FUNÇÃO EXPONENCIAL E AS SEQUÊNCIAS DIDATICAS

PRODUTO EDUCACIONAL

LUIS EDUARDO REYES PÉREZ

CHANG KUO RODRIGUES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
JUIZ DE FORA (MG)
2015

LISTA DE FIGURAS

1. **FIGURA 1: Construção de um fractal** 7
2. **FIGURA 2: Triângulo de Sierpinski** 12
3. **FIGURA 3: Tapete de Sierpinski 1** 16
4. **FIGURA 4: Tapete de Sierpinski 2** 17
5. **FIGURA 5: Construção de deslizantes** 22
6. **FIGURA 6: Função $Y = 2^X$** 25
7. **FIGURA 7: Variação de k quando é positivo** 27
8. **FIGURA 8:Variação de k quando é negativo** 28
9. **FIGURA 9: Gráfico da função quando k é zero** 29
10. **FIGURA 10: Gráfico da função $p(t) = 600(3^{2t})$** 32

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 4
ATIVIDADE 1: 6
ATIVIDADE 2 10
ATIVIDADE 3 15
ATIVIDADE 4 20
ATIVIDADE 5 23
ATIVIDADE 6 26
ATIVIDADE 7 30
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES 33
REFÊRENCIAS 34
ANEXOS 35
Anexo 1: Tarefa de fractales 36
Anexo 2: Tarefa de triângulo de Sierpinski 37
Anexo 3: Tarefa de tapete de Sierpinski 38
Anexo 4: Tarefa de Geogebra 39
Anexo 5: Tarefa de divisão celular 40
Anexo 6: Tarefa da variação de K 41
Anexo 7: Tarefa de aplicação 42

APRESENTAÇÃO

Este caderno de atividade surgiu de uma pesquisa realizada para o Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, localizada na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil.

O trabalho de pesquisa, realizado na Colômbia, produziu a dissertação chamada “Função Exponencial na aula: Praxeologias matemáticas no Ensino Médio”, referindo-se a um currículo colombiano, que irá ligar este caderno, em que apresentamos sequências didáticas, que podem ser desenvolvidas por qualquer professor em sala de aula, com alunos do ensino médio, tanto em Colômbia como no Brasil.

Neste trabalho, apresentamos sete sequências didáticas que representam o Produto Educacional, oriundo da dissertação, e têm natureza interpretativa, assim como leva em conta a produção e simbolização gráfica de funções exponenciais, equações canônicas de funções exponenciais e conjecturas, que permitirão o estudante realizar um trabalho matemático a partir de suas ações, levando-o ao encontro da contextualização de seu conhecimento.

Deve-se notar que uma sequência didática é um conjunto sistematizado de atividades planejadas para ensinar um conteúdo etapa por etapa. Esta proposta envolve atividades de aprendizagem e avaliação, organizadas de acordo com os objetivos que o professor pretende alcançar. Podemos falar que uma sequência didática visa organizar e orientar o processo de ensino que impulsa um educador que deseja acompanhar passo a passo a aprendizagem do aluno. Geralmente começa com uma apresentação do assunto, posteriormente, desenvolvemos o conteúdo a fim de que o aluno compreenda e, finalmente, ele é convidado a colocar em prática o aprendido.

Portanto, devemos ter em conta, durante a execução dessas atividades, ou sequências didáticas, o trabalho do professor, que, neste caso, pode ser diferente ao do pesquisador, pois ocorre uma re-contextualização e re-personalização do conhecimento, com a finalidade de simular uma micro sociedade científica, para que o aluno, a similaridade do cientifico, consiga redescontextualizar e re-despersonalizar o seu conhecimento, identificando a sua produção com o conhecimento científico.

Em outras palavras, o trabalho do estudante é comparável com a atividade do científico: lidar com problemas para fazer matemática, encontrar boas soluções e boas perguntas às situações propostas pelo professor. Por sua parte, o professor deve efetuar, não a comunicação de um conhecimento, mas o retorno de um bom problema. Em síntese, o ensino é o retorno do estudante de uma sequência correta e a aprendizagem é uma adaptação a essa situação.

A sequência didática vai além porque é uma ferramenta que permite uma pessoa ser mais estratégica, ou seja, aquela que tem a capacidade de tomar decisões conscientes e simultaneamente, intencionadas.

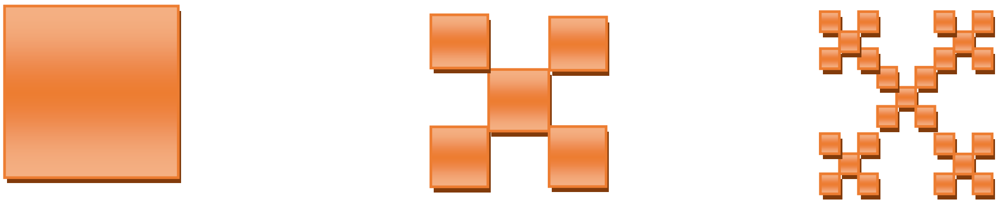
Nos últimos tempos, artigos de opinião em jornais educacionais referem-se, de maneira inesgotável, à importância de o aluno se tornar protagonista de sua própria aprendizagem, mas se olharmos entre nós, fazemos as intervenções na sala de aula, em certas etapas educativas, e podemos correr o risco de achar que o protagonismo desse processo está entre nós, os educadores. Nesse sentido, não há como negar que tanto o aluno quanto o professor são os protagonistas do processo educativo escolar.

Assim, este material levará ao professor fazer uso de novos métodos de ensino que são mencionados neste Produto Educacional, tais como o uso de tecnologia de informação e comunicação, o uso de *software* e geometria fractal, que devem, ou podem, ser usados como ferramentas para que o aluno possa visualizar e personalizar o conceito de função exponencial, além de ele construir seu conceito e usá-lo em sua vida diária. O computador dá aos alunos a oportunidade de experimentar uma emoção estética da captura repentina de uma solução para formular uma conjectura, colocá-la em prova e desenhar modelos.

Finalmente, nós esperamos, a partir deste trabalho, que haja discussão com outros professores das possíveis alterações e que tenham sucesso na melhoria das sequências didáticas apresentadas aqui, a fim de existir um melhoramento das aulas ministradas em sala de aula.

ATIVIDADE 1: COMPOSIÇÃO DE UM FRACTAL A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DE FIGURAS

A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.



a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de quadrinhos existentes de um nível quaisquer nessa sequência.

OBJETIVOS

- ✓ Interpretar uma função exponencial a partir de una sequência de figuras
- ✓ Expressar uma equação canônica que relacione o número de quadrinhos existentes na figura e o nível de sequência.
- ✓ Construir conjeturas a partir de uma sequência de figuras.
- ✓ Desenvolver o pensamento e a ação do estudante em diferentes situações.

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial, gráfico de função exponencial em um plano cartesiano.
- ✓ Desenvolver esquemas que envolvem duas variáveis
- ✓ Potencia de números inteiros.
- ✓ Desenvolvimento matemático em situações

TEMPO ESTIMADO: 4 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO

- ✓ Lápis, borracha, caneta, caderno
- ✓ Regra, lápis de cor
- ✓ Cola, tesoura, papel

DESENVOLVIMENTO

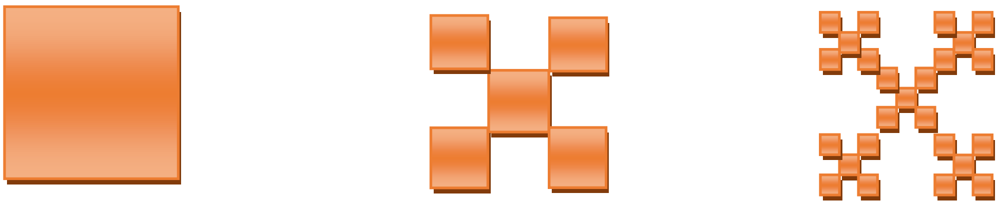
Etapa 1: Construção de um fractal

Para a atividade, os estudantes devem interpretar e conjecturar, a partir de uma sequência de figuras Figura 1, que apresenta vários níveis na composição de um fractal.

Desenharmos um quadro como primeiro passo, em seguida, traçamos esse quadro 5 vezes assim como podemos verificar na Figura 1, repetimos o processo sucessivamente para cada quadro construído

O estudante deve construir, usando uma malha quadriculada, formando uma possível figura correspondente para o próximo nível da sequência, por conseguinte, o estudante deve levar em conta a quantidade de quadros sombreados e o nível de sequência, de modo a descobrir o número de quadrados existentes no terceiro nível.

Figura 1- Construção de um Fractal



Fonte: Dados de Pesquisa

Etapa 2: Executar possíveis soluções da atividade

Para esta atividade, o professor pede aos alunos para realizar uma tabela de valores envolvendo duas variáveis a fim de visualizar essa relação.

Numero de quadros	1	5	25	625
Nivel de sequência	0	1	2	3

Nessa tabela pode-se mostrar a relação entre duas variáveis; além disso, conjecturarmos o próximo nível de sequência. Para essa atividade, precisamos de uma expressão canónica exponencial com base maior que 1, e podemos reescrever os resultados da seguinte maneira: o estudante deve ter em conta os conceitos anteriores, tais como o uso de expoentes e propriedades de potenciação, assim como a tabela anterior e uso de expoentes, portanto, conseguirmos reescrever isso como segue.

Número de quadros	5^0	5^1	5^2	5^3
Nível de sequência	0	1	2	3

Nessa tabela, identificarmos um padrão existente em que a base é constante e maior que 1, portanto, o nível seguinte de sequência, ou seja, no nível 3, a figura terá 625 quadros.

Etapa 3: Construção de uma equação exponencial

O estudante deve tentar escrever uma equação canônica que expresse o número de quadrinhos existentes na Figura 1, de qualquer nível dessa sequência, com ajuda das etapas anteriores. Segundo os quadros expostos anteriormente, podemos assumir que a equação geral será da forma $y = 5^x$ quando x é um número natural maior a zero e relaciona o número de quadros existentes e o nível da sequência dada.

Etapa 4: Estabelecimento da função exponencial

Construída a equação exponencial na etapa 4, o professor deve formalizar o que é uma função exponencial e as suas principais características; da mesma forma, o aluno deve construir um plano cartesiano, visualizando o gráfico da função exponencial e que está concatenado com o fractal construído; para esta atividade, evidenciamos que o gráfico da função exponencial é de natureza crescente.

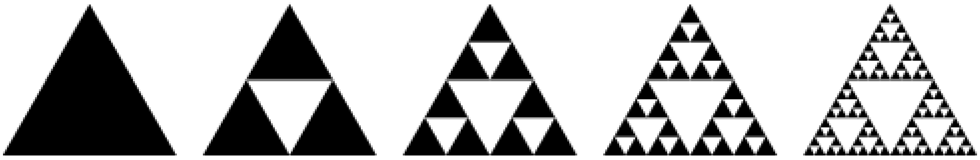
Avaliação

O professor deve pedir a cada um dos estudantes a construção realizada na sala de aula e as razões do porquê é uma função exponencial.

Bem, como para esta avaliação o professor deve solicitar a construção em papel, tesouras e cola, a fabricação do fractal mostrado na Figura 1 e o gráfico da função exponencial resultante.

ATIVIDADE 2: O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um triângulo de Sierpinski.



a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de triângulos sombreados existentes em relação com um nível quaisquer nessa sequência.

OBJETIVOS

- ✓ Conhecer o conceito de triângulo de Sierpinski
- ✓ Conjeturar sobre situações diferentes dada uma sequência de figuras
- ✓ Construir um triângulo de Sierpinski
- ✓ Visualizar o uso da função exponencial em usos geométricos

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Gráfica de função exponencial
- ✓ Triángulo de Sierpinski
- ✓ Equação de uma função exponencial
- ✓ Potenciação de números inteiros positivos

TEMPO ESTIMADO: 4 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO

- ✓ Caderno, lápis, caneta, borracha
- ✓ Tesoura, papel, regra, cola
- ✓ Lapis de Cor

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: O que é um triângulo de Sierpinski

Nessa etapa, o professor deve mostrar o que é um triângulo de Sierpinski para os estudantes.

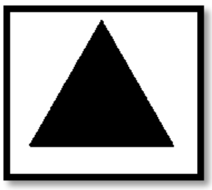
O triângulo de Sierpinski é um fractal que pode ser construído a partir de qualquer triângulo. Wacław Franciszek Sierpinski (1882-1969) foi um matemático polonês.

São notáveis suas contribuições na teoria dos conjuntos, teoria dos números, topologia e teoria da função. Na teoria dos conjuntos, ele fez importantes contribuições para o axioma de eleição e da hipótese do contínuo. Estudou a teoria da curva, que descreve um caminho fechado que contém todos os pontos do interior de um quadrado. Ele publicou mais de 700 artigos e 50 livros.

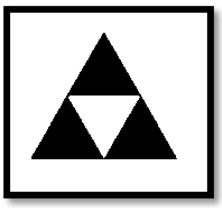
Três conhecidos fractais são nomeados: o triângulo de Sierpinski, o tapete de Sierpinski e a curva de Sierpinski. Também os números de Sierpinski na teoria dos números foram assim nomeado em sua honra.

Etapa 2: Construção do triângulo de Sierpinski

Passo Inicial (0): Construirmos um triângulo equilátero de lado a:

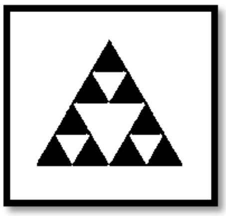


Passo 1: Liga-se os pontos médios dos lados, resultando a seguinte figura:

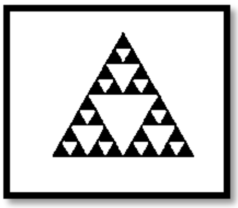


Três triângulos equiláteros sombreados e um no espaço interno, que também é um triângulo equilátero.

Passo 2: Repetimos o processo em cada um dos triângulos sombreados e obtenho a seguinte figura:



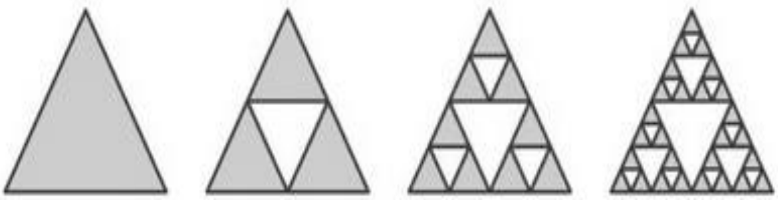
Passo 3: Repetimos o mesmo em cada um dos triângulos equiláteros sombreados, obtendo a figura seguinte:



E assim por diante.

No resumo, a sequência de figuras é a seguinte:

Figura 2 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: Dados de Pesquisa

Etapa 3: Relação triângulo existente e nível de sequência

Para essa atividade, o professor deve instruir o aluno a realização de possíveis soluções onde evidenciamos uma relação de duas variáveis, tais como o número de triângulos sombreados existentes e o nível sequência dada. Assim, o estudante realiza uma tabela de valores como segue:

Triângulos sombreados existentes	1	3	9	27
Nível de sequência	**0**	**1**	**2**	**3**

Com a realização da tabela acima, pede-se para o estudante escrever os números obtidos na caixa chamada triângulos sombreados existentes de forma exponencial, ou seja, o estudante deve fazer uma tabela de valores que apresenta a tabela com os dados, a seguir.

Triângulos sombreados existentes	3^0	3^1	3^2	3^3
Nível de sequência	**0**	**1**	**2**	**3**

Isto permitirá que o estudante conjecture uma equação exponencial para qualquer nível de sequência.

Etapa 4: Conjectura de uma função exponencial que envolve duas variáveis.

Para esta etapa, o estudante deve escrever uma função que relaciona os triângulos sombreados e qualquer nível dessa sequência, ou seja, de acordo com a tabela acima, a equação exponencial canônica deve ter a forma $y = 3^x$.

O professor deve gerar um debate para formalizar a equação exponencial, além de seus gráficos, tais como a definição da função exponencial: ¿A função está decrescendo? Ou ¿é uma função crescente?

Etapa 5: Gráfico de função exponencial

Para esta última etapa o estudante deve realizar um gráfico da função, visualizando a natureza exponencial e seu uso em outros contextos, como é o caso de uso de figuras geométricas consideradas na cotidianidade.

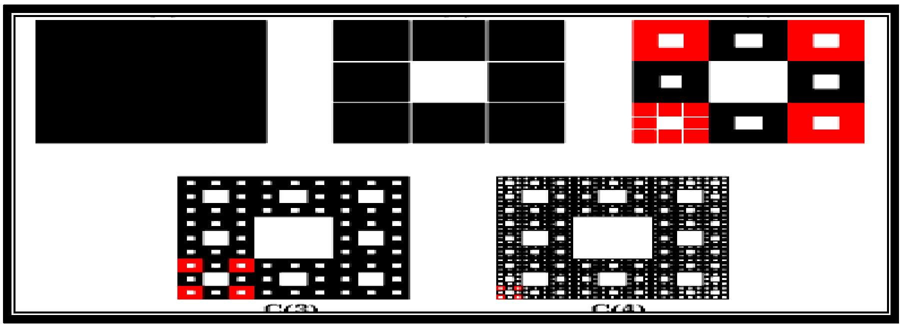
Avaliação

Para a avaliação desta atividade o professor deve pedir a construção da atividade, tanto seu gráfico assim como a equação exponencial.

Por fim, o professor deve pedir ao estudante uma opinião sobre o uso da função exponencial na sua cotidianidade, evidenciado o caráter fractal da natureza. Esses objetos encontram-se na difusa fronteira que existe entre o cosmos e o caos. O que tão aprofundados podemos vivenciar com este tipo de função?

ATIVIDADE 3: TAPETE DE SIERPINSKI

A sequência de figuras apresentada admite vários níveis na composição de um tapete de Sierpinski.



a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de quadros sombreados existentes em relação com um nível quaisquer nessa sequência.

OBJETIVOS

- ✓ Conhecer o que é o tapete de Sierpinski
- ✓ Associar processos geométricos no uso da construção do tapete de Sierpinski e a função exponencial.
- ✓ Conjecturar sobre as situações em processos geométricos no uso da função exponencial
- ✓ Construir um tapete de Sierpinski
- ✓ Familiarizar aos alunos sobre a geometria fractal

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Fractais
- ✓ Gráfico de uma função exponencial
- ✓ Equação canônica de uma função exponencial

- ✓ Geometria fractal
- ✓ Potenciação

TEMPO ESTIMADO: 4 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO:

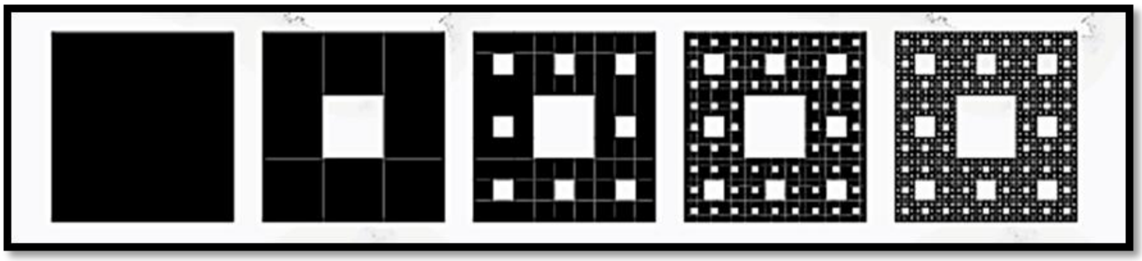
- ✓ Regra, lápis, caneta
- ✓ Tesoura, cola
- ✓ Papel quadriculado
- ✓ Borracha

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: O que é o tapete de Sierpinski

Este fractal é semelhante ao triângulo Sierpinski, mas desta vez, usando quadros para a sua definição. Para sua construção, partimos de um quadrado preto, que é dividido em nove quadrados iguais, dos quais o restante é pintado de branco e o resto é deixado preto. Após este procedimento, é repetido em sucessivas iterações para cada um dos quadrados pretos que tenham sido formados. Assim, vamos obtendo as figuras seguintes:

Figura 3 Tapete de Sierpinski 1



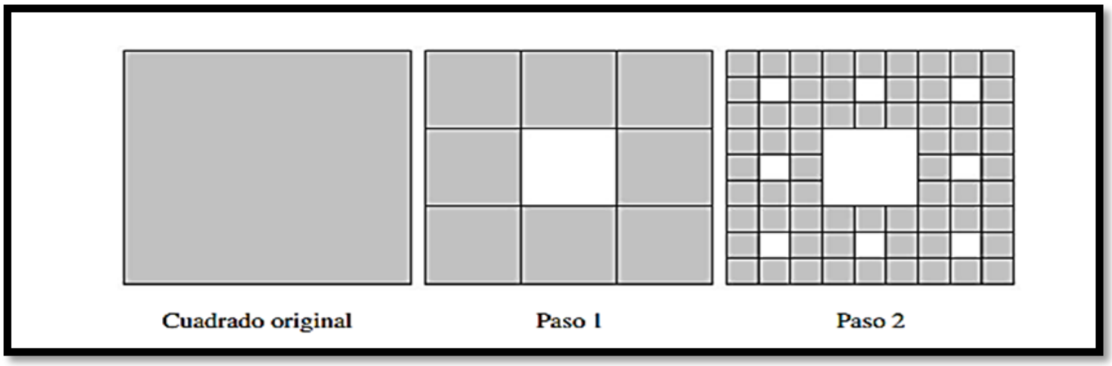
Fonte: Dados de Pesquisa

Etapa 2: Construção do tapete de Sierpinski

O processo de elaboração do tapete de Sierpinski é muito semelhante a do triângulo. Podemos dividir um quadrado de unidade inicial em nove quadrados idênticos e recortamos o quadro central. Repetimos o processo para cada iteração.

Partimos com um quadrado de lado 1. O primeiro passo é dividi-lo em nove quadrados iguais e retirar o quadrado central, ou seja, ficamos com oito quadrados. O segundo passo da construção consiste em fazer o que fizemos no primeiro passo em cada um dos oito quadrados obtidos na etapa anterior. E o processo é repetido para quantas vezes desejar, obtendo-se como resultado final, o objeto fractal conhecido como tapete de Sierpinski

Figura 4- Tapete de Sierpinski 2



Fonte: Dados de Pesquisa

O tapete de Sierpinski é obtido após sucessivas repetições de um algoritmo geométrico simples: dividir um quadrado em nove quadrados iguais e retirar o quadrado central, ou seja, resulta-se de oito quadrados da fronteira.

Etapa 3: Relação quadros existentes e nível de sequência

Para esse passo o professor deve ensinar o aluno sobre a relação entre quadros existentes e o nível de sequência, levando em conta a construção do tapete de Sierpinski e de suas características essenciais.

O estudante deve realizar uma tabela de valores onde ele relaciona os quadros existentes e o nível de sequência.

Quadros existentes	**1**	**8**	**64**
Nível de sequência	**0**	**1**	**2**

Em consequência, na tabela anterior, podemos apresentar na forma exponencial:

Quadros existentes	8^0	8^1	8^2
Nível de sequência	**0**	**1**	**2**

Isto permitirá que o estudante visualizar e conjecturar a forma exponencial da equação.

Etapa 4: Conjecturar uma equação exponencial que envolve duas variáveis.

Nesta etapa, o estudante deve conjecturar uma equação exponencial que envolve duas variáveis, para isso, pode-se ajudar levando em conta as tabelas elaboradas na etapa 3.

Com a construção anterior, o estudante deve chegar à fórmula geral $y = 8^x$, em que $x \in \mathbb{N}$; essa equação envolve a relação entre os quadros existentes, sendo que deve-se considerar a construção na etapa 2 e o nível de sequência, isto conduz o estudante encontrar que a relação é de natureza exponencial, ademais, levando em conta a definição, o aluno pode prever que é de natureza crescente.

Etapa 5: Gráfico de função exponencial

Nesta etapa, o estudante deve construir o gráfico da função exponencial que relacione os quadros sombreados e em um nível qualquer dessa sequência. Vale destacar a seguinte pergunta: trata-se de uma função decrescente ou é uma função crescente?

Avaliação

Na avaliação o estudante deve comprovar a construção e visualização da função exponencial, a partir da confecção e familiarização do tapete de Sierpinski, sendo que o estudante deve entregar, no papel quadriculado, o gráfico.

Também o professor pode realizar a construção usando papel, cola e tesoura a fim de que o estudante visualize a relação entre os quadros existentes e o nível de sequência, anotando as respostas as suas conjecturas.

ATIVIDADE 4: ANÁLISES DE GRÁFICOS EM GEOGEBRA. APLICAÇÕES EM DIFERENTES SITUAÇÕES.

Na seguinte atividade construirmos e analisarmos a partir do programa Geogebra os possíveis casos da função exponencial geral enfocada da seguinte forma $f(x) = k \, . a^x$ levando em conta o uso de deslizantes e enfocando-nos na natureza crescente ou decrescente da função.

OBJETIVOS

- ✓ Analisar as atividades propostas
- ✓ Tirar conclusões e compartilhá-las com os seus companheiros
- ✓ Reconhecer e valorizar os modelos matemáticos.
- ✓ Geogebra

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Potenciação

TEMPO DE AULA: 5 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO:

- ✓ Computador
- ✓ Programa Geogebra
- ✓ Papel, lápis, caneta

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: Uso de deslizantes

Acessamos o programa Geogebra. Para tal, utilizarmos a ferramenta, chamada controle deslizante. Essa ferramenta permite modificar o valor de um número. Colocar dois deslizantes chamados **k** e **a**, respectivamente.

Escrever a fórmula da função $\boldsymbol{f(x) = k\,.a^x}$**,** no campo de entrada. Imediatamente aparecerá o gráfico que corresponde aos valores de **k** e **a**, que figuram nos deslizantes; mover o deslizante **a** para que o seu valor seja 0, e ao deslizar $\boldsymbol{k}$**,** dar a ele o valor 1. Fazer com que a fórmula da função junto ao gráfico sejam visíveis. Para isto, na paleta Básico / Propriedades, ativar Mostra Objeto e Mostra Rótulo com opção Nome e Valor. Na mesma janela, fazer click na paleta Cor e eleger um de seu gosto para o gráfico da função. Ao fazer click na paleta Estilo podermos modificar a espessura e o estilo do traço.

Etapa 2: Função exponencial

Para esta etapa, podemos perguntar aos alunos a respeito de funções da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$: Como varia a função com valores de $a < 1$? E com valores de $a > 1$?

Para responder as questões, vamos utilizar o software Geogebra para a construção dos gráficos que relacionam às seguintes equações exponenciais

$$\cdot f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = (0,6)^x$$

O que ocorre com a curva, cuja medida de *a* diminui?

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = 3^{\,x}$$

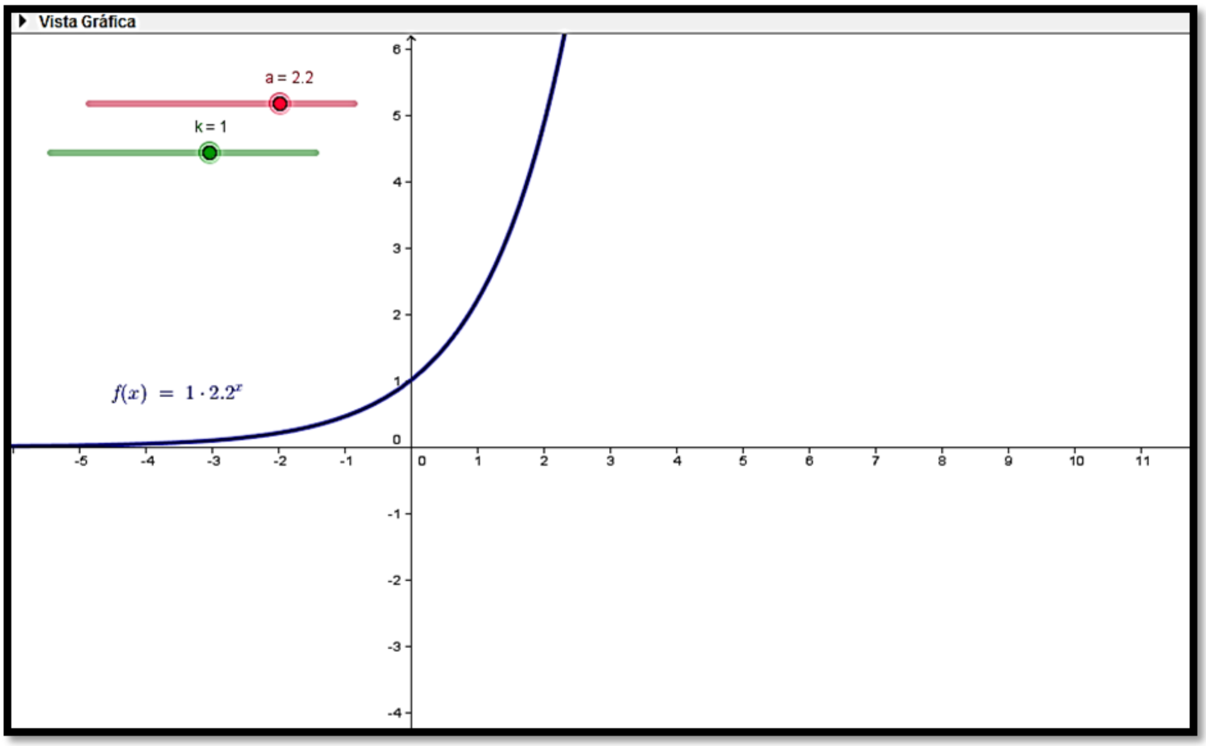
$$f(x) = 4^x$$

O que ocorre com a curva, a medida de *a* cresce?

Etapa 3: Gráfico da função exponencial

Deve-se, nesta etapa, construir gráficos e solucionar a questão da etapa 2 e, para isso, deve fazer uso aos deslizantes pelos quais obteremos do seguinte gráfico, conforme podemos visualizar na figura 5:

Figura 5- Construção de Deslizantes



Fonte: Dados de Pesquisa

Fazendo uso dos deslizantes, podermos colocar os gráficos solicitados e presumir as possíveis soluções que envolvem duas variáveis na função exponencial.

Avaliação

O professor deve verificar se o estudante realizou todas as atividades, e se o estudante sabe mobilizar os controles deslizantes, além de verificar a compreensão da definição, equação e gráfico de uma função exponencial.

ATIVIDADE 5: USO DA REPRODUÇÃO ASSEXUADA EM CÉLULAS QUE ENVOLVEM UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Na reprodução assexual por mitoses que ocorre em algumas classes de células, cada célula se divide em 2 e produze 2 células novas (a primeira desaparece) e o processo segue com estas duas.

a) Faça um quadro e um gráfico correspondente ao número de células presentes depois que tem repetido a divisão de uma a seis vezes.

b) Expressa a função $y = f(x)$.

OBJETIVOS

- ✓ Identificar uma situação problema que envolve uma função exponencial.
- ✓ Prever sobre as possíveis soluções que envolvem uma função exponencial.
- ✓ Mostrar as conjecturas mediante uma equação exponencial
- ✓ Mostrar as conjecturas mediante um gráfico de função exponencial.

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Gráfico de uma função
- ✓ Quadros que envolvem duas variáveis
- ✓ Potenciação

TEMPO DE AULA: 3 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO:

- ✓ Régua, papel
- ✓ Caneta, lápis
- ✓ Borracha

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: Familiarização do problema

O estudante fará uso de um problema que envolve a reprodução assexuada por mitose que ocorre em algumas classes de células, cada célula é dividida em 2 e produz 2 células novas (a primeira desaparece) e o processo segue com essas duas.

O estudante deve realizar uma tabela de valores e um gráfico correspondente ao número de células presentes depois de repetir-se a divisão de uma a seis vezes.

Etapa 2: Tabela que envolve duas valores

Para esta tarefa, podemos realizar uma tabela de valores conjecturando a possível equação canônica, que nos permitirá construir o gráfico.

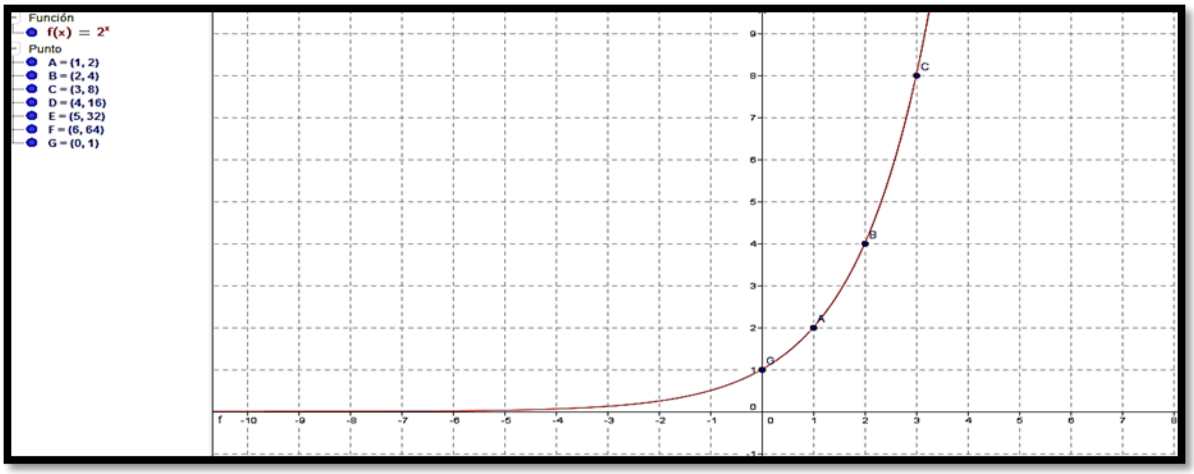
Nível de sequência	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Divisão celular (número de células)	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**

Portanto, os pontos para confeccionar o gráfico são os seguintes $(1{,}2)$ $(2{,}4)$ $(3{,}8)$ $(4{,}16)$ $(5{,}32)$ $(6{,}64)$

Etapa 3: Gráfico de uma função exponencial

Fazendo uso dos pontos encontrados na atividade anterior podemos localizá-los no plano cartesiano, levando em conta os pontos que estão determinados como (x, y), ou seja, (abscissa, ordenada), que nos permite construir o gráfico da função exponencial, tal como mostra a seguir:

Figura 6- Função $Y = 2^X$



Fonte: Dados de Pesquisa

Etapa 4: Equação canônica que envolve a divisão celular e o nível de sequência.

Nessa etapa, o estudante deve expressar a função exponencial na forma $y = f(x)$. visualizando o padrão existente na tabela, donde os valores podem ser representados mediante potências e, assim, os valores têm como constante a base 2, ou seja, que podemos generalizar a equação para a seguinte forma: $y = 2^x$.

Avaliação

O estudante deve apresentar ao professor as soluções das tarefas propostas nesta atividade, em papel quadriculado, mostrando o gráfico e a equação canônica da função exponencial.

ATIVIDADE 6: INTERPRETAR UMA EQUAÇÃO EXPONENCIAL DA FORMA $y = a^x + k$ ONDE k ES QUALQUER NÚMERO REAL

O que você pode conjecturar respeito do gráfico de $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$, com k um número real?

OBJETIVOS

- ✓ Interpretar uma situação que envolve uma função exponencial
- ✓ Conjecturar situações que envolvem uma variável específica
- ✓ Verificar que o estudante reconhece a situação como uma função exponencial.
- ✓ Verificar a natureza de k e seus possíveis valores.

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Potenciação
- ✓ Gráfico de uma função exponencial
- ✓ Lei de tricotomia

TEMPO DE AULA: 3 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO:

- ✓ Papel, lápis
- ✓ Régua, caneta
- ✓ Borracha

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: Gráfico de função exponencial

O estudante deve conjecturar a respeito do gráfico de $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$, com k um número real, as possíveis variações de k e o carácter crescente da equação exponencial, portanto, o estudante deve considerar quais são os possíveis valores de k e as diversificações da equação exponencial em torno dessa variável, tanto em forma gráfica como simbólica. Identificar a forma da função exponencial para poder apreciar que a base é maior que 1, portanto, segundo a definição da função exponencial, ela deve ser crescente.

Etapa 2: Variação e gráfico de k para valores positivos

Os valores de k podem ser escolhidos aleatoriamente, permitindo que possamos visualizar o comportamento dessa função, dependendo se k é positivo ou se k é negativo ou se k é igual a zero.

Logo, se k é positivo, podemos escolher números maiores que zero, ou seja, se tomarmos os valores de k como $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 1.5$ entre outros números de k.

Consequentemente, as funções:

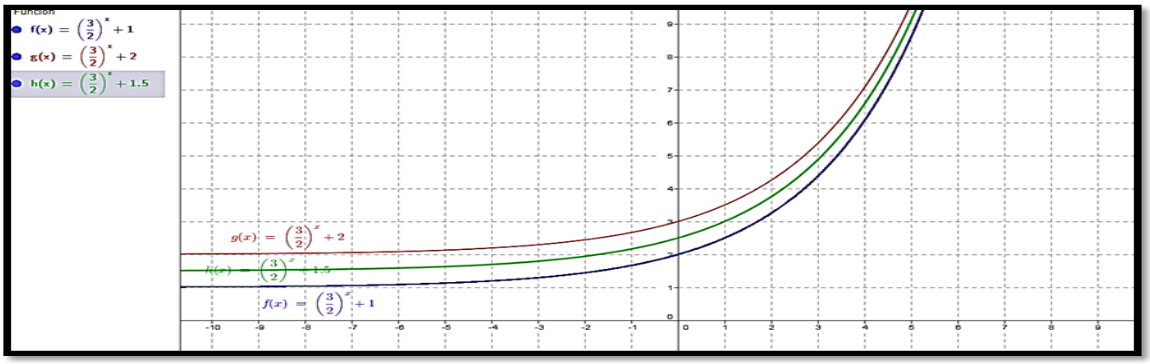
$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 \; si \; k = 1$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 \; si \; k = 2$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1.5 \; si \; k = 1.5$$

Portanto, os gráficos serão da seguinte forma:

Figura 7 - Variação de k quando é positivo



Fonte: Dados de Pesquisa

Podemos conjecturar que os gráficos acrescentam seu nível no eixo y, com intercepto da forma $(\mathbf{0}, \boldsymbol{k}+\mathbf{1})$.

Etapa 3: Variação e gráfico de k para valores negativos

Nesta etapa, tomamos valores no caso de, se k é negativo,: podemos tomar alguns valores de k como por exemplo $-1. -2-3$.

Logo, as equações resultantes são da seguinte maneira:

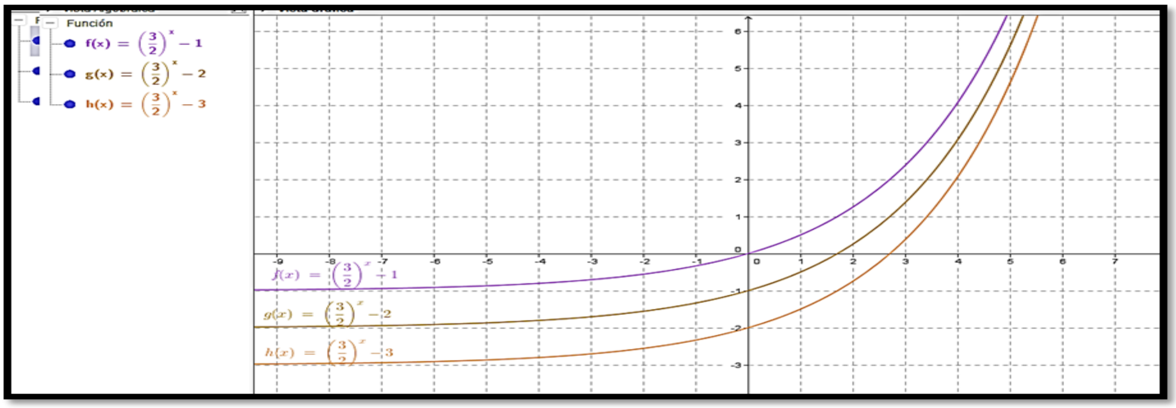
$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{k} = -\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{2}\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{k} = -\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{3}\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{k} = -\mathbf{3}$$

E, agora, os gráficos da função exponencial serão da seguinte forma.

Figura 8 - Variação de k quando é negativo



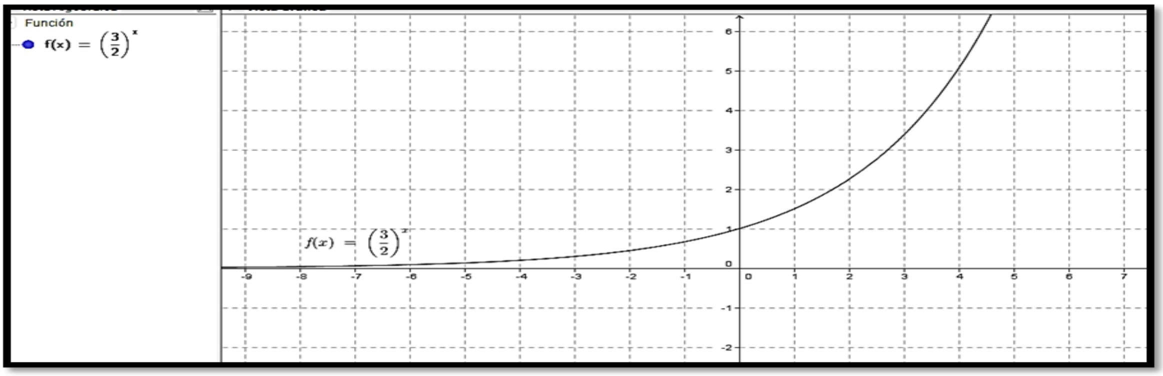
Fonte: Dados de Pesquisa

Podemos conjecturar que os gráficos diminuem seu nível no eixo y, com intercepto da forma $(\mathbf{0}, \boldsymbol{k}+\mathbf{1})$.

Etapa 4: Variação e gráfico de k para o valor zero

Para o último caso, $k = 0$, o gráfico passa pelo ponto (0.1) e representamos seu gráfico da seguinte maneira:

Figura 9 - Gráfico da Função quando k é zero



Fonte: Dados de Pesquisa

Convém sublinhar que, para essa atividade, o estudante deve considerar a lei de tricotomia dos números reais, que permita ele tomar as possíveis considerações do valor de k.

Avaliação

O estudante deve entregar ao professor e socializar as soluções encontradas nessa atividade.

O professor deve gerar um debate que permita visualizar a natureza de k e identificar para qualquer equação, se o gráfico da função exponencial trata-se de um gráfico crescente ou decrescente.

ATIVIDADE 7: SITUAÇÃO QUE ENVOLVE O CRESCIMENTO DE CERTO CULTIVO DE BACTÉRIAS MINISTRADO PELA EQUAÇÃO DA FORMA $y = a(b^x)$

O crescimento de determinado cultivo de bactérias está regulada pela equação.

$$p(t) = 600(3^{2t})$$

t em horas. Se há 600 bactérias às 6:00 am ¿Quantas terá às 8:00 am? ¿Quantas às 10:00 am? ¿O que ocorre com a população cada 2 horas? ¿Como será o gráfico?

OBJETIVOS

- ✓ Identificar a equação da forma $y = a(b^x)$
- ✓ Identificar a base de uma equação exponencial
- ✓ Presumir em situações que envolvem duas variáveis
- ✓ Verificar as características importantes que envolvem uma função exponencial

CONTEÚDOS

- ✓ Função exponencial
- ✓ Potenciação
- ✓ Multiplicação de números inteiros
- ✓ Gráfico de uma função exponencial
- ✓ Equação de uma função exponencial

TEMPO DE AULA: 2 aulas

MATERIAL NECESSÁRIO

- ✓ Régua, papel quadriculado
- ✓ Lápis, caneta
- ✓ Borracha

DESENVOLVIMENTO

Etapa 1: Familiarização do problema

Para esse trabalho, o estudante deve analisar a relação existente que envolve um certo cultivo de bactérias ministrado pela equação da forma

$$\boxed{p(t) = 600(3^{2t})}$$

Sendo t dado em horas.

Nesta atividade, o estudante deve considerar a relação entre o número de bactérias e o tempo transcorrido; na parte inicial da situação, que existem 600 bactérias às 6h e, portanto, podemos nos perguntar, quantas bactérias haverá às 8h? Quantas bactérias teriam às 10h? E, por fim, o que ocorre com a população cada 2 horas?

Etapa 2: Tabela que envolve duas valores

Para esta atividade, o uso de uma tabela de valores que envolvem duas variáveis pode auxiliar no reconhecimento da função.

As variáveis relacionadas é a quantidade de bactérias com relação ao tempo e, seguindo a equação proposta temos:

Tempo	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de bactérias	600	5 400	48 600	437 400	3 936 600

Portanto, às 8h, ou seja, duas horas decorridas, a situação contempla uma quantidade de 48 600 bactérias e, às 10h, uma quantidade de 3 936 600 bactérias.

Etapa 3: O que podemos conjecturar, considerando os resultados obtidos

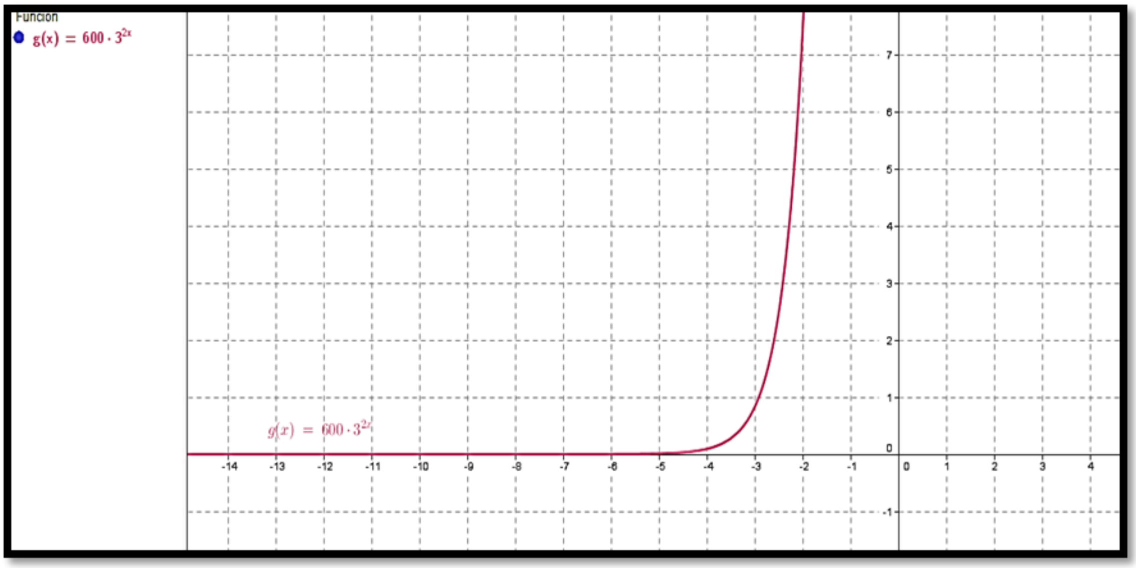
Segundo a equação proposta no problema, podermos concluir que o comportamento da função é crescente, a respeito do crescimento de bactérias em um tempo dado.

Ou seja, o comportamento em que a cada duas horas, o aumento é de 81 vezes o crescimento anterior.

Etapa 4: Gráfico da situação dada

Considerando os dados da tabela anterior, podemos construir o gráfico da função exponencial, da forma $y = a(b^x)$, que envolve o número de bactérias e o tempo decorrido. O gráfico da função exponencial é da seguinte forma:

Figura 10 - Gráfico da Função $\boldsymbol{p(t) = 600(3^{2t})}$



Fonte: Dados de Pesquisa

Avaliação

O estudante deve apresentar ao professor as construções que tem realizado nas etapas anteriores, mediante papel quadriculado, justificando a solução de cada etapa.

Ademais, o estudante deve socializar as respostas obtidas durante a elaboração do gráfico exponencial e a tabela de valores.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Para esse trabalho, deve-se levar em conta que as atividades aqui apresentadas são um produto da implementação de tarefas que abordam o tema de função exponencial em sala de aula e podem potencializar o processo de aprendizagem de Matemática, considerando o contexto utilizado do qual faz parte o professor.

Neste Produto Educacional, foi destacada a natureza formativa do ser humano na sociedade e, por isso, utilizamos os conceitos matemáticos envolvidos na sua cotidianidade.

A educação deve abordar temas que envolvam problemas que dizem respeito às fragilidades da nossa sociedade, do nosso sistema de produção, no sentido de conscientizar as pessoas de que, há possibilidade de mudança, mas, sobretudo, se o investimento de conscientização ocorrer na vida escolar de cada indivíduo, pois são elas as futuras pessoas que atuarão nas comunidades.

Você, professor, tem também a missão de permitir que todos, sem exceção, desenvolverem os seus talentos e todas as suas capacidades de criação, o que significa que cada um pode assumir a responsabilidade por si mesmo e perceber o seu projeto pessoal.

É de grande urgência pensar e perceber segundo Jacques Delors (1996), que o professor deve aprender a conhecer. Mas, levando em conta as rápidas mudanças trazidas pelos avanços na ciência e as novas formas da atividade social, o professor deve aprender a fazer. Convém não se limitar a conseguir a aprendizagem de um ofício e em um sentido mais amplo adquirir uma competência que permita lidar com inúmeras situações algumas imprevisíveis e facilitar o trabalho em equipe, dimensão demasiado esquecida nos métodos de ensino atuais.

Por fim, o professor deve aprender a ser. nas mudanças que adquirirmos os próximos anos vai exigir-nos uma maior autonomia e julgamento, junto com o reforço da responsabilidade pessoal na realização do destino coletivo na qual deve por obrigação não deixar sem explorar nenhum dos talentos que como tesouros estão enterrados no fundo de cada pessoa.

REFÊRENCIAS

DELORS, Jacques. **Los cuatro pilares de la educación**. La educación encierra un tesoro informe de la UNESCO de la comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI. Madrid, España: Santillana / UNESCO, pp 91-103. 1996.

GUIMARÃES, Yara A.F. GIORDAN Marcelo. **Instrumento para a construção e validação de sequências didáticas em curso a distância de formação continuada de professores**. Universidade de São Paulo. Programa Inter unidades em ensino de ciências. 2012. 13 f.

PREFEITURA MUNICIPAL DE IPATINGA. **Sequência Didática.** Secretaria Municipal de educação. Departamento de pedagógico seção de ensino formal. Centro de formação pedagógica. Ipatinga. Minas gerais. 13 f.

REYES PEREZ Luis Eduardo. **Función exponencial en el aula: Praxeologias matemáticas en enseñanza media**. 2015. 116 f. dissertação de mestrado. Programa de pós-graduação em educação matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de fora, 2015.

ANEXOS

Em seguida daremos a conhecer as atividades envolvidas nesse produto educacional com o intuito de contribuir na construção das suas próprias tarefas levando em conta o seu contexto, aqui o professor deve pensar e escrever as suas impressões e a maneira de aprimorar cada atividade em sala de aula.

ANEXO 1

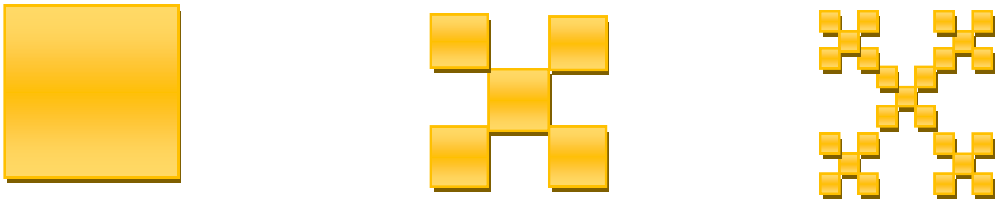
Tarefa de fractales

ATIVIDADE 1: A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.

a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de quadrinhos existentes na figura A de um nível quaisquer dessa sequência.

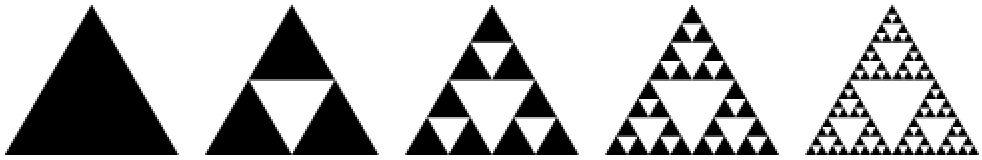
Figura A



ANEXO 2

<u>Tarefa de triângulo de Sierpinski</u>

Atividade 2: A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um triângulo de Sierpinski.



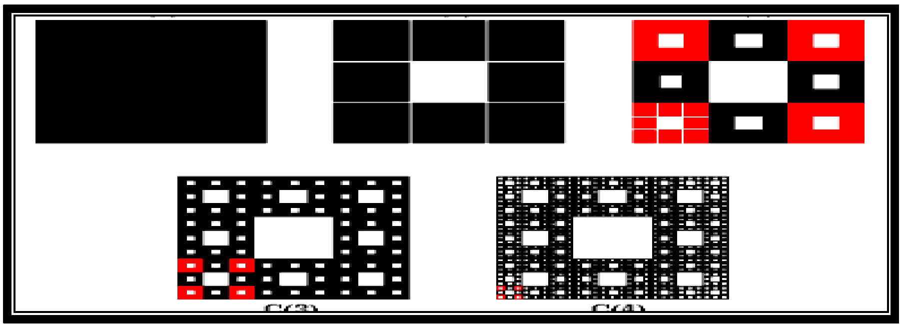
a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de triângulos sombreados existentes em relação com um nível quaisquer nessa sequência.

ANEXO 3

Tarefa de tapete de Sierpinski

ATIVIDADE 3: A sequência de figuras apresentada admite vários níveis na composição de um tapete de Sierpinski.



a) Usando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expressa o número de quadros sombreados existentes em relação com um nível quaisquer nessa sequência.

ANEXO 4

Tarefa de Geogebra

ATIVIDADE 4: Nesta atividade construirmos e analisarmos a partir do programa Geogebra os possíveis casos da função exponencial geral enfocada da seguinte forma $f(x) = k \, . \, a^{x}$ levando em conta o uso de deslizantes e enfocando-nos na natureza crescente ou decrescente da função.

ANEXO 5

Tarefa de divisão celular

ATIVIDAD 5: Na reprodução assexual por mitoses que ocorre em algumas classes de células, cada célula se divide em 2 e produze 2 células novas (a primeira desaparece) e o processo segue com estas duas.

a) Faça um quadro e um gráfico correspondente ao número de células presentes depois que tem repetido a divisão de uma a seis vezes.

b) Expressa a função $y = f(x)$.

ANEXO 6

<u>Tarefa da variação de K</u>

Atividade 6: O que você pode conjecturar respeito do gráfico $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$ com k um número real.?

ANEXO 7

Tarefa de aplicação

Atividade 7: O crescimento de determinado cultivo de bactérias está regulada pela equação.

$$p(t) = 600(3^{2t})$$

t em horas. Se há 600 bactérias às 6:00 am ¿Quantas terá às 8:00 am? ¿Quantas às 10:00 am? ¿O que ocorre com a população cada 2 horas? ¿Como será o gráfico?