UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Abordando Função do 1º grau com alunos do 1º ano do ensino médio: uma proposta de ensino utilizando investigação matemática

Approaching a Function of the First Degree with High School First Grade Students: a teaching proposal by using mathematical investigation

Rosimiro Araújo do Nascimento[1], Marli Teresinha Quartieri[2]

[1]Mestre do Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências Exatas – PPGECE – Universidade do Vale do Taquari – Univates – rosimiro.nascimento@ifma.edu.br
[2]Doutora em Educação - Universidade do Vale do Taquari - Univates - mtquartieri@univates.br

Finalidade: O presente produto educacional apresenta seis atividades investigativas envolvendo função do 1º grau. Elas podem ser desenvolvidas com discentes que cursam o 1° ano do Ensino Médio.

Contextualização

As atividades expostas a seguir foram concebidas para a dissertação desenvolvida para o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, cujo objetivo geral foi analisar as conjecturas e estratégias elaboradas pelos alunos da 1ª série do curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, a partir de atividades investigativas com foco na função do 1º grau. Todas as tarefas foram exploradas em grupos colaborativos que deveriam registrar em um caderno as estratégias de resolução e as respostas formuladas. Após a investigação da resolução, os grupos fizeram a apresentação das elaborações para toda a turma. Dessa forma, para cada atividade foi disponibilizado um momento para a investigação e outro para a apresentação.

As investigações desenvolvidas foram alicerçadas na obra de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). De acordo com estes autores, a investigação matemática é constituída por questões abertas não necessariamente difíceis nas quais não está definido o início da resolução, cabendo aos discentes defini-las e estudá-las de maneira organizada. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 13) acrescentam que, na investigação, os estudantes devem procurar "descobrir as relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". De acordo com esse pressuposto, Fiorentini e Lorenzato (2006) enfatizam que ao verificar-se, durante a atividade, a formulação de conjecturas que provocam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, tem-se, então, uma situação de Investigação Matemática. Dessa forma, as tarefas propostas oportunizaram aos grupos elaborarem conjecturas e estratégias contemplando conhecimentos sobre função do 1º grau. Para mediar os encontros o pesquisador recorreu a Svinicki e Mckeachie (2012). De acordo com esses autores o docente deve:

- Declarar a importância das discussões para a aprendizagem dos alunos e, que ao expressar uma compreensão, o discente pode obter reações dos outros e do professor, mas esse procedimento é fundamental para o aprendizado.
- Destacar ao aluno a relevância de expor suas conjecturas e conclusões, ouvir as dos outros e interagir com eles durante os momentos investigativos.
- Planejar as ações para o tempo da aula.
- Incentivar os alunos a valorizar as ideias de seus pares para evitar competição de conhecimentos.

Os referidos autores enfatizam que a primeira e segunda afirmação deve ser certificado à turma antes dos grupos iniciarem as atividades. Em relação ao terceiro e quarto ponto, conforme os autores anteriormente citados, o mediador deve sugerir que as discussões atinjam certo valor antes do término da aula ou do grupo ser desfeito. Nesse sentido, o docente deve ficar atento sobre os rumos que as argumentações tomam durante o processo investigativo, tanto em relação ao tempo da aula como no sentido que as elaborações dos discentes podem evoluir. De acordo com Alro e Skovsmose (2010), na aplicação de atividades investigativas, o docente deve convidar os alunos para formarem um cenário investigativo de natureza aberto, oportunizando aos grupos autonomia na elaboração das justificativas para a tarefa. Desta forma, o docente deve assumir um papel de mediador, propondo um ambiente em que os estudantes se sintam confiantes para elaborarem conjecturas e estratégias relevantes.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) corroboram com essa ideia ao afirmarem que o sucesso adquirido em uma investigação matemática está relacionado com o ambiente criado pelo docente na sala de aula, embora a atividade dependa puramente da iniciativa destes. O professor deve acompanhar os grupos para verificar o que está sendo elaborado e, quando necessário, estimulá-los a conceberem estratégias diferenciadas para obterem mais de uma solução. Caso o mediador identifique algum equívoco na elaboração do grupo, o docente deve fazer uma interposição para conduzi-los às soluções válidas. Dessa maneira, a socialização de ideias matematicamente corretas amplia significativamente os conhecimentos da turma sobre o conteúdo abordado.

De acordo com essa perspectiva, Ponte (2005) enfatiza que a aprendizagem do aluno não está condicionada somente ao que o professor expõe, mas também a partir das discussões e registros escritos sobre as atividades que realizou. Bonals (2003) amplia essa concepção afirmando que no trabalho em grupo os alunos ensinam os outros e proporcionam a aprendizagem e favorecem a aquisição de conhecimentos por meio da interação entre eles. Nesse sentido, é imprescindível que os estudantes se ajudem mutuamente para que todos se beneficiem com as discussões, pois o envolvimento ativo dos alunos é fundamental para que a aprendizagem ocorra.

Brunheira e Fonseca (1995) afirmam que, nesse contexto, podem-se inserir as atividades de investigação, porque elas se destacam como uma oportunidade para que o estudante mobilize a criatividade nos trabalhos cooperativos. Os autores acrescentam que quando os alunos se sentem confiantes para expor suas ideias, superam dificuldades e aumentam a confiança em enfrentar novos desafios. De acordo com esse entendimento, na investigação matemática os discentes vivenciam uma metodologia que os torna sujeitos ativos na aprendizagem. Nesse sentido, propõe-se, o presente produto educacional, para levar à sala de aula uma concepção diferenciada ao ensino de função do 1º grau.

De acordo com o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2017) no primeiro ano do Ensino do Médio é abordada o conteúdo de função afim. O documento acrescenta que esse conteúdo influencia na compreensão de diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na Medicina, Física, Economia, Engenharia, Tecnologia etc. Smole, Centurión e Diniz (2004) corroboram com esse entendimento ao enfatizarem que o tópico de função possui uma ampla possibilidade de aplicações nas Ciências e, dessa maneira, deveria ser visto já nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Paiva (2015, p. 301) declara que ao final do estudo da função do 1º grau "os estudantes devem estar aptos a construir gráfico de uma função afim a partir da lei de associação e construir gráfico de uma função dada por mais de uma sentença". Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2016, p. 561) destaca que:

> O trabalho com função afim deve ser realizado de modo a proporcionar ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como taxa de variação, crescimento e decrescimento, incluindo os casos em que a relação entre as variáveis envolvidas é proporcional, o caso da função linear.

Verificou-se que essas perspectivas foram vivenciadas por uma turma do 1º ano do Ensino Médio na intervenção pedagógica que envolveu as seis atividades investigativas propostas nesse produto educacional. Assim, um trabalho investigativo abordando as tarefas expostas a seguir oportuniza aos alunos o ensino e a aprendizagem de função do primeiro grau de maneira significante.

Objetivo

Socializar atividades investigativas que podem ser desenvolvidas em turmas do 1º ano do Ensino Médio com foco no ensino de função afim.

Detalhamento

As atividades foram desenvolvidas com 26 alunos que cursavam o 1º ano do curso Técnico Integrado em Agropecuária. Nos momentos destinados às investigações, os estudantes formaram grupos colaborativos de 4 ou 5 alunos. No primeiro encontro, os discentes tiveram dificuldades em iniciar as investigações, porque não conheciam a metodologia empregada. Contudo, o professor orientou-os, conforme os autores supracitados, como deveriam proceder diante das tarefas propostas. Para cada tarefa foi disponibilizado um momento para apresentação em grande grupo das elaborações constituídas. Em todos os instantes, o docente assumiu um papel de mediador, acompanhou as discussões dos alunos e, quando necessário, orientava os rumos da investigação. Cada grupo recebeu um caderno para que um dos componentes registrasse os resultados das discussões e, no final de cada encontro, o professor recolhia as anotações dos grupos.

As atividades foram exploradas na ordem que aparecem a seguir. Na primeira, os discentes elaboraram as expressões matemáticas relacionando duas colunas ou linhas entre si. Por meio dessa estratégia iniciou-se o uso da investigação matemática, pois os grupos que conseguiram elaborar a função afim repassaram a ideia para seus pares durante as discussões em grande grupo. As elaborações dos alunos foram registradas em fotos e, na apresentação final, eram mostradas na lousa digital para auxiliá-los nas explicações. A seguir, são apresentadas as atividades investigativas com seus respectivos objetivos específicos.

Atividade 01:

Objetivo: identificar que a função do 1º grau representa relação de dependência entre dois conjuntos de valores.

Considere o calendário do mês de abril de 2018.

MÊS DE ABRIL DE 2018

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Nestas condições:

a) Quais relações podem ser elaboradas observando-se a disposição dos dias do referido mês?
b) Utilizando os números que formam as linhas, elabore uma relação que seja uma função. No que diz respeito tanto aos números das colunas quanto aos números que formam as diagonais, quais funções podem ser elaboradas?
c) Dentre as funções elaboradas no item “b”, construa no mesmo plano o gráfico da que possui a menor e maior inclinação em relação ao eixo “x”. Quais valores estão relacionados com esta inclinação? Quais outros significados eles têm para os gráficos?
d) Quais funções do item “b” podem representar uma relação diretamente proporcional entre dois valores? Justifique sua resposta. Quais outras características comuns você pode identificar nessas funções?

Atividade 02:

Objetivo: compreender as partes que compõem a função afim.

Uma loja de pneus está oferecendo emprego nas seguintes condições:

I) **Representante comercial**:

Salário de R$ 1000,00 + R$ 5,00 por pneu vendido.

II) **Vendedor direto na loja**:

Salário de R$ 700,00 + (10% pela venda de cada pneu aro 13) ou + (8% pela venda de cada pneu aro 14) ou + (6% pela venda de cada pneu aro 15).

III) **Vendedor direto no site**:

Salário de R$ 800,00 + (8% pela venda de cada pneu aro 13) ou + (6% pela venda de cada pneu aro 14) ou + (4% pela venda de cada pneu aro 15).

Nessas condições, considere que a loja efetua uma grande quantidade de vendas de pneus por mês.

a) Qual destas propostas é a mais conveniente? Justifique sua resposta.

b) É possível identificar que alguma proposta é sempre mais vantajosa que as outras? Justifique sua resposta.

c) Em quais condições a proposta menos conveniente passaria a ser a mais interessante? Justifique sua resposta.

Atividade 03:

Objetivo: estabelecer comparações entre valores com o intuito de visualizar o crescimento ou decrescimento da função do 1º grau.

Suponha que uma aluna de um curso superior, durante os intervalos, venda trufas para uma confeitaria de sua cidade. Com as vendas, ela obtém um salário mensal composto de duas partes:

- Uma parte fixa de R$ 200,00;

- Outra parte variável, que corresponde a um adicional de 50% sobre o total de trufas vendidas no mês.

Sabe-se que em quatro meses seguidos, os respectivos totais de trufas vendidas foram 400;

700; 1000 e 1300. Preencha o quadro a seguir, de maneira que cada linha corresponda a um mês.

Mês	Valor fixo	Adicional	Total de trufas	Salários
1º				
2º				
3º				
4º				

Responda:

a) Mantendo esse padrão de crescimento, qual o valor do décimo quinto salário?

b) Qual é a expressão matemática usada para calcular o salário de cada mês?

c) Como seria a representação dessa situação em um gráfico, colocando o total das trufas vendidas no eixo “x” e o valor dos salários no eixo “y”?

d) Este gráfico representa uma função crescente ou decrescente? Por quê?

e) Qual é a taxa de crescimento ou decrescimento para este gráfico? Justifique sua resposta.

Atividade 04:

Objetivos: investigar os valores da função do 1º grau a partir de suas coordenadas inseridas no plano cartesiano; perceber a função como uma relação de dependência entre dois conjuntos de valores.

Suponha que uma aluna de um curso superior, durante os intervalos, venda trufas para uma confeitaria de sua cidade. Com as vendas, ela obtém um salário mensal composto de duas partes:

- Uma parte fixa de R$ 200,00;

- Outra parte variável, que corresponde a um adicional de 50% sobre o total de trufas vendidas no mês.

Sabe-se que em quatro meses seguidos, os respectivos totais de trufas vendidas foram 400; 700; 1000 e 1300. Preencha o quadro a seguir, de maneira que cada linha corresponda a um mês.

Mês	Valor fixo	Adicional	Total de trufas	Salários
1º				
2º				
3º				
4º				

Responda:

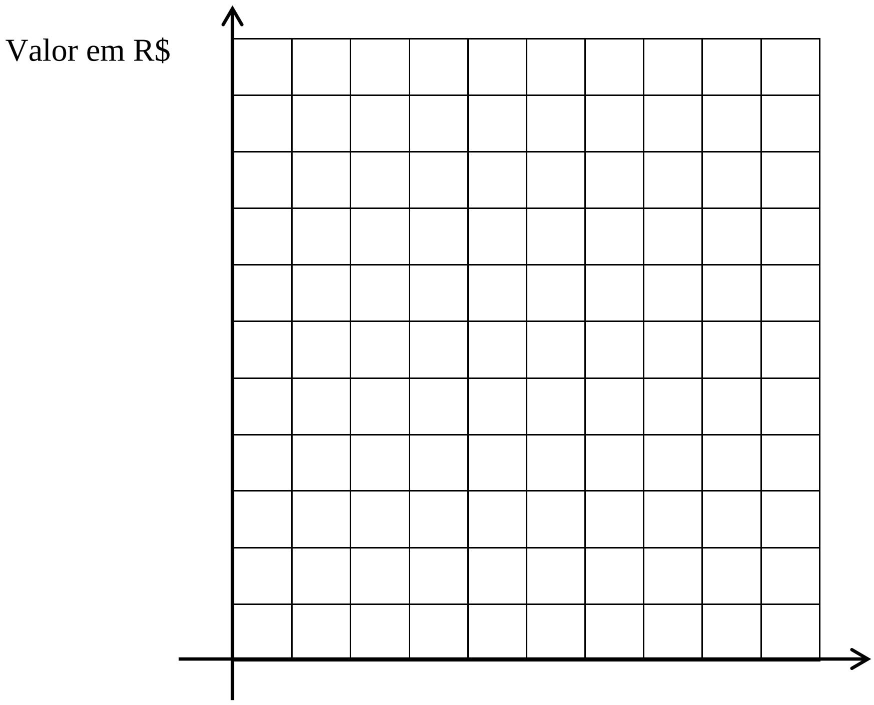
a) Mantendo esse padrão de crescimento, qual o valor do décimo quinto salário?

b) Qual é a expressão matemática usada para calcular o salário de cada mês?

c) Como seria a representação dessa situação em um gráfico, colocando o total das trufas vendidas no eixo “x” e o valor dos salários no eixo “y”?

d) Este gráfico representa uma função crescente ou decrescente? Por quê?

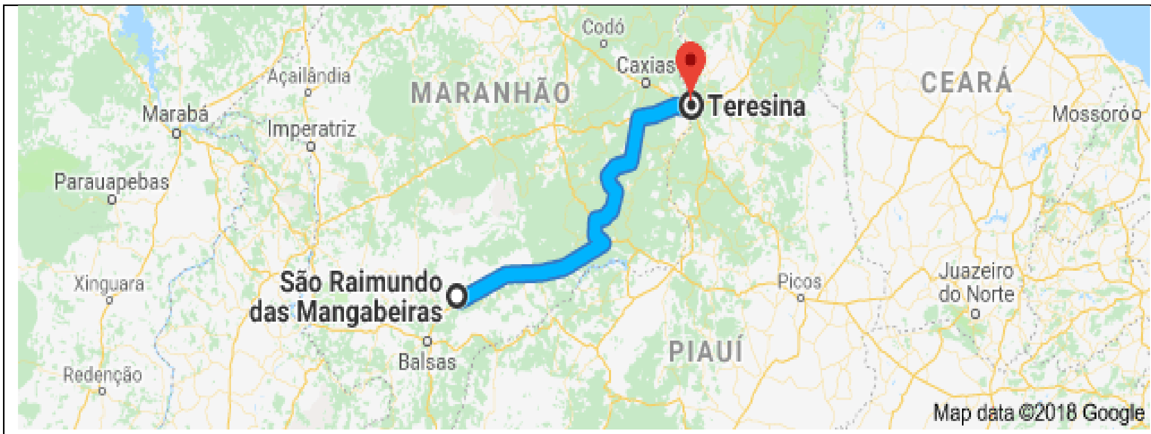
e) Qual é a taxa de crescimento ou decrescimento para este gráfico? Justifique sua resposta.



Atividade 05:

Objetivo: identificar que a função afim pode ser contextualizada com situações do dia a dia.

Carlos precisa pegar um ônibus, na cidade de São Raimundo das Mangabeiras – MA, para visitar alguns parentes em Teresina – PI. Com base no percurso apresentado no mapa abaixo, a distância aproximada é de 520 km.



Fonte: Google maps

Ao chegar à rodoviária, ele fica sabendo que o ônibus saíra há 5 minutos. No momento em que ele pega um táxi, o motorista o informa que o ônibus se encontra a uma distância de 4,5 quilômetros e que mantém uma velocidade média[1] de 15 m/s. Nessas condições, quais situações, envolvendo tempo e velocidade, podem ser elaboradas para mostrar ao taxista como alcançar o ônibus em no máximo 20 minutos? Justifique sua resposta.

Atividade 06:

Objetivo: analisar diferentes abordagens de função afim para situações do dia a dia.

Três amigos foram ao centro de sua cidade em um carro para fazer algumas compras. Para guardar o transporte, eles observaram três opções de estacionamentos:

ESTACIONAMENTO **A**	ESTACIONAMENTO **B**

[1] Nessa atividade foi considerada apenas a velocidade média dos veículos. Dessa forma, a velocidade Instantânea foi desprezada. De acordo com Yomamoto e Fuke (2017) a velocidade média compreende a razão entre o deslocamento do veículo e o tempo percorrido pelo mesmo. Os autores acrescentam que a velocidade instantânea é a velocidade média verificada em um tempo muito pequeno, praticamente zero, ou seja, é o valor da velocidade em um instante.

R$ 5,00 FIXO mais R$ 0,50 por HORA	R$ 1,50 Por HORA

ESTACIONAMENTO **C**
Para demora de no mínimo 3 horas
Pague R$ 2,00 por HORA e tenha um **DESCONTO** de R$ 4,00 sobre o valor total

Dessa forma, cada amigo optou por um estacionamento. Um defendia que o melhor preço seria o "A", outro defendia o "B" e o terceiro apostava que o "C" era mais barato.

Nessas condições:

a) Em cada caso, o que se pode afirmar sobre o valor a ser pago em relação a passagem das horas?

b) Qual dos três estacionamentos é o mais barato? Justifique sua resposta.

Resultados obtidos

A realização das tarefas à luz da investigação matemática foi enriquecedora, porque os estudantes conseguiram realizar as investigações as quais possibilitaram novos horizontes para a aprendizagem em sala de aula, bem como o surgimento de várias conjecturas e estratégias na resolução das situações propostas. Em todas as atividades foram elaboradas funções afins e construções de gráficos. Os discentes compreenderam a função do 1º grau como uma relação entre dois conjuntos de valores. As partes que compõem a referida função e o valor que determina a inclinação do gráfico foram socializadas entre os discentes. Assim, a variedade de conclusões que surgiam nas apresentações em grande grupo enriqueceu os conhecimentos dos alunos sobre função do 1º grau.

As tarefas foram realizadas com grupos 4 ou 5 alunos. O grupo A foi formado pelos componentes A1, A2, A3 e A4; o grupo B, pelos alunos B1, B2, B3 e B4; e assim por diante.

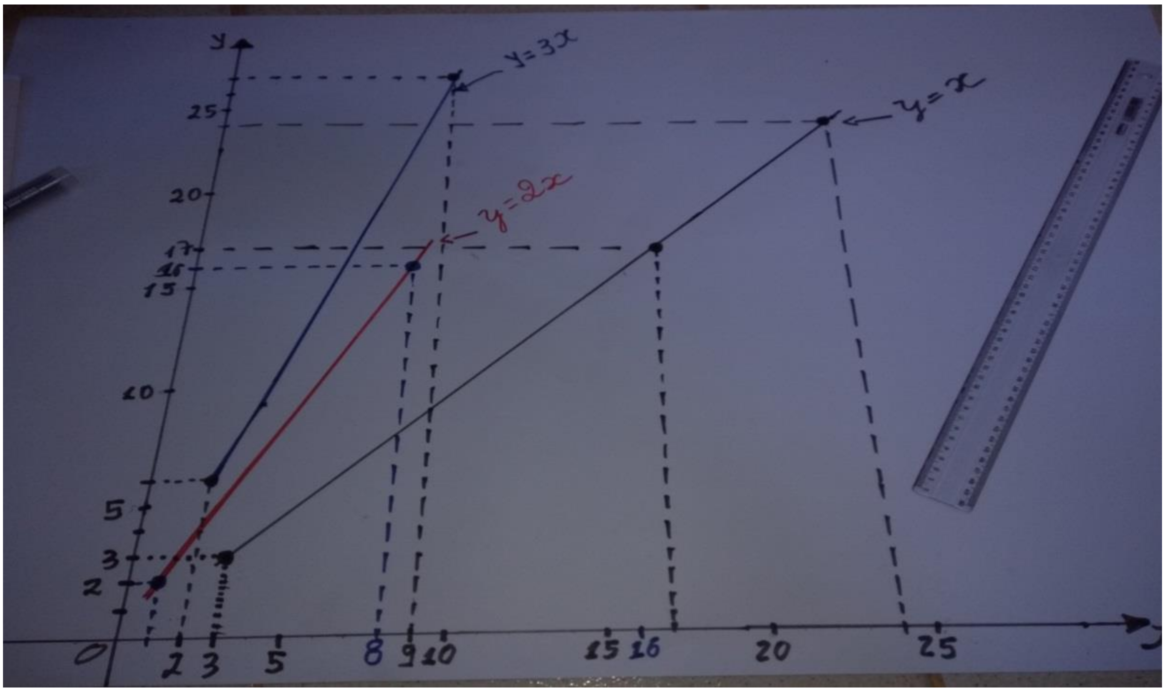
Nos diálogos em que o pesquisador participou, este aparece nomeado pela letra “P”. A seguir, são apresentadas as estratégias e resultados elaborados pelos alunos na primeira atividade.

Quadro 1: Estratégias formuladas na 1ª atividade investigativa.

- Estabeleceram uma relação entre as colunas para obter a função afim.
- Envolveram colunas e linhas do calendário com os eixos cartesianos para elaborar funções e gráficos.
- Identificaram a inclinação do gráfico por meio da observação do gráfico das funções $y = x$, $y = 2x$ e $y = 3x$.
- A estratégia de testar os valores de uma coluna e encontrar seus correspondentes em outra coluna evidenciou a ideia de pares ordenados.
- Utilizaram a regra de três simples para identificar as funções que guardam uma relação diretamente proporcional entre os valores de seus pares ordenados.

Para enfatizar a utilização das estratégias destacadas no quadro 1, apresentam-se alguns resultados das investigações realizadas pelos alunos. Na 1ª atividade os grupos relacionaram as colunas e linhas do calendário com os eixos cartesianos e conseguiram elaboras funções afins e os gráficos. A seguir elaborações do grupo E.

Figura 1: gráficos construídos pelo grupo E para a questão “c”.



Fonte: alunos do grupo E

O grupo que originou essa figura teve a estratégia de construir gráficos de funções cujo coeficiente angulares foi 1, 2, 3. Essa ideia foi fundamental para a compreensão alcançada, visto que à medida que esses números crescem, seus respectivos gráficos ficam com o ângulo de inclinação em relação ao eixo “x” maior. A seguir, o resumo da explicação do referido grupo.

Representante do grupo “E”: - *Como era pra ver a inclinação achamos melhor fazer os gráficos, fizemos dois e depois fizemos mais um só para confirmar. - Primeiro fizemos o gráfico da função $y = 2x$, depois o da função $y = x$. Notamos que a de $2x$ era mais alta. Depois fizemos uma com $3x$ e ela ficou na frente. – A inclinação depende do valor que acompanha “x”, pois quanto maior o valor, maior a inclinação.* Essa criação implementou, nas investigações, a ideia de coeficiente angular e o significado desse valor para o comportamento do gráfico.

O grupo “B” criou uma conclusão conveniente a respeito da função do 1º grau representando a relação diretamente proporcional. Uma das falas da discussão deste grupo: -

"*vamos colocar os valores das funções pra cá, fica melhor de ver*". Essa estratégia foi fundamental para observar os conjuntos inerentes a cada função. Os valores expostos em colunas a estratégia norteadora surgiu da fala "*pegando esse com esse dá 6 e esse com esse dá 6*". Segue a continuidade da discussão:

> B2: - Esse com esse dá... quanto é 4×15?
> B3: - É 60.
> B2: - Esses dois aqui dá 60? – Dá!
> Após uns instantes:
> B3: - pode ser uma regra de três né?
> B3: - Pode, se botar esse valor para ser "x", assim dá $2x$ e a outra dá 6. (o aluno se refere aos dois primeiros valores de "x" e aos dois primeiros de "y").
> B2: mas "x" tem que ser aqui, os primeiros são os de "x" os outros de "y".

Essa passagem destaca o que eles compreenderam na questão "b" sobre a relação entre conjuntos e funções. Percebeu-se que alguns alunos se destacaram no decorrer da discussão. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), muitas vezes um ou dois alunos podem tomar a liderança da investigação centrada em ideias que facilita o trabalho conjunto do grupo. Retomando o diálogo um dos alunos comentou: *A regra de três é uma relação direta (B3).*

Apoiados nessa informação, eles selecionaram as funções $y = 3x$ e $y = 5x$. Verifica-se, que a dedução deles está correta, pois toda função do 1º grau que possuir o coeficiente linear nulo possui os valores de "x" proporcionais aos de "y". Os componentes do grupo "B" foram os únicos que elaboraram uma justificativa convincente para a questão "d". Eles sinalizaram que os conhecimentos matemáticos podem ser construídos à medida que os alunos vão se envolvendo com a investigação.

A seguir (quadro 2) as estratégias formuladas na segunda atividade seguidas de alguns resultados.

Quadro 2: Estratégias verificadas na 2ª atividade investigativa.

- É melhor fazer de uma proposta por vez envolvendo os três aros.
- Para encontrar a melhor proposta de emprego, adotaram quantidades fixas de cada aro para os cálculos.

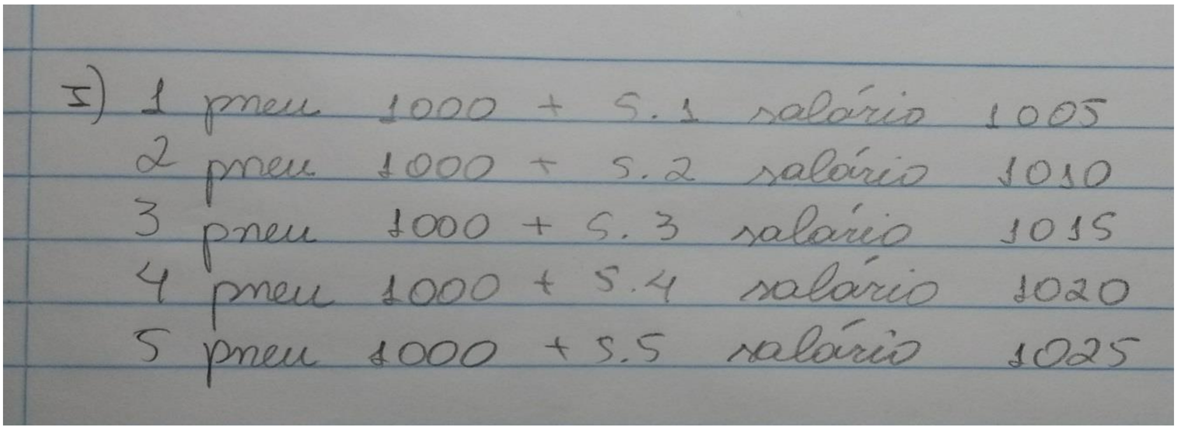
- Utilizar quantidades variadas de pneus para representar as vendas de uma mesma condição de emprego.
- Organizar os dados em planilhas, elaborando uma para cada proposta de emprego.
- Utilizaram os dados dispostos em colunas para visualizarem o modelo da função.

Diante das estratégias do quadro 2, algumas soluções dos grupos para exemplificar como elas foram implementadas. Na 2ª atividade, os grupos criaram a função $y = 1000 + 5x$ correspondente à proposta de emprego (I). Para as ofertas (II) e (III), apenas o grupo "C" conseguiu efetivar funções afins. A discussão seguinte demonstra como transcorreu a ideia para a proposta (I):

> C4: - Vamos fazer logo essa depois faz as outras.
> C2: - Porque 3?
> C4: - É a quantidade de pneus, se tem os três tipos né.
> C2: - Mas pode vender um pneu, não é obrigado a vender de tudo.
> C4: - É mesmo. – Se vender 10 pneus só vai ter 50 reais de lucro.
> C5: - Mas têm os 1000 reais.
> C5: - É.
> C1: - Será que está certo? Como é que vou colocar aqui?
> C3: - Pior que tem de fazer um bocado de vez, né?
> C4: - É só escrever 1000 mais 5 vezes o valor, ô a quantidade.
> C5: - Vamos fazer logo um bocado de vez usando o primeiro e os outros a mesma coisa.
> C1: - Pior que o tempo está passando (era o aluno que estava fazendo as anotações no caderno).
> C4: - Como é mesmo?
> C5: - Faz uma quantidade para a primeira depois para a segunda e a mesma coisa na terceira. – Entendeu?
> C4: - E as quantidades? – Faz até os 50 reais de lucro, né?
> C1: - Não é lucro, é o salário.
> C5: - Pois é, faz primeiro com um depois com dois e 3, quando completar faz com as outras e ver a melhor.
> C5: - Eu vou fazer e tu calculas (nesse momento essa aluna pede o caderno para fazer os registros).
> C1: - Ah, melhor.
> C4: - Essa é só de cabeça.

Nesse diálogo é possível notar o envolvimento dos alunos por meio de uma discussão cooperativa na busca de estratégia para investigação da atividade. A sugestão "*Vamos fazer logo essa depois faz as outras*" foi integrada à colocação "*faz até os 50 reais de lucro"* gerando a conjectura: "*pois é, faz primeiro com um depois com dois e três, quando completar faz com as outras e vê a melhor*". Essa ideia foi significativa para o desempenho do grupo como pode ser notado a partir dos escritos da figura 2.

Figura 2: mostra os primeiros registos do grupo C.



Fonte: alunos do grupo C

Quando a aluna iniciou a parte mostrada na figura 2, os demais ficaram em silêncio até um dos componentes do grupo enfatizar que para os outros casos eles poderiam utilizar uma planilha. Assim, decidiram elaborar uma planilha para cada proposta de emprego. Essa estratégia favoreceu a visualização dos dados como, por exemplo, a comparação de valores ocupantes de uma mesma linha.

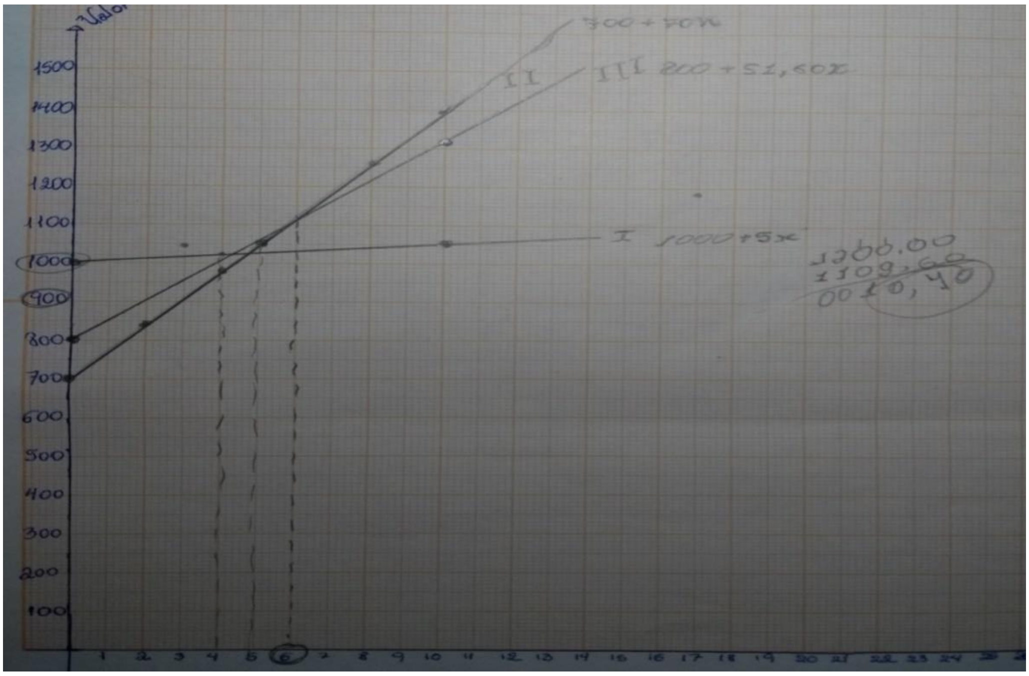
Após verificar os resultados do grupo no caderno, o docente perguntou: "que outras conclusões vocês podem tirar dessas planilhas"? Identifiquei alguns posicionamentos proativos como, por exemplo: "*a gente pode comparar a primeira linha com a última, nas porcentagens basta multiplicar por 10 e somar com o fixo que dá o salário*". Logo em seguida perguntei: "e na centésima linha, qual vai ser o salário"? A seguir a continuidade do diálogo:

> C5: - O senhor está dizendo se vender 100, né?
> P: - Sim!
> C5: - É só multiplicar por 100.

> P: - Multiplicar o que?
> C5: - Multiplica as porcentagens, dá 1760, aqui dá 1800 e nessa dá 1600, a vírgula vai duas casas pra cá.

Após a resolução do grupo, solicitou-se que fizessem a elaboração das funções e os gráficos. Depois de um momento de discussão, uns disseram ser possível criar as funções para os casos (II) e (III) e outros salientaram que não. Eles não observaram que bastava verificar a variação dos salários para obter o número que iria acompanhar "x" em seus modelos. A ideia de coeficiente angular, que começou na atividade anterior precisava ser amadurecida. Eles decidiram seguir a formação $y = 1000 + 5x$, comparando com a planilha. Desse modo, registraram no caderno: $y = 700 + 200 \cdot x + 900 \cdot x + 400x$, na sequência, $y = 700 + 900x$. Com esse plano eles encontraram o valor 900 e compararam com a variação do salário (70). Notaram que o modelo encontrado não seguiu o mesmo formato da primeira função. Mas, insistiram na ideia e incluíram a porcentagem na expressão ($y = 700 + 220 \cdot 10\%\, x + 300 \cdot 8\%\, x + 400 \cdot 6\%\, x$). Dessa forma, encontraram a função $y = 700 + 70x$. Nesse momento, eles perceberam que estavam corretos, porque notaram que o "70" da variação dos salários apareceu na função acompanhando "x". Seguiram essa ideia e encontraram $800 + 51{,}60x$ para o (III) caso. A seguir, a figura 3 mostra como ficaram os gráficos.

Figura 3: funções criadas pelo grupo C acompanhadas dos gráficos.



Fonte: alunos do grupo C

O quadro 3 destaca as estratégias formuladas na terceira atividade.

Quadro 3: Estratégias verificadas na 3ª atividade investigativa.

- Utilização da regra de três simples.
- Manipularam os valores presentes nas colunas do quadro para elaborar funções.
- Utilizaram valores presentes nas colunas correspondentes ao eixo “y” para justificar o crescimento dos gráficos.
- Encontraram modelos de função com base no enunciado da atividade e utilizar os lavores do quadro para validar a função.
- Aplicaram as expressões criadas para encontrar soluções para a questão.
- Ampliaram a quantidade de linhas do quadro para identificar valores que ajudariam nas justificativas da questão.
- Para chegar a uma função partiram do modelo $y = ax + b$ e foram fazendo adaptações e testando, sendo que os resultados eram comparados com os valores da coluna dos salários.

A terceira tarefa girou entorno do quadro (Figura 4) e das estratégias expostas no quadro 3. O grupo que colocou na coluna (adicional) o valor 0,5 teve menos dificuldade para elaborar a função. Eles procuravam alternativas com base no texto “um adicional de 50% sobre o total de trufas”. Essa ideia os levou à questão “b”, como declara a fala de um aluno:

"*a gente faz a expressão e já responde a "b" também, porque é só multiplicar o 0,5 e soma com o fixo"*. A partir dessa conjectura, eles preencheram o quadro (Figura 4) utilizando a expressão $0{,}5x + 200$. Já o grupo C a presentou o quadro como mostra a figura seguinte.

Figura 4: elaboração do grupo C na atividade 3.

Mês	Valor fixo	Adicional	Total de trufas	Salários
1º	200,00	200,00	400) 300	400,00
2º	200,00	350,00	700) 300	550,00
3º	200,00	500,00	1000	700,00
4º	200,00	650,00	1.300	850,00

Fonte: alunos do grupo B

Os valores que aparecem no quadro da figura 4 foram colocados da seguinte forma: primeiro, os alunos preencheram as colunas “valor fixo” e “total de trufas”. Para encontrar o valor adicional que é de 50% sobre a quantidade de trufas vendidas no mês, a estratégia utilizada foi a regra de três simples. Para encontrar a quantia de trufas para o 15º mês, os alunos expuseram o seguinte raciocínio: “*professor aqui está aumentando de 300 em 300, então a gente multiplicou 300 vezes 14 e deu os 4200, depois foi só somar com o primeiro valor* e deu 4600”. Observou-se que a estratégia utilizada para encontrar esse valor poderia ter sido usada para determinar o décimo quinto salário (o salário aumenta de R$ 150,00 em R$ 150,00, então $(150 \cdot 14) + 400 = 2500$). Eles estavam focados na atividade, mas viam a questão somente em torno dos valores presentes no quadro. Dessa maneira, elaboraram a função $y = 200 + x$. Percebeu-se que os alunos procuravam utilizar apenas duas colunas na busca da função. Dessa forma, não estavam conseguindo conjecturar no sentido de criar um termo que representasse o adicional envolvendo a porcentagem (50%) e a coluna do total das trufas.

Em relação aos gráficos, eles desenharam as retas, não compreenderam que deveria ser uma sequência de pontos alinhados. Para justificar o crescente ou decrescente da função, os alunos preferiram o quadro ao gráfico. Eles afirmaram que as funções eram tiradas do quadro e, nesta, os valores sempre cresciam, então as funções eram crescentes. Eles contemplaram esse entendimento ao justificar que o número de trufas era cada vez maior e, consequentemente, os salários também. Em relação a alternativa “e”, concluíram que a taxa de crescimento da função é 150, porque o salário aumenta de 150 em 150.

O quadro 4 destaca as estratégias apresentadas pelos grupos para a 4ª tarefa proposta.

Quadro 4: Estratégias verificadas na 3ª atividade investigativa.

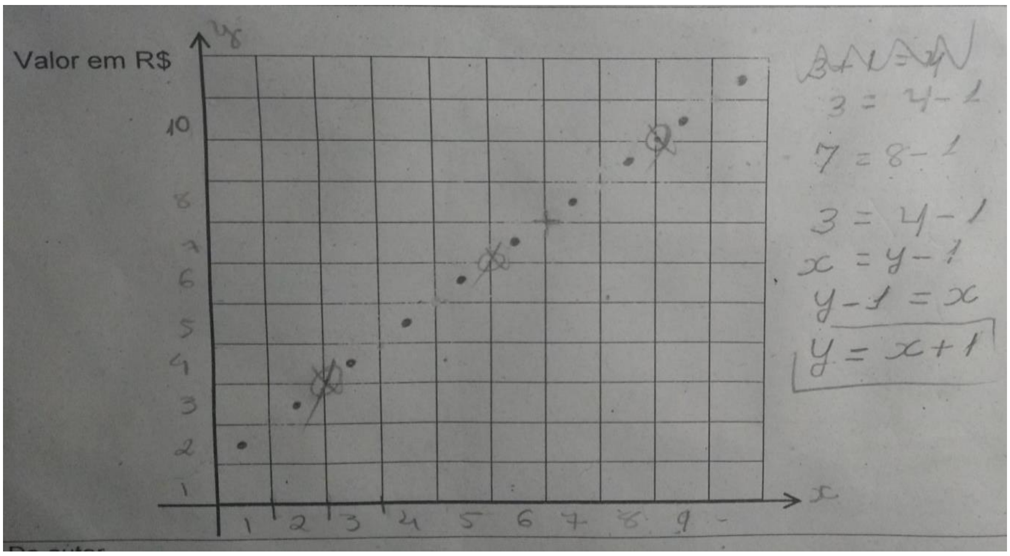
- Utilizar o modelo da função encontrada na busca de justificativas para a questão.
- Manipularam das coordenadas cartesianas presentes no xadrezado para elaborar a função $y = 1 + x$.
- Organizaram os cálculos em um quadro para facilitar na visualização das justificativas.
- Utilizaram a regra de três simples para auxiliar nos cálculos dos itens “c” e “d”.

Nessa parte, são apresentadas algumas soluções dos alunos para mostrar com as estratégias apresentadas no quadro 4 foram geradas e utilizadas. Para elaborar a função solicitada na 4ª atividade, o grupo “B” utilizou o xadrezado e a disposição das coordenadas (1, 2), (2, 3) e (3, 4). Com os números que formavam cada um desses pontos fizeram expressões numéricas simulando ser expressão algébrica. O diálogo seguinte mostra como isso ocorreu.

> B4: - Olha só! $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ e $1 + 3 = 4$. O “1” vai ser o fixo.
> B2: - Ah, é mesmo o 1 vai ser o fixo.
> B4: - Fica 1 mais a quantidade de copos de suco vendidos.
> B1: - Então é $y = 1 + x$

Com essa estratégia conseguiram chegar ao modelo em poucos minutos de discussão. É possível perceber que procuraram um número fixo que somado ao primeiro valor (x) resultava no segundo (y). As demais alternativas da tarefa foram investigadas com o apoio dessa função. Para justificar o item “a” o grupo “E” foi o único que colocou os pontos no centro de cada quadrado. Concluíram para a alternativa “a” que só podia haver 10 pontos, porque só havia possibilidade de vender os copos por inteiro. A figura 5 expõe a resposta do grupo E.

Figura 5: mostra como o grupo E visualizou o plano cartesiano no xadrezado.



Fonte: alunos do grupo E

E possível perceber na figura 5 a disposição dos 10 pontos possíveis para o xadrezado de acordo com a atividade. O lado direito da figura 5 também mostra a finalização de uma ideia que levou a elaboração da função. Assim, eles concluíram que a função seria $y = x + 1$, como mostra na figura 5. Para tanto, eles utilizaram a ideia de igualar os valores montando uma expressão numérica.

Destaca-se ainda que o referido grupo utilizou o recurso da regra de três simples para encontrar os valores referentes às compras por etapas, ou seja, no item “c” uma etapa está para R$ 2,00, dessa forma encontraram R$ 100,00. Na alternativa “d”, da mesma forma, uma etapa correspondia a R$ 3,00, concluíram que as 10 seria R$ 30,00. Já a função que criaram foi utilizada para calcular o valor referente à compra dos totais dos copos envolvidos. Para o item “c” o valor resultante foi R$ 51,00 e no “d” foi R$ 21,00. Em seguida, fizeram a comparação entre os valores de cada alternativa para elaborar as justificativas.

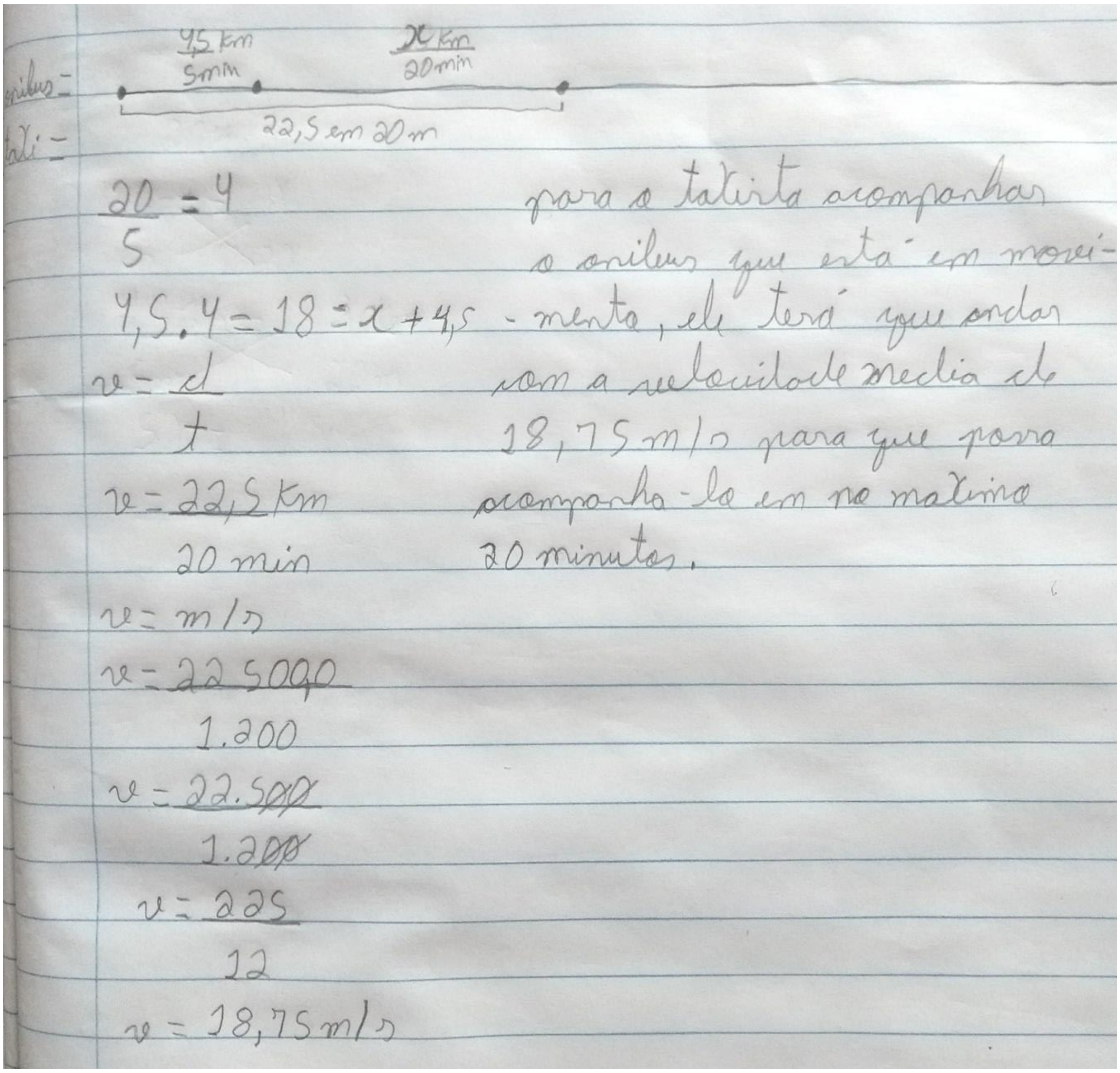
O quadro seguinte destaca as estratégias elaboradas na 5ª tarefa.

Quadro 5: Estratégias verificadas na 5ª atividade investigativa.

- Trabalharam com a regra de três simples para encontrar valores envolvendo as grandezas de comprimento e tempo.
- Para calcular a velocidade utilizaram a relação distância pelo tempo.
- Esboçou um desenho para a situação problemática que tornou mais fácil a investigação.
- Fizeram uma síntese dos dados da atividade para facilitar na visualização das ações.
- Relacionaram distância e velocidade para determinar a velocidade que o táxi deveria desenvolver.
- Tabularam as distâncias percorridas pelo táxi e pelo ônibus para velocidades predeterminadas e depois identificaram os instantes em que essas distâncias são iguais.

As estratégias formuladas na 5ª atividade foram significativas para a elaboração das justificativas, pois nessa tarefa os grupos tiveram dificuldades para iniciar os primeiros passos. O grupo “C” conseguiu compreender a atividade depois que esboçou um desenho para a situação problemática. Essa ideia facilitou a visualização do que precisavam planejar. A figura 6 apresenta as elaborações que o grupo registrou no caderno.

Figura 6: anotações do grupo C.



Fonte: alunos do grupo C

Nota-se na figura 6 que os alunos relacionaram os dados da atividade com os comprimentos apropriados no desenho que construíram. Percebeu-se nas discussões que por meio dessa estratégia os discentes ficaram mais confiantes para colocar ideias. É possível observar na figura 6 que, por meio da regra de três, eles encontraram o valor “18” que corresponde à distância deslocada pelo ônibus em 20 minutos. Juntaram esse valor com 4,5 e calcularam o comprimento que o táxi deveria deslocar em 20 minutos. Notou-se também que somente no momento em que os alunos foram calcular a velocidade do táxi é que notaram que deveriam fazer as transformações de quilômetros para metros e minutos para segundos. Já o grupo “D” percebeu que antes de fazer as suas demonstrações, deveriam transformar os dados para as mesmas unidades de medidas que se encontrava a velocidade do ônibus. Os componentes desse grupo também decidiram usar a regra de três simples depois que fizeram uma síntese dos dados da atividade.

Os grupos “C” e “D” levaram mais de 30 minutos para compreender como deveriam desenvolver seus trabalhos. Destaca-se que, avançaram mais rápido quando o “C” envolveu os dados da atividade em um desenho o qual simulou a pista onde os transportes se deslocavam e discutiam a questão, visualizando esse esquema; e o “D” extraiu os dados do texto e fez um pequeno resumo. Observou-se que foram estratégias significativas, pois facilitaram na tomada de decisões para a presente atividade. Dessa forma, os discentes não perdiam o foco do que já haviam pensado e não precisavam mudar a atenção com novas leituras do enunciado.

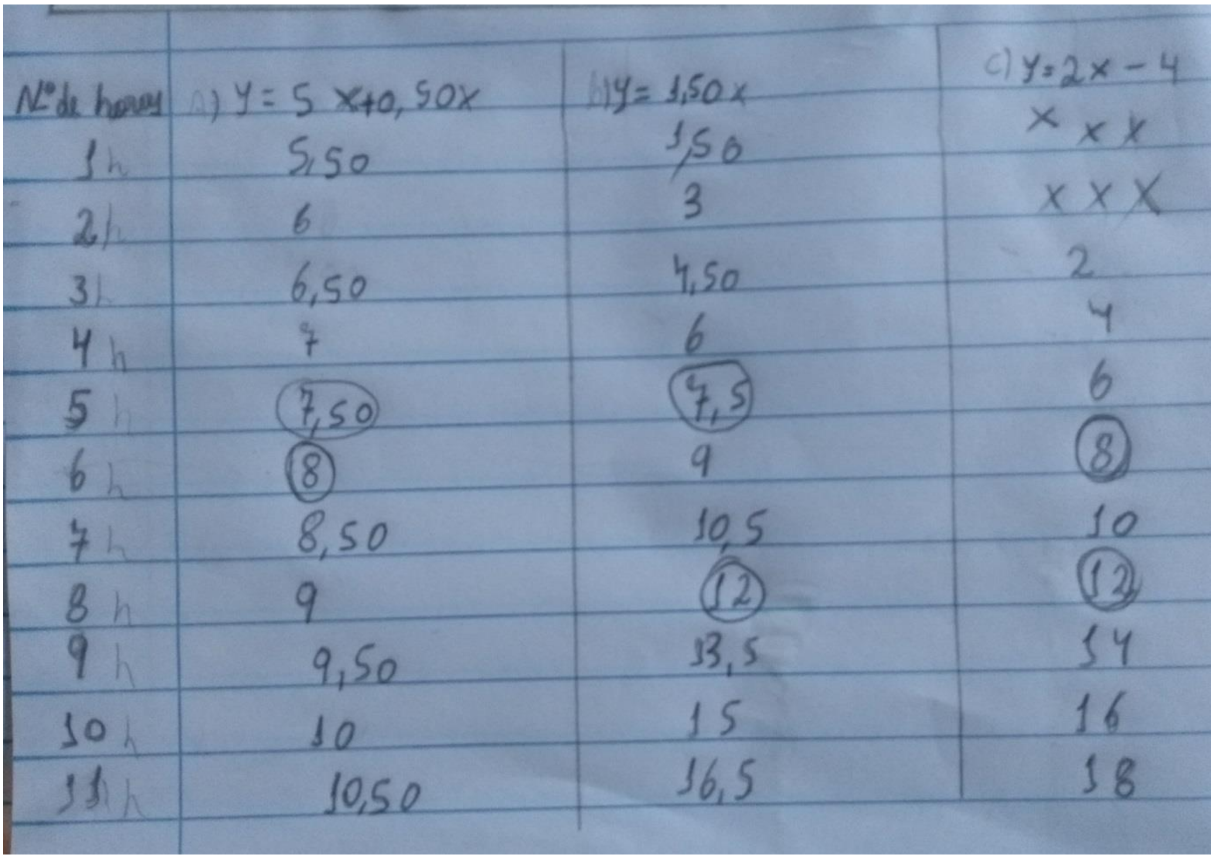
A seguir, as estratégias elaboradas pelos grupos na 6ª atividade proposta.

Quadro 6: Estratégias verificadas na 6ª atividade investigativa.

- Elaborar uma função para cada caso e utilizar essas expressões para encontrar as justificativas.
- Para comparar dos resultados, fizeram simulações com as mesmas quantidades de horas nas três funções.
- Para verificar qual é o valor, em reais, mais alto em três estacionamentos à medida que as horas passam utilizaram gráficos das funções, de colunas e um quadro.
- Organizaram os cálculos dos três casos em um quadro visava à comparação entre os resultados.

Na 6ª atividade, os discentes não tiveram dificuldades em elaborar as funções relativas a cada tipo de estacionamento. A opção do estacionamento “A” expõe seu preço com a seguinte mensagem: R$ 5,00 fixo mais R$ 0,50 por hora. Nesse formato, os estudantes não tiveram dificuldades em criar as funções $y = 5 + 0{,}5x$, $y = 1{,}5x$ e $y = 2x - 4$ respectivamente aos estacionamentos A, B e C. Durante as discussões do grupo D na busca de estratégias para o uso dessas funções, tendo em vista a apresentação final, surgiu a fala "*como a gente vai fazer para as três ao mesmo tempo é só colocar tudo junto porque fica melhor para a apresentação*". A figura 7 apresenta alguns registros do grupo C.

Figura 7: anotações do grupo C.

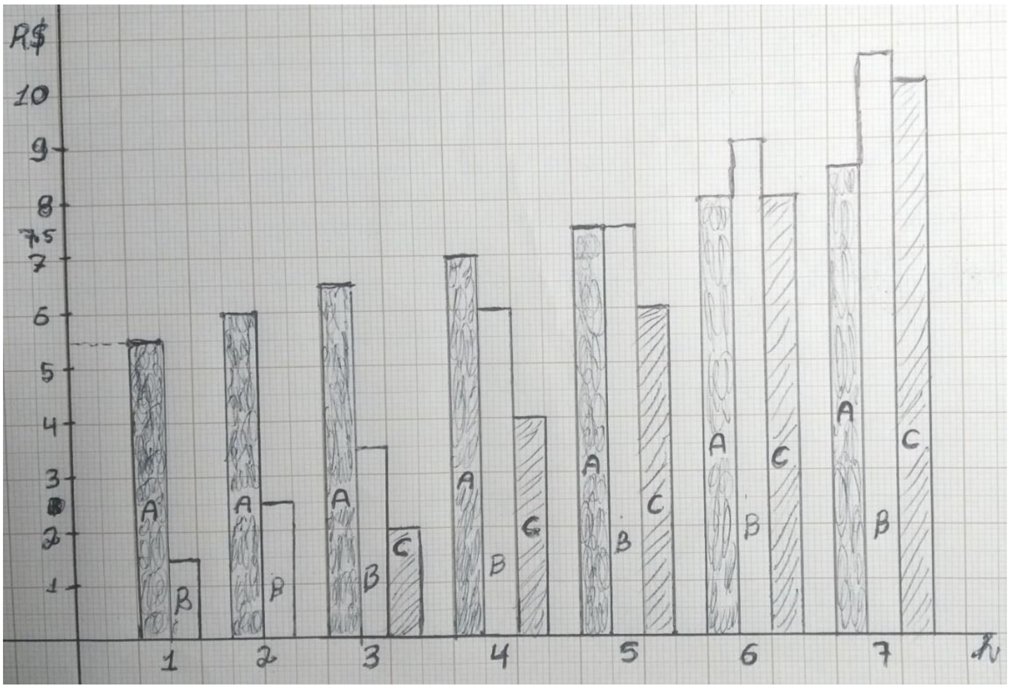


Nº de horas	a) y = 5 x+0,50x	b) y= 1,50 x	c) y=2x − 4
1h	5,50	1,50	x x x
2h	6	3	x x x
3h	6,50	4,50	2
4h	7	6	4
5h	7,50	7,5	6
6h	8	9	8
7h	8,50	10,5	10
8h	9	12	12
9h	9,50	13,5	14
10h	10	15	16
11h	10,50	16,5	18

Fonte: alunos do grupo C

É possível perceber na figura 7 que a maioria dos dados que foram expostos visava aos resultados e a comparação entre eles. Dessa maneira puderam destacar os preços que seriam iguais para suas respectivas horas. Quando desenharam os gráficos no mesmo plano, os discentes perceberam que esses valores correspondiam às ordenadas dos pontos de intersecção das retas. Os alunos também comentaram sobre o gráfico construído pelo grupo E (figura 8), afirmando que os valores destacados correspondiam às colunas que possuíam as mesmas alturas. Diante dos dados o grupo “C” registrou em seu caderno que “*a partir de 7 horas de duração, a opção A passa a ser sempre a mais vantajosa. Porque o valor pago por hora é menor que o dos outros*”. Na figura 8, verifica-se o gráfico elaborado pelo grupo E.

Figura 8: realça o gráfico feito pelo grupo E.



Fonte: alunos do grupo E

Os alunos acharam que os gráficos apresentados na figura 8 tornaram as informações mais visíveis que os gráficos das funções construídas no plano cartesiano. É possível perceber na figura 8 qual a opção mais vantajosa, pois basta escolher a quantidade de horas que deseja estacionar e verificar qual é a coluna mais baixa. De acordo com as falas dos componentes do grupo E, a ideia de trabalharem com gráficos de colunas nasceu da necessidade de verificar qual é o valor, em reais, mais alto em três estacionamentos à medida que as horas passam.

Diante dos resultados obtidos nas seis tarefas propostas, constatou-se que é importante o docente tomar conhecimentos sobre a metodologia da investigação matemática e sobre trabalhos em grupos colaborativos para orientar os alunos durante a intervenção. Percebeu-se que quando os discentes aceitam a investigação compreendendo o que devem fazer e como fazer, os resultados podem surgir nas primeiras discussões. Verificou-se que a ideia de mostrar os registros dos alunos na lousa digital incentivou os grupos a organizar os registros no caderno.

Observou-se que é importante comentar com os grupos que em atividades investigativas não existem respostas prontas. Destaca-se também a importância de elogios dados pelo docente às elaborações dos grupos que passaram a ter confiança e autoestima para que produzissem sem medo de errar. Verificou-se que os modos colaborativos como os alunos se comportavam provocava o envolvimento de todos os componentes do grupo. A maneira respeitosa como os alunos recebiam o posicionamento dos colegas certamente tornou o ambiente mais propício às discussões. Portanto, verificou-se que a investigação matemática é uma metodologia que deve/pode ser implementada em sala de aula, pois possibilita autonomia ao aluno e os leva a construir e empreender conhecimentos.

Referências

AURO, H. SKOVSMOSE, Ole. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BONALS, J. **O trabalho em pequenos grupos em sala de aula.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª Versão Revista, Ministério da Educação. Brasília, 2016. p. 559 – 581. Disponível em: < http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf.>. Acesso em: 15 nov. 2017.

______. Ministério da Educação. PNLD 2018: **Matemática – Guia de livros didáticos** – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: MEC/ SEB, 2017. 122 p. Disponível em: < http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/ >. Acesso em 28 jul. 2017.

BRUNHEIRA, L.; FONSECA, H. **Investigar na aula de Matemática**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 35, p. 16-18, 1995. Disponível em: < http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/677/298 >. Acesso em: 23 mai. 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas**: Autores Associados, 2006.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 1.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: GTI/APM, 2005. P. 11-34.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SMOLE, K. C. Stocco; CENTURIÓN, M. Ramos e DINIZ, M. Ignez de S. Vieira. In: DRUCK, Suely (Org.). **A interpretação gráfica e o ensino de funções**. Brasília: MEC, 2004. p. 84.

SVINICKI, Marilla; MCKEACHIE, Wlbert J. **Dicas de Ensino – estratégias, pesquisa e teoria para professores universitários**. Tradução Ez2translate; revisão técnica Luiz Guilherme Brom. 13. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

YOMAMOTO, Kazuhito; FUKE, L. Felipe. **Física para o ensino médio**, vol. 1: mecânica. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.