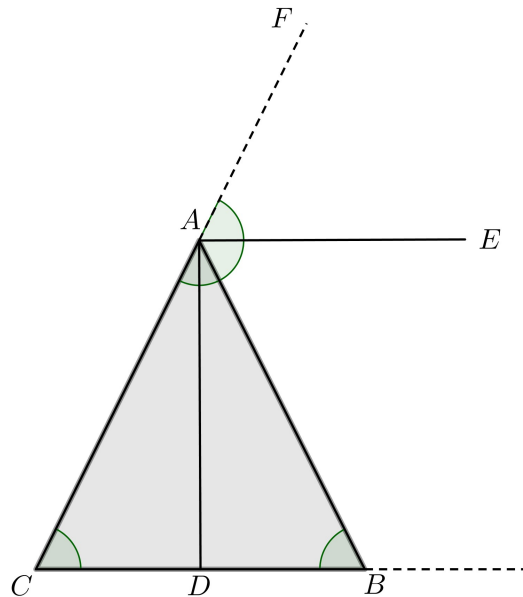
$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{c}$$

e

$$\frac{m_1}{b} = \frac{n_1}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{b}{c}$$

Resulta, das duas igualdades, a proporção:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$$



Observação 2.3. Consideremos o triângulo isósceles $\triangle ABC$ e teremos a bissetriz externa $\overline{AE}$. O ângulo externo $\widehat{FAB}$ é igual à soma dos ângulos internos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

Como estes são iguais por hipótese, resulta:

$$\widehat{FAB} \cong 2\widehat{B}$$

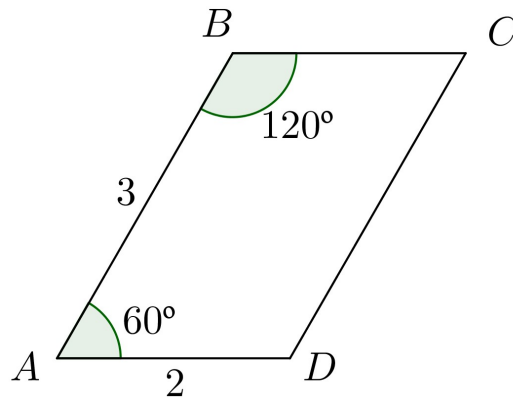
Logo, obteremos, tomando as metades:

$$\widehat{EAB} \cong \widehat{B}$$

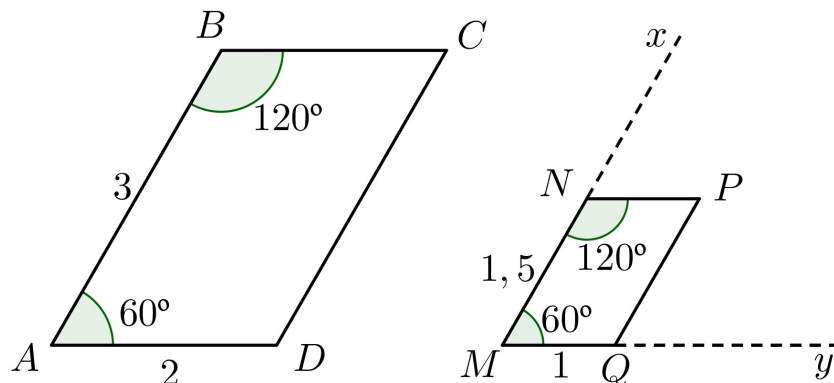
Assim, a bissetriz externa $\overline{AE}$ é paralela ao lado $\overline{BC}$ e não intercepta o prolongamento do mesmo lado.

2.2 POLÍGONOS SEMELHANTES

Consideremos o paralelogramo $ABCD$, cujos lados têm, respectivamente, 2 e 3 centímetros e os ângulos, 60° e 120° .



Tracemos o ângulo $\widehat{XMY}$ de 60° , e, a partir do vértice M , tomemos os segmentos $\overline{MQ}$ e $\overline{MN}$, respectivamente iguais às metades dos lados do paralelogramo $ABCD$; finalmente completamos o paralelogramo $MNPQ$. Obtemos então um quadrilátero que tem a mesma forma e as mesmas propriedades do primeiro e que difere dele apenas por suas dimensões.



Os dois polígonos são denominados semelhantes. Para indicar a semelhança usaremos o símbolo $\sim$.

Os polígonos semelhantes são caracterizados por satisfazerem a dois grupos de condições:

- Os ângulos são respectivamente iguais.

No exemplo da figura acima temos $\widehat{M} \cong \widehat{A}$, $\widehat{N} \cong \widehat{B}$, $\widehat{P} \cong \widehat{C}$ e $\widehat{Q} \cong \widehat{D}$.

- Os lados são proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$$

Nos polígonos semelhantes, os ângulos iguais são chamados de homólogos, os vértices dos ângulos iguais denominam-se vértices homólogos e os lados que unem dois vértices homólogos denominam-se lados homólogos. Da mesma forma duas diagonais homólogas são as que unem vértices homólogos. Daí a definição:

Definição: *Dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Como vimos, os lados homólogos dos polígonos semelhantes são proporcionais, isto é, a razão entre dois lados homólogos é constante. Esta razão constante é denominada **razão de semelhança**.

Observação 2.4. *Quando reduzimos uma figura, a constante de proporcionalidade é sempre menor do que um, em relação à figura original, já quando a ampliamos a constante de proporcionalidade é sempre maior do que um.*

Proposição 2.10. *Se a razão de semelhança entre dois triângulos for k , a razão entre suas alturas, medianas, perímetros, dois elementos lineares e homólogos, os raios das circunferências inscritas e os raios das circunferências circunscritas também serão iguais a k .*

É importante ressaltar a diferença entre semelhança e outro conceito matemático que pode ser confundido com a mesma, a congruência. Diz-se que duas figuras são congruentes quando, além da mesma forma, ambas tenham o mesmo tamanho. Portanto, só podemos dizer que duas figuras são congruentes quando podemos transpor uma sobre a outra de tal forma que suas dimensões coincidam. Apesar disso, a congruência é um caso particular de semelhança.

Em figuras congruentes, a constante de proporcionalidade entre os lados homólogos será sempre um.

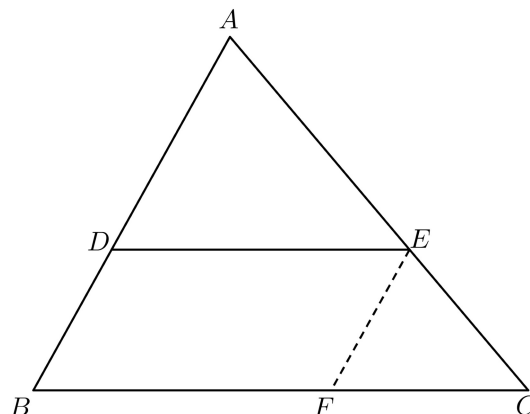
2.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Teorema 2.11 (Lei de Tales). *A paralela traçada a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$ e $\overline{DE}$ paralelo a BC , temos que o triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo $\triangle ADE$.

Demonstração:

Devemos provar que os dois triângulos satisfazem às duas condições da definição de polígonos semelhantes.



1. Os ângulos são respectivamente iguais.

Realmente, o ângulo A é comum dos dois triângulos; C e D são correspondentes assim como os ângulos B e E .

2. Os lados homólogos são proporcionais.

Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \quad (2.7)$$

Traçando $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AC}$, concluiremos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$$

ou, substituindo $\overline{CF}$ por seu igual $\overline{DE}$, como lados opostos do paralelogramo $CDEF$:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (2.8)$$

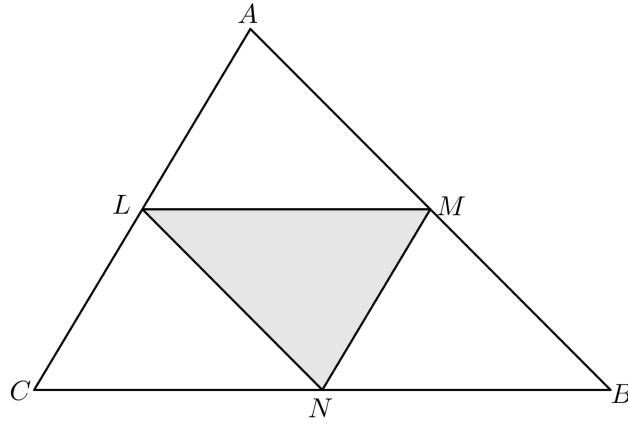
Comparando as igualdades (3.7) e (3.8), concluímos que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$



O Teorema de Tales demonstra a existência dos triângulos semelhantes e é de grande aplicação. A seguir iremos estudar as propriedades que a Semelhança de Triângulos possui, as quais nos auxiliam expressivamente na resolução de exercícios sobre o conteúdo.

Proposição 2.12. *Em qualquer triângulo, unindo-se através de segmentos de reta os três pontos médios de seus lados, obtemos outro triângulo semelhante ao primeiro e com perímetro igual à metade do perímetro do primeiro.*

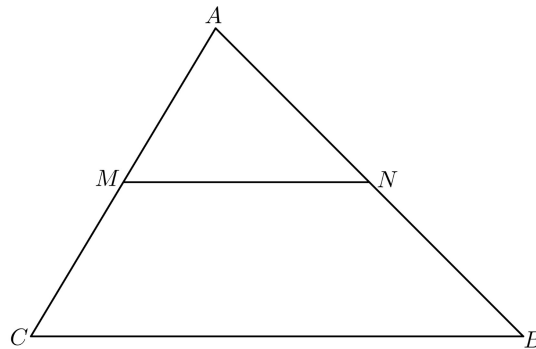


Na figura, L , M e N são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Portanto: $\triangle LMN \triangle ABC$ e

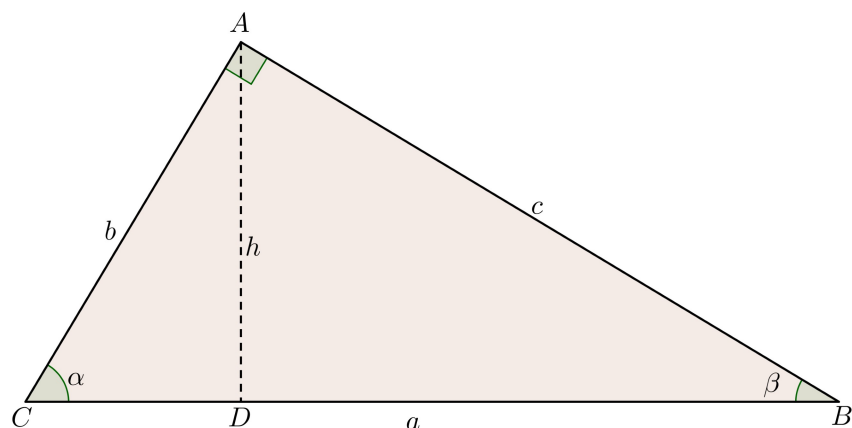
$$2P_{LMN} = \frac{1}{2}2P_{ABC}$$

Proposição 2.13. *Em qualquer triângulo, unindo-se através de um segmento de reta os pontos médios de dois lados, obtemos um segmento paralelo ao terceiro lado e de medida igual à metade da medida do terceiro lado.*



Na figura, M e N são, respectivamente, pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Logo $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

Proposição 2.14. *Em um triângulo retângulo qualquer, a altura relativa à hipotenusa divide o mesmo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes entre si e em relação ao triângulo original.*

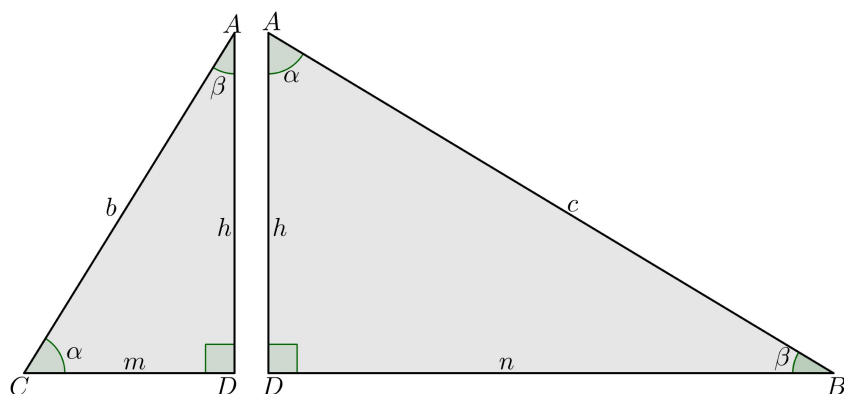


Já que os três triângulos possuem ângulos congruentes, pelo caso AA (ângulo, ângulo) de Semelhança de Triângulos, percebemos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

Corolário 2.15. *Em um triângulo retângulo,*

- *a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos em que é dividida a hipotenusa;*
- *cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e o segmento da hipotenusa que é a projeção deste cateto sobre ela e*
- *o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.*



Casos de semelhança

Não é necessário conferir se todos os ângulos de dois triângulos são congruentes e se todos os lados dos mesmos são proporcionais para saber se ambos são semelhantes, basta que eles apresentem algumas das condições necessárias.

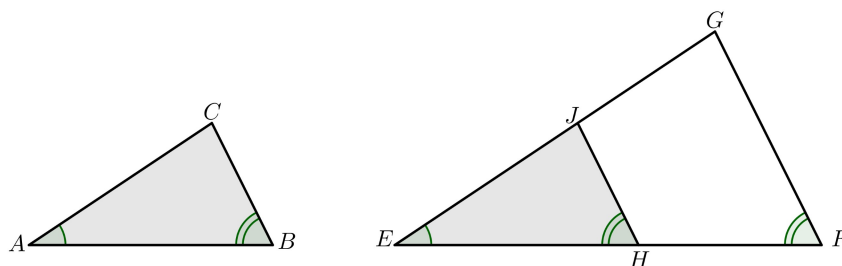
Estudaremos, a seguir, três casos que facilitam determinar quando triângulos são semelhantes.

O seguinte teorema afirma que se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, os dois triângulos são semelhantes.

Teorema 2.16. *Caso AA* Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a igualdade dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ acarreta na igualdade dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{G}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tomemos na semirreta $\overrightarrow{EF}$ o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$.



Tracemos um segmento paralelo $\overline{FJ}$ pelo ponto H . Esta corta a semirreta $\overrightarrow{EG}$ num ponto J , formando um triângulo $\triangle EHJ$, que pelo fato de $\hat{A} \cong \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EH}$ e $\hat{B} \cong \hat{F} \cong \widehat{EHJ}$, é congruente ao triângulo $\triangle ABC$.

Do teorema (3.5) temos que $\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}$. Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$ então temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

De maneira análoga demonstra-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$ ■

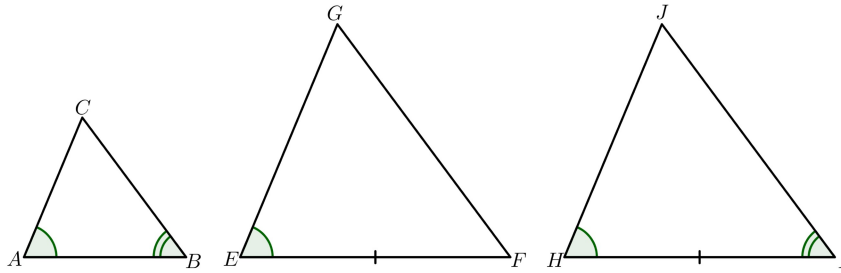
A partir deste caso de semelhança, podemos perceber que todos os triângulos retângulos e isósceles são semelhantes, já que sempre terão os ângulos congruentes de 90° , 45° e 45° .

O teorema a seguir afirma que se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.

Teorema 2.17 (Caso LAL). *Se em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração:

Construindo um triângulo $\triangle HIJ$ de modo que $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} \cong \hat{A}$ e $\hat{I} \cong \hat{B}$



De acordo com o teorema (3.16), os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HIJ$ são semelhantes. Temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}} \quad (2.9)$$

Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e a igualdade (3.9) implicam que:

$$\overline{HJ} = \overline{EG}$$

Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\hat{H} \cong \hat{A} \cong \hat{E}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos $\triangle EFG$ e $\triangle HIJ$ são congruentes. Como já sabíamos que $\triangle ABC$ e $\triangle HIJ$ eram semelhantes, podemos concluir que $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são semelhantes. ■

O teorema a seguir afirma que se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.

Teorema 2.18 (Caso LLL). *Se em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GC}}$$

então os dois triângulos são semelhantes.

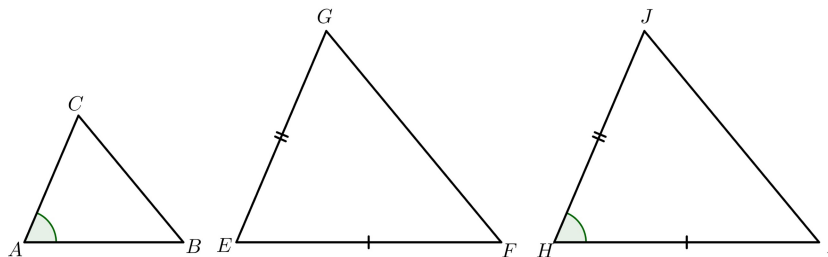
Demonstração:

Vamos construir o triângulo $\triangle HIJ$ de modo que $\hat{H} \cong \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$.

Segue-se então da hipótese que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$$

Portanto, de acordo com o teorema (3.17), os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HIJ$ são semelhantes.



Também decorre que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{IJ}} \quad (2.10)$$

Da hipótese do teorema e da igualdade (3.10) segue que $\overline{IJ} = \overline{FG}$. Como já tínhamos por construção $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{FG}$, então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, obtemos que $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes. Como $\triangle HIJ$ e $\triangle ABC$ são semelhantes, concluimos que $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ também são semelhantes. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, Ademilton Gleison de. **A ideia de semelhança nas associações entre entidades da geometria, em livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental.**

Dissertação de mestrado do programa de pós-graduação em educação matemática e tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. 2011.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007

ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lúcia. **A geometria no ensino fundamental: concepções de professores e de alunos.** 2000.

ANTUNES, Celso. **Vygotsky, quem diria?!: em minha sala de aula.** Fascículo 12 - Petrópolis-RJ: Vozes, 2015.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas.** Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana.** Rio de Janeiro - RJ: SBM, 1997.

BENTO, Humberto Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software: Geogebra.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática - PUC/Minas. Belo Horizonte, 2010.

BRANDÃO, Marcius. **Matemática conceituação moderna**. São Paulo - SP: Editora do Brasil, sd.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas**. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução aos estudos das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. Dissertação de Mestrado do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas - UFPA. Belém - PA, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CANDEIAS, Nuno; PONTE, João Pedro da. **Aprender geometria utilizando Um ambiente de geometria dinâmica**. 2011.

CARVALHO, Juliana; STORTI, Laís; CALIXT, Rejiane; MARQUES, Renata. **Uma sequência didática para o aprendizado de semelhança de triângulos**. 34º Congresso Nacional de Matemática Computacional - CNMAC 2012.

CRECENTI, Eliane Portaone. **Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a áreas e seu ensino**. Tese

(Doutorado). São Carlos: UFSCar, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único**. São Paulo: Ática, 2008.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Trad. J. B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

FERREIRA, Idelmar G.; FEITOZA, Luiz A. A.; OLIVEIRA, Francisco E. F.; SOUSA, Ana C. G.. **Diagnóstico do conhecimento geométrico de alunos do ensino médio como ação do PIBID**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2013.

FILHO, Florisval Santana; Souza, Denize da Silva. **Práticas metodológicas no ensino de geometria: um olhar a partir do entendimento dos professores de matemática de Aracaju - SE**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática - Curitiba. 2013.

FIOREZE, Leandra Anversa; BARONE, Dante; BASSO, Marcus; ISAIA, Sílvia. **Análise da construção dos conceitos de proporcionalidade com a utilização do software geoplano virtual**. 2013.

FONSECA, Laerte. **Funções trigonométricas: elementos “de” e “para” uma Engenharia Didática**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

FREITAS, Ranielle; VIANA, Odaléa. **Organizadores prévios para o ensino de semelhança de triângulos: uma experiência de estágio**. V Semana de Matemática do Pontal / I Colóquio de Análise

Matemática do Pontal. 2014.

FRIEDLANDER, Alex; LAPPAN, Glenda. **Semelhança: pesquisas nos níveis escolares médios.** Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994.

GOÊS, M. C. R. de. A abordagem microgenética da matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20. Campinas - SP: Cadernos Cedes, 2000.

GOMES, Antônio do Nascimento; SALVADOR, José Antonio. **Proposta de atividades para o estudo de semelhança de figuras planas na 8ª série do ensino fundamental através da geometria fractal - algumas reflexões.** Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010.

GONZÁLES, Ricardo Luengo. **Proporcionalidad geométrica y semejanza.** Grupo Beta. Sintesis: Madri, 1997.

GUIMARÃES, Y. A. F.; GIORDAN, M. **Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores.** In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, VIII. Anais. Campinas, 2011.

HUBERMAN, M. O ciclo de vida profissional dos professores. In: NÓVOA, A. (Org.). **Vidas de professores.** 2. ed. Porto: Porto, 2000. p.31-61.

IVIC, Ivan. **Lev Semionovich Vygotsky.** Recife-PE: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

LELES, Tabata Chaves Fagundes. **As estratégias didáticas abordadas para o ensino de semelhança de triângulo em alguns livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático, do Ensino Fundamental.** Monografia de Especialização do Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de matemática da UFMG. 2013.

LAMAS, Rita de Cássia Pavani. **Congruência e Semelhança de Triângulos através de Modelos.** 2008.

LOMAS, Fernando Herrero. **Evolução do livro didático em relação ao ensino de semelhanças de triângulos.** Trabalho de conclusão de curso. UFSCar. São Carlos - SP. 2004.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista. Blumenau, n. 1, p. 3–13, 1995.

LUIS, Silviane Rigolon. **Concepção de uma sequência de ensino para o estudo da semelhança: do empírico a o dedutivo.** 2006.

MACHADO, Nilson José. **Semelhança não é mera coincidência.** São Paulo - SP: Scipione, 1994.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática.** In. MACHADO, S. D. A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo - SP: EDUC, 1999, p. 197-208.

MACIEL, Alexsandra Camara; ALMOULOUD, Saddo Ag. **O ensino de semelhança: uma proposta de ensino.** 2007.

MEDEIROS, Antônio Paulo Muccillo de. **Semelhança de triângulos: dos livros do passado à formação continuada de**

professores via EAD. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Severino Sombra. 2008.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de aprendizagem.** São Paulo - SP: EPU, 1999.

MOREIRA, Marco Antônio. e MASINI, E.A.S. **Aprendizagem Significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel.** São Paulo - SP: Centauro, 2006.

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** Campinas - SP: Papirus, 1997.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica na formação de professores de Matemática.** Revista Cocar, v.4, n.7. 2010.

NETO, Aref Antar, **Geometria: 2º grau.** São Paulo - SP: Ed. Moderna, 1982.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópoles - RJ: Vozes, 2013.

PAIS, Luiz Carlos; FREITAS José Luiz Magalhães. **Um Estudo dos Processos de Provas no Ensino e na Aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental.** Boletim de Educação Matemática, Ano 12, n. 13, p. 62 - 70, 1999.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zatetiké - Ano 1 - n 1, 1993.

PEREIRA, Marcella Tatagiba. **Proposta de atividades para a**

construção do Conceito de semelhança de triângulos usando o Software de geometria dinâmica régua e compasso.

Dissertação de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Severino Sombra, Vassouras 2010.

PEREIRA, Marcos F. F. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas.** Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - UEPA, Belém 2017.

PINTO, Élgar Gualdrón; RODRÍGUEZ, Ángel. **Estratégias correctas y errôneas em tareas relacionadas con La semejanza.** Anais do X SEIEM: Huesca, 2006.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede.** São Paulo: FTD, 2000.

QUINTELA, Ary. **Matemática para a terceira série ginasial.** São Paulo - SP: Editora Nacional, sd.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** Campinas, SP: Editora Unicamp, 2008.

SILVA, José Adgerson Victor da. **O uso de programas computacionais como recurso no ensino-aprendizagem da geometria.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba. 2013.

SILVA, Reginado. **Análise de um processo de estudo de semelhança.** Dissertação de Mestrado - NPADC - UFPA. 2007.

SisPAE - **Sistema Paraense de Avaliação Educacional.**

Disponível em

<http://www.vunesp.com.br/reports/RelatorioSISPAE.aspx?c=SEPA1401>.

Acesso em 04 de dezembro de 2015, às 14:30.

SOARES, Luís Havelange. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica.** Dissertação (Mestrado) - UFPB/CE João Pessoa, 2008.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso Passos. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Zetetiké - FE/Unicamp - v. 21, n. 39 - jan/jun 2013.

TOLEDO, Marília Barros de Almeida; TOLEDO, Mauro de Almeida. **Teoria e Prática de Matemática:** Como Dois e Dois. 1. ed. São Paulo: FDT, 2009.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores** / L. S. Vigotsky; organizadores Michael Cole... [et al.]; tradução José Cipolla Neto, Luís Barreto, Solange Afeche. 7ªed. São Paulo - SP: Martins Fontes, 2007.

WAGNER, Eduardo. **Semelhanças, pizzas e chopes.** Revista do Professor de Matemática - RPM - n. 25 - São Paulo, SP.

WERTSCH, J.V. **Vygotsky and the social formation of mind.** Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1985.

WESTBROOK, Robert B.; TEIXEIRA, Anísio. **John Dewey.**

Tradução e organização: José Eustáquio Romão e Verone Lane Rodrigues. Recife - PE: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.**

Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 1998.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.**

Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 2014.

