SERGIO MURYLLO FERREIRA

Sequências Numéricas

Sugestões para professores do 7º ano do Ensino Fundamental

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO - PPGEEB
CENTRO DE ENSINO E PESQUISA APLICADA À EDUCAÇÃO

UFG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

SERGIO MURYLLO FERREIRA

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Sugestões para professores do 7º ano do Ensino Fundamental

GOIÂNIA
2020

SERGIO MURYLLO FERREIRA

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS
Sugestões para professores do 7º ano do Ensino Fundamental

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica como requisito para obtenção para o título de Mestre(a) em Ensino na Educação Básica

Área de Concentração: Ensino na Educação Básica

Linha de Pesquisa: Práticas escolares e aplicação do conhecimento

Orientador (a): Dr. Marcos Antônio Gonçalves Júnior

GOIÂNIA
2020

REGISTRO(S) DO PRODUTO EDUCACIONAL

Produto Educacional Registrado na Plataforma EduCAPES, sob o título **XXX**, com acesso disponível no link:
http://XXXXXX

Outras formas de Registro (informar o tipo de registro, número e forma de acesso, como no exemplo do EduCAPES).

SERGIO MURYLLO FERREIRA

Sequências Numéricas

Sugestões para professores do 7° ano do Ensino Fundamental

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro colega professor,

Este Produto Educacional é parte integrante da Dissertação de Mestrado intitulada Cenários para Investigação Matemática: Uma Proposta Didática para Trabalhar Sequências Numéricas nas Séries Finais do Ensino Fundamental. Ele foi desenvolvido para ser usado em salas de aula de Educação Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental.

Os capítulos apresentam desde um breve resumo de como eu vejo a Educação Matemática e reconheço sua importância para a construção de um saber significativo em sala de aula, passando pela discussão de alguns casos particulares de Padrões Matemáticos e terminando com uma breve apresentação teórica dos Cenários para Investigação e um conjunto de atividades elaboradas para a apresentação dos conteúdos de Sequências Numéricas em sala de aula.

As atividades foram aplicadas e analisadas durante a Pesquisa que desenvolvi em turmas de 7º ano de uma escola particular do Ensino Fundamental. Por falar na Pesquisa... Ela está vinculada ao Mestrado Profissional em Ensino na Educação Básica, do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* do Centro de Estudos e Pesquisa Aplicada à Educação da Universidade Federal de Goiás. O objetivo inicial da Pesquisa era analisar a ação mediadora do professor em uma aula de investigação matemática que se desenvolvia dentro de um ambiente de aprendizagem colaborativa, e trouxe como desdobramentos, a análise das apreensões algébricas dos alunos.

As sugestões que apresento ao longo do texto são frutos de um trabalho coletivo que envolveu, além de mim, meu orientador de mestrado – o Prof. Dr. Marcos Antônio Gonçalves Júnior – e meus alunos das turmas de 7º ano. Com isso, esperamos contribuir para o desenvolvimento da Educação Matemática por meio de um convite à reflexão nas comunidades escolares onde esse trabalho for lido.

Eu, Marquinhos e os alunos esperamos que goste da aventura.

1. QUE MATEMÁTICA É ESSA?

A etimologia é o campo do conhecimento que estuda a origem e a evolução das palavras. Em diversos momentos, tenho recorrido a ela por acreditar que conhecer as palavras pode trazer significados bem interessantes sobre a origem daquilo que elas nomeiam. Com isso, não estou excluindo a possibilidade de os significados mudarem com o tempo, pois entendo que os significados evoluem. Porém, a procura pelas raízes etimológicas, o conhecer a palavra em seu íntimo (*etymom*), além de ser uma forma de me conectar com o passado pode ajudar no entendimento de como a Matemática foi pensada nos primórdios, pelos nossos ancestrais.

No caso particular da palavra "matemática", a etimologia sinaliza a junção de dois vocábulos, o "*mátema*" (matema) e o "*techné*" (tica). D'Ambrósio (2005, p. 112) faz um resgate interessante da Matemática primitiva ao caracterizá-la como o emprego de uma técnica, de um modo de fazer, de uma arte (*techné*) na intenção de conhecer (*mátema*), entender e lidar com o mundo.

Considero de grande importância a intencionalidade de D'Ambrósio, em omitir qualquer referência a uma quantificação, contagem ou estudo das formas na sua apreciação inicial sobre Matemática. Isso porque, na antiguidade, os egípcios também pensavam a Matemática assim. O papiro de Rhind[1], de autoria de um escriba egípcio chamado Ahmés, contém problemas Matemáticos que tratam de Aritmética e Geometria. Ahmés, o escriba, copiou o papiro de outro mais antigo, por volta de vinte séculos antes de Cristo, e escolheu um título bem interessante para seu texto.

Como os egípcios antigos não tinham a palavra "Matemática" em seu vocabulário, Ahmés intitulou seu trabalho com um belo "*Regras para inquirir a natureza, e para saber tudo que existe*, *cada mistério, cada segredo"* (TAHAN, 2001, p.12). Que modo interessante de ver a Matemática, investigativa (inquirir), aplicável (a natureza), integralizada (tudo que existe) e instigante (mistérios, segredos...).

No contexto etimológico, a Matemática é um conhecimento, um saber humano, uma forma de entender, perceber e dar significados aos fenômenos observados no mundo em que vivemos. Mas, sem a quantificação ou mesmo números, o que difere o saber matemático dos outros saberes e conhecimentos?

---

[1] Henry Rhind, um colecionador inglês que adquiriu o papiro em 1858.

Na escala temporal, tanto o viés científico quanto o religioso-cristão, acomodam a existência humana posterior a de um Universo. Por vezes, fico imaginado quando um primeiro humano tomou consciência de sua presença no mundo... Ele se pôs diante de muitas perguntas. Algumas existenciais, “Quem sou eu? De onde vim? Para onde vou?” outras pragmáticas, “O que eu vejo é imutável ou passível de transformações? Estou em um lugar hostil ou as condições são plenamente favoráveis à minha existência?” Na concepção de um Universo imutável, para garantir sua sobrevivência, não caberia outra atividade a este humano consciente senão interpretá-lo, dar nomes às suas estruturas e formas, contá-lo, quantificá-lo, medi-lo e dominar suas forças e ações.

Contudo, a necessidade de sobrevivência em um mundo em constante movimento levou esse antepassado a buscar o caminho das transformações. A intencionalidade da ação transformadora humana é a busca por superar sua condição de vulnerabilidade em um Universo pouco acolhedor, garantir a existência de sua espécie, conferir a ela (existência) sentido e, nesse contexto, a Matemática surgiu como forma de sentir, pensar, conhecer, interpretar, agir sobre e transformar o mundo.

Descrever historicamente os avanços e retrocessos desse humano primitivo em seu caminho de transformações se apresenta como um ponto de partida para compreender a diversidade do conhecimento matemático. Porém, a história da Matemática é um caminho árduo e ardiloso, evidenciado em períodos com poucos registros históricos, um ímpeto de buscar elementos matemáticos modernos nas culturas primitivas e a mutabilidade inerente ao registro histórico.

Para Freudenthal (1975, p.5), a humanidade já fazia cálculos e pensava a respeito de figuras geométricas antes de ter sido inventada a escrita. Essa afirmação corrobora a visão etimológica, pois apresenta o pensamento matemático não só na gênese do conhecimento, mas também como o próprio saber original. Todavia, de acordo com Freudenthal, os gregos se incumbiram de integrar a esse “conhecimento” um sistema lógico que permitiu chegar a conclusões através de deduções.

A história ocidental posiciona a sistematização lógica empreendida pelos gregos como origem da Matemática tal como a conhecemos hoje. Uma das razões para tanto, está na falta de textos sobre a história da Matemática. Por exemplo, Nobre (2002, p. 8) afirma que o livro de Vitruvius, um arquiteto romano que escreveu sobre a história da Matemática, escrito no século I a.C. tem sua importância historiográfica “por se tratar do texto mais antigo de história da Matemática que chegou intacto aos tempos modernos”.

Em seu livro, ele fez um registro dos saberes matemáticos do mundo antigo, especialmente sobre os gregos. O livro de Vitruvius foi amplamente divulgado no Império Romano, pois usava os saberes matemáticos gregos em aplicações na arquitetura. Pitágoras, Arquimedes, Erastóstenes são citados no livro.

Para mim, não há dúvidas de que os gregos contribuíram de forma bastante significativa para a consolidação da Matemática enquanto saber humano sistematizado, particularmente, na formalização do saber abstrato, da Matemática pura. Axiomas, corolários, lemas, lógica, hipóteses, implicações, teses entre outros. Contudo, quanta Matemática foi construída antes dos gregos e não teve o registro historiográfico de Vitruvius? Como posso imaginar Índia, Egito, Mesopotâmia, América pré-colombiana e nenhuma matemática?

Dick Teresi (2008, p.11) chama de ciência não-ocidental aquela desenvolvida por povos que não fazem parte da Europa, Grécia e América do Norte pós-colombiana. Para ele, historicamente, a Matemática desenvolvida pelos povos não-ocidentais é ponto mais forte de todo seu conhecimento, a ponto de tornar-se um presente intelectual para a ciência ocidental (TERESI, 2008, p.31). Também concordo com Teresi (2008, p. 17) quando argumenta que a Europa reverenciou, por diversos séculos, a cultura e a sabedoria do antigo Egito. Esse apreço começou a mudar, a partir do século XVIII quando, por influência de pensadores que defendiam a pureza racial, tema conhecido por modelo ariano, os escritos e ensinamentos da época passaram a ser orientados pela busca e refinamento do modelo ariano.

No contexto geopolítico, o saber e a cultura da Grécia antiga passaram a ser reverenciados como saberes europeus e os escritos acerca da história da Matemática, contando verdades parciais e incompletas dentro dessa perspectiva geopolítica, passaram a registrar a Grécia antiga (600 a.C.) como berço da Matemática, tratando as construções Matemáticas de outros povos como insignificantes. Sobre esses fatos, faço referência a Sergio Nobre avaliando a influência política de grupos dominantes sobre a história que é contada. Para ele,

> [..] a história é sempre contada pelos vencedores. Os perdedores não sobrevivem para contar as suas versões dos acontecimentos e, caso sobrevivam, suas versões não são de interesse para aqueles que passarão a seguir os novos direcionamentos impostos pelos que venceram. (NOBRE, 2002, p.4)

No exercício de pesquisador reflexivo não posso deixar de oferecer esse contraponto histórico às “verdades” daquilo que nós, ocidentais colonizados, acreditamos (ou nos fizeram acreditar?) ser a Matemática daquilo que ela realmente é. No exercício da docência, a mesma reflexão é válida, no entanto, não posso esgotar aqui o nosso diálogo sobre a Matemática, ele continua em toda a pesquisa.

Apesar disso, preciso "amarrar algumas pontas" que permanecem soltas. Para tanto, retornemos ao que nos trouxe até aqui. Eu tenho a intenção, leitor(a) de apresentar a você um pouco da minha experiência matemática. Por isso, quero trazer, elementos que considero interessantes para o debate e que significaram muito para mim. Faço isso na intenção de oferecer argumentos e contrapontos frente à concepção de uma Matemática de origem puramente helenista.

O que apresentei até agora situa, historicamente, indivíduos e agrupamentos humanos desenvolvendo técnicas e saberes matemáticos necessários para garantir suas existências. D'Ambrósio (2005, p.112) afirma que esse "conhecimento é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas [...] em contexto natural, social e cultural". Nesse sentido, entendo que as primeiras criações matemáticas humanas eram respostas pragmáticas à problemas reais com os quais nossos ancestrais lidavam.

Esses indivíduos e suas comunidades, de diversas culturas, etnias, lugares e tempos construíram e evoluíram o saber Matemático desde os primórdios das civilizações. Em diversos tempos e contextos, Mesopotâmia, Egito, Grécia, Índia, China, mundo Árabe, América pré-colombiana, Europa, Oceania... contribuíram para a interpretação matemática do mundo, uma Matemática criada, desenvolvida e utilizada por pessoas.

Ainda que hoje a concebamos como uma forma de Matemática aplicada, usada inicialmente para fazer contagens simples por relação biunívoca, desenvolver ferramentas, efetuar medições, a utilização de um método empírico para esses primeiros saberes não os torna uma Matemática menor em relação àquela praticada na atualidade, de caráter generalista, abstrata e dedutiva. Tampouco reduz o conhecimento matemático ao ferramental de uso agrícola ou comercial. Segundo Machado (1987, p.81), "a história da Matemática está plena de eventos que revelam a descoberta de importantes "teoremas" sugeridos pelo empírico", o que nos faz refletir, leitor(a), que mesmo dentro da Matemática mais sofisticada, dita "abstrata", o conhecimento advindo da experiência está presente.

O acréscimo de elementos culturais ao saber matemático embora possa parecer simples, carrega em si grande valor dado seu interesse pelo processo de construção do conhecimento humano e pela busca em resolver os problemas impostos pela realidade. Diante de um problema local como a contenção de enchentes, contagem de animais dentre outros tantos problemas, como as comunidades primitivas se organizavam? Como o problema era abordado? Quais técnicas eram utilizadas na resolução desse problema? Como o saber construído era repassado às próximas gerações? Certamente, estamos falando de uma Matemática que surge pela necessidade de intervenção em uma realidade, mobilizando saberes, força e coletividade humanos para a ação.

Temos, enfim, uma boa aproximação acerca de que Matemática nos interessa nessa pesquisa, aquela que surge de forma criativa na resolução de problemas propostos e apontam para a necessidade de intervenção em uma realidade local, transitando da realidade à ação. Mas a trama carece de um elemento final, uma *cereja do bolo* desse contexto, a capacidade humana de se permitir viver essa Matemática, reconhecer sua beleza e validade, ter uma experiência matemática.

Para Bondía Larrosa (2002, p.21), o homem é um vivente com palavra. É ela que determina aquilo que se pode chamar de pensamento dado que se pensa a partir de palavras. Assim, a ação de nomear o que se faz, seja em educação ou em qualquer outro campo do saber humano é uma ação reflexiva do sujeito: ao nomear as coisas, trava-se uma luta pelo controle daquilo que se nomeia.

Nessa completude etimológica de sentido e significado, Bondia Larrosa relaciona as atividades humanas sobre as palavras à própria noção “do que somos” e “do que nos acontece”. No caso particular da palavra *experiência* ele a define como aquilo que *nos* passa, o que *nos* acontece, o que *nos* toca (BONDÍA LARROSA, 2002, p.21).

No sentido dado por Bondía Larrosa à palavra *experiência*, percebe-se um deslocamento da ideia científica empirista (de julgar e controlar, por meio do experimento, as leis e forças da natureza) para a passividade de alguém que se permite transformar enquanto experencia. “O que *nos* passa”, “o que *nos* acontece” acaba por definir um

> sujeito da experiência [que] se define não por sua atividade, mas por sua passividade, por sua receptividade, por sua disponibilidade, por sua abertura. Trata-se, [...] de uma passividade feita de paixão, de padecimento, de paciência, de atenção, como uma receptividade primeira, como uma disponibilidade fundamental, como uma abertura essencial. (BONDÍA LAROSSA, 2002, p. 24)

Assim, a experiência matemática não está situada somente na apreensão de saberes escritos em linguagem e técnicas presentes em livros. Ela transcende para uma ética preenchida de paixão, significados por aquilo que *nos* toca. Ao conferir sentido aos conceitos matemáticos, o sujeito disposto a experienciar a matemática “luta” com seus símbolos, regras, axiomas, desvenda seus padrões e regularidades, impõe-lhes significados, permite-se ser tocado por esse saber, como que entregue a uma paixão humanizadora que ele cultiva. Isso faz do saber observado em livros, computadores, máquinas de calcular, uma criação humana chamada matemática, cuja existência está na mente humana, sendo capaz de conectar homem e mundo (DAVIS & HERSH 1989, p.33).

O matemático francês Henri Poincaré afirma que a percepção humana da harmonia dos números e da beleza matemática são alentos às necessidades estéticas que sensibilizam a mente dos matemáticos. Para ele, a resolução de um problema matemático é uma ação criativa, ora consciente, seletiva, capaz de discernir caminhos, combinações, ora inconsciente, intuitiva, operando de modo subliminar até que um *insight* confere a ordenação matemática necessária à sua solução (POINCARÉ, 1996). É essa a experiência matemática que *me toca* e que eu espero despertar em meus alunos e, assim como Poincaré, experenciar "o triunfo da descoberta" anunciado por Polya[2] no prefácio da 1ª edição de sua "Arte de Resolver Problemas", a experiência capaz de trazer o gozo da descoberta, da invenção, a satisfação após os momentos de tensão vividos na resolução de um problema, ainda que este seja modesto.

Contudo, quem são os sujeitos dessa construção matemática? Apenas alguns escolhidos ou vocacionados podem contemplar e experimentar a beleza das *flores de maio azuis* da Matemática? Godino e Batanero argumentam que a construção de um saber matemático surge como consequência da necessidade e da curiosidade humanas em resolver uma certa classe de problemas (GODINO e BATANERO, 2016, p. 2).

Nesse contexto, a criação matemática é vista como uma resposta criativa do sujeito a uma diversidade de problemas de ordem natural ou sociológica que lhe desafiam. Em busca de respostas, o sujeito cria suas matemáticas, de modo peculiar, ora pragmática, empírica, aplicada, ora por meio da instituição de axiomas, ora generalizando, ora criando abstrações, ora desenvolvendo uma linguagem diferente da materna por meio de símbolos, interpretações, validações. Para Godino e Batanero (2016, p. 4), a consequência dessa construção matemática implica no empenho da linguagem e conceitual matemático criados na resolução de problemas.

Nesse movimento, nota-se um saber matemático construído por pessoas "comuns". Esse conhecimento carrega em si mais que objetos matemáticos por contemplar elementos culturais, significados, histórias, partilhas e aplicabilidade. Não é a matemática dos "gênios", ou dos "escolhidos'. É uma matemática dos povos, do homem, da mulher, dos estudantes do

[2] "A great discovery solves a great problem, but there is a grain of discovery in the solution of any problem. Your problem may be modest, but if it challenges your curiosity and brings into play your inventive faculties, and if you solve it by your own means, you may experience the tension and enjoy the triumph of discovery." (POLYA, 1973)

7º ano, do professor desses alunos. Uma Matemática que *nos* toca, que *nos* conecta ao mundo, que *nos* difere de outros grupos sociais pelos problemas locais e, ao mesmo tempo, *nos* une à comunidade de pessoas que querem transformar a realidade *sentida* de seus mundos valendo-se de uma matemática real.

No contexto dessa pesquisa, o resgate histórico e etimológico é importante porque eu acredito em uma Matemática enquanto construção humana, multicultural, capaz de unir pessoas, de fazer do mundo em que vivemos um lugar melhor. É essa a Matemática preenchida de valores culturais, de significados e valores humanos que me sensibiliza, que me atrai e que eu me esforço por exercer em minha práxis educativa.

No Brasil, as *flores de maio* (Figura 1) são plantas ornamentais nativas, apreciadas pela beleza de suas pétalas cujas cores mais comuns são brancas, amarelas, rosas e vermelhas. De um modo poético, fico me imaginando como um apanhador dessas flores, semelhante à descrição dada nos versos de uma música popular bem conhecida: "*Você lembra, lembra, eu costumava andar bem mais de mil léguas pra poder buscar flores de maio azuis e os seus cabelos enfeitar"*[3]

Ao propor buscar *flores de maio azuis*, os autores dos versos apresentados fazem uma referência a algo raro, assim como Bondía Larrosa (2002, p.21) afirma ser a experiência cada vez mais rara. Segundo Larrosa, há um excesso de informação na sociedade contemporânea que contingencia o ato de experienciar, dado que aprender não é processar informações, há que se parar para pensar, refletir, sentir o que se vivencia.

A Matemática que eu procuro apresentar nesse produto educacional é semelhante a uma *flor de maio azul*. Sua raridade deve ser percebida como uma possibilidade de construir significados para a Matemática, junto com nossos alunos – os meus, os seus alunos, leitor(a) – e, nessa construção, vivenciarmos coletivamente, a experiência da descoberta, da invenção, da crítica, da própria *matema*, do mundo e da vida. Trata-se de uma oportunidade de se humanizar, de preencher de significados a nossa prática, de associar o conhecimento à própria vida humana.

O que faz a Matemática diferente dos demais saberes não é somente seu corpo rigoroso de conceitos, escritos em uma linguagem própria que modela fenômenos e confere a eles significados, valores, formas, quantificações, contagens, padronizações, dentre outros. A apreensão desse conjunto de regras é algo valoroso para o desenvolvimento humano, mas o belo do saber não está em transformar tudo em números, deve existir algo que transcenda a

[3] Trecho da música Sapato Velho. Autoria de Mú Carvalho, Cláudio Nucci e Paulinho Tapajós.

observação a ponto de fazê-la *experiência* matemática, ponto de deslocar nossa percepção cósmica do caótico e distante para ordenado e sentido.

Figura 1 - Flores de Maio

Fonte: SOUZA FERREIRA, Marcos Paulo. **Flores da Tia Flávia**. 2019

É essa a Matemática que se busca, impregnada da condição humana, da vida social, a Matemática das transformações que permite ver, sentir o Universo que nos cerca como Universo das cores, dos sons, dos cheiros sem deixar que “tudo isso desapareça diante do aparelhamento científico, como uma fantasmagoria formidável.” (SABATO, 2006, p. 27, 28).

Bom, nesse momento já é possível perceber que eu gosto muito de Matemática e que ela me causa um certo encantamento. Eu entendo que se você chegou até aqui é porque sua experiência também tem sido significativa. Mas só agora eu *atinei* para um fato... Precisamos falar sobre os padrões numéricos. Não estranhe a linguagem, meu(minha) leitor(a), aqui em Goiás, “atinar” é o mesmo que “ter entendimento sobre alguma coisa”.

Na próxima seção, vamos dialogar sobre os padrões numéricos e sua importância no contexto atual. Mas, não se *avexe*, procurei escrever de uma forma simples. A conversa está boa...Vamos *prosear* mais um pouco?

2. ACERCA DOS PADRÕES NUMÉRICOS

Os padrões fazem parte das nossas vidas. Eles são percebidos em uma diversidade de contextos e situações na natureza, nas artes plásticas, na música, nas contagens, nas classificações por cores ou formas, no arranjo molecular da matéria no estado sólido, nos hábitos e comportamentos das pessoas, na rotina da vida moderna. De acordo com o *dicionário etimológico da língua portuguesa* de Antenor Nascentes, a palavra "padrão" tem origem latina, deriva de *patronu*, cujo sentido é compreendido como "um modelo a ser seguido" (PADRÃO, 1955, p.372).

Keith Devlin é um matemático britânico defensor da ideia de Matemática enquanto ciência dos padrões. Particularmente, eu tenho restrições quanto ao alinhamento da experiência matemática à necessidade de uma conceituação. Contudo, partilho da ideia de Devlin quanto a existência na sociedade moderna, de uma diversidade de padrões percebidos tanto no mundo real quanto no mundo das ideias. Essa mesma apreciação é observada no pensamento de Davis e Hersh (1989, p.203), quando afirmam ser o objetivo da Matemática a criação de uma ordem em contextos caóticos, desordenados e confusos. De igual modo, essa assertiva sugere que o trabalho de um matemático prima por encontrar padrões e regularidades onde estes não estão evidentes.

Sequências numéricas e não numéricas descrevem formas, movimentos e, até mesmo, uma diversidade de comportamentos, sejam eles sociais, financeiros, mercadológicos ou naturais e, dada sua importância, os matemáticos se ocupam em examinar e descrever os padrões abstratos neles ocultos (DEVLIN, 2002, p.9 apud Borralho *et al*., 2007, p.3).

Para os(as) leitores(as) familiarizados com a Matemática, dialogar acerca de padrões numéricos, no contexto de aprendizagem de estudantes de 7º ano do Ensino Fundamental, é uma atividade trivial. Contudo, quero incluir no diálogo outros(as) leitores(as) que se interessaram por essa leitura e, para os quais, alguns termos como "sequências", "padrões" são pouco significativos. Nesse sentido, espero esclarecer para você, leitor(a) o que vem a ser uma sequência numérica.

Valendo-se que de uma linguagem informal, a Matemática entende uma sequência numérica como uma lista de números que obedecem a regras de formação. Cada número da lista, que pode ser finita ou infinita, é chamado de *termo da sequência*. No caso das sequências numéricas finitas, a lista de números tem um limite inferior, que pode ser entendido como um menor número e um limite superior ou maior número. Para as sequências infinitas, um ou os dois limites – inferior ou superior – não são observados.

Ao compor a lista de números é importante que esteja bem definida a lei de formação. Vou conduzi-lo(a) em uma atividade imaginativa para ajudá-lo(a) nessa compreensão.

Imagine uma máquina que transforma números, você lança números na entrada da máquina e recolhe números transformados na saída. Vamos pensar juntos em uma utilidade para nossa máquina. Ele transforma números seguindo uma lei de formação bem simples, *o dobro de um número, mais três.* Se na entrada dessa máquina, lançarmos os números 1, 2, 3, 4, 5..., na saída recolheremos *o dobro desses números, mais três.* Nesse caso particular, nossa máquina dá origem à lista de números 5, 7, 9, 11, 13... recolhidos na saída, na ordem em que apareceram. Usando a linguagem matemática, nossa lista precisa ser escrita assim, (5, 7, 9, 11, 13, ...), usando parênteses.

Com nossa máquina imaginativa, conseguimos uma sequência numérica (5, 7, 9, 11, 13, ...). Para que você se familiarize um pouco mais, vamos elencar alguns detalhes. Na sequência que acabamos de construir, há dois parâmetros importantes a serem observados, o valor e a posição de cada termos da sequência. É fácil perceber que o 5 é o primeiro termo, 7 é o segundo, 9 é o terceiro e assim sucessivamente. Porém, chamo sua atenção para a existência de uma relação entre a cardinalidade (quantidade associada ao símbolo) e a ordem (posição do número), o ***3***º termo é 9 porque 9 é *o dobro de 3, mais 3.*

Outro detalhe importante é que os termos da nossa sequência numérica podem ser listados independente da máquina, bastando acrescentamos 2 ao presente termo para obtermos o próximo termo. Essa é uma propriedade dessa sequência se conhecermos o primeiro número e o valor numérico que deve ser somado para obter o seu sucessor, podemos escrever qualquer termo dela. Sequências numéricas que seguem esse padrão são chamadas de progressões aritméticas.

Estou ciente que breves explicações como essas não trazem todo o entendimento sobre padrões numéricos, até porque discutimos apenas um caso particular. Há sequências numéricas que não obedecem a qualquer lei de formação matemática como é o caso das sequências de números primos. Não obstante, espero que você tenha em mente as ideias básicas, como ter um número inicial e uma operação matemática como adição, subtração ou potenciação, por exemplo, a ser realizada para obter os próximos termos, além de, geralmente, perceber que há uma relação entre a sequência numérica e uma "máquina transformadora de números" que segue uma determinada lei de formação matemática.

Na atual sociedade, onde as sequências numéricas são percebidas? Qual sua utilidade? Por que o seu estudo em turmas de 7º ano do ensino fundamental é relevante? Escolhi alguns temas para dialogarmos brevemente.

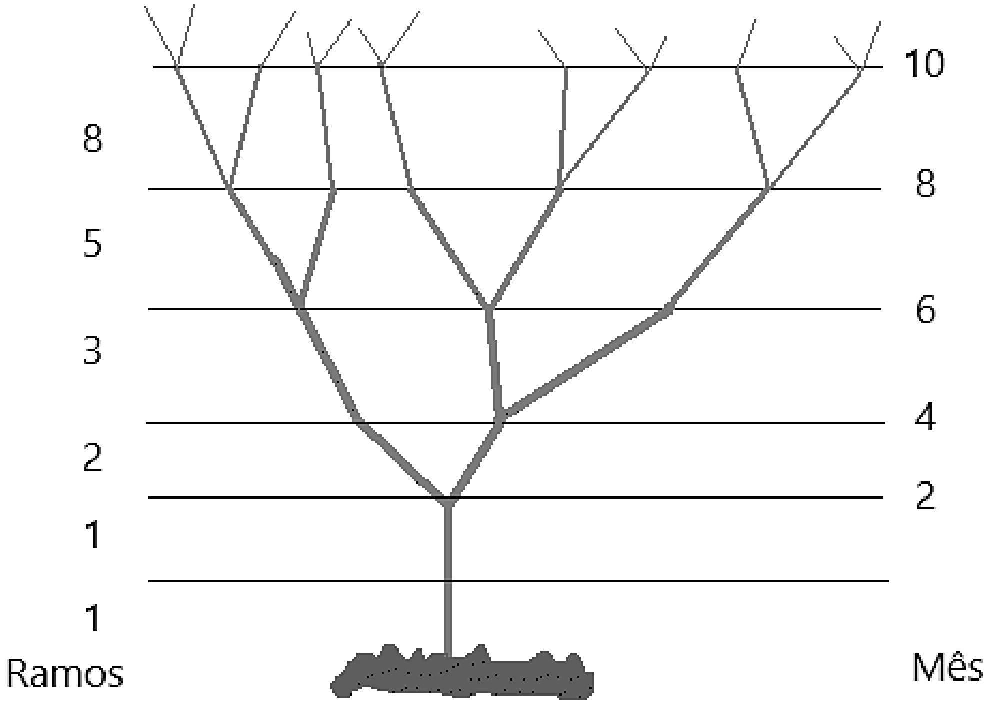
Vamos começar pela sequência de Fibonacci. Na verdade, vamos começar por Leonardo de Pisa, um matemático italiano da era medieval, que viajou pelo norte da África para estudar a “Matemática dos árabes” por influência de seu pai comerciante. De acordo com Roque e De Carvalho (2012, p. 149-50), Leonardo fez seus estudos iniciais na Argélia, tendo seguido depois para o Egito e Síria onde aperfeiçoou seus estudos nas *escolas de ábaco.* De volta à Itália, Leonardo de Pisa escreveu seu mais famoso livro, *Liber Abaci.* ou livro do ábaco, em 1202, no qual descreve a sequência que após sua morte, ficou conhecida como sequência de Fibonacci. Os dois primeiros termos dessa lista de números são “1,1” e a regra de formação indica que o próximo termo é obtido sempre somando seus dois antecessores. Os 15 primeiros termos da sequência são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Num primeiro olhar, a sequência pode parecer distante de uma utilidade prática para descrever comportamentos, mas tanto para um matemático, quanto para um biólogo, a natureza revela alguns segredos. Na natureza, é observado que a planta *Achillea ptarmica* segue um padrão de crescimento de modo que um ramo dá origem a uma nova ramificação, a cada dois meses. A figura 2 ilustra essa situação, onde é possível observar um crescimento, segundo os números de Fibonacci.

Recomendo ao(à) leitor(a) interessado(a) que procure outras aplicações como o crescimento das sementes de girassol e da pinha, a lista de ancestrais de um zangão, a forma da concha do *nautilus*, um molusco marinho. Você perceberá que o padrão observado na sequência de Fibonacci ocorre com frequência na natureza, além de dar origem à chamada “razão áurea”, presente desde a antiguidade na concepção arquitetônica de edifícios e fachadas até modelar, atualmente, as dimensões de um simples cartão de crédito. Vamos a outra aplicação interessante sobre os padrões.

Figura 2 - Crescimento dos Ramos da Achilea ptarmica



Fonte: Imagem feita pelo autor a partir de informações obtidas em site da UEL-PR[4]

Quando criança, eu brincava de capturar cigarras nos meses de outubro e novembro, por isso, questionava os adultos sobre o lugar para onde as cigarras iam nos outros meses do ano. Já adulto, fui bastante solidário com Holden Caulfield e sua pergunta[5] sobre os patos do Central Park ao ler “O apanhador no campo de centeio”, de J.D Salinger. Para o sumiço dos patos, eu não tenho explicações, para as cigarras, sim.

As cigarras têm um ciclo de vida bem interessante, pois permanecem por até 17 anos no subsolo na condição de larva, se alimentando de nutrientes das raízes das plantas até emergirem para a superfície, passarem por uma metamorfose e iniciarem sua fase adulta que dura poucas semanas. Aqui em Goiás, anualmente, ouvimos seu canto no início da primavera; meses de setembro, outubro e novembro o que sugere um ciclo de vida de 12 meses. Contudo, vou apresentar a você um caso bastante curioso, o das cigarras periódicas. Elas não são observadas no Brasil, são endêmicas dos Estados Unidos.

[4] Disponível em <http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>. Acesso em 15 jul.2019.

[5] “Mas o gozado é que, enquanto ia metendo a conversa mole, eu estava pensando no laguinho do Central Park, aquele que fica lá pro lado sul. Imaginava se ele estaria gelado quando eu voltasse para casa e, se estivesse, para onde teriam ido os patos. Estava pensando para onde iam os patos quando o lago ficava todo gelado, se alguém ia lá com um caminhão e os levava para um jardim zoológico ou coisa que o valha, ou se eles simplesmente iam embora voando.” (SALINGER, 2017, p.19-20)

As cigarras periódicas do gênero *Magicicada* possuem um ciclo de vida de 13 ou 17 anos, o que faz com que algumas delas só emerjam do subsolo para a superfície a cada 13 anos e outras a cada 17 anos (ASSIS & MALAVAZI, 2017, p.112). Se neste ano os dois gêneros de cigarras buscarem a superfície simultaneamente, tal fenômeno somente será observado daqui a 221 anos (13x17). As cigarras periódicas fizeram uma boa adaptação em seus ciclos de vida, pois 13 e 17 são números primos. Não são observadas cigarras desse gênero com ciclos de vida intermediários como 10, 12, 14, 15 ou 16 anos. Algo justificaria essa escolha? Que relação há entre o ciclo de vida das cigarras e os padrões numéricos?

Vamos tomar como exemplo as cigarras que vêm à superfície a cada 17 anos e acreditar que elas fizeram isso em 2004. No século XXI, elas seriam observadas em 2004, 2018, 2035, 2052, 2069 e 2086. Veja que temos um padrão de formação muito parecido com o que discutimos anteriormente com a máquina que transforma números, pois temos um número inicial, 2004, e uma regra de formação que soma 17 a cada valor para obter o seu sucessor e a progressão aritmética finita e limitada é (2004, 2018, 2035, 2052, 2069, 2086).

Agora vamos pensar em predadores de cigarras como os pássaros, por exemplo. Vamos considerar que o pássaro em questão tenha um ciclo de vida de 4 anos e que 2004 tenha sido um bom ano para a espécie, com comida farta, podemos supor uma grande população. Para o pássaro, o século XXI reservou as gerações de 2004, 2008, 2016, 2020, 2024, 2028, ..., 2080, 2084, 2088, 2092, 2096 e 2100. Pássaros e cigarras periódicas possuem apenas um "ciclo comum" em todo o século XXI.

O modelo matemático para as cigarras periódicas e seus predadores é mais complexo que a explicação que estou trazendo, mas conforme Assis & Malavazi (2017, p.130), os ciclos baseados em números primos apresentam vantagens para as cigarras periódicas, principalmente, reduzindo a chance de extinção por redução de sua população.

Recomendo mais uma vez que meu (minha) leitor (leitora) procure por outros padrões de comportamento. Eles são observados em espigas de milhos que apresentam apenas fileiras pares de grãos (com 8, 10, 12, 14, 16 ou 18), estudos de caso de incidência de Hanseníase em cidades brasileiras, previsão e prevenção de doenças endêmicas, no estudo das proteínas que têm sua lei de formação definida a partir de sua forma molecular que segue padrões geométricos e mesmo na computação gráfica, para a criação de cenários virtuais para o cinema e animações.

Conhecer os padrões numéricos também tem sua importância no estudo das religiões. No cristianismo e no judaísmo, o livro de Gênesis oferece a narrativa da criação divina do Universo em sete dias. A tradição judaica indica que o texto que se tem hoje é resultado da compilação feita por um escriba chamado Esdras, no século V a.C. Esdras escreveu o Gênesis a partir de originais escritos por Moisés, em 1400 a.C., aproximadamente.

Por volta de 1400 a.C. antes de Cristo, os Hebreus não usavam símbolos separados para números e letras, o que faz de cada letra de seu alfabeto um símbolo numérico. Como os alfabetos são formados por letras listadas em uma ordem fixa, a associação entre letras e números era um recurso comum para os povos mesopotâmicos da época. A Tabela 1 apresenta algumas letras hebraicas e seus valores numéricos. Optei por mostrar apenas as dez primeiras letras porque não tenho a intenção de empreender uma análise aprofundada dos padrões escondidos no texto do Gênesis.

Tabela 1- Valor numérico de algumas letras hebraicas

letra hebraica	nome	valor numérico
א	Alef	1
ב	Bet	2
ג	Guimel	3
ד	Dalet	4
ה	He	5
ו	Vav	6
ז	Zayin	7
ח	Het	8
ט	Het	9
י	Yod	10

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

O uso de letras como símbolos numéricos vem acompanhado de uma singularidade, as palavras passam a ter valor numérico[6]. Para justificar a importância dos padrões numéricos nos estudos teológicos, escolhi te apresentar a interpretação do padrão numérico de "*No começo, Deus criou os céus e a terra*" (Bíblia Sagrada, NTLH, Gn 1:1) Vou basear as explicações em um livro escrito pelo já falecido professor Christian Chen, doutor em Física, professor na Universidade de São Paulo e estudioso da Bíblia.

[6] Para Hubner (2015, p. 151), esse método hermenêutico de interpretar as palavras, frases ou ideias hebraicas é chamado de guemátria.

De acordo com Chen (1986, p.59), há um padrão numérico elegante presente nessa primeira narrativa do livro de Gênesis. Escrito em Hebraico[7], o texto tem 7 palavras e 28 (4 x 7) letras. O valor numérico de todo o vero é 2701, resultado da multiplicação 37x73, dois números primos (CHEN, 1986, p.60). O valor numérico das letras que ocupam as posições ímpares é 444 (2x2x3x37) e das que ocupam os lugares pares é 2257 (61x37), de modo que em 444, o 37 é fator junto com 2, 2 e 3 e em 2257, 37 é fator junto com 61 (CHEN, 1986, p.60). Curioso notar que a soma dos fatores que acompanham o 37 é a mesma nos dois números, 2 + 2 + 3 = 6 + 1 = 7.

Eu já estaria bem convencido da presença de padrões numéricos na narrativa criacionista bíblica, mas ainda vou apresentar um último exemplo com 3, 7 e 37. O professor Chen afirma que as palavras com maior e menor valores numéricos no texto de Gênesis 1:1 são “no princípio” (valor igual a 913) e Deus (valor igual a 86). A soma desses valores é 913 + 86 = 999, ou 3x3x3x37. A soma dos valores numéricos de cada um dos três substantivos (Deus, céus e terra) que aparecem na frase é 777, ou 3x7x37.

Existem outros padrões numéricos citados no livro do professor Chen, contudo preciso ser breve e quero finalizar relembrando que Moisés é o escritor do livro de Gênesis, segundo a tradição judaico-cristã. No relato bíblico dos Atos dos Apóstolos, Estêvão, em seu discurso perante os sacerdotes da época, afirmou que “*ele [Moisés] foi instruído em toda a sabedoria dos egípcios*” (Bíblia Sagrada: NTLH, At. 7:22). Ao que parece, em 1400 a.C., Moisés aprendeu muita Matemática com os egípcios, especialmente sobre padrões numéricos.

Nessa reflexão, me esforcei para te apresentar o saber matemático como sendo, essencialmente, uma atividade humana necessária à sociedade moderna e que uma definição de Matemática para nossa época, cultura e sociedade se aproxima essencialmente do *mathema* grego, um conhecimento capaz de conectar homem e mundo.

Além disso, apresentei breves relatos sobre a importância dos padrões numéricos para a Biologia e a Teologia. Poderia ter apresentado tantos outros relatos que me vêm à mente agora, mas eu não tenho intenção de esgotar o assunto e não conseguiria, mesmo que desejasse. Contudo, gostaria de encaminhar a conversa para um lugar muito especial para mim, a Escola. Estou te convidando para um diálogo sobre a experiência matemática e a inserção dos padrões numéricos na Educação Matemática.

Em 2018, o governo brasileiro homologou a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento contempla em seu texto os conteúdos curriculares mínimos para o

[7]“בְּרֵאשִׁית בָּרָא אֱלֹהִים אֵת הַשָּׁמַיִם וְאֵת הָאָרֶץ “ (HUBNER 2015, p. 151).

ensino fundamental além de propor cinco unidades temáticas "*(i)* números, *(ii)* álgebra, *(iii)* geometria, *(iv)* grandezas e medidas e *(v)* probabilidade e estatística" de saberes matemáticos correlacionados.

Na BNCC, os conteúdos curriculares estão distribuídos ao longo de nove anos de escolarização, mas não de modo uniforme já que em cada ano escolar alguns ganham maior ênfase que outros. O estudo dos padrões e regularidades de sequências numéricas e não numéricas está contemplado na unidade temática de "álgebra" (BRASIL, 2017, p.226).

Segundo Solomon (1926, p. 437), "álgebra" decorre de "*al-jebr"* palavra presente no título do primeiro livro sobre esse assunto escrito pelo notável matemático árabe Mohammed ibn Mûsâ Al Khowârismî, em cerca de 825 d.C. Para o *dicionário etimológico da língua portuguesa* de Antenor Nascentes, "*al-jebr"* significa *restaurar um osso quebrado* (ÁLGEBRA, 1955, p.18). Teresi (2008, p.13) confirma a origem árabe da palavra mas propõe que seu significado é "compulsão", compelir incógnitas a assumir um dado valor numérico. Entendo que a definição de Teresi é mais próxima dos procedimentos algébricos que executamos na atualidade, porém a de Antenor Nascentes é bem inusitada.

Em salas de aula do Ensino Fundamental brasileiro, a álgebra está associada à introdução de objetos abstratos no estudo da Matemática e à realização de operações matemáticas com esses objetos abstratos. De acordo com a BNCC, o estudo da álgebra tem por objetivo levar os estudantes do Ensino Fundamental a utilizarem modelos matemáticos "na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (BRASIL, 2017, p.226). Contudo, Fiorentini, Miorim e Miguel, na década de 1990, afirmavam que o estudo da álgebra nessa etapa da escolarização deve priorizar a percepção das regularidades além de "captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização". (FIORENTINI, MIORIM & MIGUEL, 2016, p. 89).

Chamo sua atenção para a palavra "generalização" que finaliza o parágrafo anterior. Estamos conversando sobre o processo ensino-aprendizagem da álgebra desenvolvido junto a estudantes do ensino fundamental. Acredito que eu já tenho elementos suficientes para trazer a compreensão de onde podemos chegar com nossos alunos nas aulas.

Para isso, vamos retomar aquela máquina que transforma números? Com ela, nós havíamos conseguido a sequência numérica (5, 7, 9, 11, 13, 15...). Como sabemos, o número inicial é 5 e os próximos são obtidos somando 2 a cada número antecessor. Escrevendo a sequência numérica em termos genéricos, $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \ldots)$, e associando-os aos já existentes, temos que $a_1 = 5,\ a_2 = 7,\ a_3 = 9,\ a_4 = 11,\ a_5 = 13,\ a_6 = 15.$

Perceba que:

$a_1 = 5,$ $\qquad logo, \quad a_1 = 5 + 0.2$

$a_2 = 7 = 5 + 2,$ $\qquad logo, \quad a_2 = a_1 + 1.2$

$a_3 = 9 = 7 + 2 = 5 + 2 + 2\,,$ $\qquad logo, \quad a_3 = a_1 + 2.2$

$a_4 = 11 = 9 + 2 = 5 + 2 + 2 + 2,$ $\qquad logo, \quad a_4 = a_1 + 3.2$

Essa "brincadeira", nos leva à generalização, $a_n = 5 + (n-1).2$. E se quisermos, podemos avançar um pouco mais:

$$a_n = 5 + (n-1).2 \ \rightarrow\ a_n = 5 + 2n - 2 \rightarrow a_n = 2n + 5 - 2 \ \therefore a_n = 2n + 3$$

Olhe para o que está escrito após os três pontinhos ($\therefore$). No lugar de "a_n" leia "saída" no lugar de "n", leia "entrada". Eu ajudo você, vamos lá? "$a_n = 2n + 3$" será lido assim "o que aparece na *saída* é igual ao dobro do que está na *entrada,* mais três". No exemplo da "máquina que transforma números" era o que nós chamávamos de "lei de formação da máquina". Nós generalizamos, partimos de (5, 7, 9, 11, 13) e chegamos em "*o dobro mais três*".

Apesar de estarmos fisicamente distantes, posso ouvir seu pronunciamento, leitor(a), "*Ah, então generalização é isso? Boa sorte para os alunos do 7º ano*". Eu também pensava assim e fiquei surpreso ao analisar os dados coletados nas atividades de campo. Mas, eu compreendo seu espanto porque falta algo no processo de generalização que conduzi, a motivação de fazê-lo, aquilo que tornou essa generalização necessária.

3. CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

Se o(a) leitor(a) relembrar o pensamento de Platão, encontrará que para esse filósofo, a motivação suprema do processo de conhecer, posto na busca pela Verdade imutável somente atingida pelo desprendimento de nossas sensações. Nesse entendimento, a Verdade absoluta é aquela que existe em si mesmo, conforme Abbagnano (2007, p. 3). Alrϕ e Skovsmose (2010, p.21) argumentam que a possibilidade do sujeito conhecer a mais exata expressão da Verdade se tornou essencial para a compreensão do ensino tradicional da Matemática em salas de aula.

Esses autores entendem que essa ideia é reforçada quando, no contexto organizacional de uma sala de aula tradicional, o professor conduz uma exposição sobre ideias, conceitos e técnicas matemáticas seguida da resolução de exercícios de aplicação dessas técnicas e finalizada pela indicação de uma tarefa de casa, que consiste em resolver outros exercícios (SKOVSMOSE, 2010, p.15).

Essa condução padronizada do processo de ensinar-aprender e que se resume em “exposição e resolução de exercícios” não é novidade. Mas preciso te dizer que boa parte da minha prática está construída sobre esse ensino tradicional, uniformizador e engessado pela burocracia que o sistema de resultados impõe à organização do trabalho escolar. Alrϕ e Skovsmose chamam essa condução de *absolutismo burocrático* (ALRØ e SKOVSMOSE, 2010, p.26), porque opera em busca de uma verdade absoluta valendo-se de regras e normas imutáveis para controlar as ações dos indivíduos.

Se minha atuação docente é conduzida de modo a manter essa condição, ajo de forma acrítica. Mas se tenho a intenção de trabalhar em constante diálogo com os alunos e entendo que esse dialogar pode conduzir a um processo emancipatório e crítico, preciso rever conceitos e concepções, sair do *lugar comum* absolutista, deslocar do pensamento metafísico para o dialético, da verdade pronta para a construída, mas como fazê-lo? Acredito que inquietação, interesse em mudar a prática, disposição para questionar a realidade são atitudes que demostram a intenção de movimento, de mudança.

Nesse contexto de mudança, penso que seria importante encaminharmos nossa prosa ao conhecimento dos *cenários para investigação*. Como em todo procedimento de análise, devo fragmentar *o todo* e estudá-lo em suas particularidades, começando pela terminologia usada. Vamos dialogar sobre seus significados?

Problema, exercício e paradigma do exercício

Em um breve artigo apresentado em 1949, Polya (1997, p. 1) argumentou que resolver problemas é uma atividade própria da natureza humana e que a Matemática é a única disciplina escolar capaz de desenvolver nos alunos a habilidade de resolver problemas em nível científico. A sugestão de Polya não está fundamentada no resolver uma quantidade excessiva de exercícios de matemática, mas em assumir a resolução de problemas como o fio condutor do processo de apreensão do conhecimento matemático.

Espere um pouquinho aí, Sergio. Você está propondo uma diferenciação entre exercício e problema matemático. Pode explicar isso melhor?

Obrigado por me fazer atentar para esse detalhe, passaria despercebido não fosse seu alerta. É isso mesmo, entendo que há uma diferença entre *exercício* e *problema* que não se resume no processo de elaboração, antes a diferença é observada na forma como sua resolução é conduzida. Mary Grace Kantowsk (1977, p.163) afirma que a resolução de um exercício se dá com a escolha de um algoritmo adequado ao contexto do problema, seguida de sua manipulação e apresentação de uma resposta. A autora completa seu argumento propondo que, na resolução de um problema, o estudante não tem algoritmos bem definidos e disponíveis para a condução imediata até a solução.

Assim, na resolução de um problema, o estudante deve pensar em múltiplos caminhos, propor conjecturas, usar algoritmos, validar ou refutar dados obtidos, seguir um caminho parecido com o de uma investigação científica. Penso que seja isso o que Polya queria dizer com "resolver problema em nível científico."

Com esse entendimento, percebo que os livros didáticos de Matemática apresentam muitos "exercícios" para que os estudantes se mantenham ocupados com as atividades de sala de aula e tarefas de casa. Eles ocorrem com os mais diversos títulos como "exercícios resolvidos", "exercícios de fixação", "exercícios de aprendizagem", "problemas", bastando folhear alguns desses manuais para encontrá-los. Reconheço que já adotei livros didáticos pela quantidade desses "problemas" que encontrei em suas páginas. Preciso fundamentar uma afirmação que fiz no parágrafo anterior sobre a elaboração do problema matemático, porém preciso antes te apresentar uma classificação.

Em um dos primeiros encontros de orientação, o professor Marquinhos sugeriu a leitura do artigo "Formulando problemas adequadamente" de Thomas Butts, para quem elaborar problemas matemáticos é uma arte. Encontrei ali sugestões para elaborar problemas de modo a auxiliar os estudantes em suas construções matemáticas (BUTTS,1997, p. 32-3), e uma breve análise acerca da formulação e classificação dos problemas matemáticos em quatro subconjuntos tipificados e apresentados no quadro 01. Passei a considerar a possibilidade de usar esses critérios, que definem as ações empenhadas pelo sujeito resolvedor em cada subconjunto proposto no quadro 01, para elaborar as atividades das aulas investigativas.

Quadro 1- Tipos de problemas matemáticos

Subconjunto	Ação do sujeito resolvedor
Exercícios de reconhecimento	Reconhecer ou recordar um fato específico, uma definição ou o enunciado de um teorema.
Exercícios algorítmicos	Resolver o que se propõe usando um procedimento passo-a-passo, frequentemente, um algoritmo numérico.
Problemas de aplicação	Formular o problema simbolicamente e, depois manipular os símbolos mediante algoritmos diversos.
Problemas de pesquisa aberta	Desenvolver uma estratégia própria para resolvê-los uma vez que o enunciado não define uma estratégia.
Situações-problema	Pensar a situação proposta, identificar o problema proposto, propor uma solução, melhorar uma condição, agir sobre a realidade...

Fonte: Quadro elaborado pelo autor com base em Butts (1997, p. 33)

Na classificação dos problemas matemáticos proposta por Butts, resolver exercícios de reconhecimento, algorítmicos e de aplicação exigirão do estudante apenas processos memorativos e repetitivos, com ou sem o uso de algoritmos. Um exercício de reconhecimento, por exemplo, pode ter a seguinte redação "Escreva o nome do polígono de seis lados" ou ainda, "Apresente a definição de diagonal de um polígono". Já os enunciados de exercícios algorítmicos são usualmente "arme e efetue", "calcule a soma", "resolva as expressões numéricas a seguir". Os de aplicação, por exemplo, aqueles que exigem uma modelação matemática antes da manipulação, como em "no conjunto de números inteiros, determinar o número cujo dobro somado à terça parte corresponde a vinte e um".

Nas situações apresentadas, apresentei um entendimento sobre enunciados que só podem ser usados em exercícios. Porém, enquanto redação de um exercício matemático deve apresentar todas as informações necessárias para sua resolução, a de um problema pressupõe o uso de uma estratégia própria. Por exemplo, dois enunciados de problemas de pesquisa aberta que podem ser apresentados aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental são "quantas são as folhas das árvores plantadas na cidade de Goiânia", ou ainda "se fosse possível, quantas vezes deveria dobrar uma folha de caderno até que sua espessura cobrisse o comprimento da sala de aula?”. Veja que se os estudantes se interessarem em resolver esses problemas, precisarão buscar dados, propor estratégias, elaborar conjecturas, testá-las confirmá-las, refutá-las.

Alrϕ e Skovsmose (2010, p. 52) esclarecerem que no ensino tradicional da Matemática na escola se esconde um aspecto singular ao qual eles chamam de *o paradigma do exercício*. Essa abordagem fica caracterizada na divisão da aula em duas partes, a exposição dos conteúdos matemáticos como dever do professor, e a resolução de exercícios do livro didático ou de listas de exercícios de exames de seleção como dever dos alunos, em sua maior parte.

O foco do paradigma do exercício é atingir resultados o que objetivamente significa conseguir chegar ao gabarito das questões de exames, “bater” a resposta com a que está no final do livro ou resolver as questões de uma prova, valendo-se de técnicas exaustivamente repetidas. O diálogo entre professor e alunos é bastante limitado, acontecendo apenas nas perguntas que o professor faz aos alunos e na correção dos erros observados nas respostas.

Cenários para investigação

Em contraste com o paradigma do exercício estão as aulas conduzidas em *abordagens investigativas,* entendidas como aquelas em que professores e alunos, de forma cooperativa, desenvolvem atividades investigativas e, nessa interação, constroem significados para seus objetos. No cerne dessas abordagens investigativas estão os *cenários para investigação,* que passarei a caracterizar a seguir.

De acordo com Skovsmose (2000, apud PONTE 2014, p.18), “um cenário para investigação é um contexto de trabalho que convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações”. O interessante é que, na definição de Ponte, o aluno é convidado para um trabalho, uma forma de resolver um problema e a intervir em uma realidade e isso o coloca na condição de agente de uma aprendizagem que acontece enquanto ele age em busca de solucionar o problema proposto. Alrϕ e Skovsmose (2010, p. 51) compreendem os cenários para investigação como um ambiente aberto para a realização de um trabalho cooperativo de investigação matemática desenvolvido entre professor e alunos e entre alunos e alunos.

Segundo esses autores, a acentuada mudança na forma de comunicação permite aos estudantes o compartilhamento de informações, como forma de superar as dificuldades e obstáculos que os problemas possam apresentar.

É importante destacar que esses autores consideram que a investigação dos problemas matemáticos pode se desenvolver em três ambientes de aprendizagem cujas referências são feitas à matemática pura, semirrealidade e mundo real. O contexto da matemática pura é aquele em que os problemas ali discutidos aludem a uma Matemática desenvolvida para a Matemática, aquilo que anteriormente eu classifiquei como "abstração". No contexto da semirrealidade, os problemas têm aparência real, mas são elaborados exclusivamente para a aprendizagem tendo, por isso, limitadores que, artificialmente, excluem elementos presentes na realidade (SKOVSMOSE 2000, apud PONTE 2014, p.18). Finalmente, quanto os problemas discutidos em sala de aula analisarem dados reais, eles são desenvolvidos no contexto de mundo real.

O infográfico da figura 3 apresenta os três ambientes de aprendizagem inseridos na perspectiva do paradigma do exercício (ambientes 1, 3 e 5) e dos cenários para investigação (ambientes 2,4 e 6). Os seis ambientes não devem ser vistos como espaços mutuamente excludentes... *Espere um pouquinho aí, Sergio. O que é mutuamente excludente?* Leitor(a), essa expressão Matemática é usada para situar eventos que não podem acontecer simultaneamente. Obrigado por me trazer de volta ao texto e permita-me reiniciar o período.

Os ambientes mostrados na figura 3 não devem ser vistos como espaços isolados, nos quais os sujeitos participantes permanecem fixos de acordo com o problema proposto não sendo permitido o trânsito durante a realização da atividade. Em um ambiente de cooperação, o trânsito nos diversos ambientes além de permitido, deve ser incentivado pelo professor.

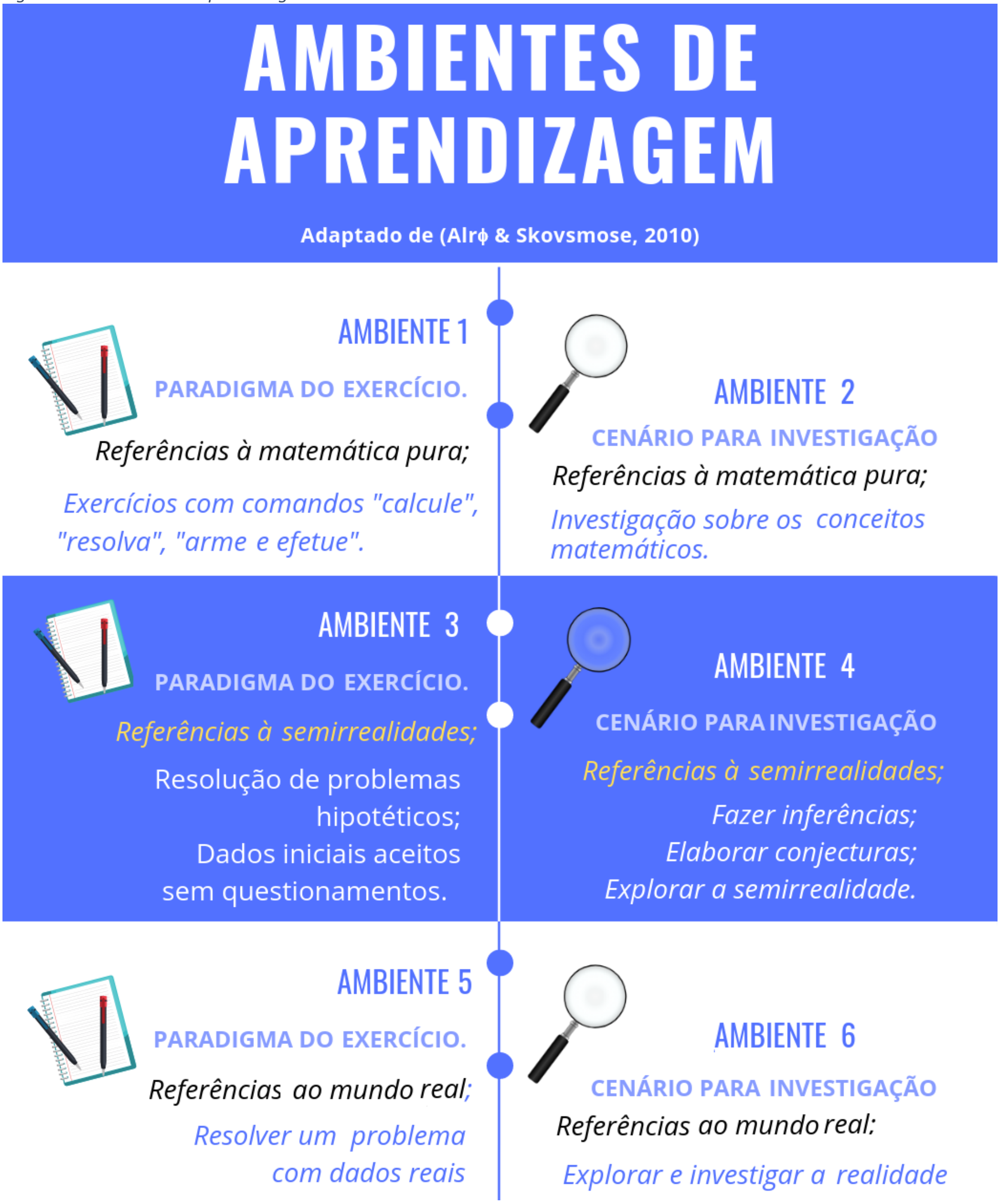
Trabalhar em grupos, emitir e ouvir opiniões, ser respeitado em suas manifestações e respeitar as manifestações do outro, construir coletivamente soluções para os problemas matemáticos são ações que sugerem um ambiente de sala de aula bem diferente daquele em que estudantes permanecem silenciosamente ouvindo a preleção do professor. Isso implicitamente acomoda certos elementos de imprevisibilidade à aula e alguns professores podem não se sentir confortáveis nesse ambiente.

Sair do *lugar comum* da aula tradicional e colocar-me na *zona de risco* não foi um deslocamento fácil, pois, eu realmente precisava ressignificar minha prática. Do *lugar comum* em que eu estava, minha visão alcançava uma maioria de estudantes sem uma experiência matemática rica e humanizadora, uma paisagem sombria para quem gosta de educação, escola, ensino, Matemática, de pessoas e de humanidade. As incertezas sempre existirão, Werner Heisenberg[8] já falava sobre isso em meados do século XX. Enfrentá-las foi a melhor

[8] Em 1927, o físico alemão Werner Heisenberg formulou o princípio de incerteza que enuncia a impossibilidade de medir, ao mesmo tempo e com exatidão, o momentum e a posição de um elétron observado em um sistema quântico.

resposta que consegui oferecer para mim, para o Boaventura, para os estudantes e isso me fez escolher um lado, o da educação humanizadora.

Figura 3 - Ambientes de Aprendizagem



Fonte: Infográfico baseado em SKOVSMOSE 2008, p. 23. Elaborado pelo autor usando aplicativo *canva online*, 2019

4. ATIVIDADES

As atividades que irei apresentar foram pensadas para turmas de 7º ano do Ensino Fundamental. Destaco que seria muito importante que os alunos pudessem trabalhar em grupos colaborativos com, no máximo, quatro pessoas. Por parte dos alunos, ler os roteiros, compreender o problema proposto em cada aula e registrar suas percepções são ações essenciais. Sugiro ainda que seja disponibilizado um tempo para que os grupos socializem suas contribuições para os demais. Para os colegas professores, sugiro que tenha um caderno como diário de bordo, no qual serão feitos registros de suas observações para eventuais intervenções pedagógicas.

Por fim, as atividades não são um fim em si mesmas, mas possibilidades de aprendizado. Com isso, quero dizer que elas não devem ser lidas como orientações a serem seguidas sem reflexão, como aquelas que lemos nas embalagens dos *bolos de caixa*. Antes, elas precisam serem vistas como possibilidades de inserção dos alunos nos ambientes de aprendizagem. Sugiro que leia a dissertação como forma de verticalizar saberes.

4.1. PADRÕES NUMÉRICOS

Nessa atividade, os alunos irão desenvolver saberes iniciais sobre os padrões numéricos. Espera-se que as ações favoreçam o aprendizado acerca do que é um padrão numérico, seu modo de formação e como ele dá origem à sequência numérica.

Ao final da atividade, os alunos são convidados a criarem sequências numéricas que podem ser apresentas aos outros grupos como forma de desafiá-los a reconhecer o padrão que o grupo "esconde" na sequência. Quando apliquei a atividade, convidei o grupo para ir à frente da sala (estava no laboratório de Matemática da escola) e solicitei que escrevessem no quadro as suas sequências. Deixo como sugestão a possibilidade de confecção de cartazes ou slides a serem projetados. Se o padrão for descoberto, convide o grupo que o decifrou a enunciar os próximos dois números da sequência.

A Figura 4 destaca o roteiro dessa aula que levam os alunos a transitarem entre os ambientes 1 e 2 dos Cenários de Investigação.

Figura 4 - Roteiro da Atividade 1

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO

Aluno (a):		
Professor: Sergio Muryllo		
Data:	**Série: 7º**	**VISTO OU NOTA DO PROFESSOR**
Turma:	**Bim:**	

★★★★★

Atividade investigativa 1 PADRÕES NUMÉRICOS

Em sua vida escolar, você certamente já percebeu a existência de padrões numéricos. Números pares, ímpares, dobros, metades... Se você ainda não está se lembrando ou compreendendo, veja a seguir, algumas sequências de números que obedecem a padrões de formação:

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...
- 1024, 512, 256, 128, 64 ...
- 360, 345, 330, 315, 300, 285, 170 ...
- 11, 14, 17, 20, 23, 26 ...

Você consegue identificar os padrões que dão origem a cada uma das sequências mostradas acima? Consegue compreender por que existem reticências ao final de cada uma delas?

Na atividade de hoje vamos formar sequências numéricas que obedecerão a regras que nós mesmos criaremos. Para isso, utilizaremos duas operações matemáticas para produzir cada novo número no padrão: você poderá escolher entre "multiplicação e soma" ou "multiplicação e subtração".

Agora é a sua vez!
1) Escolha os cinco detalhes iniciais;
2) Liste pelo menos 8 números da sua sequência;
3) Escreva sobre as coisas que você percebeu na sua sequência;
4) Depois de tudo pronto, confeccione um cartaz para ser apresentado aos colegas.

1

Elaborado pelo autor

4.2. ATIVIDADE 2 – CONSTRUINDO PÓDIOS

A ideia central da atividade é que os alunos decifrem o "segredo" que está escondido na quantidade de peças utilizadas na construção dos pódios. Se encaminharem essa contagem, escreverão uma sequência de números quadrados perfeitos que começa com o 4.

Utilizei nessa atividade bloquinhos de E.V.A. para que os alunos montassem os pódios. Imaginei, de início, que não seria uma atividade desafiadora para eles, mas percebi que se engajaram na sua resolução.

Nessa atividade, os grupos fizeram registros pessoas de seus aprendizados em seus cadernos. A Figura 5 destaca o roteiro dessa aula, ambiente 2, dos Cenários de Investigação.

Figura 5 - Roteiro da Atividade 2

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO

Aluno (a):		
Professor: Sergio Muryllo		
Data:	**Série: 7º**	**VISTO OU NOTA DO PROFESSOR**
Turma:	**Bim:**	

★★★★★

Atividade investigativa 2 CONSTRUINDO PÓDIOS

As premiações olímpicas acontecem no pódio, uma plataforma de diferentes níveis onde o degrau mais elevado é reservado para o vencedor da competição. As imagens a seguir mostram pódios usados na Olimpíadas de Pequim 2008 e Rio 2016.

Imagem retirada de: <https://pt.pngtree.com/freepng/olympic-podium_1154799.html>. Acesso em 20 jun.2018.

Imagem retirada de: <https://pt.dreamstime.com/imagem-editorial-o-p%C3%B3dio-da-medalha-durante-homens-do-t%C3%AAnis-escolhe-cerim-nia-final-da-medalha-em-maria-esther-bueno-court-do-rio-jogos-image81305065>. Acesso em 20 jun.2018.

A empresa SM fabrica pódios usando blocos retangulares de madeira, todos do mesmo tamanho. A figura 1 a seguir mostra o pódio mais simples que a SM fabrica. Ele pode acomodar até três competidores, possui dois degraus laterais e foram usados quatro blocos para construí-lo.

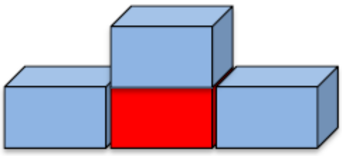


figura 1

Uma empresa de eventos esportivos está propondo uma parceria para que a SM construa pódios personalizados para três ou mais atletas. Isso não parece difícil... Mas algumas exigências precisam ser atendidas:

- os pódios precisam ter níveis (degraus);
- deve existir uma simetria em relação ao centro, de modo que se observem quantidades iguais de blocos à direita e à esquerda da coluna central.

Elaborado pelo autor

4.3. ATIVIDADE 3 - PÁSSAROS QUE VOAM EM V

Iniciei a aula com o vídeo *Por que bandos de aves voam em formato de V?*[9]. Ele traz algumas explicações científicas sobre o voo das aves migratórias e mostra o desenho em V, das aves no céu. Após assistir ao vídeo, os alunos desenvolveram a atividade em grupos e registraram seus aprendizados nos cadernos, individualmente. A Figura 6 destaca o roteiro dessa aula, ambiente 3, dos Cenários de Investigação.

Figura 6 - Roteiro da Atividade 3

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO

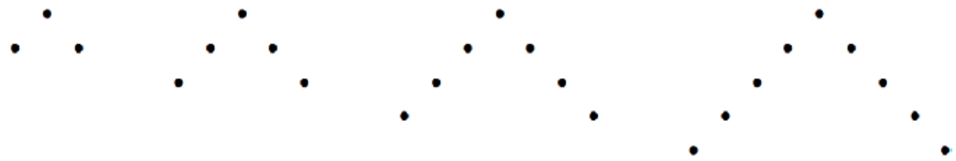
Aluno (a):		
Professor: Sergio Muryllo		
Data:	**Série: 7º**	**VISTO OU NOTA DO PROFESSOR**
Turma:	**Bim:**	

★★★★★

Atividade investigativa 3 - PÁSSAROS QUE VOAM EM V.

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Será que este tipo de organização lhes facilita o voo? Diversas equipes de cientistas têm investigado esta questão, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando.
Eis os primeiros quatro termos desta sequência:



Termo: 1 2 3 4

Nas questões seguintes explique o seu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.
(1) Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
(2) Quantos pontos tem a 100ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
(3) Existe alguma figura nesta sequência com 86 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
(4) Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
(5) Descreva uma regra que permita determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.
(6) Escreve uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.

1

Elaborado pelo autor.

[9]Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QjZkl49Zq_Y. Acesso em 08 mar.2020.

4.4. ATIVIDADE 4 – PADRÕES NUMÉRICOS ADITIVOS

Também iniciei a aula com o vídeo *Por que os favos de mel são hexagonais?*[10]. Nele, uma estudante bem humorada apresenta suas explicações para o fato. Após assistir ao vídeo, os alunos desenvolveram a atividade em grupos e registraram seus aprendizados em folhas que foram recolhidas.

Nessa atividade, também fiz uso de um texto que inicia a leitura da folha impressa. A Figura 7 destaca o roteiro dessa aula, ambiente 4, dos Cenários de Investigação.

[10]Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KysemJMEe5Q. Acesso em 08 mar.2020.

Figura 7 - Roteiro da Atividade 4

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA
MESTRADO

Aluno (a):		
Professor: Sergio Muryllo		
Data:	Série: 7º	VISTO OU NOTA DO PROFESSOR
Turma:	Bim:	

★★★★★

Atividade investigativa 4 PADRÕES NUMÉRICOS ADITIVOS

A geometria instintiva das abelhas

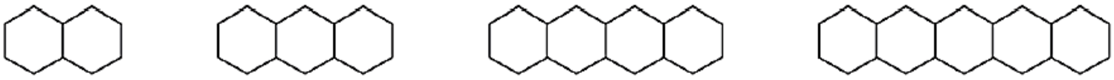
Artigo de Luiz Barco, comentando sobre a geometria que as abelhas praticam em sua vida diária para construir os alvéolos das colmeias.

As abelhas usam cera para construir os alvéolos das colmeias, que servem depois de depósito para o mel que fabricam. O matemático belga Maetrlinek observou que, ao contrário de muitos planejadores humanos, as abelhas constroem os alvéolos procurando uma forma que otimize a economia, isto é, que apresente o maior volume para a menor porção de material gasto. Para isso, os alvéolos não poderiam ser cilíndricos, pois a falta de *paredes comuns* entre eles deixaria uma grande quantidade de espaços não aproveitados.

Assim, para que a parede de um alvéolo servisse também ao alvéolo vizinho, eles deveriam, obviamente, ter a forma de um prisma, E os únicos prismas regulares que se justapõem sem deixar buracos são os prismas triangulares, os quadrangulares e os hexagonais.

Retirado de: <https://super.abril.com.br/ciencia/a-geometria-instintiva-das-abelhas/>. Acesso em 15 Out. 2018. Texto com adaptações

Uma espécie de abelhas constrói sua colmeia enfileirando seus alvéolos. Um apicultor resolveu registrar os alvéolos que essas abelhas constroem a cada hora. Observe a quantidade de alvéolos (hexágonos regulares geometricamente iguais) construídos a cada hora pelas abelhas operárias da colmeia. Com exceção do primeiro, cada alvéolo da sucessão tem mais um hexágono do que o termo anterior.



1ª hora 2ª hora 3ª hora 4ª hora

Vamos pensar nas paredes que as abelhas constroem... Nas questões a seguir, explique o seu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

(1) Quantos paredes as abelhas construíram na 1ª hora?
(2) Quantas paredes as abelhas terão construído na 5ª hora?
(3) Descreva uma regra que permita determinar o número total de paredes construídas pelas abelhas em qualquer figura desta sequência.
(4) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.
(5) Quantas paredes as abelhas terão construído após a 100ª hora (termo de ordem 100) desta sequência?
(6) Existe alguma figura nesta sequência com 106 paredes? Se existir, determine a hora correspondente.
(7) Existe alguma figura nesta sequência com 485 paredes? Se existir, determine a hora correspondente.

1

Elaborado pelo autor

5. REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**, 5ª edição revista e ampliada. São Paulo: Matins Fontes, 2007.

ALGEBRA. In: NASCENTES, Antenor. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. F. Alves, 1955, p.18.

ALRØ, H & SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

ASSIS, Raul A.; MALAVAZI, Mazılio C. Um modelo simples de ciclos reprodutivos periódicos: seleção de períodos primos. **Biomatemática**, v. 27, n. 1, p. 111-32, ago. 2017. ISSN 1679-365X.

BÍBLIA. Português. **Bíblia Sagrada:** Nova Tradução na Linguagem de Hoje (NTLH). Barueri/SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2000.

BONDÍA LARROSA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista brasileira de educação**, n. 19, 2002.

BORRALHO, A., CABRITA, I., PALHARES, P. e VALE, I. (2007). **Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra**. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), Números e Álgebra (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

BRASIL. 2017. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): 3ª Versão Revista**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME.
Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 24 jun.2018.

______. 2018. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Versão Final Homologada**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME.
Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 05 jan.2019.

BUTTS, Thomas. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, E. **A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual**, p. 32-48, 1997.

CHEN, Christian. **Os números na Bíblia:** Moisés, os números e nós. 2ª ed. Venda Nova: Editora Betânia, 1986.

D'Ambrosio, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Ruben. **A Experiência Matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DEVLIN, K. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

FIORENTINI, Dario; MARIA ÂNGELA MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, [S.l.], v. 4, n. 1, p. 78-91, out. 2016. ISSN 1982-6248.
Disponível em:
https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384.
Acesso em: 05 mar. 2019.

FREUDENTHAL. H. **Perspectivas da Matemática.** Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen. Implicaciones de la relaciones entre Epistemología e Instrucción Matemática para el Desarrollo Curricular: el caso de la Combinatoria. **La Matemática e la sua Didattica**, v. 24, n. 1-2, p. 19-41, 2016.

HUBNER, Manu Marcus. **Os 120 anos da vida do homem**: uma análise contextual. 2015. Tese (Doutorado em Estudos Judaicos) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
doi:10.11606/T.8.2015.tde-03122015-145235. Acesso em: 16 jul.2019.

KANTOWSKI, Mary Grace. Processes involved in mathematical problem solving. **Journal for research in mathematics education**, p. 163-180, 1977.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. São Paulo: Cortez, 1987.

NOBRE, Sergio. Introdução à história da história da matemática: das origens ao século XVIII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 2, n. 3, 2002.

PADRÃO. In: NASCENTES, Antenor. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. F. Alves, 1955, p.372

POINCARÉ, Henri. A invenção matemática. **Investigar para aprender Matemática**, p. 7-14, 1996.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, E. **A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual**, p. 1-3, 1997.

______. **How to solve it: A new aspect of mathematical method**. Princeton University Press, 1973.

PONTE, João Pedro. Uma disciplina condenada ao insucesso? **Revista Noesis**, nº 32, p. 24 – 26, 1994.
Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm. Acesso em 03 mar.2019.

______. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa**, p. 13-27, 2014.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SABATO, E. **Uno y el Universo**. 1ª ed. – Buenos Aires: Seix Barral, 2006.

SALINGER, Jerome David et al. **O apanhador no campo de centeio**. Rio de Janeiro: Editora do Autor, 2017.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

______. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

______. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus Editora, 2008.

SOLOMON Gandz. The Origin of the Term “Algebra”, **The American Mathematical Monthly**, 33:9, 437-440. 1926. DOI: 10.1080/00029890.1926.11986615.

TAHAN, Malba; E SOUZA, Júlio Cesar de Mello. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 2001.

TERESI, Dick. **Descobertas perdidas: as raízes antigas da ciência moderna, dos babilônios aos maias**. Editora Companhia das Letras, 2008.