



Rosimeri Corrêa França

Edite Resende Vieira

$$8x + 3 = 6x - 1$$

$$8x - 6x = -1 - 3$$

$$2x = -4$$

$$-4$$

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU: Uma Incógnita...Uma Revisita à Igualdade



Rio de Janeiro, 2019

**EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º
GRAU: Uma Incógnita...Uma Revisita
à Igualdade**

Rosiméri Corrêa França

Edite Resende Vieira

**EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º
GRAU: Uma Incógnita...Uma Revisita
à Igualdade**

1ª Edição



Rio de Janeiro, 2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E
CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

F814 França, Rosiméri Corrêa
Equações polinomiais do 1º grau: Uma Incógnita...Uma Revisita à
Igualdade / Rosiméri Corrêa França, Edite Resende Vieira. - 1.ed. - Rio
de Janeiro: Imperial Editora, 2019.
40 p.

Bibliografia: p. 39-40.

ISBN:

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tecnologia educacional. 3.
Equações do primeiro grau. 4. Semiótica. 5. Representação do
conhecimento (Teoria da Informação). 6. Aprendizagem. I. Vieira, Edite
Resende. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB-7: 5692.

RESUMO

Este caderno de atividades é a versão não digital do *e-book* com o mesmo título, o qual se encontra disponível *online* e é o produto educacional da pesquisa “ISOLAR O X, ISOLAR O Y...E AGORA?: Recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau.” As atividades deste caderno são provenientes de uma sequência didática para resolução de equações do 1º grau, com o apoio dos objetos digitais de aprendizagem: a “Balança” e o “Pat2Math”. A sequência didática proposta foi desenvolvida em um minicurso para alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio do Estado do Rio de Janeiro, os quais apresentavam dificuldades nesse assunto. A sequência, como prática educativa foi elaborada a partir da concepção de Antoni Zabala, delineou o minicurso e o conjunto de atividades foi um dos instrumentos de coleta de dados para esse estudo, ao lado do questionário e da entrevista. A pesquisa objetivou analisar as possíveis contribuições que a tecnologia digital poderia oferecer para diminuir as dificuldades que os alunos do 3º ano do Ensino Médio apresentavam na resolução de equações do 1º grau. De natureza qualitativa e com características de pesquisa-ação, essa investigação fundamentou-se nos estudos de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica; de Gérard Vergnaud referente ao Campo Conceitual Algébrico, além dos estudos de Bairral sobre os dispositivos móveis; e de Borba, Scucuglia e Gadanidis sobre as tecnologias digitais na Educação Matemática. A Análise de conteúdo proposta por Bardin e o método da triangulação dos dados de acordo com Mathison, nortearam a análise dos dados. Esses resultados apontaram que as tecnologias digitais são importantes recursos para a compreensão das mudanças de representações semióticas e auxiliam na resolução das equações do 1º grau, contanto que façam parte de uma sequência didática, planejada e conduzida pelo professor regente. Destacamos, que as tecnologias digitais aproximaram os alunos do seu objeto de estudo, talvez pela familiaridade que cada um possuía com seu celular, o qual passou a ser visto não apenas como um objeto de lazer, mas também um facilitador das discussões sobre o tema.

Palavras-chave: Equações do 1º grau. Objetos Digitais de Aprendizagem. Sequência Didática. Teoria das Representações Semióticas. Campos Conceituais.

SUMÁRIO

1 Apresentação	7
2 Princípios Teóricos.....	9
2.1 As representações semióticas nas equações do 1º grau	9
2.2 As equações do 1º grau no campo conceitual algébrico	10
2.3 A sequência didática como prática educativa	11
2.4 Tecnologias digitais para resolver equações do 1º grau	12
3 A “Balança” da UNIJUÍ	14
4 O “PAT2Math”	16
5 Tema 1: Conceito e Aplicação	20
5.1 Atividade 1	21
5.2 Atividade 2	22
5.3 Atividade 3	22
6 Tema 2: O Conceito de Equivalência, Métodos e Soluções.....	23
6.1 Atividade 1 – Gerando e avaliando valores.....	24
6.2 Atividade 2 – Continue gerando e avaliando	24
6.3 Atividade 3 - O que a equação pede?	25
6.4 Atividade 4- Desfazer para resolver.....	26
6.5 Atividade 5 -Tornando as equações mais simples.....	28
6.6 Atividade 6 – Para manter o Equilíbrio	29
7 Tema 3: Equações do 1º Grau. E agora?.....	31
7.1 Atividade 1- Algumas atividades do “PAT2Math”	32
7.2 Atividade 2- Aplicando a aprendizagem	35
7.3 Atividade 3- JOGO: FATORES ESCONDIDOS NO ESPORTE.....	36
8 Orientações aos professores.....	37
Referências Bibliográficas	39

1 Apresentação

Prezado(a) professor(a),

Este caderno de atividades é a versão não digital do *e-book* intitulado “Equações Polinomiais do 1º Grau: Uma Incógnita...Uma Revisita à Igualdade”. O modelo *online* pode ser acessado no endereço eletrônico <https://issuu.com/home/drafts/up608093yqb>, o qual é o produto educacional referente ao Programa de Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica do Colégio Pedro II.

O material apresentado foi elaborado a partir dos dados obtidos da pesquisa “Isolar o x , Isolar o y ...E Agora?: Recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau”, orientada pela Profa. Dra. Edite Resende Vieira. Para coletarmos essas informações recorreremos à uma entrevista, à uma sequência didática e à um questionário propostos aos sujeitos da pesquisa. Nesse estudo, procuramos investigar as contribuições da tecnologia digital para minimizar as dificuldades dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, na resolução de equações do 1º grau.

Assim, as situações propostas visam apresentar as equações com uma abordagem diferente daquela que foi difundida para os alunos em anos anteriores. A maior parte das atividades deste caderno são mediadas por dois objetos digitais de aprendizagem; a saber, a “Balança” da UNIJUÍ e o “Pat2Math”, que tem como objetivo geral modificar o quadro de dificuldades na resolução das equações do 1º grau com uma incógnita. Todas as atividades deste material de apoio foram elaboradas, para compor a sequência didática desenvolvida na pesquisa, das quais algumas ações foram aplicadas.

Como fundamentação desta proposta, apoiamos-nos nas concepções de Raymond Duval e de Gérard Vergnaud, sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e sobre a Teoria dos Campos Conceituais, respectivamente. Os estudos de Marcelo Bairral, Marcelo Borba, Ricardo Scucuglia e George Gadanidis também nortearam esse estudo, no que se refere às tecnologias digitais na Educação Matemática.

A seguir, serão apresentados os princípios teóricos que nortearam este caderno de atividades e o *e-book*, cujos temas são: As representações semióticas nas equações do 1º grau; As equações do 1º grau no campo conceitual algébrico; A sequência didática como prática educativa e Tecnologias digitais para resolver equações do 1º grau.

Em sequência, apresentamos um breve tutorial dos objetos digitais de aprendizagem, a “Balança” e o “Pat2Math”, fornecendo informações básicas aos usuários desses objetos.

Em seguida, são apresentadas as atividades propostas para esse caderno e para o *e-book* dispostas em três temas: conceito e aplicação; o conceito de equivalência, métodos e soluções; e equações do 1º grau. E agora?

Para finalizar, traçamos algumas orientações aos professores para que possam utilizar essa proposta de acordo com o seu planejamento.

Desse modo, esperamos que este material contribua para auxiliar a prática pedagógica dos professores, ou que os inspire na descoberta e na aplicação das tecnologias digitais como recursos pedagógicos, permitindo que os alunos construam seu conhecimento em um espaço educativo mais próximo à atualidade.

2 Princípios Teóricos

O produto educacional, em questão, foi construído a partir das abordagens teóricas a seguir.

2.1 As representações semióticas nas equações do 1º grau

Segundo Duval (2008), os objetos da Matemática são os únicos que não podem ser acessados diretamente. Não há como tocá-los, senti-los ou vê-los. Para o filósofo Mário Sérgio Cortella (2015), “Tudo que a Matemática trata não existe na realidade. Você nunca viu o número um sentado em algum lugar, uma matriz passeando, uma derivada tomando um suco [...]” (informação verbal).

A única maneira de nos “aproximarmos” deles é através das suas representações semióticas. Por outro lado, embora sendo invariantes, os objetos matemáticos apresentam muitas representações semióticas e isso pode confundir o aluno. Ele pode pensar que a representação é o próprio objeto (DUVAL, 2011).

Como exemplos de representações, Duval (2012) cita um gráfico, um enunciado, a língua natural e uma fórmula algébrica. Mas, devemos ficar atentos, pois todos tem sistemas semióticos diferentes.

Para auxiliar os alunos no acesso aos objetos matemáticos; isto é, acesso por meio das suas representações semióticas, devemos apresentá-los às diversas representações de um mesmo objeto.

[...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2018, p.529).

No entanto, para que os alunos explorem as diferentes representações, é necessário que eles saibam escolher a mais adequada e estejam preparados para transformar esse registro dentro do mesmo sistema semiótico ou não. Se a transformação ocorrer dentro do mesmo sistema de registro semiótico, como por exemplo, ao resolver uma equação do 1º grau e encontra-se a solução, verifica-se que não mudou de sistema, mas sim o registro inicial. Isso é o que chamamos de **tratamento**.

Já a **conversão** acontece, quando a transformação ocorre fora do sistema de registro semiótico inicial. Muda para outro sistema. Como exemplo, temos uma situação problema em linguagem materna e que convertemos para a linguagem algébrica.

Nesse caso, houve uma transformação externa ao registro de início. Portanto, da conversão poderão ser obtidos diferentes tipos de registro para um mesmo objeto. Com isso, facilitará a distinção entre a representação do objeto e o objeto representado.

Desse modo, nesta pesquisa consideramos que as tecnologias digitais puderam ajudar na compreensão dessa distinção, envolvendo as equações do 1º grau, especialmente quando utilizamos o objeto digital a “Balança”.

2.2 As equações do 1º grau no campo conceitual algébrico

Para melhor compreendermos a apreensão do conceito que envolve a resolução de equações do 1º grau, consideramos também o estudo de Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais, à qual:

[...] envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por “conhecimentos”, tanto as habilidades quanto as informações expressas. As ideias de filiação e ruptura também alcançam as aprendizagens do adulto, mas estas ocorrem sob condições mais ligadas aos hábitos e formas de pensamento adquiridas, do que ao desenvolvimento da estrutura física. Os efeitos da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo ocorrem, na criança e no adolescente, sempre em conjunto. (VERGNAUD, 1993, p.1).

Nessa teoria um conceito matemático em uma situação, não é visto de forma isolada, ele só tem sentido a partir de uma variedade de situações. Entendendo-se aqui que uma situação é uma tarefa.

As situações variadas permitem os estudantes desenvolverem o que Vergnaud denomina de invariantes operatórios; isto é, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, os quais constituem os esquemas para elaborar e usarem os conceitos nas situações propostas.

E o que é um esquema? Um esquema pode ser um gesto do cotidiano como entrar em um carro ou gesto de um atleta, por exemplo. É um hábito, portanto é invariante e está relacionado à um único conjunto de situações. (VERGNAUD, 2010).

Sendo assim, consideramos que é importante oferecer uma variedade de situações para que os alunos desenvolvam novos esquemas. Compreendemos, então, que a teoria dos campos conceituais subsidia a proposta deste estudo, pois pretendeu-se desestabilizar situações já trabalhadas em Matemática com os adolescentes, retomando o conceito e as formas de resolver uma equação do 1º grau, mas de um novo modo; e assim, permitir que os estudantes construam novos invariantes operatórios.

Sabemos que passar da aritmética para álgebra não é simples, por isso não é incongruente recebermos estudantes no Ensino Médio ainda com dificuldades em relação às equações do 1º grau, conforme constatamos na pesquisa.

Nesse sentido, Vergnaud (2011) nos aconselha introduzir a álgebra como ferramenta para solução de problemas, os quais não poderiam ser resolvidos sem a álgebra. Isto é “[...] cuja solução não saber-se-ia obter sem a álgebra.” (VERGNAUD, 2011, p.21).

Ao serem apresentados às equações, que são conceitos algébricos; os estudantes ainda não são familiarizados para operar com os símbolos concernentes às equações do 1º grau, podendo se sentir desconfortáveis diante das equações, por estarem acostumados à aritmética.

Para Vergnaud (2011), os sinais e símbolos na álgebra podem causar dificuldades para os estudantes, pois os mesmos símbolos podem comportar diferentes operações e propósitos matemáticos. Assim, a introdução de novos objetos; como as equações, podem causar problemas para os estudantes que precisam estar atentos às regras. Eles não estão acostumados aos cálculos algébricos. Mediante uma equação, seguimos regras de operação naturalmente, mas para muitos alunos não é simples saber o que fazer para resolver.

Por isso, a importância de desenvolvermos situações de aprendizagem que sejam significativas e diferenciadas para os alunos, permitindo novos esquemas.

Assim, as tecnologias digitais podem ser elementos facilitadores desse tipo de situação, a partir do planejamento da sequência didática pelo professor.

2.3 A sequência didática como prática educativa

As atividades presentes neste material pedagógico foram elaboradas a partir da sequência didática, a qual foi usada como uma metodologia para alcançarmos os objetivos da pesquisa. Para nos guiarmos na construção da sequência didática, nos baseamos na concepção de Antoni Zabala.

Segundo Zabala (1998), “As seqüências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

A seqüência, de modo cuidadosamente planejado, após um levantamento dos conhecimentos já construídos pelos alunos, os quais a escola não deve descartar; é um instrumento de intervenção reflexiva na realidade da sala de aula.

Essa ação, reafirma a autonomia pedagógica que o professor regente é aconselhável ter. Ninguém melhor do que o docente é capaz de fazer ou ajudar a fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, onde há detalhes que podem não ser detectados em uma entrevista, em um questionário ou em outro tipo de instrumento de coleta de dados.

Além disso, as unidades didáticas ou unidades de programação ou de intervenção pedagógica são únicas, porém reúnem toda complexidade da prática. Nelas estão incutidas as três fases de intervenção reflexiva: planejamento, avaliação e reflexão (ZABALA, 1998).

A sala de aula é o espaço da intervenção. É onde os estudantes serão incentivados pelo professor, o qual mediará as discussões, a partir da sequência didática. Bohrer (2016) afirma que dessa forma se favorecerá a apropriação do conhecimento, tanto para o docente como para o estudante. Na pesquisa que gerou este produto educacional, pudemos vivenciar essa afirmação, durante a aplicação da sequência didática.

Na fase da execução das atividades, observamos que os estudantes incentivados pelo professor, puderam superar alguns obstáculos e estimular seus pares, em concordância com o pensamento de Zabala.

Segundo Zabala (1998), as relações entre professores, alunos e os conteúdos de aprendizagem, que vão se estabelecendo ao longo da sequência didática, constituem a chave de todo conhecimento.

2.4 Tecnologias digitais para resolver equações do 1º grau

As tecnológicas digitais estão em toda parte. Não há como negarmos a sua presença e o quanto vêm mudando os hábitos da sociedade, conforme destaca a BNCC:

A contemporaneidade é fortemente marcada pelo desenvolvimento tecnológico. Tanto a computação quanto as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida de todos, não somente nos escritórios ou nas escolas, mas nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas etc. Além disso, grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro. (BRASIL, 2018, p. 473).

Para Vieira (2003), nossas crianças e jovens estão imersos no mundo digital, criando novas relações de aprendizagem e por isso, é necessário a implementação de propostas diferenciadoras.

Em concordância com Vieira, buscamos integrar as tecnologias digitais à resolução das equações do 1º grau, a partir das observações do uso constante das tecnologias digitais, por parte dos alunos, e mais especificamente do *smartphone*.

Na mesma perspectiva, Bairral (2014) destaca a expansão das tecnologias digitais móveis nas nossas vidas, principalmente os dispositivos móveis com touchscreen. Esses dispositivos vêm ganhando destaque no ambiente escolar com os alunos, pelo menos no uso pessoal.

A partir da concepção de Bairral e o fato de que os smartphones são mais acessíveis aos estudantes que participaram da pesquisa, elencamos esses dispositivos como instrumentos para explorarmos alternativas para a resolução das equações do 1º grau.

Nesse sentido, a Educação Matemática tem sido permeada pelas inovações tecnológicas permitindo a exploração e surgimento de cenários alternativos para o ensino e aprendizagem de Matemática (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

A partir de 2004, a expansão da internet democratizou a publicação de material na grande rede, trazendo também as tecnologias móveis e novas formas de interatividade virtual. Com isso, a relação dos alunos com a Matemática também mudou. O mundo virtual permitiu a Matemática incorporar seus recursos, tornando a interatividade um novo modo para ajudar a registrar as representações semióticas de seus objetos, os quais podem ser “tocáveis” virtualmente. Essas mudanças ocorreram da integração dos softwares dinâmicos com os novos instrumentos digitais, que auxiliam não apenas na Matemática; mas no cotidiano. Como exemplo temos o software de posicionamento global (GPS) que auxilia os cidadãos em determinadas profissões e no deslocamento diário, podendo ser instalado em qualquer smartphone. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Para auxiliar na compreensão e na resolução de equações do 1º grau, optamos por dois objetos digitais de aprendizagem. Porém, é preciso estar atentos à escolha dos objetos digitais; assim como de qualquer outro apoio à aprendizagem. A escolha deve-se basear nos objetivos e competências a serem adquiridas pelos alunos, sob o risco da ferramenta se constituir em um simples adereço em sala de aula (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012).

Conscientes dos critérios de escolha, neste caderno, optamos por dois objetos digitais de aprendizagem a “Balança” e o “Pat2Math”, como auxílio na compreensão e na resolução das equações do 1º grau. Disponibilizamos um breve tutorial desses objetos, na seção a seguir.

3 A “Balança” da UNIJUI



O objeto digital de aprendizagem (ODA) a “Balança”, da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI) está disponível gratuitamente no endereço eletrônico:

https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html. No entanto, fica atento:

Para poder usufruir das funcionalidades desse recurso, você deverá ter instalado em seu dispositivo móvel ou não, o Adobe Flash player.

Dic@:

Sugerimos o Microsoft Edge, que é o navegador que está permitindo o acesso ao objeto digital no momento.

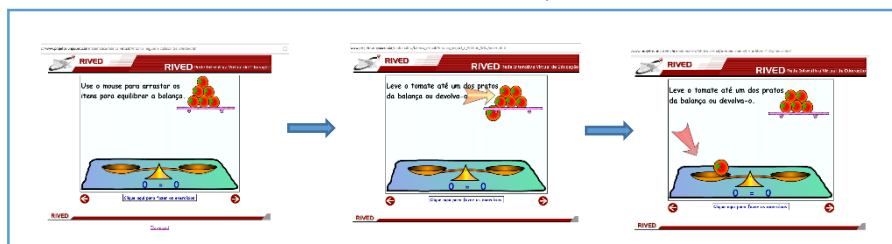
Para usarmos a “Balança” não é necessário realizar o cadastro de usuário. Basta clicar para fazer os exercícios propostos.



Interagindo com a “Balança”

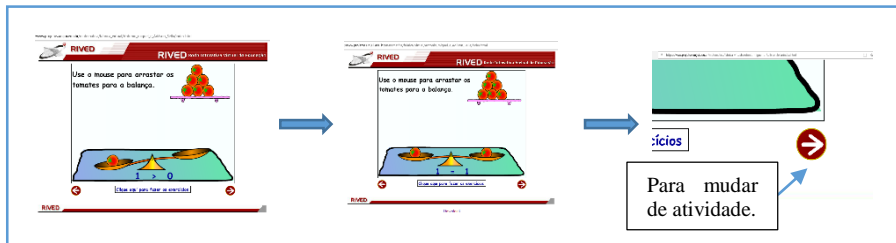
O primeiro contato com esse ODA é a tela, mostrando uma balança e tomates em uma prateleira. Para o estudante se ambientar com a interface, basta arrastar os tomates com o cursor e assim verificar as situações de equilíbrio e de desequilíbrio provocadas. As mudanças de posição dos tomates podem acontecer da prateleira para balança ou vice-versa. As seguintes telas ilustram o passo a passo inicial.

Breve tutorial da “Balança”



Fonte: Arquivo pessoal

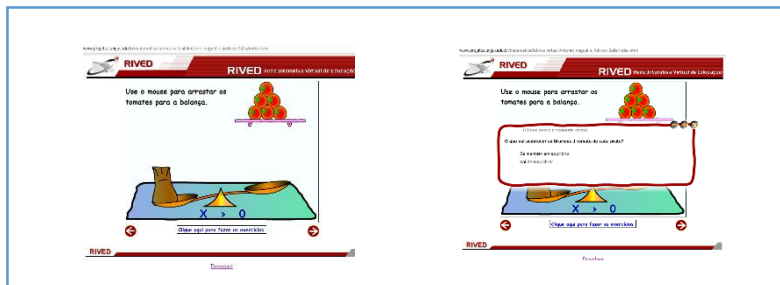
Breve tutorial da “Balança”



Fonte: Arquivo pessoal

Em seguida, se sucedem nove atividades, cujas equações são resolvidas à medida que se equilibra a balança.

Breve tutorial da “Balança”



Fonte: Arquivo pessoal

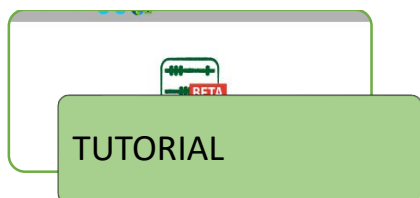
Dic@: O professor poderá explorar as atividades do ODA de acordo com os objetivos do seu planejamento, diferente do modo apresentado no próprio objeto digital. Poderá também destacar as diferentes representações semióticas que o objeto digital oferece.

O tutorial completo se encontra disponível para download em: https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/manuais_fabrica/aprendendo_equacoes_balanca.pdf.

As experimentações, que podem ser realizados com esse ODA, são consideradas uma alternativa à abordagem teórica da resolução de equações do primeiro grau, sendo apoio para o entendimento da ideia de equivalência, envolvendo os princípios aditivo e multiplicativo.

Para complementar a compreensão e a resolução das equações, optamos também pelo Pat2Math, o qual apresentaremos um breve tutorial.

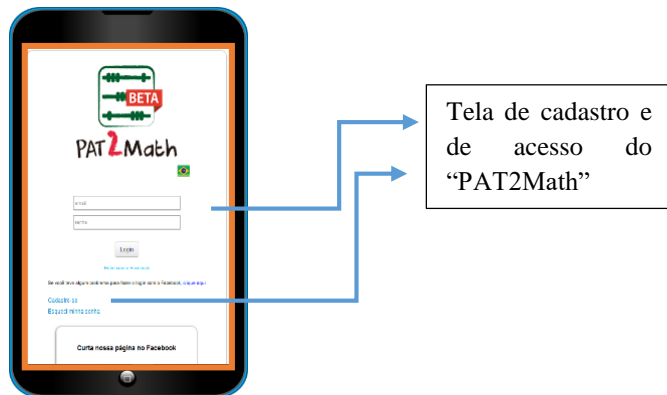
4 O “PAT2Math”



Sob a coordenação da Prof^a Dr^a Patrícia Jaques, o objeto “PAT2Math” está sendo desenvolvido por graduandos, mestrandos e doutorandos em computação no Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS) e se encontra disponível online no site: <http://pat2math.unisinos.br/index.html>.

Esse ODA pode ser acessado, gratuitamente, por quaisquer dispositivos, inclusive os que são móveis, como os *smartphones*.

Antes de realizar o primeiro acesso, o usuário deverá se cadastrar ou acessar através da sua conta do *facebook*. Logo em seguida, será liberado o acesso.



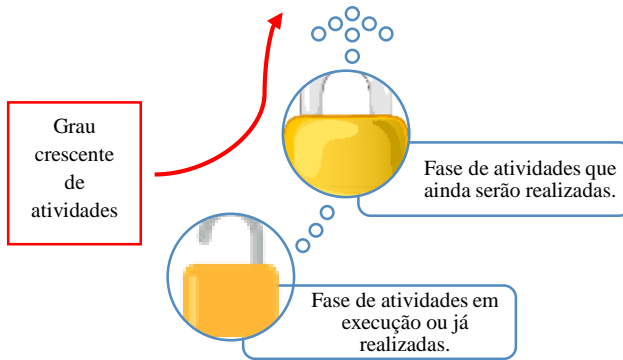
Fonte: Arquivo pessoal



Interagindo
com o
"PAT2Math"

O primeiro contato com o ambiente virtual será uma tela mostrando a sequência de atividades separada em fases. As atividades de cada fase só poderão ser realizadas, após concluir a anterior.

O ícone que representa cada fase é um cadeado.



Fonte: Arquivo pessoal

Menu da sequência de atividades exibido nos dispositivos móveis



Fonte: Arquivo pessoal

A interface do sistema tutor se divide no menu das atividades, com listas de equações do 1º grau. Cada equação proposta poderá ser resolvida, a partir dos recursos oferecidos. Na interface do sistema, há também dicas de resolução e a marcação de pontos do usuário.

Equação proposta

The screenshot shows the Pat2Math interface. On the left, there is a sidebar with a 'Lista de equações da Fase 1' (List of equations for Phase 1) containing several math problems like $x+5=8$, $x+12=27$, etc. The main area displays a math problem $x + 4 = 9$. On the right, there is a 'Dica de resolução' (Resolution tip) box. A red arrow points from the text 'Equação proposta' to the equation $x + 4 = 9$. A red bracket on the right side of the interface groups the 'Dica de resolução' and the sidebar, with a label box containing '- Pontuação' and '- Dica de resolução'.

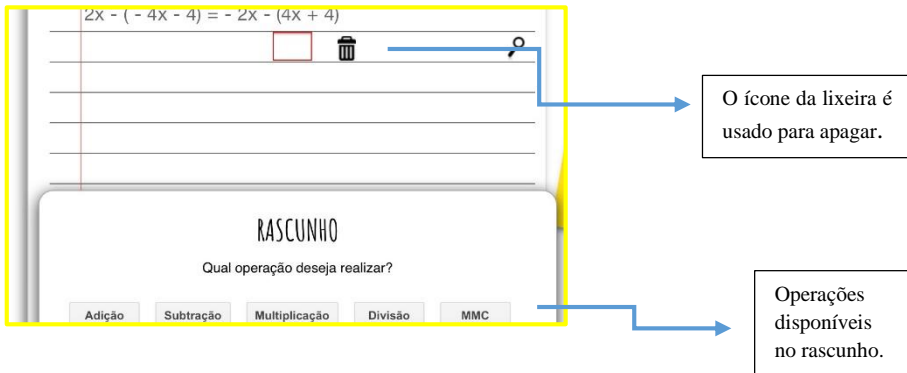
Um recurso interessante que também é oferecido, é o rascunho. Nele poderá ser escolhido resolver a operação de adição; por exemplo, podendo corrigir, apagar apenas a resolução ou tudo, em caso de erro.

O pat2Math emite também informações sobre a ação executada.

The first screenshot shows a calculation interface titled 'ADIÇÃO' (ADDITION). It displays a vertical addition problem: $\begin{array}{r} 12 \\ + 109 \\ \hline 125 \end{array}$. The digit '5' in the result is highlighted with a red box. Below the calculation are three buttons: 'Corrigir', 'Limpar resolução', and 'Limpar tudo'. A blue arrow points from the '5' to a text box: 'Indica o erro no cálculo efetuado.' Another blue arrow points from the buttons to a text box: 'Opções mediante o erro.'

The second screenshot shows a feedback message box: 'Você cometeu um pequeno engano ao realizar a operação' (You made a small mistake when performing the operation). A red arrow points from the message to a text box: 'Chama atenção em relação ao erro.' The background shows a partial view of the addition problem.

O sistema tutor “PAT2Math” oferece no recurso “rascunho” além da adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e o MMC. Nos rascunhos, os estudantes podem realizar os cálculos fora da área destinada, para resolução das equações.



O “PAT2Math” oferece no recurso “rascunho” além da adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e o MMC. Nesses rascunhos, os estudantes podem realizar diversos cálculos.

Dic@: O professor poderá explorar as atividades, que compõe o “PAT2Math” propondo que os alunos elaborem problemas para as equações representadas na linguagem algébrica, e quando for possível representar também na forma pictórica.

Outra sugestão é tentar usar diferentes métodos de resolução das equações do 1º grau, levando os estudantes a pensarem sobre qual seria o método mais eficaz para cada equação apresentada.

Atividades



[Esta Foto](#) de Autor Desconhecido está licenciado em [CC BY-NC-ND](#)

5 Tema 1: Conceito e Aplicação

O que é uma equação? De onde surgiu esse “ajuntamento” de números e letras? Para que eu devo aprender?

É possível, que muitos de nós professores já tenhamos escutado essas indagações por parte dos nossos alunos ou até mesmo nos questionados em algum momento do nosso caminho de aprendizagem.

Sem pretensões de desenvolvermos uma abordagem sobre a História da Matemática neste trabalho, consideraremos algumas situações desafios que os antigos matemáticos se depararam para resolver, sem o uso das equações como as conhecemos atualmente. Essas situações desafios estão no livro *O Idioma da Álgebra*, de Oscar Guelli e fazem parte da proposta da atividade 1. Esperamos, então, tentar proporcionar um melhor entendimento da aplicação das equações de modo geral, compreendendo-as como parte das atividades da humanidade ao longo do tempo.

5.1 Atividade 1



Leitura Coletiva do livro paradidático da coleção Contando a História da Matemática Equação: O Idioma da Álgebra, de Oscar Guelli.

Objetivos: Conhecer a origem e a necessidade das equações.

Tempo estimado: 1h 15min

Recurso Tecnológico: Livro Paradidático, projetor, computador.

- ✚ Proposta de trabalho: Projeção do livro paradidático ¹ com objetivo de realizar a leitura. Durante esse momento, sugere-se pausa para comentários e/ou explicações.
- ✚ O grupo de alunos é dividido em 4 subgrupos, sendo responsáveis pelos 4 capítulos do livro:

1. As equações na Antiguidade
2. Equações com régua e compasso
3. A origem dos símbolos
4. O idioma da Álgebra

Sugestão: Distribuir um arquivo digitalizado dos capítulos mencionados acima para cada grupo.

¹ O professor poderá disponibilizar um livro paradidático para cada aluno ou para cada dupla de alunos, caso a escola disponha desse recurso.

5.2 Atividade 2



Elaboração de 4 curtas sobre a releitura de cada capítulo do paradidático.

Objetivos: Compreender o uso das equações para solucionar problemas, atualizando as situações para o cotidiano.

Tempo estimado: _____

Recurso Tecnológico: smartphones

- ✚ Cada grupo desenvolverá um texto coletivo para realização de um curta, que poderá também ser uma animação de acordo com a proposta estabelecida na atividade 1.
- ✚ Os curtas serão realizados com o uso do celular.
- ✚ Os arquivos serão enviados para a professora pesquisadora.

Sugestão: Trata-se de uma atividade a distância. Indica-se que os estudantes desenvolvam a atividade como tarefa de casa, e apresentem-na no encontro da semana seguinte ou à critério do professor.

5.3 Atividade 3



Exibição e análise dos curtas

Objetivos: Exibir a produção realizada, questionar sobre a real necessidade do uso das equações, nas situações elaboradas pelos grupos.

Tempo estimado: 10 min

Recurso Tecnológico: Projetor e computador

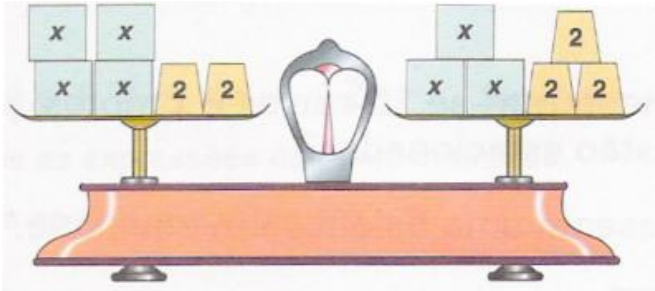
6 Tema 2: O Conceito de Equivalência, Métodos e Soluções

Sendo uma equação representada por uma igualdade entre duas expressões matemáticas, podemos então realizar as mesmas operações aritméticas em ambos os lados da equação, mantendo o equilíbrio, isto é, a equivalência para encontrarmos a solução.

No entanto, para os estudantes que estão começando resolver equações do 1º grau ou para aqueles que já iniciaram o estudo, mas demonstram dificuldade, é possível que outros métodos estejam mais próximos do modo de compreensão dos alunos. A tabela a seguir resume as características desses métodos.

Métodos de Resolução	Características
Gerar e avaliar	A partir do entendimento do que é uma raiz de uma equação, os estudantes são encorajados a pensar diferentes valores que serão testados na equação e assim encontrar a solução por tentativa e erro.
Esconder	Nesse método se esconde uma parte da equação, “considerada como incógnita” e recorre-se ao método anterior, para determinar seu valor na equação
Desfazer	Esse método é baseado nas operações inversas e é muito usado para resolver as equações.
Equações equivalentes	Esse método consiste em transformar determinadas equações em outras mais simples, porém equivalentes a elas. Nesse método podemos realizar uma analogia entre a balança de dois pratos em equilíbrio.

Apresentamos uma sequência de atividades, integrando alguns métodos, sendo cada um subsequente ao outro; até chegarmos ao método das equações equivalentes, o qual neste trabalho será explorado, a partir do uso do objeto digital a balança, que simula o princípio da igualdade ao transpormos os pesos ou objetos nos pratos da balança.



Esta Foto de Autor Desconhecido está licenciado em [CC BY-SA](#)

6.1 Atividade 1 – Gerando e avaliando valores



Esta Foto de Autor Desconhecido está licenciado em [CC BY-NC-ND](#)

Consideremos o conjunto Z nesta atividade.

Escolha alguns valores (pelo menos 2) desse conjuntos e depois substitua na equação $3x - 2 = 19$.

Dentre os valores encontrados qual mais se aproximou de 19 ou foi igual a 19?

Caso não tenha encontrado 19, você irá escolher valores que sejam maiores ou menores daquele que mais se aproximou de 19? Justifique.

Continua com o procedimento até você encontrar 19.

Denominamos esse método de **Gerar e Avaliar**.

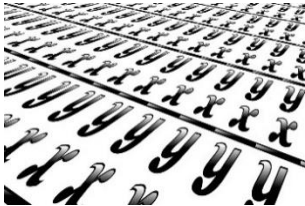
6.2 Atividade 2 – Continue gerando e avaliando

Aplice o método anterior, para resolver as equações seguintes.

- $2a + 4 = 6$
- $3a + 4 = -17$
- $8x - 1 = 800$
- $20 - y = 12$
- $3574 + b = 3580$
- $4a + 4 = 6$

Sugestão: Professor(a), de acordo com o seu planejamento, você poderá inserir novas equações nas quais os alunos possam intuir e testar valores para encontrarem a raiz da equação.


6.3 Atividade 3 - O que a equação pede?



Fonte: <https://pixabay.com>

Para resolver a equação $x - 10 = -4$, você escolheria alguns valores para testar? Quais?

Mas também podemos pensar da seguinte forma:


O que a equação está pedindo? Se **escondermos** o x :  $-10 = -4$, qual é o número que retiramos 10 e encontramos -4?

Intitulamos esse procedimento como: **Esconder**.

A equação $15 - (10 - x) = 8$ pode ser resolvida pelo método de esconder?

Escondendo o que está nos parênteses, obtemos $15 - \text{img alt="person icon" data-bbox="611 533 641 563}} = 8$.

O que a equação está pedindo? Qual é o número que subtraímos de 15 e encontramos 8?

Logo se  $= 7$ então $10 - x = 7$, logo você encontra $x = 3$.

✓ Verificando

Vamos substituir o x por 3 e testar o resultado: $15 - (10 - x) = 15 - (10 - 3) = 8$

Portanto concluímos $x = 3$.

Sugestão: Além de inserir novas equações de acordo com a necessidade das turmas, sugerimos que esse método seja explorado junto com o objeto digital de aprendizagem a “Balança”. Os pacotes de tomates que aparecem, nesse recurso, representam as incógnitas. É o que está escondido. É importante chamar atenção dos estudantes para o que acontece, simultaneamente, nos pratos da balança e na equação dada.



6.4 Atividade 4- Desfazer para resolver



Para resolver a equação $\frac{6(3y-5)-8}{8} = 5$,

iremos desfazer as operações que estão nesta equação. Isto é, vamos realizar as operações inversas às que foram dadas. Poderíamos também resolver pelo método de esconder, mas talvez fosse menos aplicável na situação apresentada.

Lembrando que as operações matemáticas são inversas, quando uma operação/ação desfaz a outra.

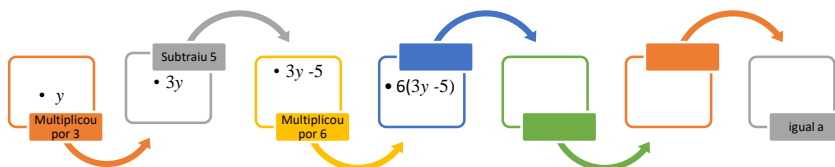


https://image.freepik.com/vetores-gratis/conjunto-de-porta-aberta-e-fechada-de-casa_1284-9310.jpg

Observe que a ação de abrir uma porta desfaz a ação de fechar a porta. Isto é, elas são operações reversíveis, assim como outras no cotidiano e na Matemática também.

Retomando equação $\frac{6(3y-5)-8}{8} = 5$, o que está acontecendo com o y ? Que operações matemáticas estão acontecendo sequencialmente com o y ?

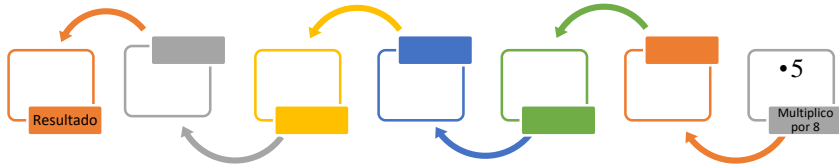
Siga e complete o registro dessa sequência a partir do y .



Chegamos ao resultado!!!!!!

Como poderíamos desfazer essas ações e voltarmos para o y ?

Complete a figura desfazendo as operações.

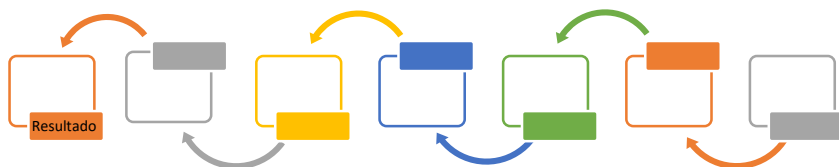


Resolva a equação $\frac{7(2z-3)-5}{10} = 3$.

Complete o registro dessa sequência a partir do Z .



Complete a figura, desfazendo as operações.





ya Foto de Autor Desconhecido está licenciado em CC BY-NC

1. Resolva mentalmente, desfazendo as operações.

i) $\frac{108}{x} = 9$

ii) $\frac{5x+10}{9} = 5$

iii) $\frac{3(2k+1)}{9} = 9$

Sugestão: Professor apresente outras equações de acordo com seu planejamento.

6.5 Atividade 5 -Tornando as equações mais simples

Embora não seja consequência dos métodos anteriores, o método das equações equivalentes é também importante, pois ajuda a compreender as operações que mantem o conjunto solução, por meio da preservação do equilíbrio da igualdade (BERNARD, COHEN; 1994).

“Para resolver essas equações, é preciso transformá-las em outras mais simples, que tenham a mesma raiz que elas, ou seja, equivalentes a elas.” (TINOCO et al; 2015, p. 39).

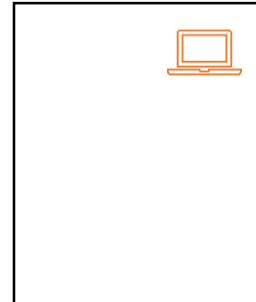
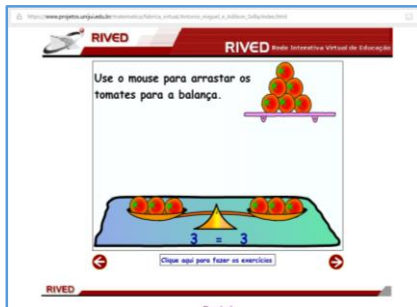
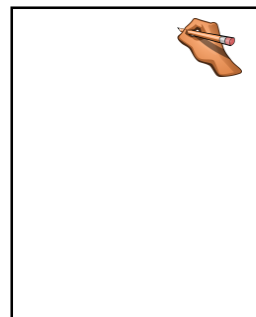
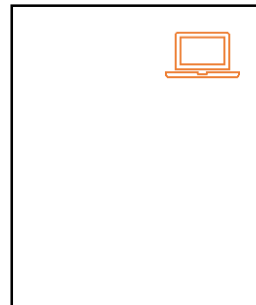
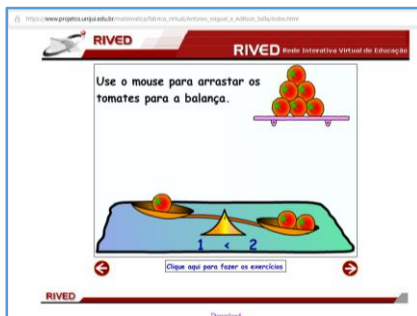
A ideia do equilíbrio pode ser realizada, fazendo analogia ao equilíbrio da balança de dois pratos. Utilizamos essa percepção, para introduzir o método das equações equivalentes, aplicando o objeto digital a “Balança” e suas atividades. Para isso, acesse o link:

https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html.

6.6 Atividade 6 – Para manter o Equilíbrio

Equilibrando a balança

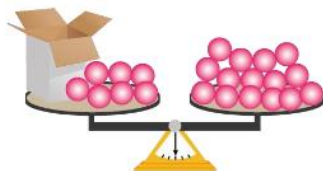
1. Observe a balança que aparece ao acessar a 1ª atividade do link anterior. Ela está equilibrada ou desequilibrada?
2. Com o mouse arraste os tomates da prateleira e veja o que acontece. A sua balança poderá apresentar as situações representadas nas imagens. Descreva essas situações:



3. Escreva as representações algébricas das situações de equilíbrio propostas a seguir. (Currículo Nacional-Adaptada)







Fonte: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-21360_recurso_pdf.pdf

4. Desenhe uma balança para representar cada uma das equações do 1º grau dispostas, indicando o que representa a incógnita x nos desenhos:

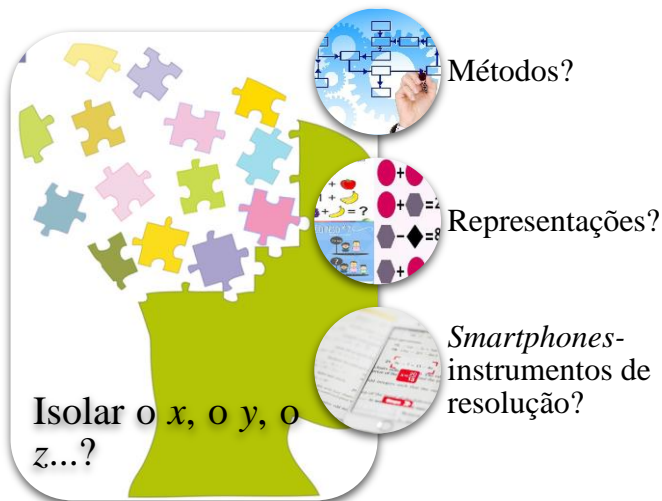
$$3x = 2x + 10$$

$$8 + x = 15$$

5. A seguinte balança se desequilibrou, pois todas as bolinhas se deslocaram para o lado esquerdo. O que devemos fazer para voltar ao equilíbrio? Qual a equação que representa o equilíbrio? (Currículo Nacional-Tradução nossa)



7 Tema 3: Equações do 1º Grau. E agora?



Agora chegou o momento de propormos atividades, para que nossos alunos as resolvam a partir do que fomos desenvolvendo, com liberdade de escolha.

Sugerimos a sequência de atividades que compõe o “PAT2Math”, para iniciarmos essa etapa.

As tarefas do aplicativo são divididas em fases, nas quais as dificuldades aumentam à medida que se avança. Propomos que o professor as utilize de acordo com os níveis de aprendizagem de sua turma. Se considerar adequado, o docente poderá separá-las em seu planejamento. Por exemplo: desenvolver duas fases consecutivas, aplicar outras atividades e retornar as fases posteriores.

Dic@: O professor poderá apresentar as atividades do “PAT2Math” de forma diferente daquela que foi proposta no próprio objeto digital de aprendizagem. Ele poderá usar os recursos desse objeto para propor atividades, nas quais os estudantes possam mudar a representação semiótica, elaborando situações-problema na língua materna ou por desenhos e resolvê-los.

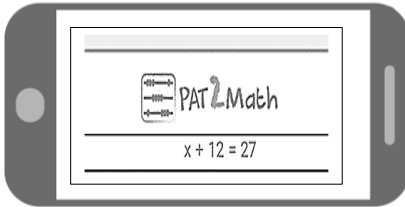
Dic@: Outra sugestão é discutir com os alunos os métodos de solução para cada equação proposta.

Dic@: Talvez esse seja um dos melhores momentos, para mostrar que os *smartphones* podem ser usados para fins de aprendizagem.

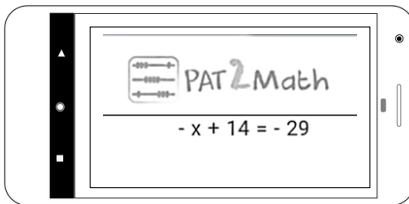
7.1 Atividade 1- Algumas atividades do “PAT2Math”

1. Resolvas as equações propostas a seguir:

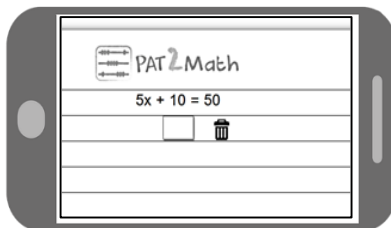
i:



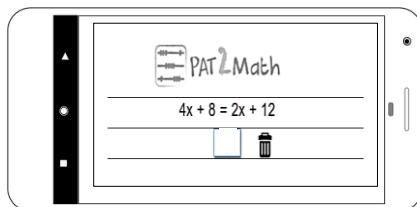
ii:



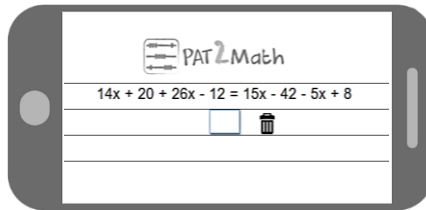
iii:



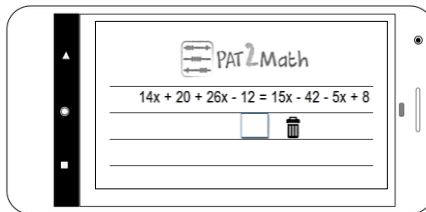
iv:



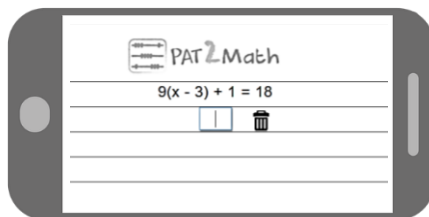
v:



vi:



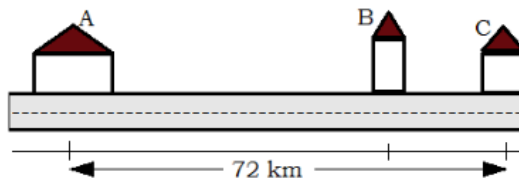
vii:



Dic@: As demais atividades do “PAT2Math” estão disponíveis em:
<http://pat2math.unisinos.br/>

2- (BARBEIRO, 2012) Os três lados de um triângulo têm comprimentos diferentes. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro lado e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Se o perímetro do triângulo for 31 cm, qual a medida de cada um dos lados do triângulo?

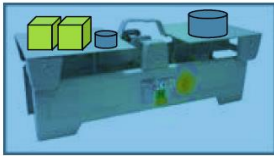
3- (BARBEIRO, 2012) Na figura abaixo está representada uma estrada em que existem 3 casas: A, B e C. A distância entre a casa A e a casa B é o triplo da distância entre a casa B e a casa C. Qual a distância entre A e B?



7.2 Atividade 2- Aplicando a aprendizagem

1. (Curriculum nacional-Tradução nossa) No desenho a seguir, observamos que a balança está equilibrada. Queremos determinar a massa dos pedaços iguais de queijo. No prato direito há uma massa de 500g e no prato direito estão os pedaços de queijo, mais uma massa de 50g.

Elabore uma equação do 1º grau, para representar a situação descrita e determinar a massa dos pedaços de queijo.



Dic@: Atribua uma incógnita à massa de um pedaço de queijo. Resolva a equação, depois verifique o resultado, substituindo a incógnita pelo valor encontrado. Em seguida, verificar a igualdade.

2. A medida dos lados de um pentágono são números consecutivos. Sabendo que o seu perímetro é de 85cm. Determine as medidas do maior e do menor lado.
3. Elabore uma situação-problema que satisfaça a equação $3x + 8 = -x + 2$

7.3 Atividade 3- JOGO: FATORES ESCONDIDOS NO ESPORTE

1. (Curriculum nacional – Tradução nossa) No quadro a seguir, as figuras foram substituídas por símbolos. Cada símbolo corresponde sempre a mesma figura.


























Os números que aparecem ao lado de cada linha horizontal e abaixo de cada linha vertical foram obtidos por sucessivas **multiplicações** em cada linha, respectivamente.

Os símbolos que aparecem representam números de 1 a 5. Se:

$$\text{skier} = 2 \quad \text{cyclist} = 3,$$

Descubra os valores escondidos em cada símbolo.

$$\boxed{\text{skier}} = \boxed{2} \quad \boxed{\text{cyclist}} = \boxed{3} \quad \boxed{\text{baller}} = \boxed{} \quad \boxed{\text{bicyclist}} = \boxed{}$$

					=	<input type="text" value="48"/>
					=	<input type="text" value="72"/>
					=	<input type="text" value="96"/>
					=	<input type="text" value="24"/>
					=	<input type="text" value="144"/>
<input type="text" value="72"/>	<input type="text" value="12"/>	<input type="text" value="48"/>	<input type="text" value="144"/>	<input type="text" value="192"/>		

8 Orientações aos professores

Nesta seção, apresentamos os objetivos e os conteúdos referentes à sequência de atividades que compõem este caderno.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES		
Atividades	Objetivos	Conteúdos
5.1 Atividade 1	Conhecer a origem e a necessidade das equações.	História da Matemática- equações do 1º grau.
5.2 Atividade 2	Compreender o uso das equações para solucionar problemas, atualizando as situações para o cotidiano.	História da Matemática- equações do 1º grau.
5.3 Atividade 3	Exibir os curtas-metragens elaborados pelos alunos. Questionar sobre a real necessidade do uso das equações nas situações elaboradas pelos grupos.	Equações do 1º grau.
6.1 Atividade 1	Conhecer e compreender o método de resolução de equações do 1º grau: Gerar e Avaliar.	Resolução de Equações do 1º grau.
6.2 Atividade 2	Aplicar o método Gerar e Avaliar para resolver as equações do 1º grau.	Resolução de Equações do 1º grau.
6.3 Atividade 3	Conhecer, compreender e aplicar o método de resolução de equações do 1º grau: Esconder.	Resolução de Equações do 1º grau.
6.4 Atividade 4	Conhecer, compreender e aplicar o método de resolução de equações do 1º grau: Desfazer.	Resolução de Equações do 1º grau.
6.5 Atividade 5	Resolver as equações do 1º grau com o objeto digital de aprendizagem a “Balança”.	Resolução de Equações do 1º grau.
6.6 Atividade 6	Descrever a situação que uma equação do 1º grau representa. Transcrever para a representação algébrica. Transcrever para representação pictórica.	Resolução de Equações do 1º grau.

7.1 Atividade 1	Resolver as equações do 1º grau com o objeto digital de aprendizagem “PAT2Math”. Resolver situações problemas, transcrevendo da língua materna para outras representações semióticas.	Resolução de Equações do 1º grau.
7.2 Atividade 2- Aplicando a aprendizagem	Resolver as equações, aplicando a aprendizagem desenvolvida. Elaborar situação-problema. Mudar a representação semiótica: Da representação algébrica para a língua materna.	Resolução de Equações do 1º grau.
7.3 Atividade 3- JOGO	Aplicar a resolução de equações do 1º grau em um contexto lúdico.	Resolução de Equações do 1º grau.

Referências Bibliográficas

A MATEMÁTICA é a mais humana das ciências. Mário Sérgio Cortella. [S.l]: [S.n.], 2015. 1 vídeo (4 min 52s). Publicado pelo canal Brasil Fatos. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=xvu8-z-GmWU>>. Acesso em: 17 out. 2019.

BAIRRAL, M. A. Educação e matemática em dispositivos móveis: construindo uma agenda de pesquisas educacionais focadas no aprendizado em tablets. In: COLÓQUIO DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO E MÍDIA, 4., 2014, Rio de Janeiro. **Anais [...]** Rio de Janeiro, UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 2014. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/269114106_Educacao_e_matematica_em_dispositivos_moveis_construindo_uma_agenda_de_pesquisas_educacionais_focadas_no_aprendizado_em_tablets>. Acesso em: 25 ago. 2018.

BAIRRAL, M. A.; DE ASSIS, A. R.; SILVA, Bárbara C. C. da. Uma matemática na ponta dos dedos com dispositivos touchscreen. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 8, n. 4, p. 39-74, 2015. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Marcelo_Bairral/publication/307550792_Uma_matematica_na_ponta_dos_dedos_com_dispositivos_touchscreen/links/58189a2f08aee7cdc685a8fe/Uma-matematica-na-ponta-dos-dedos-com-dispositivos-touchscreen.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2018.

BARBEIRO, E. C. C. **A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita: uma análise dos erros e dificuldades de alunos do 7º ano de Escolaridade.** 2012. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8318/1/ulfpie043292_tm.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2018.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

BERNARD, J.; COHEN, M. **Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado.** In: COXFORD, Arthurr. F.; SHULTE, Albert P, (Orgs.). **As ideias da álgebra.** Trad. Hygino. São Paulo: Atual, 1994. p. 111-126.

BOHRER, T. R. J. **As Teorias Implícitas de ensino e Aprendizagem dos Professores Supervisores de Escolas e dos Alunos de Ciências Biológicas pertencentes ao PIBID de uma Instituição de Ensino Superior/RS.** 2016. 133f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, 2016. Disponível em: <<http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/271/249>>. Acesso em: 07 fev. 2019.

BORBA, M. et al. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento.** 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CHILE. Ministerio de Educación. **Currículum Nacional**. Actividades Complementarias. Ministerio de Educación, 2017. Disponível em: <<https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-49823.html>>. Acesso em: 12 out. 2019.

DUVAL, R.. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Trad Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Título original: Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>>. Acesso em: 26 jan. 2019.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática-Equação**: O idioma da álgebra. São Paulo: Editora Ática, 1996.

JAQUES, P. A. PAT2Math: Um Sistema Tutor Inteligente para resolução de equações algébricas. In: **PAT2MATH**. [S.l.] [2015]. Disponível em: <<http://PAT2Math.unisinos.br>>. Acesso em: 17 ago. 2018.

TINOCO, L. A. de A. et al. **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2008.

VIEIRA, E. R. **Grupo de estudos de professores e a apropriação de tecnologia digital no ensino de Geometria**: caminhos para o conhecimento profissional. 2013. 251f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/17326445-Universidade-anhanguera-de-sao-paulo-edite-resende-vieira.html>>. Acesso em: 14 dez. 2018.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais** [...] Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundão, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 15-27, 2011. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/1550/155019936002.pdf>>. Acesso em: 09 out. 2019.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Tradução de Ernani F. da F. Rosa Porto Alegre: Artmed, 1998.