

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



Adriano Bechara de Oliveira

Geometria Espacial de Posição: Uma sequência didática
utilizando o GeoGebra

Belém/PA
2019

Adriano Bechara de Oliveira

Geometria Espacial de Posição: Uma sequência didática
utilizando o GeoGebra

Dissertação apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.

Belém/PA
2019

Adriano Bechara de Oliveira

**Geometria Espacial de Posição: Uma sequência didática
utilizando o GeoGebra**

Dissertação apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

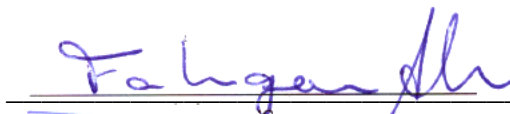
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.

Data de aprovação: 19/12/2019

Banca examinadora

 . Orientador

Prof. Paulo Roberto Bibas Fialho
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador (Interno)

Prof. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador (Externo)

Prof. Márcio Lima do Nascimento
Doutor em Matemática Aplicada - USP
Universidade Federal do Pará

Belém/PA
2019

Agradecimentos

A Deus pela a oportunidade, força e por se fazer presente em todos os dias de minha vida.

A minha família pelo apoio e auxílios prestados durante todo o período da pós graduação, em especial minha mãe Telma Bechara, por cada oração e conselho dado.

Aos professores do programa de mestrado profissional em ensino de matemática da UEPA por cada ensinamento compartilhado e as orientações oferecidas para o meu crescimento acadêmico, em especial ao meu orientador Roberto Paulo Bibas por acreditar e incentivar a cada passo da construção de minha dissertação.

Ao corpo técnico e colaboradores do programa, pelo auxílio e ajuda prestadas durante todo o período do processo.

Aos alunos e professores que participaram das pesquisas e experimentos, pois sem as suas participações, essa dissertação não estaria concluída com êxito.

Aos colegas de turma por cada incentivo durante nossa jornada.

Obrigado!

Tudo posso naquele que me fortalece.

Filipenses 4:13

RESUMO

BECHARA, Adriano de Oliveira. **Geometria espacial de posição:** uma sequência didática utilizando o GeoGebra. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Belém, Universidade do Estado do Pará, 2019.

A presente pesquisa apresenta os resultados da aplicação e desenvolvimento de uma sequência didática que tem como o objetivo utilizar o *software* geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. Como base teórica do trabalho utilizamos a didática da matemática com base no ensino por atividades e uso de tecnologias de informação e comunicação. Para a produção das informações necessárias foram realizadas análises prévias através de uma revisão de estudos, em que procuramos o que já foi pesquisado e produzido sobre o assunto abordado, uma pesquisa com 25 professores do ensino regular público para identificar como o ensino de reta e plano vem sendo ministrada no ambiente escolar e uma pesquisa com uma amostra de 100 alunos de uma escola estadual do município de Belém, no estado do Pará. Os resultados e análises prévias apontam que o ensino de geometria de posição, referente ao ensino de reta e plano está sendo ministrado de forma pouco satisfatória, em que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos consiste nas áreas do campo conceitual, perceptiva, identificação dos entes geométricos e na relação dos termos técnicos com as respectivas propriedades. A metodologia adotada para a pesquisa foi o uso das tecnologias de informação e comunicação, com base na Engenharia Didática, em que foram construídas atividades utilizando o geogebra para alunos do 3º Ano do ensino médio da escola regular pública. A realização do experimento ocorreu em três momentos, em uma turma de 19 alunos de uma escola pública da região metropolitana de Belém, o primeiro momento foi feito um mini curso sobre as principais funcionalidades do geogebra, o segundo momento foi desenvolvida a sequência didática proposta com 15 atividades e o terceiro momento aplicamos um pós testes para a validação e verificação dos dados obtidos. Os resultados obtidos durante e após a experimentação apontam efeitos positivos, o que ocasionou em uma melhora no desempenho dos alunos no estudo da geometria de posição e na resolução de atividades, também podemos observar que os alunos aprenderam as relações, conceitos, postulados e propriedades com motivação e cooperação.

Palavras-chave: Ensino de Reta e Plano; Geometria de posição; GeoGebra; Sequência Didática; Tecnologias de Informação e Comunicação.

ABSTRACT

BECHARA, Adriano de Oliveira. **Geometria espacial de posição: uma sequência didática utilizando o GeoGebra**. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Belém, Universidade do Estado do Pará, 2019.

This present paper will present the results of a research which has the goal for using the software geogebra as a tool for the position spatial geometry teaching and learning aid, emphasizing the plane and line teaching process, from the construction of a didactic sequence. As a theoretical basis of this paper it was used mathematical didactic based on teaching by activities and use of information and communication technologies. For the production of the necessary information and research formation, it was executing previous analyzes through a study review that it was looked for what it had been already researched and produced about the subject approached, it was done a research with 25 teachers from the public regular schools to identify how the plane and line have been teaching at the school environment and there was also a research with a sample of 100 students of a state school in the city of Belém, in the state of Pará. The results and the analyze indicated that the position geometry teaching, relating to the plane and line teaching has been taught in an unsatisfactory way, which the main difficulties presented by the students consisted in the conceptual area, perspective and identification of the geometric entities and the relation of the technical terms with the properties. The methodology applied for this research was the use of information and communication technologies, based on the Didactic Engineering, in which activities were created using the geogebra for 3rd grade students of high school of public school. The experiment accomplishment occurred in three moments, in a 19 students classroom of a public school from the metropolitan region of Belém, first, a mini-course was applied explaining the main geogebra's functionalities, second, it was developed a didactic sequence with 15 proposed activities and third, it was applied a post-test for validating and verifying the obtained data; The obtained results during and after the experimentation indicated positive effects which led an improvement in students' performance in the study of the position geometry and activities resolution, it was also observed that the students learned the relations, concepts, postulates and properties with motivation and cooperation.

Keywords: Plane and Line Teaching; Position geometry; GeoGebra; Didactic Sequence; Information and Communication Technologies.

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Índice de acertos da alternativa a	27
Gráfico 2 - Índice de acertos da alternativa b	27
Gráfico 3 - Índice de acertos da alternativa c	28
Gráfico 4 - Gênero dos Professores consultados	31
Gráfico 5 - Nível de escolaridade	31
Gráfico 6 - Métodos de avaliação utilizados com os alunos	32
Gráfico 7 - Qual o método que você mais utiliza para ensinar Geometria Espacial de Posição?	33
Gráfico 8 - Como você avalia o rendimento dos alunos em relação aos conceitos e propriedades de Reta e plano?	34
Gráfico 9 - Desempenho dos alunos segundo os professores 1ª Q.	34
Gráfico 10 - Desempenho dos alunos segundo os professores 4ª Q.	35
Gráfico 11 - Desempenho dos alunos segundo os professores 5ª Q.	35
Gráfico 12 - Desempenho dos alunos segundo os professores 8ª Q.	36
Gráfico 13 - Quem auxilia os alunos nas tarefas de matemática	38
Gráfico 14 - Frequência em que se estuda fora da escola	38
Gráfico 15 - Forma mais utilizada para avaliação da aprendizagem	39
Gráfico 16 - Como o aluno se sente diante uma avaliação em matemática.....	40
Gráfico 17 - 1ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano	41
Gráfico 18 - 4ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano	42
Gráfico 19 - 5ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano	42
Gráfico 20 - 8ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano	43
Gráfico 21 - Atividade 1 do pós-teste	107
Gráfico 22 - Atividade 3 do pós-teste	108
Gráfico 23 - Atividade 4 do pós-teste	109
Gráfico 24 - Atividade 5 do pós-teste	111
Gráfico 25 - Atividade 8 do pós-teste	113

Lista de Figuras

Figura 1 - Modelo utilizado para trabalhar a sequência didática	24
Figura 2 - Questão da Avaliação Final	26
Figura 3 - Paralelismo entre uma reta e um plano	29
Figura 4 - Interface do software Geogebra.....	53
Figura 5 - Ponto, Reta e Plano	56
Figura 6 - Postulado da determinação	57
Figura 7 - Postulado da determinação	57
Figura 8 - Postulado da inclusão	57
Figura 9 - Retas Concorrentes	58
Figura 10 - Retas Paralelas.....	58
Figura 11 - Retas Reversas.....	62
Figura 12 - Planos secantes.....	63
Figura 13- Reta "a" paralela ao plano α	64
Figura 14 - Reta contida no plano	66
Figura 15 - Reta secante ao Plano.....	66
Figura 16 - Reta paralela ao plano	67
Figura 17 - Planos Paralelos	67
Figura 18 - Respostas da atividade 1	94
Figura 19 - Aluno desenvolvendo as atividades da sequência.....	96
Figura 20 - Respostas das atividades 2 e 3	96
Figura 21 - Resposta da atividade 4.....	98
Figura 22 - Respostas das atividades 5,6 e 7	99
Figura 23 - Respostas das atividades 8,9 e 10	101
Figura 24 - Respostas das atividades 11 e 12	103
Figura 25 - Respostas das atividades 13	104
Figura 26 - Respostas das atividades 14	105
Figura 27 - Respostas das atividades 15	106
Figura 28 - Atividade 1 do pós-teste.....	107
Figura 29 - Atividade 3 do pós-teste.....	108
Figura 30 - Atividade 4 do pós-teste.....	109
Figura 31 - Atividade 5 do pós-teste.....	110
Figura 32 - Atividade 8 do pós-teste.....	112

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1. ESTUDOS PRELIMINARES.....	15
1.1 Estudos sobre a geometria espacial de posição	15
1.1.1 Resolução de Problemas e Geometria de posição	17
1.1.2 Modelagem Matemática e Geometria de posição	22
1.1.3 Uso das tecnologias da informação e comunicação e Geometria de posição	25
1.2 O ensino – aprendizagem da geometria de posição segundo os professores de matemática	30
1.3 O ensino – aprendizagem da geometria de posição segundo os alunos	37
2. TEORIAS UTILIZADAS NA PESQUISA.....	45
2.1 Ensino de matemática por atividades.....	45
2.2 Uso das tecnologias de informação e comunicação	47
2.3 O <i>software</i> Geogebra	51
2.4 Engenharia Didática	53
2.5 Geometria espacial de posição	55
2.5.1 Entes Geométricos e primeiros postulados.....	55
2.5.2 Posição relativa entre duas retas	58
2.5.3 Determinação do Plano	59
2.5.4 Definição de retas reversas	61
2.5.5 Postulado da Interseção e planos secantes.....	62
2.5.6 Paralelismo de retas	63
2.5.7 Paralelismo entre a retas e planos.....	64
2.5.8 Posições relativas entre uma reta e um plano	65
2.5.9 Paralelismo entre os planos.....	67
2.5.10 Posição relativa entre dois planos	69
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	70
4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	72
5. EXPERIMENTO E ANÁLISE.....	93
5.1 Desenvolvimento do experimento e seus resultados	93
CONSIDERAÇÕES FINAIS	115

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
APÊNDICE A.....	121
APÊNDICE B.....	125
APÊNDICE C.....	128
APÊNDICE D.....	132

INTRODUÇÃO

O estudo de geometria é a parte do ensino em que analisamos e estudamos as formas e características dos entes planos e espaciais, estando presente na vida do ser humano desde a antiguidade, segundo Boyer (1996, p. 5), “o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem”.

Citando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre a importância do ensino de geometria e as suas contribuições para a aprendizagem do aluno:

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Segundo Lorenzatto (1995, p. 5), sobre a importância e justificativa do ensino de geometria, temos que: “A necessidade do ensino de Geometria pelo fato de que, um indivíduo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas”. Ainda segundo Lorenzatto (1995, p. 5), “Não poderão ainda se utilizar da Geometria como facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano”.

No ambiente educacional em nossa realidade atual, vários métodos de ensino vem sendo pesquisados e aplicados como é o caso do uso das tecnologias. Podemos citar alguns exemplos dessas tecnologias diversas que estão sendo utilizadas como facilitadores no ensino e aprendizagem dos alunos, como os computadores, os softwares, tablets e celulares, citando Rancan (2011, p. 17), “as crianças de hoje percebem o fluxo constante de informações com as quais convive e, por consequência, como este novo mundo tecnológico está transformando a maneira pela qual aprendem”.

As Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) na educação torna-se uma possibilidade de recurso didático, que pode tornar as aulas mais atrativas, fazendo com que os alunos construam o conhecimento de uma forma diferenciada. Mas para que esses recursos didáticos sejam realmente utilizados é necessário que tanto as escolas como os professores saibam empregar e aplicar todo o potencial desses recursos, com objetivos concretos e justificativas sólidas para a construção do processo de ensino e aprendizagem. Para Imbérnom (2010, p.36):

Para que o uso das TIC signifique uma transformação educativa que se transforme em melhora, muitas coisas terão que mudar. Muitas estão nas mãos dos próprios professores, que terão que redesenhar seu papel e sua responsabilidade na escola atual. Mas outras tantas escapam de seu controle e se inscrevem na esfera da direção da escola, da administração e da própria sociedade.

Demo (2008), sobre as Tecnologias de Informação e Comunicação, ressalta que: “Toda proposta que investe na introdução das TICs na escola só pode dar certo passando pelas mãos dos professores. O que transforma tecnologia em aprendizagem, não é a máquina, o programa eletrônico, o software, mas o professor, em especial em sua condição socrática.”

As tecnologias voltadas para o ensino de matemática e geometria surgiram como uma forma alternativa que o professor, com o papel de mediador do conhecimento, encontra para dinamizar os conteúdos em sala de aula e também fazer com que os alunos venham a ser incentivados a buscar e construir o conhecimento. Para Gladcheff, Zuffi & Silva (apud PACHECO e BARROS, 2013, p.8), a utilização de softwares em aulas de matemática no ensino pode consentir diversos objetivos: ser fonte de informação, auxiliar o processo de construção de conhecimentos, ampliar a autonomia do raciocínio, da reflexão e da criação de soluções.

A partir do exposto surgiu a seguinte questão de pesquisa: Como a utilização do *software* geogebra pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de geometria de posição?

Esta pesquisa possui o objetivo de utilizar o *software* geogebra como ferramenta para auxiliar o ensino e aprendizagem de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. A metodologia empregada será do tipo experimental, utilizando as tecnologias de informação e comunicação, em que será

aplicado uma sequência didática utilizando o *software* geogebra como ferramenta auxiliadora à luz da Engenharia Didática, em uma turma do 3º Ano do ensino médio de uma escola pública, para analisar o desenvolvimento dessa sequência na aprendizagem dos alunos em relação ao ensino de reta e plano.

Sendo assim, essa pesquisa está organizada da seguinte maneira: Introdução, capítulo 1 - Estudos Preliminares, na qual foi realizada uma revisão de estudos com o objetivo de fazer um levantamento bibliográfico sobre o ensino de geometria de posição e quais os métodos estão sendo utilizados para o ensino do mesmo; capítulo 2 - Teorias Utilizadas na Pesquisa, em que buscamos os principais teóricos para a construção da nossa sequência didática, descrever a Engenharia Didática e como ela se constitui na construção metodológica, e também o estudo da parte matemática da geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano; capítulo 3 - Procedimentos Metodológicos, é descrito como vamos realizar o experimento, como foram feitas as análises prévias, análises a priori e como será realizado a análise a posteriori; capítulo 4 - Sequência Didática, neste capítulo descrevemos a formação de uma sequência didática e também as atividades propostas para o ensino de reta e plano utilizando o *software* geogebra, juntamente com as análises a priori de cada atividade e seus objetivos; capítulo 5 - Experimento e Análise, neste capítulo apresentamos as etapas do experimento e analisamos os seus resultados; e para finalizar as considerações finais.

1. ESTUDOS PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão de estudos sobre a geometria de posição com ênfase no ensino de reta e plano, buscando trabalhos mais recentes que abranjam o tema e dividindo-os em categorias.

1.1 Estudos sobre a geometria espacial de posição

A revisão de estudos possui a finalidade de apresentar estudos e pesquisas realizadas anteriormente, como forma de propor métodos e propostas, com a intenção de levantar hipóteses e resolver problemas identificados no decorrer do ensino. O foco principal desse levantamento de estudos é o ensino de geometria espacial de posição, onde cada referência verificada utilizada, auxiliou no desenvolvimento da pesquisa. Citando Vosgerau e Romanowski:

Os estudos de revisão consistem em organizar, esclarecer e resumir as principais obras existentes, bem como fornecer citações completas abrangendo o espectro de literatura relevante em uma área. As revisões de literatura podem apresentar uma revisão para fornecer um panorama histórico sobre um tema ou assunto considerando as publicações em um campo. Muitas vezes uma análise das publicações pode contribuir na reformulação histórica do diálogo acadêmico por apresentar uma nova direção, configuração e encaminhamentos. (VOSGERAU e ROMANOWSKI, 2014, p. 167)

O estudo de Geometria Espacial de Posição possibilita o desenvolvimento da capacidade de abstração, auxilia na resolução de problemas práticos e permite reconhecer propriedades das formas geométricas. Segundo Souza Filho e Brito (2006), o ensino nessa área de conhecimento na atualidade ocorre de forma mecânica, ocasionando com que o aluno perca o interesse em aprender esses tópicos, pois ele não encontra um significado para a compreensão do conteúdo.

Segundo Lorenzato (1995) a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula, pois são inúmeras as causas que provocam esse acontecimento, uma delas é a falta de conhecimentos específicos da Geometria pelos próprios professores, ou seja, o professor não poderá ensinar o que ele nunca aprendeu.

As dissertações utilizadas tiveram como critérios, a metodologia de pesquisa, o conteúdo de geometria, os axiomas, as propriedades e as atividades relacionadas a geometria espacial de posição. As palavras digitadas como procedimento de

pesquisa foram: Sequência didática em geometria; Ensino de ponto, reta e plano; Geometria Espacial de Posição. Os documentos foram obtidos no banco de teses e dissertações da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e no Google Acadêmico, o qual permitiu acesso a vários portais de pesquisa de outras instituições.

As dissertações foram divididas nas seguintes sessões: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Uso das tecnologias da informação e comunicação, em que foram destacados cada proposta, metodologia, objetivo, questão de pesquisa, desenvolvimento, resultado e conclusão de cada pesquisa.

O desenvolvimento deste estudo consistiu através de algumas etapas: busca de material para a revisão de estudos, análise do material para a inclusão ou exclusão através de critérios pré estabelecidos, divisão dos trabalhos incluídos em categorias e análise das pesquisas.

A pesquisa foi elaborado a partir de uma revisão da literatura no período entre 1998 e 2017, visando a busca de obras nacionais e fazendo um panorama e evolução entre estudos clássicos e os mais recentes sobre o tema através do período de 20 anos. As palavras chaves utilizadas foram " Sequência didática em geometria" , " Ensino de ponto, reta e plano", " Geometria Espacial de Posição". Foram critérios de exclusão: trabalhos publicados antes de 1998 e os que não se referiam a geometria espacial de posição.

Na busca realizada na ferramenta Google Acadêmico, na página oficial do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT e nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, foram encontrados 8 trabalhos entre artigos e dissertações. Após uma breve leitura e análise dos textos, notou - se que alguns não preenchiam os critérios deste estudo, pois contemplavam outros tópicos da geometria espacial e foram excluídos. Foram selecionados 5 dissertações que preencheram os critérios proposto, foram lidos na íntegra (Quadro 1), em que foram categorizados em três linhas de pesquisa: Resolução de problemas; Modelagem Matemática e Uso das tecnologias da informação e comunicação. E como etapa final da revisão as pesquisas foram analisadas minuciosamente e destacados os resultados e conclusões.

Quadro 1 - Textos Seleccionados

Titulo	Fonte	Categoria	Autores	Ano
Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração: Uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Resolução de Problemas	GOVÊA, Filomena	1998
Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geométrica	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Resolução de Problemas	MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de	1999
Demonstrações em geometria euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para seu ensino	Dissertação-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Modelagem Matemática	FERREIRA, Fernanda Aparecida	2008
Geometria Espacial de Posição: Do Concreto ao Raciocínio Dedutivo com uma Passagem pela Tecnologia	Dissertação-Universidade Federal de Santa Maria	Uso das tecnologias da informação e comunicação	GOMES, Rafael Oliveira de	2016
Uso do Gegebra 3D no ensino de Geometria Espacial	Dissertação-Universidade Federal de Juiz de Fora	Uso das tecnologias da informação e comunicação	SOUZA, Gabriel Moreno Ferreirda de	2017

Fonte: Autor (2018)

Pesquisas sobre geometria espacial de posição ainda encontra-se escassas, pois como é o tópico inicial de geometria espacial, é explorada de maneira intuitiva, fazendo com que as pesquisas foquem em outros tópicos da geometria espacial. Então as cinco dissertações seleccionadas focam o ensino e aprendizagem de geometria espacial de posição, explorando axiomas, teoremas e propriedades que são necessárias para todo o estudo posterior da geometria espacial.

1.1.1 Resolução de Problemas e Geometria de posição

A pesquisadora Gouvêa (1998) desenvolveu em sua pesquisa de mestrado uma sequência didática para um grupo de 55 professores que lecionavam na 7ª

serie (8º Ano) e 8ª serie (9º Ano) do ensino fundamental de instituições privadas e publicas do estado de São Paulo para contribuir com a prática pedagógica do professor de matemática sobre os conteúdos estudados em geometria no ensino fundamental. Foram propostas situações de aprendizagem que o professor poderá utilizar em sala de aula na contribuição na progressão do raciocínio dedutivo, na aprendizagem posterior da demonstração e na permissão aos alunos que se apropriem das regras do debate de validação matemática.

O objetivo central da pesquisa de Gouvêa (1998), foi propor uma reflexão didática junto aos professores do ensino fundamental, sobre o ensino e aprendizagem de geometria envolvendo demonstrações, a fim de incentivar a integração da geometria as demais partes da matemática e as outras disciplinas, no auxílio a restituir a historicidade do conceito de demonstração e do rigor matemático.

A hipótese de sua pesquisa se baseou, em parte, nos resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP) de abril de 1996, em que alunos da 7ª serie do ensino fundamental da rede estadual de São Paulo foram avaliados nos componentes curriculares de matemática, onde segundo Gouvêa (1998, p.01) "O desempenho alcançados pelos alunos nessa disciplina ficou muito aquém do que seria desejável". A partir disso surgiu a seguinte questão de pesquisa: será possível estudar-se matemática sem estudar geometria, conseqüentemente, sem demonstrações?

A metodologia utilizada na pesquisa foi a de resolução de problemas em que foi feito um estudo histórico e epistemológico para identificar os obstáculos epistemológicos, um estudo da transposição didática para a identificar obstáculos didáticos e avaliar o ensino da demonstração; a elaboração da sequencia de atividades e análise e discussão dos resultados e conclusões da pesquisa.

Para o desenvolvimento da pesquisa Gouvêa (1998) constituiu um contrato didático que estabeleceu que o trabalho seria aplicado pela pesquisadora na presença de um professor observador para garantir a realização das atividades. As atividades propostas foram divididas em cinco sessões de quatro horas cada, realizadas nos dias de 14, 21, 28 de junho, 5 de julho e 9 de agosto de 1997, onde os professores foram reunidos em duplas para o desenvolvimento das atividades e no final de cada atividade houve momentos de reflexão através de debates coletivos em torno da correção das atividades.

Em uma de suas perguntas que teve como objetivo verificar a compreensão dos professores sobre as similaridades e diferenças entre resultados de medições nos exemplos e prova dedutiva, foi feita a seguinte pergunta: "Que sugestão você dá para trabalhar formalmente o teorema relativo a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° ?" (GOUVÊA 1998, p. 107). Chegando a conclusão de que os professores que não estão trabalhando geometria, não saberão provar formalmente o teorema proposto. Pode ser observado no quadro 2:

Quadro 2 - Resultados Globais da pergunta proposta

SUGESTÕES APRESENTADAS	n	%	Estratégias utilizadas pelos professores
a) Construir vários triângulos, medir seus ângulos e chegar à conclusão	8	14,54	medidas
b) Recortar, dobrar e ver que a soma é 180°	20	36,4	recortes e dobraduras
c) Usar retas paralelas cortadas por transversais.	3	5,5	Teorema de Tales
d) Usar ângulos externos de um triângulo, onde cada um tem medida igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.	1	1,81	Teorema do ângulo externo
e) Noticiar que é verdade	4	7,3	notícia
f) Deixar os alunos experimentar e descobrir	4	7,3	Professor não ensina
g) (respostas evasivas, não claras)	5	9,0	Professor não entendeu a questão
h) (sem respostas)	10	18,2	Professor não sabe como resolver
TOTAL de Professores entrevistados	55	100	

Fonte: Gouvêa (1998)

Segundo a pesquisadora " 23 professores (41,8%) não trabalham os teoremas e nem sabem o que fazer em situações semelhantes" (GOUVÊA 1998, p.117).

Os resultados obtidos na pesquisa contemplaram a importância que no ensino de geometria, se dá à prova dedutiva com o intuito de levar o aluno a perceber que o resultado fornece uma ideia de certas propriedades de uma figura, levando a demonstração. Foi observado que o professor não trabalha com representações múltiplas de um mesmo conceito, não possibilita o desenvolvimento de espírito crítico em relação as definições, atributos e conceitos novos, observou que de forma costumeira o professor ensina geometria de forma estática, seguindo definição,

exemplo e exercício e também observou a necessidade de mobilizar outras ferramentas, como a demonstração, para resolver situações problemas. Segundo Gouvêa (1998, p. 188) "os professores participantes da oficina não estão acostumados a justificar suas respostas".

Em um dos relatos dos participantes durante a pesquisa, um professor pesquisado afirmou que "a Geometria é passada para o aluno de forma concluída sem que o próprio aluno chegue a essas conclusões" (p. 127)

Após as análises das atividades, a pesquisadora verificou a necessidade de resgatar as demonstrações no ensino de geometria para produzir de maneira consistente o conhecimento matemático e repensar as novas descobertas metodológicas, em que o professor ajude o aluno a aprender.

A pesquisa de Mello (1999), desenvolvida a uma classe de 14 alunos da 8ª série do ensino fundamental em uma escola do estado de São Paulo, em que foi analisado as dificuldades do ensino de geometria a partir de uma sequência didática para introduzir a técnica de demonstração e procurou debater e orientar estratégias de resolução das atividades. A sua base teórica está situada nas considerações e estudos de Duval, o mesmo em uma de suas obras lista três níveis de problemas em sua obra:

Nível 1 - aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária; Nível 2 - aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência ou porque é explicitamente pedido como justificativa; Nível 3 - aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos. (DUVAL, 1988. p.74).

Em sua sequência didática a pesquisadora contemplou as problemas níveis 1 e 2.

De forma em que o objetivo da pesquisa foi desenvolver uma sequência didática como alternativa metodológica para o ensino de geometria na 8ª série do ensino fundamental, com a finalidade de despertar no aluno novos caminhos do pensamento geométrico dedutivo.

A pesquisa de Mello (1999) estava situada no seguinte problema: os alunos pesquisados apresentam evidências de não usufruir de um ensino que lhes permita: compreender a mudança do estatuto da figura, dos estatutos da definição e dos teoremas; saber utilizar as mudanças dos registros de representação; apropriar - se

do raciocínio lógico-dedutivo. Levou a seguinte questão de pesquisa: As escolhas didáticas dos professores, quando ensinam geometria, favorecem a apropriação dos conceitos e das habilidades geométricas?

Como metodologia a pesquisadora adotou a resolução de problemas à luz da engenharia didática, onde foi feita uma sequência didática organizada em oito sessões, que foram abordados: análise descritiva das atividades, análise *a priori*, relato da aplicação das sessões e a análise *a posteriori*.

Foi constituído por Mello (1999) que a pesquisa seria aplicado por ela própria, juntamente na presença de um professor de desenho geométrico da turma como observador, os alunos foram divididos em duplas, nas quais a institucionalização das propriedades geométricas importantes. Cada sessão teve uma duração de 40 minutos, com encontros semanais, durante o período de aula.

Durante o desenvolvimento da pesquisa foi constatado pela pesquisadora o crescimento da desenvoltura dos alunos em realizar as tarefas, mesmo com as dificuldades frente às atividades propostas, foi constatado uma nova postura dos alunos em questionar sobre a veracidade das propriedades geométricas euclidianas a partir de discussões e debates durante o processo e durante o pós- teste foi observado que os alunos possuíam as habilidades em desenvolver a figura, organizar as hipóteses, identificar as conclusões, destacar as propriedades envolvidas na demonstração.

Porém segundo a pesquisadora:

[...] acreditamos que alguns alunos, terminada a sequência ainda apresentam dificuldades em diferenciar a articulação na prática natural do discurso e a articulação dedutiva. Já que, no Pós teste, sete alunos utilizaram apenas a definição de paralelogramo desconsiderando as propriedades na execução da demonstração. (MELLO 1999, p.172).

A pesquisadora obteve como conclusão que a abordagem desenvolvida na sequência didática beneficiou o aprendizado dos alunos em técnicas de demonstração em geometria. E destaca na pesquisa que os alunos avançaram em seus conhecimentos em geometria pois demonstraram compreender:

- a figura como âncora dos entes matemáticos dados as hipóteses;
- a utilização dos registros de representação;
- a ordenação lógica das informações que compõe a prova;
- o estatuto da definição e do teorema;

- a importância da demonstração para explicar logicamente as propriedades da geometria;
- a importância da figura geométrica como apoio durante o desenvolvimento da demonstração.

Com isso a pesquisadora concluiu ser válida a sequência didática aplicada para o grupo de alunos pesquisados.

1.1.2 Modelagem Matemática e Geometria de posição

Na pesquisa de Ferreira (2008), foi aplicada uma sequência didática para alunos do 4º período de um curso de licenciatura em matemática na região metropolitana de Belo Horizonte do turno da noite. O alunos já haviam cursado a disciplina de geometria Plana e estavam cursando a disciplina de geometria Espacial, e a intenção de escolher essa turma, pois a pesquisadora era professora deles e foi uma forma de amenizar as dificuldades que os mesmos relatavam na parte de demonstrações em geometria.

O objetivo central da pesquisa era trabalhar com técnicas de demonstração no ensino de geometria Euclidiana, de forma que a finalidade da pesquisa é um modelo didático-metodológico que contribua para o desenvolvimento de habilidades e de conceitos geométricos, de raciocínio lógico e a compreensão do processo de demonstração em geometria.

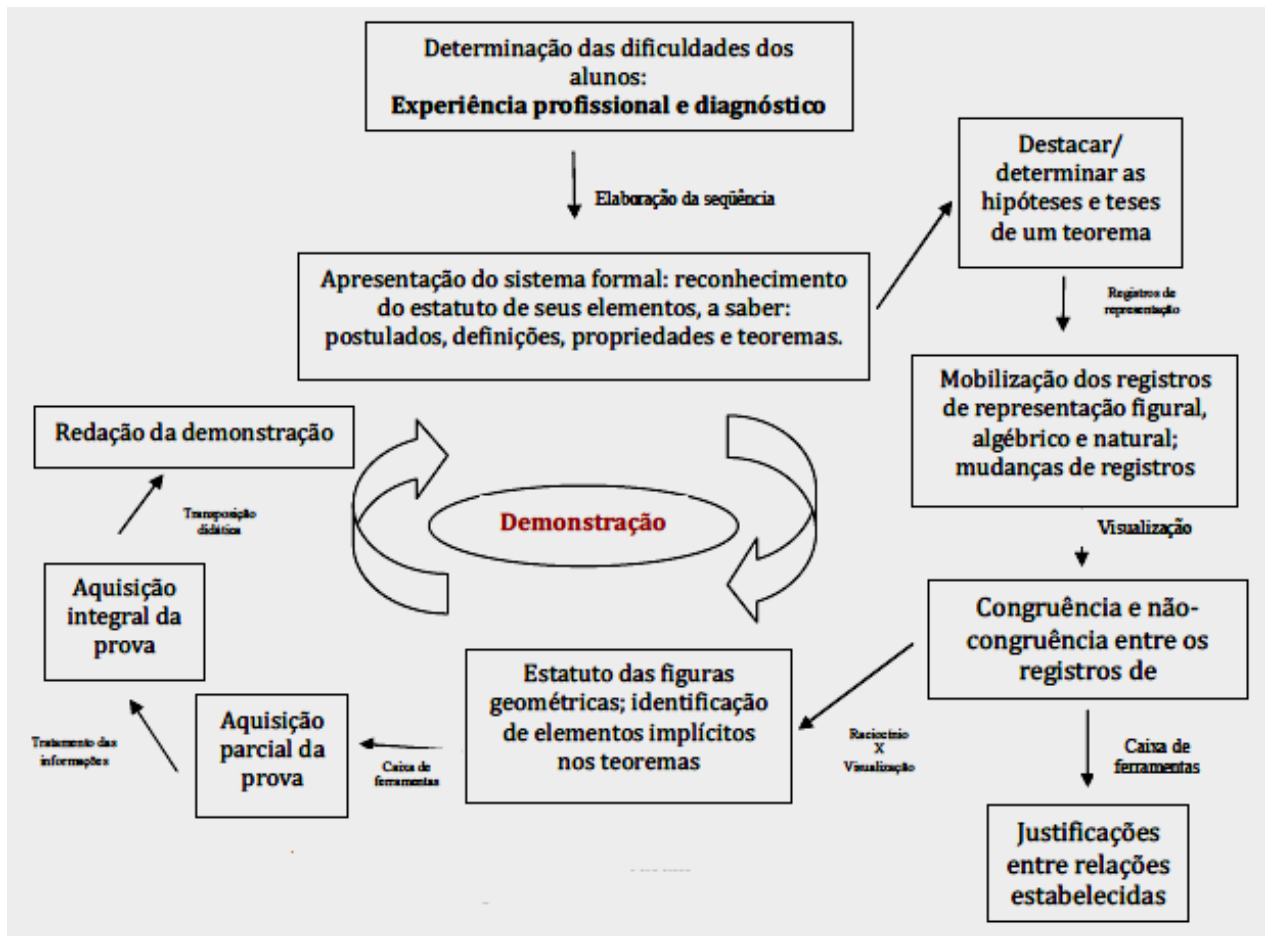
A metodologia aplicada por Ferreira (2008) foi a modelagem matemática juntamente com a engenharia didática, onde aplicado em 8 aulas de 1 hora e 40 minutos cada aula, de forma semanal, para o desenvolvimento e discussão de cada atividade proposta. Os alunos tiveram a liberdade de fazer as atividades propostas de forma individual ou em duplas, ressalvado com a supervisão da pesquisadora para que os alunos não fizessem cópias uns dos outros.

A pesquisadora estabeleceu uma regra para os alunos que fizessem de forma ordenada as atividades propostas, para assim ser determinado as dificuldades encontradas nas soluções para melhor análise dos dados obtidos. Foram considerados, segundo a autora (2008, p.6-7) os seguintes aspectos para o desenvolvimento das atividades:

- motivar os alunos, realizando uma abordagem histórica sobre o sistema formal seus elementos e a importância da demonstração matemática Geométrica. Usando textos para desempenhar este papel;
- apresentar aos alunos os diferentes registros de representação e como mobilizá-los na aquisição de uma demonstração;
- trabalhar o estatuto do teorema, definindo hipóteses e teses e a importância de distingui-los no teorema;
- expor e solicitar figuras geométricas associadas a teoremas, propriedades e definições;
- evidenciar a sequência lógica envolvida em esquemas de demonstrações e a necessidade da mesma durante todo o processo;
- oferecer subsídios que levem o aluno a redigir uma demonstração em dois registros de representação: natural e algébrico, com auxílio da representação figural.

A pesquisadora para alcançar os objetivos compostos em seu trabalho, organizou a sequência de acordo com modelo representado pela figura 1.

Figura 1 - Modelo utilizado para trabalhar a sequência didática



Fonte: Ferreira (2008)

A sequência didática da pesquisadora foi subdividida em cinco atividades: a primeira atividade, estava centrada no reconhecimento de um sistema formal, dado um texto histórico sobre as criações de Euclides de uma formação lógica dos conceitos geométricos, noções de ponto, reta e plano e alguns postulados e definições que foram utilizados como ferramentas para o perenizado da técnica de demonstração; a segunda atividade foi elaborada de forma em que fosse trabalhado o conceito das figuras geométricas, reforçado a determinação das hipóteses e teses de um teorema e suas propriedades e representações; na terceira atividade foi exposto aos alunos o recíproco de um teorema, apresentado também formas de justificar para estabelecer se o recíproco é verdadeiro ou falso; a quarta atividade apresentou o foco central em demonstrações de propriedades e conceitos geométricos; a quinta atividade apresentou para o aluno utilizar todas as ferramentas aprendidas nas atividades anteriores na criação de seus esquemas de demonstração.

Ferreira (2008) conclui em sua pesquisa que a construção desse modelo proposto seja útil para professores e alunos como facilitador no ensino e aprendizagem de geometria.

1.1.3 Uso das tecnologias da informação e comunicação e Geometria de posição

A pesquisa proposta por Gomes (2016) apresenta uma aplicação de uma proposta didática sobre geometria espacial de posição para alunos do segundo ano do ensino médio do colégio militar de Santa Maria - RS, buscando destacar a apresentação de um grupo de axiomas e a demonstração de propriedades consequentes desses axiomas, para isso foi utilizado o *software* geogebra com a ferramenta 3D na busca de explorar a visualização e percepção dos alunos.

Gomes (2016) descreveu como objetivo principal de sua pesquisa apresentar e avaliar a aplicação de uma proposta didática para o ensino de geometria espacial de posição. Segundo o autor a proposta visou desenvolver três competências: "a exploração de um sistema básico de axiomas e desenvolvimento de propriedades consequentes (raciocínio dedutivo); a representação geométrica tridimensional (construção) e a utilização da linguagem da Teoria dos Conjuntos (representação)" (Gomes 2016, p.16).

A partir do objetivo e dos estudos anteriores do pesquisador, que tem – se na geometria espacial de posição auxilia no raciocínio dedutivo dos alunos, surgiu a seguinte questão de pesquisa: é possível trabalhar os conceitos mais abstratos da geometria espacial de posição no âmbito do ensino médio?.

A metodologia proposta na pesquisa de Gomes (2016) foi composta de aulas expositivas sobre a parte introdutória de geometria espacial, a utilização de materiais concretos como folhas de isopor, jogos de varetas e alfinetes, com a finalidade que o aluno construísse a parte introdutória do conhecimento geométrico tridimensional e para finalizar os alunos foram ate o laboratório de informática e utilizaram o *software* geogebra, na parte da janela 3D, para realizar construções tridimensionais, possibilitando entendimento melhor dos entes geométricos primitivos e possibilitando o levantamento de hipóteses.

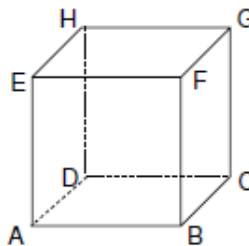
O desenvolvimento da pesquisa teve duração de três semanas, com quatro períodos de 45 minutos semanais aplicada para 156 alunos do ensino médio do

colégio militar de Santa Maria, subdivididos em quatro etapas: a primeira etapa, foi trabalhado os conceitos introdutórios de geometria espacial, mostrando os axiomas e o desenvolvimento dos conceitos subsequentes. De forma que foi enfatizado a determinação da reta, a determinação do plano e a construção desses entes geométricos; a segunda etapa ocorreu no laboratório de informática, em que os alunos foram divididos em duplas onde deveriam fazer construções geométricas tridimensionais utilizando o geogebra e foi aplicado um teste em que o aluno realizaria a construção geométricas com foco na construção de retas reversas e o foco no paralelismo; a terceira etapa se deu por meio de apresentação da teoria relativa ao calculo de ângulos e distâncias geométricas, com foco na construção de retas perpendiculares comum entre retas reversas; a quarta etapa foi dedicada à realização de uma atividade somativa individual, abordando os principais assuntos estudados durante o processo de desenvolvimento ta proposta da pesquisa.

Analisando a avaliação final proposta pelo autor aos alunos, o objetivo de verificar o aprendizado obtido durante o desenvolvimento da proposta didática obtiveram resultados negativos como observado na figura 2:

Figura 2 - Questão da Avaliação Final

Questão 3: O cubo, representado na figura abaixo, tem aresta medindo 12 cm.



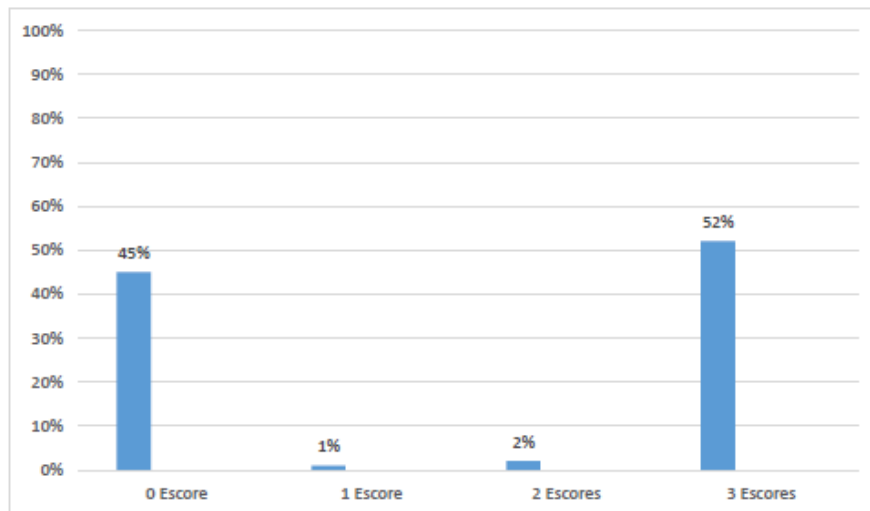
a) Determine o ângulo entre os semiplanos ABC e BCE – 3 escores.

b) Calcule a distância entre as retas suporte de EF e AH – 3 escores.

c) Calcule a distância do ponto A ao plano BDH. Após encontrar o segmento de reta que representa a distância solicitada, justifique, de acordo com a teoria sobre perpendicularismo, o porquê de sua utilização – 6 escores.

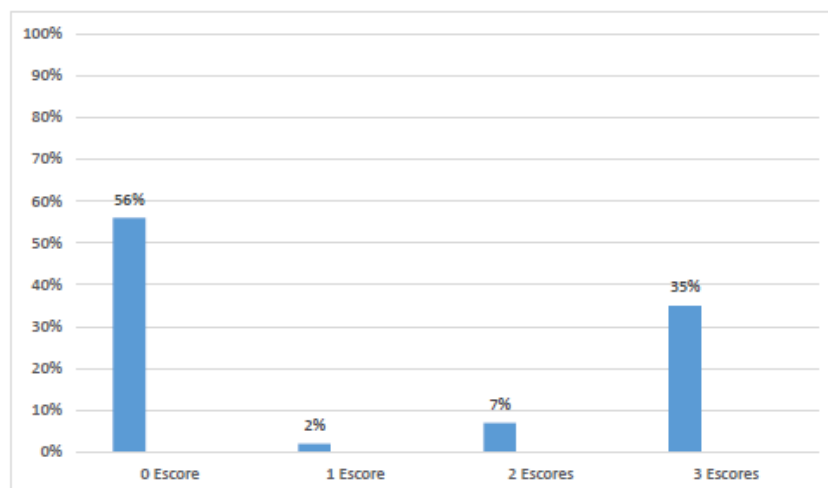
Fonte: Gomes (2016).

O gráfico 1 referente a alternativa a, 45% dos alunos erraram totalmente a questão, e segundo o autor os alunos não identificaram de forma correta o plano e por consequência não conseguiram determinar o ângulo solicitado.

Gráfico 1 - Índice de acertos da alternativa a

Fonte: Gomes (2016).

No gráfico 2, referente a alternativa b, foi a alternativa com maior percentual de erros, onde 56% dos alunos erraram a questão, que para o autor grande parte desses erros se deram pela falta de pré-requisitos que seriam importantes para a resolução dessa questão.

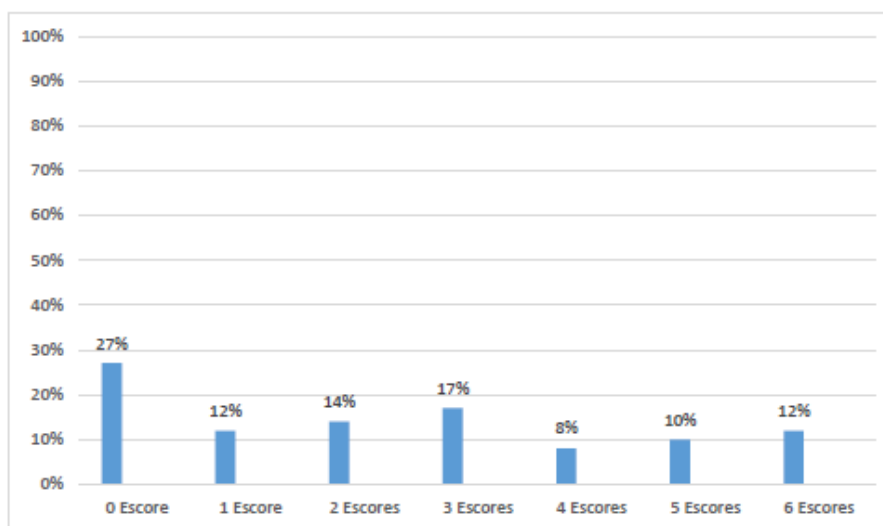
Gráfico 2 - Índice de acertos da alternativa b

Fonte: Gomes (2016).

O gráfico 3, mostra segundo o autor, o maior equilíbrio de resultados, apenas 27% dos alunos erraram totalmente a questão, houve alguns equívocos na identificação de teoremas que pudessem auxiliar na resolução da questão, pois a

questão envolvia a identificação e o cálculo da distância e ainda solicitava ao aluno que justificasse a utilização do segmento escolhido.

Gráfico 3 - Índice de acertos da alternativa c



Fonte: Gomes (2016).

A partir da análise dos resultados da pesquisa Gomes (2016) concluiu que a proposta didática em geometria espacial de posição, não foi suficiente para desenvolver o raciocínio lógico dedutivo completo do grupo de alunos participantes da atividade, porém essa proposta é uma forma de iniciar esse tipo de conteúdo, mostrando a parte mais formal, construindo as teorias e mostrando as representações.

Souza (2017) em sua dissertação apresentou alguns aplicativos construídos através da janela de visualização 3D do Geogebra de forma didática que contempla alguns axiomas, proposições e definições da geometria espacial. Partiu da hipótese que esses aplicativos facilitariam a visualização de alguns conceitos fundamentais da geometria espacial de forma que favoreça a autonomia do processo de aprendizagem.

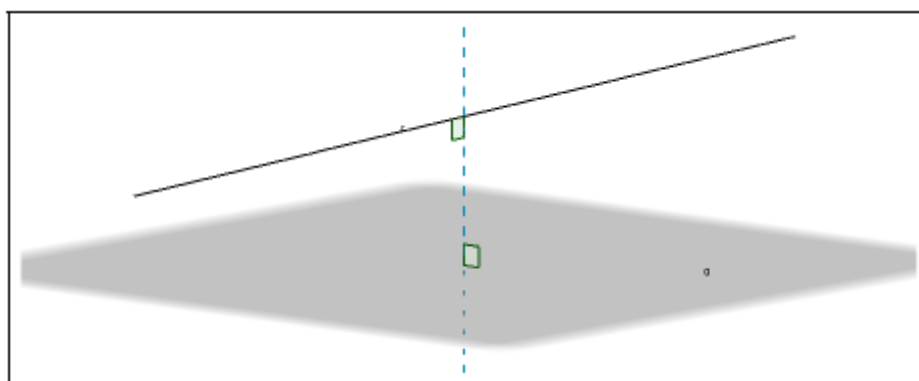
O objetivo de seu trabalho é utilizar os recursos construtivos e visuais do Geogebra, com sua janela de visualização 3D, para ilustrar aos alunos o que um determinado axioma da geometria espacial está afirmando, já que de forma tradicional é utilizado desenhos no quadro ou material concreto para tal visualização. Segundo Souza (2017, p.13-14) "O uso dessa tecnologia também permite aos professores explorar os conceitos de forma visual e dinâmica, gerando um ganho de

tempo e qualidade às aulas, permitindo ao aluno uma interação com o que se pretende aprender e ensinar".

Metodologicamente Souza (2017) utilizou as tecnologias da informação e comunicação (TIC), onde foram construídos 24 aplicativos utilizando a janela de visualização 3D do Geogebra de forma em que se buscou abranger os principais axiomas, proposições e definições da geometria espacial. Sendo que seu material está disponível online para acesso livre e download na plataforma GeogebraTube, para as modificações e adaptações a cargo do usuário.

O desenvolvimento e construções das atividades segundo o autor, elaborou didaticamente, pensando na autonomia do aluno durante o processo de ensino e aprendizagem, esperou que os alunos enxergassem os conceitos, propriedades por trás das descrições conceituais e axiomáticas da geometria espacial exploradas. Como podemos observar na figura abaixo que representa o paralelismo entre uma reta e um plano através de um aplicativo criado no geogebra.

Figura 3 - Paralelismo entre uma reta e um plano



Fonte: Souza (2017)

Souza (2017) conclui que seu trabalho estimule outros pesquisadores possam dar continuidade no seu processo de desenvolvimento de aplicativos no Geogebra 3D na busca de contemplar ainda mais tópicos da geometria espacial e que o uso dessa tecnologia dinamize o processo de aprendizagem nos ambientes educacionais.

A finalidade desse capítulo foi realizar uma revisão de estudos sobre o ensino de geometria espacial de posição. Verificamos a partir do levantamento teórico, que o ensino de geometria espacial de posição, com ênfase no ensino de reta e plano, pode ser apresentado com abordagens metodológicas variadas como forma de

amenizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, porém como a geometria espacial de posição é o tópico inicial da geometria espacial, pesquisas sobre esse tema ainda encontram-se escassas devido que esse estudo é explorado de maneira intuitiva, fazendo com que as pesquisas foquem em outros tópicos da geometria espacial.

As dificuldades apresentadas pelos alunos relatados nas pesquisas de revisão giram em torno da parte conceitual, perceptiva, identificação dos entes geométricos e na relação dos termos técnicos com as propriedades.

Mesmo sendo observado resultados significativos no ensino e aprendizagem em geometria de posição, ainda é necessário mais estudos com ênfase no ensino de reta e plano, e estudos que não fiquem "presos" a um único tipo de ferramenta de ensino e sim utilizar ferramentas variadas para potencializar a aprendizagem significativa do aluno.

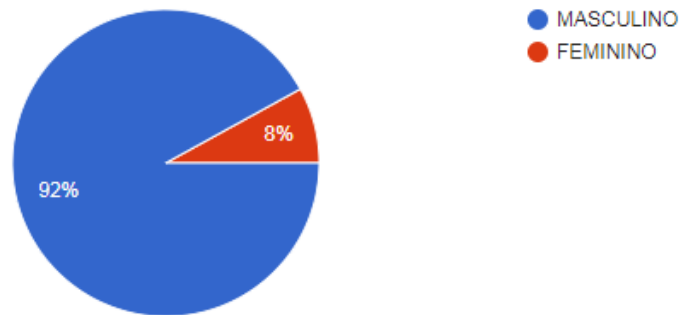
1.2 O ensino – aprendizagem da geometria de posição segundo os professores de matemática

Nesse fase da pesquisa apresentamos os resultados de uma pesquisa com o objetivo de identificar como o processo de ensino de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano, é construído e desenvolvido segundo a visão dos professores de matemática, pois ouvi-los é essencial para identificação do desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

Como instrumento para a formalização e sistematização da pesquisa utilizamos a plataforma Google *Forms* (Formulários), através de um questionário dividido em duas partes. A primeira parte é composta de perguntas com o objetivo de identificar o perfil dos professores que estão atuando em escolas de ensino regular público; a segunda parte composta de questões objetivas que contemplam os tópicos abordados neste trabalho sobre geometria de posição com o objetivo de avaliar o nível de dificuldade para a resolução das questões, segundo a visão dos professores consultados.

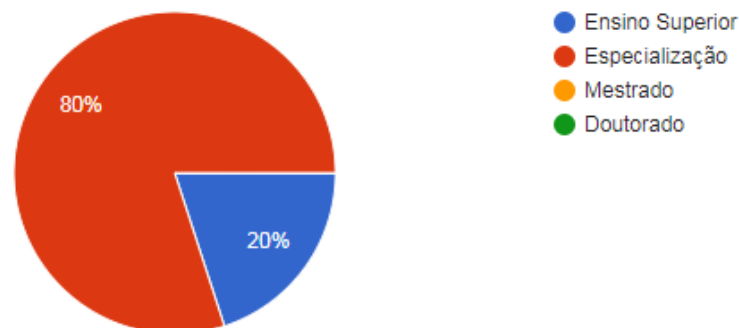
Os questionários foram aplicados de forma on-line a uma amostra de 25 professores que atuam no ensino público do estado do Pará, Maranhão e Piauí.

No gráfico 4 dos 25 professores consultados, 23 são do gênero masculino e 2 são do gênero feminino.

Gráfico 4 - Gênero dos Professores consultados

Fonte: Autor (2018)

Sobre a formação acadêmica dos docentes, 80% dos professores possuem uma especialização, enquanto 20% dos professores possuem apenas a graduação.

Gráfico 5 - Nível de escolaridade

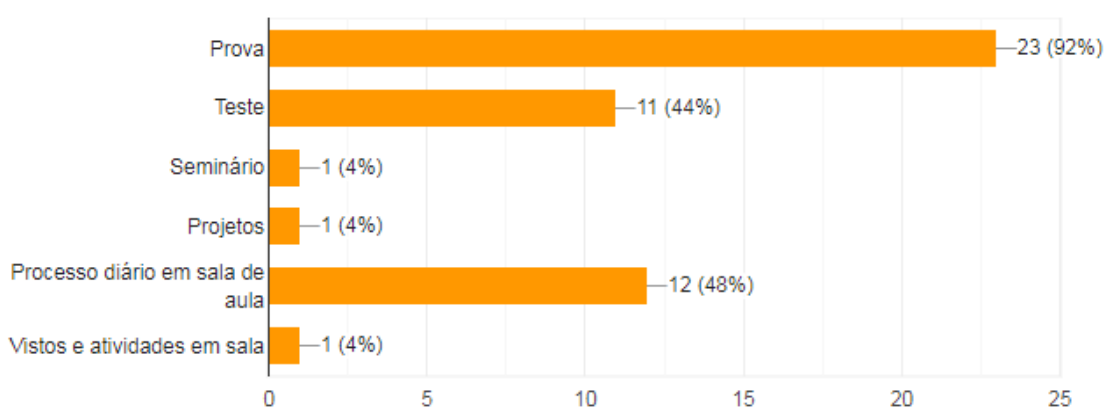
Fonte: Autor (2018)

Podemos observar que os professores estão buscando aprimorar as suas práticas e conhecimentos através da formação continuada, citando Delors (2003) sobre a formação continuada:

A qualidade de ensino é determinada tanto ou mais pela formação contínua dos professores, do que pela sua formação inicial... A formação contínua não deve desenrolar-se, necessariamente, apenas no quadro do sistema educativo: um período de trabalho ou de estudo no setor econômico pode também ser proveitoso para aproximação do saber e do saber-fazer. (DELORS, 2003, p. 160)

Em relação aos instrumentos de avaliação, observando o gráfico 6, o método mais utilizado para avaliar os alunos a cerca dos conhecimentos adquiridos no ensino de reta e plano são as provas. Segundo Quinquer (2003, p. 24), esta ferramenta avaliativa surgiu da necessidade de dar à avaliação um caráter mais científico, objetivo e quantificável. A partir daí, as provas surgem “[...] como a maneira mais ‘objetiva’ e adequada de medir os resultados da aprendizagem por sua pretendida confiabilidade e pela possibilidade de quantificar resultados”.

Gráfico 6 - Métodos de avaliação utilizados com os alunos



Fonte: Autor (2018)

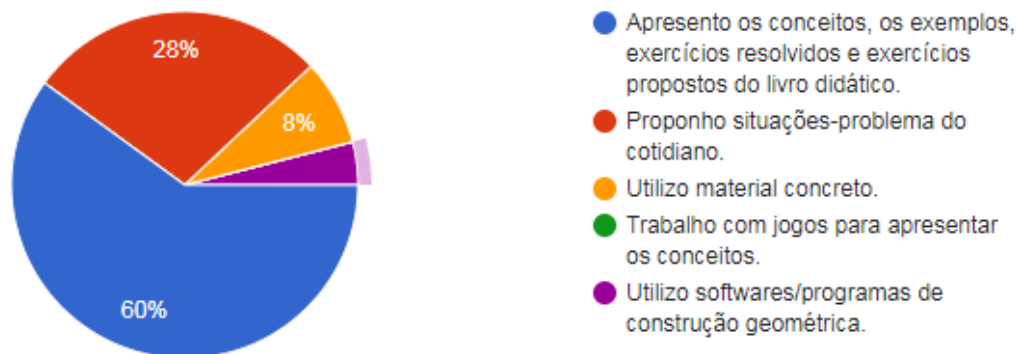
O processo avaliativo vem sendo discutido por estudiosos da área como instrumentos e estratégias que possibilitam a compreensão da melhor experiência da aprendizagem vivenciada pelos alunos, Segundo Araujo (2007, p.42-43):

A avaliação de sala de aula deveria funcionar como um retrato que mostrasse a situação de aprendizagem do estudante. [...] o processo de avaliação precisa ser visto com um instrumento pedagógico, não como uma forma de punição. Deve ser usado para fazer um diagnóstico das deficiências de aprendizagem de cada aluno e para detectar o que o professor não conseguiu desenvolver ao longo do ano letivo. [...] que habilidades e competências não foram alcançadas, as atividades são replanejadas buscando o avanço da turma. Isso significa diversificar materiais estratégias de ensino como: jogos, elaboração de materiais, pesquisas, leituras e também o modo de avaliar. (ARAUJO, 2007, p.42-43).

O gráfico 7, observamos que 60% entre os professores consultados, a forma de apresentar, ensinar e fixar o conteúdo é o método tradicional, que segundo Mizukami (1986, p.17) "ensino pode ser caracterizada pelo método de memorização,

cujo aspecto básico é o professor dirigir a classe a um resultado desejado, através de uma serie de perguntas que representam, por sua vez, passos para se chegar ao objetivo proposto".

Gráfico 7 - Qual o método que você mais utiliza para ensinar Geometria Espacial de Posição?

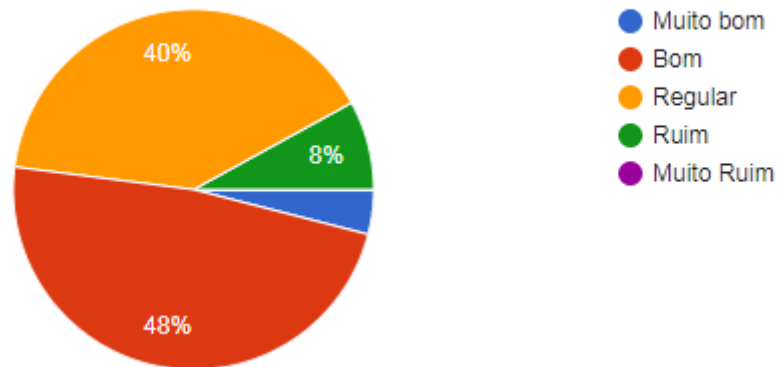


Fonte: Autor (2018)

Sobre o rendimento dos alunos em relação aos conceitos e propriedades da geometria de posição, observamos o gráfico 8, que 40% dos professores avaliam o rendimento como regular, e citando Santa Helena (2015) sobre o desempenho dos alunos no estudo de geometria:

O fraco rendimento em geometria por parte dos alunos, é resultado, muitas vezes, da utilização de práticas que não atendem às suas expectativas, dentre outras coisas, o distanciamento existente entre o modo como os professores e alunos compreendem a matemática. O professor imagina que seus alunos terão o mesmo prazer que ele tem ao lidar com a Matemática. Entretanto, o aluno não consegue vê-la do mesmo modo, e por isso não a compreende. (SANTA HELENA, 2015, p.02).

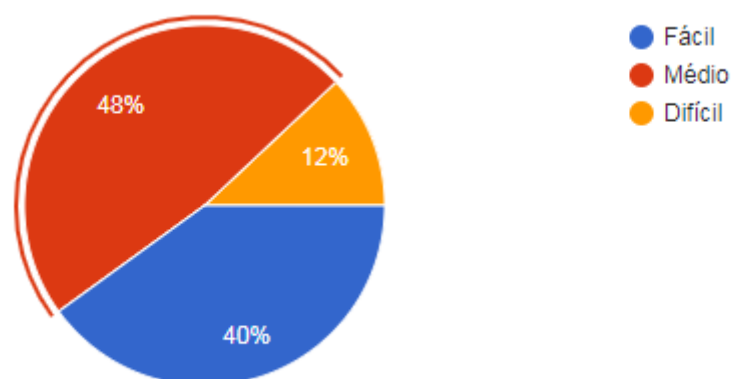
Gráfico 8 - Como você avalia o rendimento dos alunos em relação aos conceitos e propriedades de Reta e plano?



Fonte: Autor (2018)

A segunda parte do questionário, os professores consultados, observaram questões propostas sobre geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano, e avaliaram o nível de dificuldade segundo a sua visão, que na sua maioria foi dita como nível médio, que poderá ou não ser confirmado através dos resultados da pesquisa feita com os alunos utilizando o mesmo questionário de exercícios propostos.

Gráfico 9 - Desempenho dos alunos segundo os professores 1ª Q.

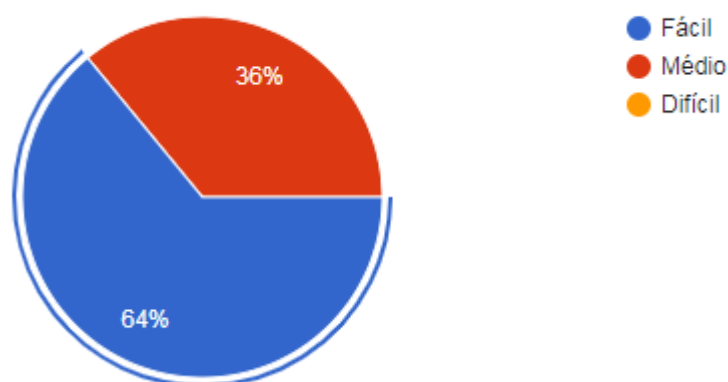


Fonte: Autor (2018)

Na opinião dos professores consultados a primeira questão, em que era perguntado quantos planos são construídos através de 4 pontos distintos e não

coplanares, possui um nível de dificuldade médio para fácil, 48% nível médio e 40% nível fácil, sendo que apenas 12% avaliaram a questão como difícil.

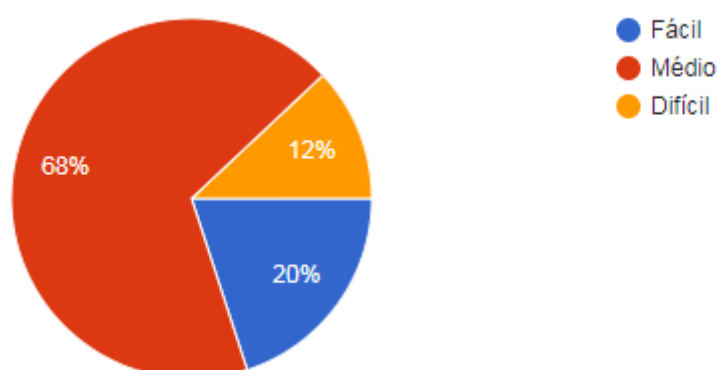
Gráfico 10 - Desempenho dos alunos segundo os professores 4ª Q.



Fonte: Autor (2018)

A quarta questão, apresenta uma abordagem mais conceitual que está presente nos livros didáticos, quando dois planos possuem apenas uma reta em comum como chamamos esses planos, a maioria dos professores, que corresponde há 64%, afirmam que a questão é de nível fácil, nenhum professor acredita que a questão possui o nível difícil.

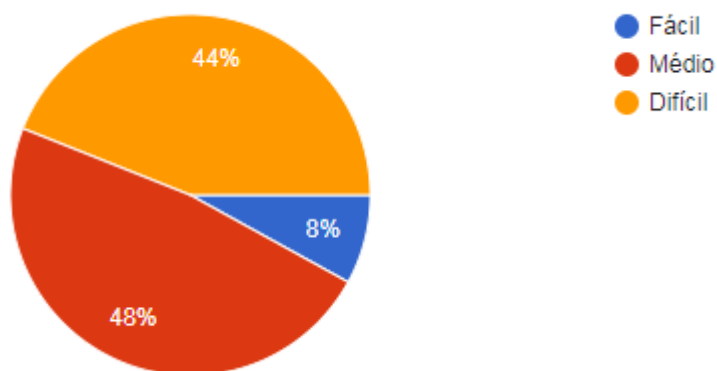
Gráfico 11 - Desempenho dos alunos segundo os professores 5ª Q.



Fonte: Autor (2018)

A quinta questão contava com uma figura de uma cadeira em que era pedido a relação entre os segmentos formados da estrutura da própria cadeira e os planos constituídos através desses segmentos, 68% dos professores afirma que a questão possui o nível médio de dificuldade, porém houve 12% que acharam o nível da questão difícil.

Gráfico 12 - Desempenho dos alunos segundo os professores 8ª Q.



Fonte: Autor (2018)

Os professores consideraram a oitava questão como a mais difícil da pesquisa, sendo 44% dos professores consultados, a questão mostra uma figura de um "globo da morte" em que devia-se relacionar qual figura geométrica correspondia a menor distância percorrida por um motociclista através das extremidades do globo.

Examinado após a análise das informações dessa pesquisa que o maior método utilizado para o ensino de reta e plano em geometria de posição é o método tradicional, onde é apresentado a definição, exercício e ao final exercício de fixação.

Também podemos observamos que a maior parte dos professores ainda utiliza apenas prova como método de avaliação de alunos, que reflete diretamente no rendimento dos alunos ao final dos tópicos estudados, fazendo que tenhamos a reflexão em buscar outras ferramentas para potencializar o ensino e aprendizagem significativo dos alunos.

1.3 O ensino – aprendizagem da geometria de posição segundo os alunos

Apresentamos nesse tópico os resultados da pesquisa feita com alunos do 3º Ano do ensino médio, cujo o objetivo foi analisar as dificuldades dos alunos do 3º Ano do ensino médio sobre o estudo de geometria de posição envolvendo o ensino de reta e plano.

Como instrumento de pesquisa foi aplicado dois questionários, que segundo Barbosa (2008, p.01) o questionário é um dos procedimentos mais utilizados para obter informações, apresenta as mesmas questões para todas as pessoas, garantindo o anonimato e contém questões para atender a finalidade específica de uma pesquisa, que foi realizada a uma amostra de 104 alunos de três turmas 3º Ano do ensino médio de uma escola pública do município de Belém no estado do Pará, sendo duas turmas do turno vespertino e uma turma do turno noturno, em que 104 alunos participaram apenas do primeiro questionário e 100 alunos participaram dos dois questionários.

O primeiro questionário contém vinte e duas questões de múltipla escolha, aplicada aos alunos teve como objetivo, identificar principais dificuldades no estudo do ensino de reta e plano. Também verificar o perfil dos alunos de forma qualitativa.

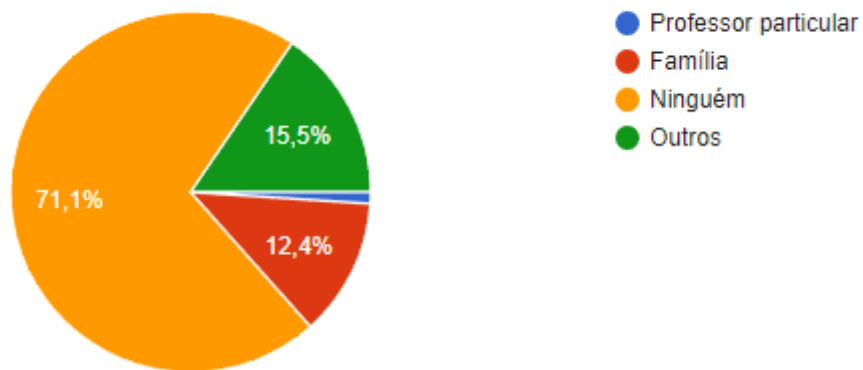
Quanto ao segundo questionário aplicado aos alunos, foi composto de dez questões sobre o ensino de reta e plano, com o objetivo de analisar as dificuldades dos alunos do 3º ano do ensino médio sobre o estudo do ensino de reta e plano.

Os dados foram analisados, sistematizados e tabulados através da plataforma Google *Drive*, utilizando o Google *Forms*, como ferramenta de construção dos gráficos para a análise e conclusão dos resultados obtidos.

A análise e tabulação dos dados feita com a amostra de 100 alunos do 3º ano do ensino médio sobre ensino de reta e plano, sendo 50% alunos do gênero masculino e 50% alunos do gênero feminino. Pode-se estabelecer um perfil dos alunos através da análise do primeiro questionário, destacando alguns pontos sobre o desenvolvimento do ensino e aprendizagem em sala de aula.

Quanto a 9ª questão do primeiro questionário direcionada alunos, com o objetivo de identificar quem auxilia nas tarefas de matemática, pode-se verificar que 71,1% dos alunos não recebem nenhum tipo de auxílio nas tarefas e estudos. Isso faz com que os alunos desde de cedo se sintam desmotivados a estudar, decaindo a sua produtividade na construção do conhecimento em sala de aula.

Gráfico 13 - Quem auxilia os alunos nas tarefas de matemática



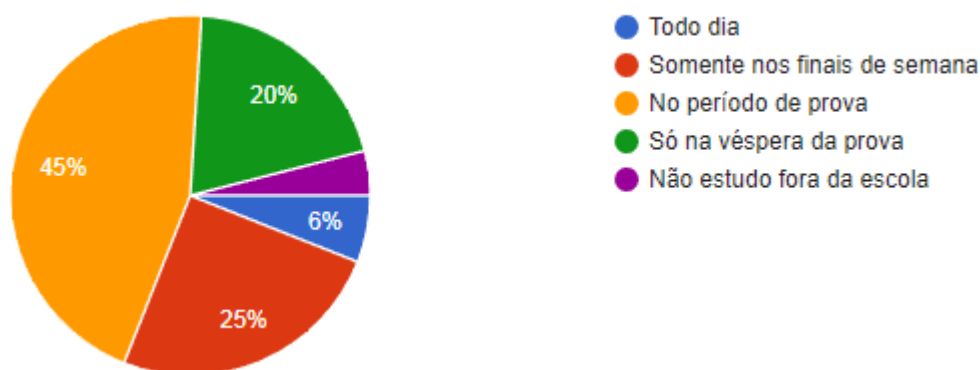
Fonte: Autor (2017)

Citando TIBA (1996), é necessário desde cedo um envolvimento entre a escola, aluno e família para o desenvolvimento do aprendizado.

No começo, os pais devem monitorar os filhos para que estes criem o costume e assim tenham condições de tomar a responsabilidade como sendo deles. O ponto fundamental em relação à disciplina do estudo é garantir ao filho tempo e espaço, as condições favoráveis para fazer a digestão da informação recebida em sala de aula. Mas ninguém poderá digerir a informação por ele. (TIBA, 1996, p.101)

Consequentemente os dados da 9ª questão, são refletidas nas respostas da 10ª questão, cuja o objetivo era verificar a frequência com que o aluno estuda matemática fora da escola.

Gráfico 14 - Frequência em que se estuda fora da escola



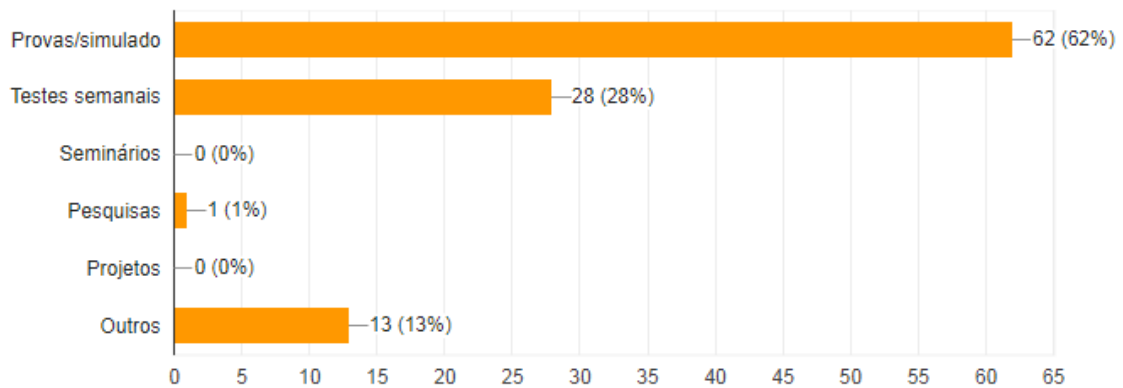
Fonte: Autor (2017)

Verifica-se que 45% estuda somente no período de prova e 20% estuda apenas na véspera da prova, totalizando 65% dos alunos que apenas estudam para a resolução da prova, mostrando a desmotivação no estudo de geometria. Então o papel do professor para motivar o aluno nos estudos, segundo (HUERTAS, 2001, Apud KNUPPE, 2006), não é o de influenciar o aluno diante às suas habilidades, competências, conhecimentos e atitudes, mas o de promover a facilitação na construção do processo de formação. Com isso, o professor influenciará o aluno no desenvolvimento da motivação e construção do conhecimento. Segundo o autor, "quanto mais consciente for o professor com relação a motivação, melhor será a aprendizagem de seu aluno".

Outro fator em que podemos verificar o perfil dos alunos da amostra é decorrente a avaliação da aprendizagem e avaliação em matemática. As questões 12 e 13, respectivamente, mostram a forma em que se avalia o aluno no decorrer dos bimestres e como o aluno se sente diante a avaliação de matemática feita pelo professor.

O gráfico 15 apresenta que 62% dos alunos são avaliados mediante a provas escritas ou simulados, isso reflete no grau de desenvolvimento do aluno, pois na avaliação apenas por prova escrita, o aluno é apenas quantificado a um número que deve estar adequado e uma media pré estabelecida.

Gráfico 15 - Forma mais utilizada para avaliação da aprendizagem

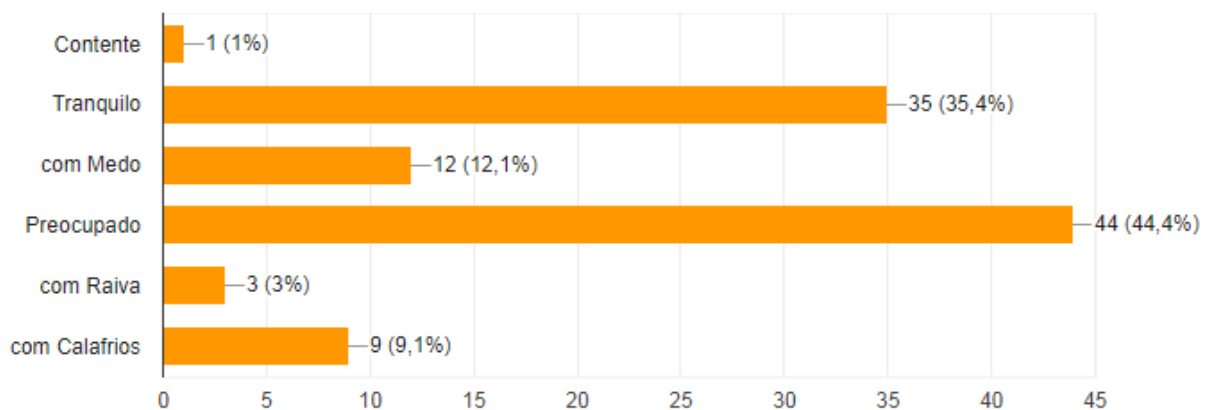


Fonte: Autor (2017)

O gráfico 16 mostra o total de 68,6% dos alunos apresentam um tipo de sentimento ruim quanto a avaliação de matemática. As causas dessa rejeição, segundo Reis (2005) são devidos :

- Falta de motivação do professor ao ensinar e falta de motivação dos alunos em aprender;
- A idéia pré-concebida e aceita pelos alunos de que a Matemática é difícil;
- O rigor da Matemática;
- Experiências negativas que os alunos tiveram com esta matéria;
- Falta de relação entre a Matemática ensinada na escola e o cotidiano do aluno;
- A prática do professor, as relações que este estabelece com os alunos e a forma como ensina e avalia. (REIS, 2005, p.03).

Gráfico 16 - Como o aluno se sente diante uma avaliação em matemática



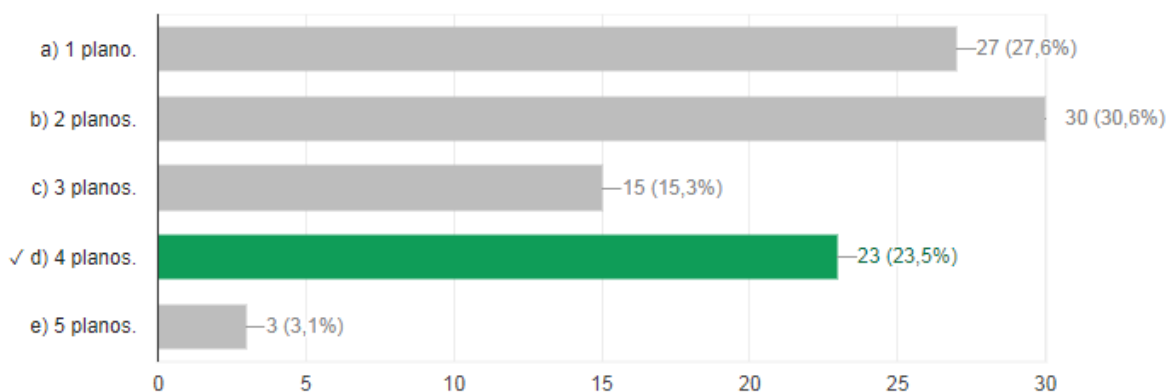
Fonte: Autor (2017)

O segundo questionário aplicado contém 10 questões sobre o ensino de reta e plano , tópico da unidade de geometria espacial de posição. O objetivo dessas 10 questões é analisar as dificuldades dos alunos do 3º ano do ensino médio sobre o estudo do ensino de reta e plano.

Quanto à 1ª questão esperava-se que eles tivessem a habilidade de identificar quantos planos 4 pontos distintos e não coplanares determinam. Outra forma seria fazer a combinação do número de planos é igual ao número de combinações de 3 pontos que podemos formar dos 4 lados do quadrilátero formado pelos 4 pontos.

Porém ao observamos o gráfico 17, percebemos um baixo desempenho, 98 alunos responderam e 2 alunos deixaram a questão em branco, apenas 23,5% dos alunos que responderam a questão marcaram a alternativa correta.

Gráfico 17 - 1ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano



Fonte: Autor (2017)

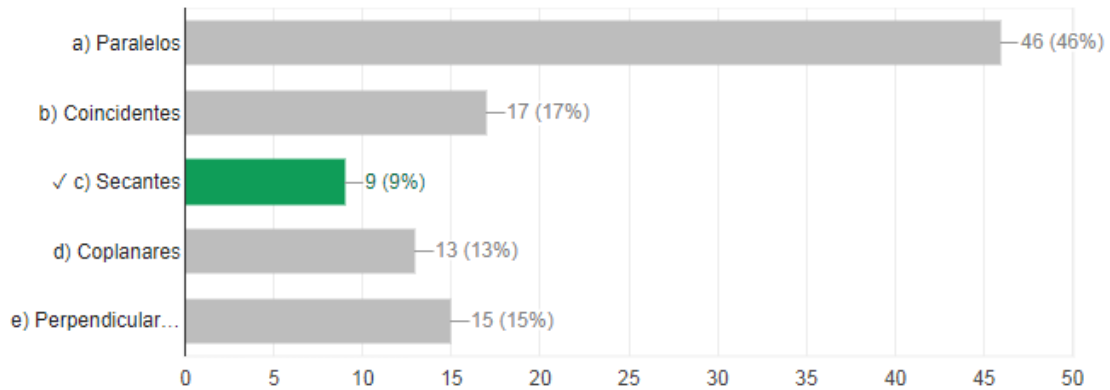
A dificuldade dos alunos nessa questão pode ser constatada por Lorenzato (1995) em seu artigo "Por que não ensinar Geometria?", destaca primeiramente a ocorrência que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas, e de forma evidente como causas dessas dificuldades, são acarretadas devido à má formação de nossos professores, devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos a desempenhar. Segundo o mesmo "Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico".

Os problemas estão presentes na área dos conceitos matemáticos e as propriedades geométricas, sendo esse o fator fundamental para a resolução dessa questão.

De forma semelhante a 4ª questão esperava-se que o aluno reconhecesse as propriedades geométricas básicas, propriedades essas que envolvem a posição

relativa entre dois planos que possuem uma reta em comum. De acordo com o gráfico 18, houve apenas 9% de acerto nessa questão

Gráfico 18 - 4ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano

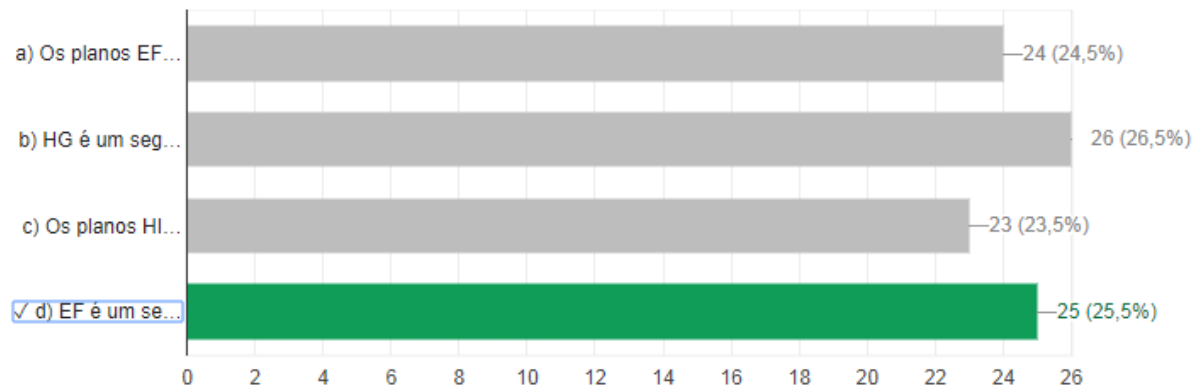


Fonte: Autor (2017)

As dificuldades apresentadas podemos relacionar a um dos objetivos citado nos PCNs (2000) referente a espaço e forma, tal objetivo norteia a exploração de características de algumas figuras planas, como por exemplo, paralelismo e perpendicularismo de lados, etc.

Na questão 5, foi proposto alunos a identificarem uma alternativa que continha uma característica em comum dos planos formados a partir da construção de uma cadeira. Apenas 25% conseguiram identificar a característica comum proposta.

Gráfico 19 - 5ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano



Fonte: Autor (2017)

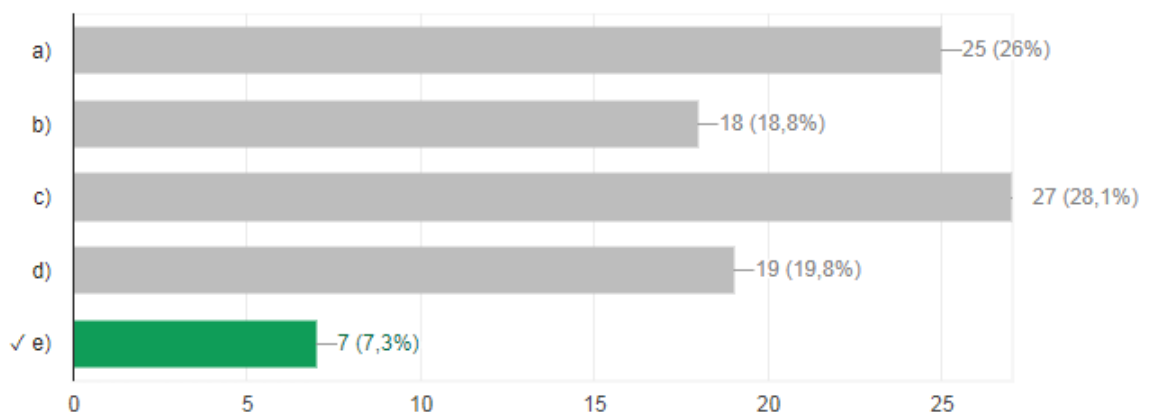
Citando novamente o PCNs (2000), o aluno teria que estabelecer comparações entre o objeto físico e o objeto geométrico juntamente com a percepção dos elementos geométricos e suas características.

Através do gráfico 20, referente a questão 8, houve um acerto de apenas 7,3% por parte dos alunos, pois não conseguiram identificar as propriedades da projeção ortogonal através de uma figura de um globo da morte adaptada de uma questão objetiva do Enem 2012. A questão possuía um suporte a figura para melhor visualização do que se pedia, para identificar o trajeto feito por um motoqueiro no plano do chão.

Sanchez (2004) destaca um dos aspectos que manifesta as dificuldades de aprendizagem em Matemática:

Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. A hierarquização dos conceitos matemáticos, o que implica ir assentando todos os passos antes de continuar, o que nem sempre é possível para muitos alunos; a natureza lógica e exata de seus processos, algo que fascinava os pitagóricos, dada sua harmonia e sua “necessidade”, mas que se torna muito difícil pra certos alunos; a linguagem e a terminologia utilizadas, que são precisas, que exigem uma captação (nem sempre alcançada por certos alunos), não só do significado, como da ordem e da estrutura em que se desenvolve. (SANCHEZ, 2004, p.174).

Gráfico 20 - 8ª questão do exercício sobre ensino de reta e plano



Fonte: Autor (2017)

Verificado através da tabulação dos dados que o conteúdo abordado ensinado na maioria dos casos relatados segue a seguinte forma tradicional: definição, exemplo e exercício.

A maioria dos alunos consultados na pesquisa relatam que encontram dificuldade em reconhecer as propriedades necessárias para a resolução das questões, em reconhecer os termos técnicos exigidos na geometria de posição e em identificar os entes geométricos.

2. TEORIAS UTILIZADAS NA PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos as principais teorias e teóricos utilizados na composição da nossa pesquisa e também a fundamentação matemática da geometria de posição.

2.1 Ensino de matemática por atividades

O ensino de matemática por atividades apresenta – se como um recurso didático por possibilitar e desenvolver um envolvimento pessoal e significativo entre professor e aluno, levando há uma construção ou uma redescoberta dos conceitos e conhecimentos matemáticos. Com o objetivo de solucionar o problema, as práticas em produzir um significado a os problemas matemáticos trás à necessidade , citando Moura (2002, p.159), em organizar as ações pedagógicas de maneira que os sujeitos interajam entre si e com o objeto de conhecimento.

A possibilidade na construção das noções e conceitos matemáticos dos alunos através das atividades, devemos considerar as vivências e os conhecimentos prévios dos alunos, de acordo com Sá (2009), para conduzir o aluno a construção do conhecimento através das atividades é fundamental que o professor tenha a atenção e preocupação na elaboração da atividade, ministrando de forma cuidadosa todas as orientações para que seja alcançado o objetivo durante a realização das atividades. Ainda de acordo com Sá (2009), esse tipo de abordagem se caracteriza por ser centrada no aluno e seus interesses durante a sua vivência acadêmica.

Sá (2009) apresenta sugestões de elementos essenciais para a elaboração das atividades:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda atividade deve procurar conduzir o aluno à construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele. (SÁ, 2009, p.18)

Segundo Núñez (2009), a atividade passa por três momentos: o momento inicial, o de execução e o de controle. Para o autor esses três momentos estão presente em toda a atividade, por isso, não seguem uma ordem fixa de acontecimento.

O primeiro momento destacado por Núñez (2009), é composto de uma característica motivacional, onde os alunos, motivados pelo professor, são preparados para a assimilação do novo conhecimento através de um dialogo inicial, através da busca dos conhecimentos anteriores e de experiências do cotidiano.

Um dos meios que suscita a motivação interna nos alunos é a aprendizagem por problemas ou situações problemas, nas quais a formação de conceitos se vincula diretamente à sua experiência, a seu dia-a-dia, a contextos da criação científica, tecnológica e social. Os alunos ficam motivados aos constatarem a utilidade prática de seus novos conhecimentos na atividade produtiva ou criativa (NÚÑEZ, 2009, p. 99).

A execução ocorre quando são realizadas as ações, as técnicas e procedimentos necessários para a construção do conceito estudado, onde com clareza dos fatos são determinados os objetivos a serem alcançados.

Núñez (2009) destaca o momento de controle como a parte em que “obtem-se a informação necessária para a correção das ações que os alunos executam e para a correção do próprio sistema” (NÚÑEZ, 2009, p. 201). O professor é parte fundamental desse momento, são verificados todas as necessidades para o avanço ou redirecionamento do conceito estudado para o alcance do objetivo central da atividade.

No contexto do ambiente escolar, o professor deve buscar e estimular o aluno a desenvolver um significado para os conteúdos ensinados, deve mostrar para o aluno que os conhecimentos formais adquiridos possam ser adquiridos de forma que sejam utilizados e ampliados no cotidiano. Esse pensamento é corroborado por Nunes, Carraher e Schliemann (2011), que discutem em seu trabalho as diferenças e relações que o ensino de matemática através das atividades possuem no contexto escolar e na vida cotidiana do aluno.

A aprendizagem de matemática na sala de aula é um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal, e a matemática como atividade humana. [...] Enquanto atividade humana, a matemática é uma forma particular de organizarmos os objetos e eventos no mundo. Podemos estabelecer relações entre os objetos de conhecimentos, contá-los, medi-los, somá-los, dividi-los etc. e verificar os resultados das diferentes formas de organização que escolhemos para nossas atividades (NUNES, CARRAHER e SCHLIAMANN, 2011, p. 28).

Ao escolher o conteúdo de matemática para ser trabalho em sala de aula, o professor deve deixar claro o objetivo para que não haja confusões nos procedimentos das atividades, para que o aluno possa compreender o que está sendo proposto e entender o conceito estudado. Na busca desse objetivo, deve-se levar em consideração as técnicas e ferramentas utilizadas, visto que, cada aluno tem seu próprio ritmo de aprendizagem. Então uma investigação prévia se faz necessária antes de propor uma atividade para que seja proporcionado uma aprendizagem significativa aos alunos.

2.2 Uso das tecnologias de informação e comunicação

Os métodos para o ensino de matemática vem se ampliando e modificando com o passar do tempo, como forma de dinamizar o processo de ensino e aprendizagem e como forma de minimizar a dominância do ensino de forma tradicional, podemos identificar essas mudanças a partir do que é citado nos documentos dos parâmetros curriculares nacionais (PCN), segundo o documento:

[...] no ensino de matemática devesse "identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.(BRASIL, 2001, p.37).

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) na educação surge como uma ferramenta potencializadora no processo de ensino e aprendizagem de alunos e professores, de forma que a sociedade de forma geral está utilizando a tecnologia para a resolução de problemas do cotidiano. Citando Tornaghi (2010), de forma resumida o autor nos mostra como se deu o início do uso das tecnologias na educação nas escolas públicas brasileiras.

O uso de tecnologias na escola pública brasileira iniciou-se timidamente, com projetos pilotos em escolas no final de 1980. Nesses projetos, algumas experiências ocorriam com o uso do computador em atividades disciplinares e em muitas outras extracurriculares e ocorriam em horários diferentes daquelas em que os alunos frequentavam a escola. Nas duas situações, era possível observar que as práticas apresentavam -se com base em uma das seguintes abordagens: (i) instrucionista, na qual o computador pode ser usado na educação como máquina de ensinar ou como máquina para ser ensinada; ou (ii) construcionista, por meio da qual o aluno constrói, por intermédio do computador, o seu próprio conhecimento (TORNAGHI, 2010, p.145).

Podemos ainda observar nos documentos do PCN, a utilização da tecnologia faz com que alunos e professores tenham uma oportunidade de investigar e explorar, nas aulas de matemática, os tópicos que possibilitam o favorecimento da argumentação e validação de resultados , tornando - se uma forma para o despertar do interesse do aluno nas práticas em sala de aula e também nas práticas sociais.

É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46).

A utilização das TIC como um recurso didático possibilita a adequação às diferentes necessidades e individualidades de cada aluno, oportunizando o professor a criar ambientes virtuais de aprendizagem de forma diferenciada e de acordo com a necessidade de cada assunto a ser ensinado, fazendo uma contribuição para a assimilação dos conteúdos. A internet e o computador são ferramentas que atraem a atenção do aluno, proporcionando a habilidade de captar e assimilar as informações. Vogt e Soares (2016, p.5) relatam que:

É preciso considerar que as tecnologias - sejam elas novas (como o computador e a Internet) ou velhas (como o giz e a lousa) condicionam os princípios, a organização e as práticas educativas e impõem profundas mudanças na maneira de organizar os conteúdos a serem ensinados, as formas como serão trabalhadas e acessadas as fontes de informação, e os modos, individuais e coletivos, como irão ocorrer as aprendizagens.

Segundo Valente (1993), afirma que o computador tem que ser utilizado como uma nova ferramenta educacional e não apenas como uma máquina de ensinar, pois os alunos precisam buscar e usar as informações que os norteiam, ao invés de memorizar as informações. O computador torna-se cada vez mais uma ferramenta que favorece os alunos no desenvolvimento do raciocínio e da reflexão, através da interação e manipulação da ferramenta, há a possibilidade no desenvolvimento da capacidade do aluno em buscar, selecionar a informação e solucionar os problemas de forma independente.

Ainda em concordância Valente (2008), observa que a escola deveria utilizar-se cada vez mais das tecnologias, para que os alunos pudessem aprender a se expressar através do uso dessa tecnologia, pois ao fazer essa integração o processo de ensino e aprendizagem torna-se mais atrativa e significativa, promovendo a conquista de novos conhecimentos que permite o aluno a inserção no contexto de seu cotidiano. Esses recursos estão a disposição do professor para auxiliar em sua prática pedagógica, sendo um facilitador do entendimento do aluno, com isso os professores devem estar preparados e capacitados na utilização desse recurso para que os objetivos sejam atingidos.

Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e *softwares* e também qual é seu potencial, quais são os seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essas tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professores, têm um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional (VALENTE, 2008, p.76).

Neste contexto cabe ao professor criar as situações para desenvolver a aprendizagem do aluno, desenvolvendo atividades com o objetivo de construir o conhecimento do aluno, ao invés de apenas transmitir uma informação, então ao utilizar um *software*, o professor tem que estar preparado e familiarizado com a tecnologia que irá utilizar, preparando as atividades com antecedência relacionando a tecnologia com o tópico estudado, citando Valente (1999), caso o professor não esteja preparado em utilizar o recurso para desafiar o aluno, não será a tecnologia quem irá cumprir este papel. Outro papel importante do professor na construção do conhecimento do aluno, é a necessidade de se colocar no lugar do educando e de como a atividade desenvolvida será impactante na construção do conhecimento.

No seu trabalho cotidiano em sala de aula, alguma vez já parou para pensar como o seu aluno aprende? Ou, ao contrário, você se preocupa apenas no "como ensinar", ou seja, na criação de estratégias que favoreçam a transmissão do conhecimento? Lembre-se de que aprendizagem é um processo individual e social que a pessoa constrói na interação do com o meio e com o outro. Daí a importância das interações e de situações que promovam a reflexão, a tomada de consciência e a reconstrução do conhecimento (TORNAGUI, 2010, p.42).

Em concordância, os PCN (1998), destacam o papel do professor e de seu poder de decisão de quando e como será utilizado as tecnologias em sala de aula e que o professor também tem como papel, fazer a ponte entre o conhecimento e o aluno. Segundo o documento: "O professor é sempre responsável pelos processos que desencadeia para promover a construção de conhecimentos, e nesse sentido é insubstituível". (BRASIL, 1998, p. 155).

O uso eficiente da informática educativa, aliado ao incentivo da escola na parte estrutural, o professor com a formação adequada e o aluno motivado em aprender, possibilita e proporciona desde um entendimento mais profundo acerca dos campos conceituais até uma abertura para análise de possíveis erros que possam ser analisados e corrigidos pelo uso das tecnologias. Os *softwares*

matemáticos são utilizados apenas como ferramentas para o auxílio do professor no ensino de conceitos para os alunos e, não como um substitutos, então o professor deve escolher e usar de forma adequada o *software* matemático, com o objetivo de buscar possíveis soluções para problemas no campo conceitual em que o aluno poderá apresentar e, proporcionar uma interação dos alunos com as novas tecnologias.

2.3 O *software* Geogebra

O Geogebra é um *software* livre, ou seja, o criador do *software* disponibiliza de forma gratuita o programa para qualquer usuário que deseje utilizá-lo. Ele possui um sistema de Geometria Dinâmica, permitindo que a pessoa que utilize o programa realize construções e insira equações e coordenadas e fazendo alterações quando necessárias.

O Geogebra foi criado e desenvolvido por Markus Hohenwater, da Universidade Austríaca de Salzburg em 2001, possui a função de ferramenta de ensino e aprendizagem de matemática. Atualmente o *software* encontra – se na versão 6.0.523.0, sendo aplicativo multiplataforma, ele pode ser instalado em computadores com os sistemas operacionais *Windows*, *Linux* ou *Mac OS* e em *Smartphones* e *Tablets* com sistema Androide ou IOS. Disponível para download no link: <http://www.geogebra.org/download>.

Geogebra é um *software* de matemática para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne **GE**Ometria, ál**GE**BRA e cálculo. Recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o prêmio de *software* educativo Alemão e Europeu. (FERREIRA, 2010, p.03)

Segundo Vieira (2013), o *software* GeoGebra possui ferramentas de geometria, de álgebra e do cálculo. Fornece principalmente duas visões diferentes de um mesmo objeto matemático estudado, podendo ser visualizado na janela gráfica e na janela de álgebra. A janela de visualização gráfica é aonde os objetos são construídos, podendo ser editado a cor, espessura das linhas, medir ângulos, distâncias, entre outras funções. Na janela de álgebra é visualizado a representação algébrica do objeto construído na janela visualização gráfica.

A área de desenho há um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as suas construções geométricas, podendo ser alternado entre a janela 2D e a janela 3D, de forma simultânea aparecem as coordenadas que indicam as equações correspondentes na janela de álgebra.

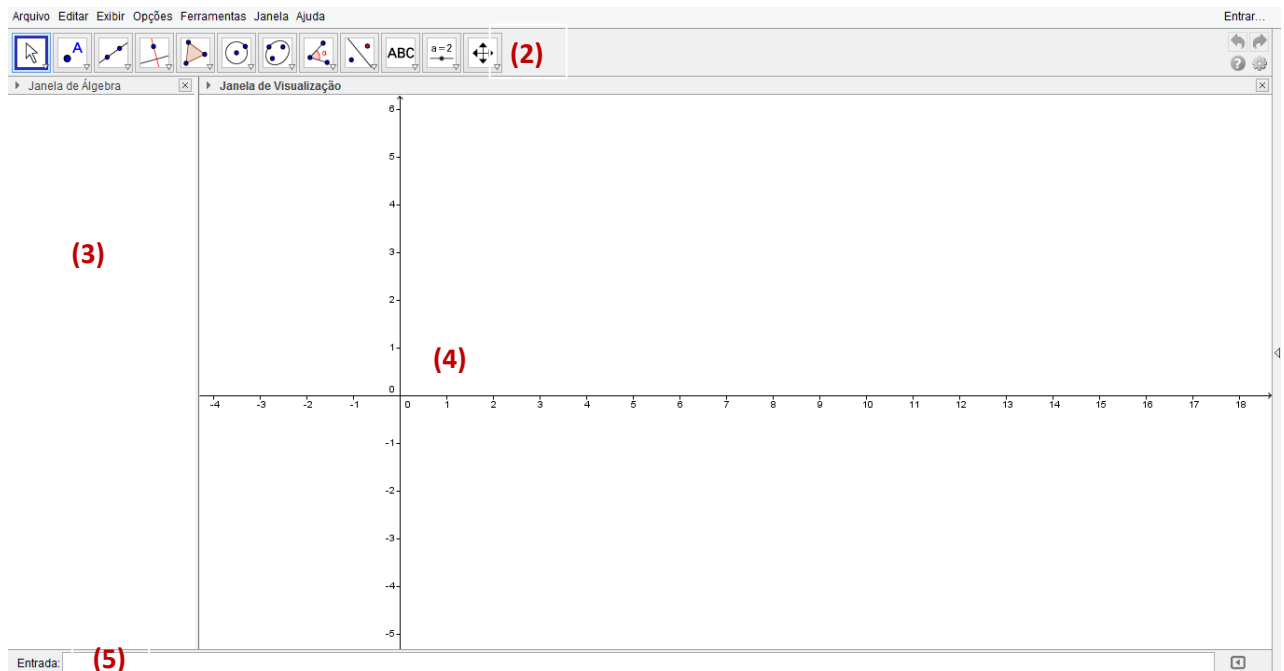
O campo de entrada de comandos é aonde são escritas as coordenadas, equações, comandos e funções, e estes são mostrados na área de desenho.

Entre várias funções do *software*, pode – se construir objetos como planilhas, pontos, vetores, segmentos, retas, figuras planas, figuras espaciais, polígonos, secções cônicas, coordenadas cartesianas e polares, gráficos de funções e curvas parametrizadas, o cálculo de derivadas e integrais, podendo ser manejados de forma dinâmica de tal forma que suas propriedades são conservadas.

Na área educacional o uso do *software* permite os alunos testem e validem os problemas propostos pelo professor, possibilitando revisar ou buscar conceito de conteúdos anteriores de forma simples e dinamizada, permitindo a potencialização do ensino e aprendizagem. Citando Pereira (2012), que fez uma pesquisa utilizando o geogebra como ferramenta de ensino.

O trabalho com as tarefas geométricas mediadas pelo *software* GeoGebra foi primordial para a consolidação de alguns conceitos ligados à circunferência, por exemplo. Os alunos tiveram a oportunidade de validar suas hipóteses, conjecturar sobre possíveis caminhos para a solução das tarefas e discutir de forma colaborativa suas soluções encontradas. A relação entre as conjecturas levantadas no transcorrer da pesquisa, evidenciou a recorrência dos alunos às tarefas anteriores ou a conceitos percebidos durante as plenárias, para dar continuidade à solução de uma tarefa nova a qual se debruçavam, desenvolver uma autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Contribuiu, também para revisar os conceitos de triângulos, circunferência, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento e retas paralelas, quando os mesmos apresentavam-se como conceitos necessários para transcorrer das soluções propostas. (PEREIRA, 2012, p.98).

(1) **Figura 4 - Interface do software Geogebra**



Fonte: Geogebra (2019)

- (1) Menu principal;
- (2) Barra de ferramentas;
- (3) Janela algébrica;
- (4) Área de desenhos;
- (5) Entrada de comandos.

2.4 Engenharia Didática

No início dos anos 80, as noções iniciais sobre a Engenharia Didática começaram a ser introduzidas na didática geral do ensino de matemática, que possuía um enfoque na didática francesa. Para Artigue (1988), a Engenharia Didática pode ser comparado ao o trabalho de um engenheiro que antes de realizar um projeto, faz a uso de seus conhecimento científicos e se submetendo a esses recursos científicos, cuja há momentos em que precisa-se construir soluções para a resolução de um problema simples ou complexo.

Como recurso metodológico segundo Artigue (1996), possui quatro fases de acontecimento: análises prévias; concepção e análise a priori de experiências pedagógicas que serão desenvolvidas no ambiente escolar, com foco no ensino de matemática; implementação da experiência; análise a *posteriori* e validação da

experiência. Essa metodologia pode ser utilizada em pesquisas que buscam estudar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos ao um determinado conceito matemático.

Uma pesquisa quando se utiliza da Engenharia Didática pode-se identificar as fases de desenvolvimento descritas anteriormente. A primeira fase é onde se realiza as análises prévias do assunto a ser pesquisado, Coutinho e Almouloud (2008), descrevem as vertentes no qual pode-se enquadrar a primeira fase.

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho. (COUTINHO e ALMOULOU, 2008, p.66)

A análise prévia possibilita o pesquisador identificar todos os recursos que serão utilizados e desenvolvidos durante as outras fases dessa metodologia.

A segunda fase é caracterizada pela a análise a priori, que objetiva determinar na pesquisa as escolhas realizadas que serão usadas como parâmetros permitindo controlar e prever os possíveis comportamentos dos alunos ao experimento que será proposto. Coutinho e Almouloud (2008) citam alguns objetivos que deve conter a análise a priori.

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida;
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (COUTINHO e ALMOULOU, 2008, p.67).

A terceira fase, a experimentação, é o período em que se expõe e se aplica o produto construído, de forma que pode ocorrer a necessidade de correções quando feitas as análises durante o desenvolvimento do experimento, visto que, se houver a necessidade de correções deve-se fazer o retorno da análise a priori como um método de complementação das análises.

A quarta e última fase da metodologia há uma análise a *posteriori*, onde após a experimentação, são recolhidos os dados e observações realizadas durante as sessões pré estabelecidas para o ensino do tópico abordado, juntamente com todas as produções dos alunos em sala de aula ou em ambiente externo. Durante a análise a *posteriori* são expostos os resultados que são obtidos durante a experimentação, com o objetivo de contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem do aluno e também contribuir para melhoria da formação dos docentes.

O conjunto de fases no processo da Engenharia Didática, segundo Artigue (1988), é retomado e aprofundado ao longo da pesquisa, não quer dizer que após finalizar uma fase para prosseguir com a seguinte não haverá a necessidade dessas retomadas, visto que, as análises prévias e análises a priori podem sofrer intervenções e modificações durante o processo dos experimentos, pois devemos levar em consideração o processo intelectual de cada indivíduo, e são esses processos analisados que são levados em consideração para a avanço do ensino de matemática.

2.5 Geometria espacial de posição

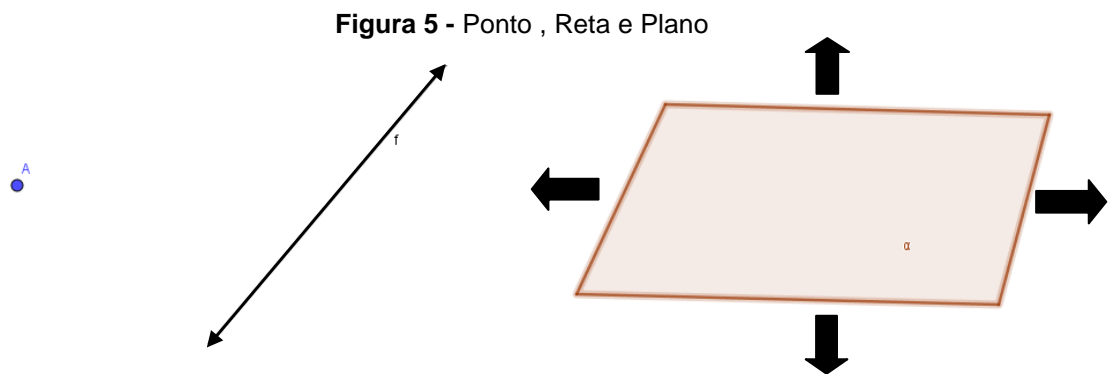
Neste tópico abordaremos os tópicos matemáticos e geométricos do tema central, que serão investigados através da construção e aplicação de uma sequência didática, com o objetivo de potencializar o ensino e aprendizagem do aluno em geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano.

2.5.1 Entes Geométricos e primeiros postulados

A Geometria que será abordada é a geometria Euclidiana, constituída por Euclides (300.AC), em sua obra Os Elementos, em que são destacados os primeiros entes geométricos (ponto, reta e plano) no qual essa geometria é constituída. Não

precisam ser definidos. E a partir deles temos os postulados (ou axiomas) que tomamos como verdades lógicas, para depois construímos todas as propriedades e teoremas que embasam essa geometria. Como base dos tópicos abordados, das demonstrações e dos conceitos, utilizamos como referência Dolce (1993).

Os entes geométricos que vamos apresentar são o ponto, a reta e o plano, como são elementos primitivos da Geometria, os mesmos são adotados sem definição.



Fonte: Autor (2019)

O ponto é um elemento que não possui dimensão, mas é representado graficamente, como na figura 5, e podemos representar por uma letra maiúscula do nosso alfabeto; A reta é representado graficamente, como na figura 5, e podemos representar por uma letra minúscula do nosso alfabeto e sendo ela infinita nos dois sentidos; O plano não possui fronteiras, mas também é representado graficamente como está exposto na figura 5 e representado por uma letra do alfabeto grego.

A geometria espacial de posição é constituída através desses entes geométricos e suas construções, podemos definir o espaço como o conjunto de todos os pontos.

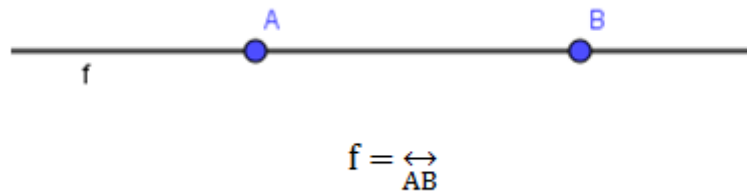
Assim, iniciaremos o estudo da geometria espacial de posição através de alguns postulados que estão relacionados com o ponto, a reta e o plano.

i. Postulado da existência

- a) Em uma reta existe infinitos pontos, tanto sobre a reta, como externo a ela.
- b) Em um plano existe infinitos pontos, tanto sobre o plano, como externo a ele.

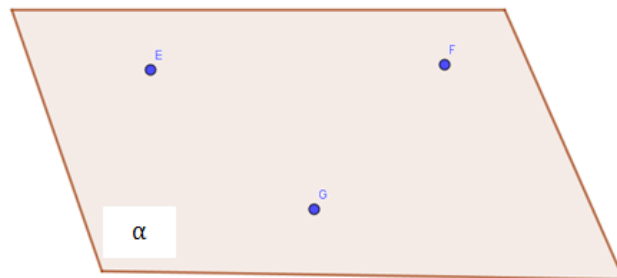
ii. Postulado da determinação

- a) Dois pontos distintos determina uma única reta que passa sobre eles.

Figura 6 - Postulado da determinação

Fonte: Autor (2019).

b) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa sobre eles.

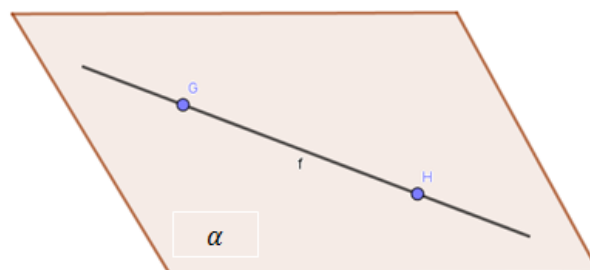
Figura 7 - Postulado da determinação

$$\alpha = (E, G, F)$$

Fonte: Autor (2019)

iii. Postulado da Inclusão

Se dois pontos estão determinam uma reta, e esses pontos estão contidos em um plano, então a reta também está contida no plano.

Figura 8 - Postulado da inclusão

$$(G \neq H, f = GH, G \in \alpha, H \in \alpha) \Rightarrow f \subset \alpha$$

Fonte: Autor (2019)

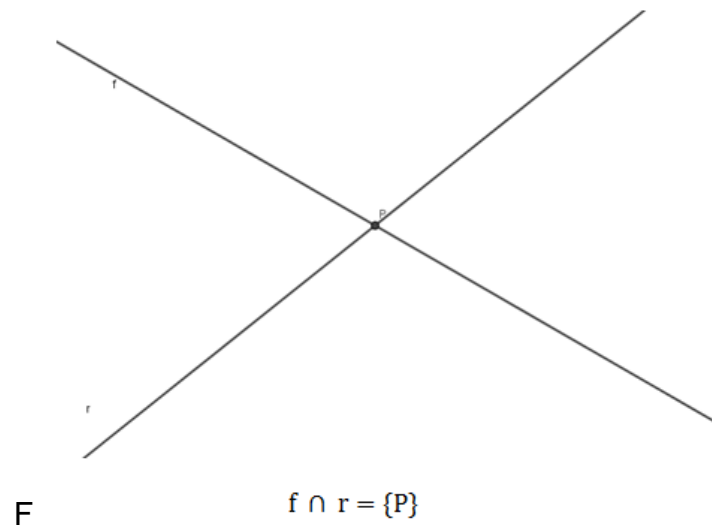
2.5.2 Posição relativa entre duas retas

Sejam r e f duas retas quaisquer, podem ser:

a) Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes, se, e somente se, elas possuem um único ponto de interseção.

Figura 9 - Retas Concorrentes

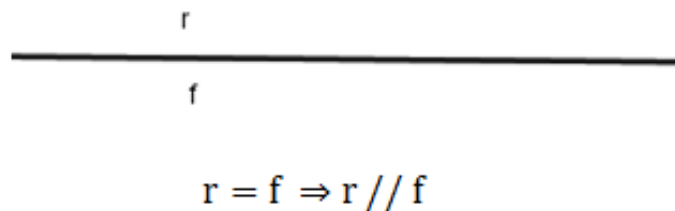


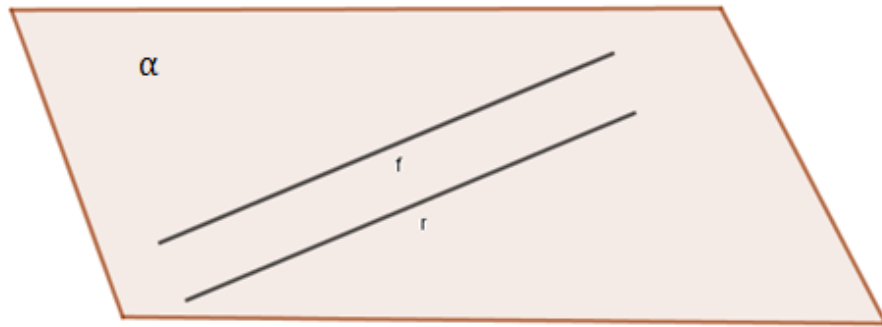
Fonte: Autor (2019)

b) Retas paralelas

Duas retas são paralelas, se e somente, ou são coincidentes ou são coplanares sem possuir nenhum ponto de interseção.

Figura 10 - Retas Paralelas





$$(f \subset \alpha, r \subset \alpha \text{ e } f \cap r = \emptyset) \Rightarrow f // r$$

Fonte: Autor (2019)

2.5.3 Determinação do Plano

Apresentaremos os quatro modos em que se determina um plano.

a) A partir de três pontos não colineares.

Esse primeiro modo é postulado, então consideramos como verdade, observado na figura 7.

b) Teorema 1: Determinação do Plano a partir de uma reta e um ponto externo a ela.

Se uma reta e um ponto externo a ela, ou seja, esse ponto não pertence a reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam P um ponto externo a r, e r uma reta qualquer determinados pelos pontos A e B, temos:

A, B e P pontos não colineares e utilizando o postulado da existência (ii), então A, B e P determinam um plano α.

Logo,

$\alpha = (A, B, P)$ então $A \subset \alpha$, $B \subset \alpha$ e $P \subset \alpha$

$A \neq B$; A e $B \in r$, implica que, $r \subset \alpha$. (1)

Podemos concluir que existe pelo menos o plano α construído por r e P.

Sejam r e P, a reta e o ponto externo a ela que determina o plano α, provemos que α é o único plano determinado.

Tomamos a existência de α e α' por r e P , temos que:

$\alpha = (r, P)$ e $A, B \in r$, implica que, $\alpha = (A, B, P)$

$\alpha' = (r, P)$ e $A, B \in r$, implica que, $\alpha' = (A, B, P)$,

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e P . (2)

Concluimos a partir de (1) e (2) que : $\exists \mid \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

■

c) Teorema 2: Determinação do Plano a partir de duas retas concorrentes.

Se duas retas são concorrentes, então as mesmas, determinam um único plano que as contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam r e s duas retas concorrentes, P o ponto em comum, tomemos dois, um ponto A em r e um ponto B em s , sendo esses pontos diferentes de P .

Sendo A, B e P pontos não colineares e utilizando o postulado da existência (ii), então A, B e P determinam um plano α .

Então,

$\alpha = (A, B, P)$; $A, P \in r$ e $A \neq P$, implica que, $r \subset \alpha$

$\alpha = (A, B, P)$; $B, P \in s$ e $B \neq P$, implica que, $s \subset \alpha$

Logo, pode existir pelo menos o plano α determinado pelas retas concorrentes r e s . (1)

Sejam r e s , as retas concorrentes e P o ponto em comum, que determina o plano α , provemos que α é o único plano determinado.

Tomamos a existência de α e α' por r e s , retas concorrentes, temos que:

$\alpha = (r, s)$ e $A, P \in r$; $B, P \in s$, com $A \neq B \neq P$, implica que, $\alpha = (A, B, P)$

$\alpha' = (r, s)$ e $A, P \in r$; $B, P \in s$, com $A \neq B \neq P$, implica que, $\alpha' = (A, B, P)$

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e s concorrentes. (2)

Concluimos a partir de (1) e (2) que : $\exists \mid \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

■

d) Teorema 3: Determinação do Plano a partir de duas retas paralelas.

Se duas retas são paralelas, de forma distinta, então as mesmas determinam um único plano que as contém.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam r e s retas paralelas e $r \neq s$ então temos que:

Por definição de retas paralelas, existe um plano α passando por r e s , pois as mesmas por definição, são coplanares. (1)

Tomamos a existência de α e α' por r e s , retas paralelas, e sejam os pontos A e $B \in r$, com $A \neq B$ e o Ponto $P \in s$, temos que:

$\alpha = (r, s); A, B \in r$, com $A \neq B$ e $P \in s$, implica que, $\alpha = (A, B, P)$

$\alpha' = (r, s); A, B \in r$, com $A \neq B$ e $P \in s$, implica que, $\alpha = (A, B, P)$

Então implica que, $\alpha = \alpha'$.

Logo, existe apenas um único plano determinado por r e s paralelas. (2)

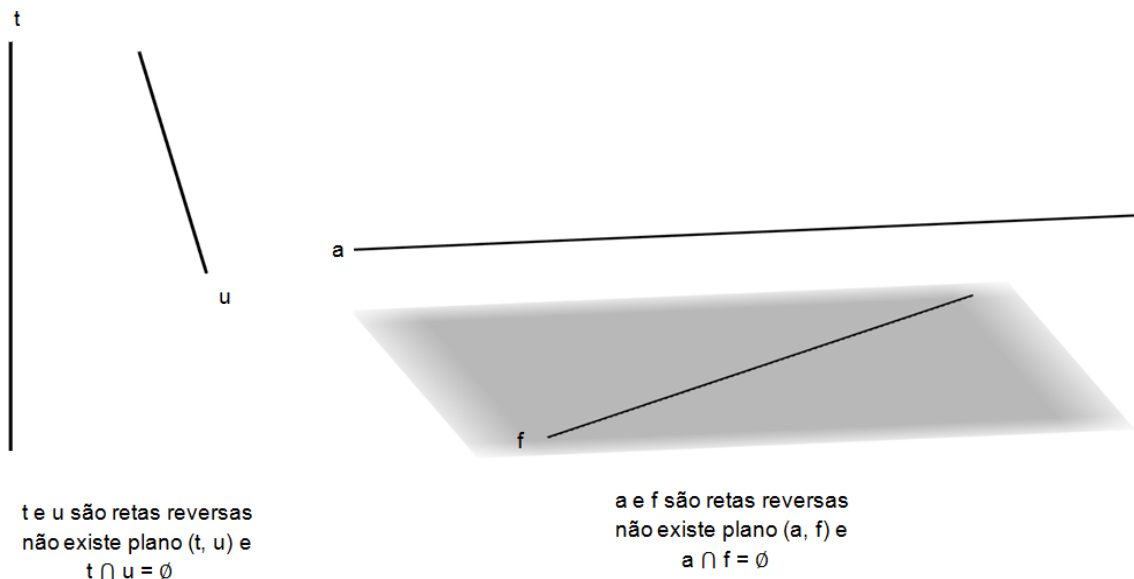
Concluimos a partir de (1) e (2) que : $\exists \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$.

■

2.5.4 Definição de retas reversas

Podemos considerar duas retas reversas se, e somente se, elas não possuem nenhum plano que as contenha e não são paralelas entre si.

Observando a figura 11, temos a exemplificação dessa definição.

Figura 11 - Retas Reversas

Fonte: Autor (2019)

2.5.5 Postulado da Interseção e planos secantes

O postulado da interseção nos diz que se existe dois planos distintos com um ponto em comum, então existe pelo menos outro ponto em comum.

O teorema da interseção nos diz que se existe dois planos distintos com um ponto em comum, então a interseção desses planos será única reta que passa pelo ponto em comum.

Demonstração:

A demonstração será dividida em duas partes, pois uma irá tratar da parta da existência e a outra parte irá tratar da unicidade.

Sejam dois planos α e β , e o ponto P sendo comum aos dois planos, temos que:

$\alpha \neq \beta$, com $P \in \alpha$ e $P \in \beta$, implica que, $\exists Q \neq P, Q \in \alpha$ e $Q \in \beta$ (Postulado da intercessão).

Se o que esta descrito acima for verdadeiro, implica que, $\exists i \mid i = PQ, i \subset \alpha$ e $i \subset \beta$ (Postulado da existência da reta).

Logo a reta i determinada pelos os pontos P e Q é comum aos planos.

Para demonstrarmos a unicidade, utilizaremos a técnica de demonstração chamada redução por absurdo.

Supondo que exista um ponto X tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$, temos que:

Como $X \notin i$ e pelo teorema 1, temos um plano γ tal que $\gamma = (X, i)$. Então podemos observar que:

$i \subset \alpha$, $X \in \alpha$, $\gamma = (i, X)$, implica que, $\gamma = \alpha$ (1)

$i \subset \beta$, $X \in \beta$, $\gamma = (i, X)$, implica que, $\gamma = \beta$ (2)

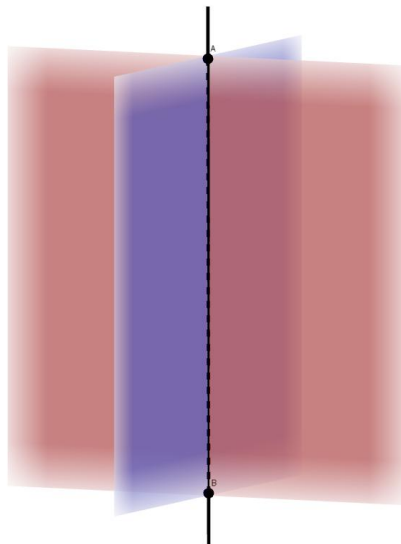
Comparando (1) e (2) temos que $\alpha = \beta$ e esses planos coincidem com o plano γ , o que se caracteriza um absurdo, pois a hipótese nos mostra que $\alpha \neq \beta$.

Logo, a reta i é a interseção dos planos α e β .

■

Dois Planos são secantes, quando os mesmos apresentam uma reta em comum, essa reta chamamos de interseção desses planos.

Figura 12 - Planos secantes



Fonte: Autor (2019)

2.5.6 Paralelismo de retas

Como já foi definido anteriormente (2.5.2), duas retas são paralelas quando são coincidentes ou quando não possuem nenhum ponto de interseção. Euclides apresentou em sua obra um postulado sobre o paralelismo.

Postulado: Por um ponto A fora de uma reta dada r passa uma única reta paralela s a essa reta dada.

Podemos também definir e demonstrar uma propriedade chama transitividade do paralelismo de retas.

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então todas as retas são paralelas entre si.

Demonstração:

Sejam três retas distintas e não coplanares r , s e t , temos que:

Pelo postulado das paralelas podemos concluir que r e s não possuem nenhum ponto de interseção.

Pelo teorema 3, as retas s e t determinam um plano β , r e t determinam um plano α , então $t = \alpha \cap \beta$.

Seja um ponto P em s , teremos por definição um plano γ , tal que, $\gamma = (r, P)$.

Os planos α e γ , que são distintos, possuem o ponto P em comum, então tomemos uma reta comum x , tal que:

$r = \beta \cap \gamma$, $x = \alpha \cap \gamma$, $c = \alpha \cap \beta$ e $r \parallel t$, implica que, $r \parallel x$ e $t \parallel x$

Como o ponto P pertence a ambas as retas s e x e as mesmas são paralelas à reta t , podemos concluir, pelo postulado das paralelas que $x = s$.

Então $r \parallel x$ e $x = s$, temos que $r \parallel s$.

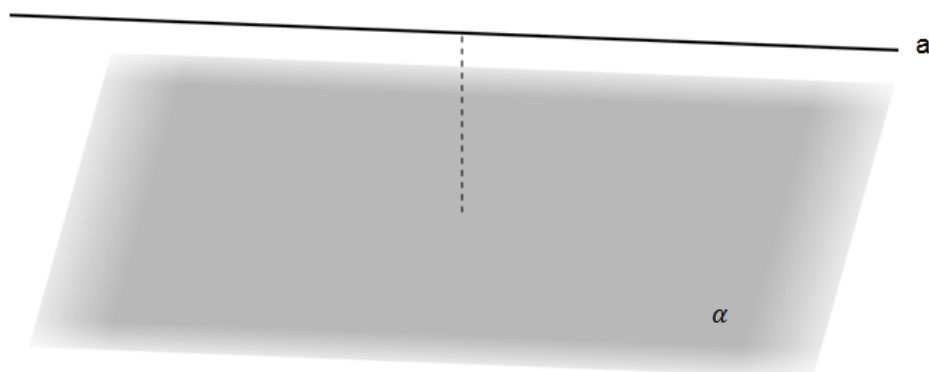
■

2.5.7 Paralelismo entre a retas e planos

Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, não possuem nenhum ponto de interseção.

$a \parallel \alpha$ se, e somente se, $a \cap \alpha = \emptyset$.

Figura 13- Reta "a" paralela ao plano α



Fonte: Autor (2019)

Para ocorrer a existência de retas e planos paralelos, faremos a demonstração de duas condições: a condição suficiente, a condição necessária.

a) Condição Suficiente

Se uma reta não está contida num plano qualquer e é paralela a uma outra reta que está contida nesse plano, então ela é paralela ao plano.

Demonstração:

Sejam a e b retas paralelas, e b esta contida em um plano α , temos que:

$a \parallel b$, $a \cap b = \emptyset$, implica que, $\exists \beta = (a, b)$

$b \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$, implica que $b = \alpha \cap \beta$

Seja um ponto P , comum a reta a e o plano α , tal que:

$P \in a$ e $a \subset \beta$, implica que, $P \in \beta$

Se $P \in \beta$ e $P \in \alpha$, então $P \in a$ e $P \in b$, o que é absurdo, pois $a \cap b = \emptyset$.

Logo, a reta a e o plano α não tem pontos em comum, então a e α são paralelos.

■

b) Condição Necessária

Se uma reta é paralela a um plano, então uma reta contida nesse plano também é paralela a ela.

Demonstração:

Seja uma reta a , paralela a um plano α , temos que:

Se conduzimos pela reta a , um plano β que intercepta α em uma reta b , teremos a e b coplanares, pois estão em β , porém não possuem pontos em comum, então:

$a \cap \alpha = \emptyset$, $b \subset \alpha$, implica que, $a \cap b = \emptyset$. Logo, as retas a e b são paralelas.

■

2.5.8 Posições relativas entre uma reta e um plano

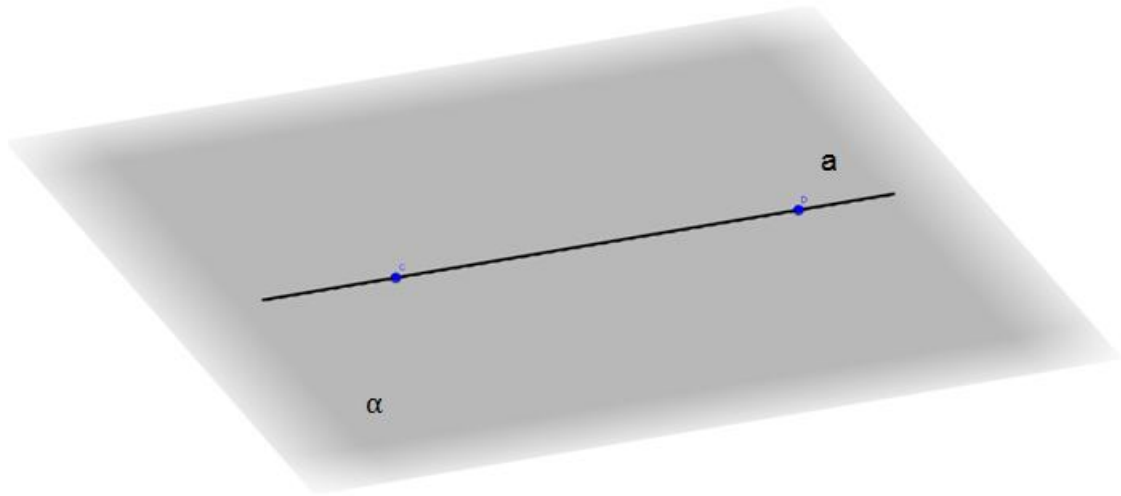
Uma reta e um plano podem assumir três posições relativas.

a) Reta contida no Plano

Ocorre quando a reta e o plano possuem ao mínimo dois pontos em comum.

$a \subset \alpha$, então $a \cap \alpha = a$.

Figura 14 - Reta contida no plano



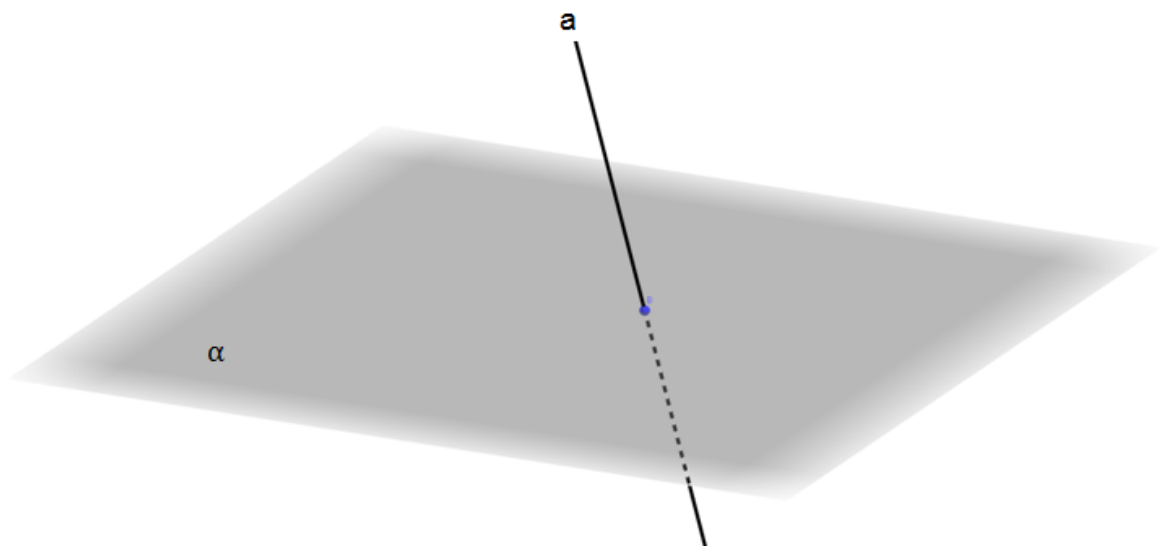
Fonte: Autor (2019)

b) Reta secante ao Plano

Ocorre quando a reta e o plano possuem apenas um ponto em comum.

$$a \cap \alpha = B.$$

Figura 15 - Reta secante ao Plano



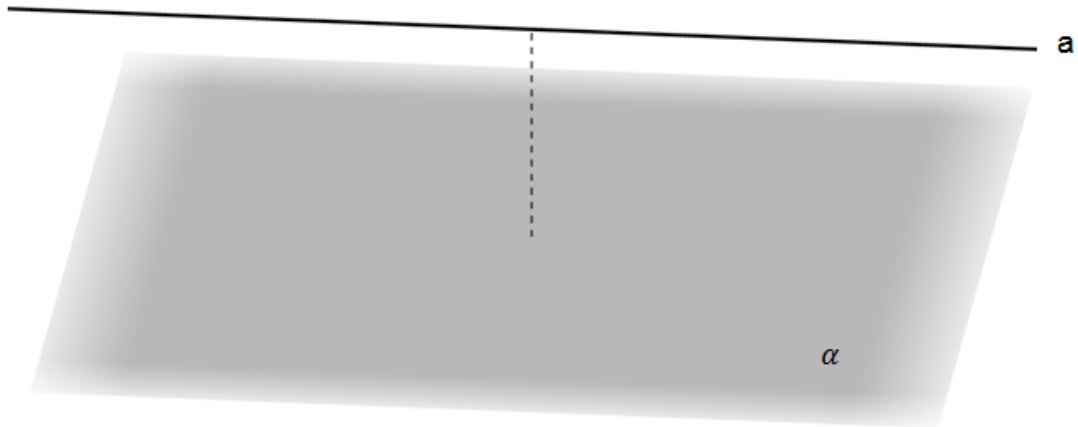
Fonte: Autor (2019)

c) Reta paralela ao Plano

Ocorre quando a reta e o plano não possuem nenhum ponto em comum.

$$a \cap \alpha = \emptyset.$$

Figura 16 - Reta paralela ao plano

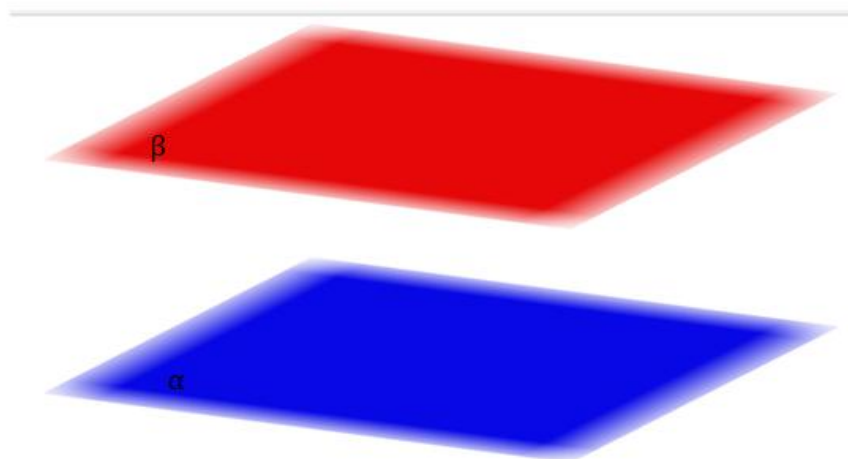


Fonte: Autor (2019)

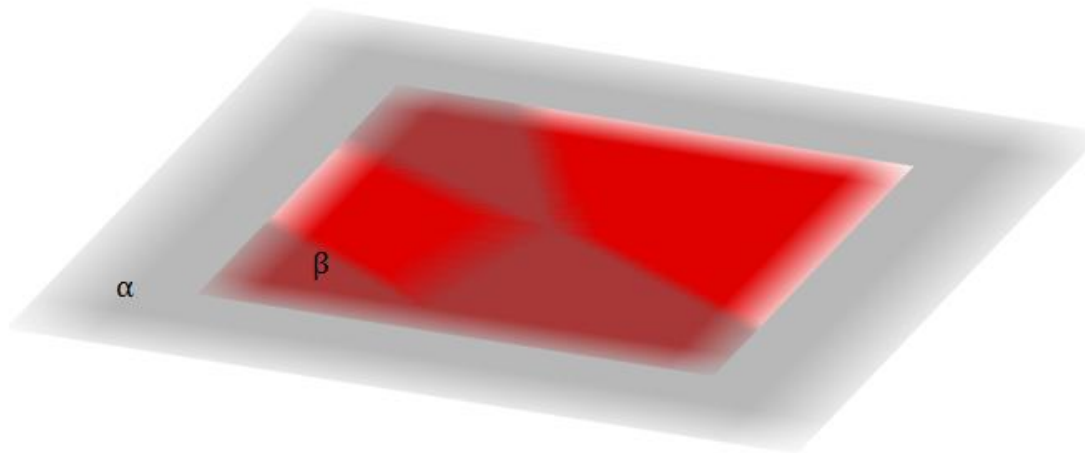
2.5.9 Paralelismo entre os planos

Dois planos são considerados paralelos entre si se, e somente se, eles não possuírem nenhum ponto em comum ou os planos sejam coincidentes.

Figura 17 - Planos Paralelos



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$



$$\alpha = \beta$$

Fonte: Autor (2019)

Para ocorrer a existência entre planos paralelos, faremos a demonstração de duas condições: a condição suficiente, a condição necessária.

a) Condição Suficiente

Se um plano contém duas concorrentes, e essas retas são paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Demonstração:

Seja os planos α e β distintos, e as retas a e b concorrentes e contidas em α . Se considerarmos uma reta i tal que $i = \alpha \cap \beta$, temos que:

$a // \alpha$, $a \subset \beta$ e $i = \alpha \cap \beta$, implica que, $a // i$

$b // \alpha$, $b \subset \beta$ e $i = \alpha \cap \beta$, implica que, $b // i$

Porém o as retas a e b por hipótese são concorrentes, e se ambas forem paralelas a i é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas. Logo, os planos α e β não possuem pontos em comum, então $\alpha // \beta$.

■

b) Condição Necessária

Se dois planos distintos são paralelos, e se um deles contém duas retas concorrentes, então essas retas são paralelas ao plano que não os contém.

A demonstração que prova a condição necessária é similar a demonstração da condição suficiente, com isso, a condição necessária se torna também suficiente.

2.5.10 Posição relativa entre dois planos

As posições entre dois planos foram expostas e seus teoremas de existências foram demonstradas nos tópicos anteriores, nesse ultimo tópico faremos um resumo expondo as três posições.

a) Planos Coincidentes:

São dois planos que não possuem nenhum ponto em comum e são iguais.

$$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$

b) Planos Paralelos distintos

São dois planos que não possuem nenhum ponto em comum.

$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

c) Planos secantes

São dois planos que possuem uma reta em comum.

$$\alpha \cap \beta = i$$

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Está pesquisa é de natureza experimental, pois queremos determinar o impacto da construção e aplicação de uma sequência didática no ensino e aprendizagem dos alunos do 3º Ano do ensino médio em geometria espacial de posição, com ênfase no ensino de reta e plano à luz da Engenharia Didática. Segundo Fonseca (2002), a pesquisa experimental:

[...] seleciona grupos de assuntos coincidentes, submete-os a tratamentos diferentes, verificando as variáveis estranhas e checando se as diferenças observadas nas respostas são estatisticamente significantes. [...] Os efeitos observados são relacionados com as variações nos estímulos, pois o propósito da pesquisa experimental é apreender as relações de causa e efeito ao eliminar explicações conflitantes das descobertas realizadas. (FONSECA, 2002, p.38)

Quanto à abordagem, esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa, que segundo Neves (2015), a pesquisa qualitativa tem como objetivo:

[...] de revelar os mistérios que permeiam o cotidiano escolar, identificando processos que, muitas vezes, devido ao fato de se tornarem parte da rotina de uma determinada realidade escolar, passam despercebidos pelos próprios envolvidos na pesquisa. (NEVES, 2015, p.17).

Vamos buscar compreender as relações entre alunos diante do experimento aplicado e em todo o processo de construção do conhecimento.

A metodologia utilizada será a Engenharia Didática, por isso o processo está sendo dividido em fases. As análises prévias estabelecidas constituíram em uma revisão de estudos, buscando pesquisas anteriores que abordassem o tema central da pesquisa, geometria espacial de posição, observando os processos e abordagens utilizados pelos autores na construção de suas pesquisas, e também observando os resultados obtidos.

Também buscamos através de pesquisas prévias, entender como processo de ensino e aprendizagem do nosso tema está sendo abordado no ambiente escolar, para isso, primeiramente foi feita uma pesquisa com uma amostra de 25 professores do ensino regular público, em que procuramos identificar o perfil desses professores e quais métodos eles aplicam em seus alunos no cotidiano do ambiente

escolar, bem como um questionário contendo questões contemplando os tópicos que serão abordados, para uma análise sobre as possíveis dificuldades dos alunos.

Após a pesquisa com os professores, foi feita uma pesquisa com alunos do 3º Ano do ensino médio da escola pública do município de Belém no estado do Pará, obtivemos uma amostra de 100 alunos de três turmas, cujo o objetivo foi analisar as dificuldades dos alunos em geometria de posição envolvendo o ensino de reta e plano. Esses dados foram analisados, tabulados, e também feito um cruzamento de dados com a pesquisa dos professores como forma de identificar como está a aprendizagem desses alunos na área geométrica.

Para a construção da análise *a priori*, buscamos fazer uma revisão bibliográfica na busca teóricos que contribuíssem no desenvolvimento das atividades propostas, cada atividade elaborada propõe abordar propriedades e postulados da geometria de posição, que como foi observado nas pesquisas anteriores, é repassado de forma intuitiva e direta, sem instigar os alunos a explorar esses conceitos.

Na experimentação, será desenvolvida uma sequência didática utilizando o geogebra como ferramenta didática, com o objetivo de facilitar o ensino e aprendizagem dos alunos em geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. Porém antes de ser aplicada a sequência, será feito uma oficina de introdução ao uso do *software* geogebra com os alunos do 3º Ano do ensino médio de uma escola pública, para que os mesmo se familiarizem com a utilização dessa tecnologia, levando em consideração os conhecimentos prévios de cada indivíduo.

Ao final será aplicado um teste para análise *a posteriori*, em que serão feitos cruzamentos de dados de toda a pesquisa, buscando analisar como essa sequência auxiliou no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e as possíveis lacunas que ainda precisam ser superadas.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Zabala (1998, p.18), a sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.Essas atividades são ligadas entre si com o objetivo de ensinar um conteúdo definido.

A organização das atividades deve ser feita através de um planejamento de acordo com os objetivos que o professor visa obter para alcançar a aprendizagem de seus alunos. Para que essa aprendizagem ocorra, é indispensável que essas atividades sejam práticas, lúdicas ou diferenciadas, de forma que o nível de dificuldade de cada questão seja elevado gradativamente, estimulando os alunos para conquistar cada desafio proposto e proporcionar a construção do conhecimento.

Zabala (1998) destaca que a construção de uma sequência didática com foco e objetivos claros, torna-se um caminho assertivo para a busca de melhoras nas praticas pedagógicas educativas. Com isso, o centro do interesse ao construirmos uma sequência didática deve ser o aluno, então temos que levar em consideração as vivências do cotidiano e os conhecimentos anteriores para podemos instiga-los na busca da compreensão e desenvolvimento da aprendizagem significativa.

Em concordância Dolz e Schneuwly (2004) dizem que as sequências didáticas são instrumentos que auxiliam o professor no direcionamento de suas aulas e nas possíveis intervenções pedagógicas.

Para Pais (2002, p.102) “Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”.

Nesta busca de ferramentas para potencializar o ensino e aprendizagem do aluno, esta pesquisa apresenta uma sequência didática com o objetivo apresentar um conjunto de atividades para o auxilio do ensino de geometria de posição, com ênfase no ensino de reta e plano. O conjunto de atividades é composto de 15 atividades em forma de uma sequência, utilizando o geogebra, para o auxilio no ensino das definições, propriedades e postulados dos entes geométricos. Algumas das atividades desenvolvidas seguem como referência Sá (2009).

As atividades de 1 a 3 foram pensadas afim de proporcionar o conhecimento sobre o postulado da existência, a atividade 4 sobre o postulado da existência da reta, atividades de 5, 6 e 7 destaca as posições relativas entre duas retas, atividades 8 a 10 proporcionam o conhecimento sobre o postulado da determinação do plano, atividades 11 e 12 a noção espacial do plano ao não possuir fronteiras e nem tamanho, atividades 13 a 15 contemplam as relações de posicionamento entre retas e planos, e planos e planos. Cada atividade é apresentada com uma análise a priori, em que é proposto os caminhos que os alunos devem seguir para construir o conhecimento geométrico e também o aluno poderá alternar, utilizando o software, entre uma visão 2D e uma visão 3D para desenvolver uma noção espacial através da manipulação das construções propostas.

Atividade 1

Atividade adaptada de Sá (2009)

Título: Retas por um ponto

Objetivo: Estudar a quantidade de retas que passam por um ponto.

Material : Geogebra.


Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de retas que passem por um ponto.

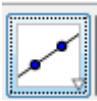
Questões: a) Quantas retas você construiu?

b) Poderia construir mais?

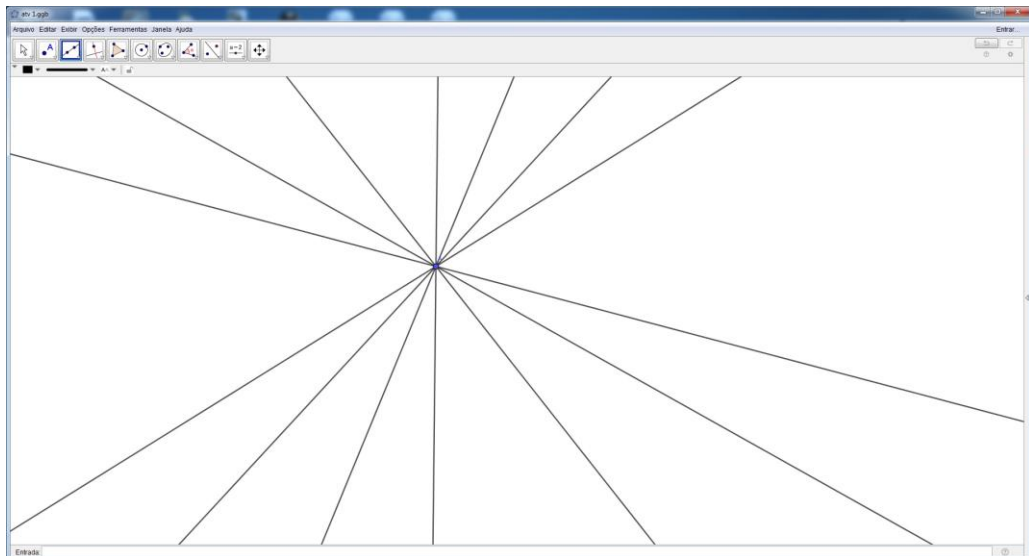
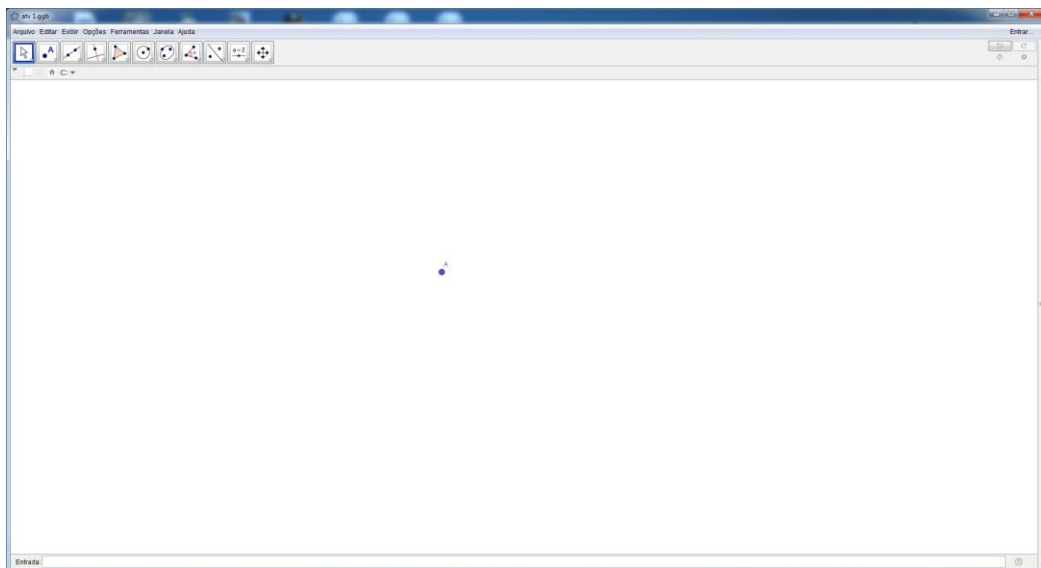
c) Quantas mais?

Conclusão:

Análise a priori: O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e

reta , após construir o ponto na tela do geogebra o aluno deverá marcar retas que passem por esse ponto.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de retas, não conseguindo abstrair o infinito numa figura limitada, devido a algum obstáculo epistemológico de infinito. Não se apropriando do conceito de reta, ponto e plano. Por isso cabe ao professor mediar a socialização entre os alunos sobre as quantidades que um conseguiu marcar, para que durante a socialização siga a definição de que em um ponto passam infinitas retas. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.



Atividade 2

Título: Pontos que existem numa reta

Objetivo: Verificar a quantidade de pontos sobre uma reta.

Material : Geogebra.


Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de pontos sobre a reta.


Questões: a) Quantos pontos você construiu?

b) Poderia construir mais?

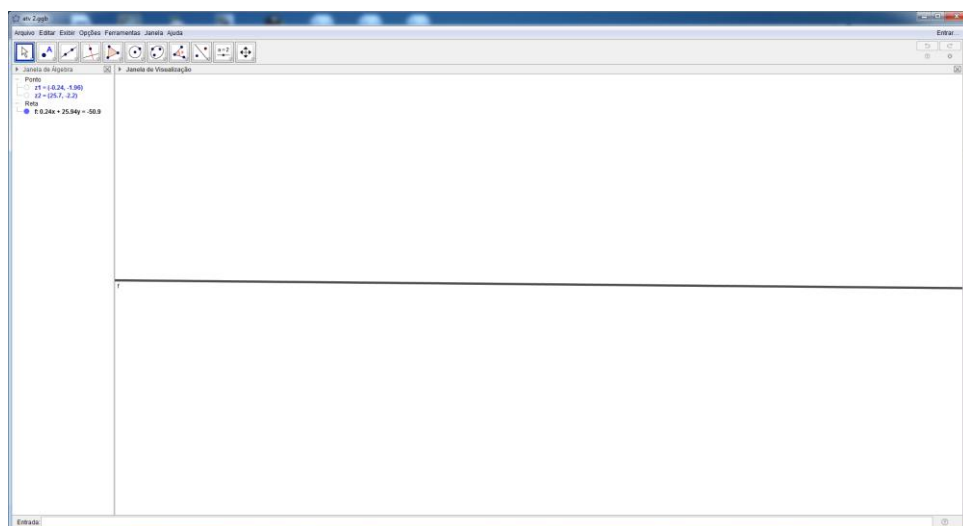
c) Quantos mais?

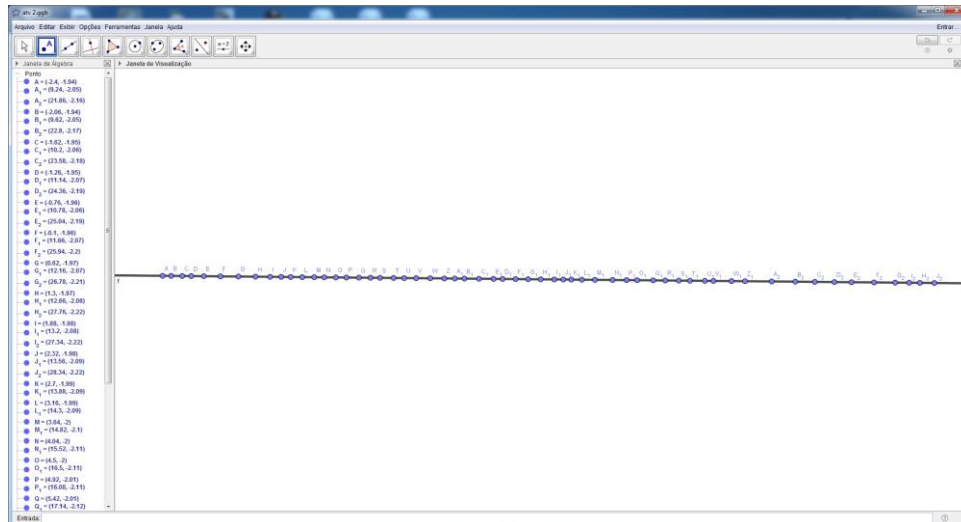
Conclusão:

Análise a priori: O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e

reta , após construir a reta na tela do geogebra o aluno deverá marcar pontos sobre a reta.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos sobre a reta, a partir da socialização entre os alunos sobre as quantidades obtidas deverá aparecer a seguinte definição: sobre uma reta há infinitos pontos. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.





Atividade 3

Titulo: Pontos que existem fora de uma reta

Objetivo: Verificar a quantidade de pontos fora de uma reta.

Material : Geogebra.


Desenvolvimento: Marcar o maior numero possível de pontos fora da reta.


Questões: a) Quantos pontos você construiu?

b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

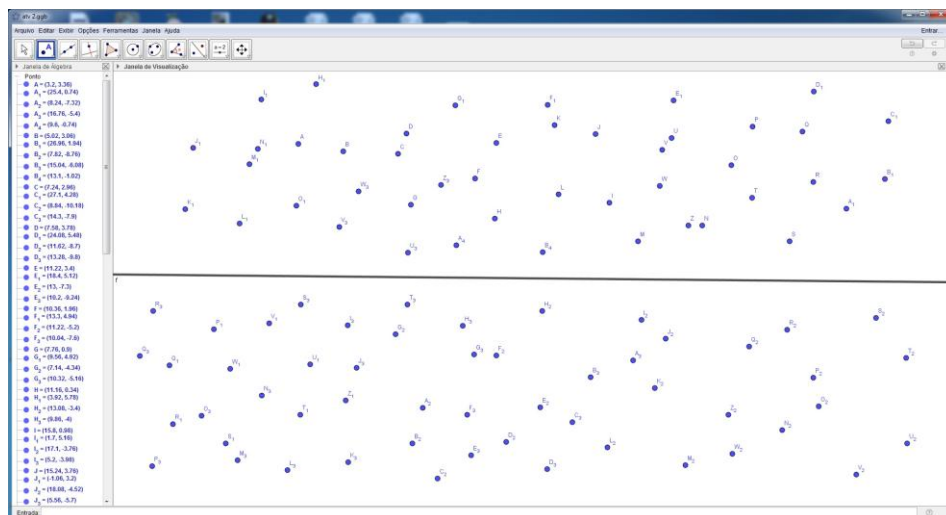
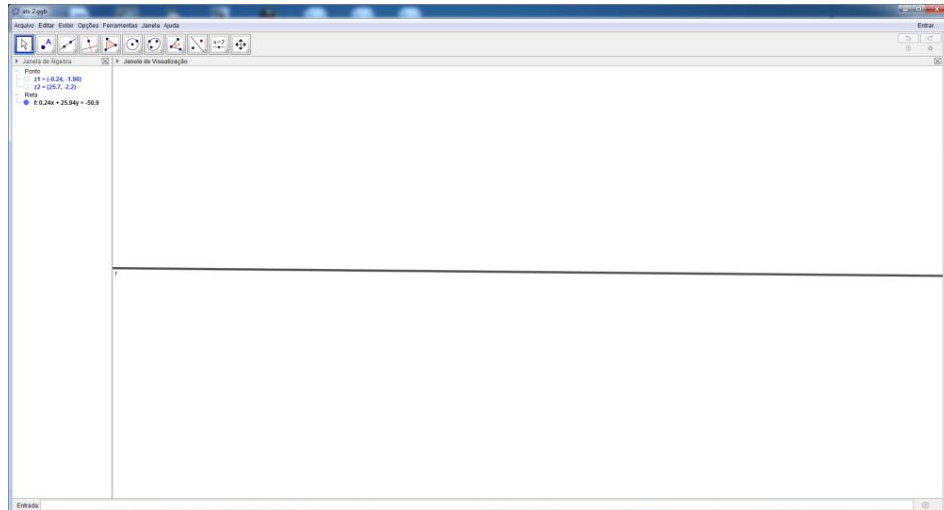
Conclusão:

Análise a priori: O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e

reta , após construir a reta na tela do geogebra o aluno deverá marcar pontos fora da reta.

Provavelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos fora a reta, a partir da socialização entre os alunos sobre as quantidades obtidas deverá aparecer a seguinte definição: fora de uma reta há infinitos pontos. Então o

professor a partir das duas definições obtidas nas atividades 2 e 3, poderá formalizar a definição do postulado da existência de uma reta. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.



Atividade 4

Atividade adaptada de Sá (2009)

Título: Retas por dois pontos

Objetivo: Estudar a quantidade de retas que passam por dois pontos.


Material : Geogebra.

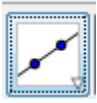
Desenvolvimento: Marcar o maior número possível de retas que passam pelos pontos marcados.

Questões: Marque os Pontos A, B, C, D de forma aleatória e que não estejam alinhados e responda:

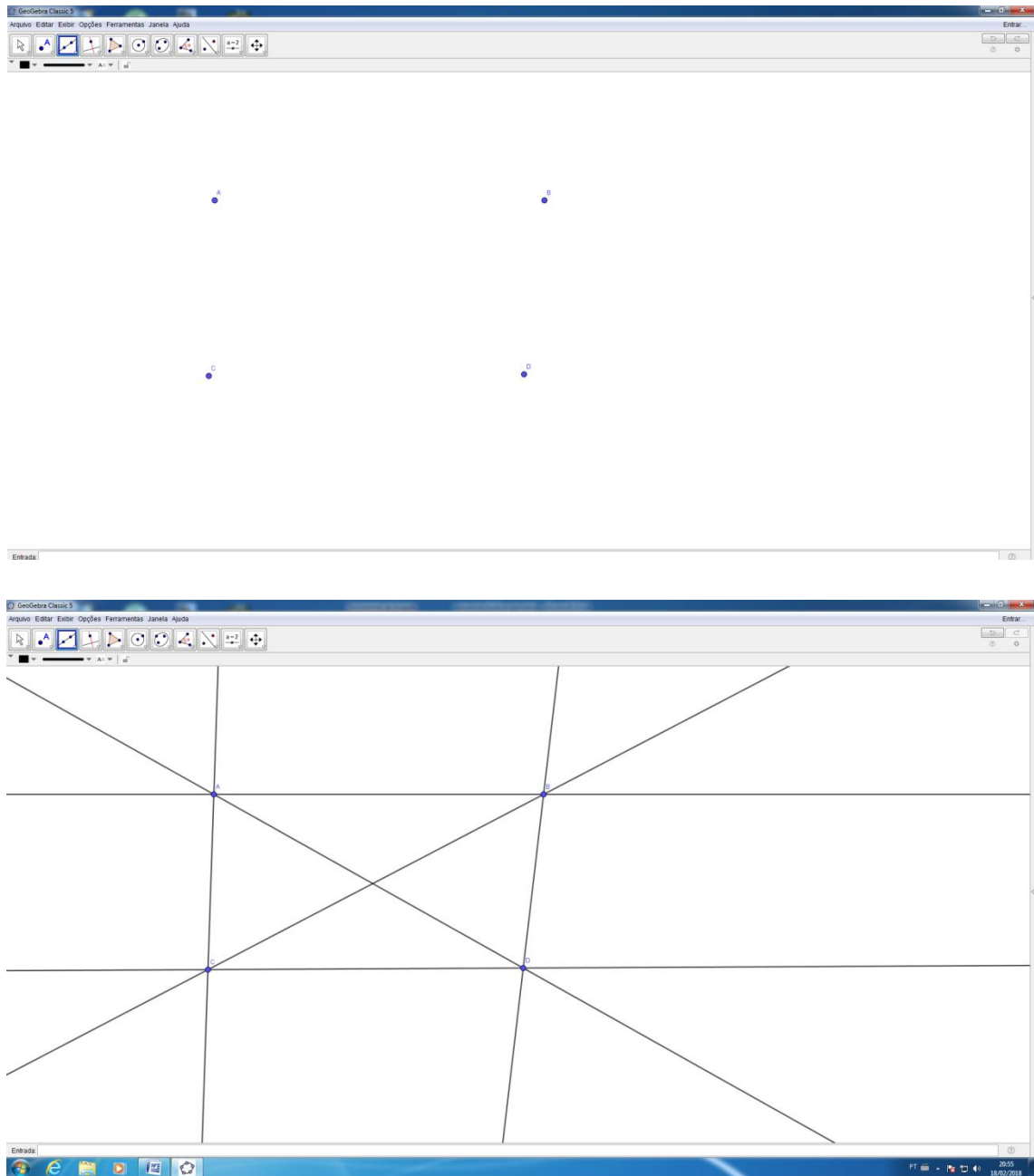
- a) Quantas retas passam pelos pontos A e B?
- b) Quantas retas passam pelos pontos A e C?
- c) Quantas retas passam pelos pontos A e D?
- d) Quantas retas passam pelos pontos B e C?
- e) Quantas retas passam pelos pontos B e D?
- f) Quantas retas passam pelos pontos C e D?

Conclusão:

Análise a priori: O aluno deverá usar as ferramentas do geogebra ponto  e

reta , após marcar os Pontos A, B, C, D, o aluno deverá construir as retas que passa por esses pontos como cada item determina, a partir dessas construções espera-se que o aluno tenha a percepção de que em dois pontos passam uma única reta. Provavelmente o aluno poderia optar em dizer que passam infinitas retas se considera todas as retas que passam pelos pontos A, B, C e D não observando as condições exigidas no comando da questão.

Então o professor a partir das discussões da atividade deve formalizar a definição do postulado da determinação de uma reta. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.



Atividade 5

Título: Posição entre duas retas.

Objetivo: Verificar as relações entre as posições de duas retas

Material : Geogebra.

Desenvolvimento: Visualizar através de uma figura as relações entre os segmentos de reta.

Questões: Qual relação podemos estabelecer entre os segmentos?

a) Figura 1

b) Figura 2

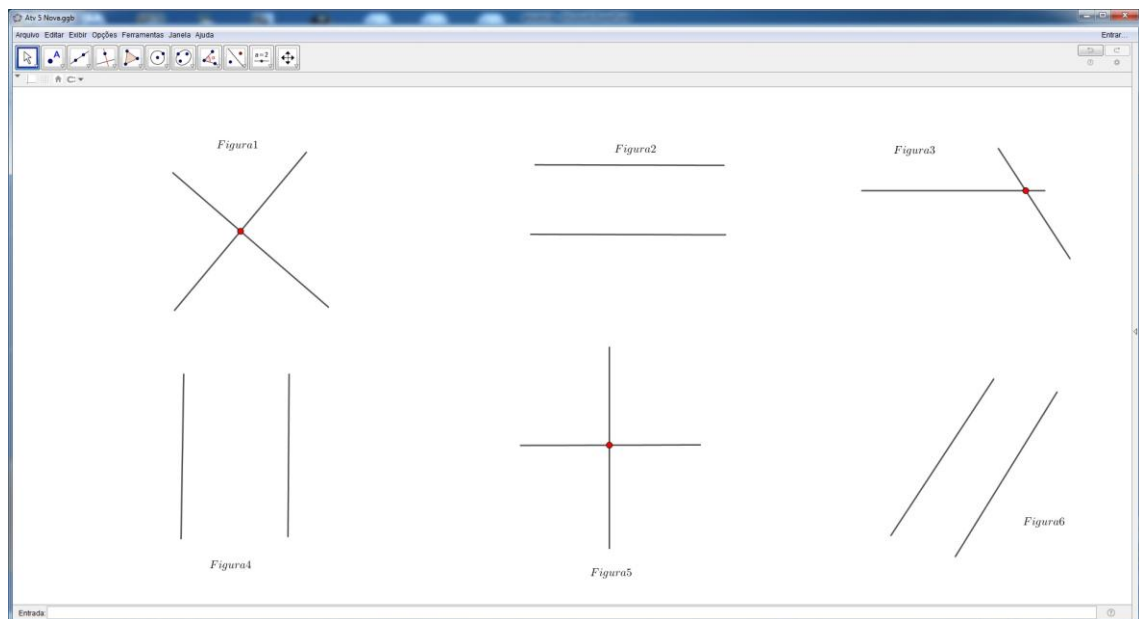
d) Figura 4

e) Figura 5

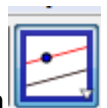
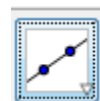
c) Figura 3

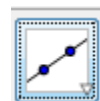
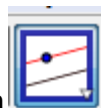
f) Figura 6

Conclusão:





Atividade 6



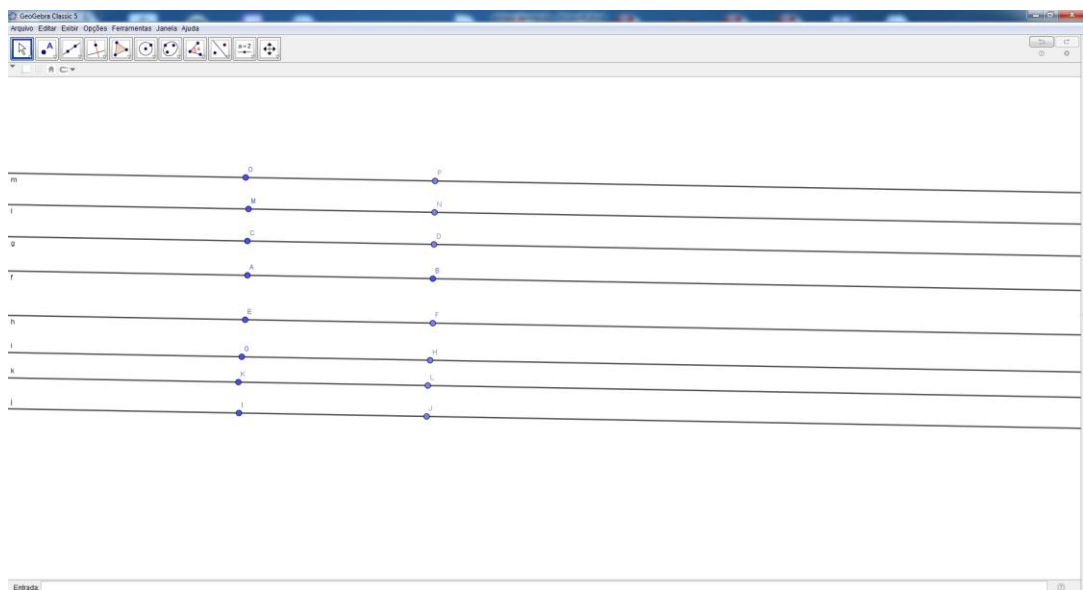
Marque uma reta utilizando a ferramenta  e utilizando a ferramenta , construa outras retas tomando a primeira reta construída como suporte. O que você pode concluir em relação a essas construções?

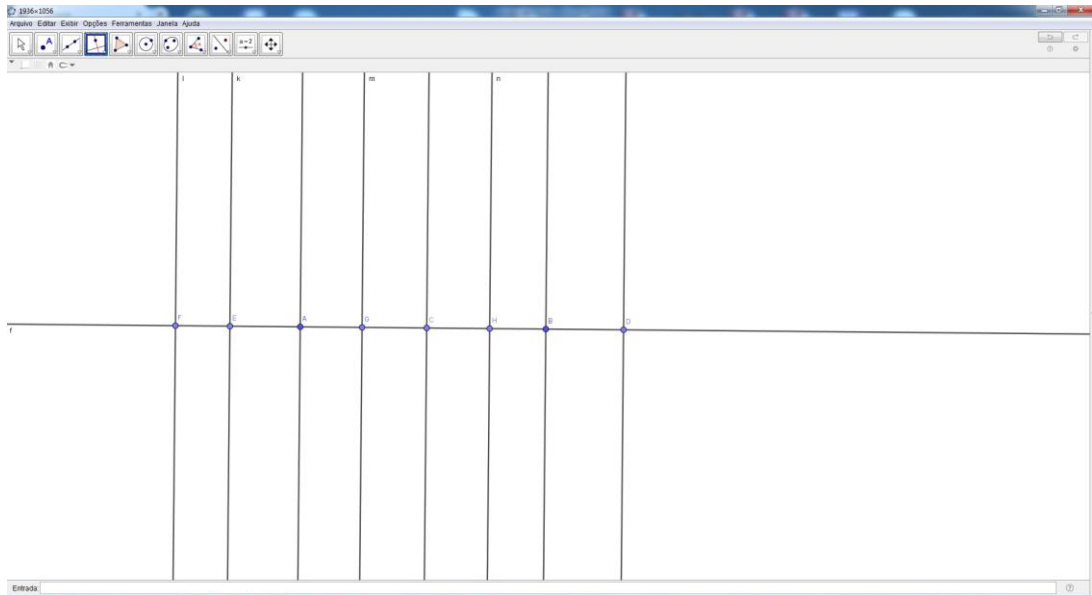
Atividade 7

Marque uma reta utilizando a ferramenta  e utilizando a ferramenta , construa outras retas tomando a primeira reta construída como suporte. O que você pode concluir em relação a essas construções?

Análise a priori: Na atividades 5 os alunos deveram fazer a relação dos segmentos e retas listados, observando em alguns casos os segmentos e as retas se cruzam e um único ponto e em outros casos os segmentos e as retas não possuem pontos em comum. Nas atividades 6 e 7 os alunos devem usar os comandos apresentados e fazer as construções e com base na atividade 5 observar as relações entre a reta suporte e as outras construídas. Com as discussões entre os alunos e o professor sobre as atividades, o professor deverá introduzir os conceitos de retas paralelas e retas concorrentes, também mostrando o caso de retas concorrentes perpendiculares. Com o auxílio do geogebra o professor poderá construir junto com alunos segmentos que passem pelas retas paralelas e mostrar que sempre que as retas forem paralelas, quaisquer segmentos perpendiculares possuem a mesma distância.

As imagens abaixo, respectivamente, ilustram as construções das atividades 6 e 7.





Atividade 8

Titulo: Retas paralelas na construção de um plano

Objetivo: Verificar a determinação de um plano.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano


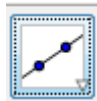
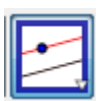

Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir das retas paralelas?

b) Poderia construir mais?

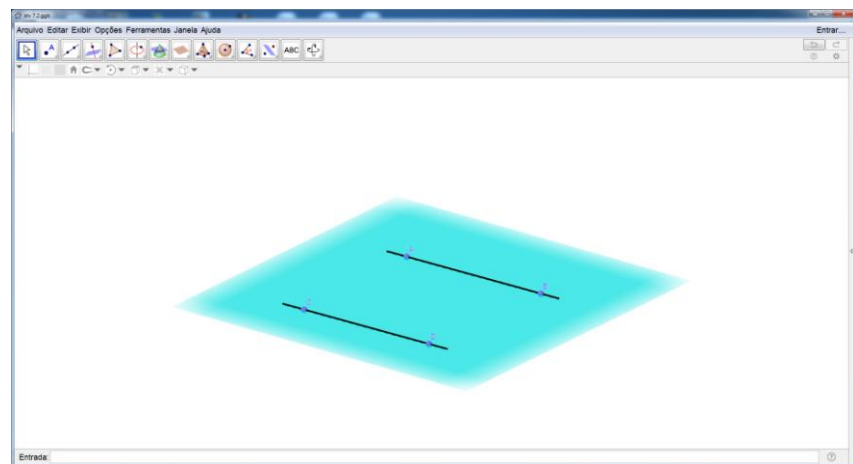
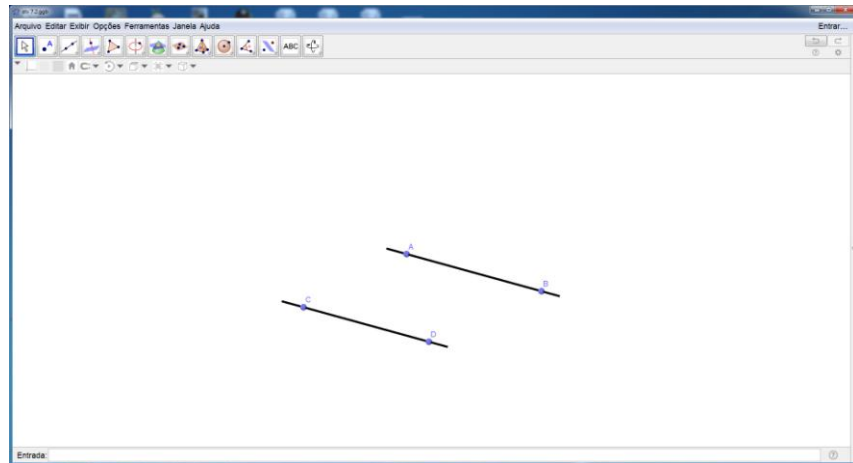
c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a priori: Nesta atividade o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D

, ponto , reta , reta paralela  e plano . Primeiro o aluno deverá marcar uma reta qualquer e um ponto externo a reta, em seguida utilizar a ferramenta reta paralela e marcar a reta e o ponto marcados para a construção da reta paralela a primeira, no final utilizar a ferramenta plano e marcar o plano que passa pelas as duas retas paralelas. Com isso o aluno perceberá que é possível

apenas determinar um único plano que contém as duas retas. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.



Atividade 9

Titulo: Retas concorrentes na construção de um plano

Objetivo: Verificar a existência de um plano.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano.



Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir de duas retas concorrentes?

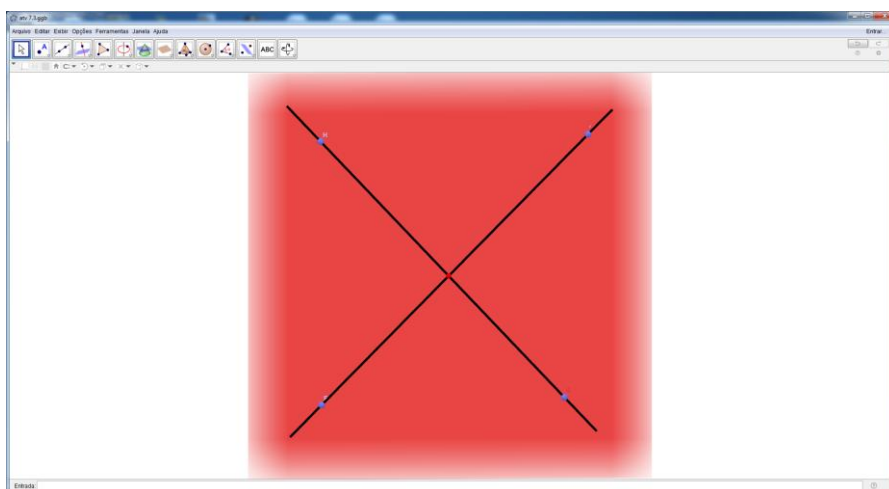
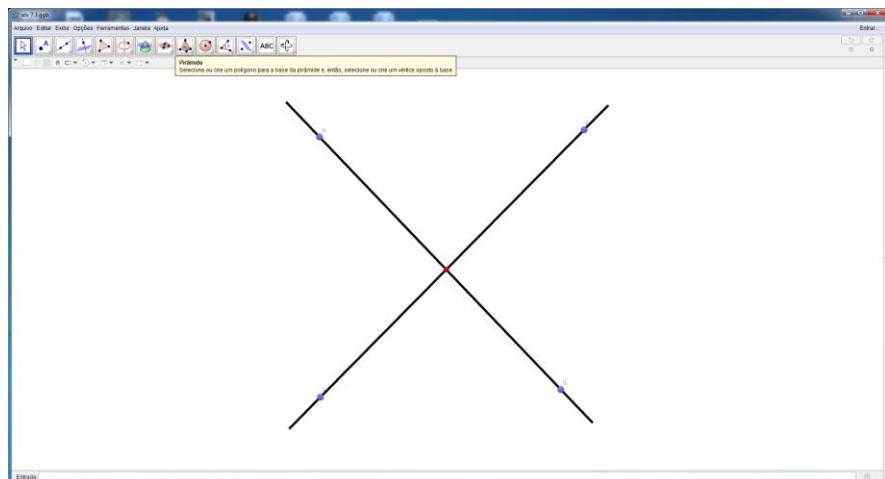
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a priori: Na atividade 8 o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D ,

reta  e plano  . O aluno deverá construir duas retas que sejam concorrentes e depois utilizar a ferramenta plano e marcar o plano que passa pelas retas concorrentes. No final da atividade de construção o aluno irá perceber que é possível apenas determinar um único plano que contem duas retas concorrentes. As imagens abaixo ilustram a ideia abordada.



Atividade 10

Titulo: Reta e um ponto externo na construção de um plano

Objetivo: Verificar a existência de um plano.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Visualizar e construir através de uma figura 3D um plano.




Questões: a) Quantos planos você conseguiu construir a partir da reta r e o ponto A ?

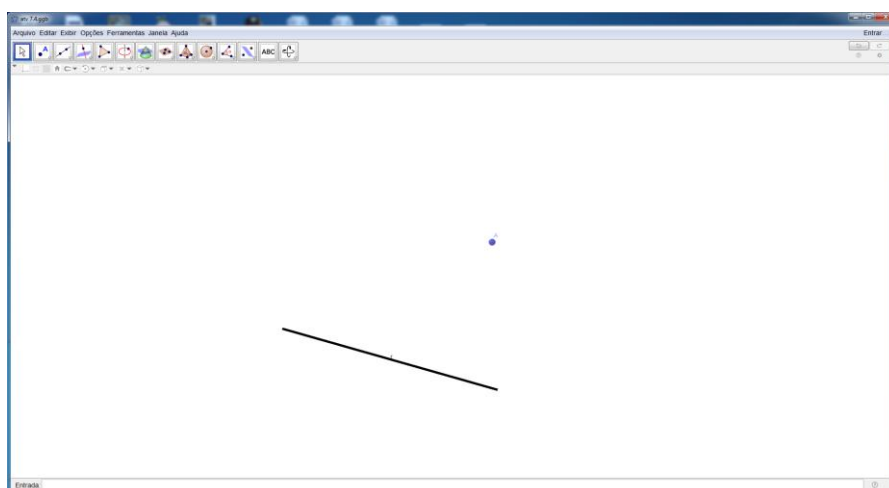
b) Poderia construir mais?

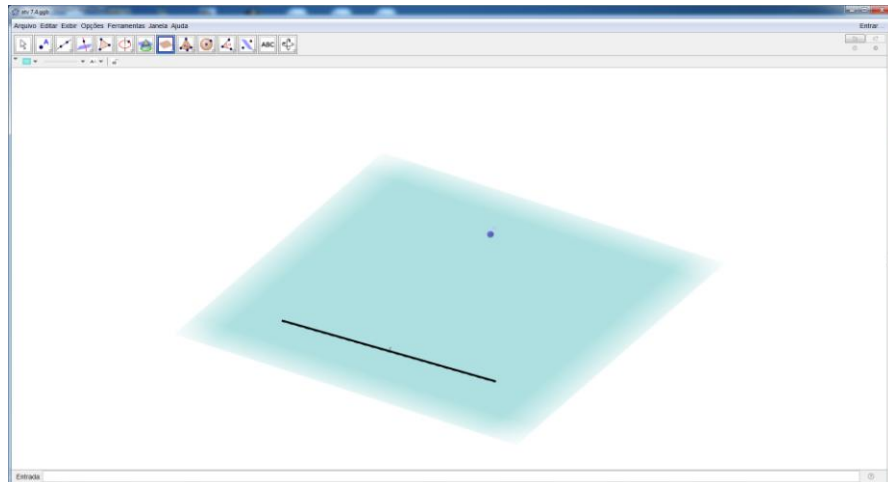
c) Quantos mais?

Conclusão:

Análise a priori: Na atividade 9 o aluno utilizará as ferramentas do geogebra 3D ,

ponto  , reta  e plano  . Primeiramente o aluno marcará uma reta e um ponto externo a ela, em seguida marcará um plano que passe por essa reta e esse ponto. Ao final pretende-se que o aluno perceba que é possível apenas construir uma reta que passe por uma reta e um ponto externo a ela. Nas atividades 7,8 e 9 o professor poderá formalizar o postulado da determinação de um plano.





Atividade 11

Titulo: Pontos no plano

Objetivo: Descobrir a quantidade de pontos sobre um plano.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Construir o maior número possível de pontos sobre um plano.


Questões: a) Quantos pontos você construiu?

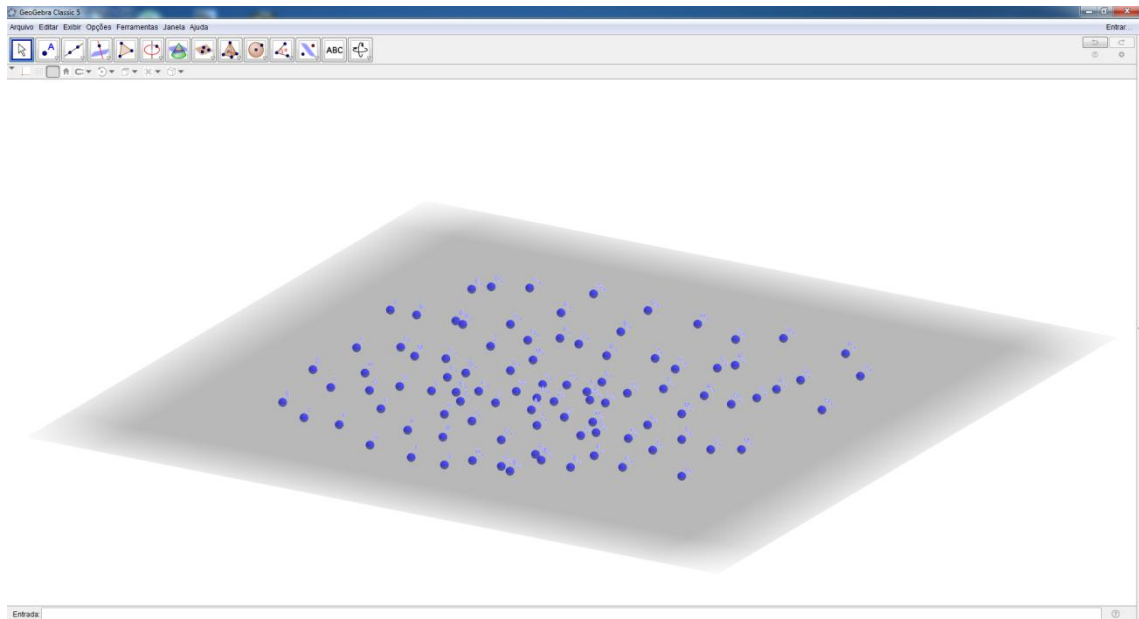
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:



Análise a priori: O aluno usará a ferramenta do geogebra 3D , ponto  . Como a própria janela 3D do geogebra apresenta um plano, o aluno deverá marcar os pontos sobre esse plano. Possivelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de pontos sobre o plano, então a partir da socialização da atividade o aluno deverá perceber que sobre um plano existem infinitos pontos. Como pode ser ilustrado na figura abaixo.



Atividade 12

Título: Retas no plano

Objetivo: Descobrir a quantidade de retas que passam sobre um plano.

Material : Geogebra 3D.

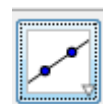
Desenvolvimento: Construir o maior número possível de retas que passam sobre um plano.

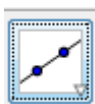
Questões: a) Quantas retas você construiu?

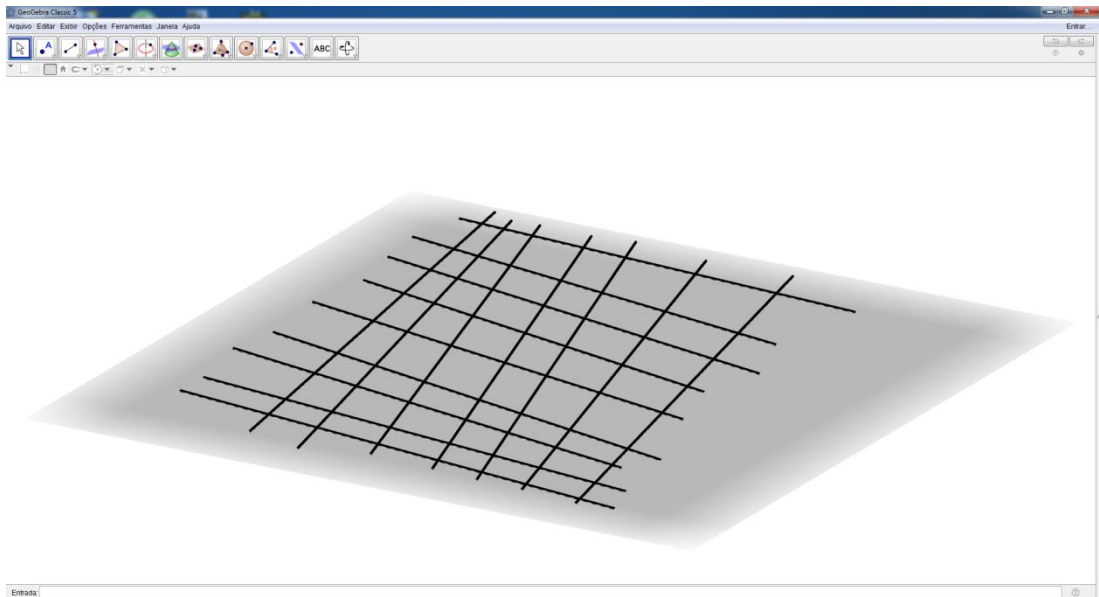
b) Poderia construir mais?

c) Quantos mais?

Conclusão:



Análise a priori: O aluno usará a ferramenta do geogebra 3D , reta . Como a própria janela 3D do geogebra apresenta um plano, o aluno deverá marcar as retas sobre esse plano. Possivelmente cada aluno irá marcar uma quantidade diferente de retas sobre o plano, então a partir da socialização da atividade o aluno deverá perceber que sobre um plano passam infinitas retas. Como pode ser ilustrado na figura abaixo.



Atividade 13

Título: Posição das retas nos planos

Objetivo: Relacionar retas em planos.

Material : Geogebra 3D.

Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e relacionar as posições das retas sobre os planos.

Questões: a) Qual a relação entre as retas CD e EF?

b) Qual a relação entre as retas CD e GH?

c) Qual a relação entre as retas EF e GH?

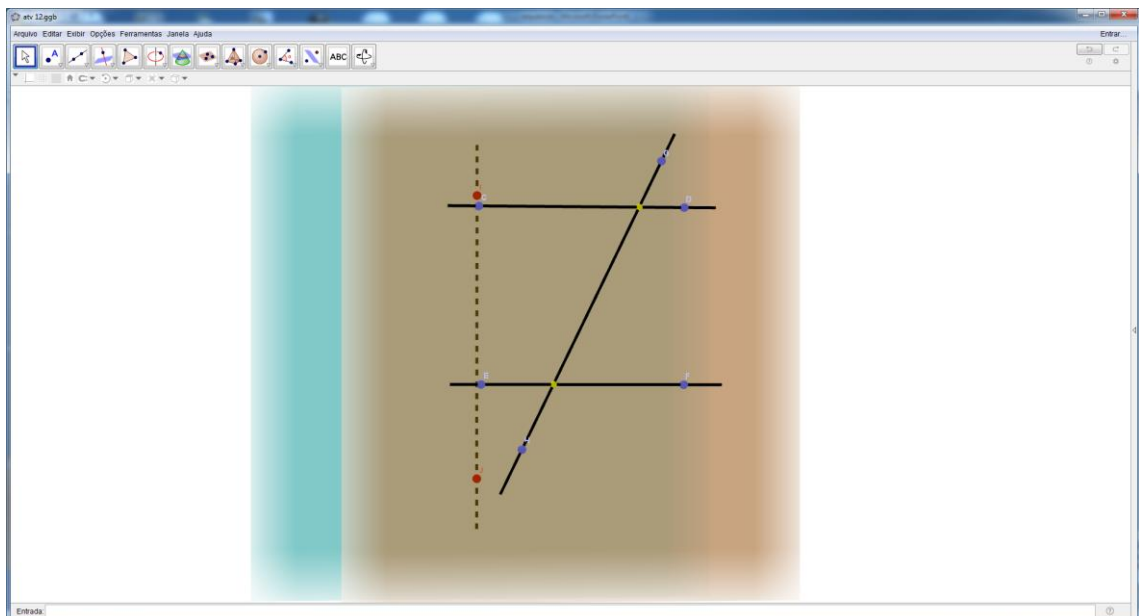
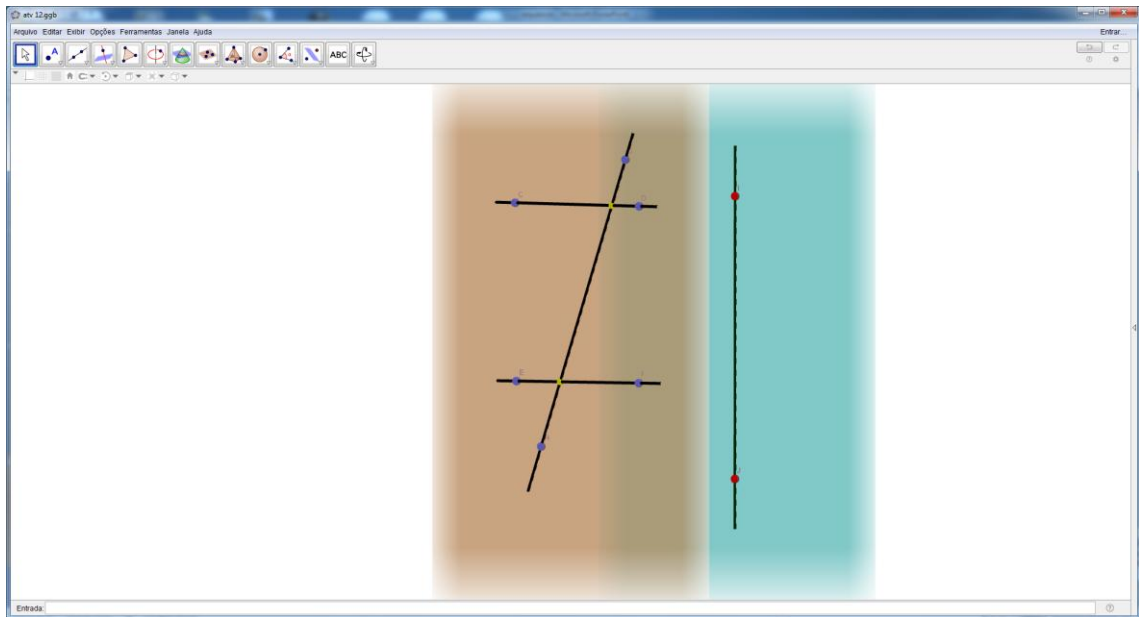
d) Qual a relação entre as retas CD, EF e GH em relação ao plano laranja?

e) Qual a relação entre as retas CD e IJ?

f) Qual a relação entre as retas EF e IJ?

g) Qual a relação entre as retas GH e IJ?

Conclusão:



Atividade 14

Titulo: Posição relativa entre uma retas e um plano

Objetivo: Identificar as posições entre uma reta e um plano.

Material : Geogebra 3D.

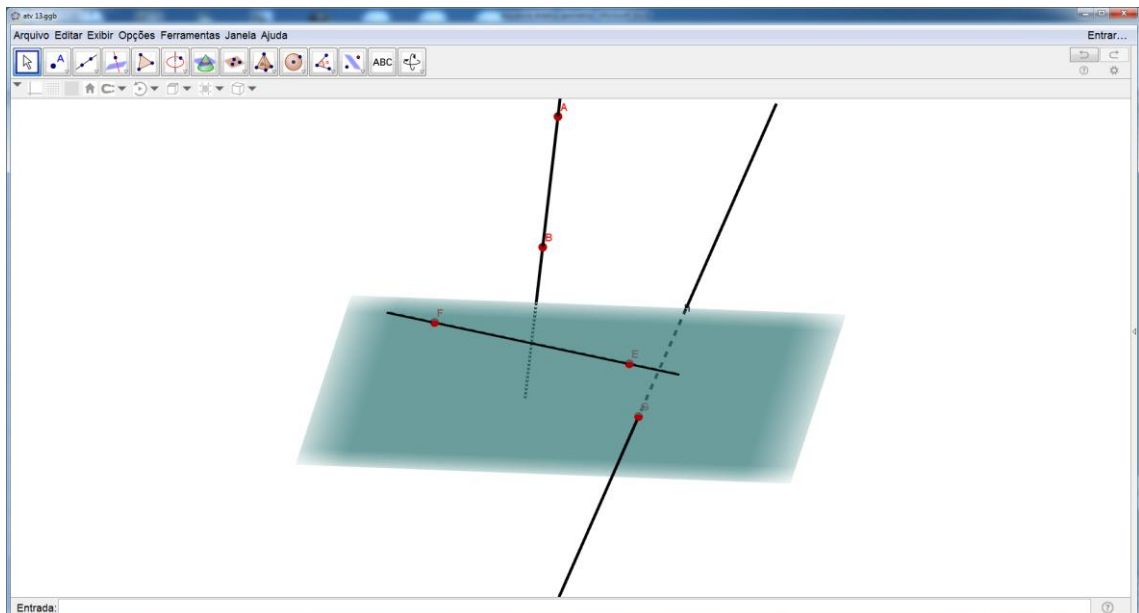
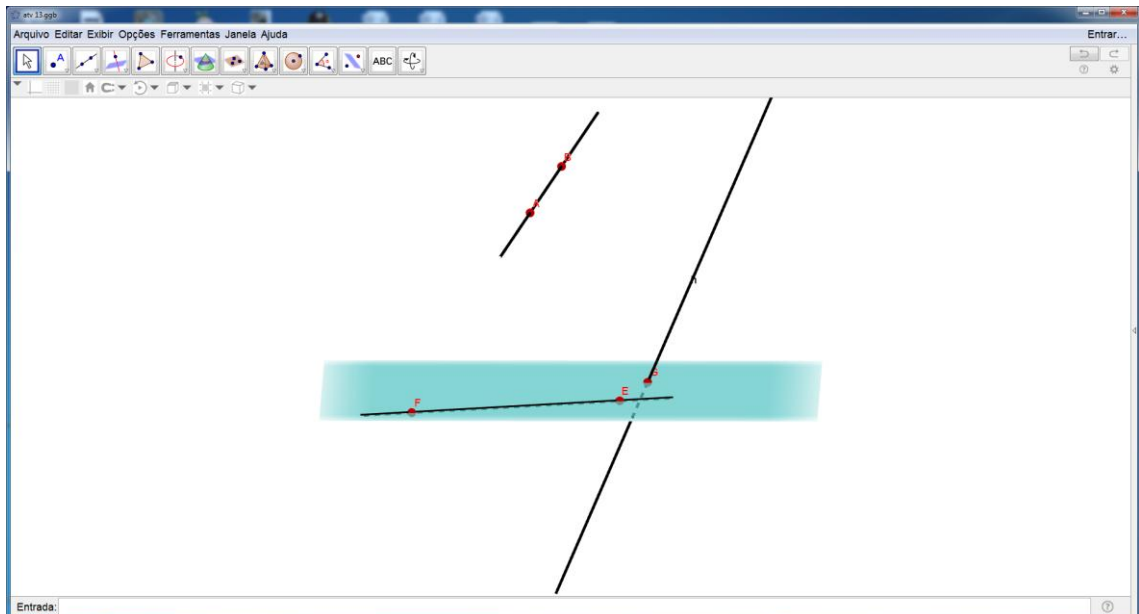
Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e observar as relações entre retas e um plano.

a) Qual a relação entre a reta AB e o plano azul?

b) Qual a relação entre a reta EF e o plano azul?

c) Qual a relação entre a reta h e o plano azul?

Conclusão:



Atividade 15

Título: Posição relativa entre dois planos

Objetivo: Identificar as posições entre dois planos.

Material : Geogebra 3D.

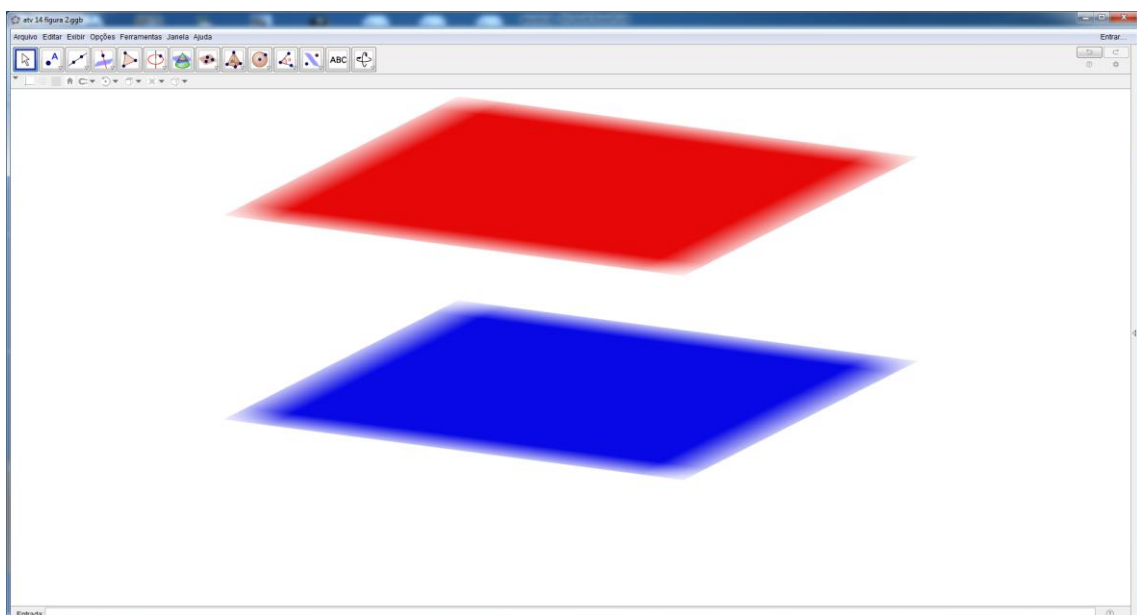
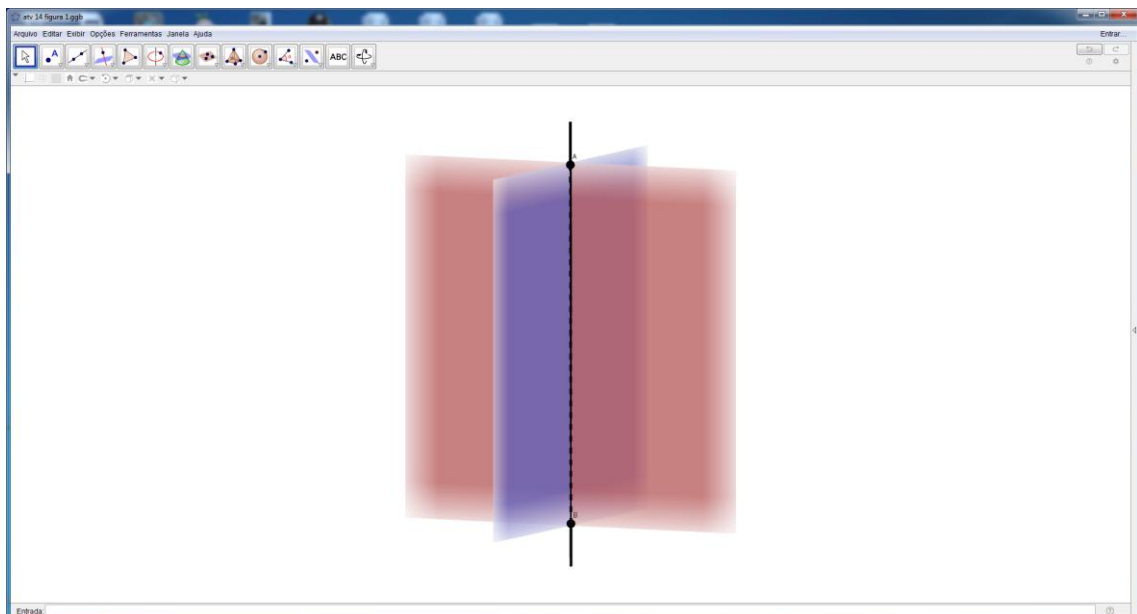
Desenvolvimento: Observar a figura no geogebra 3D e observar as relações entre dois planos.

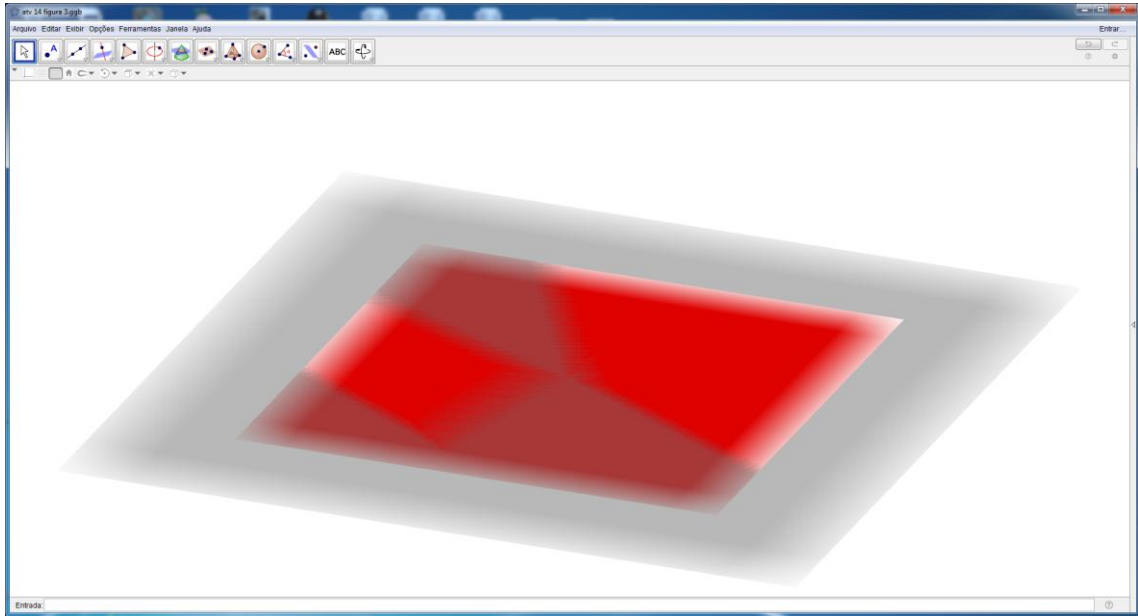
a) Qual a relação entre os dois planos na figura 1?

b) Qual a relação entre os dois planos na figura 2?

c) Qual a relação entre os dois planos na figura 3?

Conclusão:





Análise a priori: As atividades 12,13,14 o aluno com a ferramenta rotação irá verificar as relações de posicionamento entre retas e planos, e depois com as devidas discussões sobre as atividades o professor poderá formalizar o conceito de retas coplanares, retas reversas, retas secantes, plano e reta paralelos , plano e reta secantes, planos paralelos distintos, planos coincidentes e planos secantes.

Ao finalizar as atividades sugerimos que seja realizado um teste oral, para estabelecer os postulados, propriedades e teoremas e minimizar os efeitos de eventuais dificuldades conceituais.

5. EXPERIMENTO E ANÁLISE

Neste presente capítulo, apresentaremos as análises e desenvolvimentos do experimento de acordo com a metodologia da pesquisa.

5.1 Desenvolvimento do experimento e seus resultados

O experimento foi realizado em uma turma do 3º Ano do Ensino Médio, do turno vespertino, de uma escola pública da região metropolitana de Belém. Ao todo a turma possuía 25 alunos, porém com faltas e desistências, 19 alunos participaram dos três momentos para o desenvolvimento do experimento.

A escola apresenta uma boa estrutura, conta com salas climatizadas e laboratório de informática com 15 computadores novos e funcionais, a equipe pedagógica foi cortes e solícita em todos os momentos durante aplicação das atividades.

Durante todos os momentos do desenvolvimento do experimento, nos quais ocorreram um mini curso sobre a ferramenta geogebra, as atividades da sequência didática e o pós-teste, foram acompanhadas pelo o professor titular da turma, no qual auxiliou durante todo o processo. Como forma de preservar a identidade dos alunos que fizeram parte do experimento, sorteamos por meio de códigos e associamos a cada aluno da seguinte forma: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19.

O primeiro momento ocorreu dia 09 de maio de 2019, no período de 14:00h às 18:30h, foi realizado um mini curso com os alunos participantes, em que abordamos sobre as principais funcionalidades do geogebra, procuramos explorar os comandos básicos que seriam uteis para o desenvolvimento da sequência didática e também algumas programações para familiarizar os alunos com o *software*. Como no laboratório havia disponíveis 15 computadores, 11 alunos fizeram de forma individual e 8 alunos formaram duplas.

No dia 16 de maio de 2019, ocorreu o segundo momento do experimento, em que começamos a aplicação da sequência didática aos alunos. O período que disponibilizado pela a escola foi das 14:00h às 18:30h, em que desenvolvemos dez atividades, das 15 propostas, utilizando o geogebra para as construções geométricas e uma ficha de avaliação para identificação e análise das respostas dos alunos.

Para a seleção das respostas que faremos as análises, levamos em consideração os seguintes aspectos: o aluno que fez a atividade proposta; a resposta que se aproxima com a definição esperada; o comprometimento do aluno na realização da atividade.



Faremos uma análise a *posteriori* das 15 atividades desenvolvidas no segundo momento e terceiro momento do experimento.

Observamos que na atividade 1, os alunos tiveram que marcar um ponto e sobre esse ponto construir uma quantidade de retas para que o aluno entenda a definição de sobre um ponto passam infinitas retas.

Para a análise a *posteriori* dessa atividade, iremos observar as respostas dos alunos A1 e A10, respectivamente:

Figura 18 - Respostas da atividade 1

Atividade 1

Marque um ponto utilizando a ferramenta  e construa retas com a ferramenta .

responda:

a) Quantas retas você construiu?

43

b) Poderia construir mais?



sim

c) Quantas mais?

varias

Conclusão: por um ponto pode passar varias retas

Atividade 1

Marque um ponto utilizando a ferramenta  e construa retas com a ferramenta .

responda:

a) Quantas retas você construiu?

26

b) Poderia construir mais?

Sim

c) Quantas mais?

Várias, Infinitas retas.

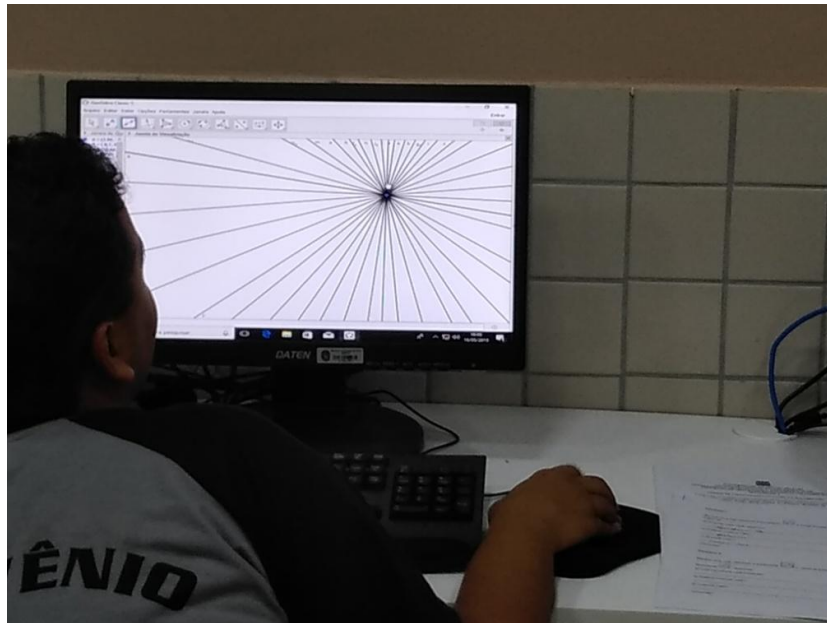
Conclusão:

Por um ponto passam infinitas retas

Fonte: Autor (2019)

Como prevíamos na análise *a priori* da atividade 1, os alunos construíram quantidades distintas de retas, e a partir dessas construções, alguns alunos escreveram na conclusão "por um ponto passam varias retas", como o aluno A1, aproximando - se da definição esperada, mas, em contrapartida, o aluno A10 conseguiu definir o postulado de forma mais adequada. Após o tempo estabelecido para a conclusão da atividade, foi feito uma socialização e discussão das respostas dadas pelos alunos entre si, e mostrado aos alunos a definição do postulado para que fosse abstraído o conceito de infinito entre eles.

Figura 19 - Aluno desenvolvendo as atividades da sequência





Fonte: Autor (2019)

As atividades 2 e 3, observado na figura 20, os alunos teriam que marcar pontos sobre e externo a uma reta construída, essas atividades tiveram como proposta formalizar a definição do postulado da existência de uma reta por etapas. A primeira etapa consistia em marca vários pontos dentro e fora da reta, e como na atividade 1, espera-se que cada aluno marque quantidades distintas, a segunda etapa seria feita uma socialização das respostas dos alunos para a formalização do conceito.

Figura 20 - Respostas das atividades 2 e 3

Atividade 2

Marque uma reta utilizando a ferramenta  e construa pontos sobre essa reta com a ferramenta , responda:

a) Quantos pontos você construiu?

71

b) Poderia construir mais?



sim

c) Quantos mais?

muitos

Conclusão: em uma reta tem varios pontos

Atividade 3

Marque uma reta utilizando a ferramenta  e construa pontos externo essa reta com a ferramenta , responda:

a) Quantos pontos você construiu?

166

b) Poderia construir mais?

sim

c) Quantos mais?

infinitos

Conclusão: fora de uma reta o infinitos pontos

Fonte: Autor (2019)

Analisando as respostas do Aluno A2, podemos observar que o mesmo, conseguiu se aproximar das definições esperadas, e também podemos notar a evolução no que tange o conceito e abstração do infinito. Na atividade 2 ele escreve "vários pontos", já na atividade 3 ele escreve "infinitos pontos", corroborando com as ideias de Delfino (2015) que em sua pesquisa faz uma abordagem do conceito do infinito para a educação básica. Citando - o:


A pesquisa revelou que na Matemática, infinito é a designação dada a qualquer coisa que seja maior do que nossa mente possa imaginar, e por este motivo o conceito de infinito foi discutido por filósofos e matemáticos como Zenão, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Cantor e Hilbert. O conceito de infinito está presente no currículo de Matemática e sofre uma progressiva evolução com o avançar da escolaridade. (DELFINO, 2015, p-68)

Solicitamos que os alunos socializassem os resultados e também disponibilizamos um tempo para a discussão dessas respostas e no final formalizamos a definição do postulado.

Na atividade 4, os participantes da pesquisa deveriam marcar quatro pontos distinto e não alinhados e notar quantas retas conseguiriam construir a partir de dois pontos pré estabelecidos nos itens propostos, com o objetivo do aluno ter a percepção do postulado da determinação de uma reta.

Figura 21 - Resposta da atividade 4

Atividade 4

Marque os Pontos , A , B , C , D, utilizando a ferramenta , de forma aleatória e que não estejam alinhados e responda:

a) Quantas retas passam pelos pontos A e B?
1 reta

b) Quantas retas passam pelos pontos A e C?
1 reta

c) Quantas retas passam pelos pontos A e D?
1 reta

d) Quantas retas passam pelos pontos B e C?
1 reta

e) Quantas retas passam pelos pontos B e D?
1 reta

f) Quantas retas passam pelos pontos C e D?
1 reta

Conclusão:
Em cada dois pontos dados, passa-se 1 reta ligando os dois.

Fonte: Autor (2019)

O aluno A6, exposto na figura 21, através das construções feitas no geogebra teve a percepção e aproximou-se da definição do postulado, também outros alunos conseguiram. Com a socialização ao final dessa atividade conseguimos definir o postulado da existência de uma reta, confirmando as ideias citadas de Valente (1993), que o computador e seus programas estão favorecendo o desenvolvimento do raciocínio e reflexão dos alunos.

As atividades 5, 6 e 7 estão relacionados as posições relativas entre duas retas, em que na atividade 5, o aluno observou e analisou umas figuras já construídas e a partir disso, teve que estabelecer as relações entre os segmentos, as atividades 6 e 7, o aluno teve que construir as retas com as ferramentas já

estabelecidas e também compreender as relações entre os segmentos e relacionar com a atividade 5 já feita.

Figura 22 - Respostas das atividades 5,6 e 7

Atividade 5

Qual a relação que podemos estabelecer entre os segmentos expostos em cada figura?

a) Figura 1
As duas retas possuem um ponto comum.

b) Figura 2
As linhas estão em paralelo e não se tocam em nenhum ponto algum.

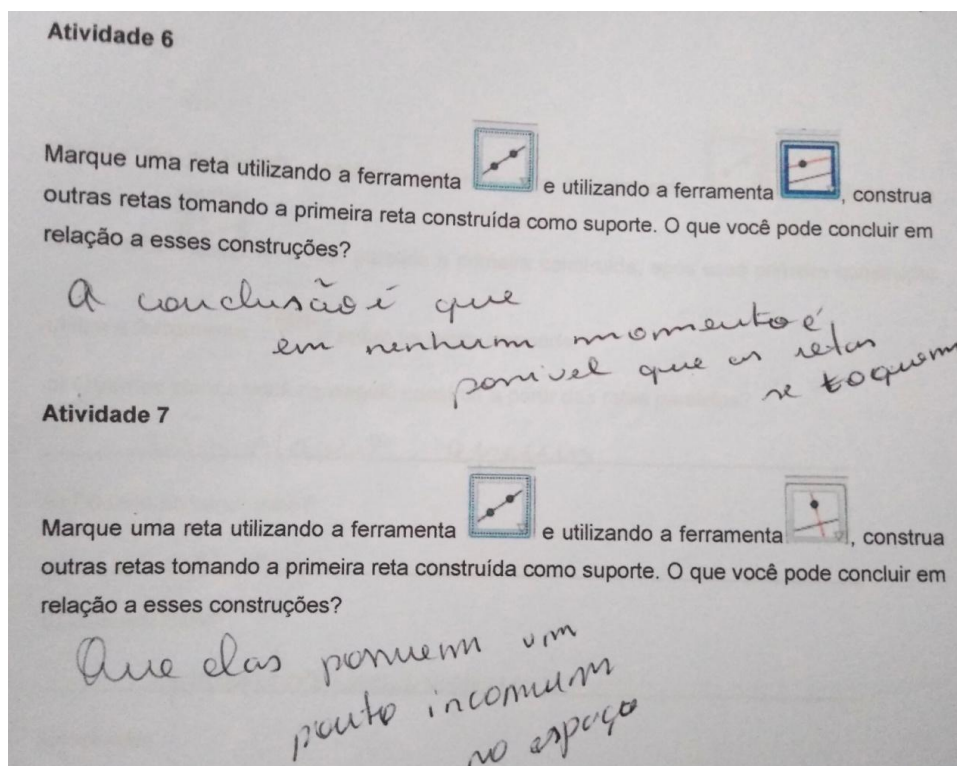
c) Figura 3
As retas também possuem um ponto comum.

d) Figura 4
Estão em paralelo e não se tocam em nenhum ponto algum.

e) Figura 5
Também possuem um ponto comum.

f) Figura 6
Embora na imagem as retas estejam em paralelo.

Conclusão:
As retas podem ou não ter um ponto comum.



Fonte: Autor (2019)




A figura 22 acima mostra as respostas das atividades pelo aluno A19, como podemos observar o aluno obteve através das imagens e construções realizadas às ideias sobre o conceito de retas paralelas e concorrentes, em algumas de suas respostas, o aluno A19 citou o caso de retas paralelas, devido aos seus conhecimentos prévios de geometria. Para finalizar a atividade, socializamos as respostas e formalizamos as definições.

Após as relações entre pontos e retas, entraremos na sessão de atividades correspondentes ao estudo do plano. As atividades 8, 9 e 10, foram compostas para formalizar o conceito do postulado da determinação de um plano. Como existem quatro modos de se determinar, a primeira forma, que 3 pontos não alinhados determinam um único plano, foi apresentada aos alunos de modo que eles obtivessem conhecimentos prévios sobre o assunto e a compreensão da ideia da formação de um plano.

Como exemplo temos as respostas do aluno A13, que podemos observar na figura 23, através das construções feitas no geogebra, podemos observar que o aluno obteve a ideia de que em cada caso os planos são únicos, seja por um ponto e uma reta, por duas retas paralelas e seja por duas retas concorrentes. Ao final apresentamos as definições do postulado aos alunos.

Figura 23 - Respostas das atividades 8,9 e 10

Atividade 8

Através da janela 3D, construa uma reta e um ponto externo a ela, utilizando as ferramentas  e , após essa primeira construção utilize a ferramenta  sobre a reta e o ponto, responda:




a) Quantos planos você conseguiu construir a partir da reta r e o ponto A ?
Um

b) Poderia construir mais?
Não

c) Quantos mais?
Nenhum

Conclusão Só se constrói um plano porque é unitária

Atividade 9:

Através da janela 3D, construa uma reta com a ferramenta , e utilizando a ferramenta  uma reta paralela a primeira construída, após essa primeira construção utilize a ferramenta  sobre as retas, responda:


a) Quantos planos você conseguiu construir a partir das retas paralelas?
Somente um


b) Poderia construir mais?
Não

c) Quantos mais?
Nenhum

Conclusão: Em duas retas paralelas, só pode construir um plano

Atividade 10

Através da janela 3D, construa duas retas que seja concorrentes com a ferramenta .

após essa primeira construção utilize a ferramenta  sobre as retas, responda:

a) Quantos planos você conseguiu construir a partir de duas retas concorrentes?
So um

b) Poderia construir mais?
Não

c) Quantos mais?

Conclusão: duas retas concorrentes determinam um plano

Fonte: Autor (2019)


No dia 23 de maio de 2019, ocorreu o terceiro e último momento da experimentação, no qual das 14:00h às 18:30h, os alunos fizeram as 5 atividades restantes da sequência didática e após o término das atividades da sequência, foi aplicado um pós teste com 10 questões para verificar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto estudado.

As atividade 11 e 12 os alunos teriam que marcar pontos e retas, respectivamente, sobre um plano. Essas atividades utilizariam a janela 3D do geogebra, que para esse tipo de questão, auxilia na parte de percepção, além de maior interação com as formas e figuras. Com isso, podemos ratificar as noções de infinito expostos em questões anteriores, explorar as propriedades do plano e auxiliar no entendimento do postulado da inclusão.

Como exemplo vamos observar as respostas do aluno A18, exposto na figura 24, em suas respostas notamos que ele conseguiu alcançar o que foi proposto, e com detalhe na questão 12, em que com apenas poucas construções, ele conseguiu perceber a noção da infinidade de retas que podemos construir sobre de um plano. Ao finalizar as atividades, fizemos as devidas conclusões, socialização das respostas, formalização dos conceitos e apresentação do postulado da inclusão.

Figura 24 - Respostas das atividades 11 e 12

Atividade 11

Através da janela 3D, marque um ponto utilizando a ferramenta  sobre o plano dado, responda:


a) Quantos pontos você construiu?
 50 pontos

b) Poderia construir mais?
 Sim

c) Quantos mais?
 Infinitos

Conclusão:
 Concluir que em um plano posso construir vários pontos

Atividade 12

Através da janela 3D, marque um ponto utilizando a ferramenta  sobre o plano dado, responda:

a) Quantas retas você construiu?
 3 retas

b) Poderia construir mais?
 Sim

c) Quantos mais?
 Infinitos

Conclusão:
 posso fazer vários retas em um plano

Fonte: Autor (2019)

A atividade 13 corresponde as posições relativas entre duas retas no plano, atividades anteriores já apresentaram as ideias e conceitos de retas paralelas e concorrentes, então além de reforçar esses conceitos estudados, a atividade apresentará as ideias de retas reversas, retas coplanares e não coplanares. Como mencionado anteriormente, essa atividade também utilizou a janela 3D do geogebra,

em que os alunos tiveram acesso a uma figura pré construída e através das interações proporcionadas pelo software puderam fazer as suas resoluções.

Figura 25 - Respostas das atividades 13

Atividade 13

Observe a figura no geogebra 3D e verifique quais as relações das posições das retas sobre os planos.

a) Qual a relação entre as retas CD e EF?

São paralelas

b) Qual a relação entre as retas CD e GH?

possuem retas concorrentes

c) Qual a relação entre as retas EF e GH?

possuem retas concorrentes

d) Qual a relação entre as retas CD, EF e GH em relação ao plano laranja?

Estas no mesmo plano

e) Qual a relação entre as retas CD e IJ?

Não estão no mesmo plano

f) Qual a relação entre as retas EF e IJ?

Não estão no mesmo plano

g) Qual a relação entre as retas GH e IJ?

Não estão no mesmo plano

Fonte: Autor (2019)

Na figura 25, o aluno A5 em suas respostas já apresentou as posições estudadas nas atividades anteriores, e notou que possuem retas que não estão em um mesmo plano e que para serem retas paralelas devem estar e um mesmo plano, com o auxílio do que foi desenvolvido nas atividades 5, 6 e 9. Diante disso formalizamos a definição de retas reversas e também a definição de elementos coplanares.

Com a atividade 14, utilizando a janela 3D, os alunos novamente observariam uma figura pré-construída e com isso interagir com as posições relativas entre uma reta e plano, para serem apresentados as definições de reta secante a um plano, reta paralela a um plano e reta sobre um plano.

Figura 26 - Respostas das atividades 14

Atividade 14

Observe a figura no geogebra 3D e verifique quais as relações das posições das retas no plano.

a) Qual a relação entre a reta AB e o plano azul?

está acima do plano

b) Qual a relação entre a reta EF e o plano azul?

está dentro do plano

c) Qual a relação entre a reta h e o plano azul?

apenas um ponto no plano

Fonte: Autor (2019)

Notemos a resposta do aluno A1, na figura 26, utilizando as suas palavras conseguiu descrever as características propostas da figura. Nas respostas das alternativas "b" e "c", o aluno obteve uma proximidade com o conceito posteriormente apresentado, porém na resposta da alternativa "a", o aluno não levou em consideração o que havia sido estudado anteriormente nas outras atividades e apenas fez uma descrição direta da figura. Ao final, fizemos as discussões acerca das respostas dos alunos e mostramos que uma reta se possui todos os pontos em comum com o plano então ela está sobre o plano, se a reta possui apenas um ponto em comum com o plano então ela é secante ao plano e quando a reta não possui nenhum ponto em comum então a reta está paralela ao plano.

Na atividade 15, através das interações com o geogebra 3D, o aluno tem três figuras com diferentes posições entre dois planos, com essa questão, queríamos que o aluno analise as principais características entre esses planos, para posteriormente ser apresentado as definições de planos secantes, planos paralelos e planos coincidentes.

Figura 27 - Respostas das atividades 15

Atividade 15

Observe a figura no geogebra 3D e verifique as relações entre dois planos.

a) Qual a relação entre os dois planos na figura 1?

Uma reta pode passar em dois planos

b) Qual a relação entre os dois planos na figura 2?

~~um plano está sobre o outro~~ *estão um em cima do outro*

c) Qual a relação entre os dois planos na figura 3?

um plano está sobre o outro

Fonte: Autor (2019)

O aluno A2 em suas respostas destacou as características das figuras como no caso das respostas das alternativas "a" e "c", que o aluno aproximou-se da ideia principal de planos secantes e planos coincidentes, respectivamente, porém na alternativa "b", o aluno apenas apresentou a característica visual, não levou em consideração os conceitos já apresentados nas questões anteriores. Ao final da atividade apresentamos os conceitos das posições relativas entre dois planos e encerramos a sequência didática.

Após finalizamos a parte da sequência didática foi proposto 10 questões para os alunos participantes do experimento sobre a geometria de posição com ênfase no ensino de reta e plano. Esse pós teste tem como objetivo analisar o desenvolvimento dos alunos nos tópicos apresentados durante a sequência didática e também com o objetivo de validar o experimento.

Apresentaremos algumas questões do teste e faremos uma análise das respostas dos alunos participantes.

A atividade 1, exposta na figura 28, os alunos teriam que identificar quantos planos poderemos construir através de quatro pontos aleatórios e não alinhados.

Figura 28 - Atividade 1 do pós-teste

1. Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:
- a) 1 plano.
 - b) 2 planos.
 - c) 3 planos.
 - d) 4 planos.
 - e) 5 planos.

Fonte: Autor (2019)

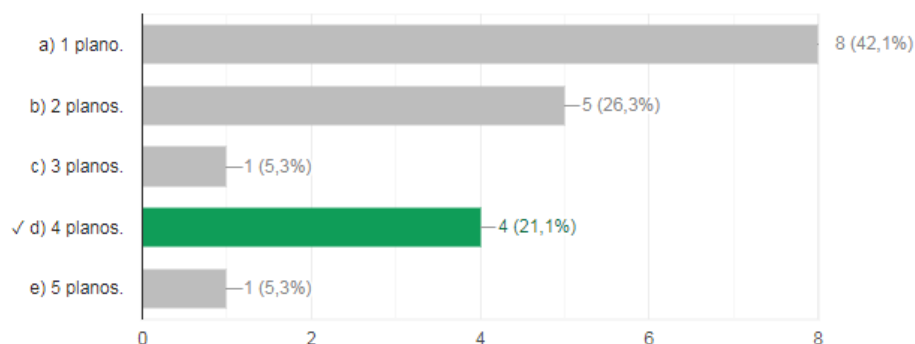
Observamos no gráfico 21, que apenas 21,1% dos alunos marcaram o item correto da questão, ocorreu que a maior parte dos alunos marcou a alternativa "a" correspondente a 1 plano, pode ter ocorrido que como foi apresentado o postulado da determinação do plano, em que todos os casos resultam na unicidade do plano, provavelmente interpretaram que independente do número de pontos teremos apenas um plano, quando na verdade determina um único plano três pontos distintos e não alinhados.

Gráfico 21 - Atividade 1 do pós-teste

1. Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:



4 / 19 respostas corretas

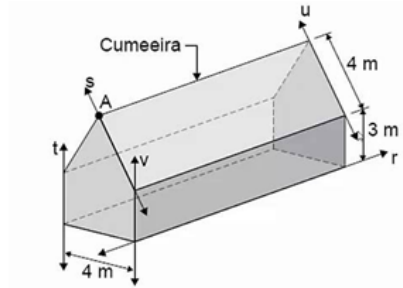


Fonte: Autor (2019)

Na atividade 3 do pós-teste, os alunos observariam a figura e através dos conhecimentos adquiridos sobre as posições relativas entre duas retas deveriam marcar a sentença que indica a posição correta.

Figura 29 - Atividade 3 do pós-teste

3. (Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede



Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- a) t e u são reversas.
- b) s e u são reversas
- c) t e u são concorrentes
- d) s e r são concorrentes

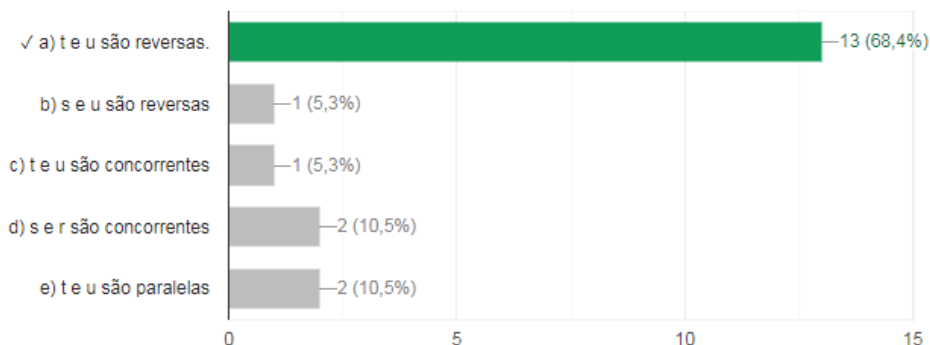
Fonte: Faap (1997)

O gráfico 22 apresenta que 68,4% dos alunos acertaram a questão, observamos que a maior parte dos alunos conseguiram identificar as posições das retas na figura, ratificando positivamente a eficácia das atividades da sequência que envolviam as relações posicionais entre retas.

Gráfico 22 - Atividade 3 do pós-teste

3. O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede. Das retas assinaladas podemos afirmar que:

13 / 19 respostas corretas



Fonte: Autor (2019)

Analisando a atividade 4, os alunos teriam que lembrar das definições das posições relativas entre dois plano, que foram formalizadas na sequência didática, como pré requisito para a resolução dessa questão.

Figura 30 - Atividade 4 do pós-teste

4. Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:
- a) Paralelos
 - b) Coincidentes
 - c) Secantes
 - d) Coplanares
 - e) Perpendiculares

Fonte: Autor (2019)

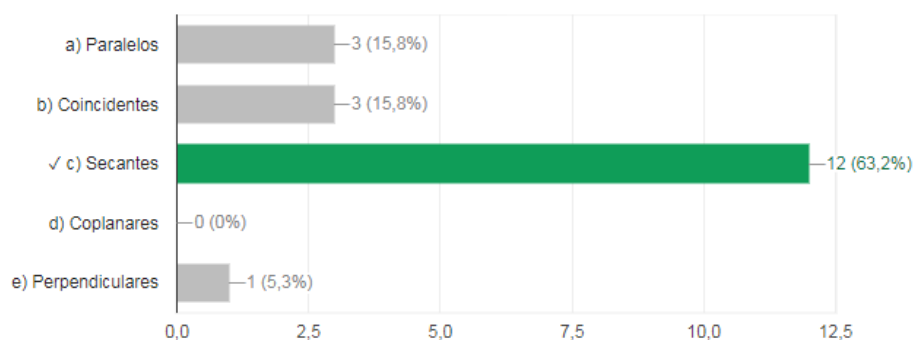
No gráfico 23, notamos que 63,2% dos alunos identificaram que os planos que possuem apenas uma reta em comum são planos secantes, mostra que a maior parte dos alunos internalizaram o conceito aprendido no desenvolvimento da sequência didática.

Gráfico 23 - Atividade 4 do pós-teste

4. Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:



12 / 19 respostas corretas



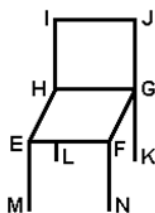
Fonte: Autor (2019)

A figura 31 mostra a atividade 5 em que os alunos observariam uma figura representando uma cadeira e a partir dos conhecimentos adquiridos sobre a

geometria espacial de posição e marcar a alternativa que apresentasse a relação correta.

Figura 31 - Atividade 5 do pós-teste

5. (UF – AL) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim:

- a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.
- b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
- c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.
- d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

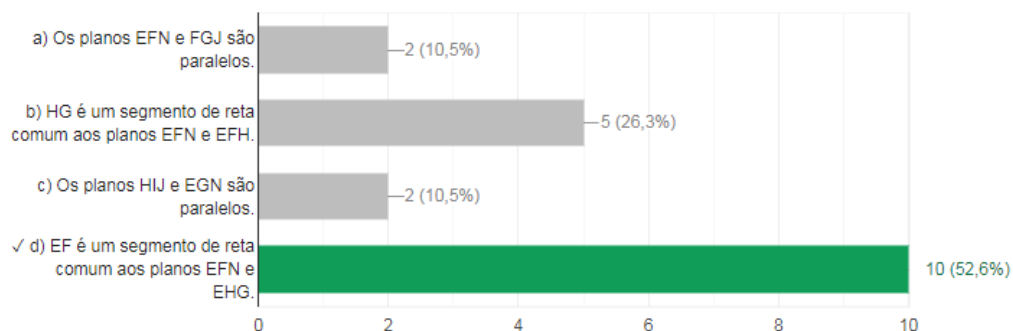
Fonte: UF-AL [entre 2000 e 2014]

Observamos no gráfico 24, que 52,6% dos alunos conseguiram identificar as relações entre retas e os planos que a cadeira formava, notamos também que os erros dos outros alunos estão ligados na dificuldade em fazer a abstração da figura em partes geométricas e na identificação das relações estudadas. Em relação ao exposto, podemos citar Giardinetto (1999) em seu livro " Matemática Escolar e a Matemática Cotidiana" retrata que o pensamento abstrato deve ser útil para dar maior abrangência à realidade, com o concreto material auxiliando nesse processo. Portanto, o concreto e o abstrato devem ser concebidos, em uma relação estreita e mútua, para que possibilite dar sentido ao conhecimento e ao processo de aprendizagem.

Gráfico 24 - Atividade 5 do pós-teste

5. Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão. Sendo assim:

10 / 19 respostas corretas



Fonte: Autor (2019)

Na atividade 8, ocorre uma apresentação de uma situação problema envolvendo um globo da morte com um motoqueiro fazendo um trajeto, em que o aluno precisa identificar qual a melhor figura representa esse trajeto de um ponto a outro ponto determinado.

Figura 32 - Atividade 8 do pós-teste

8. (ENEM 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte. Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

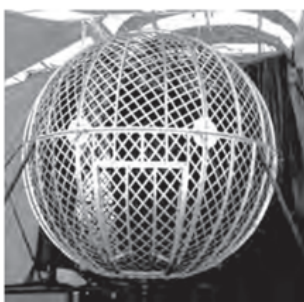


Figura 1

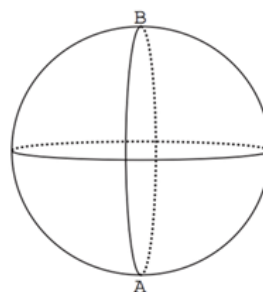
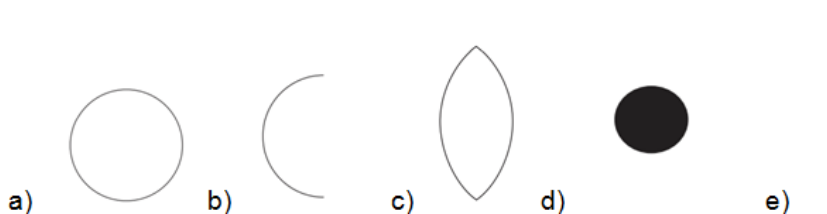


Figura 2

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:



Fonte: Enem (2012)

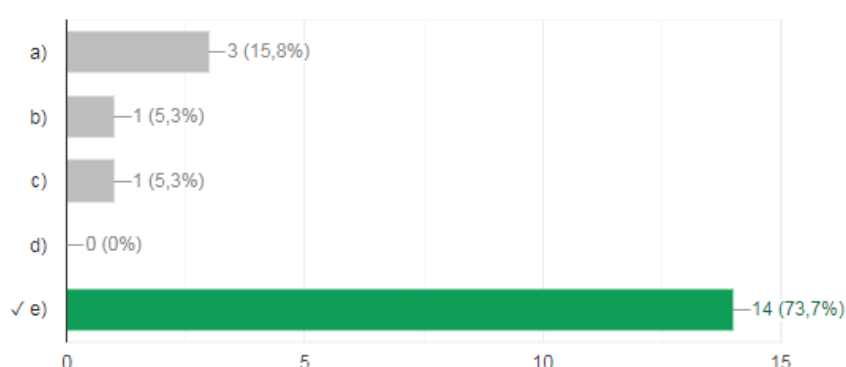
O gráfico 25 nos mostra que 73,7% dos alunos acertaram a questão, os alunos conseguiram fazer uso do postulado da determinação de uma reta aprendido na sequência didática. Os alunos que erraram essa questão não levaram em consideração que a circunferência do trajeto feito pelo motoqueiro deve ser projetada no chão, uma vez que o único foco de luz está direcionado a ele. Como a circunferência está na vertical em relação ao chão, sua projeção é representada por um segmento de reta congruente a medida do diâmetro desta circunferência. Logo o trajeto que se aproxima da projeção da sombra do motoqueiro é o segmento de reta.

Verificamos também a diferença percentual de acertos dessa questão em relação aos alunos que participaram da sequência e os alunos que não participaram,

no gráfico 20 (p.41) 7.3% dos alunos acertaram o item, sendo que esses alunos foram entrevistados para as análises prévias dessa pesquisa e não tiveram contato com o produto educacional, já os alunos participantes, como citado anteriormente, apresentaram um desempenho de 73,7%, mostrando de forma positiva a eficiência da aplicação da sequência.

Gráfico 25 - Atividade 8 do pós-teste

14 / 19 respostas corretas



Fonte: Autor (2019)

Observamos ao longo da aplicação da sequência didática que os alunos apresentaram uma mudança no comportamento de forma positiva desde do mini curso do uso do geogebra até durante o processo de realização das atividades propostas, notamos também a motivação dos alunos na descoberta dos conceitos, propriedades e postulados da geometria espacial de posição, pois nos relatos escritos ao final do experimento, os alunos caracterizaram as aulas como uma forma diferenciada para a aprendizagem do que eles estavam habituados.

Corroborando com as considerações feitas citaremos alguns relatos dos alunos feitas ao final do experimento. O aluno A1 relata: "foi um método de ensino bem diferente do que estamos acostumados, bem esclarecedor pelo fato de sair da teoria e ir para a prática"; em seu relato o aluno A6 diz "Aprender de forma divertida e descontraída, utilizando os recursos da tecnologia foi uma experiência ótima para nós alunos. As aulas foram muito boas e de grande importância para nossa vida acadêmica."; e para finalizar os relatos temos o aluno A19 "Embora, eu não tenha o hábito com aulas tanto teóricas e praticas, pareceu-me uma ótima experiência, pois

não apenas terenas, cálculos que a um certo ponto se mostram cansativas, uma aula mostrando a aplicação prática da geometria ajudou a vê-la com outros olhos".

Durante o todo o processo do experimento, tomamos a avaliação dos alunos de forma individualizadas, houveram momentos que os alunos tiveram a percepção de maneira rápida sobre as relações propostas, mas também apresentaram dificuldades em algumas questões pelo fato de que a interação com o geogebra foi um método com que eles não estavam habituados no seu dia a dia. Procuramos durante todo o processo expor os conceitos, propriedades e postulados de uma maneira com que os alunos compreendessem essas relações, para ao final formalizar utilizando a linguagem matemática.

Portanto, consideramos os resultados obtidos do experimento positivas e satisfatórias, observamos durante todo o processo as mudanças de comportamento e motivacionais dos alunos, tendo em vista o desenvolvimento da aprendizagem significativa deles durante o processo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificamos a partir do levantamento teórico, que o ensino de geometria espacial de posição, com ênfase no ensino de reta e plano, pode ser apresentado com abordagens metodológicas variadas como forma de amenizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

As dificuldades apresentadas pelos alunos relatados nas pesquisas de revisão giram em torno da parte conceitual, perceptiva, identificação dos entes geométricos e na relação dos termos técnicos com as propriedades.

Mesmo sendo observado resultados significativos no ensino e aprendizagem em geometria de posição, ainda é necessário mais estudos com ênfase no ensino de reta e plano, e estudos que não fiquem "presos" a um único tipo de ferramenta de ensino e sim utilizar ferramentas variadas para potencializar a aprendizagem significativa do aluno.

Ao retomarmos o problema científico desta pesquisa, a saber: Como a utilização do *software* geogebra pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de geometria de posição?. Podemos concluir que para potencializar o aprendizado do aluno, deve-se buscar pelos conceitos geométricos, trabalhos que desenvolvam a percepção, o raciocínio, a capacidade de abstração, deve-se buscar resolver problemas que envolva o cotidiano dos alunos e utilizar *softwares* matemáticos para a representação dos entes geométricos e destacar suas propriedades e postulados. Observamos que o desenvolvimento da utilização do geogebra como ferramenta no auxílio do processo de ensino e aprendizagem dos alunos ocorreu de forma positiva, como podemos notar nos dados do experimento coletados.

A sequência didática com a utilização do geogebra como ferramenta auxiliadora no ensino e aprendizagem, apresenta-se como uma proposta de método diferenciado em que o aluno possa através da interação abstrair os conceitos e também venham potencializar a percepção espacial dos entes geométricos.

As barreiras e dificuldades encontradas através das análises prévias, não podem ser abordadas como um fator isolado do contexto institucional e social, pois torna-se necessário repensar acerca de outros fatores de relevância, tais como políticas públicas (formação docente, currículo, projeto político- pedagógico, entre outros), as quais incidem diretamente no processo de ensino e aprendizagem.

Almejamos que os professores utilizem o produto educacional resultado dessa pesquisa em suas aulas introdutórias de geometria, de maneira a incentivar os alunos a utilizar as tecnologias, como o geogebra, como ferramenta educacional e contribuir para potencializar a aprendizagem significativa dos discentes.

Diante disso, a presente dissertação pode auxiliar na utilização do produto educacional constituído pela a sequência didática apresentada, não apenas no ambiente escolar, pois sabemos que há escolas com recursos escassos, mas também a qualquer usuário que tenha acesso a um o computador e através do geogebra possa construir as figuras geométricas expostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Carlos Henrique. **O segredo é avaliar sempre**. Nova Escola, São Paulo, Ano XXII, n.199, jan/fev. 2007. p.42-43.

ARTIGUE, M. (1988): “**Ingénierie Didactique**”. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BARBOSA, Eduardo F. **Instrumentos de coleta de dados em pesquisas educacionais**. Disponível em <http://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Ensino_2013_2/Instrumento_Coleta_Dados_Pesquisas_Educacionais.pdf> . 2008. Acesso 25/01/2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997

BRASIL, Ministério Da Educação E Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/** Secretária de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF. 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília/DF: MEC/SEF, 2000.

BRASIL, Ministério Da Educação E Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/** Secretária de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF. 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

COUTINHO, Cileda de Q. S.; ALMOULOU, Saddo Ag. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

DELFINO, Hudson Sathler. **O conceito de infinito** : uma abordagem para a Educação Básica / Hudson Sathler Delfino. – Viçosa, MG, 2015. vi, 70f. : il. ; 29 cm.

DELORS, J. **Educação: um tesouro a descobrir**. 8. ed. - São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC: UNESCO, 2003.

DEMO, Pedro. **TICs e educação**, 2008. Disponível em: <<http://pedrodemo.blogspot.com.br/2012/04/tics-e-educacao.html>>. Acesso : 25/01/2019.

DOLCE, Osvando. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica: exercícios resolvidos, exercícios propostos com**

resposta, testes de vestibular com respostas/ Ovaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLZ, J. e SCHNEUWLY, B. **Gêneros e progressão em expressão oral e escrita**. Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In Gêneros Orais e escritos na escola. Campinas (SP): Mercado de Letras. 2004.

DUVAL, Raymond. **Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence**. Annales de didactique et de sciences cognitives, v 1, p. 57-74. 1988.

FERREIRA, Fernanda Aparecida. **Demonstrações em geometria euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para seu ensino** / Fernanda Aparecida Ferreira, Dimas Felipe de Miranda. - Belo Horizonte: FUMARC/PUC-MG, 2008. 67 p. : il.

FERREIRA, R. C. **Ensinando Matemática com o Geogebra**. Enciclopédia Biosfera, Goiânia: < <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010bb.htm>> vol.6, N.10, 2010. Acesso em 15/01/2019.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática Escolar e Matemática da vida cotidiana**. Campinas: Autores Associados, 1999.

GOMES, Rafael Oliveira de. **Geometria Espacial de Posição: Do Concreto ao Raciocínio Dedutivo com uma Passagem pela Tecnologia** / Rafael Gomes de Oliveira. - 2016. 143 p. ; 30cm. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016.

GOVÊA, F.. **Aprendendo e ensinando geometria com demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1998.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 7. Ed. São Paulo: Cortez, 2010

KNÜPPE, Luciane. **Motivação e desmotivação: desafio para as professoras do Ensino Fundamental**. Educ. rev. no.27 Curitiba Jan./June 2006

LORENZATO, Sérgio. Porque não ensinar geometria? In: **Educação Matemática em Revista**. SBEM, ano III, 1995.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geométrica**. Dissertação (Mestrado), PUC-SP, 1999.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

MOURA, M. O. **A atividade de ensino como ação formadora**. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2002.

NEVES, Miranilde Oliveira. **A importância da investigação qualitativa no processo de formação continuada de professores: subsídios ao exercício da docência**. Revista Fundamentos, V.2, n.1. Revista do Departamento de Fundamentos da Educação da Universidade Federal do Piauí. ISSN 2317-2754. 2015.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; A. SCHLEIMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009.

PACHECO, José Adson D.; BARROS, Janaina V. **O Uso de Softwares Educativos no Ensino de Matemática**. 2013.

PAIS, LUIZ Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREIRA, T. L. M. **O Uso do Software Geogebra em uma Escola Pública**: interações entre alunos e professores em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. Dissertação de Mestrado: Juíz de Fora. 2012.

QUINQUER, D. **Modelo e enfoques sobre a avaliação**: o modelo comunicativo. In: BALLESTAR, M. et al. Avaliação como apoio à aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2003. p. 15-22

RANCAN, Grazielle. **Origami E Tecnologia**: Investigando Possibilidades Para Ensinar Geometria No Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física – PUCRS, Porto Alegre, RS. 2011.

REIS, Leonardo Rodrigues dos. **Rejeição à matemática**: causas e formas de intervenção, 2005. Disponível em: <<http://repositorio.ucb.br/jspui/handle/10869/1737>>. Acesso : 25/01/2019.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental**/ Pedro Franco de Sá - Belém: EDUEPA, 2009.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTA HELENA, Rainer Fischer. **Uma proposta para o ensino de geometria na educação de jovens e adultos com o uso de mídias digitais**. Trabalhos de Conclusão de Curso de Especialização, Universidade Federal do Rio grande do Sul. 2015.

SOUZA, Filho, J. B. de; BRITO, K. L. V. de. **O aprendizado da geometria contextualizada no ensino médio**. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Instituto de Ensino Superior de Goiás. Formosa, 2006. 86 p.

SOUZA, Gabriel Moreno Ferreira de. **Uso do Gegeobra 3D no ensino de Geometria Espacial** / Gabriel Moreno Ferreira de Souza - 2017. 52 f. il. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). 2017.

TIBA, Içami. **Disciplina: Limite na medida certa**. São Paulo: Gente, 1996.

TORNAGUI, A. J.C. **Tecnologias na Educação: ensinado e aprendendo com as TIC**. -2 Ed. - Brasília: Secretaria de Educação a Distância, 2010.

VALENTE, J. A. (Org.). **Computadores e conhecimento: repensando a Educação**. Campinas: Unicamp/NIED, 1993. 418 p.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/NIED, 1999. 156 p.

VALENTE, J.A . **As tecnologias digitais e os diferentes letramentos**. Revista Pátio. Porto Alegre, RS, v.11, n.44, 2008.

VIEIRA, Luana Ramalho. **O uso do GeoGebra no Ensino de Matemática**. Universidade Federal de Mato Grosso– UFMT. IV Encontro Goiano de Educação Matemática. 2013.

VOGT, Alessandra; SOARES, Silviane Lawall. **O Papel da Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação: Um Olhar Docente**. 2016. Disponível em < https://eventos.uceff.edu.br/eventosfai_dados/artigos/semic2016/432.pdf >. Acesso: 15/01/2019.

VOSGERAU, Dilmeire Sant'Anna Ramos; ROMANOWSKI, Joana Paulin. **Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas**. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 14, n. 41, p. 165-189, jan./abr. 2014

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A

Questionário dos Professores



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) Professor(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Sexo

- ☐ Masculino
- ☐ Feminino

2. Faixa etária

- ☐ Até 25 anos
- ☐ De 26 a 30 anos
- ☐ De 31 a 35 anos
- ☐ De 36 a 40 anos
- ☐ De 41 a 45 anos
- ☐ De 46 a 50 anos
- ☐ 50 anos ou mais

3. Qual o seu nível de escolaridade?

- ☐ Ensino Superior
- ☐ Especialização
- ☐ Mestrado
- ☐ Doutorado

4. Há quantos anos atua como professor? *

- ☐ Até 5 anos
- ☐ De 6 a 10 anos
- ☐ De 11 a 15 anos
- ☐ De 16 a 20 anos
- ☐ Há mais de 20 anos

5. Em quantas escola você trabalha atualmente?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ mais de 3

6. Qual a sua carga horária mensal aproximadamente em sala de aula?

- ☐ 100 horas
- ☐ 150 horas
- ☐ 200 horas
- ☐ Mais de 200 horas

7. Qual o número de alunos por sala, aproximadamente, em que você trabalha?

- ☐ Até 20
- ☐ De 21 a 30
- ☐ De 31 a 40
- ☐ De 41 a 50
- ☐ Mais de 50

8. Qual(is) atividade(s) você utiliza mais para avaliar os seus alunos?

- ☐ Prova
- ☐ Teste
- ☐ Seminário
- ☐ Projetos
- ☐ Processo diário em sala de aula
- ☐ Outro:

9. Qual o método que você mais utiliza para ensinar Geometria Espacial de Posição?

- ☐ Apresento os conceitos, os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos do livro didático.
- ☐ Proponho situações-problema do cotidiano.
- ☐ Utilizo material concreto.
- ☐ Trabalho com jogos para apresentar os conceitos.
- ☐ Utilizo softwares/programas de construção geométrica.
- ☐ Outro:

10. Você costuma investigar os conhecimentos prévios dos alunos sobre conteúdos de geometria que serão ensinados?

- ☐ Sim, através de um teste.
- ☐ Sim, através de diálogos com os alunos.
- ☐ Não costumo fazer esse tipo de investigação.
- ☐ Outro:

11. Para a fixar os conteúdos estudados, você costuma:

- ☐ Propor que os alunos resolvam os exercícios do livro didático.
- ☐ Elaborar uma lista de exercícios para serem resolvidos.
- ☐ Solicitar que os alunos pesquisem sobre o assunto na biblioteca.
- ☐ Solicitar que os alunos pesquisem sobre o assunto na internet.
- ☐ Outro:

12. Como você avalia o rendimento dos alunos em relação aos conceitos e propriedades de Reta e plano?

- ☐ Muito bom
- ☐ Bom
- ☐ Regular
- ☐ Ruim
- ☐ Muito Ruim

13. Quantas aulas normalmente você gasta para trabalhar o ensino de Reta e Plano?

14. Você costuma utilizar o computador nas suas aulas de Matemática?

- ☐ Não usa em sala de aula
- ☐ Não usa porque não tem laboratório na escola.
- ☐ Não usa por falta de tempo para elaborar as atividades
- ☐ Usa às vezes
- ☐ Usa sempre

15. Você utiliza algum software/programa no ensino de matemática durante suas aulas, sim ou não? Se sim qual software/programa?

16. Com base na sua experiência no ensino de reta e plano em geometria de posição, preencha o quadro a seguir. Você ensina?

Conteúdo	Sim	Não
Entes Geométricos		
Postulado da existência		
Postulado da determinação		
Postulado da Inclusão		
Posição Relativa entre duas retas		
Determinação de plano		
Duas retas reversas		
Interseção de Planos		
Paralelismo no espaço		
Posições relativas de uma reta e um plano		
Posições relativas entre dois planos		

17. Com base na sua experiência no ensino de reta e plano em geometria de posição, preencha o quadro a seguir. (MF: Muito Fácil; F: Fácil; R: Regular; D: Difícil; MD: Muito difícil). Qual grau de dificuldade de aprendizagem que você considera para cada tópico?

Conteúdo							
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Entes Geométricos							
Postulado da existência							
Postulado da determinação							
Postulado da Inclusão							
Posição Relativa entre duas retas							
Determinação de plano							
Duas retas reversas							
Interseção de Planos							
Paralelismo no espaço							
Posições relativas de uma reta e um plano							
Posições relativas entre dois planos							

APÊNDICE B

Questionário dos Alunos



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho precisamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3- **Série:** ____ Ano

4- **Tipo de escola que estuda?** ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada

5- **Você já ficou em dependência?** ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas? _____

6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**

☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**

☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**

☐ Professor particular ☐ Família ☐ Ninguém ☐ Outros. Quem? _____

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**

☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova

☐ Não estudo fora da escola.

11- Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca

12- Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

☐ Provas/simulado ☐ Testes semanais ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos ☐ Outros. Quais?

13- Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?

☐ Contente ☐ Tranquilo ☐ com Medo ☐ Preocupado ☐ com Raiva ☐ com Calafrios

14- As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?

☐ sim ☐ não ☐ às vezes

15- Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia? ☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes

16- Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo? ☐ Sim ☐ Não

17. Como você avalia as explicações do seu professor de matemática?

☐ Ruim ☐ Regular ☐ Boa ☐ Excelente

18- Você já estudou o Ensino de Reta e Plano? ☐ Sim ☐ Não

19- Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série? _____

20- Quando você estudou o Ensino Reta e Plano, a maioria das aulas:

☐ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

☐ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

☐ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

☐ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

☐ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- Para praticar o conteúdo de Ensino de Reta e Plano seu professor costumava:

☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

☐Apresentar jogos envolvendo o assunto;

☐Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

☐Não propunha questões de fixação;

☐Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência **quando você estudou sobre Ensino de Reta e Plano preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Entes Geométricos							
Postulado da existência							
Postulado da determinação							
Postulado da Inclusão							
Posição Relativa entre duas retas							
Determinação de plano							
Duas retas reversas							
Interseção de Planos							
Paralelismo no espaço							
Posições relativas de uma reta e um plano							
Posições relativas entre dois planos							

APÊNDICE C

Termo de Livre Esclarecimento Alunos e Responsáveis



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Diagnóstico do ensino de Reta e Plano, sob a responsabilidade dos (as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e orientando Adriano Bechara de Oliveira**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos traçar um diagnóstico do **Ensino de Reta e Plano** a partir da opinião dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de reta e plano**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos e/ ou Ana Kely Martins da Silva e Adriano Bechara de Oliveira** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

_____, ____ de _____ de 2017.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____ aceito participar
do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: Diagnóstico do Ensino de Reta e Plano, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva, Adriano Bechara de Oliveira**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Reta e Plano a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola, sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Reta e Plano.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e Adriano Bechara de Oliveira** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

_____, ____ de _____ de 2017.

Assinatura do pesquisador

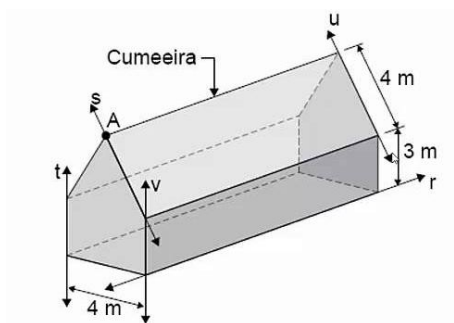
Eu, _____ autorizo que
meu/minha filho(a) _____ a participar do projeto
citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

APÊNDICE D

Questionário Aplicado

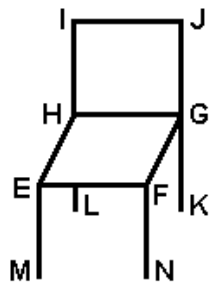
- Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:
 - 1 plano.
 - 2 planos.
 - 3 planos.
 - 4 planos.
 - 5 planos.
- (UF – AL) Classifique **V** como verdadeira ou **F** como falsa cada uma das afirmativas abaixo.
 - Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas ().
 - Duas retas distintas sempre determinam um plano ().
 - Uma reta pertence a infinitos planos distintos ().
 - Três pontos distintos não colineares sempre determinam um plano ().
 - Duas retas coplanares distintas são paralelas ou concorrentes ().
- (Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede



Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- t e u são reversas.
- s e u são reversas
- t e u são concorrentes
- s e r são concorrentes
- t e u são paralelas.

4. Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:
- Paralelos
 - Coincidentes
 - Secantes
 - Coplanares
 - Perpendiculares
5. (UF – AL) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

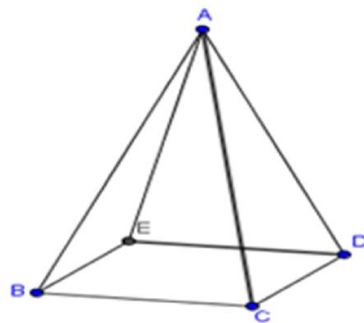


Sendo assim:

- Os planos EFN e FGJ são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
- Os planos HIJ e EGN são paralelos.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

6. (UNIPAMPA) Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.

- AC e AD
- AB e ED
- BC e ED
- EC e BD



e) BC e AE

7. Considere as afirmações a seguir.

- I. Duas retas distintas determinam um plano.
- II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que:

- a) Apenas II é verdadeira
- b) Apenas III é verdadeira
- c) Apenas I e II são verdadeiras
- d) Apenas I e III são verdadeiras
- e) I, II e III são verdadeiras

8. (ENEM 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte. Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.



Figura 1

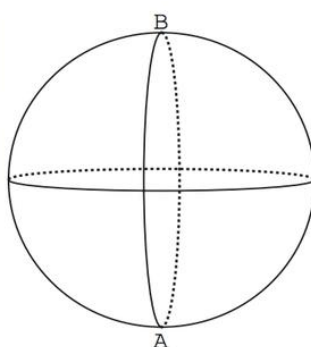
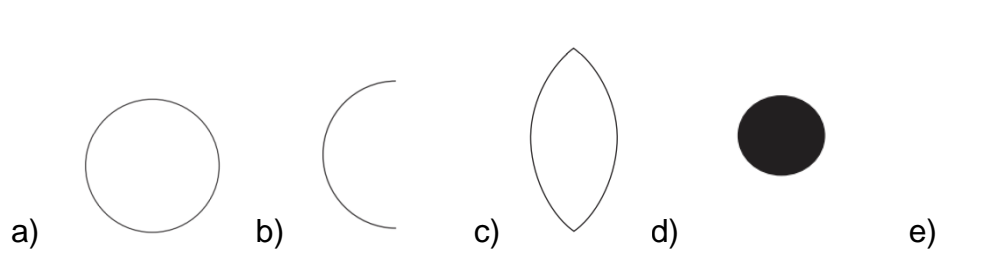


Figura 2

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:



9. Qual das afirmações abaixo é **VERDADEIRA**?

- a) Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.
- b) Duas retas não coplanares são reversas.
- c) Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas.
- d) Se três retas são paralelas, existe um plano que as contém.
- e) Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, elas determinam um e um só plano.

10. (UEL 2001) Considere uma reta s , contida em um plano α , e uma reta r e perpendicular a s . Então, necessariamente:

- a) r é perpendicular a α .
- b) r e s são coplanares.
- c) r é paralelo a α .
- d) r está contida em α .
- e) Todas as retas paralelas a r interceptam s .



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem