



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL**

**PRODUTO DA DISSERTAÇÃO**

**JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE  
COMBINATÓRIA**

**LUIZ AMBROZI**

**ORIENTADORA: PROF<sup>a</sup>. DR<sup>a</sup>. ISOLDA GIANNI DE LIMA**

**CAXIAS DO SUL**

**2017**

## APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a):

O presente trabalho propõe uma sequência didática para o conteúdo de Análise Combinatória, que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio. A sequência didática proposta é o produto da dissertação de mestrado profissional intitulada de JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.

A intenção, ao compartilhar esta proposta de ensino, é colaborar com o que vem se caracterizando como uma necessidade na Educação Matemática, em relação ao ensino deste conteúdo, que é comum ter dificuldades para estudantes e, também, para muitos professores.

As atividades que compõem a sequência didática, nomeada de Dinâmica Combinatória, foram aplicadas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, visando à construção do conhecimento, com fundamentação do fazer e compreender (PIAGET, 1978), por interação com jogos de tabuleiro, atividades de raciocínio lógico e estudos orientados.

A estruturação Dinâmica Combinatória contempla o que Zabala (1998) afirma ser o mais favorável para se desenvolver a construção do conhecimento, e contém os itens a seguir:

1. apresentação de uma situação problemática;
2. problemas ou questões;
3. respostas intuitivas ou suposições;
4. fontes de informação;
5. busca de informação;
6. elaboração de conclusões;
7. generalizações;
8. exercícios de memorização;
9. prova ou exame;
10. avaliação.

Com este trabalho, busca-se preencher a necessidade de compreensão dos alunos, por meio do desenvolvimento dos conceitos, numa visão construtivista que, para Zabala (1998), é pessoal de cada ser humano e deve ser incentivado e moderado por alguém que busque o despertar de quem queira aprender. Na construção do conhecimento associada ao fazer e compreender (PIAGET, 1978), quando o aluno interage diretamente com os meios que lhe

favorece a construção dos conceitos, estes acabam se tornando, de certo modo, compreendidos de maneira abrangente, concretizando-os em ação e em pensamento e não apenas em memorização.

A Dinâmica Combinatória é composta de sete etapas, com as quais busca-se explorar desde a problemática histórica até a formalização dos conceitos estudados em sala de aula. O desenvolvimento da sequência integral, também, atividades de avaliação, que servem de orientação para o professor analisar se estão sendo alcançados os objetivos de aprendizagem em cada etapa. Espera-se, com esta proposta, contribuir para uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de Análise Combinatória, propiciando aos alunos a construção do conhecimento e não simplesmente um estudo pautado em memória e reprodução de modelos de resolução de problemas e de exercícios de práticas rotineiras.

## **DINÂMICA COMBINATÓRIA**

A Dinâmica Combinatória está dividida em sete etapas, que buscam contemplar em sua aplicação desde a origem histórica da Análise Combinatória, com problemas que motivaram este estudo, até a formalização e aplicação das técnicas de contagem. A sequência inicia-se na Etapa 0, que traz o contexto histórico e alguns problemas motivadores para o estudo deste conteúdo, servindo também esta etapa para a organização das outras seis.

A Etapa 1 explora o raciocínio lógico, por meio de jogos pré-selecionados, disponíveis na internet, visando identificar e incentivar os alunos para a utilização de estratégias e para a resolução de problemas inspirados nos jogos.

A Etapa 2 contempla a aplicação do Jogo Quadrado, que possui, como uma de suas principais finalidades, desenvolver o conceito da Árvore de Possibilidades, embasando assim o Princípio Fundamental da Contagem, por meio de questionamentos sobre jogadas, a serem simuladas em pensamento, que poderiam ocorrer no jogo. Após os questionários, é proposto que o professor abra um espaço para discussões de dúvidas, e outras atividades extras para os alunos praticarem a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

A Etapa 3 é desenvolvida a partir do Jogo Senha, que visa explorar o conceito das Permutações Simples e dos Arranjos Simples, por meio de questões elaboradas, a partir de possíveis situações do jogo. Também aqui é importante que sejam exploradas outras situações

para os alunos praticarem as correspondentes técnicas, ou como muitos fazem aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

Na Etapa 4, busca-se propiciar a construção da ideia de agrupamento que se distingue apenas pela natureza dos elementos, ou seja, serão exploradas situações em que a ordem dos elementos não provoca diferença no grupo. O Jogo Bicolorido é utilizado para fazer a diferenciação de segmentos de reta que formam as arestas e as diagonais de um polígono. Os alunos buscam compreender aqui qual é o princípio básico para a aplicação da técnica de Combinação Simples na formação de agrupamentos.

A Etapa 5 é proposta com um estudo orientado, em que os alunos, atuando nas suas equipes, dedicam-se a um estudo da formalização dos conceitos e das técnicas de contagem. Os conceitos selecionados pelo professor são sorteados entre os grupos, para a realização do estudo e organização de material e dos componentes para uma apresentação de trabalhos, aberta a questionamentos, para os colegas da turma. Na preparação da apresentação, os alunos selecionam ou elaboram exercícios, para que os colegas possam resolver e discutir a aplicação de cada técnica de contagem.

A Etapa 6, última da Dinâmica Combinatória, busca, por meio do Jogo Trilha Combinatória, de autoria do pesquisador, desafiar os alunos a aplicarem os conceitos que estudaram, jogando e resolvendo os problemas. Esse Jogo pode servir para o professor como instrumento de avaliação da aprendizagem, pois as jogadas implicam solucionar problemas que envolvem as técnicas ou o princípio da contagem, numa trilha com percurso lúdico de desafios e competitividade.

### **Etapa 0 da Dinâmica Combinatória**

No primeiro momento, visa-se fazer uma introdução ao trabalho a ser desenvolvido na Dinâmica Combinatória, com a qual serão explorados os conceitos fundamentais da Análise Combinatória. Com o contexto histórico e as questões desafiadoras, tem-se a intenção de animar e despertar a curiosidade e o interesse dos alunos para participarem, de maneira efetiva, do trabalho que será desenvolvido com eles. Nesse primeiro encontro, acontecem, também: a organização das equipes, a escolha de nomes e instruções sobre o preenchimento do diário de bordo para registros de cada equipe. A Etapa 0 acontece no tempo de uma aula,

com duração prevista de uma hora, tendo o professor o papel de provocador e organizador das ações gerais e iniciais da sequência.

### **0.1 Objetivos:**

- conhecer os pilares que fundamentam a Análise Combinatória por meio de fatos históricos, como estratégia para despertar o interesse pelo estudo;
- resolver alguns desafios lógicos contextualizados, elaborados para sensibilizar sobre a importância do raciocínio, como estratégia de resolução de problemas neste conteúdo.

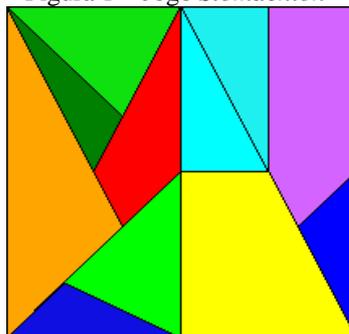
### **0.2 Descrição da Atividade**

#### **0.2.1 História**

Vasquez e Noguti (2010)<sup>1</sup> acreditam que a Análise Combinatória tenha sua origem na Antiguidade, antes mesmo dos registros históricos, e foi, através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Sicília, no século III a.C., que se passou a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. Ele propôs um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como *Stomachion* (Figura 1). Embora não se conheça ao certo o significado dessa palavra, sabe-se que tem a mesma origem da palavra estômago. Não há registros seguros, também, de que, realmente, tenha sido Arquimedes quem inventou o jogo ou se ele apenas explorou o problema proposto, em algum manuscrito mais antigo.

---

<sup>1</sup>VASQUEZ, Cristina Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner. *Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica*. Anais do VIII ENEM, Pernambuco, 2004.

Figura 1 – Jogo *Stomachion*<sup>2</sup>

Fonte: Pinterest (2016).

Problema proposto no jogo: *Saber de quantas formas suas partes menores poderiam formar o mesmo quadrado.*

A resposta, que é 17.152 formas, foi calculada e comprovada em 2004 por **Reviel Netz**, um estudioso deste jogo, que propôs um problema combinatório a um grupo de matemáticos. Netz buscou guiá-los neste estudo e, com auxílio de alguns computadores, conseguiram comprovar a resposta, o que envolveu um tempo de seis semanas de trabalho.<sup>3</sup> Seu trabalho foi publicado no mesmo ano da comprovação da solução do problema, com o título *Towards a Reconstruction of Archimedes*.<sup>4</sup>

Outro problema, segundo Vasquez e Noguti (2010), que envolvia um raciocínio apurado e conceitos de memorização, pode ser encontrado no papiro egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.), conhecido como problema 79, que segue:

“Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete *hekat*<sup>5</sup> de grãos; quantos itens têm ao todo?”

Com a leitura, percebe tratar-se de uma progressão geométrica de razão 7 e, no caso, a resposta é 19.607.

Apesar de problemas de contagem serem encontrados desde o século III a.C., a Teoria Combinatória só surgiu no final do século XVI com a necessidade de se calcular possibilidades em jogos de azar. A Análise Combinatória só seria formalmente escrita em meados do século XVII e início do século XVIII, pelos matemáticos Pascal (1654 e 1665),

<sup>2</sup> Disponível em: <<http://4umi.com/play/stomachion/square.php?show=68&m=s>>. Acesso em: 31 set. 2016.

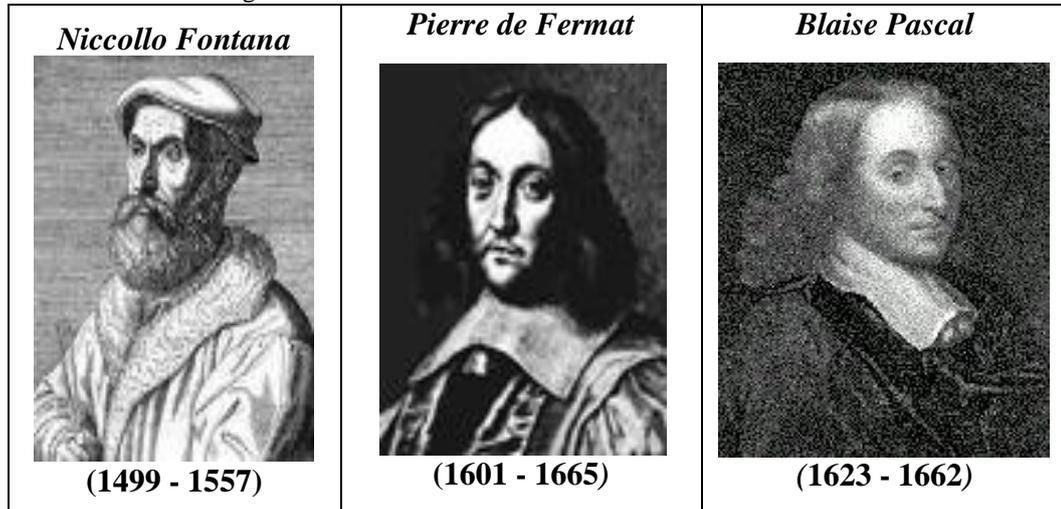
<sup>3</sup> Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html>>. Acesso em: 31 out. 2016.

<sup>4</sup> Disponível em: <<http://turing.une.edu.au/~ebowen/Stomachion/NAW2004SCIAMVS.pdf>>. Acesso em: 31 set. 2016.

<sup>5</sup> *Hekat* é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito antigo que equivale a 4,8 litros.

Leibniz (em 1666), Kircher (em 1669), Wallis (em 1673) e Bessy (em 1693). Esse estudo deu origem à Teoria das Probabilidades. Outros pesquisadores matemáticos tiveram grande influência no desenvolvimento e na formalização desta parte da Matemática, conforme está apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Matemáticos criadores da Análise Combinatória



Fonte: Elaboração do autor (2016).

### 0.2.2 Primeiros problemas para despertar a curiosidade

1) Se Pedro, ao resolver sair para uma festa, para escolher que roupa vai usar, ele separa duas calças e três camisas, que considera próprias para a ocasião, de quantas maneiras diferentes você pode se vestir, escolhendo três camisas e duas calças?

A resposta é  $2 \cdot 3 = 6$  maneiras e pode ser calculada com raciocínios variados.

2) Acontece, algumas vezes, de caixas eletrônicas conterem apenas notas de determinados valores. Imagine um saque no valor de R\$ 100,00, num caixa eletrônico só com notas de R\$ 5,00 e R\$ 10,00. De quantas formas diferentes a máquina pode disponibilizar o dinheiro?

A Tabela 1 mostra a solução do problema.

Tabela 1 – Solução do problema

<b>Casos</b>	<b>R\$ 10</b>	<b>R\$ 5,00</b>
<b>1°</b>	<b>1</b>	<b>18</b>
<b>2°</b>	<b>2</b>	<b>16</b>
<b>3°</b>	<b>3</b>	<b>14</b>
<b>4°</b>	<b>4</b>	<b>12</b>
<b>5°</b>	<b>5</b>	<b>10</b>
o	o	o
o	o	o
o	o	o
<b>10°</b>	<b>10</b>	<b>Ñ</b>
<b>11°</b>	<b>Ñ</b>	<b>20</b>

Fonte: Elaboração do autor (2016).

3) Haverá um sorteio com dois prêmios, dos tipos mostrados na Figura 3, de um carro, como primeiro prêmio e de uma bicicleta como segundo, a ser realizado com 10 participantes. De quantas maneiras distintas essas pessoas podem ganhar este prêmio, sendo que a pessoa que já ganhou um prêmio não pode concorrer a outro prêmio?

Figura 3 – Prêmios do sorteio



Fonte: Sites Google (2016)

Possível solução:  $10 \times 9 = 90$  maneiras

4) O setor de emergência de um hospital conta, para plantões noturnos, com três pediatras, quatro clínicos gerais e cinco enfermeiros. As equipes de plantão devem ser constituídas por um pediatra, um clínico geral e dois enfermeiros.

a) Quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados?

O problema indica uma combinação dos cinco enfermeiros em grupos de dois. Assim, pode-se ter  $C_{5,2} = 10$  duplas possíveis de enfermeiros.

b) Quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas?

Temos: três pediatras, quatro clínicos e cinco enfermeiros.

Cada equipe deve ter: um pediatra, um clínico e dois enfermeiros.

Pelo princípio da contagem, cada equipe tem uma de 3 pediatras, uma de 4 clínicos e uma de 10 duplas de enfermeiros, resultando em  $3 \times 4 \times C_{5,2} = 3 \times 4 \times 10 = 120$  equipes.

5) Segundo a reportagem extraída da revista *Super Abril* ano de 2004:

*Qual é a lógica das letras nas placas dos carros?*<sup>6</sup>

A ordem das letras e dos números tem a ver com o lugar em que o veículo é emplacado. Esse esquema começou a ser adotado em fevereiro de 1990, quando as placas amarelas (com duas letras e quatro números) foram substituídas pelas cinza (com três letras). Cada estado tem suas combinações próprias (veja-se Quadro 1), distribuídas pela frota local em ordem cronológica de licenciamento ou emplacamento. É possível encontrar placas com cidades e combinações “trocadas”. Isso acontece porque, se um veículo é emplacado originariamente em um lugar e o endereço do proprietário muda, troca-se apenas a indicação de cidade e estado. Ou seja, um carro licenciado em Camaçari, Bahia, com a combinação JOL pode perfeitamente estar rodando com a indicação “São Paulo, SP”. Isso porque o primeiro emplacamento ocorreu na Bahia. É possível escolher as letras e os números da chapa do automóvel. Assim, mulheres chamadas Beatriz podem encomendar a combinação BIA e donos de BMW ostentar placas BMW. Mas também não é a festa da uva: em São Paulo, por exemplo, são proibidas combinações que formem palavras consideradas obscenas ou constrangedoras, como CUS, GAY e CKH.

Quadro 1 – Placas de automóveis<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Disponível em: <<http://super.abril.com.br/comportamento/qual-e-a-logica-das-letras-nas-placas-dos-carros>>. Acesso em: 13 set. 2016.

<sup>7</sup> Figura retirada em 13/09/2016, no site: <<http://www.carrosnors.com.br/inicio-de-placas-de-veiculos-por-estado/>>.



Fonte: Site de Carrosnors (2016)

Analisando as placas do Quadro 1, pode-se perceber que todas são compostas por 3 letras e 4 algarismos numéricos. Sabendo que nosso alfabeto é composto por 26 letras e nosso sistema de algarismos numéricos é composto pelos números inteiros, que variam de 0 a 9, qual é o número total de placas de automóveis que se pode formar, como as placas do Quadro?

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$$

Através destes problemas, será introduzido o tema de estudo, buscando despertar a curiosidade dos alunos; pode-se observar as formas sugeridas de soluções, visando a pensar com muita atenção, propor e testar hipóteses são componentes do raciocínio matemático imprescindíveis para obter as respostas.

### 0.3 Formação das equipes e combinações para a Dinâmica Combinatória

- Formar sete equipes e definir nomes: (exemplo Equipe Alfa de integrantes Alfa 1, Alfa 2 e Alfa 3).
  - Combinar quem será o relator, em cada atividade, e responsável pelos registros no diário da equipe.
  - Para finalizar cada etapa, os alunos realizarão uma tarefa extraclasse, como tema de casa, para a resolução de exercícios que constam no “livro integrado”, que é a bibliografia proposta pela escola com forte recomendação de ser utilizado.
-

- No início da aula que segue a cada tema de casa, serão sorteados um exercício e um componente de cada equipe, que deve entregar o exercício para a verificação da realização da tarefa solicitada.

## **Etapa 1 da Dinâmica Combinatória**

A primeira etapa acontece com a realização de três jogos acessíveis pela internet. Assim, os alunos serão encaminhados ao laboratório de informática da escola, onde explorarão três jogos virtuais que envolvem habilidades lógicas, para se chegar à solução dos desafios propostos. Esta primeira etapa terá a duração de uma hora, para a execução dos três jogos e, no final de cada um, para o aluno preencher um questionário, respondendo sobre a forma que utilizou para solucionar os desafios de cada jogo. Nos minutos finais, será proposto um novo desafio; esse na forma de um problema sobre o princípio da contagem, para o qual o aluno deverá apresentar uma solução, na forma de uma breve descrição do que pensou e realizou. O professor participará, organizando e administrando o tempo da aula.

### **1.1 Objetivos de aprendizagem:**

- criar estratégias, transformando-as em possibilidades para tomar decisões, buscando solucionar de maneira eficaz situações que envolvam problemas de raciocínio lógico;
- identificar e explorar características específicas do jogo, como forma de criar habilidade para solucionar problemas lógicos.

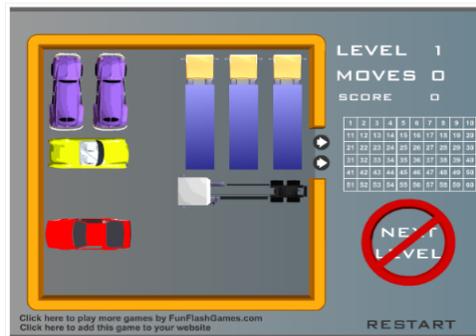
### **1.2 Descrição do jogo**

Jogo 1 – *Yellow Out*: O jogo do estacionamento, onde há um determinado carro no estacionamento que deve ser retirado, com o menor número possível de movimentos.

Figura 4 – *Layout* do Jogo *Yellow Out*<sup>8</sup>

---

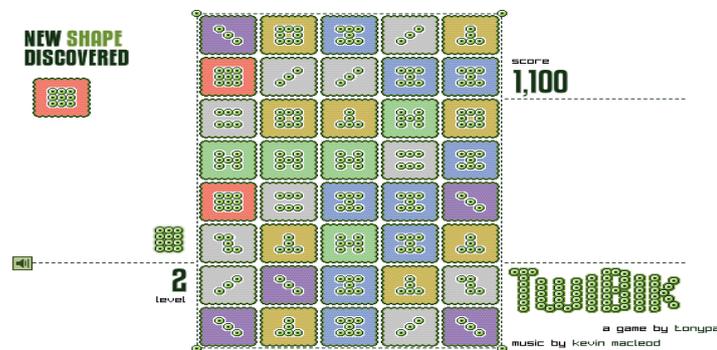
<sup>8</sup> Disponível em: <<http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>>. Acesso em: 15 ago. 2016.



Fonte: Site do Terra (2016).

Jogo 2 – *Twibik*: Desafio de atenção e raciocínio rápido, no qual deve-se buscar associação entre as peças que vão sendo disponibilizadas em lugar daquelas que são retiradas.

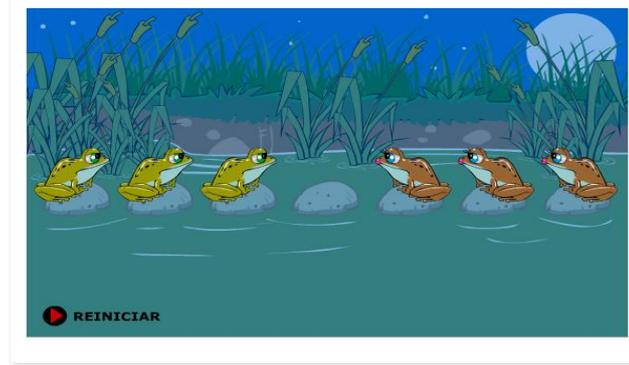
Figura 5 – Layout do Jogo *Twibik*<sup>9</sup>



Fonte: Site do Terra (2016).

Jogo 3 – Pulo do Sapo: Um jogo de atenção no qual é preciso criar uma estratégia para deslocar um grupo de três sapos para a margem oposta daquela onde se encontram.

<sup>9</sup> Disponível em: <<http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>>. Acesso em: 15 ago. 2016.

Figura 6 – *Layout* do Jogo Pulo do Sapo<sup>10</sup>

Fonte: *Site de Jogos* (2016).

Os alunos, no decorrer dos jogos, devem preencher uma tabela de registro, que segue em anexo a este documento, na qual buscam analisar pontuações, tempo de resolução dos jogos, nível de desempenho do aluno em relação ao jogo e número de soluções, conforme o jogo disputado. O objetivo dos alunos é preencher a tabela e está ligado à verificação do desempenho dos mesmos e servirá como subsídio de análise para a dissertação de Mestrado.

### 1.3 Objetivos do jogo

Jogo 1: O objetivo do jogo *Yellow Out* é retirar o carro amarelo do estacionamento, efetuando a menor quantidade de movimentos possível. Para isso, é preciso mover outros carros que estão bloqueando o caminho. Estes, algumas vezes, também têm a passagem bloqueada por outros carros do estacionamento.

Jogo 2: No *Twibik*, o objetivo é eliminar a maior quantidade de peças. Para isso, deve-se clicar nas peças idênticas, que se apresentam numa mesma linha ou coluna. Como dificultador do desafio, podem ocorrer situações em que não há opções, decorrendo, então, duas possibilidades: uma, a de remover uma peça aleatória ou, outra, a de embaralhar as peças até surgirem novas opções.

Jogo 3: No Pulo do Sapo, o propósito é transferir três sapos para a margem oposta de onde se encontram. Neste jogo, é acionado, principalmente, o raciocínio lógico e é importante tramar uma estratégia, como capacidade de solucionar problemas, por meio de atenção, senso de direção, planejamento, organização e coordenação motora.

### 1.4 Orientações para os jogadores de como jogar

<sup>10</sup> Disponível em: <<http://jogos.testeqi.com.br/o-pulo-do-sapo/>>. Acesso em: 15 ago. 2016.

#### 1.4.1 Jogo *Yellow Out*

Você pode mover os carros tantas vezes quantas quiser e em qualquer direção.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em “Play”;
2. escolha o nível em que deseja começar o jogo e clique em “Start Game”;
3. clique no carro que deseja mover e arraste-o até a posição escolhida;
4. cada etapa termina quando o carro amarelo parar em cima das setas que indicam a saída.

#### 1.4.2 Jogo *Twibik*

Não existem regras especiais, basta encontrar e clicar em duas peças iguais.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em “Play Game”;
2. clique em “Normal” para jogar tranquilamente, sem se preocupar com o tempo;
3. clique em “Action” para jogar contra o tempo (mais emocionante hehehe);
4. quando o jogo carregar, clique em pares de peças idênticas que situam numa mesma linha ou mesma coluna. Todas as peças entre elas irão ser removidas do jogo.

#### 1.4.3 Jogo Pulo do Sapo

Não existem regras especiais a serem descritas, somente devemos passar os sapos machos para o lado direito e os sapos fêmeas para o lado esquerdo, podendo atravessar somente um de cada vez, pois apenas uma pedra está livre para o pulo. Não podemos voltar a jogada após ser executada, podemos apenas reiniciar um novo jogo, finalizando assim a jogada anterior.

Como jogar:

Utilize o *mouse*, clique no sapo para ele pular.

#### 1.4.4 Atividade pós-jogo

Jeniffer vai participar da promoção de uma loja de roupas que está oferecendo um vale-compras de R\$ 1.000,00 para o participante que apresentar por primeiro o maior número de combinações distintas, ao menos em uma peça, com o kit de roupas escolhido pela loja. O kit é composto de: seis blusas, quatro saias e dois pares de sapato. Quantas são todas as maneiras distintas com as quais Jeniffer deverá combinar as peças do vestuário, para ter chance de concorrer ao prêmio?

## **Etapa 2 da Dinâmica Combinatória**

Esta etapa consiste na realização do Jogo do Quadrado,<sup>11</sup> que foi desenvolvido pelos professores e pesquisadores Josiane de Carvalho Rezende, José Marcos Lopes e João Vitor Teodoro, com o intuito de explorar o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades. A atividade acontece em equipes de três componentes, definidos por sorteio pelo professor, que irá auxiliar o desenvolvimento das atividades que requerem duas horas. O que se espera com estas atividades é o desenvolvimento da ideia do Princípio Fundamental da Contagem, que serve como princípio introdutório, para resolver problemas de Análise Combinatória. Os alunos terão a oportunidade de explorar o jogo e avaliar se o mesmo é ou não de azar, respondendo ao questionário pós-jogo.

### **2.1 Objetivos de aprendizagem:**

- com esta atividade visa-se ao aprimoramento de atitudes de cooperativismo, partilha e respeito, estabelecendo relações de boa convivência com os integrantes da equipe;
- com o jogo, busca-se propiciar que alunos levantem hipóteses e planejem estratégias de jogadas, para construir uma árvore de possibilidades, desenvolvendo, assim, o pensamento multiplicativo;
- almeja-se desenvolver o cálculo mental, como forma de encontrar uma solução rápida para os problemas apresentados na atividade.

---

<sup>11</sup> Disponível em: <[http://www.sbm.org.br/eventos/cnmac/xxxii\\_cnmac/pdf/372.pdf](http://www.sbm.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf)>. Acesso: 5 out. 2016.

## 2.2 Descrição do jogo

No Jogo do Quadrado, utiliza-se o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha, e os movimentos de captura de peças possuem algumas semelhanças com os das peças peão e torre no Jogo de Xadrez.

**MATERIAL:** Tabuleiro com 3x3 casas e duas peças distintas, uma para cada jogador; usa-se este modelo para marcar a posição de cada jogada.

Figura7 – Tabuleiro utilizado no Jogo do Quadrado

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaboração do autor.

## 2.3 Objetivos do jogo:

- eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário, andando apenas uma casa, na horizontal ou vertical, em cada jogada;
- servir como instrumento pedagógico para auxiliar na resolução de problemas combinatórios básicos.

## 2.4 Orientações para jogar

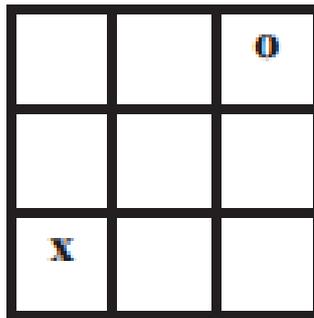
**INÍCIO DO JOGO:** O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro, e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo inicia com o Jogador 1, que é definido por sorteio.

**REGRAS:**

- 1<sup>a</sup>) não se pode voltar ao ponto de partida, mesmo podendo voltar para trás;

- 2<sup>a</sup>) é permitida a eliminação da peça, somente quando esta estiver em uma diagonal;
- 3<sup>a</sup>) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do seu ponto de partida, é obrigatória quando surgir a ocasião;
- 4<sup>a</sup>) o número máximo de movimentos permitido para cada peça é de oito. Se, até o final do oitavo movimento, o jogo não finalizar, define-se o empate.

Figura 8 – Posição inicial do Jogo do Quadrado



Fonte: Elaboração do autor.

## 2.5 Atividade pós-jogo

Após a realização do jogo, segue-se com um conjunto de problemas, com o objetivo de desafiar os estudantes a operarem com as ideias básicas de problemas de contagem e a construir, para cada situação, a árvore das possibilidades de cada jogada. Assim, serão formulados alguns problemas sobre o Jogo do Quadrado, em que aparecem essas ideias, quando ao serem resolvidos. Dessa forma, os problemas serão utilizados para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para, depois, resolver problemas. Os alunos deverão conjecturar sobre possíveis soluções em linguagem própria. No final, os conceitos matemáticos aprendidos serão sistematizados pelos alunos em linguagem própria da matemática, e esses receberão uma lista extra de exercícios e problemas, selecionados do livro integrado, para serem realizados em casa e entregues na aula seguinte a do Jogo do Quadrado.

Questionamentos:

- 1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?
- 2) É possível ocorrer empate? Por quê?
- 3) O jogo é de azar ou de estratégia? Se, ao invés de oito, aumentarmos o número de jogadas para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

Problemas:

Um tabuleiro numerado de 1 até 9 pode ser utilizado, com o intuito de facilitar o registro das jogadas, como está exemplificado na Figura 9. Com isso, resolva os seguintes problemas:

Figura 9 – Tabuleiro com numeração

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaboração do autor.

Problema 1. Suponha que, após o quarto movimento, a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, seja a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória, esse jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

Problema 2. Após o segundo movimento, o tabuleiro encontra-se conforme está mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Posição das peças após a segunda jogada

	O	
	X	

Fonte: Elaboração do autor.

Que número mínimo de movimentos finaliza o jogo? Quem vence o jogador “x”?

Problema 3. Em seu primeiro movimento, o Jogador 1 pode escolher o quadrado 4 ou o quadrado 8. Se esse jogador escolheu o quadrado 4, então o Jogador 2 poderá vencer o jogo? Justifique sua resposta.

Problema 4. Existe uma estratégia vencedora para o Jogador 1? Em caso afirmativo, descreva-a exemplificando.

Problema 5. Quantos e quais são os resultados possíveis do Jogo do Quadrado? Tente representar todas essas jogadas.

### **Etapa 3 da Dinâmica Combinatória**

Na terceira etapa da Dinâmica Combinatória, busca-se explorar um novo jogo, conhecido como Jogo Senha, no qual serão desenvolvidos alguns conceitos que embasam as técnicas de contagem: permutação e arranjo. Essa etapa acontece no decorrer de duas horas, durante as quais os alunos trabalharão em equipes, organizadas pelo professor, que também terá o papel de esclarecer dúvidas e auxiliar os alunos, durante a rotina de sala de aula.

#### **3.1 Objetivos de aprendizagem:**

- explorar e associar as atividades do jogo com conceitos de técnicas, como as de arranjo e de permutação simples;
- programar estratégias para a resolução dos problemas propostos no jogo;
- tomar decisões adequadas, por meio da análise antecipada de possíveis jogadas;
- chegar a conclusões e a soluções de problemas trabalhando em equipe.

#### **3.2 Descrição do jogo**

O Jogo Sena foi desenvolvido em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e o objetivo com as jogadas é descobrir a sequência que compõe a senha de quatro cores, repetidas ou não, dentre seis cores distintas.

Figura11 – Tabuleiro original do jogo <sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Mastermind>>. Acesso em: 5 out. 2016.



Fonte: Wikipédia (2016).

O jogo será adaptado, para a aplicação em sala de aula, com o uso de cartelas (Figuras 12 e 13) e será utilizado lápis de cor no lugar das peças coloridas do jogo.

Figura 12 – Cartela do desafiado

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>		

Fonte: Elaboração do autor.

Figura 13 – Cartela do desafiante

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>

Fonte: Elaboração do autor.

### 3.3 Objetivo do jogo

No jogo, participam dois jogadores, o desafiante e o desafiado, este com o objetivo de descobrir a senha proposta pelo desafiador na sua cartela, que a mantém voltada para baixo. Em cada fileira, uma após outra, compondo jogadas sucessivas, o desafiado propõe uma sequência de quatro cores, repetidas ou não. O desafiante pinta ao lado, na cartela do desafiado, círculos com a cor preta, se estiverem corretas a cor e a posição; deixa círculos em branco, se há cores corretas, mas em posições erradas, e marca “x” em tantos círculos quantas cores não correspondem às da senha. O desafiado tem nove oportunidades (até preencher a nona fileira da cartela), para adivinhar a senha, ou, se tal não ocorrer, o desafiador revela a senha, mostrando a sua cartela, que mantinha voltada para baixo.

### **3.4 Orientações para jogar:**

- definir desafiante e desafiado;
- o desafiante dispõe de oito cores, exceto branco e preto;
- o desafiante forma uma senha de cores, pintando sua cartela, no sentido da seta;
- o desafiado tenta adivinhar a senha do desafiante, pintando uma sequência de cores na primeira fileira;
- ao lado da fileira de cada jogada, o desafiador pinta um círculo preto, a cada cor e correspondente à posição correta; deixa um círculo em branco a cada cor correta, mas em posição errada, e marca um “x” a cada cor que não pertence à senha. A ordem dos círculos pretos, brancos ou com “x” não necessariamente é a da senha;
- o desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha, o mesmo contabilizará nove pontos;
- numa segunda rodada, invertem-se os papéis de desafiante e desafiado, vencendo o jogo aquele que acertar a senha com menor número de tentativas (fileiras pintadas).

### **3.5 Atividade pós-jogo**

Ao término do jogo, os alunos, sentados em grupo, responderão a um questionário, com situações ligadas ao jogo, às quais devem associar conceitos relacionados com arranjos simples ou permutações simples. Após responder o Questionário 2, os mesmos irão realizar alguns exercícios extra, que serão selecionados de seu livro integrado.

## Questionário 2

- 1) Utilizando três cores, para preencher três espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar?
- 2) Utilizando quatro cores, para preencher quatro espaços de uma senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?
- 3) E, se pudéssemos escolher entre cinco cores, quantas senhas diferentes é possível formar?
- 4) No caso do jogo, onde formaram senhas escolhendo entre seis cores, qual é o número total de senhas possíveis repetindo as cores? Caso não haja repetição das cores, qual é o número total de senhas que podemos formar?
- 5) Usando seis cores e, fixando a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes podemos formar?
- 6) Se pudermos escolher entre seis cores para quatro espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?
- 7) Dispondo de quatro cores distintas, de quantos modos diferentes podemos formar uma senha, sendo que as cores adjacentes não podem ser iguais?

## Etapa 4 da Dinâmica Combinatória

Nesta etapa da Dinâmica Combinatória, serão explorados agrupamentos que se diferenciam pela sua natureza, ou seja, a atividade será desenvolvida visando à introdução ao conceito da técnica de contagem chamada de combinação simples. Para explorar este conceito, será utilizado o Jogo Bicolorido, criado, inicialmente, para explorar conceitos geométricos e que foi readaptado para explorar, também, conceitos combinatórios. A atividade terá a duração média de uma hora e será desenvolvida em equipes. O professor será o mediador das atividades, podendo auxiliar o desenvolvimento dos jogos e do questionário pós-jogo. No final da atividade, o mesmo poderá abrir um debate sobre os conceitos estudados.

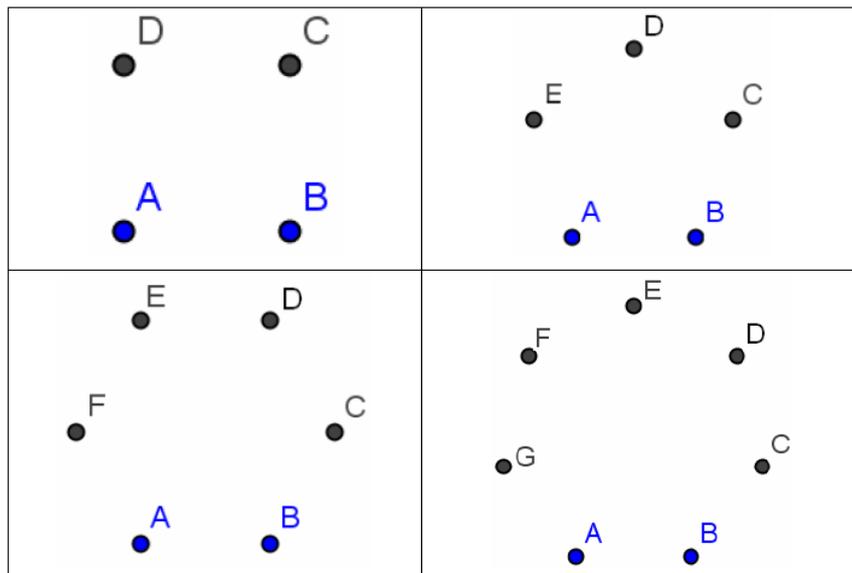
### 4.1 Objetivos de aprendizagem:

- explorar o conceito de combinações simples associado à construção de segmentos dispostos através dos vértices de um polígono já dado;
- desenvolver métodos de resolução com estratégias que propiciem a construção do pensamento combinatório.

#### 4.2 Descrição do jogo

O Jogo Bicolorido original foi proposto na obra de Gardner (1985) e, posteriormente, Borin (1996) utilizou-o com o intuito de introduzir e desenvolver conceitos de ceviana, concorrência de cevianas e pontos notáveis de um triângulo, que são temas importantes da Geometria Euclidiana para o Ensino Fundamental. Porém, o jogo utilizado para esta atividade advém de uma pesquisa realizada por Carla Soares Silva, em 2010, que o adaptou para explorar conceitos de combinação simples, numa configuração de tabuleiro, como está mostrado na Figura 14, que segue:

Figura 14 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido



Fonte: Elaboração do autor.

#### 4.3 Objetivo do jogo

No jogo, o objetivo é formar triângulos monocromáticos, quer dizer, com vértices de mesma cor, com os pontos dispostos no tabuleiro da Figura 14. O primeiro que conseguir formar um triângulo vence o jogo.

#### **4.4 Orientações para jogar**

4.4.1 *Materiais*: canetas hidrocor ou lápis de colorir (com, no mínimo, duas cores)

4.4.2 *Regras do jogo*:

- define-se quem inicia o jogo de forma amigável, como, por exemplo, num “par” ou “ímpar”;
- todas as duplas iniciam o jogo no tabuleiro de quatro pontos, passando, gradativamente, para outros, com mais número de pontos;
- os jogadores, cada qual com uma caneta hidrocor, ou lápis de colorir, de cores distintas, devem construir, sucessiva e alternadamente, segmentos de reta com extremos nos pontos do tabuleiro. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais do polígono representado, no tabuleiro, por seus vértices;
- em cada etapa, será declarado vencedor aquele que fechar, por primeiro, um triângulo monocromático com a cor de sua caneta.

#### **4.5 Atividade pós-jogo**

Após o jogo, será entregue aos alunos um conjunto de perguntas, com as quais busca-se explorar conceitos de combinação, associados a possíveis construções geométricas relacionadas ao jogo no tabuleiro. Após responderem as perguntas, os alunos desenvolverão algumas atividades, selecionadas no seu livro integrado.

##### *Perguntas*

Responda as perguntas que seguem, considerando os pontos citados, como pontos distintos de uma mesma circunferência.

- a) Partindo de quatro pontos não colineares A, B, C e D, quantos segmentos de reta podemos formar?

- b) Com cinco pontos não colineares A, B, C, D e E, quantos segmentos podemos formar?
- c) Com seis pontos não colineares A, B, C, D, E e F, quantos segmentos podemos formar?
- d) E, com sete pontos não colineares A, B, C, D, E, F e G, quantos segmentos podemos formar?
- e) Seguindo essa mesma lógica, quantos segmentos podemos formar com oito, nove e com 10 pontos não colineares?
- f) E com  $n$  pontos, quantos segmentos podemos formar?
- g) Dos segmentos formados no item a, quantos são lados e quantos são diagonais do quadrilátero ABCD?
- h) Em  $b$ , quantos são lados e quantos são diagonais do pentágono ABCDE?
- i) Quantos segmentos são lados e quantos são diagonais do hexágono ABCDEF?
- j) E os segmentos formados com sete pontos, quantos são lados e quantos são diagonais do heptágono ABCDEFG?
- k) E quantos triângulos podemos formar, em cada situação informada nos itens A, B, C, D, E e F?
- l) (Desafio) Para um polígono regular de  $n$  lados, quantos triângulos internos ao polígono conseguimos formar?

### **Etapa 5 da Dinâmica Combinatória**

Nesta etapa, os alunos, organizados em grupos, realizarão a fundamentação das técnicas de contagem, aprofundando seus conhecimentos em fontes de referência, como livros e materiais disponíveis na internet, sobre conceitos que fundamentam as técnicas de contagem, que estruturam a Análise Combinatória. Os resultados da pesquisa serão socializados, em sala de aula, mediante apresentação de *slides*, com os demais colegas. Esta etapa terá a duração de até 6 horas-aula, para a realização de pesquisas, estudos, organização, apresentações em sala. Nessa aula, o professor tem papel de grande importância, pois deverá auxiliar os alunos com dúvidas referentes aos procedimentos operatórios, indicando quais fontes de pesquisa deste estudo são confiáveis.

### **5.1 Objetivos de aprendizagem:**

- conhecer os conceitos que fundamentam as técnicas de contagem, caracterizando-os, segundo os aspectos que os identificam e os diferenciam;
- desenvolver habilidades relacionadas a uma atividade de pesquisa e ao trabalho em equipe, no decorrer da construção e apresentação de um objeto de estudo, que servirá de base teórica para estudos posteriores;
- reconhecer aplicações dos conceitos pesquisados em diversos contextos ou na resolução de problemas, por meio de ideias e conceitos expressos, ou não, por fórmulas que formalizam as técnicas de contagem;
- construir habilidades de autonomia, visando a desenvolver a aprendizagem por meio da pesquisa.

### **5.2 Descrição das atividades**

No desenvolvimento desta etapa, os alunos aprofundarão conhecimentos relacionados com conceitos da Análise Combinatória.

Os estudantes da classe serão organizados em sete equipes, para pesquisar sobre os seguintes temas:

1. definição do conceito de fatorial;
2. equações envolvendo o uso do fatorial;
3. permutações simples;
4. permutação com repetição;
5. arranjos simples;
6. combinações simples;
7. permutações circulares.

As equipes desenvolverão e apresentarão a pesquisa, orientados pelo professor, em sala de aula, no laboratório de informática e na biblioteca, seguindo um roteiro de pesquisa elaborado pelo professor.

### 5.3 Roteiro para estudos:

- 1) estudar os conceitos em, no mínimo, três ou mais fontes;
- 2) procurar e explorar outros materiais de apoio, como video-aulas ou *softwares*, por exemplo, como apoio para compreender e explicar os conceitos;
- 3) esclarecer, com o professor, todas as dúvidas que o grupo não conseguir resolver;
- 4) elaborar um texto explicativo dos conceitos, com exemplos e exercícios de aplicação;
- 5) selecionar e preparar três exercícios de aplicação dos conceitos, para apresentar e resolver com os colegas, em sala de aula;
- 6) apresentar as referências bibliográficas, adequadamente;
- 7) elaborar o texto escrito nos moldes do Manual da Família do Colégio;
- 8) preparar, para a apresentação do trabalho aos colegas, com, no máximo, oito *slides*, que servirão de base teórica na apresentação.

### 5.4 Apresentações dos trabalhos

Os trabalhos serão apresentados, em sala de aula, tendo cada grupo 20 minutos para apresentar as ideias e os conceitos principais, em linguagem dissertativa, representações geométricas, explicações e correspondentes conceitos formalizados em linguagem matemática.

### 5.5 Avaliação

Os trabalhos serão avaliados segundo os critérios: clareza e criatividade na apresentação dos conceitos, conhecimento do conteúdo, diversidade dos tipos e graus de dificuldade das atividades propostas aos colegas, organização e capricho na elaboração do trabalho escrito, redação em linguagem correta, respeito aos colegas nas apresentações, participação nas atividades que estarão sendo propostas pelos grupos.

Para a definição da nota de desempenho no trabalho, segundo os critérios de avaliação, será considerada a seguinte distribuição de um total de 10 pontos:

- Trabalho escrito: 4 pontos
- Apresentação: 6 pontos
- Falta de respeito ou de participação na apresentação de colegas: menos 2 pontos.

## **Etapa 6 da Dinâmica Combinatória**

Esta é a etapa da finalização do trabalho e, como atividade em sala de aula, os alunos estarão envolvidos numa disputa, com diversão e conhecimento, na realização do Jogo Trilha Combinatória<sup>13</sup>, planejado para uma aplicação descontraída dos conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória. Tal atividade tem previsão de duração de uma hora e será desenvolvida por meio de desafio para uma disputa entre as equipes que vivenciaram a Dinâmica Combinatória. O professor deve ser o mediador do funcionamento do jogo, auxiliando na interpretação das regras e nas dúvidas quanto à solução das atividades propostas pelo jogo; pode-se dizer que ele será uma espécie de juiz que auxiliaria em algumas decisões por parte da atividade, dizendo o que é válido ou não, a partir das regras já citadas.

### **6.1 Objetivos da aprendizagem:**

- aprimorar e integrar conhecimentos, através das jogadas do percurso da Trilha Combinatória;
- promover a integração dos alunos, incentivando o espírito da competição saudável e respeitosa, sobre conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória;
- avaliar, por meio das soluções dos problemas propostos na Trilha, se há indícios de que ocorreu aprendizagem.

### **6.2 Objetivo do jogo**

---

<sup>13</sup> Jogo elaborado pelo mestrando.

No jogo, tem-se como objetivo a aplicação de conhecimentos de Análise Combinatória, resolvendo problemas selecionados, em lançamento de dados.

### 6.3 Materiais do jogo

- dois dados não viciados; cartões com desafios na forma de exercícios e problemas que contemplam o conteúdo de Análise Combinatória;
- peões, que podem ser objetos de marcação, como carrinhos de brinquedo, peças de um tabuleiro de damas ou de xadrez, entre outros.

### 6.4 Regras do jogo:

1° os participantes sortearão quem inicia o lançamento dos dados, sendo essa a equipe que sortear o maior número ao lançar um só dado. Os demais seguem jogando conforme a ordem decrescente dos números sorteados;

2° a movimentação das peças, no percurso da trilha, dar-se-á segundo a combinação simples ( $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ) dos números dos dados lançados, sendo  $n$  o maior valor e  $p$  o menor valor, considerados os dois dados lançados;

3° após a movimentação do peão, tendo ele parado em uma casa azul, vermelha ou amarela, a equipe resolve o desafio de uma carta, da que está acima na pilha de cartas, voltada para baixo, que tem como referência a cor da casa em que o peão parou;

4° para avançar, e ter direito a jogar os dados na próxima rodada, a equipe deverá acertar a pergunta da carta; caso erre, devolverá a carta e ficará fora da próxima rodada;

5° no fim da rodada da qual a equipe ficou fora, esta sorteará outra carta de mesma cor e, se acertar, retornará à trilha. Se errar novamente, fica válida novamente a 4ª regra;

6° se a equipe cair na casa com cor preta, estará impedida de retirar qualquer carta e vai para a cadeia;

7° para sair da cadeia, na jogada seguinte, a equipe deverá solucionar o problema da carta de cima do baralho preto;

7.1° caso a equipe erre o problema da carta do baralho preto, volta para a cadeia e permanece presa por duas rodadas, e assim por diante, até solucionar o problema contido na carta;

8º todos saem do marco *Início* e vence o jogo aquele que chegar, por primeiro, no marco *Chegada*.

## 6.5 Tabuleiro do jogo

Figura 15 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória



Fonte: Elaboração do autor.

## REFERÊNCIAS

PIAGET, J. **Fazer e compreender**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.