

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



José Américo Trindade Costa Junior

Função Modular
Ensino por Sequências Didáticas

BELÉM-PA
2019

José Américo Trindade Costa Junior

Função Modular
Ensino por Sequências Didáticas

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, na Linha de Pesquisa Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

BELÉM-PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Costa Junior, José Américo Trindade

Função modelar: ensino por sequências didáticas /José Américo Trindade Costa Junior; orientador: Miguel Chaquiam Costa, 2020

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Universidade do Estado do Pará, 2020

1.Funções (Matemática) – Estudo e ensino 2. Aprendizagem. 3.Sequência didática. I. Chaquiam, Miguel, (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed.510.7

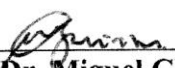
JOSÉ AMÉRICO TRINDADE COSTA JUNIOR

FUNÇÃO MODULAR: ENSINO POR SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Data de aprovação: 19/12/2019

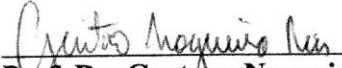
Banca examinadora

 . Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–RJ
Universidade do Estado do Pará

 . Examinador Externo
Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias

Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica

Belém – PA

2019

DEDICATÓRIA

À minha amada mãe Maria Lenir Silva Costa, à minha esposa Luciana Paula Souza de Almeida e ao meu filho Juan Felipe Almeida Costa.

AGRADECIMENTO

Ao Criador, por me fortalecer dando saúde, ânimo e crença para não desistir e continuar lutando por este meu sonho e objetivo de vida. A Ele toda minha gratidão.

À minha mãe, Maria Lenir Silva Costa, pelos valores e ensinamentos que sempre me transmitiu e por acreditar em mim, não medindo esforços em oferecer sempre o melhor para minha educação.

À minha esposa Luciana Paula Souza de Almeida, por ter caminhado ao meu lado, dedicando amor, carinho, atenção e compreensão, sempre me fazendo acreditar que chegaria ao final desta difícil, porém gratificante etapa.

Ao meu filho, Juan Felipe Almeida Costa, meu presente de Deus. Obrigado por toda ajuda durante a realização deste trabalho, trocando experiências na área acadêmica enriquecendo meu aprendizado. É muito bom saber que posso contar com você em todos os momentos.

Aos meus irmãos Luiz Flávio Silva Costa e Merilene do Socorro Silva Costa, pela confiança em minha capacidade e por desejarem sempre o melhor para mim.

À todos os familiares, sobrinhos, sobrinhas, afilhado, afilhada, cunhados, cunhadas, sogro, sogra, padrinho, madrinha e amigos, pelo apoio de sempre e por cada momento de felicidade ao lado de vocês.

À Universidade do Estado do Pará, por me oportunizar um Mestrado gratuito e de excelência.

Ao meu orientador, professor Dr. Miguel Chaquiam, pela orientação, dedicação, paciência e, principalmente, pela amizade, admiração e respeito construídos ao longo desse processo. Agradeço por todos os ensinamentos compartilhados de forma admirável, e por me guiar nos primeiros passos da pós-graduação. Muito obrigado por tudo.

Aos membros do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e Educação Matemática na Amazônia (GHEMAZ), em especial ao professor Dr. Natanael Freitas Cabral, por todas as contribuições neste trabalho.

Aos meus colegas de profissão, que contribuíram com trocas de experiências em sala de aula para o enriquecimento do desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização dessa dissertação, o meu sincero agradecimento.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.” Paulo Freire (1921 – 1997)

COSTA JUNIOR, José Américo Trindade. **Função Modular Ensino por Sequências Didáticas**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

RESUMO

Este trabalho apresenta reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos relativos à Função Modular. Na literatura existem poucos trabalhos acadêmicos que retratam esse assunto como objeto matemático. Sendo assim, objetiva-se estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de Função Modular. No desenvolvimento deste trabalho, a questão a ser respondida é: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Função Modular? A pesquisa desenvolvida possui traços quantitativos e qualitativos. No estudo será utilizado pressupostos teóricos da Teoria das Situações Didáticas. E para a análise da evolução da Sequência Didática, então procede-se a metodologia; noções de Análise Microgenética na investigação da construção do conhecimento a partir das interações verbais de Góes (2000) e a Análise de Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002). A coleta das informações para a construção do Produto Educacional (composto por teste de conhecimentos matemáticos sobre conteúdos: Função Afim e Módulo; oficina; Sequência Didática e aplicação e avaliação aplicada), se compõe a partir da aplicação de um questionário sociocultural e um teste com o objeto matemático Função Modular com os alunos egressos no 2º Ano do Ensino Médio, assim como os professores de Matemática da instituição também responderam um questionário referente ao conteúdo. Além disso, a revisão de literatura, análise dos livros didáticos e a consulta dos documentos oficiais colaboraram para uma síntese bibliográfica do objeto. A Sequência Didática construída compõe-se por quatro atividades elaboradas especificamente ao conteúdo matemático Função Afim que dará a formalização do conceito de Função Modular. Ao analisar as interações realizadas na aplicação da Sequência Didática notou-se que esta promoveu significativa melhoria na aprendizagem do conceito de Função Modular.

Palavras-chave: Matemática. Ensino. Sequência Didática. Função Modular.

COSTA JUNIOR, José Américo Trindade. **Modular Function Teaching by Didactic Sequences**. 2019. Dissertation (Professional Master in Mathematics Teaching) - Pará State University, Belém, 2019

ABSTRACT

This paper presents reflections on the teaching and learning process of mathematical contents related to Modular Function. In the literature there are few academic works that portray this subject as a mathematical object. Thus, the objective is to study the didactic potentialities of a Didactic Sequence designed specifically for the teaching and learning of Modular Function. In the development of this work, the question to be answered is: To what extent does a Didactic Sequence elaborated according to the structuring model of the Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC), potentiates the teaching and learning process of Modular Function? The research developed has quantitative and qualitative traits. The study will use theoretical assumptions of the Theory of Didactic Situations. And for the analysis of the evolution of the Didactic Sequence, then proceeds the methodology; notions of Mycogenetic Analysis in the investigation of knowledge construction from the verbal interactions of Góes (2000) and Discourse Analysis, according to Mortimer and Scott (2002). The collection of information for the construction of the Educational Product (composed by test of mathematical knowledge on contents: Affine Function and Module; workshop; Didactic Sequence and application and application assessment), consisted of the application of a sociocultural questionnaire and a test with the mathematical object Modular Function with students graduating from the 2nd year of high school, as well as the mathematics teachers of the institution also answered a questionnaire regarding the content. In addition, the literature review, analysis of textbooks and consultation of official documents contributed to a bibliographic synthesis of the object. The built Didactic Sequence consists of four activities elaborated specifically to the Mathematical Function Affine that will formalize the concept of Modular Function. By analyzing the interactions performed in the application of the Didactic Sequence it was noted that it promoted a significant improvement in the learning of the concept of Modular Function.

Keywords: Mathematics. Teaching. Didactic Sequence. Modular Function.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 1: Triângulo didático	21
Figura 2: Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática	26
Figura 3: Capa dos Livros Analisados	49
Figura 4: Atenção dos Alunos em Matemática	56
Figura 5: Composição de Função	67
Figura 6: Função $f(x)=x+1$	68
Figura 7: Função $f(x)=-x-1$	68
Figura 8: Função $f(x)= x+1 $	69
Figura 9: Função $f(x) = x $	69
Figura 10: Função $gx = -x$	70
Figura 11: Função $f(x) = -x $	70
Figura 12: Função $f(x)$	71
Figura 13: Função $gx = -1 \cdot fx$	71
Figura 14: Função $f(x) = x $	72
Figura 15: Função $gx = -1 \cdot f(x) = - x $	73
Figura 16: Função $f(x) = x $	74
Figura 17: Função $f(x) = x+1 $	74
Figura 18: Função $f(x) = x-1 $	75
Figura 19: Função $fx = x+1$	75
Figura 20: Função $f(x) = x - 1$	76
Figura 21: Etapas de aplicação da Sequência Didática	81
Figura 22: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 1ª UARC	132
Figura 23: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 2ª UARC	134
Figura 24: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 3ª UARC	137
Figura 25: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 4ª UARC	139

QUADROS

Quadro 1: Classificação das Situações Didáticas	23
Quadro 2: Aspecto de Análises das Interações Verbais	31
Quadro 3: Categorização da Revisão de Literatura.....	34
Quadro 4: Categorização da Revisão de Literatura.....	35
Quadro 5: Categorização da Revisão de Literatura.....	36
Quadro 6: Livros Analisados	50
Quadro 7: Livros Analisados	51
Quadro 8: Contribuições da Revisão de Literatura	53
Quadro 9: Frequência de Estudo de Matemática Extra Classe	55
Quadro 10: Metodologia na aplicação do conteúdo de Função Modular	57
Quadro 11: Dificuldades e Desempenho no Teste de Conhecimentos (%)	59
Quadro 12: Entrevista dos Professores.....	61
Quadro 13: Presença dos Alunos nas Atividades.....	108
Quadro 14: Recortes da Intervenção inicial do Episódio 1	128
Quadro 15: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 1.....	129
Quadro 16: Recortes da Intervenção Exploratória do Episódio 1	130
Quadro 17: Recortes da socialização do Episódio 1	131
Quadro 18: Recortes da Intervenção inicial do Episódio 2	133
Quadro 19: Recortes da socialização do Episódio 2	134
Quadro 20: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 3.....	135
Quadro 21: Recortes da socialização do Episódio 3	136
Quadro 22: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 4.....	138

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 BASES TEÓRICAS DA PESQUISA	20
1.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD).....	20
1.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)	24
1.3 UARC.....	25
1.4 ANÁLISE MICROGENÉTICA	28
1.5 ANÁLISE DO DISCURSO	30
2 SOBRE O ENSINO DA FUNÇÃO MODULAR	33
2.1 REVISÃO DE LITERATURA	33
2.1.1 Diretrizes da Educação	37
2.1.2 Estudos Teóricos	38
2.1.3 Estudos Experimentais.....	41
2.1.4 Estudos de Análise de Livros Didáticos.....	48
2.1.5 Síntese das Contribuições	52
2.2 CONCEPÇÕES DOS ALUNOS EGRESSOS.....	54
2.2.1 Descrição e Análise de Dados Pessoais e Metodológicos	55
2.2.2 Descrição e Análise de Dados do Quadro de Dificuldades e Teste de Verificação de Aprendizagem	58
2.3 CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES	60
2.3.1 Análise da opinião dos professores	62
2.3.2 Análise Global	63
3 SOBRE A FUNÇÃO MODULAR	65
3.1 RECURSOS DIDÁTICOS PARA A CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS	71
3.1.1 Reflexão	71
3.1.2 Translação	73
4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINO DA FUNÇÃO MODULAR	77
4.1 VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE FUNÇÃO AFIM E MÓDULO ...	82
4.2 OFICINA: FUNÇÃO AFIM E MÓDULO	86
4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: FUNÇÃO MODULAR	92
4.3.1 1ª Atividade: Conceituação da Função Modular	92
4.3.2 2ª Atividade: Extensão da Definição da Função Modular	95
4.3.3 3ª Atividade: Aprofundamento da Função Modular.....	98
4.3.4 4ª Atividade: Generalização da Função Modular	101

4.4 AVALIAÇÃO APLICATIVA: FUNÇÃO MODULAR.....	104
5 APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	108
5.1 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	109
5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	127
CONCLUSÕES.....	141
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146
6. ANEXOS.....	150
6.1 ANEXO A: FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	150
6.2 ANEXO B: DECLARAÇÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	152

INTRODUÇÃO

A minha formação acadêmica atual é Licenciatura em Matemática, cursada na Universidade do Estado do Pará (UEPA), concluída em 1997. No ano seguinte, ingressei como professor contratado pela Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC), iniciando assim uma troca de experiências com meus primeiros alunos e passando a ter conhecimento das dificuldades do mundo da Matemática.

Antes de iniciar minha carreira como professor de Matemática, na época de estudante, tive a oportunidade de conhecer professores de Matemática experientes em uma escola pública no centro de Belém do Pará. A conduta profissional de meus colegas de trabalho me inspirava a ter boa vontade e motivar nossos alunos utilizando diversificadas metodologias de ensino, como atividades em grupos e jogos competitivos entre equipes, por exemplo. Neste sentido sempre me senti desafiado a ensinar Matemática de forma lúdica, prazerosa e significativa para meus alunos.

Como objetivo pessoal de desenvolvimento docente interessei-me pelo aprofundamento acadêmico no Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática (PMPEM) da Universidade do Estado do Pará. Ao ingressar neste programa tive contato com estudos, pesquisas, debates e teorias da Educação Matemática que relatam as problemáticas encontradas em sala de aula que dificultam a aprendizagem desta disciplina.

Em um dos encontros organizados pelo Programa de Mestrado foram sorteados os conteúdos matemáticos a serem pesquisados que gerariam as futuras dissertações. Assim, fui contemplado com a investigação para ensino da Função Modular e desafiado a elaborar uma proposta de Sequência Didática sobre o conteúdo sorteado. E a partir de então, comecei a pesquisar sobre este conteúdo que é pouco explorado nas escolas.

Embora sempre me esforçasse em garantir o máximo de aproveitamento na aprendizagem de meus alunos, inquietava-me o fato deles ainda apresentarem dificuldades no desenvolvimento dos conteúdos. Por esse motivo comecei a realizar uma pesquisa no 1º Ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Paes de Carvalho, localizado na cidade de Belém do Pará no qual atualmente sou professor da disciplina de Matemática. Ao questionar os alunos sobre quais seriam os conteúdos de Matemática estudados em que mais encontravam dificuldades no seu desenvolvimento, a maioria respondeu: “Função”. Em seguida, perguntei se haviam

estudado Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Função Logarítmica e Função Modular. Imediatamente todos responderam que não sabiam o que seria uma Função Modular.

Nas discussões com docentes de Matemática na escola em que leciono, observei que o ensino de Função Modular é desenvolvido de maneira “bem rápida” chegando até a ser ministrada em apenas uma aula, pois acredita-se que o referido assunto não é abordado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Dessa forma, ao pesquisar se tal relato era verídico, constatei que nas provas do ENEM de 1998 até 2017 nenhuma questão envolveu o conteúdo de Função Modular.

Entre relatos de colegas professores de Matemática e de meus alunos, notei que pouca atenção é dada ao ensino de Função Modular, assim, baseando-me nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 2006), que dão prioridade ao estudo de Função na Educação Básica, busquei na minha formação continuada, no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolver uma pesquisa que pudesse ter como produto um apoio didático, metodológico e epistemológico para professores de Matemática no ensino de Função Modular a fim de contribuir na superação das dificuldades de ensino e aprendizagem desse objeto matemático.

Por outro lado, nos livros didáticos, o assunto Função Modular é visto de maneira superficial, como por exemplo, o valor do módulo de um número, não sendo exploradas todas as suas propriedades. Além disso, mesmo quando abrangem o item Função Modular, os exemplos dos diferentes comportamentos e representações são colocados de uma forma bem simples e repetitiva, parecendo ser até uma “receita de bolo”, sem que explore do aluno a reflexão e os diversos significados desse conteúdo no dia-a-dia, como por exemplo, em contas de energia elétrica e variação de temperatura. Logo, não é valorizada a necessidade da formação dos alunos para se tornarem críticos e aptos a viverem em sociedade e agirem em seu meio.

Neste sentido, assumi o desafio de também superar meus obstáculos epistemológicos sobre o assunto Função Modular de forma mais profunda elevando a investigação à nível superior em livros de Cálculo e Fundamentos da Matemática, onde tive a oportunidade de promover uma conexão do conteúdo com outras áreas do conhecimento e até mesmo de analisar de formas diferentes como a Integral.

O objeto em questão, estudo da Função Modular, tem um destaque em órgãos federais como a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

(CAPES), uma fundação vinculada ao Ministério da Educação do Brasil que atua na expansão e consolidação da pós-graduação *Stricto Sensu* em todos os estados do país, no qual foi realizado um estudo e observado que a produção de trabalhos acadêmicos em Educação Matemática no Brasil, no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem de Valor absoluto, Função Modular, Equação Modular e Inequação Modular, apresenta poucos trabalhos específicos sobre o tema em questão, isto ratifica a necessidade de promover uma nova metodologia diferente da aula clássica para o desenvolvimento da Função Modular.

Segundo Ponte (2005), a dificuldade sobre o estudo de Função Modular está no número de tarefas que favorecem caminhos divergentes, permitindo exploração com diferentes graus de profundidade e conseqüentemente, podem ser trabalhados em vários anos de escolaridade e por alunos com níveis de desempenho muito diferenciados. Por esta razão não se justifica a fragmentação curricular presente em quase todo ensino de Função no Ensino Médio, visto que princípios importantes como a continuidade e o limite de uma função são estudados após a exploração de gráficos. Não se trata de esgotar todo o estudo da Função em um determinado momento, porém proporcionar uma abordagem integrada que leve a uma aprendizagem maximizada de funções e suas aplicações.

Os trabalhos pedagógicos realizados por Cabral (2017) em sala de aula, apresentam experiências favoráveis com os conteúdos matemáticos da Educação Básica e as Sequências Didáticas construídas seguem o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC'S). Baseado nestas experiências faço a pressuposição que uma Sequência Didática estruturada segundo este modelo pode minimizar os problemas apontados no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos matemáticos relativos à Função Modular. O modelo também possui elementos que contribuem na consolidação e aplicação dos conceitos matemáticos na resolução de problemas em turmas do Ensino Médio.

Diante deste cenário, emergiu a necessidade de resposta ao seguinte questionamento: *Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC'S) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de função modular?*

Esta dissertação tem o objetivo de estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de

Função Modular, restrito aos casos de função afim. Para tanto, elencamos os seguintes objetivos específicos para balizar o desenvolvimento da pesquisa:

- Identificar as percepções dos alunos e professores quanto aos conceitos de Função Modular por meio de questionário;
- Efetuar revisão bibliográfica à respeito dos processos de ensino e de aprendizagem sobre Função Modular;
- Analisar as orientações dos documentos oficiais sobre o tema em questão;
- Consultar a abordagem do tema nos livros didáticos para identificar as metodologias aplicadas;
- Elaborar Sequência Didática envolvendo Função Modular de acordo com o modelo proposto por Cabral (2017), tomando por base a revisão bibliográfica, as percepções dos alunos e professores e as diretrizes dos documentos oficiais;
- Aplicar um teste de verificação de conteúdos matemáticos necessários para inicialização da aplicação da Sequência Didática na turma de 1º Ano do Ensino Médio tendo em vista a realização da oficina;
- Aplicar a Sequência Didática numa turma de 1º Ano do Ensino Médio, subdividida em cinco grupos de seis alunos;
- Efetuar registro da aplicação por meio de áudio para posterior transcrição e análise das interações ocorridas durante o processo de aplicação da Sequência Didática;
- Analisar os dados obtidos a partir dos registros efetuados por meio da Análise do Discurso e Análise Microgenética visando a identificação de potencialidades da Sequência Didática aplicada;
- Apresentar elementos que caracterizem o potencial da Sequência Didática aplicada no ensino aprendizagem de função modular.

Assim, este estudo apresenta as bases teóricas e metodológicas da pesquisa; os estudos e as concessões sobre o ensino de Função Modular; apresentação Matemática do objeto; apresentação e instrução da Sequência Didática proposta; apresentação da metodologia que será utilizada na aplicação da sequência e na análise dos resultados.

A fim de fundamentar a base teórica e metodológica para o planejamento e elaboração da Sequência Didática, foram selecionadas as teorias das Situações

Didáticas de Brousseau (2008) e a Sequência Didática de Cabral (2017). Para análise de resultados foram utilizadas: a Análise Microgenética de Góes (2000) e Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002).

Os estudos e concepções do ensino de Função Modular foram analisados a partir de uma revisão de literatura das diretrizes da educação, dos estudos teóricos e experimentais e dos livros didáticos. Também foi realizada uma pesquisa de campo com alunos egressos e professores.

Na apresentação Matemática do objeto foram abordados os conceitos e propriedades de módulo, composição de função, Função Modular e comportamento gráfico. Essa apresentação teve como objetivo dar suporte teórico e capacitação ao professor para a aplicação da Sequência Didática proposta. Em relação a Sequência Didática, apresentação e instruções, foram descritos todos os passos da aplicação do Produto Educacional construído a partir dos estudos e fundamentações anteriormente apresentados.

Ao final foi abordado como pretende-se aplicar e analisar os resultados da pesquisa baseado nas teorias didáticas e metodológicas adotadas e descritas nos capítulos anteriores. Ao apresentar este projeto de dissertação almeja-se que seja apreciado de modo que o produto proposto seja aprimorado para se tornar uma potencial ferramenta para o ensino de Função Modular no Ensino Médio.

Sobre a estrutura desta pesquisa, o primeiro capítulo buscou detalhar as bases teóricas que se relacionam a esta proposta didática e foi dividida em 5 seções. A saber, a primeira seção sintetiza a Teoria das Situações Didáticas (TSD), modelo teórico desenvolvido por Brousseau (1986) que analisa a prática dos professores e a didática da Matemática. A segunda seção retrata sobre a metodologia de Sequências Didáticas, definida como um conjunto de atividades que obedecem a uma estrutura lógica pré-estabelecida e a um objetivo educacional determinado. A terceira seção relacionou-se a segunda por explorar o modelo de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) desenvolvido por Cabral (2017), este modelo favorece a elaboração de Sequências Didáticas e possibilita uma ordenação das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula por meio desta metodologia. A quarta seção aborda os pressupostos da Análise Microgenética, um sistema de verificação de indícios de aprendizagem que são analisados em pequenos fragmentos das interações que ocorrem em sala de aula. Por meio dessa ferramenta, é possível verificar as potencialidades de uma Sequência Didática para a aprendizagem de um

determinado conteúdo matemático. Na última seção do capítulo 1, descreve-se a Análise do Discurso, um instrumento que favorece a análise das palavras mencionadas durante a realização de uma atividade, dando importância às interações e produções de significados que surgem no decorrer do discurso entre professor e alunos.

O segundo capítulo desta pesquisa aborda o Ensino de Função Modular, e traz algumas considerações sobre o que se tem realizado em sala de aula, com este conteúdo abordado em 3 seções. Na primeira seção sobre Revisão de Literatura foram verificados os documentos acadêmicos que se relacionavam com o objeto matemático desta pesquisa, entre os quais foram analisados documentos oficiais das Diretrizes da Educação como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular, os descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica e a Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio; Estudos Teóricos classificados como dissertações de mestrado que propõem teorias e metodologias para o ensino de Função Modular; Estudos Experimentais determinados como trabalhos que elaboraram e aplicaram propostas didáticas em sala de aula; Livros Didáticos do 1º ano do Ensino Médio que foram aprovados pelo Programa Nacional de Livros Didáticos e analisados conforme a estrutura e apresentação do conteúdo de Função Modular. A segunda seção do capítulo 2 detalha a Concepção dos Alunos Egressos, a respeito da Função Modular, por meio de um teste de verificação da aprendizagem, no qual identificou as principais dificuldades enfrentadas no conteúdo em questão. A terceira e última seção do capítulo 2 retrata a Concepção dos Professores sobre o ensino da Função Modular.

No terceiro capítulo, reservou-se para explorar as bases matemáticas da Função Modular por meio das definições, propriedades, e demonstrações inerentes a esse conteúdo. Neste capítulo, foi determinado uma única sessão, para retratar os Recursos Didáticos para a Construção de Gráficos, explicando os processos de reflexão e translação nos eixos do plano cartesiano.

A partir das informações levantadas nos três capítulos iniciais, o capítulo 4 apresenta a Sequência Didática para o ensino da Função Modular. Para tanto, antes da aplicação da Sequência Didática, determinou-se um teste de Verificação de Conhecimentos, sobre a Função Afim e Módulo, para identificar a habilidade dos alunos nesses conteúdos preliminares. Houve a necessidade de elaborar uma Oficina de Nivelamento, para que alunos que não obtiveram um bom desempenho, pudessem

adquirir conhecimento suficiente para a aplicação da Sequência Didática. Após estes estágios iniciais, a Sequência Didática foi aplicada, sendo ela dividida em 4 atividades intrinsicamente interligadas, propondo o conceito, a extensão, o aprofundamento e a generalização da Função Modular. Finalizada a aplicação da Sequência Didática, houve a realização de uma Avaliação sobre a Função Modular, composta por 5 questões envolvendo situações-problemas abstratas, que se relacionaram diretamente às atividades propostas na Sequência Didática.

O quinto capítulo expressa detalhadamente a Aplicação e Validação da Sequência Didática, dividido em duas sessões. A primeira sessão descreve o Relato das Atividades realizadas durante a aplicação da Sequência Didática, na qual transcreveu-se os diálogos realizados entre os alunos e o professor, demonstrando a interatividade em sala de aula. Na segunda sessão são apresentados os resultados alcançados com a aplicação da Sequência Didática por meio dos Índícios de Aprendizagem analisados conforme a Análise Microgenética e a Análise do Discurso.

Após a exposição das bases teóricas, que fundamentaram esta pesquisa, e a aplicação da Sequência Didática seguida de seus resultados, segue-se as considerações finais deste estudo, retratando a sua relevância educacional no ambiente escolar. Como resultados notáveis, percebeu-se que os episódios analisados revelaram pontos fundamentais favoráveis aos processos de ensino e aprendizagem da Função Modular, considerados relevantes para a obtenção da resposta da questão norteadora da pesquisa e a concretização do objetivo proposto pela mesma.

Notou-se também que os comandos articulados e utilizados o longo das atividades contribuem significativamente na construção dos conceitos matemáticos. Essa articulação tornou as questões da Avaliação Aplicativa mais compreensíveis aos alunos os quais obtiveram um bom desempenho nesta etapa de validação da Sequência Didática.

A seguir são expostos os capítulos descritos anteriormente apresentados e detalhados para o melhor entendimento do desenvolvimento da pesquisa que resultou nesta dissertação.

1 BASES TEÓRICAS DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentados os aportes teóricos e metodológicos da pesquisa que fundamentarão a maneira de construção da Sequência Didática e análise dos resultados.

Na construção do produto educacional para o ensino de Função Modular foram consideradas: a teoria das Situações Didáticas Brousseau (2008) e o construto estruturante da Sequência Didática de Cabral (2017).

Já para a análise de resultados obtidos da captura da aplicação da Sequência Didática foi utilizada a Análise Microgenética de Góes (2000) e Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002).

1.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), é um modelo teórico de pesquisas sobre a prática de professores de Matemática e sobre Didática Matemática. Essa teoria foi adotada como base da fundamentação teórica e metodológica da pesquisa, dando sentido às situações que pretende-se desenvolver.

Para Teixeira e Passos (2013, p. 157), na Teoria das Situações Didáticas, docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem e, segundo Almouloud:

Na TSD, o milieu é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o milieu adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão a respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (ALMOULOU, p. 35, 2007).

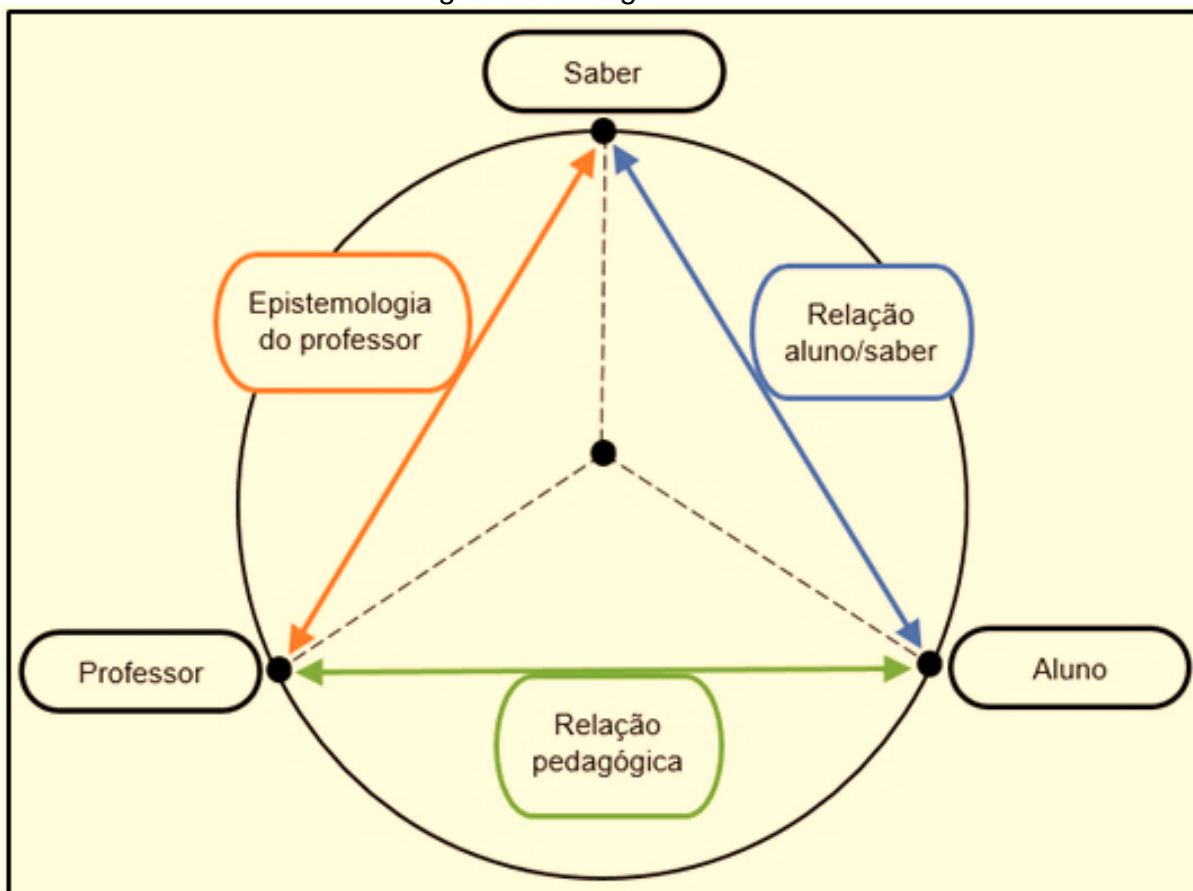
As situações didáticas são planejadas e elaboradas pelo professor de Matemática, para que o aluno construa e mobilize conhecimentos, para obtenção de objetivos educacionais, e para os quais, o professor tem controle relativo. Neste sentido, estabelece-se um “contrato didático” entre professor e aluno, nem sempre explícitos, com o objetivo de criar condições favoráveis a aprendizagem.

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1986, p. 8 apud TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 163)

Como nesse método pretende-se que o saber seja construído pelo aluno através das intencionais e progressivas intervenções do professor, espera-se que o educando seja capaz de externalizar as transformações cognitivas, na troca de informações com o *milieu*, promovidas nas situações didáticas de formulação e validação. Nessas situações, a linguagem Matemática do aluno gradativamente se tornará mais apropriada, e sua capacidade de argumentar e convencer será reforçada e evidenciada em suas verbalizações.

Como afirma Brousseau (2008, p. 102): “o papel do professor também é institucionalizar!”. Na Institucionalização são estabelecidas as convenções sociais e é revelada a intenção das situações didáticas propostas pelo professor, e a ele é conferida a tarefa de formalizar e generalizar os conceitos pretendidos.

Figura 1: Triângulo didático



Fonte: Adaptado de Almouloud (2004, p. 32)

Tendo em conta que nem todas as intenções educacionais do professor são explícitas, isto é, o professor não tem controle, e a responsabilidade pelo desenvolvimento e gestão é do aluno, chamamos essas situações de “Situações Adidáticas”.

As Situações Adidáticas se iniciam quando o aluno se desafia a resolver determinada situação proposta pelo professor, produzindo conhecimentos intuitivos/operacionais a partir de suas experiências pessoais, sobre as quais, o professor não possui controle.

O aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites, na direção de adquirir novas competências com o seu próprio esforço. Portanto, é necessário que o professor oportunize ao aluno o máximo de independência, para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos para a resolução de problemas por meio de suas elaborações e de seus conceitos. O professor deverá encontrar um equilíbrio na 25 quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno. (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 165)

Neste sentido, o aluno passa por situações de Ação, Formulação e Validação, onde estabelece modelos explicativos e esquemas teóricos, para responder às intervenções do professor, e busca meios de validar ou refutar modelos e esquemas anteriormente constituídos.

Por fim, na teoria das Situações Adidáticas, pretende-se promover a transposição didática, isto é, a transformação do conhecimento científico em saber escolar. O que é Transposição Didática?

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39)

Essa proposta metodológica reforça a importância do papel do professor para analisar, selecionar e inter-relacionar o conhecimento científico, adequando-o às reais possibilidades cognitivas dos estudantes, começando por situações de menor custo cognitivo e avançando progressivamente para o que se pretende ensinar de determinado objeto matemático.

Nessa concepção de ensino, o professor representa o conhecimento educacional, e organiza o conhecimento escolar, que se pretende ser transmitido, através de uma troca de interações (comunicação) entre professor e aluno em um meio didático (*milieu*), planejado pelo professor e onde o aluno atua de forma ativa. Nesse processo, existe uma intencionalidade nas interações do professor, com o objetivo de criar condições favoráveis à aprendizagem, com controle relativo, haja vista que o saber só é considerado adquirido de fato quando o aluno consegue usá-lo

em uma Situação Adidática, isto é, fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, p. 35)

As Situações Didáticas são planejadas e elaboradas pelo professor de Matemática, para que o aluno construa e mobilize conhecimentos, para obtenção de objetivos educacionais, estabelecendo-se um “Contrato Didático” entre professor e aluno, nem sempre explícitos. As Situações Didáticas mobilizadas pelos discentes na consecução das respostas às questões propostas pelo professor, são compostas de fases de Ação, de Formulação, de Validação e de Institucionalização, cujas características apresentam-se no quadro a seguir conforme Brousseau (1996), Brousseau (2008) e Almouloud (2004).

Quadro 1: Classificação das Situações Didáticas

SITUAÇÃO DE			
Ação	Formulação	Validação	Institucionalização
Interação entre os alunos e o <i>milieu</i> , a partir das proposições do professor.	Comunicação de informações entre os alunos e com o professor, momento de discussão e busca de um consenso com mobilização da linguagem oral e escrita.	Validade das informações formuladas, momento de apresentar um modelo de resolução para as proposições do professor, justificando-o por meio de verificações ou demonstrações para explicar o raciocínio empregado.	Os alunos assumem o significado do conhecimento elaborado e é conferida ao professor a tarefa formalizar e generalizar os conceitos pretendidos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Desse modo, o aluno passa por situações de ação, formulação e validação, onde estabelece modelos explicativos e esquemas teóricos para responder às intervenções do professor e busca meios de validar ou refutar modelos e esquemas anteriormente constituídos, para que ao final, tais validações possam ser formalizadas pelo professor, com o devido rigor matemático, e assim, institucionalizar o saber adquirido.

No momento em que é promovida a transformação do conhecimento científico em saber escolar ocorre a transposição didática. Esse momento acontecerá de forma diferente para cada indivíduo e dependerá das possibilidades cognitivas de cada um e das interações aluno-professor e aluno-aluno.

No que tange a esta pesquisa, para que se consiga alcançar maior controle possível desses elementos e situações envolvidas na TSD, as seções que investigam as dificuldades de aprendizagem na percepção de estudantes, professores e a revisão de estudos caracterizarão os sujeitos envolvidos na pesquisa. O estudo do objeto matemático dará o suporte epistemológico para que o pesquisador-professor possa construir e aplicar um *milieu* potencialmente eficaz à aprendizagem do conceito de função.

1.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)

Sequência Didática é o tipo de produto educacional que foi selecionado para o ensino de Função Modular. Trata-se de “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABALA, 1998, p.18 apud CABRAL, 2017, p. 31)

A metodologia Sequência Didática nasceu na década de 80 em Genebra, resultante dos estudos de um grupo de pesquisadores da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação na Universidade de Genebra, onde estabeleceram os fundamentos teóricos praticados na França. No Brasil, desde a década de 90 é indicada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para qualquer campo do conhecimento, inicialmente na linguística e posteriormente na Matemática.

Por ser um conjunto estruturado, a Sequência Didática exige um planejamento com detalhamento, justificativa e objetivos claros levando em conta, os aspectos cognitivos e epistemológicos do aluno. Assim, o aluno é o sujeito do aprendizado e a sala de aula é um espaço de interação. O professor é um facilitador da construção do conhecimento do aluno.

Preliminarmente, o professor avalia a condição de aprendizagem do aluno e a partir da avaliação dos conhecimentos prévios planeja, aplica e avalia as etapas da construção do conhecimento.

O procedimento de SD tem a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação. (CABRAL, 2017, p. 32)

Nesse sentido, a metodologia de Sequências Didáticas promove uma integração de todas as fases do planejamento escolar, nas quais determinam os objetivos a serem alcançados, os recursos disponíveis para a realização das atividades, os materiais necessários para a aplicação, o tempo de discussão do tema proposto, entre outras situações, que necessitam ser refletidas no ambiente escolar. Conforme apontou Oliveira (2018), as Sequências Didática vêm ganhando espaço dentro da Educação Matemática, pois esta metodologia favorece com que o professor dê significado aos conteúdos matemáticos trabalhados em sala.

1.3 UARC

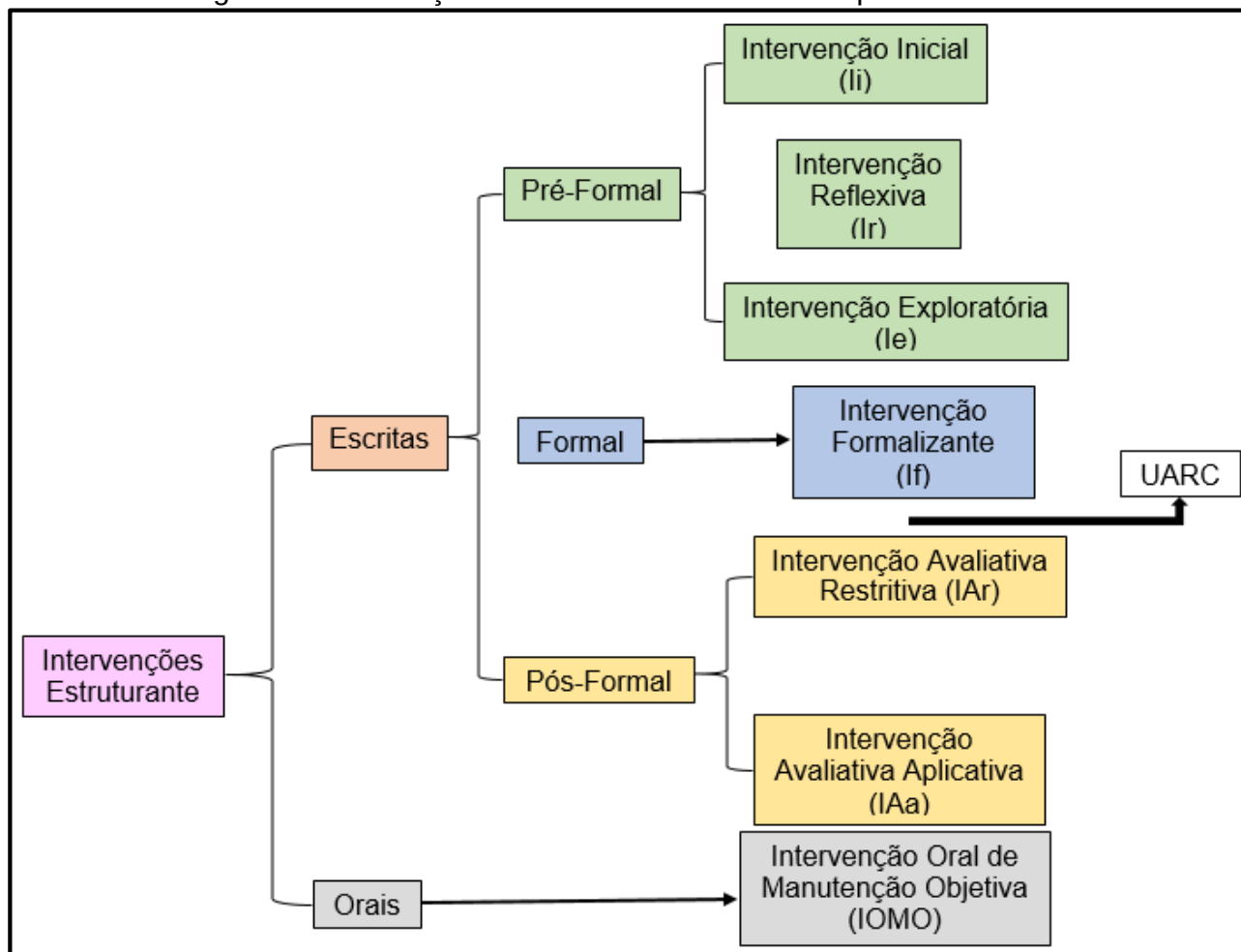
O trabalho de pesquisa apresentado nesta dissertação tem como objeto de estudo as potencialidades de uma Sequência Didática construída especificamente para o ensino de Função Modular, tomando como base o modelo proposto por Cabral (2017) intitulado de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC). Este modelo já mostra resultados bastantes significativos em relação ao processo de ensino e aprendizagem, tendo como objetivo principal colocar os alunos a participarem do processo de construção e os mesmos perceberem as regularidades, sendo que, intuitivamente irão realizar as generalizações do conceito do objeto matemático em questão.

Para que o construto analógico das UARC's seja bem compreendido, passo a descrevê-lo em termos de seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma SD de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nos níveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restrita (IAr) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa). (CABRAL, 2017, p. 40)

As UARC'S estão subdivididas em sete categorias denominadas de Intervenções Estruturantes, direcionadas para a elaboração de Sequências Didáticas de conteúdos matemáticos. Assim, esse modelo foi aplicado na Educação Básica, tendo como público os alunos do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Paes de Carvalho (CEPC).

As intervenções estruturantes podem ter um melhor entendimento a partir da análise da figura abaixo que nos mostra como elas estão dispostas para o desenvolvimento do modelo de Cabral (2017).

Figura 2: Intervenções Estruturantes de uma Sequência Didática



Fonte: Adaptado de Cabral (2017, p. 97)

Neste sentido, Cabral (2017) argumenta:

Estou usando o termo “Intervenção” no sentido de que existe uma intencionalidade nas ações dirigidas pelo professor diante dos seus alunos. Uso, portanto, esse termo no sentido de evidenciar o papel de orientador do pensamento em construção que é uma prerrogativa intransferível do professor. Suas ações de ensino são intervenções que visam estimular o aluno a atingir os objetivos de aprendizagem. Tais intervenções podem ser compreendidas, em última análise, na perspectiva de ações interativas eleitas e dirigidas pelos professores com a intenção de promover de acordo com os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural (Vygotsky) as chamadas Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP) que permitem ao aprendiz avançar de um Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) para um Nível de Desenvolvimento Efetivo (NDE). (Ibidem, 2017, p. 40)

O modelo de Cabral (2017) que apresenta em sua configuração as chamadas “intervenções” ilustradas na Figura 2, vem a satisfazer os pressupostos para este

trabalho, visto que o professor apresenta uma intencionalidade específica para guiar seus alunos. Assim, a estrutura deste modelo evidencia claramente a função do professor como um orientador do pensamento que será construído. As orientações fornecidas pelo docente causam um estímulo nos alunos para que os mesmos atinjam os objetivos determinados antes da aplicação da Sequência Didática. Portanto, este processo de mediação do conhecimento relaciona-se aos conceitos das conhecidas Zonas de Desenvolvimento da Psicologia Histórico-Cultural formulada por Vygotsky.

A organização de uma UARC apresenta a Intervenção Inicial (Ii) para dar início ao processo a fim de despertar a curiosidade do aluno para o objeto matemático em questão e assim colocar o mesmo na cena deste trabalho. A Intervenção Reflexiva (Ir), é quando o professor começa a realizar perguntas referentes ao objeto matemático, tomando como base o que já ocorreu na Intervenção Inicial. A Intervenção Exploratória (Ie) ocorre no momento em que o professor faz com que o processo aprofunde a reflexão em relação ao objeto matemático, fazendo assim que o aluno chegue a plataformas avançadas sobre o objeto em questão.

A Intervenção Formalizante (If), é o momento em que organiza-se todo o conhecimento descoberto dos alunos no processo e o professor introduz a linguagem Matemática (formal). Após a Intervenção Formalizante aplica-se a Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr), que tem como objetivo avaliar o aluno por meio de questões no qual podemos aplicar o aprendizado do mesmo com o conhecimento formal do objeto em questão. Assim, chega-se na Intervenção de Avaliação Aplicativa (IAa) onde são aplicadas questões para que o aluno possa desenvolver a resolução da mesma com o conhecimento adquirido no processo desenvolvido.

No decorrer do processo frequentemente existe o diálogo entre o professor e o aluno no qual são as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO), que visam manter o objetivo dos estudos, a linguagem Matemática, orientar os desvios em relação ao conceito do objeto e permanecer ativo o conteúdo matemático em questão.

Como aprofundamento da utilização das UARC'S em um contexto educacional, foi analisado o trabalho de Gonçalves (2019) no qual teve como objetivo estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o Ensino e a Aprendizagem de Função Quadrática. O autor utilizou como recursos o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e uma calculadora feita no *App Inventor* para a elaboração de suas atividades. Na construção de sua Sequência Didática, Gonçalves (2019) considerou que esta estratégia oportuniza um ambiente

educacional de interação de forma dialógica entre os alunos e o professor na busca da (re)construção dos conceitos e propriedades matemáticas contidas em cada atividade. As atividades e intervenções elaboradas seguiram as matrizes de referência do SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), SISPAE (Sistema Paraense de Avaliação da Educação) e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) como forma de direcionamento para a superação das dificuldades apresentadas pelos alunos. Ao concluir a pesquisa, o autor considera que a estrutura do modelo de Cabral (2017) para as Sequências Didáticas contribui consideravelmente para a (re)construção dos objetos matemáticos por meio de um estímulo constante do professor que tornam os conceitos matemáticos mais compreensíveis, há uma melhoria na interação do professor com os alunos e entre os mesmos valorizando seus conhecimentos prévios e possibilita a capacidade de argumentação para a exploração de outras possibilidades de ensino e aprendizagem.

Para a execução dessa pesquisa, deve-se considerar que o processo de construção da SD, segundo a estrutura de UARC, passa pelo desenvolvimento epistemológico do professor acerca do objeto matemático a ser ensinado, delimita os critérios do instrumento de pesquisa e maneira como a SD será experimentada. Assim sendo, a construção do objeto de pesquisa é fruto de um minucioso estudo que será apresentado nos capítulos subsequentes e que estão articulados propositadamente para responder a questão de pesquisa.

1.4 ANÁLISE MICROGENÉTICA

No campo da educação e da psicologia é constantemente usado a abordagem metodológica da Análise Microgenética, destacando os estudos que relacionam a constituição dos sujeitos no que se diz nos contextos educativos. Góes (2000, p. 9-10), define a Análise Microgenética como sendo “uma forma de construção de dados que requer atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais as relações inter-subjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos”.

Os indícios de aprendizagem são mínimos detalhes que ocorrem nas interações em sala de aula entre professor-aluno e aluno-aluno são identificados frequentemente através do instrumento metodológico da Análise Microgenética. Para que ocorra a análise, o professor deverá ter uma organização didática para que fique bem claro a sua intenção em todas as atividades desenvolvidas durante o processo

de (re)construção do objeto matemático. Góes (2000, p. 10), salienta que o caráter proveitoso dessa ferramenta metodológica no estudo de questões referentes à subjetivação em sua necessária relação com o desenvolvimento intersubjetivo e distingui-o de outras análises de micro eventos inscritos em correntes teóricas distintas.

Góes (2000), considera pertinentes as considerações feitas por Wertsch, entretanto as julga insuficientes para a caracterização plena desse tipo de análise e afirma que:

Essa análise não é micro porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. (Ibidem, 2000, p. 15)

O pesquisador (professor) tem como missão retirar episódios significativos para a análise que consistem em unidades que, segundo Góes (2000, p. 14), Vygotsky define como “aquela instância de recorte que conserva as propriedades do todo que se pretende investigar”, e neste recorte está incluída uma análise minuciosa de todo um processo, que configura a sua origem social e as transformações que podem ocorrer posteriormente. Afirma que a unidade é o componente vivo do todo. Faz uma interligação com a Biologia, é como se essa unidade analisada fosse uma das inúmeras células do corpo humano que precisa ser estudada e compreendida. A célula possui características e propriedades, ou seja, ela guarda e carrega “código genético” único, facilitando assim a compreensão do todo investigado.

A partir dos pressupostos de Vygotsky em que os processos humanos têm origem nas relações com os outros e com a cultura que os envolve, são essas relações que podem ser investigadas e analisadas quando for feito o exame de uma ação do sujeito em questão. Tem-se então que a Análise Microgenética é um sistema que envolve um acompanhamento detalhado da formação de um processo que revela as ações do sujeito e suas relações interpessoais dentro de um pequeno espaço de tempo (GÓES, 2000, p. 14).

Assim, a Análise Microgenética também possibilita a descoberta de impasses e como superá-los, fazendo com que o personagem principal (aluno), consiga construir o seu próprio conhecimento. A pesquisa realizada nesta dissertação aplica

a Análise Microgenética associada as atividades propostas na Sequência Didática, tendo como método de aferir o processo e os resultados de cada etapa desenvolvida da Sequência Didática em sua aplicação.

Os recortes foram feitos a partir de registros escritos dos alunos, nas atividades e por meio das interações verbais e registros por meio de gravações em áudio. A análise desses recortes objetiva identificar possíveis indícios de aprendizagem, e a forma como ocorrem no processo, durante a aplicação da Sequência Didática, acompanhando cada fase da intervenção estruturante proposta por Cabral (2017). A Análise Microgenética também associa-se com as contribuições da Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002), no qual foi feita uma breve descrição no tópico seguinte.

1.5 ANÁLISE DO DISCURSO

A ferramenta que se destaca na didática é a “palavra”, pois é o item mais importante na linguagem humana. É de fundamental importância descobrir o essencial dos conteúdos transpostos em tudo que ocorra em sala de aula no decorrer do processo e para isso será utilizada a Análise do Discurso.

O objetivo principal neste tópico, é apresentar a estrutura analítica proposta por Mortimer e Scott (2002), para analisar as interações e a produção de significados que surgem a partir do discurso de professores e alunos em sala de aula. Neste sentido, Mortimer e Scott (2002) afirmam que:

O processo de aprendizagem não é visto como a substituição das velhas concepções, que o indivíduo já possui antes do processo de ensino, pelos novos conceitos científicos, mas como a negociação de novos significados no espaço comunicativo no qual há o encontro entre diferentes perspectivas culturais, no processo de crescimento mútuo. As interações discursivas são consideradas como constituintes do processo de construção do significado. (MORTIMER; SCOTT, 2002, p. 284)

A estrutura apresentada para Análise do Discurso, por Mortimer e Scott (2002), está baseada em três tópicos: ensino, abordagem e ações, sendo que se sub classifica em cinco aspectos inter-relacionados com foco no papel do professor, como: intenções do professor, conteúdo, abordagem comunicativa, padrões de interação e intervenção do professor. As estruturas e categorias propostas por Mortimer e Scott (2002), serão apresentadas no quadro abaixo:

Quadro 2: Aspecto de Análises das Interações Verbalis

FOCO DO ENSINO	Intenções do professor	Criando um problema.	Envolver o aluno intelectualmente no desenvolvimento da “estória científica”.
		Explorando a visão dos alunos.	Explorar os entendimentos a respeito de ideias específicas.
		Introduzindo e desenvolvendo a “estória científica”.	Disponibilizar as ideias científicas no plano social da sala de aula.
		Guiando os estudantes e dando suporte ao processo de internalização.	Dar a oportunidade do pensar, falar com as novas ideias científicas. E dar suporte para a produção de significados individuais, da internalização das ideias.
		Guiando os estudantes na aplicação das ideias.	Dar suporte na aplicação das ideias.
		Sustentando o desenvolvimento da “estória científica”.	Promover debate sobre o desenrolar da “estória científica”.
	Conteúdo	Descrição	Envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes.
		Explicação	Envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico.
		Generalização	Envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
ABORDAGEM	Abordagem comunicativa	Interativo / dialógico	Professor e estudante exploram ideias, formulam perguntas autênticas e consideram diferentes pontos de vista.
		Não interativo / dialógico	Professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista destacando similaridade e diferenças.
		Interativo de autoridade	Professor gerencia os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico.
		Não Interativo de autoridade	Professor apresenta um ponto de vista específico.
AÇÕES	Padrões de interação	Emergem na medida em que o professor e aluno alternam turnos de fala na sala de aula. Onde o mais comum são as tríades IRA.	Tríade I-R-A : Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor. Cadeias não triádicas: exemplo I-R-P-R-P ou I-R-F-R-F. onde o P significa uma ação discursiva que permiti o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.
	Intervenção do Professor	Dando forma aos significados	A ação do professor é a de introduzir um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados.
		Selecionando significados	O professor considera a resposta do estudante na sua fala ou ignora a resposta de um estudante.
		Marcando significados chaves	Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado.
		Compartilhando significados	O foco é tornar os significados disponíveis para todos os alunos. Assim a ação do professor é de repetir a ideia de um estudante para todo a classe; pedir a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilhar resultados diferentes; pedir aos estudantes que organizem suas ideias com toda classe.
		Checando o entendimento dos alunos	O foco é verificar que significados os estudantes estão atribuindo em situações específicas. E a ação do professor é de: Pedir a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escreva suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados.
		Revedo o progresso da estória científica	O foco é recapitular e antecipar significados. A ação do professor se reflete em: Sintetizar os resultados de um experimento particular; recapitular as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: Mortimer e Scott (2002)

A Análise do Discurso desenvolvida no processo de pesquisa deste trabalho, tem como finalidade a identificação dos padrões de interação e também busca consolidar com a Análise Microgenética, tendo em vista responder à questão central deste trabalho, qual seja: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas e Reconstrução Conceitual potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Função Modular?

Assim, a Análise de Discurso como um dos instrumentos metodológicos desta pesquisa foi consolidada na subseção 5.2 de Análise dos resultados a fim de retratar os minuciosos indícios expostos nas falas dos alunos ao resolverem as atividades da Sequência Didática para o ensino da Função Modular. Na qual foi possível identificar o desenvolvimento das concepções empíricas e não-formais nos diálogos gravados que ocorreram em sala de aula seguindo os tópicos referentes ao ensino, as abordagens e as ações no ambiente educacional.

Em relação a este trabalho, é possível dizer que como pressupostos teóricos a concepção sobre Sequência Didática descrita por Cabral (2017), para a construção das atividades que a materializa das construções de Góes (2000) e de Mortimer e Scott (2002) que correspondem respectivamente a Análise Microgenética e a Análise do Discurso como propostas metodológicas de análise das interações dialógicas entre professor-aluno e aluno-aluno um processo de ensino e de aprendizagem.

Os aspectos da Análise do Discurso descritos no quadro 4 são importantes tanto para a construção da Sequência Didática, quanto para a análise dos resultados da experimentação, pois os indícios de aprendizagem passaram pela Análise Microgenética atrelada ao discurso adotado nas intervenções e intenções do professor.

2 SOBRE O ENSINO DA FUNÇÃO MODULAR

Neste capítulo apresenta-se informações sobre o ensino de Função Modular. A intenção é ter um panorama mais preciso das condições e necessidades do ensino do objeto matemático, segundo a perspectiva de uma revisão de literatura em que analisou-se livros didáticos e dissertações com pesquisas correlacionadas a essa.

Além disso, são apresentados os resultados de duas pesquisas de campo: uma com professores e outra com estudantes. Nessas pesquisas objetivou-se diagnosticar as principais dificuldades de ensino e aprendizagem de Função Modular.

Somado a isso, são citados elementos que subsidiaram a condução da pesquisa, bem como nortearam as intervenções didáticas e de metodológicas utilizadas no planejamento e elaboração do Produto Educacional que será proposto ao final para o ensino de Função Modular.

2.1 REVISÃO DE LITERATURA

Considerou-se relevante esta revisão de literatura para a fundamentação, continuidade e alcance dos objetivos dessa pesquisa. Nela, objetivou-se identificar o que os estudos teóricos e experimentais apontam como potenciais recursos e metodologias de ensino e aprendizagem de Função Modular, bem como os obstáculos e desafios encontrados em tais estudos que possam colaborar para essa pesquisa.

A metodologia adotada para realizar esta revisão de literatura constituiu-se das seguintes fases: a) Levantamento e seleção bibliográfica; b) Categorização; c) Análise individual das bibliografias; e d) Síntese das contribuições para nossa pesquisa.

O levantamento de seleção das bibliografias baseou-se nas diretrizes da educação, dissertações no banco de teses da CAPES, no banco de teses de programas de pós-graduação em Matemática e ensino de Matemática, sites acadêmicos, utilizando as palavras-chave “Função”, “Função Modular”, “Aprendizagem”, “Ensino de Função”.

Além do mais, foram selecionados 5 livros didáticos utilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para verificar a estrutura e organização do conteúdo de Função Modular proposto para o Ensino Médio.

A categorização dos estudos dividiu as referências em estudos teóricos e estudos experimentais. Nos estudos teóricos foram selecionados trabalhos que apontam teorias da educação e de ensino propondo seu uso em sala de aula. Os

estudos experimentais se basearam em pesquisas que aplicaram e analisaram resultados de experiências de ensino de Função Modular. Nos livros didáticos foram selecionados livros do 1º ano do Ensino Médio quanto as propostas de abordagem da Função Modular. As referências estão categorizadas e sintetizadas nos quadros 3, 4 e 5.

Quadro 3: Categorização da Revisão de Literatura

UNIVERSIDADE	AUTOR/ ANO	TÍTULO	NATUREZA/ CATEGORIZAÇÃO	OBJETIVO	METODOLOGIA	CONSIDERAÇÕES
PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE CAMPINAS	EDUARDO MONTEIRO DE SOUZA JUNIOR 2007	UMA ANÁLISE DE PESQUISAS ACADÊMICAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE O ENFOQUE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO	DISSERTAÇÃO / TEÓRICA	Verificar o grau de importância que a comunidade científica que investiga o ensino de Matemática tem dado ao estudo de Função Modular.	Qualitativa em relação à produção de dissertações e teses no período de 1997 a 2006.	Concluiu que torna-se mais evidente a necessidade de se construir novas práticas pedagógicas que consigam auxiliar o professor, não só de Matemática, no seu constante trabalho de lecionar.
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SEMI - ÁRIDO	JOSÉ VILANI DE FARIAS 2013	A MATEMÁTICA E O LÚDICO: TRABALHANDO FUNÇÕES COM O GEOGEBRA.	DISSERTAÇÃO / TEÓRICA	Identificar as dificuldades de aprendizagem, apresentar propostas de intervenções em sala de aula e analisar os resultados destas intervenções.	Aplicou uma avaliação com alunos de duas escolas de Pau dos Ferros, uma da rede estadual, José Fernandes de Melo, e outra da rede federal, IFRN, e contemplaram também os alunos do município de Riacho de Santana. No total foi aplicado com 430 alunos, onde os mesmos deveriam reconhecer as quatro funções (afim, quadrática, exponencial e logarítmica), por meio de sua lei de formação e também através de seu gráfico.	Concluiu que é possível inferir a utilização de software matemáticos, tendo a possibilidade de melhorar o processo ensino e aprendizagem, quer seja por tornar o processo mais dinâmico, interativo e participativo, por tornar alguns dos conceitos e resultados matemáticos passíveis de serem testados e experimentados na sala de aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quadro 4: Categorização da Revisão de Literatura

UNIVERSIDADE	AUTOR/ ANO	TÍTULO	NATUREZA/ CATEGORIZAÇÃO	OBJETIVO	METODOLOGIA	CONSIDERAÇÕES
PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS	DÁRCIO COSTA NOGUEIRA JUNIOR 2008	ELABORAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DE VALOR ABSOLUTO E DA FUNÇÃO MODULAR UTILIZANDO A ORGANIZAÇÃO CURRICULAR EM REDE	DISSERTAÇÃO / EXPERIMENTAL	Analisar os impactos que o ensino de Função Modular e valor absoluto podem promover na concepção geral de funções, proporcionando a construção de um novo significado para o estudante, até mesmo uma nova maneira de lidar com situações problemas e a investigação de novos conceitos.	Elaborou uma Sequência Didática em que o estudo do valor absoluto e a Função Modular ocorreu numa perspectiva curricular de rede, esta pesquisa foi adotada com abordagem qualitativa.	Evidenciou necessidade de se construir novas práticas pedagógicas que consigam auxiliar o professor, não só de Matemática, no seu constante trabalho de lecionar.
UNIVERSIDADE SEVERINO SOMBRA	WENDEL DE OLIVEIRA SILVA 2011	UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS	DISSERTAÇÃO / EXPERIMENTAL	Propor uma metodologia de ensino de funções que promovesse uma formação dos alunos preparando este para se tornar um ser crítico, apto a viver em sociedade e agir em seu meio.	Apresentou experiências de ensino utilizando um método que possibilita a abordagem de assuntos pertencentes ao conteúdo programático de Matemática do ensino básico em especial ao estudo das representações gráficas de algumas funções com enfoque nas transformações geométricas ocorridas no plano, com o auxílio de recursos tecnológicos, bem como sua aplicabilidade em situações do cotidiano.	Concluiu que os alunos de uma maneira geral, ao ingressarem no ensino superior, apresentam diversas dificuldades inerentes ao conceito de função, em especial no que se refere ao esboço de alguns gráficos e em sua aplicação em situações-problemas

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quadro 5: Categorização da Revisão de Literatura

UNIVERSIDADE	AUTOR/ANO	TÍTULO	NATUREZA/ CATEGORIZAÇÃO	OBJETIVO	METODOLOGIA	CONSIDERAÇÕES
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO	HELENA TAVARES DE SOUZA 2013	UM ESTUDO COM PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO SOBRE FUNÇÃO MODULAR POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA.	DISSERTAÇÃO / EXPERIMENTAL	Utilizar as tecnologias de informação e comunicação como estratégia pedagógica para o desenvolvimento das atividades aplicadas e compreensão dos gráficos referente as funções investigadas.	Metodologia qualitativa no qual os dados coletados através de interações sociais e analisados subjetivamente por ele. Mostrou que a pesquisa qualitativa é a mais indicada para atingir os seus objetivos, pois não interessa apontar a quantidade de erros ou acertos dos professores quando expressam algébrica e geometricamente a Função Modular.	Concluiu que a principal relevância do uso do software GeoGebra para o ensino de Função Modular baseada em resolução de problemas não reside no software em si, mas no planejamento dos professores para utilizá-lo como elemento mediador das aprendizagens, ou seja, a estratégia didática do professor é que, ao utilizar o software, cria possibilidade de maior experimentação das construções de autonomia.
CEFET / RJ DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO	FÁBIO GARCIA BERNARDO 2013	GRÁFICO DE FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM DINÂMICA E EXPERIMENTAL.	DISSERTAÇÃO / EXPERIMENTAL	Propor uma abordagem diferenciada daquela entendida como tradicional, com quadro negro e aulas expositivas se inserindo assim nessa proposta de mudança. Bernardo (2013) tem como objetivo central do seu estudo de funções o uso de computadores e do software GeoGebra para conseguir explorar as mesmas.	Pesquisa experimental com turmas de alunos em laboratório de Os registros que foram realizados nas fichas como conceitos, definições e observações em sala de aula. No laboratório os alunos receberam uma outra ficha e passaram 20 minutos destinados a uma ambientação e discussão de dúvidas e comentários acerca dos equipamentos e experiências a serem realizadas.	Concluiu que o uso e tecnologia no processo ensino-aprendizagem vem sendo discutido e está cada vez mais presente nas escolas. Muitas apresentam recursos mais sofisticados tais como projetores em sala, acesso à internet liberado, laboratórios de ciências e salas de multimídias. Essa realidade já presente em algumas escolas públicas, representa um grande avanço em direção ao reaparelhamento e reconstrução da escola.
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ	ADRIANE ELEUTÉRIO SOUZA 2014	O LÚDICO ASSOCIADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E JOGOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA	DISSERTAÇÃO / EXPERIMENTAL	Investigar os resultados obtidos no ensino e aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio ao se utilizar o lúdico associado a outras estratégias de ensino.	Sua metodologia parte dos altos índices de repetências diagnosticadas nas avaliações em larga escala e o desestímulo por parte dos estudantes, resultando em evasão escolar, os sérios problemas e as dificuldades que o ensino médio tem passado em relação ao ensino com vistas à aprendizagem de Matemática	Souza (2014), diz que de maneira geral considera que os objetivos inicialmente delineados foram atingidos mediante os resultados das atividades avaliativas diagnósticas aplicadas durante o processo de ensino e aprendizagem, e as respostas dos alunos aos questionários inicial e final forneceram um parâmetro comparativo para a pesquisa

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na análise individual das referências foram extraídos os seus objetivos, metodologias adotadas, seus aportes teóricos e metodológicos e análise de seus resultados. A determinação desses segmentos favoreceu para aprofundamento teórico de um campo pouco explorado como o conteúdo de Função Modular e o norteamento dos princípios metodológicos a serem desenvolvidos para a elaboração das atividades.

Por fim, foram sintetizadas as contribuições destes estudos para a fundamentação e alcance dos objetivos de nossa pesquisa sobre o ensino da Função Modular.

2.1.1 Diretrizes da Educação

Nesta subseção é abordado o ensino de função modular na perspectiva das diretrizes da educação. Para tanto são discutidos os elementos das orientações curriculares e das matrizes de avaliação atualmente adotadas para direcionar em que aspectos o produto educacional deve ser proposto ao ensino do objeto matemático.

A Sequência Didática será construída para ser aplicada a estudantes do Ensino Médio. Brasil (1996), A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), determina, dentre outras, como finalidade do Ensino Médio o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico e que se adotem metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes. Assim, objetiva-se fazer uma proposta que valorize a autonomia intelectual e a do aluno.

Brasil (1998, p. 44), Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), dá ênfase às conexões ao conceito de função como importantes para descrever e interpretar gráficos, comportamento de certos fenômenos com flexibilidade nas mais diversas situações para a partir disto construir um modelo de interpretação e investigação Matemática, o que se aplica a qualquer tipo de função, em nosso caso a Função Modular. Logo, o conceito de função e o comportamento gráfico serão considerados como conhecimentos mínimos para aplicação da sequência didática para o ensino de Função Modular.

Ainda em Brasil (1998, p. 47), ler, interpretar e utilizar representações Matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.), desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real, formular hipóteses e

prever resultados e selecionar estratégias de resolução de problemas também são habilidades que precisam ser consideradas no desenvolvimento dessa pesquisa.

É também um desafio fazer uma proposta que promova a articulação de diferentes registros e representações para maior compreensão dos conceitos pretendidos, como orienta a Base Nacional Comum Curricular:

Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio. (BRASIL, 2017, p. 519)

Até o que foi apresentado no momento, é perceptível que o currículo Brasileiro, no que tange ao ensino de Função, não trata especificamente de Função Modular, porém as habilidades a serem desenvolvidas abrangem ao estudo de todos os tipos de função. Não obstante, os mecanismos de avaliação também não tratam diretamente do objeto matemático, mas também avaliam habilidades pertinentes a seu estudo.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), no tema que tratam de números e operações/ álgebra e funções, seus descritores requerem habilidades tais como:

D 18- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela;
D 20- Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos;
D 21 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto. (SAEB, p. 107)

Tais habilidades e competências corroboram com as descritas anteriormente pelas orientações curriculares no que diz respeito a articulação de registros e representações e a interpretação de comportamento funcional.

A Matriz de referência do ENEM dá importância a resolução de situações problema, como selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões, enfrentar situações-problema, limitando-se a avaliar a competência de identificação e análise de variação de grandezas, o que também é pertinente ao ensino de Função Modular.

2.1.2 Estudos Teóricos

Nesta subseção é feita a descrição de dissertações de caráter teórico que

realizam estudos diagnósticos sobre ensino e aprendizagem de função ou Função Modular, bem como propõem teorias e metodologias de Educação Matemática.

O trabalho de Souza Junior (2007) investigou a seguinte questão: De que forma e com qual perspectiva histórica o ensino de função se faz presente na recente produção acadêmica do campo da Educação Matemática? O objetivo de Souza Junior (2007), foi de verificar o grau de importância que a comunidade científica, que investiga o ensino de Matemática, tem dado as práticas pedagógicas que facilitam a construção desse conceito. Foi considerado que um estudo nesse sentido percebe-se elementos didáticos-pedagógicos que auxiliem o trabalho do professor em sala de aula e orienta-se a formação inicial e continuada do professor de Matemática. Baseado nestes fatos a pesquisa teve uma metodologia qualitativa em relação à produção de dissertações e teses no período de 1997 a 2006.

O pesquisador cita alguns aspectos como recorrer ao site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), site esse que se apresenta com o objetivo de facilitar o acesso a informações sobre teses e dissertações definidas junto a programas de pós-graduação do país. O tema “Função”, de vital importância dentro da Educação Matemática, não possui o devido tratamento especial por parte dos pesquisadores no processo de ensino.

No decorrer da pesquisa Souza Junior (2007), traça um percurso histórico sobre o conceito de função, dando destaque a suas representações e significações, para que haja o entendimento da própria prática do professor em sala de aula e também apresenta alguns questionamentos sobre o ensino do conceito de função dentro da Educação Matemática. A Matemática em todas as suas formas – considerando os diversos campos que a constituíram durante a história da humanidade – sempre teve papel decisivo nesse entendimento global. Entender os fenômenos de natureza variada e ser capaz de interpretá-los e analisa-los, tudo isso tem feito do homem um ser de decisões, e tem sido parte inerente à formação do indivíduo. Hoje, podemos dizer que sua constituição é alicerçada tanto pela educação formal quanto pela informal ou a não formal. É impossível, assim, separar a trajetória da humanidade e a construção do conhecimento matemático.

Em geral, o professor explora esse conteúdo pelo que está exposto nos livros didáticos, ou tem como referência a forma como lhe foi apresentada na sua trajetória escolar, no que hoje denominamos Ensino Médio, ou na faculdade. A experiência no

desenvolvimento do objeto matemático “Função Modular” no cotidiano tem mostrado que há dúvidas sobre a compreensão e o significado para o aluno do Ensino Superior.

Para atingir esses objetivos, trabalhou-se com uma pesquisa qualitativa. Trabalhando no sentido de perceber a importância que é dada para o tema por meio do estudo de tendências levantando suas características. Nesse sentido, foi realizado um estudo de dissertações e teses produzidas a partir de 1997, inicialmente selecionadas pelos seus resumos e palavras-chave, e, depois, fazendo uma leitura das que mais interessaram para o estudo.

O autor conclui que a cada dia torna-se mais evidente a necessidade de se construir novas práticas pedagógicas que consigam auxiliar o professor, não só de Matemática, no seu constante trabalho de lecionar. É imperativo buscar dentro da produção acadêmica um aparato teórico para o professor poder, a cada dia, desenvolver seu trabalho na sala de aula com mais segurança. Não acredita-se que uma só tendência educacional dentro da Educação Matemática possa resolver o problema do professor, mas sim, que, combinando todas as tendências, tenha o professor uma chance maior de despertar no aluno o interesse pela matéria.

Farias (2013) realizou um estudo baseado nas dificuldades de aprendizado encontradas pelos alunos nos conteúdos de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio, principalmente aqueles referentes a funções (que demandam quase 90% de todo o conteúdo nesta série). O estudo de Farias (2013) teve como objetivo identificar tais dificuldades, apresentar propostas de intervenções em sala de aula para as mesmas e analisar os resultados destas intervenções.

Como metodologia, Farias (2013) aplicou uma avaliação com alunos de duas escolas de Pau dos Ferros, uma da rede estadual, José Fernandes de Melo, e outra da rede federal, Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), e contemplaram também os alunos do município de Riacho de Santana. No total, essa avaliação foi aplicada com 430 alunos, onde os mesmos deveriam reconhecer as quatro funções (afim, quadrática, exponencial e logarítmica), por meio de sua lei de formação e também através de seu gráfico. Também deveriam identificar características de crescimento e decrescimento dessas funções. Farias (2013) destaca que as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica são desenvolvidas através de jogos com o aplicativo GeoGebra para que os alunos consigam desenvolver o raciocínio lógico matemático, permitindo realizar boas jogadas sem que para isso seja preciso fazer

muitas contas, o que demanda muito tempo e poderia ser a causa de desestímulo quanto ao jogo.

De acordo com os resultados obtidos depois da aplicação da primeira atividade (Batalha das Afins), Farias (2013) concluiu que é possível inferir a utilização de software matemáticos, tendo a possibilidade de melhorar o processo ensino e aprendizagem, quer seja por tornar o processo mais dinâmico, interativo e participativo, quer seja por tornar alguns dos conceitos e resultados matemáticos passíveis de serem testados e experimentados na sala de aula. Essa conclusão é devido aos bons resultados do jogo de Batalha das Afins, os jogos construídos que trabalham as funções quadráticas (Combate Parabólico) e exponencial (Duelo Exponencial), que podem trazer também resultados para o ensino da Matemática nesses conteúdos.

Farias (2013) deixa como sugestão outras funções como as logarítmicas, as trigonométricas entre outras e com outros software como o MÁXIMA, por exemplo. Pode-se ainda trabalhar outros aspectos envolvendo o conteúdo de funções ou mesmo trabalhar outros conteúdos dentro dessa dinâmica coletiva, interativa e lúdica. Neste trabalho, em nenhum momento foi citado o estudo da Função Modular, isto mostra que existe um baixo índice de pesquisas sobre o objeto matemático desenvolvido pelos pesquisadores.

2.1.3 Estudos Experimentais

Nesta subseção é feita a descrição de dissertações de caráter experimental cujos autores elaboraram e aplicaram propostas de ensino de função ou Função Modular e nelas procurou-se inspiração para construir e aplicar também uma proposta de ensino potencialmente viável.

Nogueira Junior (2008) fez a escolha deste objeto matemático devido o interesse sobre a primeira série do ensino médio. Sabe que existem dificuldades com estudo de funções, mesmo tendo o conteúdo sido ministrado na série anterior fica evidenciado a medida em que se aprofunda em alguns conceitos e se aplica em alguns tipos básicos, como a do 1º e 2º graus que são estudados na série anterior. Cita também a introdução de um novo tipo de função, como é o caso da modular, remete uma série conflitos devido a diversidade de situações e casos envolvidos no estudo desta função.

É colocado também que a Função Modular e o Valor Absoluto foram os temas escolhidos nesta pesquisa como nós da rede para serem analisados quanto a suas possíveis interações com outros temas do currículo de Matemática na primeira série do Ensino Médio. Tomou-se também como base a mais recente proposta de Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM 2006), que reforça a prioridade do ensino de funções para a Educação Básica.

Nogueira Junior (2008) relatou que se fez necessária uma análise apurada dos impactos que o ensino de Função Modular e Valor Absoluto podem promover na concepção geral de funções, proporcionando a construção de um novo significado para o estudante, até mesmo uma nova maneira de lidar com situações problemas e a investigação de novos conceitos. O ensino de Função Modular na educação básica, bem como nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e Fundamentos de Matemática, é uma grande oportunidade para estabelecer estas conexões entre seus temas e com outras áreas de conhecimento, através de atividades que favoreçam a investigação em Matemática.

O autor relatou que a produção acadêmica em educação Matemática no Brasil, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de Valor Absoluto e Função Modular, apresenta poucos trabalhos específicos sobre o tema, razão pela qual despertou o seu interesse. Tendo em vista o problema de pesquisa sobre o objeto matemático Função Modular e Valor Absoluto, Nogueira Junior (2008) buscou propor uma Sequência Didática para o ensino e aprendizagem através da investigação e construção do conhecimento em Função Modular e Valor Absoluto, utilizando a organização curricular em rede através da interpretação geométrica na reta numérica e no plano cartesiano. Também fez uma atividade investigativa sobre o conceito e aplicação de Função Modular e o Valor Absoluto para os alunos do Ensino Médio.

Na metodologia o pesquisador teve o objetivo de elaborar uma Sequência Didática em que o estudo do Valor Absoluto e a Função Modular ocorra numa perspectiva curricular de rede, esta pesquisa foi adotada com abordagem qualitativa. Sendo assim, levantou-se um referencial teórico para a elaboração de atividades de investigação em Matemática que contribuíssem para a formação da rede curricular com ligações interativas entre os nós (assuntos) que compõem o currículo, em especial do Ensino Médio, segmento focado em sua pesquisa.

O nó escolhido como referência foi o Valor Absoluto e a Função Modular e a partir desta escolha foram analisadas as interações estabelecidas com outros

assuntos da Matemática e de outras áreas de conhecimento, tendo em vista suas aplicações. A análise ocorreu com a comparação entre os dados prévios obtidos na fase de planejamento das atividades e os dados posteriores, obtidos com a observação direta da postura dos alunos diante da atividade, a formação de conjecturas para a resolução das atividades e suas estratégias utilizadas.

O processo também foi analisado através de descrições tendo em vista a situação em que se desenvolveram os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudes e sua relação com a proposição das atividades numa perspectiva curricular de rede. Nogueira Junior (2008) concluiu que as evidências levantadas ao longo da elaboração das atividades investigativas e os dados e informações obtidas na aplicação contribuíram para a forma de uma Sequência Didática que integra características de uma sequência de conteúdos, currículo em rede e os tipos de conteúdos: conceituais, procedimentais e atitudinais, além de suas peculiaridades.

Também citou em relação ao problema de pesquisa que as evidências mostram que a Função Modular e o Valor Absoluto, por serem assuntos que possuem diversas estratégias para resolução de problemas, estabelecem interações diversificadas de modo que o uso de combinação de funções e translação de eixos permitem conexões com outras funções Matemáticas e com alguns princípios da Geometria Analítica que estejam relacionados com distância.

A formação de ligações entre os diversos nós (assuntos) da Matemática abre perspectiva para interações entre diferentes áreas de conhecimento, como a Língua Portuguesa e a Matemática na expressão verbal de equações e inequações modulares; Física e Matemática na trajetória de raios na formação de imagens em espelhos planos; Estatística e Matemática com a definição de desvio médio absoluto e também diz que as conexões não ocorrem apenas em nível intra - matemático. Nogueira Junior (2008) propõe como temas de futuras pesquisas sobre o ensino do Valor Absoluto e Função Modular a utilização da definição do Valor Absoluto, lugar geométrico distância e cônicas para a resolução de igualdades e desigualdades algébricas modulares na reta numérica e no plano cartesiano.

Silva (2011) desenvolveu uma pesquisa onde apresenta um estudo de caráter diagnóstico objetivando a investigação do conhecimento dos alunos no que se refere à construção gráfica de diversas funções aplicando conceitos de transformações no plano e sua capacidade para aplica-la em situações-problemas. O objetivo do estudo de Silva (2011), foi de ofertar uma educação que atendesse às necessidades de

formação dos alunos preparando este para se tornar um ser crítico, apto a viver em sociedade e agir em seu meio.

Como metodologia, Silva (2011) apresentou experiências de ensino utilizando um método que possibilita a abordagem de assuntos pertencentes ao conteúdo programático de Matemática do ensino básico em especial ao estudo das representações gráficas de algumas funções enfocando as transformações geométricas ocorridas no plano, com o auxílio de recursos tecnológicos, bem como sua aplicabilidade em situações do cotidiano.

O estudo realizado por Silva (2011), destaca o uso das tecnologias no ensino da Matemática, onde procura enfatizar o impacto dessa tecnologia junto a Educação Matemática. Silva (2011) conclui que os alunos de uma maneira geral, ao ingressarem no ensino superior, apresentam diversas dificuldades inerentes ao conceito de função, em especial no que se refere ao esboço de alguns gráficos e em sua aplicação em situações-problemas. E diz que é muito provavelmente fruto de um ensino básico ineficiente, desestimulante e desvinculado da realidade e estes fatos incidem de forma negativa no desempenho dos alunos. Silva (2011) sugeriu um curso de formação para professores tendo como objeto de estudo o uso de recursos tecnológicos como software matemáticos, applets e vídeos-tutoriais.

Souza (2013) participava de um Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) e observando as investigações de outros orientando, temas foram despontando. Um dos orientandos relatou em um dos encontros que em suas buscas e levantamentos de dissertações e teses sobre “ensino e aprendizagem de função por meio de modelagem Matemática” em 2012, notou haver poucas investigações com os temas Valor Absoluto, Função Modular, Equação Modular e Inequação Modular, inclusive não encontrou nenhuma pesquisa abordando esse tema e a Modelagem Matemática. Diante desta observação, Souza (2013) iniciou as pesquisas sobre Função Modular.

No objetivo de Souza (2013), relata-se que quanto à visualização e compreensão dos gráficos referente as funções investigadas, utilizou-se as tecnologias de informação e comunicação como estratégia pedagógica para o desenvolvimento das atividades aplicadas. O GeoGebra foi o software utilizado como interface mediadora para o aprendizado da Função Modular. Ressaltou que os softwares, por mais que sejam considerados o elementos essenciais para o

funcionamento de tecnologias digitais, não são os elementos mais relevantes, visto que os programas em si não são elementos didáticos.

O teórico-metodológico adotado por Souza (2013) foi a opção de uma metodologia qualitativa no qual os dados foram coletados através de interações sociais e analisados subjetivamente por ele. Mostra que a pesquisa qualitativa é a mais indicada para atingir os seus objetivos, pois não interessa apontar a quantidade de erros ou acertos dos professores quando expressam algébrica e geometricamente a Função Modular, mas foram as condições propiciadas aos sujeitos da pesquisa que permitiram a eles desenvolver um raciocínio para chegar a tais respostas e também se a abordagem utilizada na investigação, propicia ou não um entendimento sobre o assunto quais forem as dificuldades encontradas e os avanços percebidos. No relato de suas considerações finais, Souza (2013) buscou investigar as concepções de professores do Ensino Médio sobre exercícios e problemas matemáticos, a familiarização dos docentes com os softwares matemáticos, inclusive o GeoGebra, a utilização do software GeoGebra como estratégia pedagógica para o ensino de duas situações- problemas com Função Modular.

Finalmente, é possível concluir que a principal relevância do uso do software GeoGebra para o ensino de Função Modular baseada em resolução de problemas não reside no software em si, mas no planejamento dos professores para utilizá-lo como elemento mediador das aprendizagens, ou seja, a estratégia didática do professor é que, ao utilizar o software, cria possibilidade de maior experimentação das construções de autonomia. Destaca-se também que o conhecimento matemático do professor é essencial para que a estratégia seja efetiva: problemas relativos aos conteúdos de referência tendem a fragilizar a estratégia, transformando-a em apêndices de práticas tradicionais.

Bernardo (2013) fez um estudo sobre gráfico de funções: uma abordagem dinâmica e experimental devido a sociedade estar se transformando ao longo dos últimos anos e a escola não poder ficar parada no tempo, com o mesmo modelo de 50 anos atrás. Os índices educacionais ainda não são favoráveis, quando comparamos aos países desenvolvidos. O objetivo de Bernardo (2013) é propor uma abordagem diferenciada daquela entendida como tradicional, com quadro negro e aulas expositivas se inserindo assim nessa proposta de mudança. O estudo das funções e suas representações geométricas são fundamentais para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação,

investigação e também à contextualização sociocultural. Bernardo (2013) tem como objetivo central do seu estudo de funções o uso de computadores e do Software GeoGebra para conseguir explorar as mesmas.

Bernardo (2013) usou em seu estudo a metodologia de levar as turmas de alunos para o laboratório de ciências e cada turma foi dividida em grupos de cinco alunos. Os registros foram realizados nas fichas como conceitos, definições e observações em sala de aula. No laboratório os alunos receberam uma outra ficha e passaram 20 minutos destinados a uma ambientação e discussão de dúvidas e comentários acerca dos equipamentos e experiências a serem realizadas. Em seguida, cada grupo realizou os experimentos diversas vezes, até que os registros e as fichas pudessem ser preenchidos.

Logo depois, o momento foi destinado a análise dos resultados, construção dos gráficos e conclusões. Bernardo (2013) chamou atenção a seguinte situação: A necessidade das aulas diferenciais tornou-se quase uma imposição da própria dinâmica da sala de aula. Indisciplina, falta de atenção, desinteresse e a grande quantidade de informações facilmente acessadas na internet, são indícios de que se faz necessário um planejamento de aula mais dinâmico e participativo que permita a interação do professor-aluno-tecnologia. Nesta perspectiva, o produto desenvolvido por Bernardo (2013), foi idealizado, elaborado e implementado em duas realidades educacionais diferentes, ou seja, em uma escola pública e em seguida em uma escola privada.

A conclusão que Bernardo (2013) teve foi de que o uso de tecnologia no processo ensino-aprendizagem vem sendo discutido e está cada vez mais presente nas escolas. Muitas apresentam recursos mais sofisticados tais como projetores em sala, acesso à internet liberado, laboratórios de ciências e salas de multimídias. Essa realidade já presente em algumas escolas públicas, representa um grande avanço em direção ao reaparelhamento e reconstrução da escola. Também cita que a vida cotidiana se transformou, os alunos se transformaram e a escola não poderia ficar estagnada no tempo e cita que o que se questiona nos dias de hoje é como anda a utilização desse aparato tecnológico à serviço da educação. Bernardo (2013) deixa algumas perguntas a serem analisadas:

- Os professores estão preparados para essa nova realidade escolar?
- A escola tem incentivado o uso desses recursos?

- Os professores estão sendo capacitados e incentivados a fazerem o uso dos recursos disponíveis?

Souza (2014) tem como objetivo investigar os resultados obtidos no ensino e aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio ao se utilizar o lúdico associado a outras estratégias de ensino. A pesquisa desenvolvida foi realizada com os alunos da escola da Rede Estadual da Educação da cidade de Guarapuava, Paraná. Para a elaboração das estratégias que atendessem as necessidade de aprendizagem dos estudantes, ela optou pela aplicação do “Torre de Hanói” e a resolução de problemas abordados de forma lúdica por meio de personagens e paródias para desenvolver o conteúdo de funções nas aulas de Matemática. O referencial teórico tomado para o desenvolvimento de sua pesquisa foram três tópicos: O Ensino Médio de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática no contexto da Base Nacional Comum e o lúdico na escola.

Souza (2014), toma como base a sua metodologia a partir dos altos índices de repetências diagnosticadas nas avaliações em larga escala e o desestímulo por parte dos estudantes, resultando em evasão escolar, os sérios problemas e as dificuldades que o ensino médio tem passado em relação ao ensino com vistas à aprendizagem de Matemática; assim, definiu o problema do seu trabalho: Que resultados podem ser obtidos no ensino e a aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio, ao se utilizar o lúdico associado a outras estratégias de ensino? Diante de toda esta questão, se faz necessário uma investigação a este problema de pesquisa para que novas ações possam ser propostas as quais venham ao encontro das necessidades mencionadas em relação ao ensino com implicações na aprendizagem da Matemática.

Souza (2014), buscou auxiliar de forma efetiva a análise e descrição dos dados levantados em seu trabalho, portanto, entendeu que a pesquisa qualitativa é a abordagem metodológica pertinente para atingir os objetivos destas investigações. Os dados foram coletados e analisados por meio de produções orais e escritas, envolvendo textos, diálogos e imagens. Os componentes da pesquisa foram subdivididos em: sujeitos de pesquisa, coleta de dados, organização das atividades, procedimentos e avaliação. A organização e aplicação da pesquisa foi realizada através de atividades que foram distribuídas em quatro encontros no período de um mês, organizados em oito atividades, ou seja, duas atividades por semana, aplicadas em aulas germinadas.

Souza (2014), diz que de maneira geral considera que os objetivos inicialmente delineados foram atingidos mediante os resultados das atividades avaliativas diagnósticas e aplicadas durante o processo de ensino e aprendizagem, e as respostas dos alunos aos questionários inicial e final forneceram um parâmetro comparativo para a pesquisa. O processo de aprendizagem do conteúdo matemático ficou perceptível por meio das atividades realizadas pelos alunos com o jogo, cujo desenvolvimento foi sistematizado em tabelas, nas quais as relações envolvidas deram suporte para a construção do conceito de função. Também, percebeu que na aprendizagem por meio da resolução de exercícios de aplicação, situações-problema e nas respostas do pós-teste, foram usadas as mesmas questões do questionário inicial. Destacou-se que se tratando do jogo, o referencial teórico adotado por essa pesquisa pode caracterizar este recurso como um instrumento lúdico, apresentou elementos favoráveis à sua aplicação no âmbito educacional e que atingiu um caráter pedagógico e de socialização para a construção de conceitos matemáticos.

O jogo “Torre de Hanói” foi desenvolvida em sala de aula e ficou aparente o interesse dos alunos em manusear o desafio dos movimentos para cada aluno, sem usar a tradicional e habitual linguagem Matemática que estavam acostumados no momento das aulas. Tais considerações citadas puderam ser percebidas diante da aplicação do pós-teste, ao serem comparadas as respostas com o questionário inicial.

2.1.4 Estudos de Análise de Livros Didáticos

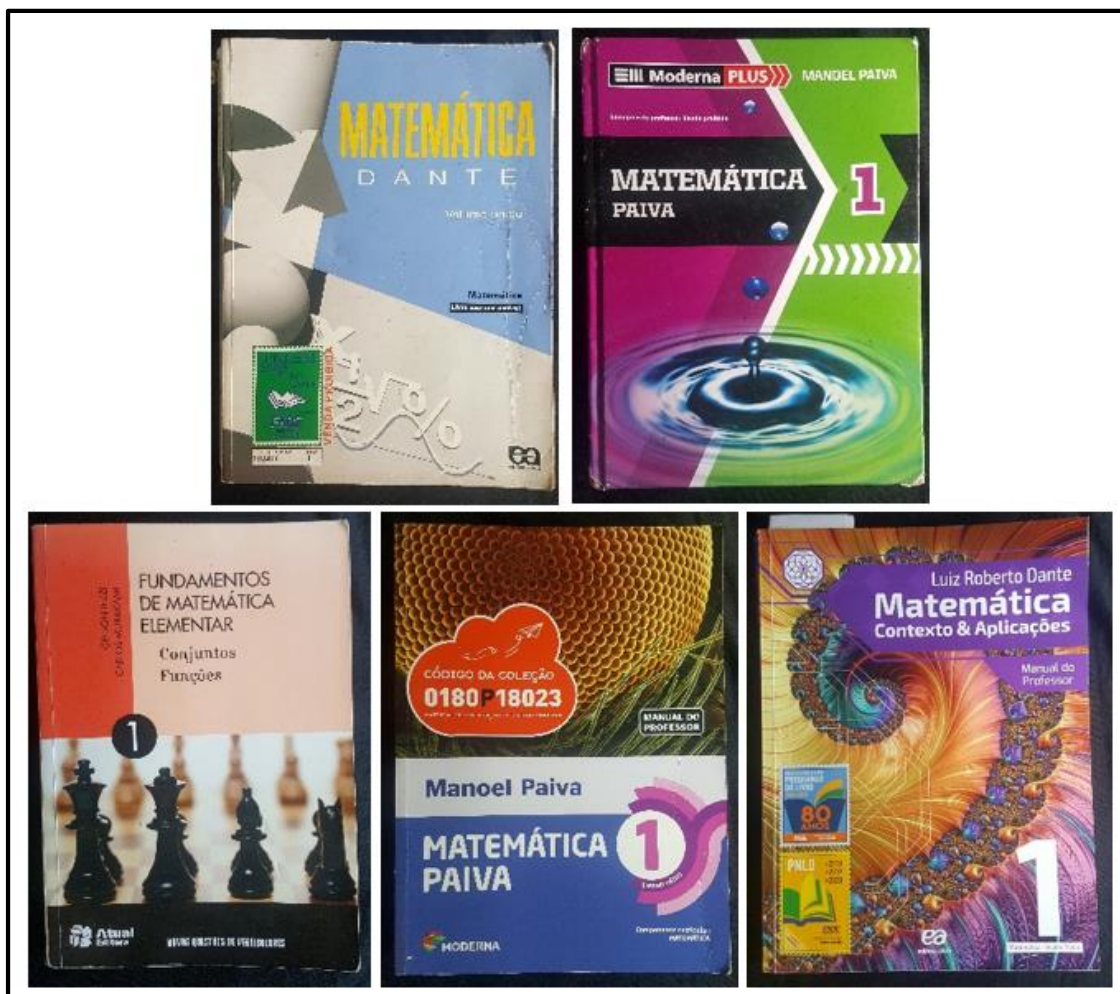
Nesta subseção é apresentado um levantamento e análise de livros didáticos utilizados no Ensino Médio e os indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos de 2000 a 2017. As análises extraíram informações sobre o ensino de Função Modular, a respeito dos conceitos que se aborda na Sequência Didática, tais como: Módulo, Composição, Função Modular, reflexão e translação, bem como os tipos de exercícios de fixação e aprofundamento. Assim, nesta seção, objetiva-se as propostas utilizadas em livros didáticos no período citado. A investigação dos livros didáticos de Matemática é necessária para observar como é exposto o conceito de Função Modular, nesse recurso muito utilizado em sala de aula. Nessa perspectiva e, diante do que verificou-se inicialmente na revisão de literatura, analisa-se as características desses livros buscando conhecer sua estrutura e características didáticas adotadas. Ressalta-se que o objetivo não é mostrar o melhor livro e sim conhecer como é tratado o conceito de Função Modular, interpretação gráfica e tipos

de exercícios trabalhados. Assim, verifica-se se a sequência metodológica adotada é tradicional ou clássica, isto é, definição, exemplos seguido de exercícios, ou se traz uma abordagem mais moderna motivando o aluno a investigar, refletir, argumentar e pensar matematicamente, como preconiza Brasil (2017):

Ao conseguirem utilizar as representações Matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliar a capacidade de pensar matematicamente. (BRASIL, 2017, p. 530)

Ao verificar tais características, levantou-se mais uma motivação para produzir um material alternativo e de apoio no ensino e aprendizagem de Função Modular.

Figura 3: Capa dos Livros Analisados



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Todas as informações dos cinco livros didáticos analisados encontram-se sintetizadas nos quadros abaixo:

Quadro 6: Livros Analisados

AUTOR(ES)	TÍTULO	EDITORA	ANO DE PUBLICAÇÃO	ABORDAGEM INICIAL	CONCEITO DE FUNÇÃO MODULAR	GRÁFICO	EXERCÍCIOS
Luiz Roberto Dante Dante (2005)	Matemática Ensino Médio - Volume Único	Ática	2009	O livro dá início ao desenvolvimento da Função Modular por meio da definição de módulo mostrando poucos exemplos numéricos e logo depois apresenta as propriedades de módulo com apenas um exemplo de cada caso. Existe um pequeno comentário no tópico sobre distância entre dois pontos na reta real para fazer analogia com o módulo.	No primeiro momento é definido Função Modular por meio do conceito de módulo e apresenta o gráfico pela técnica do preenchimento de tabela, fazendo com que o aluno realize a plotagem do gráfico da Função Modular (Função Afim) e suas variações são colocadas de forma não explícitas para o entendimento de seus comportamentos. Obs: Só existe um exemplo de Função Quadrática.	A metodologia utilizada pelo autor do livro para construção gráfica foi de uso de tabelas e nos últimos exemplos é feito um comentário sobre o movimento de translação utilizando as equações algébricas e não relata sobre o movimento de reflexão.	Os exercícios propostos pelo autor são de características tradicionais (clássica) e em número bem restrito. Apresentando apenas duas atividades com um contexto diferenciado do clássico, sendo uma atividade relacionada a Função Modular em Física (exercício resolvido) e outro proposto.
Manoel Rodrigues Paiva Paiva (2010)	Matemática Ensino Médio - Volume 1	Moderna	2013	O desenvolvimento da Função Modular inicia-se pela definição de módulo mostrando exemplo da distância entre dois pontos e logo após ofertando dois exercícios de aplicação de módulo com média aritmética e com a Física (Velocidade). As propriedades de módulo são pequenos recortes e um exemplo cada.	A Função Modular é caracterizada pela definição de módulo e o gráfico é realizado por meio de preenchimento de tabela. O autor não coloca exemplos das possíveis variações de Função Modular (Função Afim) e existe um pequeno relato referente ao movimento de translação e reflexão no plano cartesiano. O estudo do sinal da Função Modular é o recurso utilizado pelo autor para chegar nas equações algébricas. O livro disponibiliza três exercícios de aplicação da Função Modular diferente dos modelos tradicionais (clássicos). Obs: Só existe dois exemplos de Função Quadrática.	O autor faz construção do gráfico da Função Modular por meio de montagem (preenchimento) de tabelas com pontos. O livro apresenta outros recursos para a montagem do gráfico: a técnica de translação e reflexão, mas não oferece riqueza de detalhes sobre o processo. O estudo do sinal é desenvolvido por apenas dois exemplos clássicos.	Todos os exercícios propostos pelo livro têm características de aplicação, apenas, repetitivos e numéricos mas destaca-se que existem três problemas contextualizados, na física por exemplo, que exigem um pouco mais de análise, reflexão e raciocínio.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Quadro 7: Livros Analisados

AUTOR(ES)	TÍTULO	EDITORA	ANO DE PUBLICAÇÃO	ABORDAGEM INICIAL	CONCEITO DE FUNÇÃO MODULAR	GRÁFICO	EXERCÍCIOS
Gelson Iezzi e Carlos Murakami Iezzi, Murakami (2013)	Fundamentos de Matemática – volume 1	Atual	2013	Apresenta função definida por várias sentenças aberta para dar o início de Função Modular, disponibilizando vários exercícios clássicos e logo depois apresenta a definição de módulo ou valor absoluto citando apenas duas afirmativas em consequência mostra as propriedades de módulo e suas demonstrações correspondentes.	O conceito de Função Modular é desenvolvido pela definição de módulo e mostra poucos exemplos das variações da Função Modular.	A técnica utilizada para a construção do gráfico da Função Modular é feita pelas duas sentenças em consequência da definição do módulo. O termo que é usado na construção é deslocamento.	Os exercícios propostos pelo livro são de características de aplicação, apenas, mas o número de exercícios referente a função Afim também é apresentado o número seguinte de função quadrática.
Manoel Rodrigues Paiva Paiva (2015)	Matemática Ensino Médio - Volume 1	Moderna	2017	O desenvolvimento da Função Modular inicia-se pela definição de módulo mostrando exemplo da distância entre dois pontos e logo após ofertando dois exercícios de aplicação de módulo com o atletismo e o instrumento geométrico (régua). Também é apresentado as propriedades de módulo, um exemplo cada e sua respectiva demonstração.	A Função Modular é caracterizada pela definição de módulo e o gráfico é realizado por meio de preenchimento de tabela. O autor não coloca exemplos das possíveis variações de Função Modular (Função Afim) e existe um pequeno relato referente ao movimento de translação e reflexão no plano cartesiano. O livro disponibiliza oito exercícios de aplicação da Função Modular diferente dos modelos tradicionais (clássicos). Obs: Só existe dois exemplos de Função Quadrática.	O autor faz construção do gráfico da Função Modular por meio de montagem (preenchimento) de tabelas com pontos. O livro deixa de opção (plano B) para a montagem do gráfico a técnica de translação e reflexão, mas não oferece riqueza de detalhes sobre o processo.	Os exercícios propostos pelo livro são de características de aplicação, apenas, mas destaca-se que existem oito problemas diferenciados, que exigem um pouco mais de análise, reflexão e raciocínio.
Luiz Roberto Dante Dante (2016)	Matemática Contexto e Aplicação - Volume 1	Ática	2017	O livro traz as funções poligonais ou afins por partes e em seguida apresenta a definição de módulo e chama de função Módulo para a definição de Função Modular. Enfim, recai na montagem de tabela para formação gráfica. O autor destaca um pequeno comentário sobre o movimento de translação e reflexão.	No primeiro momento é definido Função Modular por meio do conceito de módulo e apresenta o gráfico pela técnica do preenchimento de tabela, fazendo com que o aluno realize a plotagem do gráfico da Função Modular (Função Afim) e suas variações são colocadas de forma explícitas para o entendimento de seus comportamentos e também usa o termo deslocamento para o melhor entendimento. Obs: Só existe um exemplo de Função Quadrática.	O recurso que o autor do livro usou para construção gráfica foi de tabelas e nos últimos exemplos é feito um comentário sobre o movimento de translação e reflexão. A análise gráfica também é feita com base na função $f(x) = x $ para mostrar suas variações.	Os exercícios propostos pelo autor são de aplicação, apenas, e em número bem restrito. Apresentando apenas uma atividade com um contexto diferenciado, que exige um pouco mais de análise, reflexão e raciocínio, que contextualiza a Função Modular na área da estatística.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No que se refere a abordagem inicial nos cinco livros analisados, é possível observar uma evolução ao longo dos anos na condução para formação de conceitos, havendo uma tendência de construção progressiva do conceito até chegar às definições formais.

Ao chegar às definições e formação de conceitos, nota-se ser recorrente a adoção da representação gráfica com a intenção de promover uma visualização do comportamento da Função Modular a partir das possíveis variações e movimentos.

Também é recorrente a adoção dos termos translação e reflexão para análise gráfica do comportamento da função modular, ao variar coeficientes e sinais. Tal tendência é incentivada pelas diretrizes da educação, pois “a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo” (BRASIL, 2017, p. 530).

No entanto, nota-se nos livros didáticos analisados uma carência de exercícios que estimulem cognitivamente a reflexão, investigação e argumentação, a partir dos conhecimentos de Função Modular, sendo, em sua maioria, de aplicação direta da definição.

No geral, percebeu-se que os livros analisados dedicam pouca profundidade ao assunto Função Modular, o que pressupõe-se ser em concordância com as diretrizes e orientações para o ensino de Matemática, como a seguir:

Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. (BRASIL, 2006, p. 122)

Deste modo, conclui-se que os livros didáticos, baseados em orientações curriculares nacionais, deixam de lado e abordam Função Modular de forma relativa, permitindo poucas situações contextualizadas que promovam a argumentação, reflexão e investigação. Deste modo, estimula-se trabalhar com Sequência Didática, nesse aspecto de construção gradativa do conhecimento, de modo a ser mais um recurso complementar no ensino de Função Modular.

2.1.5 Síntese das Contribuições

Todos os trabalhos analisados tiveram grande importância para o alcance do

objetivo dessa pesquisa, devido ao uso de metodologias variadas para o desenvolvimento no ensino da Matemática em especial o ensino de Funções e Função Modular. Os dados extraídos das dissertações e dos livros didáticos mostraram com muita clareza que os métodos utilizados possuem uma grande influência no resultado final do aprendizado do aluno. Como ilustra no Quadro 8.

Quadro 8: Contribuições da Revisão de Literatura

TIPOS DE LITERATURA	CONTRIBUIÇÕES
Diretrizes da Educação	Os documentos analisados das Diretrizes da Educação permitiram verificar que acerca da Função Modular, não há uma especificidade sobre o ensino deste conteúdo. Abrangendo as funções em sua amplitude, esses documentos sugerem atividades diversificadas que valorizem a participação ativa do aluno apresentando as finalidades educacionais, no entanto não apontam caminhos ou estratégias para alcançá-las. Assim, o professor deve estar a par das recomendações para o ensino fornecidas por estes documentos para nortear a elaboração de suas atividades com o objetivo de atender as competências e habilidades que são determinadas como essenciais para o desenvolvimento cognitivo de seus alunos.
Estudos teóricos	Os estudos teóricos contribuíram para observar que o estudo da Função Modular, e das demais funções, ainda recebe pouca importância pela comunidade científica, o que comprova a necessidade de novos estudos e pesquisas sobre esta temática. Além disto, os estudos teóricos realizados e que foram analisados, evidenciam a escassez de propostas didáticas que se sobressaem do modelo tradicional de ensino, parâmetro no qual deve ser superado conforme os atuais documentos norteadores da educação básica. Nesse sentido, é possível construir e verificar a validade dos processos cognitivos e das teorias de aprendizagem disponíveis que podem ser aplicadas em sala de aula tornando-a em um espaço mais dinâmico, interativo e participativo.
Estudos experimentais	Os estudos experimentais trouxeram como contribuição a evidência de que atividades articuladas e preparadas de forma sistemática para o ensino da Função Modular influenciam positivamente nos objetivos educacionais propostos pelo professor em sua prática pedagógica. Tais atividades permitem que os alunos vivenciem novas experiências que dão significado aos objetos matemáticos estudados, com ou sem o auxílio de recursos tecnológicos. No entanto, para que esta seja uma tarefa alcançada, há a necessidade de professores que se disponham a elaborar propostas pedagógicas diferenciadas e apliquem-nas em suas turmas de forma a verificar as potencialidades de suas atividades.
Livros didáticos	Os livros didáticos, baseados em orientações curriculares nacionais, deixam de lado e abordam a Função Modular de forma relativa, permitindo poucas situações contextualizadas que promovam a argumentação, reflexão e investigação das definições, propriedades e exercícios propostos ao tema. Deste modo, o professor deve sentir-se instigado a trabalhar com outras estratégias de ensino como as Sequências Didáticas, que valorizem o aspecto de construção gradativa do conhecimento, de modo a proporcionar e desenvolver mais um recurso complementar no ensino de Função Modular.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Alguns estudos deram relevância a parte histórica do objeto matemático Função Modular, que é pouco explorado no âmbito educacional mas que nas experiências analisadas, tais como Souza Junior (2007), Nogueira Junior (2008), Silva (2011) e Souza (2014) que desenvolveram suas propostas e obtiveram resultados satisfatórios segundo os critérios adotados.

Também é evidenciado o uso da tecnologia, nos trabalhos de Farias (2013), Souza (2013) e Bernardo (2013) como uma ferramenta frequentemente utilizada com êxito nas pesquisas acadêmicas e seus resultados também apresentam vários pontos positivos como o entusiasmo dos alunos, a valorização do lúdico que retira o aluno e o professor do modelo tradicional do ensino e favorece uma prática em sala de aula de uma forma dinâmica e diferenciada.

Todo o processo de revisão de estudos foi feito com um objetivo de ver como se comporta o objeto de pesquisa “Ensino de Função Modular” no ensino médio, a verificação de suas lacunas e a maneira como é desenvolvido no ensino da Matemática. Esta revisão de literatura cumpriu, portanto, o objetivo específico proposto na fundamentação da elaboração dessa proposta educacional para o ensino de Função Modular no Ensino Médio.

2.2 CONCEPÇÕES DOS ALUNOS EGRESSOS

Ainda na perspectiva do ensino de Função Modular, é apresentado nesta seção as concepções dos estudantes do 2º ano do Ensino Médio sobre o que aprenderam no 1º ano a respeito de Função Modular, para então serem analisadas as dificuldades de aprendizagem de nosso objeto matemático no Ensino Médio. Para tanto, foi realizada uma pesquisa de campo em uma determinada Escola Estadual do Ensino Médio no dia 14 de Junho de 2017, com os alunos do 2º ano do turno da manhã num total de 122 alunos participantes.

Foram utilizados como instrumentos da pesquisa um questionário sócio educacional, um quadro de dificuldades e um teste de verificação de aprendizagem. No questionário sócio educacional procurou-se informações sobre as condições e metodologias utilizadas pelo professor ao ministrar o assunto Função Modular.

No quadro de dificuldades, os sujeitos da pesquisa foram consultados quanto ao níveis de dificuldade que se tem sobre 11 tópicos do ensino de Função modular, os quais foram levantados a partir da experiência em ensino e na revisão de literatura.

O teste de verificação de aprendizagem apresentava dez questões com o objetivo de verificar as mesmas dificuldades de aprendizagem diagnosticadas no quadro preenchido pelos sujeitos da pesquisa.

Para aplicação da pesquisa, além da autorização da direção da escola e a presença como ouvinte do professor titular da turma durante todo o processo da aplicação da pesquisa de campo, os responsáveis legais pelos estudantes autorizaram sua participação através da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A seguir apresenta-se a descrição dos dados da pesquisa e análises a respeito das dificuldades de aprendizagem da Função Modular.

2.2.1 Descrição e Análise de Dados Pessoais e Metodológicos

Sobre a idade dos estudantes verificou-se que a maioria deles (61,5%), tinha a idade de 16 anos na data da realização da pesquisa, o que mostra que estes sujeitos apresentaram pouca distorção idade/série. Conforme apresenta Cruz e Monteiro (2019) no Anuário Brasileiro da Educação Básica, “na faixa etária dos 15 aos 17 anos, o jovem deve estar matriculado no Ensino Médio” (p. 136). Logo, a idade de 16 anos é a ideal para os estudantes que cursam o 2º ano do Ensino Médio, situação dos sujeitos que participaram da pesquisa.

Foi perguntada aos estudantes se gostavam de Matemática e a maioria (82,9%) informou gostar um pouco ou não gostar de Matemática, muito embora 17,1% admitir adorar Matemática.

Sobre a escolaridade do responsável, tanto do sexo masculino (52,8%) quanto feminino (50,4%) possuem o ensino médio completo, embora haja também um número significativo de responsáveis com nível superior, sendo o masculino com 17,15% e feminino com 26%.

A respeito do tempo dedicado ao estudo de Matemática, os estudantes informaram com que frequência estudavam essa disciplina fora da escola, conforme ilustramos no quadro abaixo:

Quadro 9: Frequência de Estudo de Matemática Extra Classe

Todo dia	Fins de semana	Período de prova	Véspera da prova	Não estuda fora
7, 3%	20,3 %	42,3%	25,2%	4,9%

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Também foi perguntado aos estudantes se conseguiam entender as explicações nas aulas de Matemática, o que a maioria (53,7%) informou entender sempre ou quase sempre e apenas 46,3% informou que entendia às vezes ou poucas vezes.

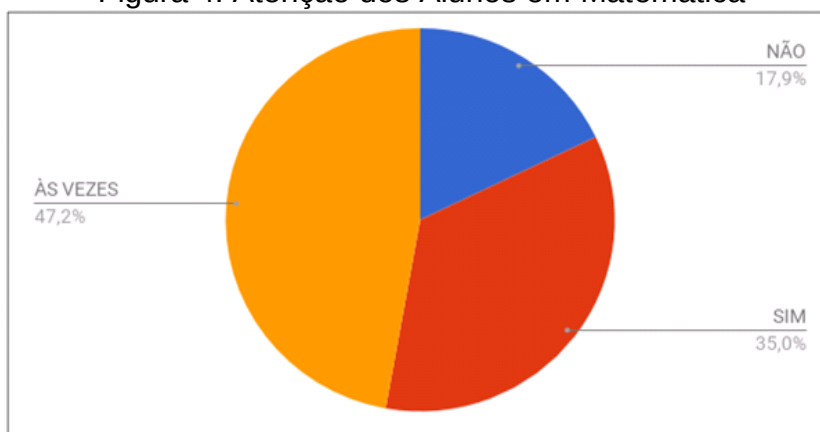
Sobre os tipos de atividades ou trabalhos avaliativos de aprendizagem utilizados pelo professor de Matemática, os estudantes informaram que a maior parte (74%) era constituída de provas e simulados e o restante (26%) era direcionado a seminários, testes semanais e pesquisas.

Foi questionado sobre como os estudantes se sentem diante de uma avaliação de Matemática. A maioria (56,9%) se sente preocupada, 27,7% se sente contente ou tranquila e 15,4% admite ter medo e até sentir calafrios. O conhecimento de como as emoções podem interferir no desempenho do aluno também é de grande importância, principalmente para um alerta, quando emoções negativas acontecem com certa repetição ou frequência pois:

Quando os estados corporais negativos se repetem com frequência, ou quando se verifica um estado corporal negativo persistem, [...] aumenta a proporção de pensamentos suscetíveis de serem associados às situações negativas, e o estilo e a eficiência do raciocínio são afetados. (DAMÁSIO, 1994, p. 177).

Ao serem questionados sobre a sua atenção em aprender os conteúdos ministrados ilustramos no Gráfico

Figura 4: Atenção dos Alunos em Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Em pesquisa realizada com estudantes do ensino médio, Porto (2005), em seu artigo “Investigando a motivação de estudantes de ensino médio em relação à Matemática”, observou que 65% das respostas a um questionário preliminar, apontaram para a rejeição da disciplina Matemática. Tal fato, pode ser explicado

segundo a autora, por definições apresentadas por Silveira (2005) apud Porto (2005), de que a Matemática possui um sentido pré-construído historicamente como uma disciplina de difícil compreensão até mesmo nos dias atuais: “A Matemática não pode se apresentar como fascinante e divertida”.

Alves (2007) afirma que para uma efetiva aprendizagem na escola, torna-se fundamental que professores e alunos sintam-se motivados e/ou interessados pela prática das atividades.

Sobre a capacidade de relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com o seu dia-a-dia a maioria (91,8%) afirmou conseguir. Nesse sentido, o processo de Transposição Didática realizado pelos professores ao longo da vida escolar dos alunos, ocorreu com êxito favorecendo novos significados aos conteúdos abordados. Conforme Chevallard (2001),

Um conteúdo do saber que foi designado como saber a ensinar sofre a partir daí, um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que transforma um objeto do saber ensinar em objeto de ensino é denominado transposição didática. (CHEVALLARD, 2001, p. 20)

Esse fenômeno possibilita aos alunos interpretarem a matemática de forma articulada a outras temáticas de seu cotidiano, a partir de diferentes contextos e sentidos, e favorecendo o desenvolvimento de um ser crítico e reflexivo, capaz de tomar decisões lógicas e coerentes.

A respeito da dinâmica das aulas sobre o conteúdo Função Modular é ilustrada no quadro abaixo a metodologia utilizada pelo professor conforme informado pelos estudantes.

Quadro 10: Metodologia na aplicação do conteúdo de Função Modular

Definição seguida de exemplos e exercícios	História seguido dos conceitos	Situação problema seguido do assunto	Modelo e situação seguido de análise	Jogos seguido da sistematização de conceitos.
81,3%	6,5%	6,5%	3,3%	2,4%

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Mais de 80% dos alunos informaram que o professor de Matemática desenvolveu o estudo sobre Função Modular, através da definição seguida de exemplo e exercícios.

Na condição de professor, despertar o interesse para a aprendizagem da Matemática tem sido frequentemente uma tarefa difícil. As dificuldades intrínsecas trazidas pelos alunos, ou seja, suas relações sociais, seu perfil psicológico, social e econômico, somam-se às decorrentes de uma visão distorcida da matéria, estabelecida muitas vezes, desde os primeiros contatos (MACHADO, 2005).

As dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática se iniciam na comunicação entre o educador e o educando. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada são fatores que tornam a comunicação pouco frequente, quase inexistente, fortalecendo tais dificuldades (SMOLE; DINIZ, 2001).

Essas ações geram prejuízos significativos como a desmotivação do aluno pela disciplina, que se torna “fria e calculista”, devido ao seu rigor enquanto disciplina, apoiando-se na ideia pré-concebida e aceita pelos alunos, de que a Matemática é difícil, em não se apresentando a relação entre o que se aprende na escola e o seu dia-a-dia, geram-se experiências negativas para o discente.

2.2.2 Descrição e Análise de Dados do Quadro de Dificuldades e Teste de Verificação de Aprendizagem

No início da pesquisa, quando foi realizada esta investigação diagnóstica, procurou-se investigar aspectos mais amplos da aprendizagem do objeto matemático. No entanto, a medida que a pesquisa se aprofundou, foi decidido restringir para os aspectos em que serão utilizados na Sequência Didática.

Embora nos anexos estejam na íntegra os instrumentos da pesquisa, quadro de dificuldades e teste de verificação de aprendizagem, serão discutidos apenas sobre cinco dificuldades que foram julgadas importantes para a continuidade da pesquisa e para a elaboração da Sequência Didática. Estas dificuldades relacionaram-se com os conceitos de valor absoluto, módulo, definição de módulo, definição da Função Modular e gráfico da Função Modular, conforme estão apresentadas no Quadro 11 com os valores percentuais de dificuldades e desempenho.

Quadro 11: Dificuldades e Desempenho no Teste de Conhecimentos (%)

		Valor Absoluto	Módulo	Definição de Módulo	Definição de função Modular	Gráfico da Função Modular
Quadro de dificuldades	MUITO FÁCIL	36,9	35,2	20,5	23	3,3
	FÁCIL	48,4	56,6	54,9	37,7	31,4
	REGULAR	14,8	8,2	23,8	35,2	53,7
	DIFÍCIL	-	-	0,8	3,3	10,7
	MUITO DIFÍCIL	-	-	-	0,8	0,8
Teste de verificação de aprendizagem	ACERTOS	88,5	96,7	100	18,9	18,9
	ERROS	11,5	3,3	0	81,1	81,1

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Sobre a dificuldade de cálculo do valor absoluto, módulo e definição de módulo, podemos verificar que os estudantes sujeitos da pesquisa, uma média de 49,4%, consideram de fácil ou muito fácil entendimento, e apresentaram excelente desempenho na resolução de questões, que exigiam esse conhecimento, sendo que a média de acertos foi de 95,06%. Tal entendimento foi verificado por Brumatti (2004, p. 5), ao analisar as respostas de alunos concluintes do Ensino Médio em que suas concepções restringiam-se a um processo mecânico e memorizável, e que o valor absoluto pode ser “uma transformação de números quaisquer em números positivos, sem ser necessário exemplificar, ou efetuar cálculos para usa-la,” ou “uma transformação de números quaisquer, mas com ação diferenciada ao agir sobre os positivos e negativos”.

A respeito das dificuldades na definição de função modular e gráfico de função modular, foi inferida que uma média de 45,7 % dos sujeitos da pesquisa consideram o conteúdo de fácil ou regular dificuldade. No entanto, o desempenho na resolução de questões que necessitam desses conhecimentos foi de baixo rendimento tendo 81,1% de erros na resolução das questões referentes a essa dificuldade. O que leva a concluir que a competência de representar e registrar os conceitos relacionados a Função Modular nesses sujeitos apresentam obstáculos.

Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio. (BRASIL, 2017, p. 519)

Assim, é possível verificar a importância em se propor atividades e produtos educacionais, que venham colaborar para a superação de dificuldades nas representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos sobre Função Modular.

2.3 CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES

Segundo o aporte metodológico que foi adotado, o professor é um dos elementos do processo de ensino e aprendizagem, por esse motivo, nesta pesquisa, se fez necessário investigar sua perspectiva sobre o ensino de Função Modular, com a intenção de orientar os objetivos educacionais da Sequência Didática construída. Assim, ninguém melhor do que o próprio cliente dizer o que deseja do produto para ele ser construído, haja vista, que o objetivo é poder colaborar com o Ensino de Matemática e consequentemente com colegas de profissão.

Logo, na construção da Sequência Didática para o ensino de Função Modular, o relato de professores experientes que atuam no ensino de Matemática, e ensinaram Função Modular, foi de grande importância, pois testemunham em sua prática docente as dificuldades recorrentes, acerca do objeto matemático em questão.

A pesquisa foi realizada com três professores de Matemática da rede pública de ensino do Estado do Pará, cujos foram identificados com as letras A, B e C, para preservar seu anonimato. Tais entrevistados trouxeram para essa pesquisa muitas informações, que contribuíram para a construção da Sequência Didática.

Aos três docentes entrevistados, foram feitas as seguintes perguntas:

- 1) Como você introduz o assunto Função Modular em sala de aula com seus alunos?
- 2) Como você desenvolve o conceito de Função Modular com seus alunos?
- 3) Como você apresenta a construção gráfica da Função Modular para seus alunos?
- 4) Que tipos de exercícios você utiliza para fixar ou aplicar o conceito de Função Modular?

Quadro 12: Entrevista dos Professores

PERGUNTA	PROFESSOR (A)	PROFESSOR (B)	PROFESSOR (C)
(1) Como você introduz o assunto Função Modular em sala de aula com seus alunos?	Dá início ao desenvolvimento do objeto matemático “Função Modular” pela definição de módulo.	Começa mostrando a distância entre dois pontos para esclarecer variações de espaço na reta real e assim definir módulo.	Tem como ponto de partida a definição de módulo.
(2) Como você desenvolve o conceito de Função Modular com seus alunos?	Apresenta as definições e propriedades da função modular.	A partir da definição de módulo, define Função Modular.	Desenvolve todas as propriedades de módulo e as respectivas demonstrações.
(3) Como você apresenta a construção gráfica da Função Modular para seus alunos?	Constrói o gráfico da função usando o recurso de preenchimento de tabelas para fazer os devidos comentários sobre os movimentos de translação e reflexão para enfatizar as variações da Função Modular.	O recurso adotado para construção gráfica é o uso de tabelas, e trabalha com o termo pré formal “deslocamento”, para explorar as variações da função modular, mas não utiliza os termos formais translação e reflexão.	As variações existentes na função modular é desenvolvido a partir da função $f(x) = x $. Usando o termo pré formal “deslocamento”, e cita translação e reflexão sem caracterizar.
(4) Que tipos de exercícios você utiliza para fixar ou aplicar o conceito de Função Modular?	Os exercícios que propostos são aplicação direta das definições, com apoio do livro didático.	Sempre se preocupa em propor exercícios de aplicação em outras áreas do conhecimento, mas também adota os exercícios do livro didático.	Os exercícios são somente os do livro didático adotado pelos professores no ano corrente.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Todos os entrevistados informaram que são apenas licenciados em Matemática e que ministram o assunto Função Modular em duas aulas de 45 minutos cada.

É possível inferir das respostas dos entrevistados, que é comum introduzirem o assunto Função Modular, partindo da ideia e definição de módulo, para posteriormente definirem Função Modular e suas propriedades que são ilustradas pelos movimentos gráficos para chegar ao domínio gradual de uma formalização.

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 41-42)

No entanto, no que tange a resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de estimular a capacidade de argumentação; as respostas dos professores entrevistados revelam limitações nesse sentido, pois os exercícios utilizados por eles limitam-se aos adotados em livros didáticos, que, como já verificou-se em seção anterior, também apresentam limitações com relação ao desenvolvimento da capacidade de interpretação Matemática da realidade, e aplicabilidades da função Modular em outras áreas do conhecimento.

É possível também inferir das respostas dos professores entrevistados, que apresentam dificuldades em formalizar e demonstrar o comportamento gráfico da Função Modular, a partir das transformações geométricas: translação e reflexão.

A aplicação correta da Matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo. [...] O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem Matemática. (BASSANEZI, 2011, p. 18-19)

Isto é, a utilização de conceitos formais e uma linguagem Matemática adequada aproxima o aluno do objeto estudado. Segundo a linha metodológica que foi adotada à teoria das Situações Didáticas, é função do professor formalizar os conceitos, o que exige que ele tenha um estudo aprofundado do objeto matemático, aliado a uma metodologia de ensino compatível com as necessidades cognitivas e com a aprendizagem dos alunos.

Assim, os relatos dos professores contribuíram nessa pesquisa no sentido de reafirmar dificuldades em obter material pedagógico e recurso didático que o auxilie em um ensino de Função Modular, para promover uma aprendizagem que estimule a investigação de regularidades, a argumentação e apropriação de uma linguagem Matemática adequada.

2.3.1 Análise da opinião dos professores

Ao analisar a esfera do ensino nota-se que os desafios permeiam por muitos

problemas de diferentes origens. No caso dos professores, percebe-se que o conteúdo de Função Modular limita-se ao que é proposto no livro didático. Observando uma certa defasagem neste material, os recursos que normalmente são utilizados são os que prevalecem no modelo tradicional de ensino com a aula expositiva.

Conforme as orientações de documentos oficiais que salientam a necessidade de superação dos moldes historicamente tradicionais, o professor deve buscar outras ferramentas didáticas que o auxiliem nessa tarefa. Os dados coletados das entrevistas com os professores, permitem observar que o tripé definição, exemplo e exercício mostra-se muito presente em suas práticas docentes. Como consequência, há a prevalência do processo de memorização por parte dos alunos, o que não permite construção de conceitos matemáticos por meio de processos reflexivos.

Nesse sentido, nota-se que as dificuldades no processo de ensino afetam diretamente o processo de aprendizagem de um conteúdo. A relação da prática pedagógica do professor em sala de aula com o desenvolvimento cognitivo dos alunos influencia fortemente na qualidade da construção e significação do objeto matemático abordado. Isto demonstra a necessidade dos professores assumirem a responsabilidade de expor uma Matemática flexível ao entendimento de todos os alunos por meio de um domínio fundamentado nas bases algorítmicas e da criatividade de exposição.

2.3.2 Análise Global

Com a conclusão da coleta de dados e após todas as observações realizadas, considera-se de altíssima necessidade realizar algumas reflexões em determinados aspectos, como por exemplo, a forma como está sendo desenvolvido o ensino da Função Modular, ou seja, o procedimento do professor em sala de aula referente ao assunto e a maneira como os alunos estão recebendo e absorvendo as informações do conteúdo em questão. Atualmente, deve-se superar os limites do processo de ensino-aprendizagem dos modelos tradicionais, fazendo com que as aulas de Matemática se tornem mais dinâmicas e atualizadas com os modelos modernos da pesquisa sobre os objetos de estudos matemáticos, possibilitando assim até mesmo uma motivação para o aluno em seu interesse sobre a disciplina.

Segundo D'Ambrósio (1989), as aulas de Matemática devem incentivar a criatividade do aluno, evitando-se as soluções de exercícios repetitivos e memoráveis

como estratégia no ensino. A aplicação do questionário possibilitou identificar, através de dados estatísticos, as percepções de alunos e professores quanto as dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem do objeto matemático (Função Modular) e a relação dos discentes com a Matemática. Através do resultado da pesquisa, feito por meio de questionário, é inquestionável que a realização de outros estudos utilizando o mesmo método de pesquisa, com foco em diversos objetos de estudos, trará resultados certamente positivos para a educação brasileira.

Perrenoud (2000), destaca como competência no ensino a necessidade dos alunos estarem envolvidos nas atividades desenvolvidas, citando como exemplo, a utilização de novas tecnologias no processo motivacional. Para Mendes (2009), um processo de ensino estático e unilateral, provoca a passividade do aluno, enquanto que as aulas dinâmicas conduzem-no a uma participação ativa favorecendo o processo de apreensão do conhecimento: “a cidadania passa a ser buscada, conquistada na motivação emocional e intelectual provocada durante essas atividades dinâmicas desencadeadas nas aulas” (p. 81).

Autores como Tardif e Lessard (2011) consideram que o trabalho docente, devido à sua complexidade, exige alto nível na aprendizagem e mobilização de conhecimentos e competências em vários campos da vida social e profissional:

[...] cultura geral e conhecimentos disciplinares; psicopedagogia e didática; conhecimento dos alunos, do seu ambiente familiar e sociocultural; conhecimento e habilidade para identificar as dificuldades de aprendizagem; conhecimento da gestão política do sistema escolar e suas finalidades; conhecimento das diversas matérias do programa curricular; conhecimento e domínio didático-pedagógico de ferramentas e recursos para o exercício da prática docente incluindo o uso das TIC; habilidade na gestão da sala de aula e nas relações humanas (TARDIF; LESSARD, 2011, p. 9).

Logo, percebe-se que a preparação didática do professor e o conhecimento matemático provenientes de seu processo de formação não são as únicas peças fundamentais para garantir qualidade no processo de ensino e aprendizagem. É necessário experiências nas quais professor alie-se ao aluno para a troca de conhecimentos e construção dos mesmos, favorecendo um ambiente dinâmico, interativo e reflexivo que ocorre com atividades articuladas e sistematizadas.

3 SOBRE A FUNÇÃO MODULAR

A seguir, apresentam-se os conteúdos matemáticos relacionados à Função Modular, onde procura-se destacar elementos que balizaram o estudo, de modo a proporcionar ao professor subsídios para uma formação continuada a respeito da temática. Foi destacado que definições, propriedades e demonstrações estão baseadas nos livros de Lima (1996) e Iezzi (2004).

Para o estudo da Função Modular torna-se necessário o conhecimento sobre o módulo de um número real x , representado por $|x|$, que também pode ser denominado de valor absoluto, o qual pode ser definido como:

$$|x| = x; \text{ se } x \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| = -x; \text{ se } x < 0$$

$$\text{ou de forma simplificada } |x| = \begin{cases} x & ; \text{ se } x \geq 0 \\ -x & ; \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número e que o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número. Para esclarecer essa definição, apresentamos os exemplos:

$$|5| = 5, \quad |-9| = 9, \quad |0| = 0, \quad \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}, \quad |1| = 1, \quad |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

O módulo de um número apresenta algumas propriedades, destaca-se aqui apenas aquelas que poderão ser necessárias ao entendimento da Função Modular.

Uma primeira propriedade nos indica que dado um número real x tem-se que $|x| \geq 0$. Este fato decorre da própria definição de módulo, ou seja, $|x| = x$ ou $|x| = -x$, respectivamente se $x \geq 0$ ou $x < 0$. Sabe-se também que $|x| = x$ para $x \geq 0$, logo admitindo $x = 0$, tem-se que $|0| = 0$.

Obedecendo a continuidade nas propriedades temos a igualdade $|x^2| = x^2$, sendo que $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. De acordo com a definição de módulo podemos mostrar que $|x|^2 = x^2$ se $x \geq 0$, então temos $|x| = x$ se caso $x < 0$, então a expressão será $|x| = -x$. Portanto, podemos concluir que a equivalência a seguir $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. Tomando como base a propriedade anterior temos que $|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$. Então também podemos escrever que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Foram destacadas mais duas propriedades e suas demonstrações em razão de sua utilização ao longo da Sequência Didática, ou seja, dando prosseguimento tem-se que a desigualdade $|x| \leq a, a \geq 0$, se $x \geq 0$, temos que $|x| = x \leq a$ (I). Por

outro lado, caso $x < 0$, temos que $-x = |x| \leq a$, ou seja, $x \geq -a$ (II). Por (I) e (II), conclui-se que $-a \leq x \leq a$.

Se for considerada a desigualdade $|x| \geq a$, pela definição de módulo temos caso $x > 0$ que $x = |x| \geq a$ (I). Por outro lado, se $x < 0$ encontramos que $-x = |x| \geq 0$ (consequentemente), ou seja, $x \leq -a$ (II). Pelas sentenças I e II, concluímos que $-a \leq x$ ou $x \geq a$.

As demonstrações relativas as propriedades abaixo podem ser obtidas em lezzi (2013):

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

- I. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- II. $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- III. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- IV. $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- V. $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
- VI. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- VII. $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- VIII. $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- IX. $|x| \geq a \text{ e } a > 0 \leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$.

Zero da função graficamente é determinado pelos pontos de interseção da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com o eixo das abscissas no plano cartesiano. Sendo o valor de x , pertencente ao domínio desta função para que a imagem seja igual a zero ($f(x) = 0$). Tendo como exemplo, a aplicação da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ para calcular o zero da função.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{0, 2, 3\}$$

Um dos assuntos que pode ser citado para facilitar o desenvolvimento da Função Modular é a composição de funções. Então, considere duas funções f e g tais

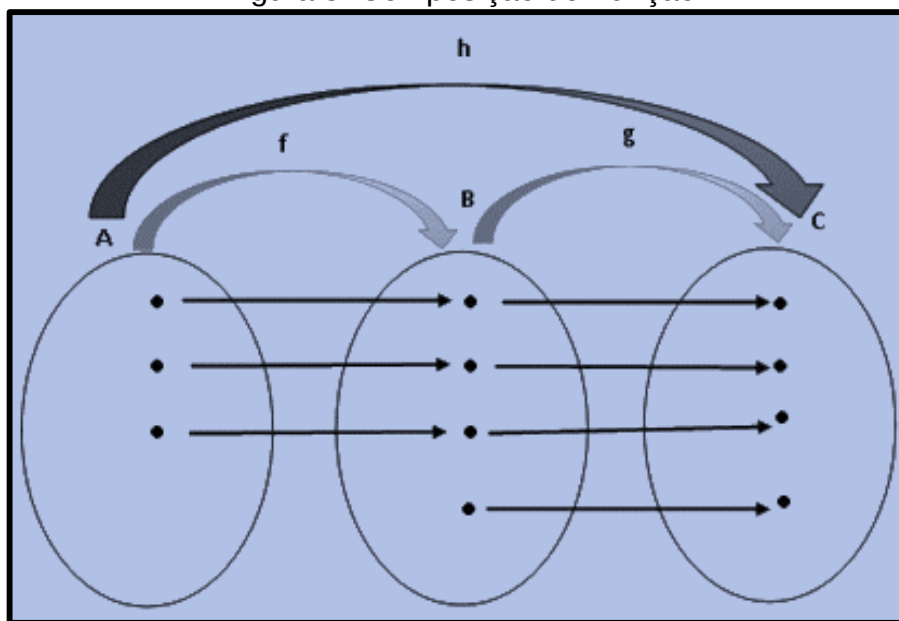
que a $Im(f) \subset D(g)$. Segundo Iezzi (2013) chama-se composta de g com f a função h de A em C na qual a imagem de cada $x \in A$ é obtida pelo seguinte procedimento:

- I. Aplica-se x a função f e obtém-se $f(x)$
- II. Aplica-se $f(x)$ a função g , obtendo-se $g(f(x))$

Indica-se $h(x) = g(f(x))$.

O que esquematicamente pode ser representado pela ilustração a seguir

Figura 5: Composição de Função



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Tomando como exemplo a seguinte situação:

$I(f) = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $D(g) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $I(f) \cap D(g) = \{2; 4; 6\}$,
 $D(g \circ f) = \{0; 4; 8\}$, $I(g \circ f) = \{1; 2; 3\}$ e $CD(g \circ f) = CD(g) = U$. É notável, que uma vez mais, os elementos do domínio de $g \circ f$ são aqueles cujas as imagens, dadas por f , pertencem ao conjunto: $I(f) \cap D(g)$; para que exista $g \circ f$, deve-se ter: $I(f) \cap D(g) \neq \{ \}$.

Caso se tenha uma composição de uma função $g(x)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a função $f(x) = |x|$, recaímos na definição de módulo, ou seja,

$$f(g(x)) = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x), & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

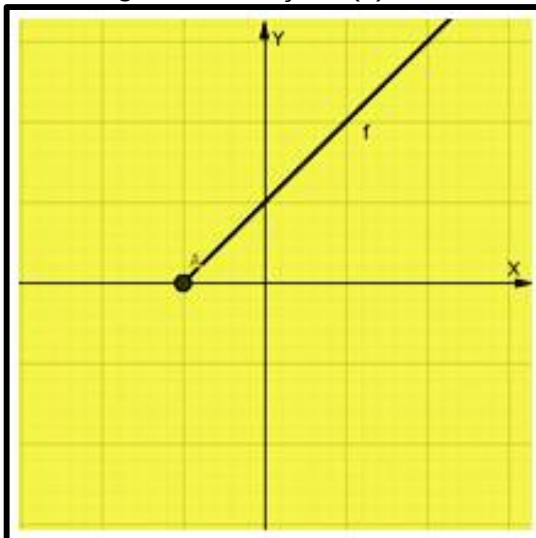
Consequentemente considerando a função $g(x) = x + 1$. Desta forma, $f(g(x))$ seria dado por:

$$f(\underbrace{x+1}_{g(x)}) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x+1 < 0 \rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Assim, é possível obter o gráfico da função por meio das sentenças

$$f(x) = x + 1, \text{ se } x \geq -1 \text{ (I)}$$

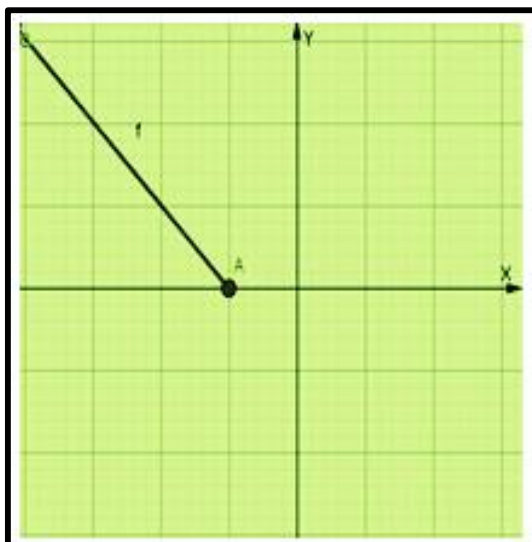
Figura 6: Função $f(x)=x+1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

$$f(x) = -x - 1, \text{ se } x < -1 \text{ (II)}$$

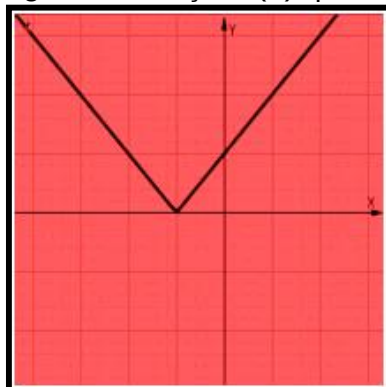
Figura 7: Função $f(x)=-x-1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Considerando os gráficos obtidos em I e II no mesmo plano cartesiano temos o gráfico da função

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{se } x + 1 < 0 \rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Figura 8: Função $f(x)=|x+1|$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função módulo ou modular quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|$$

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a Função Modular pode ser definida também da seguinte forma:

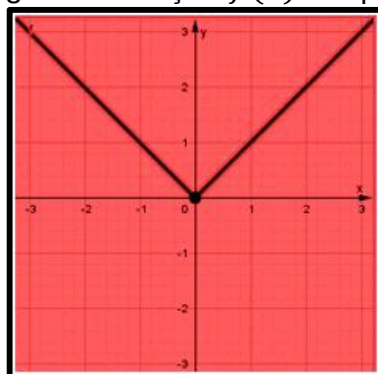
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \quad f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da Função Modular é a reunião de duas semirretas de origem 0, que são as bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.

No caso da função $f(x) = |x|$, o zero da função é obtido a partir de $f(x) = 0$, ou seja, $|x| = 0$ de onde conclui que $x = 0$. É fácil observar que $x = 0$ é zero da função visto que $f(0) = |0| = 0$.

A imagem desta função é $\text{Im} = \mathbb{R}_+$, isto é, a Função Modular somente assume valores reais não negativos.

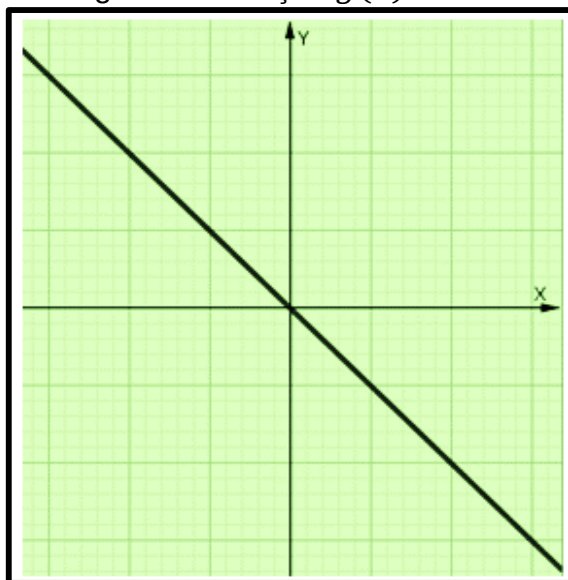
$$f(x) = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Figura 9: Função $f(x) = |x|$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Com o objetivo de esclarecer melhor, é construído o gráfico da função $f(x) = |-x|$. Primeiramente, antes de construir o gráfico da função pedida, é necessário analisar o gráfico da função acima sem a utilização do módulo na sua lei de formação, ou seja, vamos fazer o gráfico de $g(x) = -x$.

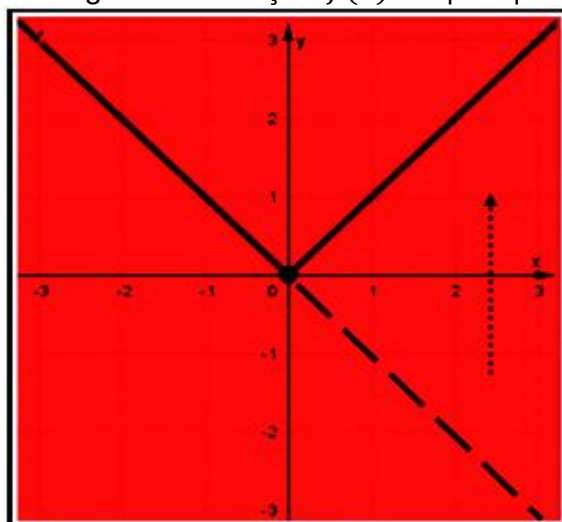
Figura 10: Função $g(x) = -x$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O módulo presente na lei da função faz com que a parte do gráfico que se localiza abaixo do eixo x “reflita” no momento em que toca o eixo x. Mas por quê? Simples, a parte do gráfico abaixo do eixo x representa os valores negativos de $f(x)$ e, como o módulo de um número é sempre um valor positivo, o gráfico de $f(x) = |-x|$ fica:

Figura 11: Função $f(x) = |-x|$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Sendo assim, a Função Modular se concretiza pela formalização de sentenças propostas anteriormente para facilitar a sua construção gráfica e algébrica.

3.1 RECURSOS DIDÁTICOS PARA A CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

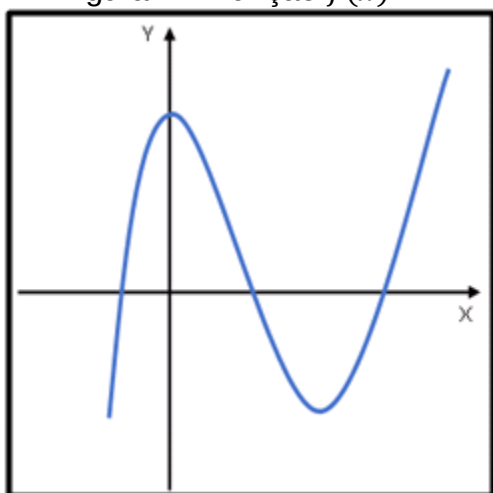
A construção do esboço do gráfico de uma função, por vezes requer aplicação de recursos didáticos específicos, tais como a reflexão, translação horizontal e vertical. Para saber transpor a função acima, abaixo, à esquerda, à direita, utiliza-se o processo de translação de eixos. Essas variações são importantes para a dinâmica da função em um contexto geral.

3.1.1 Reflexão

No processo de construção do gráfico de uma função, a reflexão ocorre quando há multiplicação da imagem da função por -1 , tomando como exemplo a Função Modular tem-se $f(x) = |x|$, e sua reflexão em obtida procedendo a multiplicação indicada, isto é, $g(x) = -1 \cdot f(x) = -|x|$. Levando em consideração uma função qualquer, apresento outros exemplo:

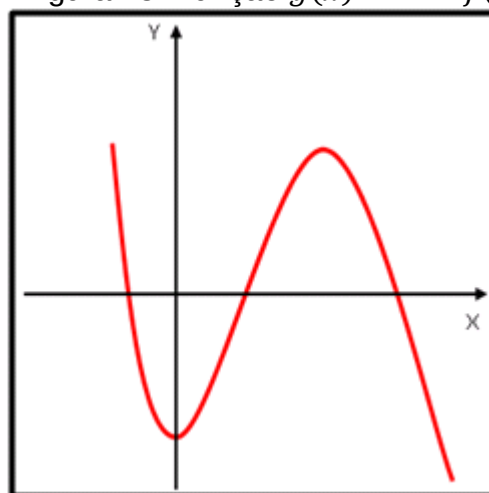
Seja g uma função que possui o seguinte gráfico:

Figura 12: Função $f(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Figura 13: Função $g(x) = -1 \cdot f(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Para construir o gráfico de uma função qualquer $f(x) = |g(x)|$, pode-se representar as funções f e g da seguinte forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |g(x)| \quad \text{ou na forma algébrica} \quad f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x), & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Observe que a partir da representação na forma algébrica é possível concluir que:

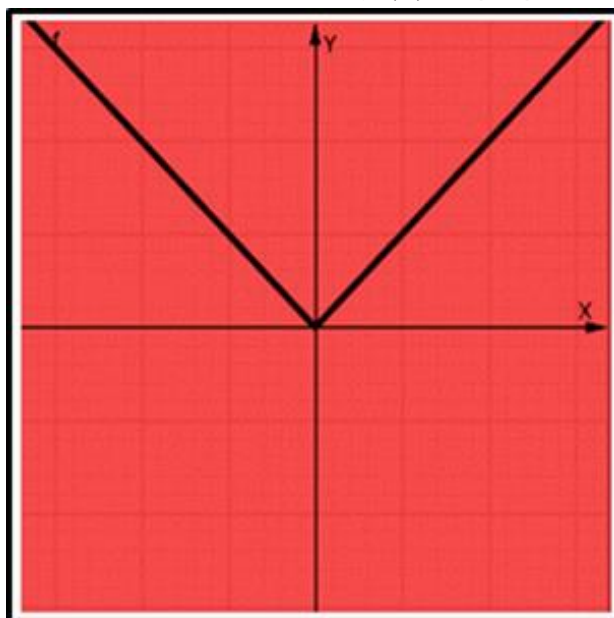
- Quando $g(x) \geq 0$, o gráfico de $g(x)$ é o próprio gráfico de $g(x)$.
- Quando $g(x) < 0$, o gráfico de $|g(x)|$ é o gráfico de $-g(x)$, que é o gráfico de $g(x)$ refletido em relação ao eixo OX .

Assim, conservando os pontos de ordenadas não negativas do gráfico de g e refletindo os pontos de ordenadas negativas em relação ao eixo OX , é possível obter o gráfico da função f .

As ilustrações abaixo nos mostram como ocorre a reflexão do gráfico da Função Modular $f(x) = |x|$ e sua reflexão representada por: $g(x) = -1 \cdot f(x) = -|x|$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

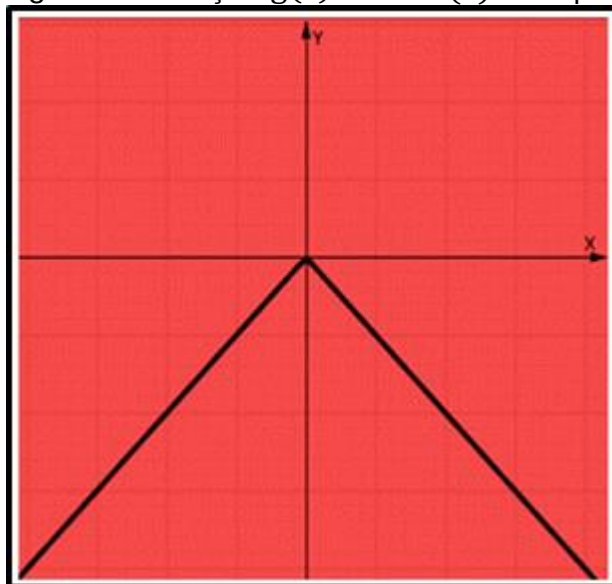
Figura 14: Função $f(x) = |x|$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

$$g(x) = -1 \cdot f(x) = -|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x \geq 0 \\ +x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Figura 15: Função $g(x) = -1.f(x) = -|x|$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

3.1.2 Translação

O processo de translação horizontal e vertical na construção de gráficos de uma função representa o movimento do gráfico no eixo das abscissas no sentido para esquerda e para direita em relação a origem do plano cartesiano. No eixo das ordenadas, ocorre no sentido para cima e para baixo.

Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = k + |g(x)|$ ou $f(x) = -k + |g(x)|$, em que k é uma constante real positiva transladado verticalmente, em k unidades, o gráfico da função $y = |g(x)|$:

- Para cima, no caso da função $f(x) = k + |g(x)|$; ou
- Para baixo, no caso da função $f(x) = -K + |g(x)|$

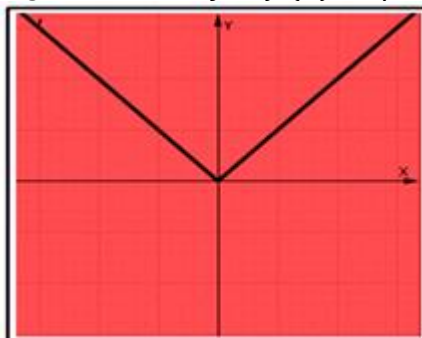
Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = |g(x + k)|$ ou $f(x) = |g(x - k)|$, em que k é uma constante real positiva, transladado horizontalmente, em k unidades, o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$:

- Para a esquerda, no caso da função $f(x) = |g(x + k)|$; ou
- Para a direita, no caso de função $f(x) = |g(x - k)|$.

As ilustrações abaixo mostram todos os movimentos de translação de eixos. Começando com a translação horizontal. Para ocorrer o entendimento do movimento é necessário analisar a Função Modular $f(x) = |x|$, sendo que sua formação é feita na origem dos eixos do plano cartesiano, representando que o zero do módulo dessa função é nulo.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Figura 16: Função $f(x) = |x|$



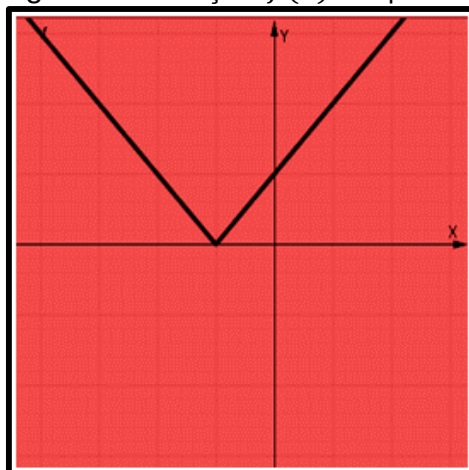
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A ilustração abaixo mostra a translação horizontal à esquerda de acordo com a Função Modular $f(x) = |x + 1|$. Esse movimento ocorre à esquerda em relação a origem dos eixos do plano cartesiano. Isso acontece por possuir o seu zero do módulo igual a -1 .

No caso da função $f(x) = |x + 1|$, o zero da função é obtido a partir de $f(x) = 0$, ou seja, $|x + 1| = 0$ de onde conclui que $x = -1$. É fácil verificar que $x = -1$ é o zero da função visto que $f(-1) = |-1 + 1| = |0| = 0$.

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x + 1 \geq 0 \text{ ou } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{se } x + 1 < 0 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

Figura 17: Função $f(x) = |x + 1|$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

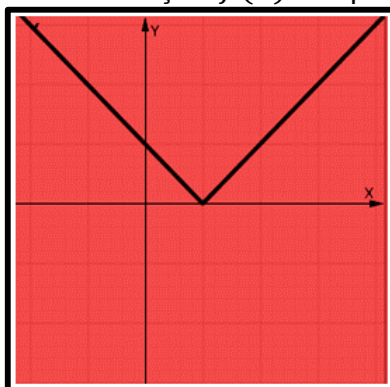
A ilustração seguinte é um exemplo de translação horizontal à direita conforme a Função Modular $f(x) = |x - 1|$. O movimento do gráfico ocorre à direita em

relação a origem dos eixos do plano cartesiano. Isso se deve ao zero do módulo ser igual a 1.

O zero desta função $f(x) = |x - 1|$, pode ser obtido por meio da solução da expressão $f(x) = 0$, isto é $|x - 1| = 0$, de onde resulta $x - 1 = 0$, sendo $x = 1$.

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{se } x - 1 < 0 \rightarrow x < 1 \end{cases}$$

Figura 18: Função $f(x) = |x - 1|$



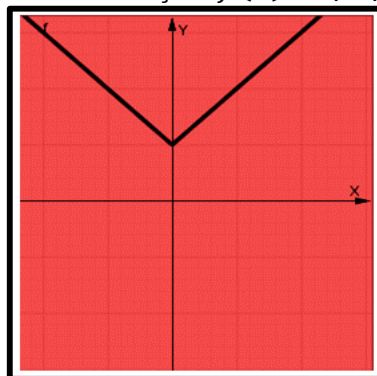
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A ilustração seguinte mostra a representação da translação vertical da Função Modular. O gráfico da Função Modular $f(x) = |x| + 1$ representa um deslocamento acima da origem dos eixos do plano cartesiano. O zero do módulo é nulo, porém ainda é somado com uma unidade conforme a função dada. Essa soma reflete diretamente na translação vertical em relação ao eixo das ordenadas.

Decorre da definição de modo que não consta real tal que $|x|$ seja negativo. Este fato pode ser verificado, observe que o gráfico não intersecta o eixo das abscissas.

$$f(x) = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{se } x < 0 \rightarrow x < 0 \end{cases}$$

Figura 19: Função $f(x) = |x| + 1$

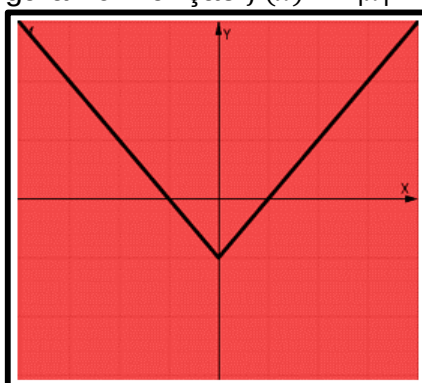


Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Por fim, este é o último exemplo de translação vertical levando em consideração a Função Modular $f(x) = |x| - 1$. O seu deslocamento no eixo das ordenadas será para baixo em relação a origem dos eixos do plano cartesiano. Sabe-se que o zero do módulo é nulo e ainda é necessário somar com -1 de acordo com a função dada. O zero da função $f(x) = |x| - 1$, pode ser obtido por meio da solução da expressão $f(x) = 0$, isto é, $|x| - 1 = 0$ sendo assim $|x| = 1$, de acordo com a definição de módulo resulta que $|x| = -1$ ou $|x| = 1$.

$$f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ -x - 1, & \text{se } x < 0 \rightarrow x < 0 \end{cases}$$

Figura 20: Função $f(x) = |x| - 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Sendo assim, é finalizada a sessão Matemática levando em consideração todos os conteúdos abordados com o objetivo do estudo e construção da Função Modular. Destacou-se vários conteúdos matemáticos que estão relacionados com o objeto matemático em questão, tais estudos trazem elementos que esclarecem o caminho a percorrer e assim norteia cada passo da construção da Sequência Didática, pois elucidam detalhes sutis do processo de investigação do objeto matemático e no desenvolvimento de definições, propriedades e demonstrações.

No decorrer da investigação do comportamento gráfico por meio de funções afins, ocorreu um *Insight* para a construção da Sequência Didática em questão. Pois a ideia adotada para estudo de Função Modular com ênfase em função afim inspira a construção de outros Produtos Educacionais para ensino de Função Modular com ênfase em Quadrática, Exponencial e Logarítmica, por exemplo, que poderão utilizar da mesma ideia adotada para Função Afim neste trabalho.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINO DA FUNÇÃO MODULAR

Este capítulo é dedicado a apresentação da Sequência Didática para o ensino de Função Modular. Aqui são expostos algumas orientações para a aplicação da Sequência Didática e das atividades que a antecedem e sucedem.

Considerando a dependência da organização curricular da escola onde o professor trabalha, o momento de explanação do conteúdo matemático proposto nesta pesquisa pode sofrer variações, ficando a critério do professor determinar a melhor forma de aplicá-lo. O conteúdo referente à Função Modular comumente é trabalhado e exposto nos livros didáticos do 1º Ano do Ensino Médio, em geral, após os estudos das Funções Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica.

Apesar do conteúdo das funções ser trabalhado com noções preliminares no Ensino Fundamental, é perceptível notar que a maioria dos alunos ao chegarem no Ensino Médio, apresentam muitas dificuldades com relação à matemática básica necessária para o desenvolvimento dos conteúdos a serem trabalhados em anos posteriores. Esse fator negativo é a causa da elaboração de novas propostas didáticas que visem à superação destas dificuldades no ensino e aprendizagem de matemática.

Nogueira Junior (2008) pesquisou sobre as dificuldades inerentes ao estudo das funções e considerou a Função Modular como um “nó” no referente estudo pois promove a vinculação com outras funções elementares. Logo, os problemas enfrentados para a introdução de uma nova função, que necessita das bases matemáticas de outras funções, pode gerar um desconforto nos alunos caso estes não tenham o conhecimento prévio necessário para a exposição do novo conteúdo.

Observando as bases teóricas que foram levantadas na revisão de literatura e nas dificuldades dos alunos no conteúdo de Função Modular, foi possível elaborar uma Sequência Didática que minimize os problemas educacionais inerentes a esta função. Esta Sequência Didática é disponibilizada integralmente a seguir com a finalidade de que outros professores apliquem-na e observem uma melhoria no ensino da Função Modular para confirmar os resultados obtidos nesta pesquisa ou até mesmo observem outras contribuições não destacadas neste documento.

Ao professor sugere-se que cumpra todas as etapas de aplicação na qual obedece a seguinte ordem: Verificação de Conhecimentos Matemáticos sobre Conteúdos; Oficina; Sequência Didática (composta por 4 atividades) e Avaliação

Aplicativa. Todos estes materiais podem ser impressos em folhas A4 como forma de garantir um baixo custo para a realização das atividades.

Inicialmente, considerou-se necessário elaborar um teste de Verificação de Conhecimentos Matemáticos sobre Conteúdos relacionados à Função Modular, nos quais foram restritos a Função Afim no que se refere ao crescimento ou decrescimento da função e raiz ou zero da função, os movimentos no plano de translação e reflexão e o conceito de módulo de um número. Esse teste torna-se necessário como forma de diagnosticar os conhecimentos prévios da turma, se em anos anteriores os professores antecedentes ministraram ou não os conteúdos básicos necessários para o desenvolvimento do conceito de Função Modular.

Logo, o primeiro passo é aplicar o teste de Verificação de Conhecimentos Matemáticos sobre Conteúdos, sendo composto por três questões. A primeira questão tem como título Função Afim e objetiva classificar a função em crescente ou decrescente e discutir os movimentos de reflexão e translação dos gráficos das funções em relação aos eixos do plano cartesiano. Tendo seis exemplos para a construção dos gráficos correspondentes às funções no referido plano.

A segunda questão tem como título Função Afim e objetivo de determinar o zero ou raiz da função, em que o aluno deve responder todos os itens presentes no quadro com os mesmos exemplos da questão 1.

A terceira questão tem como título Conceituação de Módulo de um Número e tem como objetivo definir o módulo de um número. É apresentado um quadro com 17 exemplos para ser preenchido obedecendo alguns exemplos já realizados. Assim, finaliza-se a primeira etapa.

Ao finalizar a aplicação do teste, o professor é capaz de determinar o grau de familiaridade dos alunos com os conhecimentos prévios mínimos para a introdução do conceito de Função Modular. Conforme o resultado, há a possibilidade de dois caminhos a serem optados para o prosseguimento das atividades. Caso o professor perceba que seus alunos não obtiveram um desempenho considerado aceitável, este segue para a ministração da Oficina, caso contrário, se os alunos não tiveram dificuldades ao resolverem as questões do teste de Verificação de Conhecimentos, pode iniciar a aplicação da Sequência Didática.

A segunda parte é composta pela Oficina relativa aos mesmos conteúdos do teste (Função Afim e Módulo) que, conforme determinado, será realizada caso os alunos não obtenham um bom desempenho nas questões propostas na etapa de

Verificação de Conhecimentos Matemáticos sobre Conteúdos. Nesta ocasião, a Oficina deve ser desenvolvida na íntegra como alternativa de nivelamento do conhecimento dos alunos detalhada a seguir.

A Oficina apresenta 5 atividades sendo que a primeira tem como título Lei de Formação e objetiva formar os pares ordenados conforme a expressão fornecida, tendo 4 exemplos de aplicação. Ao formar os pontos no plano cartesiano, o aluno será capaz de observar o comportamento da função ao aumentar ou diminuir os valores fornecidos.

Na segunda atividade, com o título Função Afim e objetivo de classificar a Função Afim em crescente e decrescente, propõe aos alunos discutirem os movimentos de reflexão e translação dos gráficos das funções em relação aos eixos do plano cartesiano por meio de 6 exemplos a serem analisados. Ao construir os gráficos das funções, o aluno poderá observar o comportamento da Função Afim a partir da alteração de seus coeficientes, com isto, o professor informa os movimentos de translação e reflexão que podem ocorrer entre as funções dadas.

Na terceira atividade com o título Função Afim e objetivo de determinar o zero ou raiz da função, propõe-se o preenchimento de um quadro com 6 exemplos. O quadro propõe a identificação de algumas características das Funções Afins dadas como o ponto de intersecção com os eixos das abscissas e ordenadas e o estudo do sinal que será mediado pelo professor. Assim, o aluno terá condições de determinar o zero ou raiz da função.

Na quarta atividade cujo título é Conceituação de Módulo de um número e objetivo de conceituar o módulo de um número, os 7 exemplos apresentados são realizados na reta numérica, os quais os alunos devem verificar a distância de um número x até a origem da reta. A partir, das observações os alunos podem intuitivamente compreender o conceito de módulo.

Na quinta e última atividade, com o título Módulo do Resultado de Expressão Algébrica objetiva descobrir uma relação entre os módulos de números simétricos. A partir de alguns exemplos os alunos podem fortalecer as suas ideias intuitivas sobre o módulo de um número além de envolver os conceitos de expressões algébricas modulares.

O terceiro passo será a aplicação da Sequência Didática composta por 4 atividades (fascículos) com base nas Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual de Cabral (2017), sendo que a primeira é a Conceituação de Função

Modular, a segunda Extensão da Definição da Função Modular, a terceira Aprofundamento da Função Modular e a quarta e última Generalização da Função Modular.

Caso vier a ser necessário, o professor deve realizar um estudo aprofundado da Função Modular para compreender as definições, propriedades, conceitos e procedimentos algorítmicos, pois ao final de cada atividade da Sequência Didática deve ser realizada uma intervenção formalizante que remodela as observações empíricas e as generalizações dos alunos com uma linguagem matemática mais sofisticada. Assim, sugere-se a leitura da fundamentação matemática que foi apresentada anteriormente à Sequência Didática.

Recomenda-se ao professor que para a aplicação da Sequência Didática, organize a turma em grupos compostos de 5 a 6 alunos. Essa estratégia favorece a determinação de um ambiente participativo e reflexivo, além de promover facilidade nas interações verbais entre os alunos e o próprio professor, no qual observará os diálogos e argumentações durante a resolução das atividades. Vale alertar que caso o professor observe conclusões precipitadas ou diálogos que não contribuam na construção dos conceitos, poderá realizar intervenções orais para que os alunos prossigam atentos às atividades propostas.

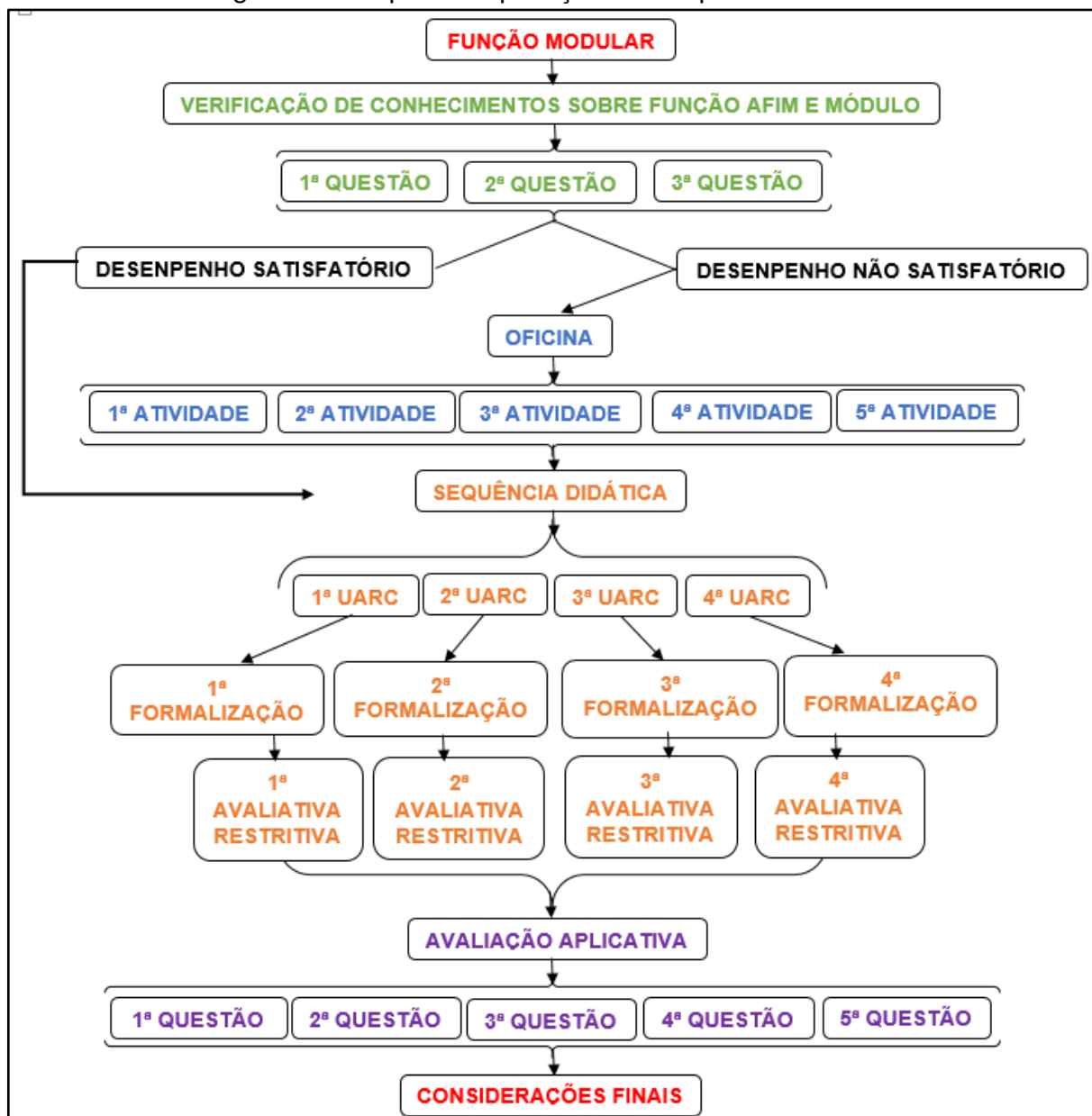
Todas as unidades articuladas da Sequência Didática para o ensino da Função Modular exigem que os alunos tenham em mãos o roteiro de atividades, caneta ou lápis, borracha e régua para a construção dos gráficos. As atividades constituem-se de recursos visuais para diferenciar as funções e apresentam comandos de curta duração para serem respondidos conforme as observações dos alunos em suas construções.

Para a finalização de todas as etapas, deve ser aplicada uma Avaliação Aplicativa composta de 5 questões, sendo a primeira questão correspondente à primeira atividade da Sequência Didática, a segunda questão relacionando-se com a segunda atividade da Sequência didática e assim por diante até a quarta questão. A quinta e última questão da Avaliação Aplicativa tem como objetivo mostrar equações algébricas (sentenças).

Esta última etapa que segue após a aplicação da Sequência Didática, irá ajudar o professor a verificar a potencialidade que obtiveram as atividades desenvolvidas. Nesse sentido, os resultados inerentes à aprendizagem da Função Modular estarão mais nítidos e proporcionarão uma nova perspectiva para o ensino deste conteúdo.

Afim de nortear as etapas de aplicação do conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática, a seguir apresenta-se a estruturação dos procedimentos adotados nessa pesquisa que pode servir de modelo para futuros estudos correlacionados.

Figura 21: Etapas de aplicação da Sequência Didática



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A partir da imagem o professor pode direcionar o seu trabalho pedagógico de forma a manter a organização das atividades propostas para relembrar constantemente dos objetivos estabelecidos antes da aplicação da Sequência Didática até o momento de avaliá-la.

A seguir são apresentadas as atividades preliminares que antecedem a Sequência Didática, nos quais foram elaborados um teste de verificação de conhecimentos matemáticos e uma oficina para nivelamento de conhecimentos mínimos necessários para a aplicação da sequência.

4.1 VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE FUNÇÃO AFIM E MÓDULO

A seguir, foram detalhados os procedimentos e objetivos do teste de verificação de conhecimentos matemáticos necessários para adaptação dos novos conhecimentos que se pretende ensinar sobre Função Modular.

A fim de que a aplicação da Sequência Didática para o ensino de Função Modular ocorra com êxito, alguns conhecimentos elementares são fundamentais, tais como: Função Afim e Módulo.

Segundo Cabral (2017, p. 82), em Educação Matemática o material de aprendizagem deve levar em consideração os conhecimento prévios do alunos. Portanto, é orientado aos professores que forem fazer uso desse produto educacional verificar antecipadamente se os alunos conhecem os assunto básicos aqui considerados como pré-requisitos de sua aplicabilidade.

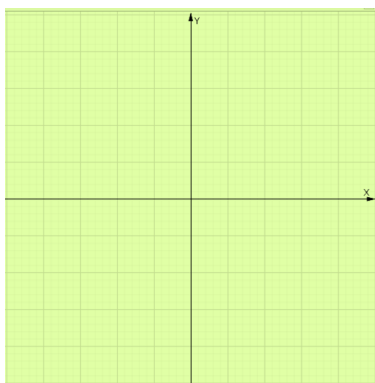
O teste de verificação consiste em três questões que pretendem identificar a habilidade do aluno em construir o gráfico da função afim, bem como o comportamento a partir do estudo do sinal. Também, verifica-se a capacidade do aluno quanto ao conceito de módulo de um número.

A seguir é ilustrada as folhas de atividade disponibilizadas na aplicação do teste:

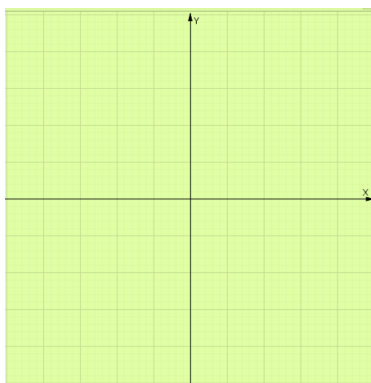
QUESTÃO 01**Título:** Função Afim**Objetivo:** Classificar a função afim em função crescente ou decrescente e discutir os movimentos de reflexão e translação dos gráficos das funções em relação aos eixos.**Material:** Roteiro, lápis, caneta, borracha.**Procedimento:**

- Construa o gráfico correspondente de cada função abaixo no plano cartesiano.

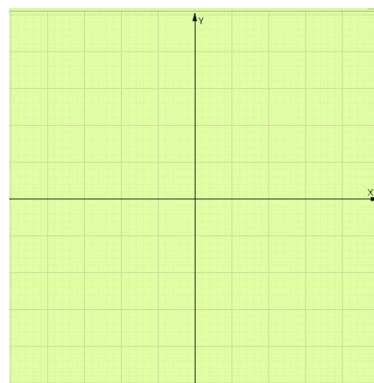
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = x$$



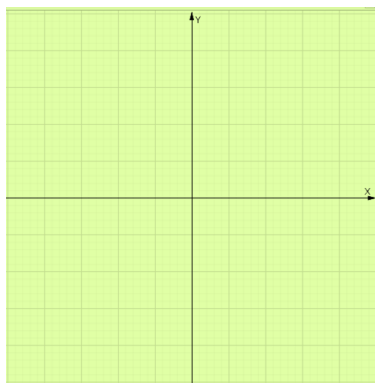
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 2x$$



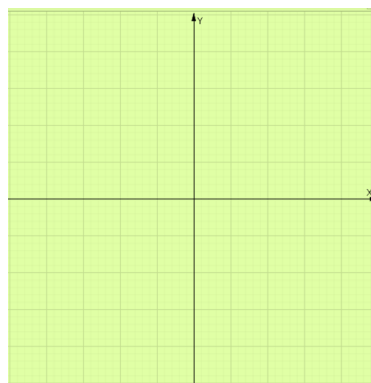
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -2x$$



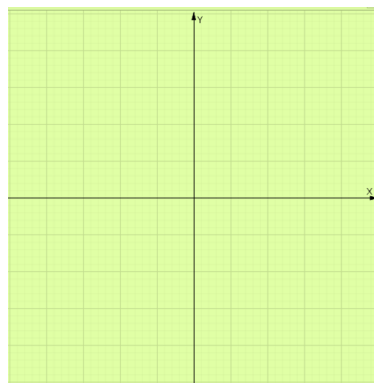
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 2x - 2$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -2x + 2$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 2x + 4$$

**Observação:**

QUESTÃO 02

Título: Função Afim

Objetivo: Determinar o zero da função.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento:

- Preencha o quadrado abaixo conforme os itens citados.
- Use as informações dos gráficos da questão 01 pois as funções são as mesmas citadas abaixo.

Função $f(x) = ax + b$ Reta	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -2x$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x - 2$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -2x + 2$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 4$
Zero da função (abscissa) $f(x) = 0$						
Ponto de intersecção no eixo das abscissas						
Ponto de intersecção no eixo das ordenadas						
Resolver a inequação $f(x) > 0$						
Resolver a inequação $f(x) < 0$						
Para que valores do domínio a imagem é positiva ou nula?						
Para que valores do domínio a imagem é negativa?						

Observação:

QUESTÃO 03

Título: Conceituação do módulo de um número

Objetivo: Definir o módulo de um número.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento:

- Preencha o quadrado abaixo conforme os modelos apresentados.

Módulo de um número $ x $	Resultado do módulo de um número
$ x $	
$ -17 $	$-(-17) = 17$
$ -13 $	
$ -10 $	
$ -7 $	$-(-7) = 7$
$ -3 $	
$ -2 $	$-(-2) = 2$
$ -1 $	
$ 0 $	0
$ 1 $	1
$ 2 $	
$ 6 $	6
$ 9 $	
$ 12 $	12
$ 13 $	
$ 17 $	
$ x $	

- Quando o resultado do módulo de um número será igual a ele mesmo?
- Quando resultado do módulo de um número será oposto a ele mesmo?
- Quando o resultado do módulo um número será nulo?
- Como podemos representar o módulo de um número por meio de equações algébricas?

Conclusão: O módulo de um número também podemos representar

por equações algébricas $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

Após a aplicação do teste de verificação de conhecimentos matemáticos, foi avaliado o desempenho dos alunos quanto aos seus conhecimentos. Caso seja verificado êxito, a sequência para ensino de função modular será imediatamente aplicada, caso contrário será realizado uma oficina para nivelar e adequar aos pré-requisitos necessários para sua aplicação.

4.2 OFICINA: FUNÇÃO AFIM E MÓDULO

A aplicação desta oficina se faz necessária apenas no caso de baixo desempenho na atividade de verificação de conhecimentos matemáticos: Função Afim e Módulo oficina para nivelamento em relação aos pré-requisitos da aplicabilidade da Sequência Didática para o Ensino de Função Modular.

Nesta oficina foram propostas cinco atividades em que se pretende que os estudantes adquiram as habilidades de plotagem e construção do gráfico da função afim, estudo do comportamento e do sinal da função afim, conceituação do módulo de um número, extensão do conceito de módulo em expressões algébricas.

É ilustrado a seguir a folhas de atividade da oficina proposta:

ATIVIDADE 01

Título: Lei de formação

Objetivo: Formar os pares ordenados conforme a lei de formação.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento:

- Preencha a tabela de cada alternativa de acordo com a lei de formação usando os valores das abscissas de -2 até $+2$.
- Conforme os pares ordenados encontrados na tabela coloque-os no diagrama ao lado e faça as ligações entre as abscissas e as ordenadas por meio de flechas.
- Localizar os pontos no sistema cartesiano.

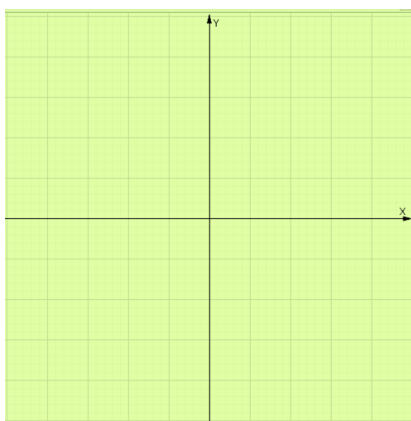
a) $f(x) = x$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: black; color: white;"> <th style="padding: 2px 5px;">x</th> <th style="padding: 2px 5px;">y</th> <th style="padding: 2px 5px;">(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	y	(x, y)																A B 	
x	y	(x, y)																		
b) $f(x) = x + 1$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: black; color: white;"> <th style="padding: 2px 5px;">x</th> <th style="padding: 2px 5px;">y</th> <th style="padding: 2px 5px;">(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	y	(x, y)																A B 	
x	y	(x, y)																		
c) $f(x) = ?$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: black; color: white;"> <th style="padding: 2px 5px;">x</th> <th style="padding: 2px 5px;">y</th> <th style="padding: 2px 5px;">(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	y	(x, y)																A -2-1012 B 012	
x	y	(x, y)																		
d) $f(x) = ?$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: black; color: white;"> <th style="padding: 2px 5px;">x</th> <th style="padding: 2px 5px;">y</th> <th style="padding: 2px 5px;">(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	y	(x, y)																A -2-1012 B -2-10	
x	y	(x, y)																		

Observação:

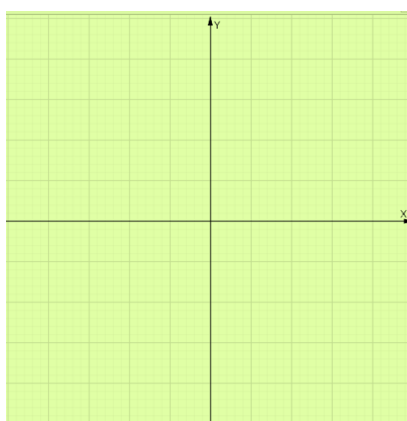
ATIVIDADE 02**Título:** Função Afim**Objetivo:** Classificar a função afim em função crescente ou decrescente e discutir os movimentos de reflexão e translação dos gráficos das funções em relação aos eixos.**Material:** Roteiro, lápis, caneta, borracha.**Procedimento:**

- Construa o gráfico correspondente de cada função abaixo no plano cartesiano.

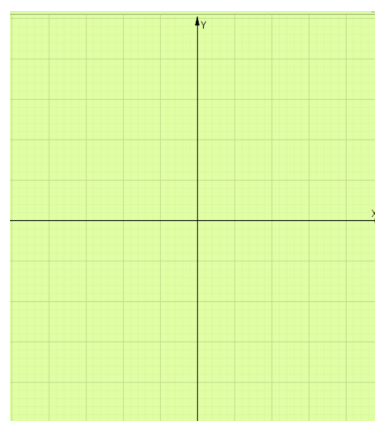
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = x$$



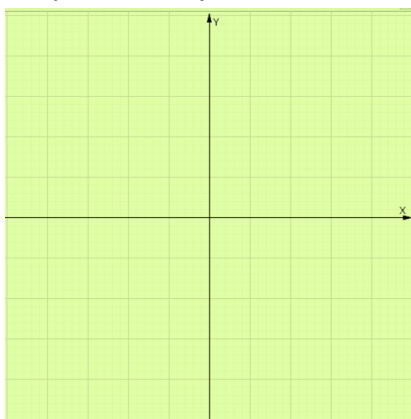
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 3x$$



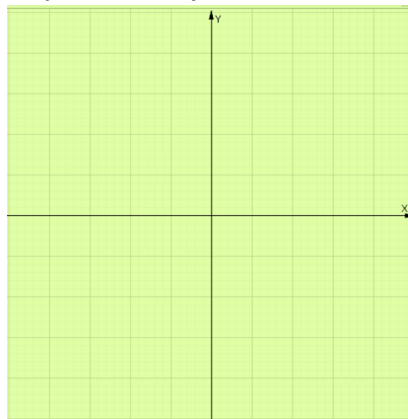
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = (-1) \cdot 3x$$



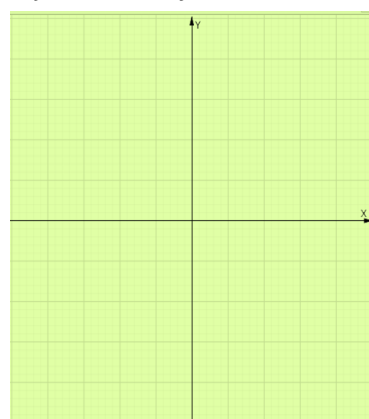
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 3x - 3$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -3x + 3$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 3x + 6$$

**Observação:**

ATIVIDADE 03

Título: Função Afim

Objetivo: Determinar o zero da função.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento:

- Preencha o quadrado abaixo conforme os itens citados.

Função $f(x) = ax + b$ Reta	$f(x) = x$	$f(x) = x - 1$	$f(x) = -x + 1$	$f(x) = 3x - 6$	$f(x) = -3x + 6$
Zero da função (abscissa) $f(x) = 0$					
Ponto de intersecção no eixo das abscissas					
Ponto de intersecção no eixo das ordenadas					
Resolver a inequação $f(x) > 0$					
Resolver a inequação $f(x) < 0$					
Para que valores do domínio a imagem é positiva ou nula?					
Para que valores do domínio a imagem é negativa?					

Observação:

ATIVIDADE 04

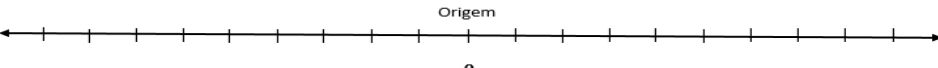
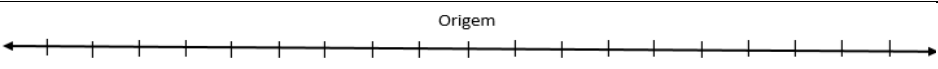
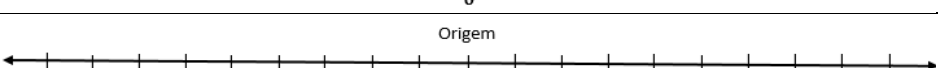
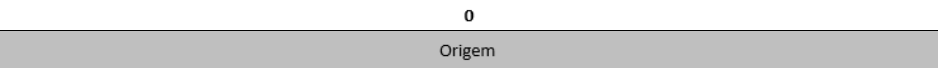
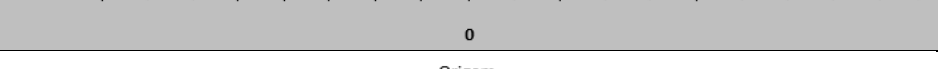
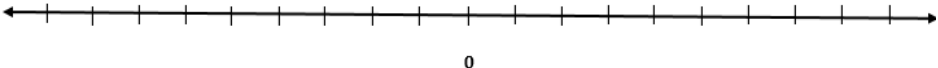
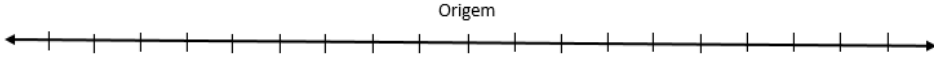
Título: Conceituação do módulo de um número

Objetivo: Definir o módulo de um número.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento:

- Marque na reta numérica cada um dos números a seguir: -7 , -3 , -2 , 0 , 2 , 3 e 7 .
- Com os dados obtidos preencha o quadro.

Número x	Módulo de x	Destaque na reta numérica a distância do número (x) até a sua origem
-7		
-3		
-2		
0		
2		
3		
7		

- Quando o resultado do módulo de um número será igual a ele mesmo?
- Quando resultado do módulo de um número será oposto a ele mesmo?
- Quando o resultado do módulo um número será nulo?
- O que podemos concluir a respeito da distância compreendida entre um número (x) e seu simétrico ($-x$) até a origem da reta numérica?
- Como podemos representar o módulo de um número por meio de equações algébricas?

Conclusão: A distância de um número x até a origem é denominada de módulo de x que é indicado por $|x|$. O módulo de um número também podemos representar por equações algébricas

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

ATIVIDADE 05

Título: Módulo do resultado da expressão algébricas

Objetivo: Descobrir uma relação entre os módulos de números simétricos.

Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha.

Procedimento: Preencha o quadro abaixo:

Quadro I							
Módulo \ X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $							
$ -x $							

- Para qual valor de x o resultado é nulo?
- Para quais valores de x os resultados são iguais?
- O que pode-se afirmar a respeito de $|x|$ e $|-x|$?

Quadro II							
Módulo \ X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x - 1 $							
$ -x + 1 $							

- Para qual valor de x o resultado é nulo?
- Para quais valores de x os resultados são iguais?
- O que pode-se afirmar a respeito de $|x - 1|$ e $|-x + 1|$?

Quadro III							
Módulo \ X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 1 $							
$ -x - 1 $							

- Para qual valor de x o resultado é nulo?
- Para quais valores de x os resultados são iguais?
- O que pode-se afirmar a respeito de $|x + 1|$ e $|-x - 1|$?

Observação:

Conclusão: O módulo do número é igual ao módulo do simétrico aditivo do número real. $|x| = |-x|$

4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: FUNÇÃO MODULAR

Nesta sessão é apresentado o objeto fim desta pesquisa: A Sequência Didática para o Ensino de Função Modular no Ensino Médio. Nela objetiva-se que o estudante aprenda o conceito da Função Modular, realize a extensão do conceito, aprofunde os conceitos adquiridos para observar os diferentes comportamentos da função modular, realizando generalizações.

Este produto educacional foi construído baseando-se nos aportes teóricos e metodológicos, em revisão de literatura e na fundamentação Matemática de Função Modular. É portanto resultado de uma profunda pesquisa sobre o ensino de nosso objeto matemático.

4.3.1 1ª Atividade: Conceituação da Função Modular

A 1ª atividade se propõe a definir a Função Modular. Parte da construção de gráficos de função afim, sobre os quais são realizadas intervenções iniciais, reflexivas, exploratórias, formalizantes e avaliativas restritivas, com a intenção de direcionar o estudantes a definição de função modular como ilustramos a seguir.

ATIVIDADE 01

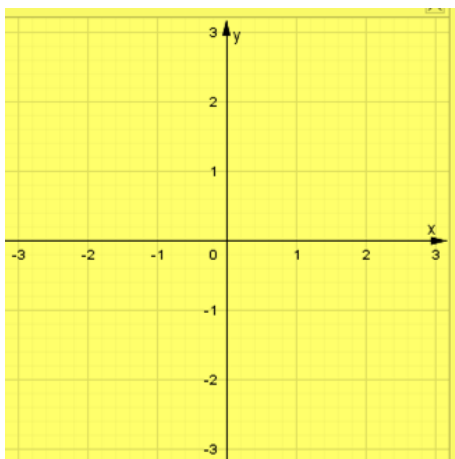
Título: Conceituação da Função Modular

Objetivo: Definir Função Modular.

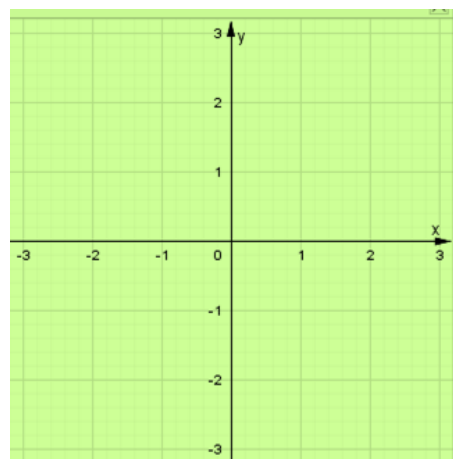
Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha e régua.

Procedimento: Construa os gráficos das funções f_1 , f_2 , f_3 , f_4 e responda os questionamentos.

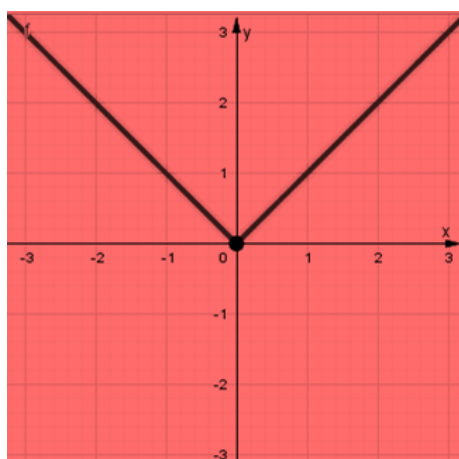
$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = x$$



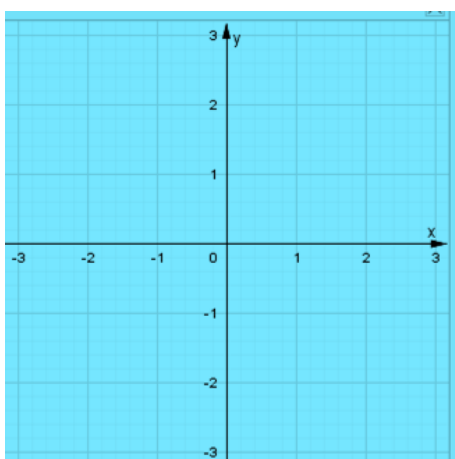
$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = -x$$



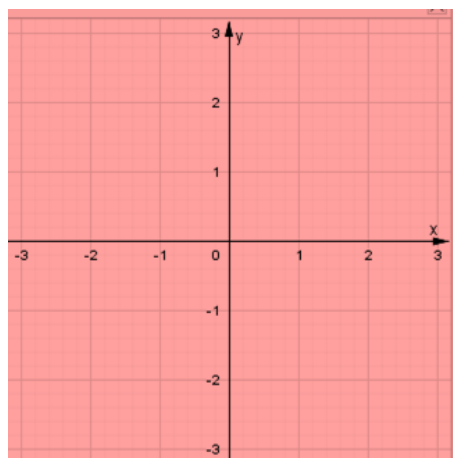
$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = x$$



$$f_4: \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = -x$$



Questionamentos – Intervenções Estruturantes

Intervenção Inicial (li)

Como podemos obter o gráfico de f_2 a partir o gráfico de f_1 ?

Como podemos obter o gráfico de f_1 a partir o gráfico de f_2 ?

Como podemos obter o gráfico de f_3 a partir o gráfico de f_1 ?

Como podemos obter o gráfico de f_4 a partir o gráfico de f_2 ?

Intervenção Reflexiva (lr)

Como podemos obter o gráfico de f_5 a partir o gráfico de f_1 ?

Como podemos obter o gráfico de f_5 a partir o gráfico de f_2 ?

Como podemos obter o gráfico de f_5 a partir o gráfico de f_3 ?

Como podemos obter o gráfico de f_5 a partir o gráfico de f_4 ?

Intervenção Exploratória (le)

Como podemos obter o gráfico f_5 usando os gráficos f_3 e f_4 ?

O gráfico f_5 pode ser escrito a partir dos gráficos f_3 e f_4 ?

Como podemos obter a expressão algébrica do gráfico f_5 ?

Observação:

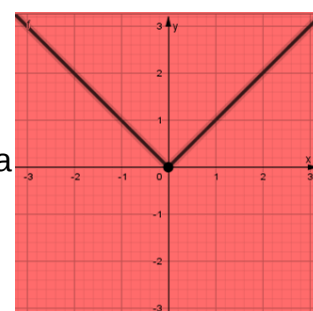
Formalização – Intervenção Formalizante (lf)

O gráfico f_5 pode ser formado por duas situações:

Pelo recurso de construção gráfica (Reflexão)

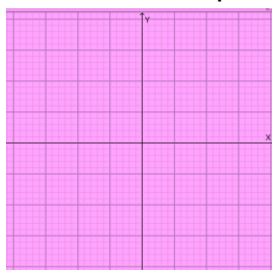
Pela junção de duas funções (É uma função de mais de uma sentença).

$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_5(x) = |x| \quad f_5(x) = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$$



Validação- Intervenção Avaliativa Restritiva (lAr)

Construa o gráfico da função f_6 , $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_6(x) = |2x|$, obtenha as expressões algébricas que as definem e qual a relação entre as funções f_5 e f_6 .



$$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_6(x) = |2x|$$

4.3.2 2ª Atividade: Extensão da Definição da Função Modular

O objetivo da 2ª atividade é representar a função modular nas suas formas algébrica e gráfica articulando essas duas formas de representação da Função Modular.

A atividade consiste em construir o gráfico da Função Modular a partir dos gráficos de funções afim simétricas entre si. Nas intervenções o aluno será direcionado a representar uma determinada função modular afim por meio de sentenças algébricas.

ATIVIDADE 02

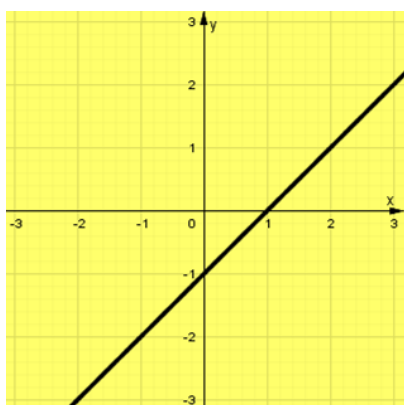
Título: Extensão da definição da Função Modular

Objetivo: Representar a Função Modular nas formas algébrica e gráfica.

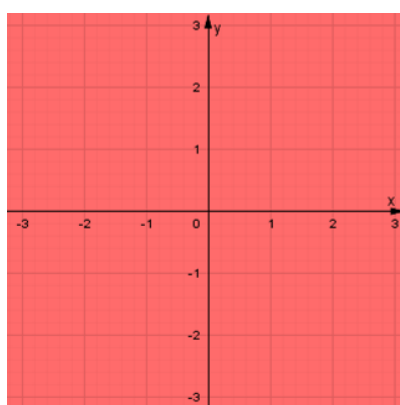
Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha e régua.

Procedimento: Construa o gráfico das Funções Modulares de f_3 , f_6 e responda os questionamentos.

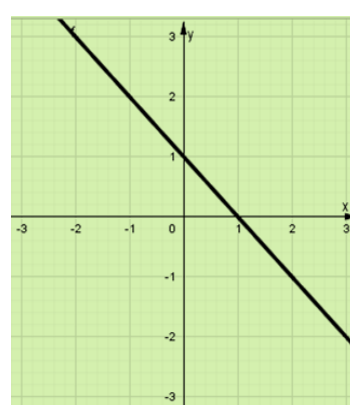
$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = x - 1$$



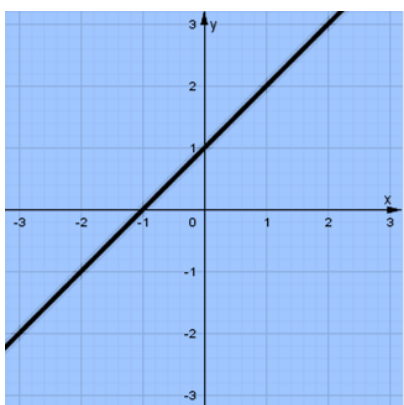
$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = |x - 1|$$



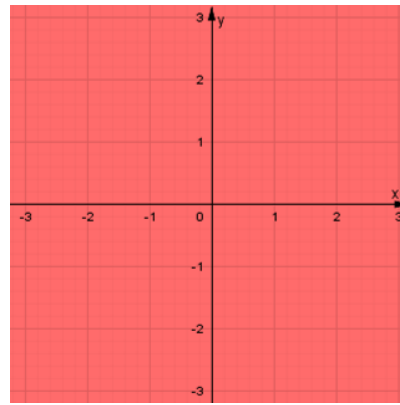
$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = -x + 1$$



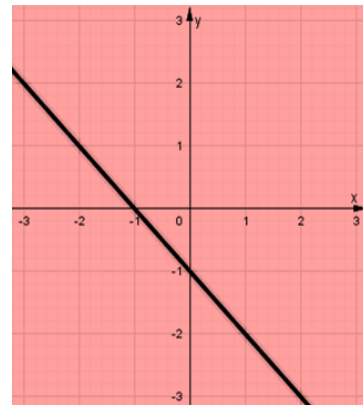
$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = x + 1$$



$$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_6(x) = |x + 1|$$



$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_5(x) = -x - 1$$



Questionamentos – Intervenções Estruturantes

Intervenção Inicial (li)

O que ocorre com os gráficos das funções f_3 e f_6 em relação ao eixo das ordenadas ($\overrightarrow{OY}$) do plano cartesiano considerando a função $f(x) = |x|$?

Intervenção Reflexiva (lr)

Como podemos obter o gráfico de f_3 a partir do gráfico de f_1 e f_2 ?

Como podemos obter o gráfico de f_6 a partir do gráfico de f_4 e f_5 ?

Intervenção Exploratória (le)

Como podemos representar as funções f_3 e f_6 por meio de sentenças algébricas?

Observação:

Formalização – Intervenção Formalizante (lf)

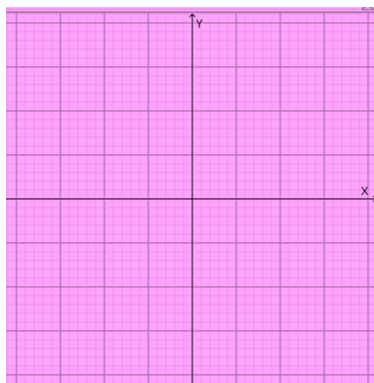
$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_3(x) = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1; x \geq 1 \\ -x + 1; x < 1 \end{cases}$$

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_6(x) = |x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1; x \geq -1 \\ -x - 1; x < -1 \end{cases}$$

Translação horizontal

Validação- Intervenção Avaliativa Restritiva (lAr)

Construa o gráfico da função f_7 , $f_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_7(x) = |x + 2|$ e represente essa função por meio de sentenças algébricas.



$$f_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_7(x) = |x + 2|$$

4.3.3 3ª Atividade: Aprofundamento da Função Modular

A proposta da 3ª atividade é articular os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, para construir gráficos de diferentes funções modulares afim, a partir do comportamento e translações provocadas pelas diferentes manipulações do coeficiente linear.

ATIVIDADE 03

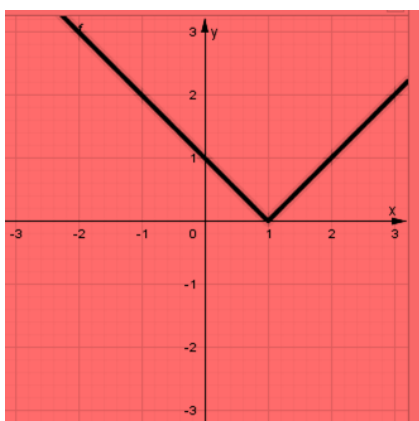
Título: Aprofundamento da Função Modular

Objetivo: Representar outras Funções Modulares nas formas algébricas e gráfica.

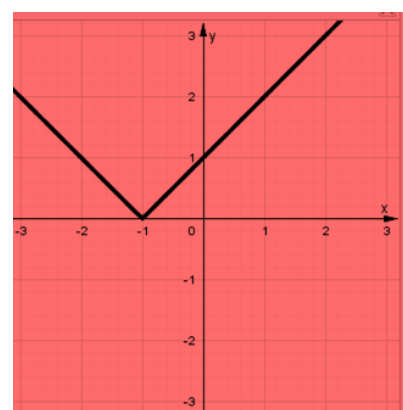
Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha e régua.

Procedimento: Construa os gráficos das Funções Modulares de f_4 e f_5 a partir dos deslocamentos das funções dadas e responda os questionamentos.

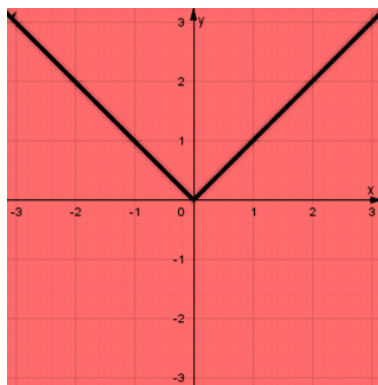
$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = |x - 1|$$



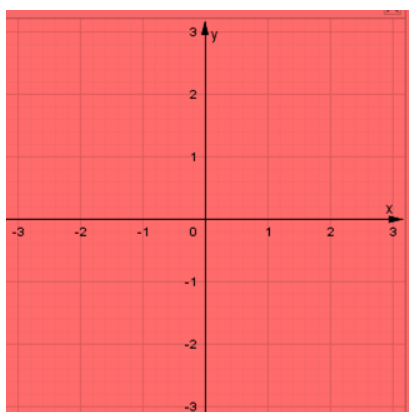
$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = |x + 1|$$



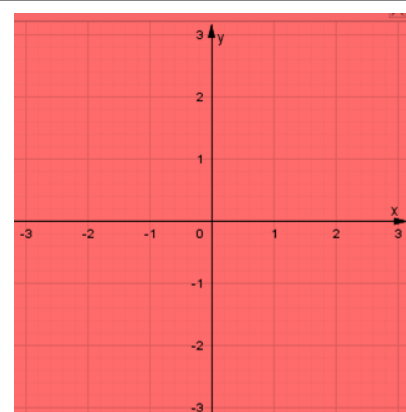
$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = |x|$$



$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = |x| - 1$$



$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_5(x) = |x| + 1$$



Questionamentos – Intervenções Estruturantes

Intervenção Inicial (li)

O que ocorre com os gráficos das funções f_4 e f_5 em relação ao eixo das abscissas $(\overrightarrow{OX})$ do plano cartesiano, considerando a função $f(x) = |x|$?

Intervenção Reflexiva (lr)

Como podemos obter o gráfico de f_4 a partir o gráfico de f_1 ?

Como podemos obter o gráfico de f_5 a partir o gráfico de f_1 ?

Intervenção Exploratória (le)

Como podemos representar a função f_4 e f_5 por meio de sentenças algébricas?

Observação:

Formalização – Intervenção Formalizante (lf)

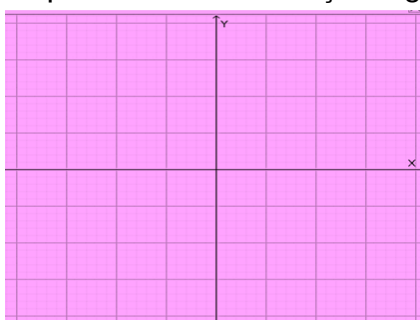
$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_4(x) = |x| - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1; x \geq 0 \\ -x - 1; x < 0 \end{cases}$$

$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_5(x) = |x| + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1; x \geq 0 \\ -x + 1; x < 0 \end{cases}$$

Translação vertical

Validação- Intervenção Avaliativa Restritiva (lAr)

Construa o gráfico da função f_6 , $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_6(x) = |x| - 2$ e represente essa função por meio de sentenças algébricas.



$$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_6(x) = |x| - 2$$

4.3.4 4ª Atividade: Generalização da Função Modular

Na 4ª atividade pretende-se que o estudante seja capaz de generalizar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores de modo a reconhecer e representar qualquer tipo de função modular afim.

Foi proposto que os estudantes reajam às intervenções sendo direcionados a construir gráficos de funções modulares a partir dos deslocamentos ilustrados. Ao final espera-se que os estudantes sejam capazes de generalizar por sentenças algébricas as diferentes configurações de funções modulares afim.

ATIVIDADE 04

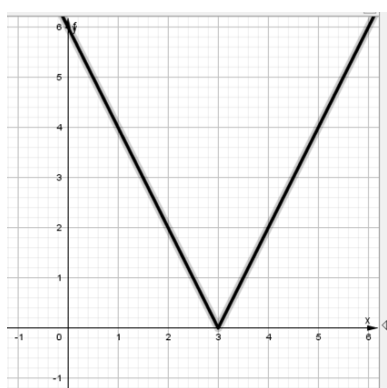
Título: Generalização da Função Modular

Objetivo: Generalizar a Função Modular nas formas Algébricas e gráfica.

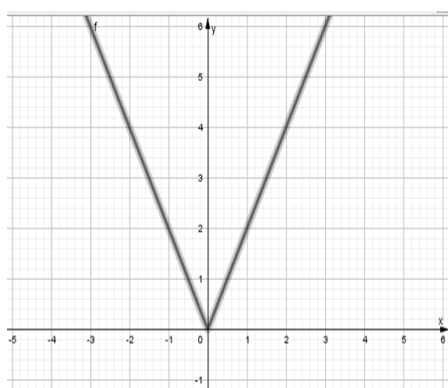
Material: Roteiro, lápis, caneta, borracha e régua.

Procedimento: Faça a construção dos gráficos das Funções Modulares f_4, f_5, f_6, f_7 a partir dos deslocamentos das funções dadas e responda os questionamentos.

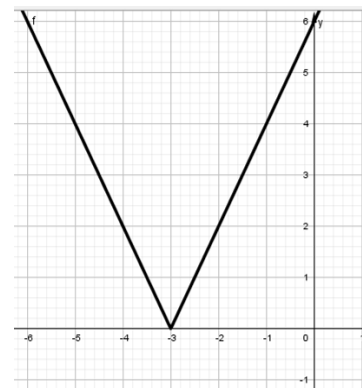
$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = |2x - 6|$$



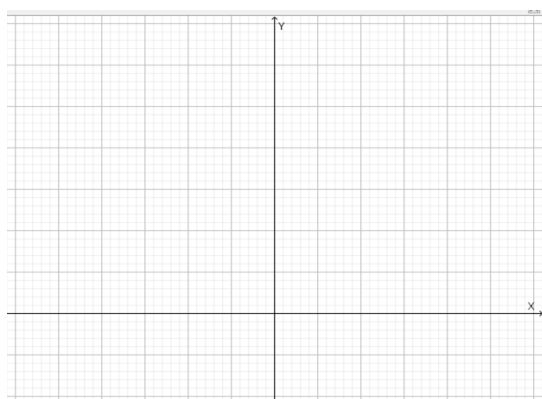
$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = |2x|$$



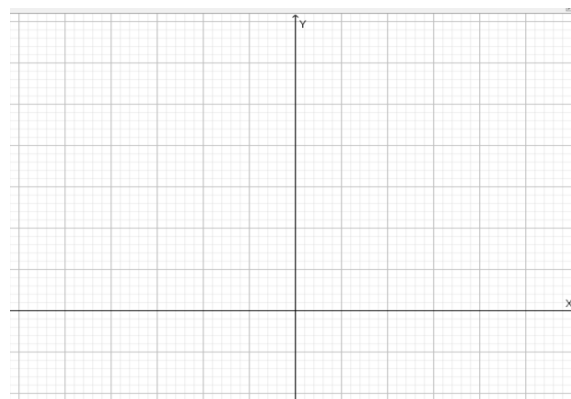
$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = |2x + 6|$$



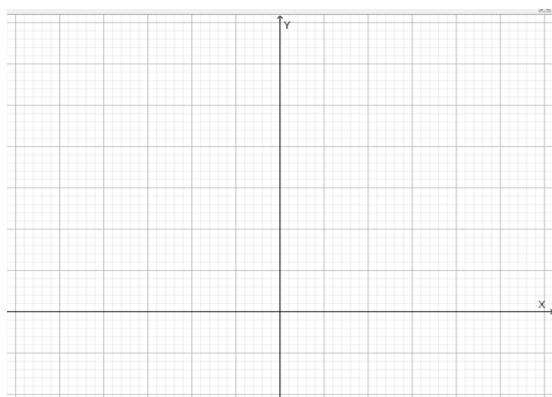
$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = |2x - 6| + 1$$



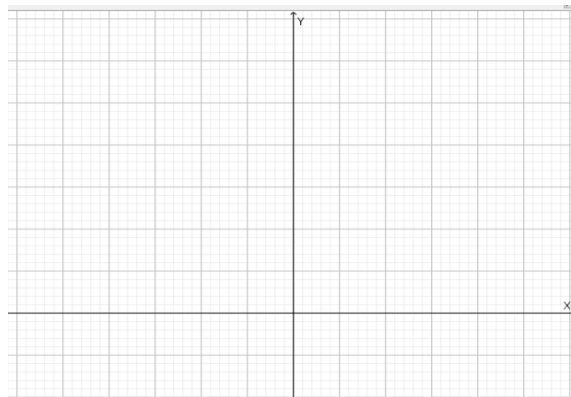
$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_5(x) = |2x + 6| + 1$$



$$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_6(x) = |2x - 6| - 1$$



$$f_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_7(x) = |2x + 6| - 1$$



Questionamentos – Intervenções Estruturantes

Intervenção Inicial (li)

Quais foram os deslocamentos do gráfico de f_4 e f_6 em relação aos eixos $(\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$) do plano cartesiano, considerando a função f_2 ?

Quais foram os deslocamentos do gráfico de f_5 e f_7 em relação aos eixos $(\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$) do plano cartesiano, considerando a função f_3 ?

Intervenção Reflexiva (lr)

Como podemos obter o gráfico de f_4 e f_6 a partir o gráfico de f_1 e f_2 ?

Como podemos obter o gráfico de f_5 e f_7 a partir o gráfico de f_1 e f_3 ?

Intervenção Exploratória (le)

Como podemos representar as funções f_4, f_5, f_6 e f_7 por meio de sentenças algébricas?

Observação:

Formalização – Intervenção Formalizante (lf)

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_4(x) = |2x - 6| + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5; x \geq 3 \\ -2x + 7; x < 3 \end{cases}$$

$$f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_5(x) = |2x + 6| + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7; x \geq -3 \\ -2x - 5; x < -3 \end{cases}$$

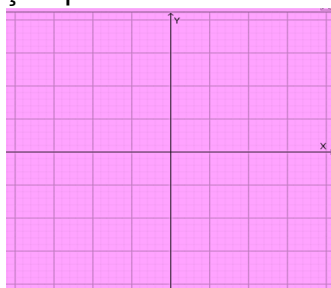
$$f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_6(x) = |2x - 6| - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7; x \geq 3 \\ -2x + 5; x < 3 \end{cases}$$

$$f_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_7(x) = |2x + 6| - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5; x \geq -3 \\ -2x - 7; x < -3 \end{cases}$$

Translações horizontais e verticais

Validação- Intervenção Avaliativa Restritiva (lAr)

Construa o gráfico da função f_8 , $f_8: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_8(x) = |3x + 6| - 4$ e represente essa função por meio de sentenças algébricas.



$$f_8: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_8(x) = |3x + 6| - 4$$

4.4 AVALIAÇÃO APLICATIVA: FUNÇÃO MODULAR

Nesta sessão é apresentada uma atividade composta por questões avaliativas de verificação de aprendizagem dos conceitos estudados nas atividades da Sequência Didática para o ensino de Função Modular, conforme descreve Cabral (2017).

A partir do modelo citado, ao final da aplicação da Sequência Didática há a necessidade de avaliar o grau de apreensão conceitual dos alunos com o conteúdo trabalhado por meio de Intervenções Avaliativas Aplicativas (IAa). Essas intervenções relacionam-se à resolução de problemas de aplicação que levam os alunos a mobilizar todas as noções conceituais aprendidas durante a Sequência Didática a partir das propriedades operacionais (algoritmos) em situações de diversos contextos reais ou abstratos.

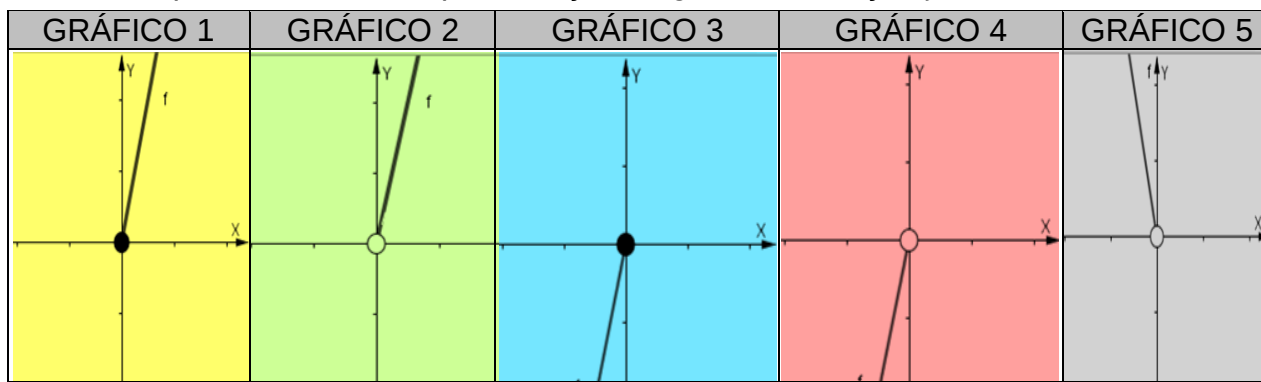
Esta etapa torna-se necessária para a verificação do rendimento dos alunos conforme o contraste do antes e depois da aplicação da Sequência Didática. Com isso, é verificado os resultados relativos ao objetivo proposto nesta pesquisa para a verificação das potencialidades da Sequência Didática elaborada para o ensino da Função Modular.

Nessa Avaliação Aplicativa são propostas situações de resolução de problemas abstratos que mobilizem os conhecimentos sobre manipulação gráfica por justaposição, translação horizontal e vertical, reconhecer os diferentes comportamentos e representações de Função Modular, bem como as generalizações da definição de Função Modular em sentenças algébricas.

No sentido dessas considerações, a Avaliação Aplicativa é composta de 5 questões, sendo a primeira questão correspondente à primeira atividade da Sequência Didática, a segunda questão relacionando-se com a segunda atividade da Sequência Didática e assim por diante até a quarta questão. A quinta e última questão da Avaliação Aplicativa tem como objetivo mostrar equações algébricas (sentenças).

QUESTÃO 01

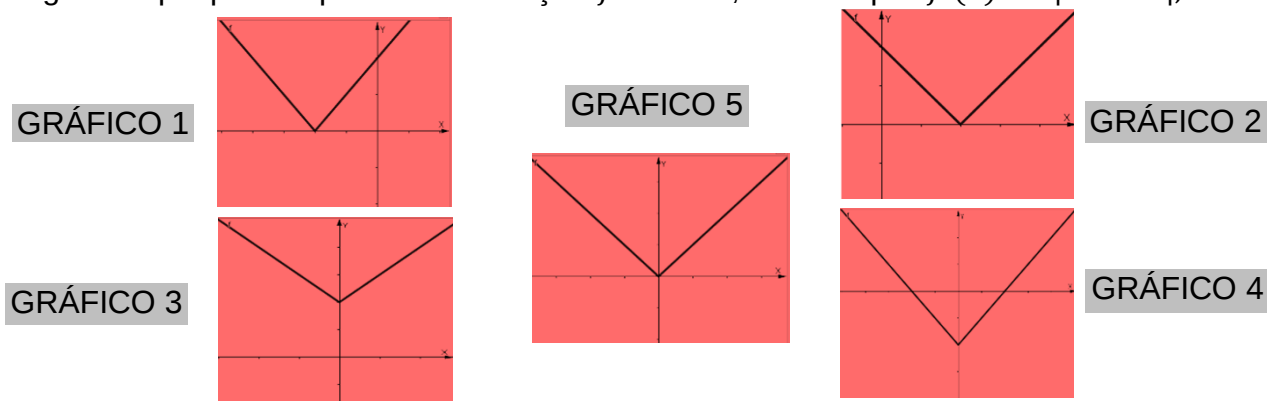
Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |4x|$. Justapondo dois gráficos abaixo, os que formam uma representação do gráfico da função f é:



- a) 1 e 5. b) 3 e 4. c) 2 e 5. d) 1 e 3. e) 4 e 5.

QUESTÃO 02

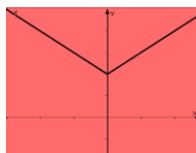
O gráfico que pode representar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 4|$, é:



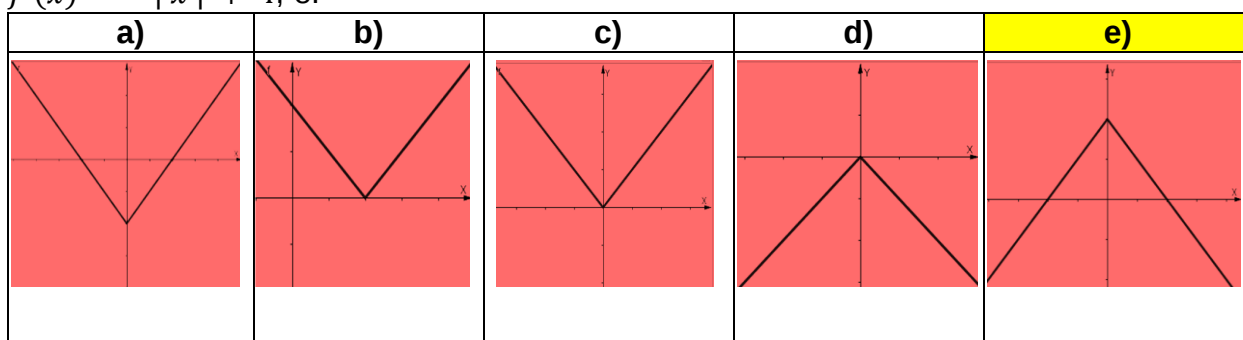
- a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

QUESTÃO 03

Se uma representação do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -|x| + 4$, é dado por



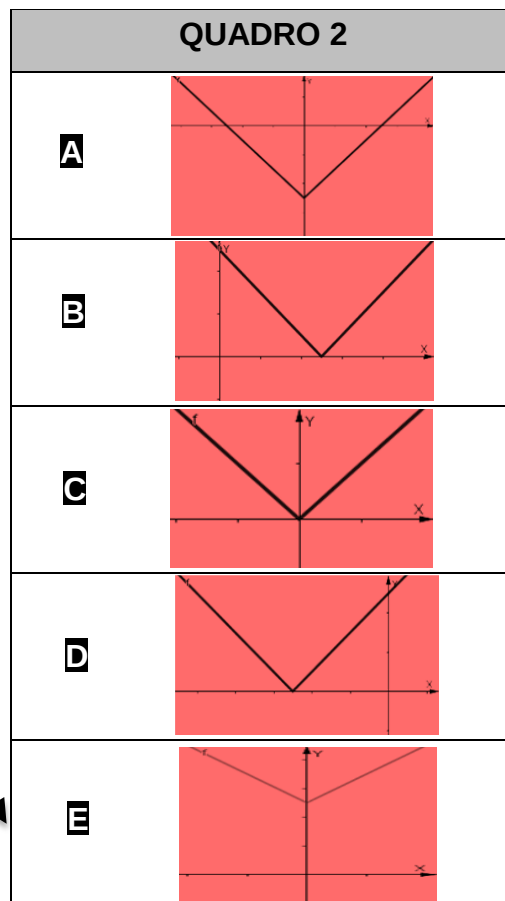
Então, a alternativa que represente a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -|x| + 4$, é:



QUESTÃO 04

Estabelecendo uma correspondência entre as funções $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ definidas no quadro 1 e os gráficos no quadro 2, conforme a indicação de um exemplo pode-se afirmar que a relação estabelecida é:

QUADRO 1
$f_1(x) = x + 5$
$f_2(x) = x - 5 $
$f_3(x) = 5x $
$f_4(x) = x - 5$
$f_5(x) = x + 5 $



a) $\{(f_1;E), (f_2;B), (f_3;C), (f_4;A), (f_5;D)\}$.

b) $\{(f_1;E), (f_2;A), (f_3;D), (f_4;B), (f_5;C)\}$.

c) $\{(f_1;E), (f_2;C), (f_3;A), (f_4;D), (f_5;B)\}$.

d) $\{(f_1;E), (f_2;D), (f_3;C), (f_4;B), (f_5;A)\}$.

e) $\{(f_1;E), (f_2;C), (f_3;B), (f_4;D), (f_5;A)\}$.

QUESTÃO 05

Considerando que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |2x - 6|$ pode ser representado por

$f(x) = \begin{cases} 2x - 6; & x \geq 3 \\ -2x + 6; & x < 3 \end{cases}$, represente a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$g(x) = |x - 3|$, por meio de sentenças algébricas.

Resolução

$$g(x) = \begin{cases} x - 3; & x \geq 3 \\ -x + 3; & x < 3 \end{cases}$$

IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO

Aluno(a): _____

Turma: _____

Turno: _____

Data: ____ / ____ / ____

QUADRO DE RESPOSTAS

QUESTÃO	01	02	03	04
ALTERNATIVA				
QUESTÃO 05 Resolução:				

Rascunho:

5 APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A aplicação da Sequência Didática para o ensino da Função Modular ocorreu no Colégio Estadual Paes de Carvalho, localizado na cidade de Belém/PA, com uma turma do 1º ano do Ensino Médio no turno da manhã. Participaram da aplicação 27 estudantes entre os 30 matriculados na turma. O controle de presença dos alunos no desenvolvimento das atividades consta no quadro 13 a seguir.

Quadro 13: Presença dos Alunos nas Atividades

NÚMERO	VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS SOBRE CONTEÚDOS	OFICINA	1ª ATIVIDADE	2ª ATIVIDADE	3ª ATIVIDADE	4ª ATIVIDADE	AVALIAÇÃO APLICATIVA
1	OK	-	-	-	-	-	-
2	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
3	-	OK	OK	-	-	-	-
4	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
5	-	OK	OK	OK	OK	OK	OK
6	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
7	OK	OK	OK	-	OK	OK	OK
8	-	OK	-	-	-	-	-
9	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
10	-	-	-	-	-	-	-
11	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
12	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
13	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
14	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
15	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
16	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
17	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
18	OK	-	-	-	-	-	-
19	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
20	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
21	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
22	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
23	-	-	-	-	-	-	-
24	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
25	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
26	-	-	-	-	-	-	-
27	OK	OK	-	-	OK	OK	OK
28	-	OK	-	-	OK	OK	OK
29	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
30	OK	OK	-	-	OK	OK	OK

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Apesar da turma ser previamente avisada sobre as atividades que seriam desenvolvidas, somente 13 alunos participaram efetivamente de todas as etapas antes, durante e após a aplicação da Sequência Didática para o ensino da Função Modular.

Conforme a quantidade de alunos presentes, foram formados 3 grupos onde os alunos poderiam cooperar uns com os outros para o preenchimento das atividades. Para garantir o registro dos diálogos feitos pelos alunos, foram utilizados celulares com gravadores de voz com a finalidade de registrar as interações entre os alunos e o professor. Tais diálogos servirão posteriormente para serem analisados e identificados os indícios de aprendizagem dos alunos no momento de aplicação da Sequência Didática.

A seguir são apresentados os resultados da aplicação da Sequência Didática com a transcrição dos áudios capturados dos 3 grupos participantes da pesquisa.

5.1 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 1: CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO INICIAL

T1-PROFESSOR: Bom dia! Vou inicialmente passar pra vocês as instruções sobre as atividades que faremos. Trata-se de uma pesquisa da UEPA sobre o assunto função modular. Vocês acabaram de receber a primeira atividade, você têm um tempo estimado de 30 minutos pra execução, acredito que possam fazer em menos tempo, pois percebi o conhecimento de vocês na oficina em que fizemos. O que vocês vão fazer agora é cada um dos gráficos, f_1 , f_2 , f_3 , e f_4 e depois vocês vão responder perguntas aqui ao lado bem simples. Isto é, vocês vão construir o gráfico e depois analisar, observando o eixo de y (eixo das ordenadas) e o eixo de x (eixo das abscissas) de modo a escolher valores de x para substituir na função para obter dos valores de y e vai marcando os pontos no plano cartesiano. Depois vocês passam para as perguntas, para qualquer dúvida estarei aqui como mediando ajudando vocês no que precisarem.

T2-ALUNO1A: E essa parte aqui professor? Esse gráfico da f_5 que é Função Modular né?

T3-PROFESSOR: Isso mesmo, perfeito, gráfico da Função Modular, mas vamos observar como ele foi construído.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 01

T4- ALUNO 1B: Professor como faço para responder a primeira pergunta?

T5- PROFESSOR: Vamos ler o comando: “como podemos obter o gráfico da f2 a partir do gráfico da f1?” Como você faria para obter gráfico f2, isto é, como eu posso chegar no f2 olhando pro f1.

T6- ALUNO 1A: Tô sentindo que vai sair isso!

T7- ALUNO 1B: Acho que esse aqui é só multiplicar por menos 1.

T8- ALUNO 1A: Já sei! Professor!

T9- ALUNO 1A: Esse aqui só pode usar positivo e esse só negativo né?

T10- PROFESSOR: Perfeitamente! É isso mesmo!

T11- ALUNO 1B: Agora eu entendi o primeiro e o segundo! Vocês o terceiro entenderam?

T12- ALUNOS 1C E 1D: Sim!

T13- ALUNO 1B: Professor! Aqui eu só posso escolher um x positivo e no outro só posso escolher um x negativo?

T14- PROFESSOR: Isso filho! Parabéns! Show de bola! Isso mesmo!

T15- ALUNO 1A: É, menos é pra cá, eu acho. Jogo menos 1 aqui, vai dar 1. Aqui jogo menos 3 vai dar 3.

T16-ALUNO 1B: Professor uma dúvida: como é que eu posso obter o f2 a partir do f1

T17-PROFESSOR- Como é que transforma no f2?

T18- ALUNO 1A- É só tirar o sinal ou então tirar o módulo né?

T19-PROFESSOR: Gostei! Mas percebiam uma coisa: que o módulo tem algo diferente.

T20- ALUNO 1A - É que vai ter o gráfico dos dois lados né professor, com o módulo?

T21-PROFESSOR: Isso! Boa sua colocação. Então você entendeu o que vai acontecer com gráfico colocando módulo.

T22- ALUNO 1A: Entendi professor! É que colocando módulo, o gráfico sempre vai ser positivo.

T23- ALUNO 1D: Esse aqui você fez usando o sinal de menos né?

T24- ALUNO 1A: Professor, e essa pra obter o gráfico da f_3 a partir do gráfico da f_1 .

T25- PROFESSOR: Então olha pro f_3 e olha pro f_1 , o que você fez para transformar o f_1 no f_3 .

T26- ALUNO 1A: Todos parecem a mesma coisa mas esses aqui são positivos e os outros são negativos.

T27- PROFESSOR: Mas o que você fez na realidade, eu entendi, você está falando do conjunto de entrada.

T28- ALUNO 1A: Isso! É porque nessa aqui todos usam o x positivo.

T29- PROFESSOR: Então escreva isso lá.

T30- ALUNO 1B: Então nunca vai dar negativo?

T31- ALUNO 1B: Professor, e esse aqui na primeira é pra botar um módulo é?

T32-ALUNO 1A: Professor, a função modular aqui é f_5 e essas outras aqui nenhuma é função modular, certo?

T33- PROFESSOR: Perfeito! Nenhuma delas. Então a partir de agora nós vamos olhar pra elas pra poder chegar na função modular.

T34- ALUNO 1A: Significa que todas essas perguntas aqui, vamos ter que colocar um módulo.

T35-PROFESSOR: Perfeito! Em todas vamos ter que colocar um módulo. Concordo contigo. Agora qual é a maneira em que você escreve isso? Para o f_1 se transformar no f_5 , o que você iria fazer?

T36- ALUNO 1B: Isso aí vai dar sempre positivo, professor.

T37- PROFESSOR: Exatamente! Isso o que você está dizendo, você escreve com a sua linguagem.

T38- ALUNO B: Mas professor, se tudo está em módulo consequentemente não tem parte negativa.

T39- PROFESSOR: Parabéns filho! Perfeitamente! Não tem parte negativa. Todos vão ficar positivos!

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 02

T40- PROFESSOR: Como é que você lê essa função número 1 aqui? Leia!

T41- ALUNO 2A: $f(x)$ igual a x .

T42-PROFESSOR: Você não tem que escolher os valores de x ? Então escolha qualquer valor de x . Coloque o 2. Então, liga o 2 com quem?

T43- ALUNO 2A: Dois!

T44- PROFESSOR: Então é isso

T45- ALUNO 2A: Professor, apareceu 2 aqui.

T46-PROFESSOR: Então você já pode procurar no eixo x só os positivos

T47- ALUNO 2A: Qual o valor para o x ?

T48- ALUNO 2B: Então se eu escolher o 2, vai dar 2. Ah! Depois a gente passa para esse daqui.

T49- ALUNO 2A: f de x igual a menos x . Se o x é negativo o gráfico é decrescente.

T50- ALUNO 2B: Lá é o x é positivo, aqui é negativo.

T51- PROFESSOR: Você já fez, né? Vamos verificar. Por exemplo o número 2 quando você substituir dois. Vai dar quanto?

T52- ALUNO 2B: Vai dar 2

T53- PROFESSOR: Outro número por favor

T54- ALUNO 2A: 3

T55- PROFESSOR: Quando você substitui o 3 vai dar quanto?

T56- ALUNO 2B: 3

T57- PROFESSOR: Agora você tem dois pontos.

T58- PROFESSOR: Como podemos obter o gráfico f_5 a partir do f_1 ? Olhe para o f_1 , como eu chegaria no f_5 a partir do f_1 ? Este gráfico se transforma nesse, achando o zero da função. Mas será que só dá para achar, só com zero da função?

T59- ALUNO 2A: A parte do y negativo vai ficar positivo.

T60- PROFESSOR: Muito bom! Como podemos obter o gráfico de f_3 a partir do gráfico f_1 ? Para obter y positivo o x tem que ser positivo?

T61- ALUNO 2A: E então é quando x e y for positivo.

T62- PROFESSOR: Você já fez, não foi? Todo mundo? Quem já fez, o que concluiu.

T63- ALUNO 2B: Que aqui só pode usar os positivos e aqui só pode usar os negativos, mas se só pode usar os negativos e o substitui o -1 , aqui vai ficar para baixo?

T64- ALUNO 2A: Ah! Não! É que vai ficar positivo e aí quando colocar o -1 , vai ficar positivo e a reta vai ficar para cima.

T65- ALUNO 2B: Pega! O maldito jogo de sinal. Fala sério foi o jogo de sinal, era para ficar positivo, foi isso.

T66- PROFESSOR: Você usou -1, colocou aqui, deu 1. Isso! Perfeito! Pronto, está feito os cinco. Não se preocupe, vai lendo e vai respondendo conforme a sua intuição.

T67- ALUNO 2B: Pelo que eu entendi dessa última aqui, tem jogo de sinal no y.

T68- ALUNO 2A: Tá, agora começa a bronca, que agora é crescente ou decrescente

T69- ALUNO 2B: Não, tu não tem que fazer o gráfico para baixo, tu tem que fazer o “v” de vingança aqui.

T70- PROFESSOR: Como podemos obter o gráfico f5 a partir do f1? Olha para o f1 e olha para f5, o que você vai ter que fazer?

T71- ALUNO 2A: Professor, mas ele tá negativo ele vai ficar como?

T72- ALUNO 2B: Vai ficar positivo, você tem que passar essa parte do gráfico para negativo. É

T73- PROFESSOR: Muito bem! Leia a pergunta lá de novo. Faça a parte do gráfico para o lado negativo.

T74- ALUNO 2A: Eu acho que tudo é mesma coisa, olha aqui. Por quê obter o gráfico f5 a parte positiva. Tem a parte negativa, mas esse aqui só pode ser positivo.

T75- ALUNO 2B: E você botou aqui! troquei na terceira o x do gráfica positivo porque lá só pode ficar positivo não pode ficar negativo.

T76-PROFESSOR: Se eu deixar para o lado positivo vai ficar assim.

T77- ALUNO 2B: Acho que a primeira tem que juntar as duas partes dos dois lados.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 03

T78- ALUNA 3A: Professor basta achar né.

T79- PROFESSOR: Isso mesmo, que legal muito bom.

T80- ALUNA 3A: Então basta ligar o 1 e o 2: o 1 no 1 e o 2 no 2.

T81- ALUNA 3B: Olha aí é o mesmo.

T82- PROFESSOR: Diga como escolher o lado positivo.

T83- ALUNA 3B: 1 e -1 e se você coloca o 2 vai ficar - 2. Aqui é crescente porque a positivo e essa aqui é decrescente porque é negativo.

T84- ALUNA 3A: Esse é que eu vou fazer igual a primeira então para ver se era para ter feito para cá. Aqui não pode, porque aqui só pode positivo, agora que eu vim ver, aqui só pode ser negativo eu acho que aqui só pode x negativo

T85- ALUNA 3B: Mas vai ficar positivo. Olha aqui, professor, se a gente pegar por exemplo um valor negativo, menos um, vai ficar aqui né positivo

T86- PROFESSOR: Olha! É isso mesmo! Muito bom!

T87- ALUNA 3B: Acho que é assim né, $f(x) = x$. mas aí tem que ser negativo né.

T88- ALUNA 3A: É negativo, mas quando coloca aqui fica positivo, entendeu?

T89- PROFESSOR: Você sabe que esse aqui é o gráfico principal né, f_5 , vai lendo e vai respondendo e olhando para cá. Primeiramente só quero te dizer parabéns pelo que você acabou de fazer aqui. Fiquei muito feliz só de olhar o que você está fazendo então agora você vai responder às perguntas. Responda de maneira bem simples e direta. O que você está vendo? O que você faria com f_1 para chegar no f_2 . Olha para f_1 e monta o f_2 . Como você poderia fazer isso.

T90- ALUNA 3A: Colocando o sinal de menos.

T91- PROFESSOR: Perfeito! Então colocando o sinal de menos na função f_1 . E você como você faria? Pode falar diferente.

T92- ALUNA 3B: Fazendo o oposto do gráfico

T93- PROFESSOR: Tudo bem, escreve aí do lado, cada um aqui falou uma coisa diferente, é o entendimento de cada um de vocês muito importante isso.

T94- ALUNA 3A: Eu não entendi como é a segunda. O que é para fazer? Professor, agente ainda não entendeu.

T95- PROFESSOR: Quem foi que não entendeu? Você vai olhar para cá. Qual é a pergunta? Qual é o item?

T96- GRUPO: Todos!

T97- PROFESSOR: Primeiro fica olhando para o f_1 e olha para o f_2 . O que você faria no f_1 para ficar igual ao f_2 ? Pode olhar para função e pode olhar para o gráfico.

T98- ALUNA 3A: Coloca aí o sinal negativo na f_1 .

T99- PROFESSOR: Pessoal, pronto! É uma resposta. Tem outra resposta? Posso continuar? Já fizeram a primeira? E aí, vamos para a segunda pergunta. Então você olha para o f_2 ?

T100- ALUNA 3B: O negativo.

T101- PROFESSOR: Bem, uma maneira de pensar. Agora, olhando para o gráfico, o que você responderia olhando para o gráfico?

T102- ALUNA 3B: troca de sinal.

T103- PROFESSOR: Pode ser também, é uma boa resposta.

T104- ALUNA 3A: Professor, e essa aqui com x positivos? Como eu faço f3 a partir do f1?

T105- PROFESSOR: Quer dizer que eu tenho que olhar para f1 e ver o que eu posso fazer para tornar é igualzinho ao f3.

T106- ALUNA 3B: Bora colocar o sinal aqui de +,

T107- PROFESSOR: Mas isso pertence a qual conjunto ao domínio ou a imagem? Você quer colocar o sinal de mais aonde?

T108- ALUNA 3B: É a parte negativa.

T109- PROFESSOR: É isso mesmo, muito bom. Agora eu quero obter o f4 a partir do f2.

T110- ALUNA 3A: Mas é assim: o f2 é igualzinho né? Só que troca o sinal, não é isso? Ou seja se eu trocar esse sinal ele se tornaria igual a esse aí que é o que é positivo, se torna negativo.

T111- PROFESSOR: Então você diz que é só botar o sinal, mas faltou dizer onde, se no conjunto de entrada (domínio) ou conjunto de saída (imagem). Tudo bem?

T112- ALUNA 3A: Então, basta acrescentar o negativo no conjunto de entrada né professor.

T113- ALUNA 3B: Tem que colocar um positivo e outro negativo né professor.

T114- PROFESSOR: É isso mesmo perfeito!

T115- ALUNA 3A: Professor, venha cá, aqui é a mesma coisa.

T116- ALUNA 3B: Não, não é a mesma coisa, como vamos obter o f5 a partir do f2. Tirando o módulo

T117-PROFESSOR: Você pode falar do gráfico também.

T118 – ALUNA 3A: Negócio do “v” que forma, esse veja como é que sai daqui para cá, sobe, quando bota um módulo para obter o f5 a partir do f3 acrescenta a reta do lado negativo.

INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO DE FORMALIZAÇÃO

T119- PROFESSOR: Pessoal, primeiramente gostaria que todos dessem uma parada. Chegou o momento especial de formalizar tudo o que discutimos e vocês concluíram, e essa é a minha responsabilidade a partir de agora. Vocês perceberam que o gráfico f5 é uma função de que tipo?

T120-TURMA: Função Modular, professor!

T121- PROFESSOR: Parabéns é isso mesmo! E vocês disseram que na função modular vocês têm um gráfico e que esse gráfico tem um desenho. Que desenho é esse pessoal?

T122-TURMA: Formato de um “v”

T123- PROFESSOR: Parabéns! Vocês perceberam que esse “v” tem uma ponta tocando no eixo x”?

T124-TURMA: sim!

T125- PROFESSOR: Todo mundo percebeu que esse valor é o valor de zero turma? Não se esqueçam desta função igual a módulo de x. Isso está bem claro? Quando eu coloquei o módulo, vocês perceberam que tem um resultado e esse resultado sempre vai dar o quê?

T126-TURMA: Positivo!

T127-PROFESSOR: Olha, muito bom!

T128- PROFESSOR: Agora eu vou fazer aqui no quadro, o módulo de 1 dá 1, quando você substitui o número 2 na função, tem um resultado positivo. Agora no eixo x negativo mesmos valores módulo de menos 1 vai dar quanto turma?

T129-TURMA: Um!

T130-PROFESSOR: e quando substituir o menos dois?

T131-TURMA: Dois!

T132- PROFESSOR: Então. Observe que você tem uma análise de quando você usa o lado positivo e outra no lado negativo. Assim a função f5 é modular por quê?

T133-TURMA: Porque só tem a parte positiva.

T134- PROFESSOR: Mas, a função f5 foi obtida pelo módulo de x.

T135- PROFESSOR: Agora vamos responder uma pergunta da nossa amiga. Aí eu tenho uma função f5 de reais em reais, isso significa o conjunto de saída e o conjunto de chegada. Isto é, os números que eu saem são positivos e negativos, eu saí de x positivos, eu sai de x negativos e sai de zero. E o meu conjunto de chegada vocês perceberam que o módulo só foi positivo. Por isso por isso que está de reais em reais e agora chegou a finalização. Por favor, prestem bem atenção nestas três análises análise positiva, análise negativa, e quando toca no eixo x. Primeiramente sobre o zero. Em que momento vai dar zero?

T136-TURMA: Quando x for igual a zero, $f(x)$ igual a zero. Quando x for maior do que zero, x é positivo, quanto x for menor do zero, x é negativo. Para algum desses valor de x , a função é negativa?

T137-TURMA: Não, isso sempre vai dar resultado positivo.

T138- PROFESSOR: Então o gráfico f_5 pode ser formado por duas situações primeiro pelo recurso de construção gráfica de reflexão e pela junção de duas funções (função de mais de uma sentença)

T139- PROFESSOR: Vocês lembram que quando vocês comparavam os gráficos vocês usaram os termos rebater, levantar, colocar pra cima? Esse processo chama-se reflexão gráfica, aqui cada um falou do seu jeito mas o nome desse procedimento é reflexão. Concluindo, a função modular é formada por essas três partes, quando

ATIVIDADE 2: EXTENÇÃO DA CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO INICIAL

T140-PROFESSOR: Então agora vamos fazer atividade 2. Vocês vão perceber que é uma atividade extremamente fácil e que os gráficos estão todos prontos. Então vocês vão ler o comando e fazer os dois gráficos vermelhos. Depois vocês vão responder esta questão aqui. Boa sorte a todos. Podem me chamar a vontade.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS GRUPO 01

T141-ALUNO 1A: Professor, uma dúvida. Tenho vários outros pontos aqui né?

T142- PROFESSOR: É uma questão de visualização, e o que eu quero que você faça é que você pegue os valores de x e substitua na função para poder formar o gráfico da função.

T143-PROFESSOR: É isso, mas ainda não é esse aqui para você fazer é o outro.

T144- ALUNO 1A: professor aqui nesse gráfico tem que ser necessariamente o primeiro quadrante?

T145- PROFESSOR: Não necessariamente. Pode ser qualquer um. Só uma coisa: aqui se você colocar -1 aqui fica 1 e -1 . Vai dar quanto?

T146- ALUNO 1A: Zero!

T147- PROFESSOR: Pronto! Agora monta esse aqui.

T148- ALUNO 1A: Só isso aqui é porque sempre o gráfico lá tem que tocar no eixo x?

T149- PROFESSOR: Isso mesmo, sempre tocar no eixo x, por que não tem nada que faça com que ele se movimente para baixo para um lado para o outro porque está dentro do módulo. Te faço uma pergunta: percebeu na primeira atividade que o gráfico não saía do zero? Mas por quê?

T150- ALUNO 1A: Então o deslocamento é por causa do -1. Olha essa aqui é o contrário dessa!

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 02

T151-ALUNO 2A: Qual o valor de x?

T152-ALUNO 2B: O valor de x

T153-ALUNO 2A: O que você está fazendo aqui?

T154-ALUNO 2B: Módulo de dois é dois.

T155-PROFESSOR: Esse aqui tudo bem né? Você conseguiu você substituir os números $1 + 1$ dá 2, no dois dá três. Se eu jogar $-1 + 1$ dá o que é zero. Módulo de 0 é zero. Então você marca bem aqui filho. Percebeu que um se deslocou para cá e o outro se deslocou para cá. Agora responda as perguntas.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 03

T156- ALUNA 3A: Professor, aqui tem formato v né?

T157-PROFESSOR: Muito bem! E por que tem formato de v?

T158- ALUNO 3B: Porque é função modular.

T159-PROFESSOR: Perfeito filho! Muito bom!

T160- ALUNO 3A: Muito legal, ele é muito legal

T161-ALUNO 3C: Muito legal

T162- ALUNO 3A: Esse aqui é igual a 1. $2 - 1$ dá 1

T163-PROFESSOR: Digamos que no lugar de x seja 2. 2 é igual a 1.

T164- ALUNO 3A: Eu fiz assim também só não sei se está certo.

T165- ALUNO 3B: Porque aqui ficou para baixo

T166- ALUNO 3A: Venha cá, professor. Professor, uma coisa, tem que jogar aqui no x né 1. O módulo de -1 é 1.

T167-PROFESSOR: Então você vai marcar no ponto 0 e 1 isso perfeito agora joga hoje $2 - 1$, módulo de 1, pronto apague aí é passar direitinho. Agora é só escrever aqui, tem que fazer nesses dois.

T168- ALUNA 3A: Professor, esse jogo 2 (inaudível) marca no -1 -2dois com mais um, aqui com um da menos um módulo de -1 , 1

T169- PROFESSOR: Percebeu agora o que vai acontecer quando você fez a primeira atividade você percebeu que estava bem centralizado agora arrastou. Você sabe porquê que isso aconteceu?

T170- ALUNA 3A: Aqui tem $+1$ e o -1

T171- ALUNA 3B: Quer dizer que quando você colocou $+1$ foi para direita e aqui você andou para a esquerda, a diferença que se aqui se junta com a direita esse aqui se junta com a esquerda mas será que a gente pode botar a mesma resposta em todos. Agente pode colocar a mesma resposta porque a pergunta é a mesma. Escreve lá tá que se deslocou para a direita e para a esquerda, tanto faz é a mesma coisa.

INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO DE FORMALIZAÇÃO

T172-PROFESSOR: Agora podemos formalizar. Favor, todos prestem atenção. Vocês percebem que tem duas funções. Vocês se lembram das equações que você comentou comigo. Agora vou escrever para vocês f_3 , eu estou indo de reais em reais. Isto é, conjunto de partida e conjunto de chegada. Neste conjunto eu estou usando positivo e negativo e neste conjunto eu estou usando o positivo e negativo. Mas a função modular f_6 é um módulo de quem percebendo que eu tenho x , que eu tenho menos x , coloquei positivo e coloquei negativo.

T173- PROFESSOR: Qual é a função $x - 1$. Eu queria colocar agora o contrário, o que seria o contrário dela turma?

T174- TURMA: Multiplica o menos, dá $x + 1$.

T175- PROFESSOR: Você percebeu que este ficou positivo e este eu troquei o sinal é que vai dar positivo

T176-ALUNO X: Quando x for maior do que zero.

T177- PROFESSOR: O que tá aqui dentro justamente, o x maior do que zero. Todos vocês colocaram maior do que zero. Pergunta a todos: quando é que vai dar negativo? Quando x for menor do que zero então eu pergunto a todos -1 vai passar para o outro lado vai ficar mais um então x vai ser maior do que x menor do que 1 então quando é que vai dar 2 quando é que vai dar 0 0 pergunta qual é o zero da função turma e aqui aonde é o zero da função turma 1 e agora para finalizar com chave de hora sempre um positivo e um negativo esse cara positivo turma x mais 1 quem seria o negativo turma- $x- 1$ e agora como seria para dar positivo turma x maior que zero mais um maior do que zero e agora quando é que vai dar negativo vocês perceberam que o gráfico de vocês está lá no -1 é porque a zero da função agora escreva isso nesse retângulo agora vejam se vocês conseguem fazer o de baixo formalização obrigado por toda a paciência de vocês

ATIVIDADE 3: APROFUNDAMENTO DA FUNÇÃO MODULAR **INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO INICIAL**

T178-PROFESSOR: Agora vamos fazer a atividade 3, quando você abre a folha, você tem o título aprofundamento da função modular; objetivo: representar funções modulares nas formas algébricas e gráficas; material: lápis caneta borracha e régua; procedimento: construir os gráficos. Vocês devem perceber que os três gráficos de cima e faltam esses gráficos de baixo. Por favor, prestem atenção os três que já estão feitos vocês fizeram na atividade 2. Então já foi explicado anteriormente agora esses dois que estão faltando vocês podem fazer agora daí você pergunta a professor posso usar só os valores do gráfico pode você usa e coloca na função modular é só isso vamos lá todos juntos x e joga na função e vamos fazer a representação gráfica.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS **GRUPO 01**

T179-ALUNO 1A: Agente sempre começa com o zero. Ele fez o primeiro lá 0 módulo de $0 - 1$, $- 1$, agora vamos fazer com -1 e com 1 . Mas o que está aqui?

T180-ALUNO 1B: Mas isso é um módulo.

T181-ALUNO 1A: Mas é um x do mesmo jeito.

T182-ALUNO 1B: Essa linha é pro x e essa linha é para o y . Então chama ele aí.

T183-PROFESSOR: Vamos lá! Esse aqui vai estar no y, você pega esse valor para x, joga no x, vamos ver o zero: módulo de zero é zero. Então forma 0 e - 1. Marque lá o ponto.

T184- ALUNO 1A: Olha aí, eu falei!

T185-PROFESSOR: Agora joga um módulo de 1, 1-1, 0. Agora vamos ver o -1. Módulo de - 1,1, 1-1, 0. E agora vocês têm o gráfico que vocês observaram.

T186-ALUNO 1B: Entendi: toda vez pega isso aqui igual a zero para obter o módulo de zero.

T187-PROFESSOR: Então você sempre começa no zero

T188- ALUNO 1A: Mas pode ser assim professor?

T189- PROFESSOR: Pode ser sim, veja que tem duas sentenças. Aqui tem duas maneiras de você fazer escolha 2 e -2 substitui no módulo e faz o gráfico. Você vai ver que vai ficar perfeito, a mesma coisa você faz aqui, sempre começa do zero, joga um positivo e um negativo e vai verificando.

T190- ALUNO 1A: Eu falei que era do y

T191- ALUNO 1B: E agora é -1. Pera aí, eu fiz alguma coisa errada, aí vai formar um triângulo, aqui tem que quebrar bem aqui em baixo

T192- ALUNO 1A: Vai escrever assim: o gráfico tropeçou e caiu.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 02

T193-ALUNO 2A: Agente é um grupo. Bora ajudar um ao outro.

T194-ALUNA 2B: Acho que é só repetir isso aqui.

T195-ALUNO 2C: É para gente inventar os números? Professor, eu não entendi.

T196-PROFESSOR: Você não entendeu? Você tem aqui é um plano cartesiano certo? E aqui você tem uma função modular certo? Então você vai ter que atribuir valores de x, para a função em destaque, então eu posso jogar aqui, eu lhe pergunto: qual é o módulo de 0 menos? Jogue o número 1, qual é o módulo de 1,1- 1. Joga - 1, módulo de 1,1,1-1,0. O que você vê?

T197-ALUNO 2C: Um v.

T198-PROFESSOR: Muito bem você percebeu a formação. Arrasou! Agora faça o gráfico.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 03

T199-ALUNA 3A: É para pegar um lado pegar o valor de x e botar tipo no módulo, aí marca aqui no quadrado valor módulo de 2.

T200-PROFESSOR: O que você estava fazendo, pega o valor e joga aqui. Pega o valor de x e joga aqui. Certo! Então agora você tem essa função: módulo de x , - 1, fora do módulo. Se você pegar a $x = 0$, módulo de 0 é 0, - 1, dá - 1. Então você substituiu o zero e teve o resultado -1, formou o ponto (0, - 1). Isso você vai fazendo com outros pontos, em todos os pontos só que são esses valores aqui.

T201-ALUNA 3B: Então, se eu colocar o menos 2 aqui, vai dar 2, -1, vai dar 1. E liga -2 com 1. Então eu marco aqui. Pergunta aí para o professor se tem que ficar fazendo isso até formar o gráfico, assim.

T202-PROFESSOR: Vocês querem uma orientação? Coloca o -1, vai ficar módulo de - 1, 1, - 1 vai dar 0. Como é que fica o gráfico.

T203-ALUNA 3A: Fica um v.

T204- ALUNA 3B: Como é que a gente coloca aqui? Por que a gente precisa fazer o gráfico? Porque a gente coloca o ponto aqui, mas eu não sei como é para fazer o gráfico. Por que fica em baixo e em cima?

INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO DE FORMALIZAÇÃO

T205-PROFESSOR: Todos atenção, a atividade está parcialmente cumprida. Eu percebi um negócio. Teve um primeiro gráfico aqui que você percebeu que ficou embaixo e o outro ficou em cima do eixo x . Então vamos lá, por que ficou embaixo do eixo x .

T206-ALUNA 3A: Por que fora do módulo está negativo. Deslocamento é para cima e para baixo quando fora do módulo.

T207- PROFESSOR: Exatamente! Você deve observar o que está fora do módulo para fazer o deslocamento para cima ou para baixo. Vamos ler o primeiro item agora, vamos para a segunda folha, o que ocorre com o gráfico das funções f_4 e f_5 em relação ao eixo ox do plano cartesiano. O que aconteceu com o gráfico turma?

T208- TURMA: Ele subiu e desceu!

T209-PROFESSOR: Mas porque ele está subindo e descendo?

T210-ALUNA 3A: Por causa dos sinais.

T211- PROFESSOR: Então ele sobe ou desce em relação ao eixo x , conforme o sinal. Agora escrevam a maneira de vocês.

T212-PROFESSOR: Embaixo, está dizendo assim como podemos obter o gráfico f_4 a partir do gráfico f_1 , vocês estão percebendo o f_1 está no meio. Então o que aconteceu com o f_4 ?

T213-ALUNA 3A: Ele desceu. E a resposta da outra pergunta gráfico vai subir.

T214- PROFESSOR: Eu pergunto, por que ele desceu?

T215-ALUNO 3A: Porque o número de fora está negativo.

T216- PROFESSOR: Agora vamos para parte aí onde está escrito formalização, sou eu que vou agir. Por favor um minuto de atenção agora, todos atenção vocês vão colocar nesse quadro. É muito importante eu percebi que nas atividades 1 e 2 vocês tiveram um pouco de dificuldade. Então vamos solucionar esse problema, a primeira função que vocês tem em mãos, essa aqui módulo de $x - 1$, a próxima função é módulo de $x + 1$, sim então eu vou formalizar definição de cada um módulo de x , menos 1 o que vai acontecer? Módulo de $x + 1$ o que eu percebo em termos de análise desse módulo? Hora ele vai ser positivo, hora ele vai ser negativo, sempre você vai colocar na sentença maior do que zero ou menor do que zero então quem está no módulo x maior igual a 0 e x menor do que zero um é positivo e o outro é negativo, e a análise, turma, maior igual a zero menor que zero, então agora vamos escrever a definição. Depois dessa definição você faz a questão abaixo em rosa.

T217-ALUNO 3A: Entendi professor.

ATIVIDADE 4: GENERALIZAÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO INICIAL

T218- PROFESSOR: Na atividade 4, vocês vão reunir todo conhecimento que vocês adquiriram nas atividades 1, 2 e 3. Vejam esses gráficos que estão aqui. Façam os de baixo, tudo que fizeram na atividade 1, 2, e 3 vão fazer atividade 4, então tecnicamente é uma repetição, se vocês observarem vai ser bem tranquilo.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 01

T219-ALUNO 1A: $3x$, significa que tá multiplicando, 2 vezes 3, dá 6, módulo dá 6, $6+1$, 7.

T220-PROFESSOR: A raiz da função que é o 3, você pegou isso aqui, igual a zero, então a ponta do v está no 3, aí você já pode marcar 0 e três. Agora vocês pegam dois vizinhos.

T221- ALUNO 1B: Acho que a gente marca o 7, ne?

T222- ALUNO 1C: Não tá difícil.

T223-PROFESSOR: Esse aqui estava bem aqui no centro. Bom se eu subtrair 3, eu vou bem aqui para direita, são os dois gráficos foi para a direita, o outro foi para esquerda, nós vamos usar os mesmos gráficos. Você vai montar para ver o que acontece quando tá fora do módulo.

T224-ALUNO 1A: Sobe ou desce.

T225-PROFESSOR: Isso! Sobe ou desce. Então você tem que achar o valor de x , vamos lá, módulo de zero, vai dar zero, coloca três, 3, $6-6$, 0, - 1, - 1.

T226-ALUNO 1B: Para formar um v, agora você pega o valor 2, e o valor 4, e marca mais pontos para formar o v.

T227- ALUNO 1A: Esse outro aqui é quase a mesma coisa. Qual o deslocamento no eixo y ?

T228- ALUNO 1B: Esse aqui no três é praticamente a mesma coisa, só falta o deslocamento no eixo y

T229- ALUNO 1A: Eu fiz isso aqui para ficar módulo de $6 + 1$ igual a 7.

T230-ALUNO 1A: Para dar o sete.

T231-PROFESSOR: Primeiro você encontrou a raiz disso aqui, só que foi dentro do módulo. Vamos jogar o valor 3, 2 vezes 3, 6.

T232-ALUNO 1B: Professor, e esse outro aqui? É o mesmo módulo. Então vai dar o mesmo zero.

T233-PROFESSOR: Isso! Você só vai fazer o deslocamento aí. Vocês viram que o 2 e o 4 vão dar mesmo valor e agora qual foi o gráfico que se formou?

T234- ALUNO 1B: Formou um v.

T235- ALUNO 1B: É porque esse gráfico tá na parte de cima e esse gráfico, na parte de baixo.

T236-PROFESSOR: E por que está em cima?

T237-ALUNO 1B: Porque ele tá positivo

T238- PROFESSOR: E o outro, por que ele está em baixo?

T239- ALUNO 1A: Porque ele está negativo.

T240- PROFESSOR: Que legal! Parabéns! Era isso que eu queria escutar de vocês.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 02

T241-ALUNO 2B: Professor como faz este aqui? Como faz desse $2x - 6$?

T242- PROFESSOR: Tem o valor aqui. Joga no valor de x o 0. 2 vezes 0, 0, -6. Qual é o módulo de menos 6, 6, mais 1, 7 você vê onde é que fica o ponto (0,7) e agora pra escolher outro valor de x .

T243-ALUNA 2A: Agora tem que ligar 7 com 0.

T244-ALUNO 2B. Bora fazer com 1 e com o 2.

T245-ALUNO 2B: Chama o professor!

T246-PROFESSOR: Oi, está com dúvida? Pega esse aqui, um módulo faz bem aqui. Vai dar 3. A partir de agora você brinca, joga 3, joga 4

T247- ALUNA 2A: Então 3 com -1 e o 2, 4- 6,- 2- 1, 1 então fica 4 com 1.

T248-PROFESSOR: Não vai dar o mesmo? Só que do outro lado. O que é formou?

T249-ALUNO 2B: Formou v.

T250-ALUNA 2A: Pois é, mas quando ele fez, ele tava fazendo ali no quadro né, aí ele fez primeiro o lado negativo, depois ele fez a parte de cima, entendeu?

T251-ALUNA 2A: Pois é, mas $f = 0$ vai dar 3. É a mesma coisa, mas só que o dele tá só traçado.

T252-ALUNA 2A: Se (inaudível) é a mesma coisa, mas o dele tá só do outro. Não tenho v se não fosse esse 3 aqui, não seria um v, não seria um gráfico completo. Não pode ser aqui no 3. Vamos fazer o seguinte vamos chamar o professor.

T253-PROFESSOR: Olha o dele e olha o nosso aqui.

T254-ALUNA 2A: Professor, ele tá dizendo que o (3, 0) é origem de lá.

T255-PROFESSOR: Aqui é o eixo, ele não igualou aqui a zero, perceba que quando

toma aqui fora há um deslocamento para baixo. E aí nesse. Aqui que você vai ter no eixo a ponta do v , vai estar bem aqui 3 e 1. Ah então ele tá puxado, então dele tá certo. Isso então quer dizer que aqui que vai começar o v .

T256-ALUNO 2B: Olha aqui, igual a zero, aí passa para o outro lado fica mais x igual a menos 3, dividido por 2, aí tá 3, com mais um fica quatro.

INTERAÇÕES NOS GRUPOS COM IOMOS

GRUPO 03

T257-ALUNO 3C: Eu esqueci de como se faz isso aqui.

T258-PROFESSOR: Alguma dúvida? Posso ajudar vocês?

T259-ALUNA 3A: Eu ainda não entendi isso aqui.

T260-PROFESSOR: Vamos lá. Lá todo mundo junto. Eu tenho aqui esse módulo, sim, então eu vou pegar $2x - 6$ e igualar. Da - 6 quanto é 6 dividido por 2? (inaudível). Agora vou fazer com dois, vamos lá 2. Como que vai dar o resultado deste aqui quando jogar o 4 que resultado vai dar duas vezes 4, 8, - 6, 2, módulo de 2, 2, menos 1 é 1. E agora que formou alunos?

(inaudível)

T261-PROFESSOR: Isso mesmo, você observa que tudo, o que acontece do lado daqui acontece do lado de lá, então tudo que aconteceu aqui vai acontecer aqui, com a diferença.

T262- ALUNA 3A: Depende de onde fica o número. Ele muda de lado se estiver dentro, e fora sobe e desce.

T263- PROFESSOR: Parabéns então dentro o gráfico vai pro lado ou pro outro.

T264-ALUNA 3A: Não amigo, falo que não, porque aqui tem que tirar o módulo.

T265- ALUNO 3C: Não, mas deste lado fica o mesmo resultado, mas aqui tá embaixo do zero.

T266-ALUNO 3B: É um mesmo cálculo só muda de lado

T267: PROFESSOR: Muito bem! Mas por que isso aconteceu?

T268- ALUNA 3A- Muda pro lado daqui

T269-PROFESSOR: Lindo filha! Muda pro lado daqui. Você sabe por que de lado?

T270-ALUNA 3A: Por causa do sinal.

T271-PROFESSOR: Mas o sinal dentro do módulo ou fora do módulo.

T272-ALUNA 3A- Dentro.

T273- PROFESSOR: Muito bem! Dentro do módulo. E se ele estiver subindo e descendo, qual é o sinal que você olha?

T274-ALUNA 3A: Fora do módulo

T275- PROFESSOR: Parabéns, filha. Então quer dizer que toda vez que o sinal estiver fora do módulo estiver positivo o que acontece? E se fora do módulo for negativo?

T276- ALUNA 3A: Se for positivo, vai pra cima. Se for negativo, vai pra baixo

T277- PROFESSOR: Muito bom! Vocês conseguiram chegar no objetivo principal.

INTERVENÇÃO DE SOCIALIZAÇÃO DE FORMALIZAÇÃO

T278- PROFESSOR: Atenção agora eu vou formalizar com vocês. A primeira função, que está aí chama-se módulo de $2x - 6$, $+1$, logo depois vocês têm $f(x)$ módulos $2x - 6$, -1 . Certo turma? Vamos passar para o segundo. Eu tenho que analisar sempre o positivo e o negativo, que igualar o módulo a zero, maior igual a zero e outro menor do que zero. Porque você analisou apenas um módulo, ainda faltou o mais um. Então vamos fazer aqui embaixo todo mundo junto. Então como fica o $2x - 6$ mais 1 . O que fazer?

T279-TURMA: Fazer o positivo e o negativo.

T280- PROFESSOR: Isso! O maior igual a zero, e o menor que zero, então vamos lá como fica o maior ou igual a zero $2x - 6$ maior igual há 0 .

(ininteligível, vários falam)

T281- PROFESSOR: Agora como é que fica o lado negativo?

(ininteligível, vários falam)

T282-PROFESSOR: Copie no quadro a formalização completa. E vamos fazer esse aí baixo.

5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta seção dedica-se a apresentar a análise dos resultados extraídos dos recortes feitos em cada episódio da aplicação da Sequência Didática, isto é, em cada atividade. Os recortes, segundo a Análise Microgenética, acontecem nos turnos (falas) em que se percebe indícios de aprendizagem, nas interações entre professor e aluno e entre aluno e aluno. Tais turnos, são analisados segundo a Análise do Discurso a

respeito das respostas dos alunos para as interações do professor, isto é, a partir da intenção em alcançar os objetivos de aprendizagem de cada episódio.

A seguir, os recortes aqui analisados estarão dispostos em quadros, um para cada atividade, organizados segundo as intenções das intervenções escritas no material impresso utilizados pelos alunos e os turnos de cada grupo em que se verificou o indício de aprendizagem.

EPISÓDIO 1: CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR

OBJETIVO: DEFINIR FUNÇÃO MODULAR.

TURNOS: DO TURNO T1 AO T139

Quadro 14: Recortes da Intervenção inicial do Episódio 1

	GRUPO 01	GRUPO 02	GRUPO 03
INTERVENÇÃO INICIAL	T6- ALUNO 1A: Tô sentindo que vai sair isso! T7- ALUNO 1B: Acho que esse aqui é só multiplicar por menos 1. T8- ALUNO 1A: Já sei! Professor! T9- ALUNO 1A: Esse aqui só pode usar positivo e esse só negativo né? T10- PROFESSOR: Perfeitamente! É isso mesmo!	T46-PROFESSOR: Então você já pode procurar no eixo X só os positivos T47- ALUNO 2A: Qual o valor para o x? T48- ALUNO 2B: Então se eu escolher o 2, vai dar 2. Ah! depois a gente passa para esse daqui. T49- ALUNO 2A: f de x igual a menos x. Se o X é negativo o gráfico é decrescente. T50- ALUNO 2B: Lá é o X é positivo, aqui é negativo.	T84- ALUNA 3A. Esse é que eu vou fazer igual a primeira então para ver se era para ter feito para cá. Aqui não pode, porque aqui só pode positivo, agora que eu vim ver, aqui só pode ser negativo eu acho que aqui só pode x negativo T85- ALUNA 3B: Mas vai ficar positivo. Olha aqui, professor, se a gente pegar por exemplo um valor negativo, menos um, vai ficar aqui né positivo T86- PROFESSOR: Olha! É isso mesmo! Muito bom! T87- ALUNA 3B: acho que é assim né, $f(x) = x$. Mas aí tem que ser negativo né. T88- ALUNA 3A: É negativo, mas quando coloca aqui fica positivo, entendeu?

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na intervenção inicial, da atividade 01, foi possível verificar que prevaleceu a abordagem comunicativa do tipo interativo de autoridade e que os turnos extraídos promoveram padrão de interação do tipo I-R-F (Iniciação – Resposta - Feedback). No turno T9, o aluno do grupo 01 percebeu a restrição no domínio das funções F3 e F5. No turno T49 o aluno do grupo 2 percebeu o comportamento decrescente da função $f(x) = -x$. A aluna do grupo 03, no turno T88, explicou aos colegas que o gráfico (imagem) de F5 é positivo, mesmo para valores negativos do domínio. Tais indícios de aprendizagem revelam um avanço preliminar para o objetivo principal do episódio.

Quadro 15: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 1.

	GRUPO 01	GRUPO 02	GRUPO 03
INTERVENÇÃO REFLEXIVA	T16-ALUNO 1B: Professor uma dúvida: como é que eu posso obter o f2 a partir do f1 T17-PROFESSOR: Como é que transforma no f2? T18- ALUNO 1A- É só tirar o sinal ou então tirar o módulo né? T19-PROFESSOR: Gostei! Mas percebiam uma coisa: que o módulo tem algo diferente. T20- ALUNO 1A - É que vai ter o gráfico dos dois lados né professor, com o módulo? T22- ALUNO 1A: Entendi professor! É que colocando módulo, o gráfico sempre vai ser positivo.	T63- ALUNO 2B: Que aqui só pode usar os positivos e aqui só pode usar os negativos, mas se só pode usar os negativos e o substitui o -1, aqui vai ficar para baixo? T64- ALUNO 2A: Ah! Não! É que vai ficar positivo e aí quando colocar o -1, vai ficar positivo e a reta vai ficar para cima. T65- ALUNO 2B: Pega! O maldito jogo de sinal. Fala sério foi o jogo de sinal, era para ficar positivo, foi isso.	T89- PROFESSOR: Você sabe que esse aqui é o gráfico principal né, F5, vai lendo e vai respondendo e olhando para cá. Primeiramente só quero te dizer parabéns pelo que você acabou de fazer aqui. Fiquei muito feliz só de olhar o que você está fazendo então agora você vai responder às perguntas. Responda de maneira bem simples e direta. O que você está vendo? O que você faria com F1 para chegar no F2. Olha para F1 e monta o F2. Como você poderia fazer isso. T90- ALUNA 3A: colocando o sinal de menos. T91- PROFESSOR: Perfeito! Então colocando o sinal de menos na função F1. E você como você faria? Pode falar diferente. T92- ALUNA 3B: Fazendo o oposto do gráfico

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os turnos extraídos do segmento correspondente a interação reflexiva do episódio 01 revelam que houve uma abordagem com foco no conteúdo (Descrição, explicação, generalização), com padrão de interação do tipo I-R-P-R-P (Iniciação, resposta, prosseguimento, resposta, prosseguimento).

Desse modo, nos turnos T32 e T34 o aluno do grupo 01 concluiu que apenas a função F5 é modular e que, para obtê-la, bastava colocar o módulo nas demais funções. No turno T74 do grupo 02 o aluno percebeu que na função F5 o domínio, quer seja positivo ou negativo, sua imagem é sempre maior ou igual a zero. Nos turnos T90 e T92 os alunos do grupo 03, respondem à intenção do professor se expressando de forma diferente a respeito da obtenção do gráfico F5.

Logo, infere-se que aos poucos os alunos chegam a uma definição pré-formal do que seria a Função Modular, investigando características de seu comportamento.

Quadro 16: Recortes da Intervenção Exploratória do Episódio 1

	GRUPO 01	GRUPO 02	GRUPO 03
INTERVENÇÃO EXPLORATÓRIA	T30- ALUNO 1B: Então nunca vai dar negativo? T31- ALUNO 1B: Professor, e esse aqui na primeira é pra botar um módulo é? T32-ALUNO 1A: Professor, a função modular aqui é f5 e essas outras aqui nenhuma é função modular, certo? T33- PROFESSOR: Perfeito! Nenhuma delas. Então a partir de agora nós vamos olhar pra elas pra poder chegar na função modular. T34- ALUNO 1A: Significa que todas essas perguntas aqui, vamos ter que colocar um módulo.	T74- ALUNO 2A: Eu acho que tudo é mesma coisa, olha aqui. Por quê obter o gráfico F5 a parte positiva. Tem a parte negativa, mas esse aqui só pode ser positivo. T75- ALUNO 2B: E você botou aqui! Troquei na terceira o x do gráfica positivo porque lá só pode ficar positivo não pode ficar negativo. T76-PROFESSOR: se eu deixar para o lado positivo vai ficar assim. T77- ALUNO 2B: Acho que a primeira tem que juntar as duas partes dos dois lados.	T113- ALUNA 3B: Tem que colocar um positivo e outro negativo né professor. T114- PROFESSOR: É isso mesmo perfeito! T115- ALUNA 3A: Professor, venha cá, aqui é a mesma coisa. T116- ALUNA 3B: Não, não é a mesma coisa, como vamos obter o F5 a partir do F2. Tirando o módulo T117-PROFESSOR: Você pode falar do gráfico também. T118 - ALUNA 3A: negócio do “V” que forma, esse veja como é que sai daqui para cá, sobe, quando bota um módulo para obter o F5 a partir do F3 acrescenta a reta do lado negativo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os turnos extraídos da intervenção exploratória revelaram indícios de aprendizagem pré-formal com interações predominantemente de I-R-F (Iniciação, resposta, feedback).

O turno T34 revela que o aluno do grupo 01 compreendeu a importância de se calcular o módulo para chegar à Função Modular. O turno T77 que o aluno do grupo 02 reconheceu que a função modular é formada por duas partes. O turno T118 indica que o aluno do grupo 03 percebeu a configuração geométrica do gráfico da Função Modular.

Assim, é possível inferir os alunos foram capazes de concluir as características da Função Modular.

Quadro 17: Recortes da socialização do Episódio 1

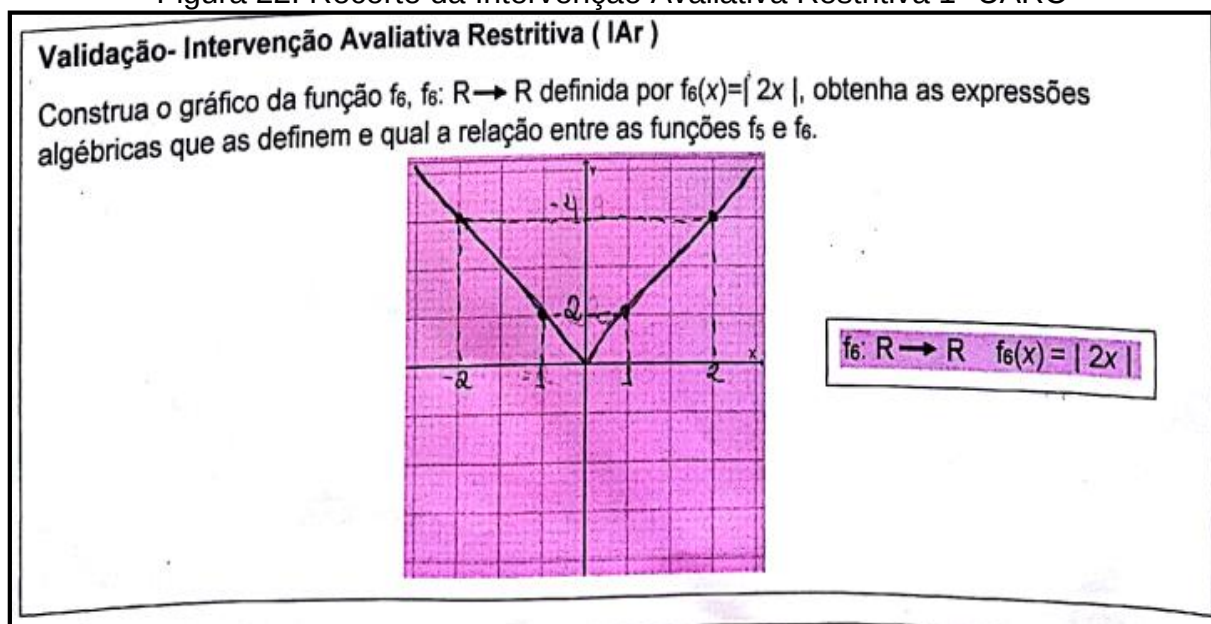
	TODOS OS GRUPOS
SOCIALIZAÇÃO	T121- PROFESSOR: Parabéns é isso mesmo! E vocês disseram que na função modular vocês têm um gráfico e que esse gráfico tem um desenho. Que desenho é esse pessoal? T122-TURMA: Formato de um “V” T125- PROFESSOR: todo mundo percebeu que esse valor é o valor de zero turma? Não se esqueçam desta função igual a módulo de x. Isso está bem claro? Quando eu coloquei o módulo, vocês perceberam que tem um resultado e esse resultado sempre vai dar o quê? T126-TURMA: Positivo! T127-PROFESSOR: Olha, muito bom!

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

As interações da socialização final tem o objetivo de sintetizar as informações das conclusões nos grupos. Como nos rodízios dos grupos o professor aplicador mediou os diálogos para que os alunos chegassem ao conceito pré-formal, pode-se afirmar que as interações predominaram em interativo/de autoridade como é possível constatar no recorte do T121 ao T127.

Assim, pode-se concluir que a atividade 01 se mostrou potencial para o objetivo da atividade de definir Função Modular.

Figura 22: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 1ª UARC



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Além disso, foi possível observar na resolução da intervenção avaliativa a validação da apreensão do objetivo de aprendizagem pretendido. Muito embora os alunos não tenham demonstrado amadurecimento cognitivo suficiente para desenvolver a linguagem algébrica.

EPISÓDIO 2: EXTENSÃO DA DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR

OBJETIVO: REPRESENTAR A FUNÇÃO MODULAR NAS FORMAS ALGÉBRICA E GRÁFICA

TURNOS: DO TURNO T140 AO T177

Neste episódio não foi possível captar de forma audível os indícios de aprendizagem do grupo 02. Sendo aqui destacados apenas os turnos dos grupos 01 e 03. Os indícios de aprendizagem foram verificados durante a execução dos segmentos referentes à intervenção reflexiva e de socialização com formalização.

Quadro 18: Recortes da Intervenção inicial do Episódio 2

	GRUPO 01	GRUPO 03
INTERVENÇÃO REFLEXIVA	T144- ALUNO 1A: Professor aqui nesse gráfico tem que ser necessariamente o primeiro quadrante? T145- PROFESSOR: Não necessariamente. Pode ser qualquer um. Só uma coisa: aqui se você colocar -1 aqui fica 1 e -1. Vai dar quanto? T146- ALUNO 1A: Zero! T147- PROFESSOR: Pronto! Agora monta esse aqui. T148- ALUNO 1A: Só isso aqui É porque sempre o gráfico lá tem que tocar no eixo X? T149- PROFESSOR: Isso mesmo, sempre tocar no eixo X, por que não tem nada que faça com que ele se movimente para baixo para um lado para o outro porque está dentro do módulo. Te faço uma pergunta: percebeu na primeira atividade que o gráfico não saía do zero? Mas por quê? T150- ALUNO 1A: Então o deslocamento é por causa do -1. Olha essa aqui é o contrário dessa!	T156- ALUNA 3A- Professor, aqui tem formato V né? T157-PROFESSOR: Muito bem! E por que tem formato de V? T158- ALUNO 3B: Porque é função modular. T159-PROFESSOR: Perfeito filho! Muito bom! T168- ALUNA 3A: Professor, esse jogo 2 (inaudível) marca no -1 -2dois com mais um, aqui com um da menos um módulo de - 1, 1 T169- PROFESSOR: Percebeu agora o que vai acontecer quando você fez a primeira atividade você percebeu que estava bem centralizado agora arrastou. Você sabe porquê que isso aconteceu? T170- ALUNA 3A: aqui tem + 1 e o -1 T171-ALUNA 3B: Quer dizer que quando você colocou +1 foi para direita e aqui você andou para a esquerda, a diferença que se aqui se junta com a direita esse aqui se junta com a esquerda mas será que a gente pode botar a mesma resposta em todos. Agente pode colocar a mesma resposta porque a pergunta é a mesma. Escreve lá tá que se deslocou para a direita e para a esquerda, tanto faz é a mesma coisa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No seguimento referente a intervenção reflexiva do episódio 2 foi possível verificar que o padrão de interação predominante foi I-R-P-R-P (Iniciação, resposta, prosseguimento, resposta, prosseguimento).

No turno T150 é possível verificar que o aluno do grupo 01 foi capaz de deduzir o motivo do deslocamento do gráfico da função F_3 . No turno T171 evidencia-se que a aluna do grupo 03 alcançou com sucesso o conceito pré-formal de como ocorre a translação horizontal.

É possível afirmar que antes mesmo da formalização os alunos haviam alcançado o objetivo da atividade sendo sempre mediados por abordagem comunicativa predominante foi interativa /dialógica.

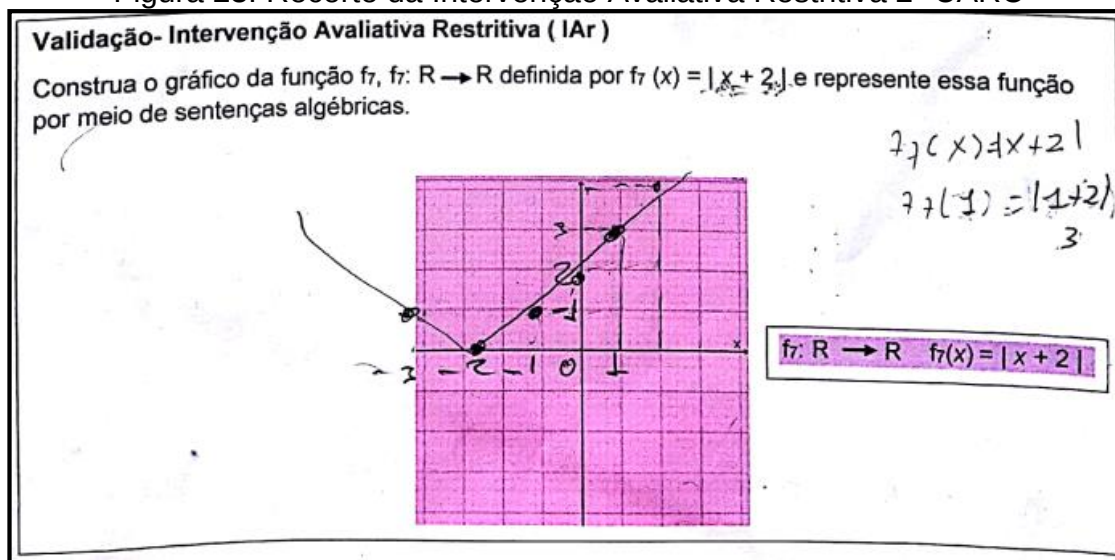
Quadro 19: Recortes da socialização do Episódio 2

TODOS OS GRUPOS	
SOCIALIZAÇÃO	T173- PROFESSOR: Qual é a função $x - 1$. Eu queria colocar agora o contrário, o que seria o contrário dela turma?
	T174- TURMA: multiplica o menos, dá $x + 1$.
	T175- PROFESSOR: Você percebeu que este ficou positivo e este eu troquei o sinal é que vai dar positivo.
	T176-ALUNO X: Quando X for maior do que zero.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Nos turnos referentes a socialização foi verificado o padrão de interação I-R-A (Iniciação- Resposta- Avaliação) e foi confirmado o alcance do objetivo da atividade.

Figura 23: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 2ª UARC



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Nos registros da realização da Intervenção Avaliativa foi verificada a apreensão da representação da Função Modular tanto na linguagem gráfica quanto na algébrica.

EPISÓDIO 3: EXTENSÃO DA DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR

OBJETIVO: REPRESENTAR A FUNÇÃO MODULAR NAS FORMAS ALGÉBRICA E GRÁFICA

TURNOS: DO TURNO T178 AO T216

Os turnos analisados no episódio 2 foram extraídos dos seguimentos referentes a intervenção reflexiva e a socialização para formalização.

Quadro 20: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 3.

	GRUPO 01	GRUPO 02	GRUPO 03
INTERVENÇÃO REFLEXIVA	T179-ALUNO 1A: Agente sempre começa com o zero. Ele fez o primeiro lá 0 módulo de 0 - 1, - 1, agora vamos fazer com -1 e com 1. Mas o que está aqui? T180-ALUNO 1B: Mas isso é um módulo. T181-ALUNO 1A: Mas é um X do mesmo jeito. T182-ALUNO 1B: Essa linha é pro X e essa linha é para o y. Então chama ele aí. T190- ALUNO 1A: Eu falei que era do Y T191- ALUNO 1B: E agora é -1. Pera aí, eu fiz alguma coisa errada, aí vai formar um triângulo, aqui tem que quebrar bem aqui em baixo. T192- ALUNO 1A: Vai escrever assim: o gráfico tropeçou e caiu.	T196-PROFESSOR: Você não entendeu? Você tem aqui é um plano cartesiano certo? E aqui você tem uma função modular certo? Então você vai ter que atribuir valores de x, para a função em destaque, então eu posso jogar aqui, eu lhe pergunto: qual é o módulo de 0 menos? Jogue o número 1, qual é o módulo de 1,1- 1. Joga - 1, módulo de 1,1,1-1,0. O que você vê? T197-ALUNO 2C: Um V. T198-PROFESSOR: muito bem você percebeu a formação. Arrasou! Agora faça o gráfico.	T201-ALUNA 3B: Então, se eu colocar o menos 2 aqui, vai dar 2, -1, vai dar 1. E liga -2 com 1. Então eu marco aqui. Pergunta aí para o professor se tem que ficar fazendo isso até formar o gráfico, assim. T202-PROFESSOR: Vocês querem uma orientação? Coloca o - 1, vai ficar módulo de - 1,1, - 1 vai dar 0. Como é que fica o gráfico. T203-ALUNA 3A: Fica um V.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Neste episódio as interações aconteceram mais entre os alunos, as discussões e conclusões das atividades anteriores diminuiu o tempo de execução da atividade fazendo com que conseguissem realizá-la apenas com as intervenções reflexivas escritas no fascículo da atividade, com poucas intervenções orais. As intervenções reflexivas das UARC's trazem similaridades com a abordagem comunicativa interativa / de autoridade.

É possível verificar que no turno T192, o aluno do grupo 1, usando de linguagem cômica, comunica muito bem a translação vertical que ocorreu quando há uma constante fora do módulo. Os turnos T198 (Grupo 02) e T203 (Grupo 03) revelam que verificaram a forma gráfica em forma de "V", diferente do que fala o aluno do grupo 01 no turno T191 que compara a um triângulo, dando a ideia de que equivocadamente entendeu que o gráfico pode ser fechado.

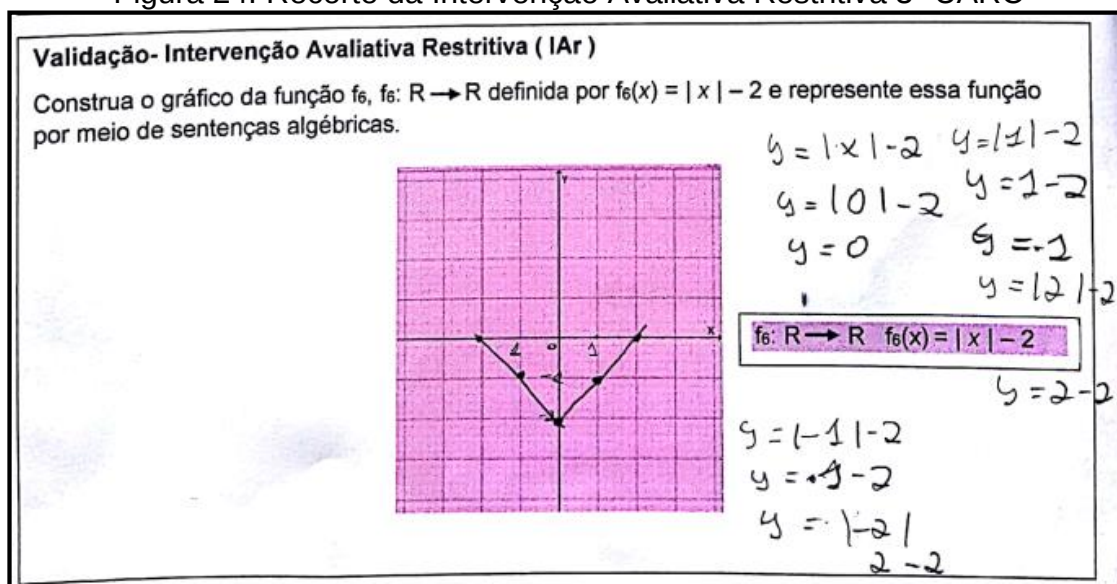
Quadro 21: Recortes da socialização do Episódio 3

	TODOS OS GRUPOS
SOCIALIZAÇÃO	T206-ALUNA 3A: Por que fora do módulo está negativo. Deslocamento é para cima e para baixo quando fora do módulo. T207- PROFESSOR: Exatamente! Você deve observar o que está fora do módulo para fazer o deslocamento para cima ou para baixo. Vamos ler o primeiro item agora, vamos para a segunda folha, o que ocorre com o gráfico das funções F4 e F5 em relação ao eixo OX do plano cartesiano. O que aconteceu com o gráfico turma? T208- TURMA: Ele subiu e desceu! T209- PROFESSOR: Mas porque ele está subindo e descendo? T210-ALUNA 3A: Por causa dos sinais. T211- PROFESSOR: Então ele sobe ou desce em relação ao eixo X, conforme o sinal. Agora escrevam a maneira de vocês.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A consolidação da apreensão do objetivo de aprendizagem do episódio da atividade 3 ocorreu na socialização onde o professor recorreu ao recurso de o padrão de interação I-R-A (Iniciação- Resposta- Avaliação) com abordagem comunicativa interativa/ dialógica. Assim, os turnos T208 e T210 revelam indícios de que os estudantes compreenderam o comportamento gráfico da Função Modular, quando possui uma constante fora do módulo ocasionando uma translação vertical.

Figura 24: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 3ª UARC



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A execução da intervenção avaliativa validou a apreensão do objetivo de aprendizagem do episódio 3, na qual os estudantes registraram o amadurecimento da habilidade de representar em linguagem gráfica e algébrica, de modo a ser possível afirmar a eficácia e potencialidade parcial da sequência didática para o ensino de Função Modular.

EPISÓDIO 4: GENERALIZAÇÃO DA FUNÇÃO MODULAR

OBJETIVO: GENERALIZAR A FUNÇÃO MODULAR NAS FORMAS ALGÉBRICAS E GRÁFICA.

TURNOS: DO TURNO T217 AO T282

No episódio 2 ocorreu o fechamento das atividades e a mobilização de todos os conhecimentos adquiridos nos episódios anteriores. Os indícios de aprendizagem verificados foram recortados apenas do seguimento referente a intervenção reflexiva.

Quadro 22: Recortes da Intervenção Reflexiva do Episódio 4

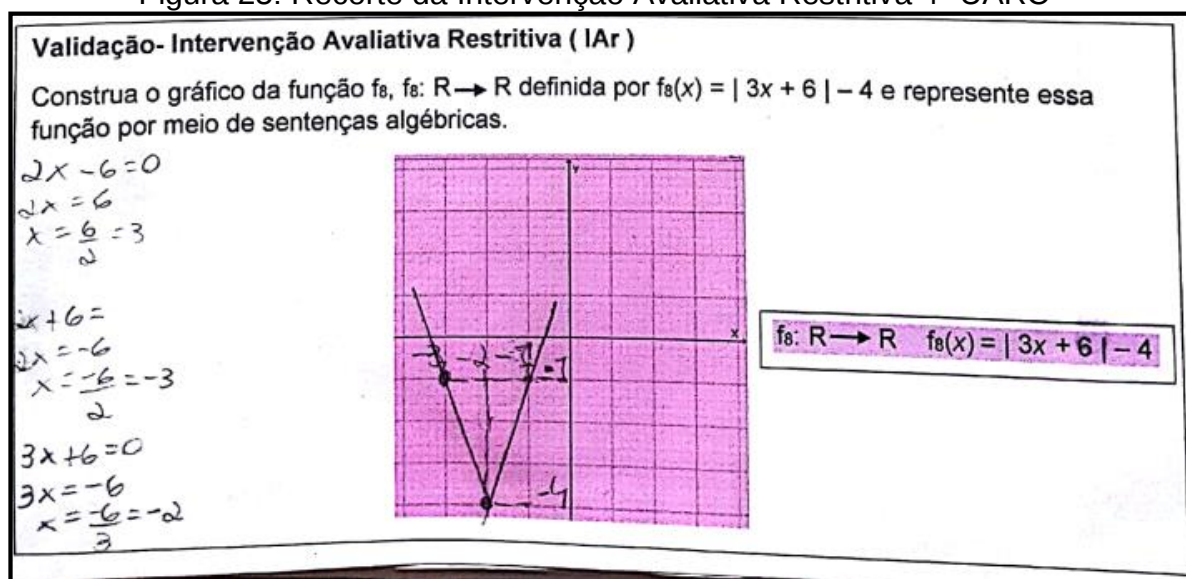
	GRUPO 01	GRUPO 02	GRUPO 03
INTERVENÇÃO REFLEXIVA	T223-PROFESSOR: Esse aqui estava bem aqui no centro. Bom se eu subtrair 3, eu vou bem aqui para direita, são os dois gráficos foi para a direita, o outro foi para esquerda, nós vamos usar os mesmos gráficos. Você vai montar para ver o que acontece quando tá fora do módulo. T224-ALUNO 1A: Sobe ou desce. T225-PROFESSOR: Isso! Sobe ou desce. Então você tem que achar o valor de X, Vamos lá, módulo de zero, vai dar zero, coloca três, 3, 6- 6, 0,- 1,- 1. T226-ALUNO 1B: Para formar um V, agora você pega o valor 2, e o valor 4, e marca mais pontos para formar o V. T234-PROFESSOR: Qual é a diferença desse para esse? T235- ALUNO 1B: É porque esse gráfico tá na parte de cima e esse gráfico, na parte de baixo. T236-PROFESSOR: E por que está em cima? T237-ALUNO 1B: Porque ele tá positivo T238- PROFESSOR: E o outro, por que ele está em baixo? T239- Aluno 1A: Porque ele está negativo. T240- Professor: Que legal! Parabéns!	T247- ALUNA 2A: Então 3 com-1 e o 2, 4- 6,- 2- 1, 1 então fica 4 com 1. T248-professor: Não vai dar o mesmo? Só que do outro lado. O que é formou? T248-ALUNO 2B: Formou V. T249-PROFESSOR: Isso! Agora faça a mesma coisa nesse aqui. T250-ALUNA 2A-Pois é, mas quando ele fez, ele tava fazendo ali no quadro né, Aí ele fez primeiro o lado negativo, depois ele fez a parte de cima, entendeu? T251-ALUNA 2A: Pois é, mas $F = 0$ vai dar 3. É a mesma coisa, mas só que o dele tá só traçado. T252-ALUNA 2A: Se (inaudível) é a mesma coisa, mas o dele tá só do outro. Não tenho V se não fosse esse 3 aqui, não seria um V, não seria um gráfico completo. Não pode ser aqui no 3. Vamos fazer o seguinte vamos chamar o professor.	T261-PROFESSOR: Isso mesmo, você observa que tudo, o que acontece do lado daqui acontece do lado de lá, então tudo que aconteceu aqui vai acontecer aqui, com a diferença. T262- ALUNA 3A: Depende de onde fica o número. Ele muda de lado se estiver dentro, e fora sobe e desce. T263- PROFESSOR: Parabéns então dentro o gráfico vai pro lado ou pro outro.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

As interações verificadas no seguimento extraído da atividade 2, revelam que o padrão de interação ocorrido foi I-R-F (Iniciação-Resposta-Feedback) e I-R-A (Iniciação-Resposta-Avaliação). A abordagem comunicativa adotada pelo professor apresentam caráter interativo/dialógico, o que permitiu que os alunos mobilizassem as habilidades adquiridas nas atividades anteriores para chegarem a uma generalização para a Função Modular.

É possível verificar nos turnos T235, T237 e T239 do grupo 01 que os alunos foram capazes de descrever o comportamento funcional em estudo. O T262 do grupo 03 revela claramente que a aluna com linguagem própria foi capaz de concluir o padrão geral de comportamento da Função Modular.

Figura 25: Recorte da Intervenção Avaliativa Restritiva 4ª UARC



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na realização da intervenção avaliativa verificou-se que os alunos compreenderam a construção gráfica na forma geral da Função Modular, embora a representação algébrica não tenha sido feita, o que não significa necessariamente que não compreenderam como ocorre.

Conclusões sobre os resultados

Foi constatado durante as análises dos recortes analisados na ótica da Análise Microgenética e da Análise do Discurso que os alunos sujeitos da pesquisa conseguiram gradualmente reconstruir o conceito e as características da Função

Modular, de modo que a metodologia adotada para elaboração da Sequência Didática e em seguida para tratamento de dados na análise de resultados se mostraram compatíveis no sentido da construção e análise das partes para compreensão do todo. Além disto, as interações aluno-aluno e aluno-professor possibilitaram um amadurecimento cognitivo coletivo sobre o assunto Função Modular. Tal conhecimento sedimentou bases para outros estudos e reforçou estudos anteriores sobre estudo de função.

As experiências propostas nas atividades possibilitaram um novo olhar para o ensino da Função Modular no qual os alunos puderam assumir um papel ativo na (re)construção do conceito matemático. Essa nova perspectiva estimulou os alunos na obtenção de respostas a partir de observações com a manipulação das funções. Apesar de alguns alunos inicialmente não dominarem os conceitos da Função Afim e de Módulo, os instrumentos preliminares, Teste de Verificação e Conhecimentos e a Oficina, contribuíram para que os alunos chegassem em um nível considerado aceitável para a iniciação das atividades e seu desenvolvimento.

Nesse sentido, os alunos puderam utilizar seus conhecimentos prévios para a (re)construção da Função Modular. Vale ressaltar que as ideias empíricas formuladas pelos mesmos, foram de suma importância para o êxito das atividades, visto que a partir do diálogo constante entre alunos e professor e entre os próprios alunos, o ambiente educacional foi enriquecido de diferentes olhares em busca da solução de um problema em comum.

Sobre as potencialidades da Sequência Didática no aspecto do ensino, o professor pode organizar os seus conhecimentos de forma sistemática para enfim transmiti-lo aos seus alunos de forma clara, objetiva e interativa. A respeito da aprendizagem, os alunos tornam-se peça integrante do processo educativo tendo a possibilidade de opinar, discutir, refletir e reformular suas ideias. Referente ao saber, o objeto matemático não é visto como algo pronto mas construído de forma gradual, respeitando o grau de complexidade cognitiva dos alunos com uma linguagem acessível.

Diante do exposto é que se declara validada as potencialidades para o ensino de Matemática no Ensino Médio da sequência didática estruturada como Unidade Articulada de reconstrução Conceitual para o ensino de Função Modular nos aspectos perceptivo/intuitivo, empírico e teórico.

CONCLUSÕES

A partir deste tópico, escrevo minhas considerações finais a respeito da pesquisa apresentada neste documento. No entanto, acredito ser viável relembrar a questão norteadora que inicialmente esquematizou a pesquisa, bem como o objetivo proposto para a mesma, os quais foram respondidos e alcançados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

A saber, a questão norteadora foi *“Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC’S) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de função modular?”*, na qual decorreram o procedimentos para o objetivo de *“estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de Função Modular”* alcançado com êxito.

A partir destes pressupostos, as bases teóricas que fazem parte da composição deste trabalho, descritos no capítulo 1, proporcionaram um certo amadurecimento e aprofundamento no que diz respeito aos conhecimentos sobre a Teoria das Situações Didáticas, Sequência Didática, Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual, Análise Microgenética e Análise do Discurso. Estes conhecimentos foram primordiais para a compreensão e elaboração da Sequência Didática para o ensino da Função Modular que foi apresentada.

O levantamento de estudos sobre o ensino e aprendizagem de Matemática, em especial, sobre o ensino da Função Modular, apresentados no capítulo 2, evidenciaram os problemas relacionados ao tema no que diz respeito às dificuldades de aprendizagem do objeto matemático pesquisado.

Com as leituras e análises de documentos das Diretrizes da Educação, de dissertações com Estudos Teóricos e Experimentais e análises de livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático, foi possível verificar que o conteúdo de Função Modular é um tanto desprezado se comparado a outras funções. Além do mais, é um campo pouco estudado no âmbito acadêmico pois apresenta uma escassez de propostas metodológicas com a finalidade de trazer novas perspectivas sobre o ensino da Função Modular.

Evidenciou-se que o conteúdo de Função Modular não apresenta recomendações específicas referentes a abordagem necessária para sua aprendizagem, assim como os livros didáticos não trazem contextos significativos

desse assunto, o que induz os professores à perpetuação do modelo tradicional de ensino que valoriza definições prontas, exemplos sem aprofundamento matemático e exercícios com procedimentos repetitivos conforme apontou a resposta dos alunos quando foram questionados sobre a dinâmica das aulas sobre Função Modular. Estes problemas detectados sustentam a necessidade da elaboração de atividades que ajudam os professores a refletirem em suas práticas profissionais e sobre suas concepções do ensino de Matemática.

A respeito das Diretrizes da Educação, os documentos analisados permitiram verificar que acerca da Função Modular, não há uma especificidade sobre o ensino deste conteúdo. Abrangendo as funções em sua amplitude, esses documentos sugerem atividades diversificadas que valorizem a participação ativa do aluno apresentando as finalidades educacionais, no entanto não apontam caminhos ou estratégias para alcançá-las. Assim, o professor deve estar a par das recomendações para o ensino fornecidas por estes documentos para nortear a elaboração de suas atividades com o objetivo de atender as competências e habilidades que são determinadas como essenciais para o desenvolvimento cognitivo de seus alunos.

Após a realização da pesquisa bibliográfica referente à Função Modular, vale ressaltar que o processo de elaboração da Sequência Didática não foi imediato. Para tanto, foram necessários 13 encontros com o orientador desta pesquisa e de outros especialistas no assunto para que pudessem dar suas contribuições e considerações para o aperfeiçoamento da Sequência Didática. A cada encontro, com duração média de duas horas, observava-se pontos soltos que haviam passado despercebidos e que poderiam prejudicar no desenvolvimento das atividades.

Em dado momento da elaboração da Sequência Didática, foi necessário realizar uma aplicação-piloto das atividades na qual evidenciou que certas lacunas de aprendizagem não estavam sendo preenchidas, o que levou à reformulação da estrutura das atividades propostas. Contou-se também com uma apresentação da Sequência Didática no Grupo de Pesquisa em História da Matemática e Educação Matemática na Amazônia (GHEMAZ), onde pesquisadores, professores da Educação Básica, estudantes de graduação e pós-graduação aconselharam possíveis ajustes para o melhor entendimento dos alunos no momento de aplicação. A partir destas observações, a Sequência Didática evoluía gradativamente de forma a cumprir seu objetivo de demonstrar suas potencialidades para minimizar as dificuldades dos alunos referentes à Função Modular.

As pesquisas preliminares foram importantes para o entendimento do estado ao qual se encontra os processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos relativos à Função Modular, além de que, favoreceram a elaboração das atividades articuladas que integraram a Sequência Didática apresentada, bem como, os possíveis entraves que pudessem acontecer ao aplicá-la, os quais preveniu-se com o teste de Verificação de Conhecimentos e a Oficina.

O teste de verificação foi essencial para diagnosticar as dificuldades dos alunos nos conteúdos básicos relacionados ao conteúdo da Função Modular. O baixo rendimento dos alunos neste teste favoreceu a ministração de uma oficina que buscou nivelar o conhecimento da turma e minimizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos ao longo da aplicação da Sequência Didática que seguiu posteriormente.

O teste de verificação constou de 3 questões e em sua maior parte os alunos não conseguiram responder as questões relativas à Função Afim (questões 1 e 2), mas conseguiram perceber regularidades na questão sobre o módulo de um número e obtiveram um bom desempenho. Como os dois conteúdos foram considerados conceitos básicos para a construção da definição da Função Modular, foi necessário a execução da Oficina. Apesar disto, no item (c) da primeira atividade da Oficina, no qual os alunos relacionavam abscissas e ordenadas no plano cartesiano, alguns deles perceberam que os módulos de alguns números estavam presentes na tarefa, o que gerou uma noção intuitiva da Função Modular antes mesmo da aplicação da Sequência Didática.

A turma escolhida para aplicação da Sequência Didática inicialmente mostrou-se muito agitada e inquieta. Por ser uma estratégia de ensino na qual os alunos não estavam habituados, houve certa insegurança para que os alunos compreendessem e realizassem as atividades. Na primeira atividade que compôs a Sequência Didática, o professor teve que se deslocar muitas vezes até a mesa dos grupos e tirar as dúvidas dos alunos. Esse fato fez com que a primeira atividade demorasse mais do que se esperava.

Apesar dos problemas na primeira atividade, os alunos começaram a se familiarizar com a proposta de ensino da Função Modular por meio de Sequência Didática e, gradativamente, adquiriram autonomia para realizar as atividades posteriores, sem tanta dependência do professor. Vale ressaltar também, que em alguns grupos um aluno se destacava ao entender a tarefa e conseguia evoluir substancialmente, em seguida, este aluno buscava ajudar os demais membros do

grupo para chegar às mesmas considerações. Esse fato comprova que a metodologia de Sequência Didática favorece um ambiente interativo e participativo, em que os alunos ajudam uns aos outros para alcançar os objetivos propostos pelo professor.

Os episódios analisados revelaram pontos fundamentais favoráveis aos processos de ensino e aprendizagem da Função Modular, considerados relevantes para a obtenção da resposta da questão norteadora da pesquisa e a concretização do objetivo proposto pela mesma.

O interesse de alguns alunos, não todos, foi notório e mostrou-se um fator contribuinte na aplicação das atividades. A partir destes, outros alunos tinham suas dúvidas sanadas por meio das interações entre eles o que mostrou que a Sequência Didática promoveu um ambiente de ensino interativo com a participação ativa dos alunos na (re)construção do conhecimento matemático sobre a Função Modular.

Outro aspecto favorável foi a confirmação de que a estrutura de uma Sequência Didática baseada no modelo das UARC'S de Cabral (2017) favorece aos estudantes a mobilização dos seus conhecimentos prévios. Em alguns momentos, uma parcela dos alunos compreendia com eficácia os conceitos e procedimentos referentes à Função Modular alcançando os resultados esperados antes mesmo do tempo previsto. Nesse sentido, estes alunos reuniam toda a carga matemática aprendida antes da aplicação da Sequência Didática facilitando o desenvolvimento das atividades.

Notou-se também que os comandos articulados e utilizados ao longo das atividades contribuem significativamente na construção dos conceitos matemáticos. Essa articulação tornou as questões da Avaliação Aplicativa mais compreensíveis aos alunos os quais obtiveram um bom desempenho nesta etapa de validação da Sequência Didática.

Ressalta-se que os estudos da Análise Microgenética de Goés (2000) e da Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002) foram cruciais para a identificação e o entendimento dos indícios de aprendizagem, os quais contribuíram para alcançar o objetivo proposto nesta pesquisa tornando-os ícones fundamentais para o ensino por meio de Sequências Didáticas.

É importante salientar que o Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) trouxe novas perspectivas sobre os atos de ensinar e de aprender. Por meio das disciplinas ofertadas, das orientações dos professores, das discussões em sala de aula e outros

fatores, foi obtido um crescimento profissional que reflete em minhas práticas docentes e em minha postura como professor de Matemática na Educação básica no que se refere às estratégias de ensino com a construção dos objetos matemáticos.

Como desdobramentos possíveis para pesquisas futuras, sugere-se a reaplicação da Sequência Didática para o ensino da Função Modular a outras turmas para que tenham a possibilidade de (re)construção desse conteúdo, bem como a oportunidade de criar um ambiente interativo que supere as aulas tradicionalmente expositivas. Além do mais, como esta pesquisa foi fundamentada restringindo a Função Modular com a Função Afim, sugere-se que sejam realizadas novas pesquisas e elaboradas Sequências Didáticas que explorem situações diversificadas com outras funções, como as Funções Quadrática, Exponencial e Logarítmica com o intuito de crescimento de estudos e metodologias disponíveis para o ensino das funções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **A Teoria das Situações Didáticas**. São Paulo: PUC-SP, 2004.

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007. p. 35.

ALVES, E.M.S. **A Ludicidade e o Ensino de Matemática**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BERNARDO, Fábio Garcia. **Gráfico de Funções: uma abordagem dinâmica e experimental** / Fábio Garcia Bernardo. – 2013.

BRASIL, Ministério da Educação. **PNLD 2017: Matemática – Ensino fundamental anos finais/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016. 155 p.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática 5ª a 8ª séries**. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto. 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL/MEC. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF: 20 de dezembro de 1996.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G.. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BRUMATTI, Raquel Normandia Moreira. **Transformações no Ensino: o caso do valor absoluto**. VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática): Recife, 2004. Disponível em: <http://sbem.com.br/files/viii/pdf/06/cc4783155720.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estruturação e elaboração**. Belém: SBEM-PA, 2017.

CHEVALLARD, Y.; BOSH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas o Elo entre o Ensino e a Aprendizagem**. Arimed: Porto Alegre, 2001.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. La Pensée Sauvage Éditions: Grenoble, 1991.

CRUZ, Priscilla; MONTEIRO, Luciano (Orgs.). **Anuário Brasileiro da Educação Básica**. Todos pela Educação. São Paulo: Editora Moderna, 2019. Disponível em: https://www.todospelaeducacao.org.br/_uploads/_posts/302.pdf. Acesso em: 2 dez. 2019.

D'AMBROSIO, B. S. **Como Ensinar Matemática hoje?** Temas e debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília, DF, p. 15-19, 1989.

DAMÁSIO, A. R. **O Erro de Descartes: Emoção, Razão e o cérebro Humano**. São Paulo: Companhia das Letras, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações: ensino médio**. 3. ed. v. 1. São Paulo: Ática, 2016.

FARIAS, José Vilani de. **A Matemática e o Lúdico: trabalhando funções com o Geogebra**. / José Vilani de Farias. – Mossoró, 2013.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A Abordagem Microgenética na Matriz Históricocultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf> >. Acesso em: 02 de Nov. 2017.

GONÇALVES, Fábio Barros. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Função Quadrática**. 2019, 298 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos, funções**. 9. Ed. v. 1. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos, funções**. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, et. al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula**. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2009.

MORTIMER, Eduardo F. & SCOTT, Phill. **Atividade Discursiva nas salas de aula de Ciências**: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações no ensino de ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2002. Disponível em: www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista. Acesso em: 23 de Out. 2017.

NOGUEIRA JÚNIOR, Dárcio Costa. **Elaboração de uma Sequência Didática para a Aprendizagem de Valor Absoluto e da Função Modular utilizando a organização Curricular em Rede**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte: PUCMG, 2008.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial**. 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. 2. ed. v. 1. São Paulo: Moderna, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3. ed. v. 1. São Paulo: Moderna, 2015.

PERRENOUD, P. **Novas Competências para Ensinar**. Porto alegre, RS: Artmed, 2000.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PORTO, I. C. M. G. **Investigando a Motivação de Estudantes de Ensino Médio em relação à Matemática**, 2005.

SILVA, A. C. A. **Resolução de Problemas**: metanálise das dissertações produzidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUCSP, 2011.

SILVEIRA, Marisa Rosane Abreu da. **Produção de Sentido e Construção de Conceito na Relação Ensino Aprendizagem de Matemática**. Dissertação de mestrado. Faced. Porto Alegre, UFRGS, 2005.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, Escrever e Resolver Problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre, RS: Artmed, 2001.

SOUZA JUNIOR, Eduardo Monteiro. **Uma Análise de Pesquisas Acadêmicas em Educação Matemática sobre o Enfoque Histórico do Conceito de Função** / Eduardo Monteiro de Souza Junior. – Campinas: PU – Campinas, 2007.

SOUZA, Adriane Eleutério. **O Lúdico Associado à Resolução de Problemas e Jogos no Ensino e Aprendizagem de Funções: uma abordagem diferenciada** / Adriane Eleutério Souza. – 2014.

SOUZA, Helena Tavares de. **Um Estudo com Professores do Ensino Médio sobre Função Modular por meio de Resolução de Problemas utilizando o software Geogebra como Estratégia Pedagógica**. São Paulo, 2013.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O Ofício de Professor: história, perspectivas e desafios internacionais**. Tradução de Lucy Magalhães. 4. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp: v. 21, n. 39, p. 135-169 2013.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da Teoria das situações Didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Revista Zetetiké, FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155-168, jan/jun 2013.

ZABALA, A. A. **Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

6. ANEXOS

6.1 ANEXO A: FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: FUNÇÃO MODULAR: ENSINO POR SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Mestrando (a): JOSÉ AMÉRICO TRINDADE COSTA JÚNIOR

Data da avaliação: 19/12/2019

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:

- () Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio
() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio
() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) Tipo de Produto Educacional

- (X) Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
() Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: _____

b) Possui URL: (X) Sim, qual o URL: EDUCAPES
() Não () Não se aplica

c) É coerente com a questão-foco da pesquisa?

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

d) É adequado ao nível de ensino proposto?

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

e) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?

- (X) Sim
() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- a) Possui sumário: (X) Sim () Não () Não se aplica
b) Possui orientações ao professor: (X) Sim () Não () Não se aplica
c) Possui orientações ao estudante: (X) Sim () Não () Não se aplica
d) Possui objetivos/finalidades: (X) Sim () Não () Não se aplica
e) Possui referências: (X) Sim () Não () Não se aplica
f) Tamanho da letra acessível: (X) Sim () Não () Não se aplica
g) Ilustrações são adequadas: (X) Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

☒ Sim, onde: Colégio Estadual Raul de Carvalho☐ Não, justifique: _____☐ Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

☒ Sim, onde: Escolas de Ensino Médio☐ Não, justifique: _____☐ Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

☐ Sim, onde: _____☐ Não, justifique: _____☒ Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

☒ na escola, como atividade regular de sala de aula☐ na escola, como um curso extra☐ outro: _____

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

☐ Alunos do Ensino Fundamental☒ Alunos do Ensino Médio☐ Professores do Ensino Fundamental☒ Professores do Ensino Médio☐ outros membros da comunidade escolar, tais como _____☐ outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

☒ APROVADO☐ APROVADO COM MODIFICAÇÕES☐ REPROVADO**MEMBROS DA BANCA**

_____. Orientador

Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN

Universidade do Estado do Pará

Natanael Freitas Cabral

Examinador Interno

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ

Universidade do Estado do Pará

Gustavo Nogueira Dias

Examinador Externo

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias

Doutor em Educação – Universidade Nacional de Rosário - Argentina

Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronautica

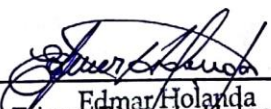
6.2 ANEXO B: DECLARAÇÃO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

**DECLARAÇÃO**

Declaro para os devidos fins que o aluno **JOSÉ AMÉRICO TRINDADE COSTA JUNIOR**, CPF: 391.853.202-00, realizou a aplicação da Sequência Didática intitulada “**Função Modular Ensino por Sequências Didáticas**” desenvolvido no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará - UEPA, na turma do 1º Ano (M1MR01) do Colégio Estadual Paes de Carvalho, nos meses de Junho e Agosto de 2019.

Belém(Pa), 11 de Dezembro de 2019.

Atenciosamente,



Edmar Holanda
Edmar Paes de Holanda
Pedagogo Adm. Escolar
Diretor do CERC
Gestor Escolar



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, 350 – Telégrafo
66.113-010 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem