JOSÉ LAELSON GOMES CRUZ
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA

Uma proposta de atividades de geometria envolvendo registros de representação semiótica

Campina Grande –PB
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JOSÉ LAELSON GOMES CRUZ
JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA

Produto educacional vinculado à Dissertação de Mestrado intitulada *Um estudo de representações semióticas em atividades de geometria*, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa *Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática*.

Área de concentração *Educação Matemática*

CAMPINA GRANDE, PB
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Caro colega, professor do Ensino Médio,

Iniciei minha carreira docente nos anos 90, ministrando aulas para estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, na época, Ensino Primário e Ginasial. Atualmente leciono no Ensino Médio em duas escolas estaduais na Paraíba.

Apresento-lhes este Produto Educacional, exigência do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, para obtenção do título de Mestre, a partir da pesquisa de mestrado que resultou na dissertação "Um estudo das representações semióticas em atividades de geometria", defendida em outubro de 2018.

Sendo assim, compartilho um pouco do que foi realizado ao longo dessa pesquisa. Procuro descrever as propostas de atividades acrescidas de reflexões acerca do processo vivido pelos alunos. Espero que essa proposta possa servir como uma ideia inicial para que você possa adaptá-la a suas necessidades, e que as discussões e reflexões feitas possam contribuir para sua prática profissional.

Neste material, exploramos também, como complemento de atividades, questões do ENEM, relacionadas aos sólidos geométricos, que são abordadas com muita frequência nas provas de Matemática e Tecnologias. Analisamos estas questões abordando as unidades significativas peculiares relativas ao contexto do problema com o auxílio da *teoria dos registros de representação semiótica*, comentando a produção em registro na língua natural com o objetivo de servir de orientação para a proposição de atividades semelhantes em suas aulas.

Se quiser comentar o nosso trabalho ou fazer alguma sugestão, estamos à disposição, para isto envie-nos um e-mail (laelsomcruz@hotmail.com ou jjedmat@gmail.com).

2. O PROCESSO DE PRODUÇÃO DE REGISTROS SEMIÓTICOS

Imagem de Raymond Duval
Fisem.Org

Raymond Duval desenvolve suas pesquisas no campo da psicologia cognitiva desde 1970, apresentando a *teoria dos registros de representação semiótica*, como contribuição para melhorar os processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Duval foi pesquisador do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) de Estrasburgo, França, de 1970 até 1995. Atualmente, é professor emérito em Ciências de Educação da Université du Littoral Côte d´Opale, na cidade de Boulogne-sur-mer, e reside na cidade de Lille, norte da França.

A *Teoria dos registros de representação semiótica* vem sendo utilizada como embasamento teórico para a análise e caracterização das práticas de Matemática. Além disso, “apresenta caminhos para solucionar as dificuldades na aprendizagem. Dada a diversidade de representações semióticas de um mesmo objeto matemático” (CRUZ, 2018, p.15). Duval (2003) enfatiza que representações do mesmo objeto matemático têm papel fundamental na aprendizagem de Matemática**,** por apresentar um caráter abstrato deste mesmo objeto matemático com significados que podem ser trabalhados na construção coerente de um contexto. Deste modo, desenvolve no aluno a capacidade de mobilizar, simultaneamente, dois ou mais registros de representações semióticas, coordenando-os de forma natural.

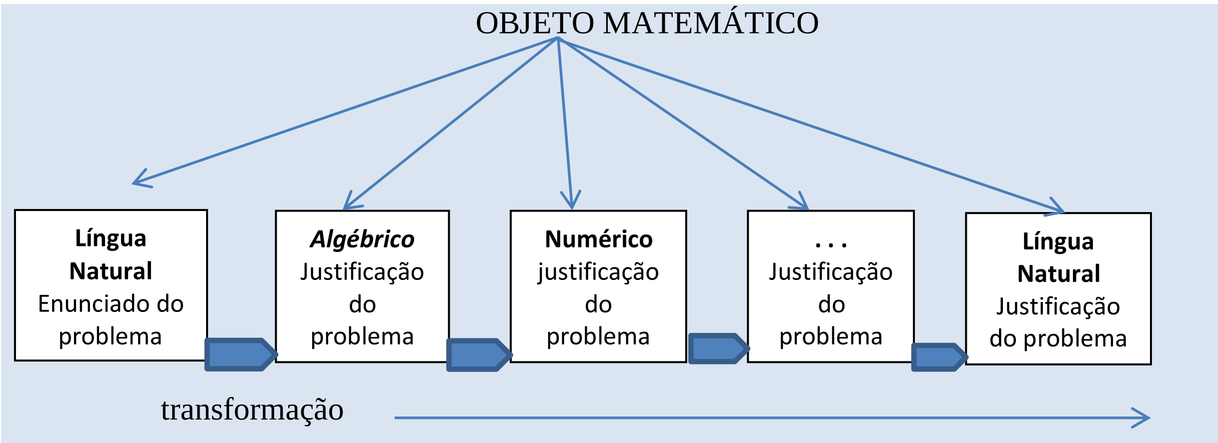
As representações semióticas se constituem em três funções que as diferenciam dos outros tipos de representações, são elas: a comunicação, a objetivação e o tratamento. Segundo Sousa (2009, p.6) “[...] a não utilização da representação para a comunicação tornaria inviável qualquer troca de conhecimento”. A função de comunicar busca no indivíduo as representações internas, concretizando a sua percepção mental de um objeto que está sendo conceituado em um dado momento. Por isso, as representações são essenciais para o desenvolvimento cognitivo do pensamento. “O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação” (DUVAL, 2012, p.270). Sendo assim, os dois sentidos, cognitivo e representação externa, têm a mesma importância nas abordagens que se destacam nos significados abordados, podendo, assim, compreender o sistema cognitivo dos alunos nas representações produzidas.

Para Damm (2008),

> [...] Toda comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para o seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático” (DAMM, 2008, p.167),

A função *objetivação* é a clareza do que está sendo produzindo, isto é, torna claras as suas transformações de modo que a aprendizagem sirva para si próprio. A função de *tratamento* é aquela forma que se realiza produzindo registros em transformações para se obter a resposta de um problema.

Quanto às atividades cognitivas, Duval (2003) caracteriza em formação, tratamento e conversão, especificando ainda *os diferentes tipos de representação de registros* que identificam um objeto em estudo, e que são realizados nas três atividades cognitivas para a compreensão da aprendizagem. Alguns desses tipos de registros são: linguagem natural; escritas algébricas e formais; figuras geométricas; e representações gráficas. Vejamos como podemos representar o objeto matemático neste contexto.



Por formação, “a observância de tais regras é que permite identificar elementos esparsos ou traços como uma representação dentro de um sistema semiótico” (BARRETO, 2009, p.131), isto é, são regras que são utilizadas para formação de um determinado registro. Para que se realize, o aluno tem que ter o conhecimento das unidades significativas para a formação das propriedades de um objeto matemático em estudo.

O tratamento também é de grande importância como atividade cognitiva, pois é constituída de uma transformação utilizando o mesmo sistema de registro inicial, por exemplo, produzir registros geométricos a partir de uma imagem geométrica.

Para Duval (2003, p.18), “[...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que [...] aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”. Por exemplo, em atividades com imagens geométricas produzidas em fotografias, onde se busca compreender o objeto matemático em estudo, pede-se ao aluno para fazer um registro em língua natural explicando a solução do problema, constituindo assim, a mudança do tipo de registro. Neste sentido, Duval (2004) afirma, ainda, que a escolha de um registro de representação depende de um sistema semiótico que não pode ser de qualquer natureza.

Diante destas estratégias teóricas é que o ensino da Matemática deve ser embasado para estimular a curiosidade dos alunos, levando-os à reflexão e produção de significados. Mais adiante sugerimos que seja aplicado este estudo de produção de registros a partir de questões do ENEM. Para isso, buscamos algumas questões no banco de dados de provas que já foram realizadas.

O ENEM, criado em 1998, é um exame individual, com participação voluntária, oferecido anualmente aos estudantes que estão concluindo o Ensino Médio ou que já concluíram em anos anteriores. Seu objetivo principal, conforme o sítio do Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), é possibilitar uma referência de auto avaliação, a partir das competências e habilidades que estruturam o exame.

No que se refere ao ensino de geometria, damos um destaque, pois “a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela interliga com a Aritmética e com a Álgebra” (LORENZATO, 1995, p.7). Em concordância com essa afirmação, segundo Duval (2003), as atividades envolvem formas geométricas podem ser transformadas no mesmo sistema de registro *(tratamento)* ou em um registro diferente *(conversão)* podendo ser dentre uma escrita algébrica e formal, uma representação gráfica, uma linguagem natural e outros.

Conforme propostas de atividades que foram desenvolvidas na pesquisa de Cruz (2018), sugerimos a sua aplicação em outros contextos, também podendo ocorrer adaptações para outras atividades que poderão ser realizadas em sala de aula. As atividades que foram realizadas na pesquisa de Cruz (2018) são: o registro representativo de um contexto envolvendo formas geométricas, por meio do qual comunica contribuições da transposição do Rio São Francisco, beneficiando setores sociais e econômicos, principalmente na comunidade onde está inserida a escola, imagens fotografadas e publicadas pelos alunos envolvidos na pesquisa, em seus bate-papos no grupo privado da *Internet* e, por fim, reprodução da Bandeira Nacional utilizando materiais concretos. A seguir vamos expor as atividades e os resultados conquistados na pesquisa. Todas as atividades se encontram anexo, para serem utilizadas em sala de aula.

3. BLOCO DE ATIVIDADES

Denominamos bloco de atividades ao conjunto de atividades realizadas no decorrer da pesquisa.

3.1. Conhecendo o ambiente de pesquisa

A atividade requer que, usando régua e transferidor, seja verificado se as imagens 2 e 3 são uma ampliação da imagem 1, *do ponto de vista da Matemática.*

Nesta atividade os alunos, após tratamento no mesmo sistema de registros, terão que produzir um registro final na língua natural justificando a resposta do problema. Sendo assim, para Cruz (2018), no processo inicial da construção da justificação da resposta, os alunos utilizarão a régua e transferidor, que são instrumentos de medidas no mesmo sistema de registros, que denominamos aqui medidas geométricas nas unidades significativas, que são peculiares ao problema proposto.

ATIVIDADE 1

Usando régua e transferidor, verifique, em dupla, as medidas das imagens 2 e 3, relatando se é uma ampliação da imagem 1, do ponto de vista da Matemática.

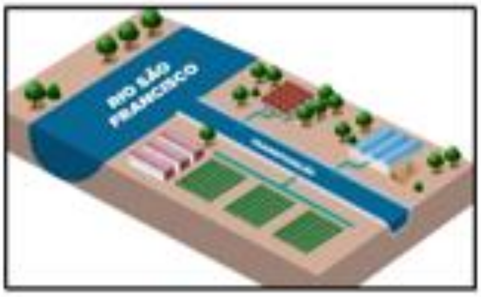


Imagem 1: Original da chamada PBTEM Transposição do Rio São Francisco
https://itsagencia.com.br/its/index.php/component/k2/item/372-chamada-pbtem-transposicao-do-rio-sao-francisco

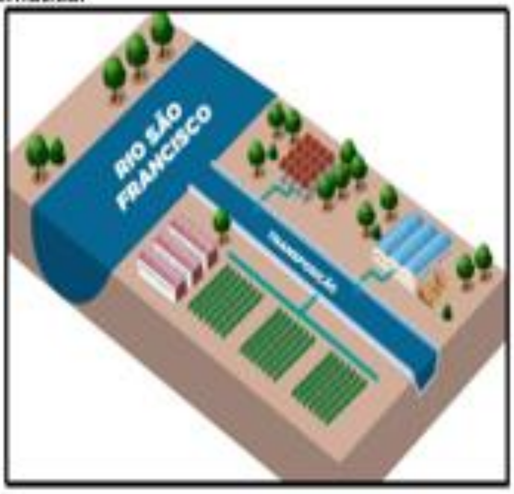


Imagem 2: Ampliação. Sim( ) não( )

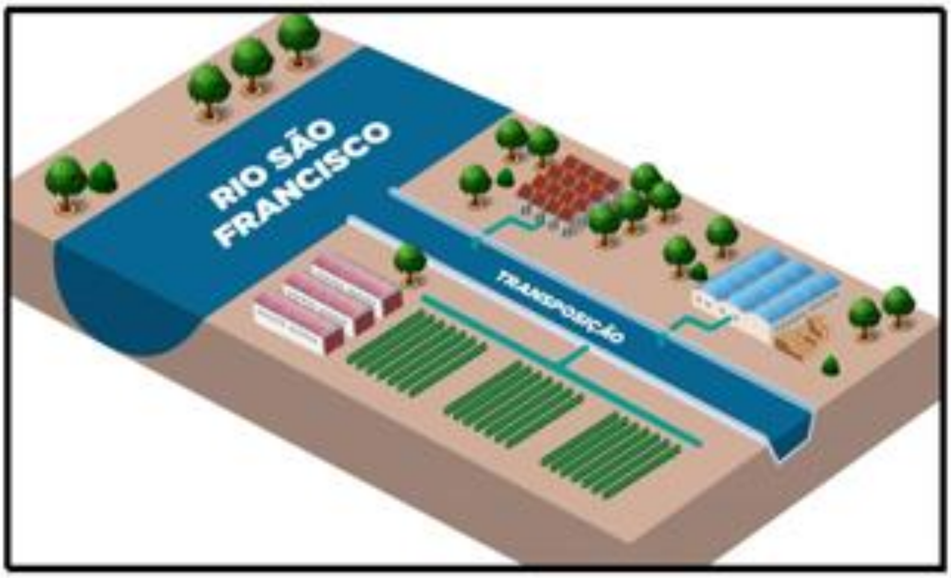


Imagem 3: Ampliação. Sim ( ) não ( )

Registros das discussões no grupo.

GRUPO: _____

Fonte: Cruz (2018)

3.2.Transformações nos registros produzidos pelos alunos

Este bloco consta de duas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Na primeira, “usando régua, construa, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens”.

Nesta atividade os alunos são provocados a produzir mais registros, devido ao fato de produção da constante de ampliação com ajuda do professor. De acordo com os debates, eles terão que fazer, além do tratamento com a utilização da régua, um registro algébrico, um registro no sistema de numeração, como também um registro na língua natural para justificar a resposta do problema.

GRUPO: E

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem 1: original do grupo "Família G"- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. ( ) horizontal ( ) vertical ( ) oblíquo

Imagem 3: Segmentos. ( ) horizontal ( ) vertical ( ) oblíquo

Registros das discussões no grupo

Fonte: Cruz (2018)

A segunda Atividade deste bloco, consta de “duas imagens, onde na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda houve uma ampliação de 50%. “Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original”.

Nesta atividade os alunos são provocados a produzir as medidas originais das imagens apresentadas, que é o contrário do processo que se realiza cognitivamente na Atividade 2. E como esta atividade está na sequência das atividades anteriores, espera-se que eles produzam mais registros espontaneamente.

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G" - WhatsApp

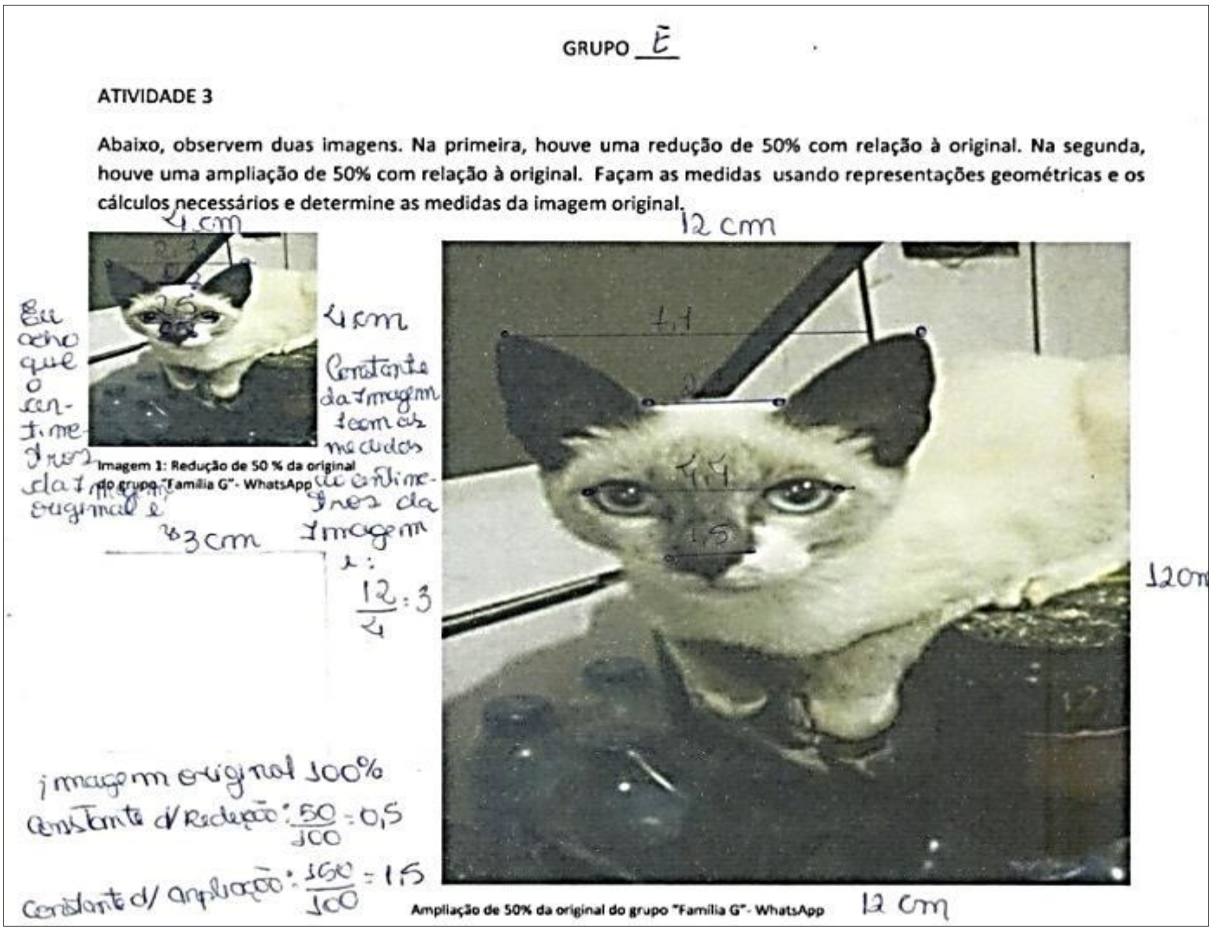
Ampliação de 50% da original do grupo "Família G" - WhatsApp

Registros das discussões no grupo.

Fonte: Cruz (2018)

3.3. Conversões semióticas em uma intervenção usando materiais concretos

As atividades realizadas neste bloco constam em fazer uma pesquisa e produzir a Bandeira Nacional, “em uma oficina pedagógica de materiais concretos, na qual as medidas dos segmentos serão realizadas proporcionalmente em conformidade com o registro das medidas oficiais, Justificando-se na aprendizagem um caráter integrador e oportunizando um contato direto com o conteúdo relacionado” (CRUZ, 2018, p.12).



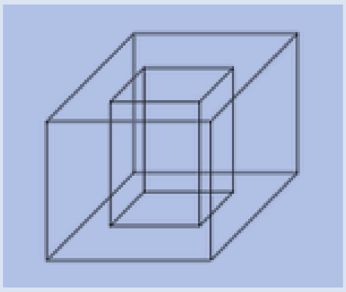
Fonte: Ficha de atividade do Grupo E

De acordo com Cruz (2018), percebemos que este grupo produziu diversos registros para justificar a resposta do problema proposto, o mais significativo foi a maneira como eles provaram em registros essa ampliação e redução nas medidas dos segmentos a partir de pontos na orelha do animal.

Seguem atividades de problemas geométricos das últimas provas do ENEM, e o que podemos esperar da produção dos registros dos alunos quando aplicados em sala de aula.

4. PROBLEMA E ANÁLISES

Problema 1 – Cubo (Adaptado de ENEM – 2010). Um porta lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado ao lado. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



Qual o volume de madeira utilizado na confecção desse objeto?

Como o volume de um cubo é dado por $V_c = (\text{aresta})^3$, construa um texto relatando quais são as unidades significativas peculiares ao problema proposto para encontrar o volume da madeira utilizado na confecção desse objeto e qual a relação que existe com a imagem.

No processo de resolução é importante chamar a atenção para as arestas e conhecê-las nos sólidos geométricos.

Primeira solução

Seja *x* a aresta do cubo maior. Então, *x* = 12 cm

$$V_m = x^3 \Rightarrow V_m = 12^3 \Rightarrow V_m = 1728$$

Logo, o volume do cubo maior é igual a 1728 cm^3

Seja *y* a aresta do cubo menor. Então, *y* = 8 cm

$$V_n = y^3 \Rightarrow V_n = 8^3 \Rightarrow V_n = 512$$

Logo, o volume do cubo menor é igual a 512 cm^3

Seja V_o o volume do objeto. Então, $V_o = V_m - V_n$

$$V_o = 1728 - 512 \therefore V_o = 1216$$

Logo, o volume do objeto é igual a 1216 cm^3

Segunda solução – Língua natural

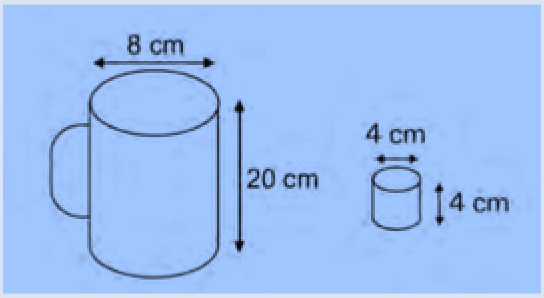
Como o cubo interno é vazado, o volume da madeira se calcula pela diferença entre os volumes dos cubos externo e interno. No cubo externo, a aresta mede 12 cm e, então o volume é dado por $(12\text{ cm})^3$, que é igual a 1728 cm^3. Por sua vez, o cubo interno tem aresta igual a 8 cm. Fazendo o mesmo cálculo, o volume do cubo menor é dado por $(8\text{ cm})^3$, logo é igual a 512 cm^3. A diferença entre os dois, dada por $1728\text{ cm}^3 - 512\text{ cm}^3$, é igual a 1216 cm^3, que corresponde ao volume da madeira utilizada na confecção do porta lápis.

Análise

Inicialmente resolvemos a questão por meio do registro algébrico, estabelecendo uma relação direta com a representação geométrica, a partir da compreensão sobre as arestas e sobre o volume. Logo, é necessário que o aluno compreenda a relação entre a medida da aresta e o cálculo do volume do cubo ou tetraedro regular, percebendo que a relação é a mesma para qualquer cubo (tanto para o maior, quanto para o menor).

No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. E, com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 2 – Cilindro (Adaptado de ENEM – 2010). Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos também cilíndricos.



Com objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, que percentagem da leiteira Dona Maria deverá encher?

Como o volume de um cilindro é dado por V_c = (Área da Base) · (Altura), e a base é um círculo, cuja área é dada por $\pi \cdot r^2$, construa um texto relatando essas unidades significativas peculiares ao problema proposto para encontrar a justificativa que leva Dona Maria a encontrar a melhor solução para o problema.

Nas soluções, é importante olhar para o diâmetro a fim de buscar o raio do círculo da base nos dois cilindros.

Primeira solução

Seja V_L o volume da leiteira, cujo diâmetro mede 8 cm. Então, o raio R é igual a 4 cm. Assim,

$$V_L = \pi \cdot R^2 \cdot h \Rightarrow V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 \Rightarrow V_L = \pi \cdot 16 \cdot 20 \Rightarrow V_L = 320\pi$$

Logo, o volume da leiteira é igual a 320π cm^3

Seja V_l o volume do copinho de diâmetro 4 cm. Então, o raio r é igual a 2 cm

$$V_l = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_l = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \Rightarrow V_l = \pi \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow V_l = 16\pi$$

Logo, o volume do copinho é igual a 16π cm^3

Seja X a quantidade de copinhos cheios, temos:

$$X = \frac{V_L}{V_l} \Rightarrow X = \frac{320\pi}{16\pi} \therefore X = 20$$

Então, para encher os vinte copinhos pela metade, basta encher a leiteira pela metade.

Segunda solução – Língua natural

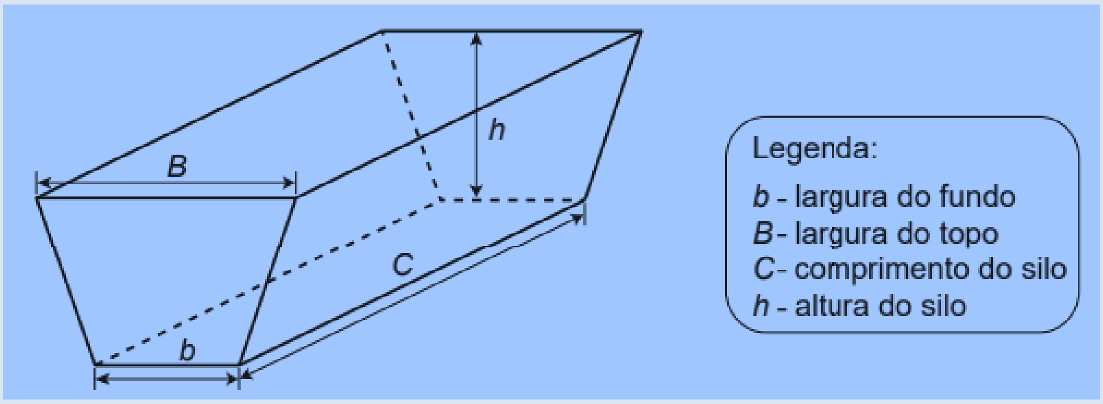
Como o raio do círculo da base do copinho é igual a 2 cm, o volume do copinho é $V_l = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. Da mesma forma, como o raio do círculo da base da leiteira é igual a 4 cm, calculamos o volume V_L da leiteira: $V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 320\pi$, ambos os valores em cm^3. Por sua vez, dividindo V_L por V_l, obtêm-se o número de copinhos por leiteira. Isto é, 20 copinhos por leiteira. Com esse resultado se conclui que a medida do volume de uma leiteira corresponde ao mesmo volume de 20 copinhos plásticos, logo, para encher 20 copinhos plásticos pela metade de seu volume, é suficiente encher uma leiteira pela metade do seu volume.

Análise

Inicialmente resolvemos a questão por meio do registro algébrico, estabelecendo uma relação direta com a representação geométrica, a partir da compreensão sobre diâmetro e raio do círculo. Logo, é necessário que o aluno compreenda essa relação entre a medida de um diâmetro e o raio para calcular a área de um círculo em superfície plana. Outra compreensão do problema por parte dos alunos é que não precisa atribuir o valor numérico para π para resolver a questão.

No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. E, com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 3 – Prisma (Adaptado de ENEM – 2014). Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do tipo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA, Gado de corte. Disponível em www.cnpgo.embrapa.br

Acesso em 1ago 2012 (adaptado)

Após a silagem, qual a quantidade máxima de forragem que cabe no silo?

Construa um texto relatando essas unidades significativas peculiares ao problema proposto para encontrar a justificativa da resposta do problema. No processo de resolução, é importante um olhar atento para as arestas nos trapézios do silo, como também para o comprimento *C*.

Primeira Solução

Seja b a largura do fundo, h = 2, B= 6 e C = 20, conforme a imagem do problema. Então, a largura do fundo é dado por $B = 0{,}5 \cdot h + b$

$$6 = 0{,}5 \cdot 2 + b \;\Rightarrow\; 6 = 1 + b \;\Rightarrow\; b = 5$$

Logo, a largura do fundo é igual a 5 m.

Seja A_t a área do trapézio. Então, o volume do prisma é igual a área do trapézio de bases B e b.

$$A_t = [(6+5) \cdot 2]/2 \;\Rightarrow\; A_t = [11 \cdot 2]/2 \;\Rightarrow\; A_t = 11$$

Logo, a área do trapézio é igual a 11 m^2.

Seja V_s o volume do silo e C o comprimento do silo, temos:

$$V_s = A_l \cdot C \;\Rightarrow V_s = 11 \cdot 20 \therefore V_s = 220$$

Logo, o volume do silo é igual a 220 m^3.

Como, 1 tonelada ocupa 2 m^3 desse tipo de silo, então dividimos 220 m^3 por 2m^3 e obtemos 110 toneladas.

Segunda solução – Língua natural

O volume do prisma se calcula pelo produto da área da base por seu comprimento perpendicular. A área da base do trapézio de altura h mede 2 m. A aresta maior B do trapézio mede 6 metros. Então, a aresta da base menor b calcula-se com base na seguinte afirmação: "para cada metro da altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo". Como o silo tem dois metros de altura, 0,5 m · 2 = 1 m. Fazendo b = B – 1, b = 5 m. Sendo o comprimento C do silo igual a 20 m, então, o volume do silo é igual ao produto da área do trapézio pelo comprimento, isto é, 11 · 20 = 220. Com esse resultado do volume, de 220 m^3, dividindo por 2 m^3, que é o equivalente a 1 tonelada de forragem, pode-se determinar que o silo comporta 110 toneladas.

Análise

Inicialmente resolvemos o problema por meio do registro algébrico, estabelecendo uma relação direta com a representação algébrica, a partir da compreensão das arestas do trapézio e do volume do prisma de comprimento C. Consideramos que o silo tem dois trapézios (paralelos) como bases e que o comprimento do prisma se encontra na aresta C horizontal.

No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. E, com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 4 – Prisma (Adaptado de ENEM - 2017). Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

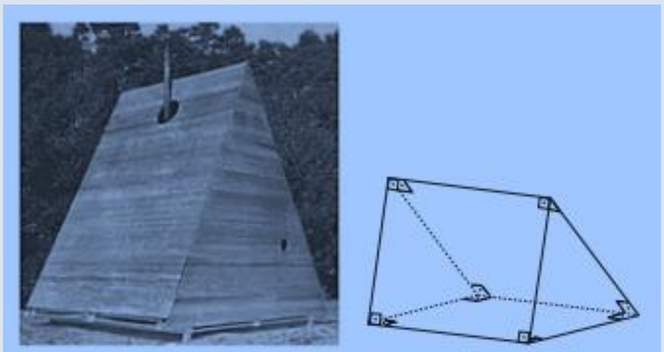


Figura 1 Figura 2

ROMERO, L. Tendências. Superinteressante, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é:

a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

Construa um texto relatando as unidades significativas peculiares ao problema proposto para encontrar a justificativa para sua resposta.

É importante olhar para as unidades significativas e formas planas que compõem o registro geométrico.

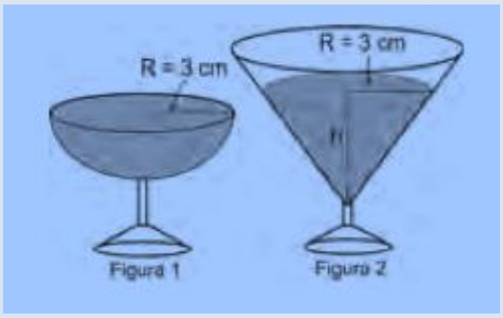
Solução

Podemos perceber na imagem que há a formação de dois triângulos (paralelos), o que significa um prisma triangular reto.

Análise

Inicialmente esperamos que os alunos compreendam o que é um prisma. É importante fazer uma discussão sobre as alternativas propostas, produzindo registros geométricos destas alternativas com os alunos. No registro na língua natural, o professor pode intervir para compreender a aprendizagem dos registros cognitivos, observando a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. Com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 5 - Semiesfera e Cone (Adaptado de ENEM - 2010). Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.



Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Considere:

$$V_{esfera} = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^3 \quad e \quad V_{cone} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

Sabendo que a taça com formato de hemisfério é servida completamente cheia, qual a altura, em centímetros, do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça?

Construa um texto relatando essas unidades significativas peculiares ao problema proposto para justificar a resolução.

No processo de resolução, é importante observar as unidades significativas, o raio, a altura dos recipientes, como também compreender que o volume do hemisfério é igual à metade do volume da esfera.

Primeira solução

A taça do formato de um hemisfério tem raio R = 3 cm. Para medir o volume total da taça fazemos uma relação de sua medida com a metade do volume de uma esfera de mesmo raio.

$$V_c = \frac{Vesfera}{2} \Rightarrow V_h = \frac{\left[\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^3\right]}{2} \Rightarrow V_h = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot R^3$$

Seja $V_h = V_c$. Então, $\left(\frac{4}{6}\right) \cdot \pi \cdot R^3 = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

Assim,

$$\frac{4}{6}\cdot\pi\cdot 3^3 = \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot h \Rightarrow \quad \frac{4}{6}\cdot\pi\cdot 27 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9\cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{\frac{4}{6}\cdot\pi\cdot 27}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9} \Rightarrow \ h = 6$$

Então, a altura da taça que foi substituída é de 6 cm.

Segunda solução – Língua natural

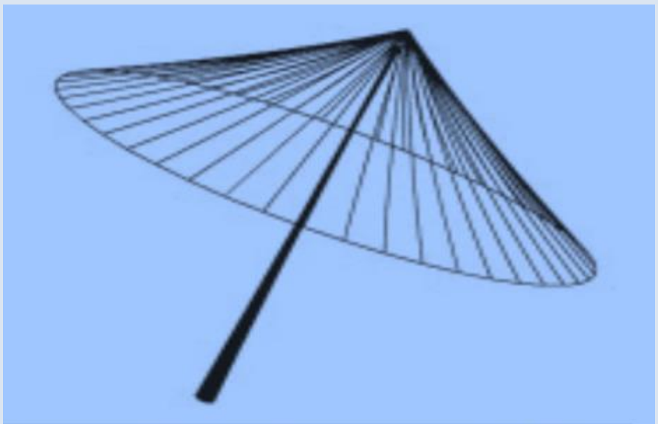
Como os noivos solicitaram que as taças que serão substituídas tenham o mesmo volume, então o volume da taça que é uma semiesfera será igual ao volume da taça que tem o formato de um cone. Logo: $\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 4\cdot\pi\cdot R^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$.

Substituindo na equação os dados fornecidos no enunciado, obtém-se *h* = 6 cm.

Análise

Para resolver este problema, inicialmente, buscamos encontrar o valor do volume do hemisfério fazendo uma relação com o volume da esfera de mesmo raio. Sabemos que o raio do hemisfério corresponde à altura da taça quebrada, e temos a informação que “os noivos solicitam que ambos os formatos de taça tenham o mesmo volume”. Igualando os volumes das taças citadas, encontraremos a altura desconhecida. Outra percepção é que não precisa atribuir um valor para π para resolver a questão que também é uma unidade significativa muito importante a ser observada. No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. E, com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 6 – Cone (Adaptado de ENEM – 2011). A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010. (Foto: Reprodução/Enem)

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a) pirâmide.
b) semiesfera.
c) cilindro.
d) tronco de cone.
e) cone.

Construa um texto relatando as unidades significativas peculiares ao problema proposto que você observa nas figuras para encontrar a justificativa da resposta do problema.

É importante olhar para unidades significativas e formas cônicas que formam o registro geométrico.

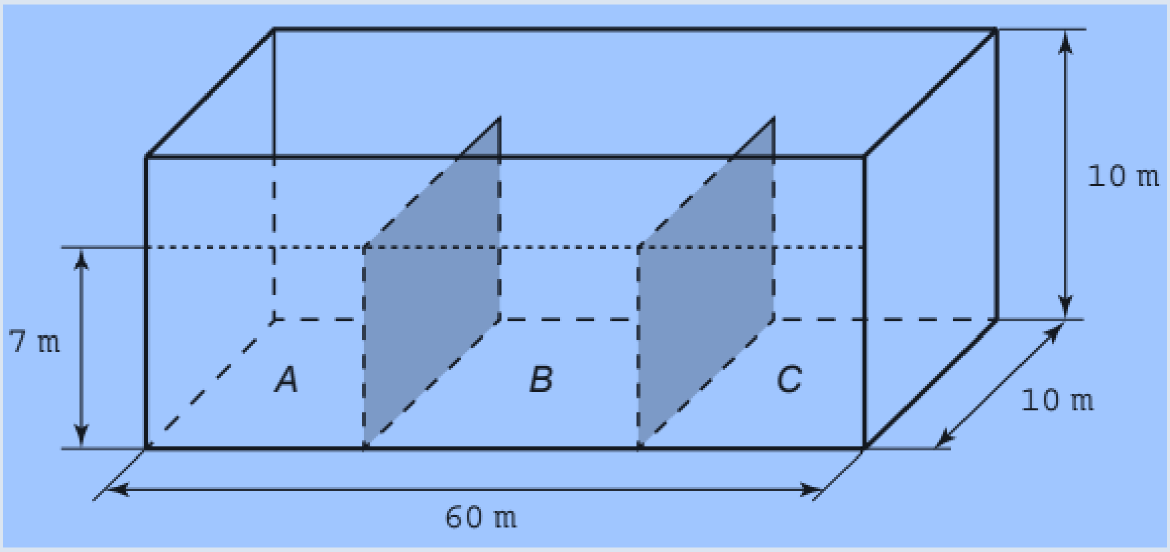
Solução

Percebemos que a imagem, tem um formato de um cone, pois há uma superfície gerada pelo movimento de rotação em torno de um eixo.

Análise

Inicialmente, esperamos que os alunos compreendam o que é um cone, e como pode ser formado a rotação de uma superfície gerada pelo movimento de rotação de uma curva em torno de um eixo. Também pode-se fazer uma discussão sobre cada uma das alternativas propostas no problema, fazendo registros geométricos destas alternativas junto aos alunos. No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. Com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

Problema 7 – Paralelepípedo (Adaptado de ENEM – 2011). Um petroleiro possui um reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, qual o volume de petróleo derramado?

Construa um texto relatando essas unidades significativas peculiares ao problema proposto para encontrar o volume de petróleo derramado.

É importante observar que, nas arestas do paralelepípedo que representa o reservatório, foram montados, com duas placas de aço, três novos formatos de paralelepípedos com altura menor nas arestas que o do reservatório.

Primeira Solução

Inicialmente, dividimos o reservatório em quatro compartimentos: três de altura *D* igual a 7 cm e outro de altura igual a 3 cm, conforme a imagem fornecida.

Seja V_d o volume do compartimento de altura d. Então, $V_d = 60 \cdot 10 \cdot d$

$$V_d = 60 \cdot 10 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad V_d = 1800$$

Seja V_l o volume de um dos três compartimentos, A, B e C, de altura *D*.

$$V_l = 20 \cdot 10 \cdot 7 \quad \Rightarrow \quad V_l = 1400$$

Seja V_t o vazamento em um dos três compartimentos. Temos:

$$V_t = V_d + V_l \Rightarrow \quad V_t = 1800 + 1400 \quad \Rightarrow V_t = 3200$$

Logo, em caso de vazão de um dos compartimentos, o volume do petróleo derramado é de 3200 m^3.

Segunda solução – Língua natural

Após o vazamento, como ficará o reservatório? Precisamos ter claro que a estratégia adotada para minimizar o impacto ambiental em caso de derramamento é de se dividir o reservatório em duas regiões: uma superior a 7 metros e uma inferior a 7 metros, relativos às alturas das placas de aço. Assim, em caso de rompimento, independentemente em qual compartimento seja, todo o volume da parte superior vazará. Na sequência, todo o volume do compartimento que rompeu também vazará, restando apenas o volume presente nos outros dois compartimentos.

Análise

Inicialmente, resolvemos a questão por meio do registro algébrico, determinando o valor do volume do reservatório na parte onde as placas não alcançam e, depois, o volume de um dos reservatórios criado pelas placas, observando sempre as medidas das arestas na representação geométrica.

No caso do registro em língua natural, o professor tem mais uma oportunidade para compreensão da aprendizagem por meio dos registros cognitivos, pois pode perceber a conservação da ordem das unidades significativas relatadas pelos alunos para chegar a uma justificativa do resultado. E, com relação à representação geométrica por meio da imagem dada na questão, cabe uma discussão sobre as unidades significativas correspondentes.

***

No contexto geral das atividades anteriores, houve produções e transformações de mais de um registro, conforme mostramos ao longo das discussões. Lembramos que, segundo Duval (2003), a aprendizagem se manifesta quando o aluno consegue manipular mais de um registro de representação do mesmo objeto matemático.

5. RECOMENDAÇÕES

Em concordância com Duval (2004), afirmamos que a dificuldade dos alunos para apreensão dos conceitos matemáticos está atrelada à transformação de mais de um registro de representação, portanto, ao desenvolver as atividades com os alunos, recomendamos uma leitura atenta do enunciado do problema. Após essa leitura, deve-se abordar os dados relevantes que corresponde às unidades significativas, o que irá colaborar para justificativa da solução do problema. Isto poderá ser feito por meio de registros algébrico, geométrico ou sistema de numeração. Também recomendamos, fortemente, um registro em língua natural, seja no final ou no decorrer da atividade.

Para o desenvolvimento das atividades que gerou a nossa dissertação (CRUZ, 2018), a fim de alcançar um bom desempenho, tanto em termo da aprendizagem dos alunos, quanto para o acompanhamento dos registros feitos por eles, deve-se estabelecer um acordo ou contrato didático envolvendo uma relação de respeito e confiança mútua, envolvendo-se de tal modo a prestar muita atenção e ser muito cuidadosos na realização das atividades. Para a realização da pesquisa, este contrato ainda envolveu:

- A avaliação seria feita de forma contínua e, predominantemente, qualitativa;
- Ao fim de cada atividade, seriam recolhidas todas as anotações (registros), para que fosse feito um relatório para análise dos dados;
- Todas as atividades seriam feitas em grupo;
- Tudo que fosse anotado por eles, mesmo que fosse identificado como erro, não deveria ser apagado ou inutilizado;
- Mesmo sendo feitas em grupo, todos os componentes receberiam atividades;
- Ao realizarem as atividades, e se surgissem dúvidas, deveriam solicitar a ajuda do professor, que discutiria as possíveis dificuldades com o grupo, não lhe apresentando solução, mas meios que lhe permitissem sanar a dúvida.

6. RESULTADOS

Em nossa dissertação (CRUZ, 2018), elaboramos o quadro abaixo, contendo uma síntese da compreensão dos registros feitos pelos alunos para a Atividade 1.

Quadro 1 – Síntese da compreensão dos registros da Atividade 1

GRUPOS	Conversão na língua natural				Síntese das respostas (sim ou não) dos grupos					
					Imagem 2			Imagem 3		
	Congruência	Graus de dificuldades em não congruência			ACERTOU	ERROU	NÃO MARCOU	ACERTOU	ERROU	NÃO MARCOU
		Fator 1	Fator 2	Fator 3						
A	x				X			x		
B		x				X		x		
C		x		x	X			x		
D		x				X		x		
E	x				X			x		

Fonte: (CRUZ, 2018, p.44)

Conforme discutimos em Cruz (2018), houve pouca produção de registros, além de uma maior frequência de incoerências dos registros em língua natural, o que se pode observar mais fortemente em alguns grupos. Estas incoerências podem ser explicadas porque os alunos buscaram justificar a resposta do problema sem medir os segmentos correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes, isto é, se justificaram pela observação da ampliação da imagem. Outro aspecto que foi percebido é a pouca produção de registro, sendo isto compreensível, pois era a primeira atividade que estavam fazendo.

Em Cruz (2018) também apresentamos um quadro com a síntese da compreensão dos registros produzidos pelos alunos a partir da Atividade 2 (Quadro 2).

Quadro 2 – Síntese da compreensão dos registros da Atividade 2

GRUPOS	Conversão na Língua Natural				Tipos de registros produzidos					
	Congruência	Graus de dificuldades em não congruência								
		Fator 1	Fator 2	Fator 3	Sistema numeração	Figuras Geométricas	Escrita Algébrica	Representação Gráfica	Língua Natural	Escrita Formal
A		x			X	x			x	
B	x				X				x	
C	x								x	
D		x			X					x
E	x								x	x

Fonte: (Cruz, 2018, p.61)

Na atividade 2, conforme podemos perceber no Quadro 2, o fator de incoerência foi diminuindo a partir do momento em que os alunos começaram a compreender as propriedades do objeto matemático em estudo. Neste momento solicitamos aos alunos que produzissem uma maior quantidade de registros.

Também para a Atividade 3, em Cruz (2018) apresentamos uma síntese da compreensão dos registros produzidos pelos alunos (Quadro 3).

Quadro 3 – Síntese da compreensão dos registros da Atividade 3

GRUPOS	Conversão na Língua Natural				Tipos de registros produzidos					
	Congruência	Graus de dificuldades em não congruência								
		Fator 1	Fator 2	Fator 3	Sistema numeração	Figuras Geométricas	Escrita Algébrica	Representação Gráfica	Língua Natural	Escrita Formal
A	X					x	x	x	x	
B	X				x		x		x	
C	X				x	x	x	x	x	
D	X				x	x	x		x	
E		x			x			x	x	

Fonte: (Cruz, 2018, p.70)

Nesta atividade, a incoerência foi dando vez à compreensão da aprendizagem. Também percebemos uma maior quantidade de conversões de registros, o que se explica pelo fato de os alunos estarem mais habituados uma vez que realizaram as atividades anteriores.

7. REFERÊNCIAS

BARRETO, Marcília C, FARIAS, Isabel M. S. de (Org.). **Docência e Formação de Professores**: novos olhares sobre temáticas contemporâneas – Fortaleza: EdUECE, 2009.

CRUZ, José L. G. **Um Estudo de Representações Semióticas em Atividades de Geometria**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Paraíba: Universidade Estadual da Paraíba, 2018.

DAMM, Regina F.. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). **Educação Matemática**: um (nova) introdução: 3ª Ed. São Paulo; Educ, 2008.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

_______. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidaddel Valle: PeterLang, 2004.

_______. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Registrosde representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R.eletr. de Edu. Matem**. eISSN -1981-1322, Florianópolis, v. 07, n.2, p.266-297, 2012.

LORENZATO, S**.** Por que ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, SBEM, São Paulo, v. 3, n. 4, p.1-64, 1995.

SOUSA, Ana C. G. **Os registros de representação semiótica e o trabalho com números e operações nos anos iniciais da escolaridade**: uma experiência de formação. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação). Fortaleza: Universidade Estadual do Ceará, 2009.

8. APÊNDICES

Grupo: ___________

ATIVIDADE 1

Usando régua e transferidor, verifique, em dupla, as medidas das imagens 2 e 3, relatando se é uma ampliação da imagem 1, do ponto de vista da Matemática.

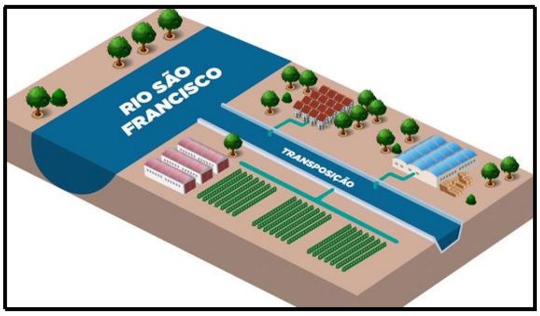


Imagem 1: Original da chamada PBTEM Transposição do Rio São Francisco
http://jtpagencia.com.br/jtp/index.php/component/k2/item/372-chamada-pbtem-transposicao-do-rio-sao-francisco

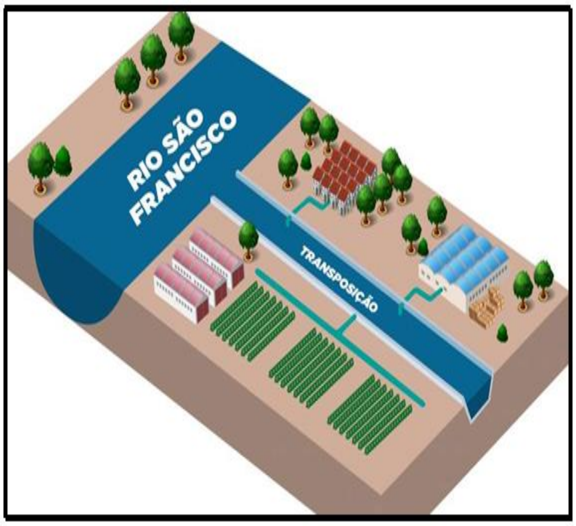


Imagem 2: Ampliação. Sim( ) não( )

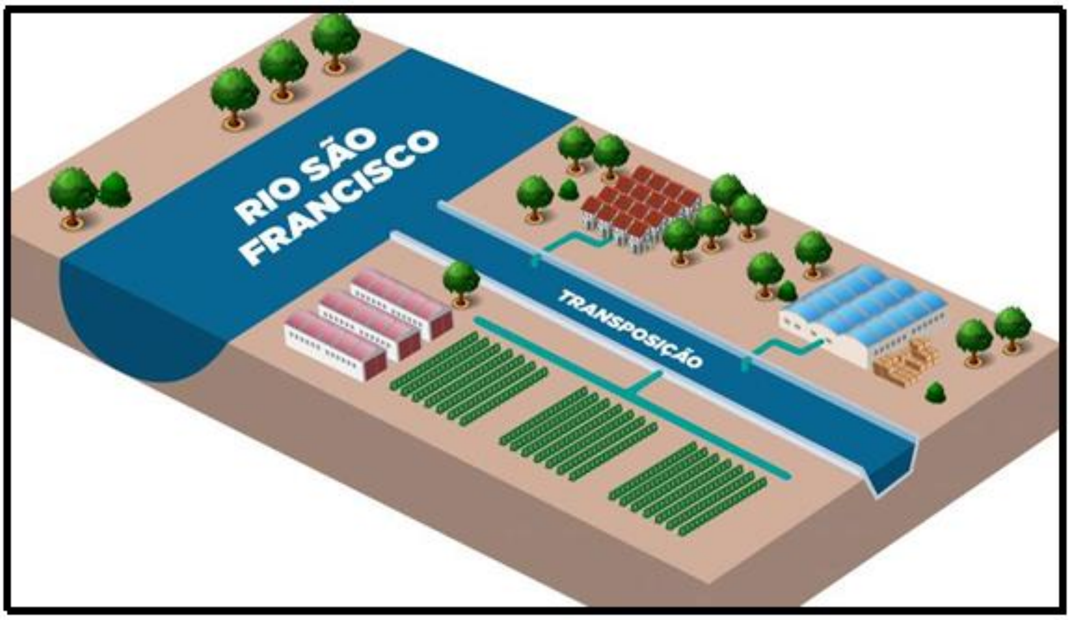


Imagem 3: Ampliação. Sim ( ) não ( )

Registros das discussões no grupo.

GRUPO: _____

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem1: original do grupo “Família G”- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. (   ) horizontal ( ) vertical (   ) obliquo

Imagem 3: Segmentos. (   ) horizontal (   ) vertical   (   ) obliquo

Registros das discussões no grupo

GRUPO: _______

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem1: original do grupo "Família G"- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. (   ) horizontal ( ) vertical (   ) obliquo

Imagem 3: Segmentos. (   ) horizontal (   ) vertical   (   ) obliquo

Registros das discussões no grupo

ALUNO: _______________

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem1: original do grupo “Família G”- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. (   ) horizontal ( ) vertical (   ) obliquo

Imagem 3: Segmentos. (   ) horizontal (   ) vertical   (   ) obliquo

Registros das discussões no grupo

GRUPO: _________

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem1: original do grupo "Família G"- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. ( ) horizontal ( ) vertical ( ) obliquo

Imagem 3: Segmentos. ( ) horizontal (   ) vertical (   ) obliquo

Registros das discussões no grupo

GRUPO: ________

Atividade 2

Usando régua, construa, em grupo, a constante de redução e ampliação nos segmentos correspondentes proporcionais das imagens.

Imagem1: original do grupo "Família G"- WhatsApp

Imagem 2: Segmento. ( ) horizontal ( ) vertical ( ) obliquo

Imagem 3: Segmentos. ( ) horizontal ( ) vertical ( ) obliquo

Registros das discussões no grupo

GRUPO _______

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Ampliação de 50% da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Registros das discussões no grupo.

GRUPO ________

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Ampliação de 50% da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Registros das discussões no grupo.

GRUPO _________

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Ampliação de 50% da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Registros das discussões no grupo.

GRUPO ________

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Ampliação de 50% da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Registros das discussões no grupo.

GRUPO ________

ATIVIDADE 3

Abaixo, observem duas imagens. Na primeira, houve uma redução de 50% com relação à original. Na segunda, houve uma ampliação de 50% com relação à original. Façam as medidas usando representações geométricas e os cálculos necessários e determinem as medidas da imagem original.

Imagem 1: Redução de 50 % da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Ampliação de 50% da original do grupo "Família G"- WhatsApp

Registros das discussões no grupo.