

Série Guias Didáticos de Matemática

46

A Modelagem Matemática na
Perspectiva Sociocrítica e os
Registros de Representação

Semiótica na Formação do Conceito de Número Racional

Silvana Cocco Dalvi
Oscar Luiz Teixeira de Rezende
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Editora Ifes
2017



Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação Em Ciências e Matemática

Silvana Cocco Dalvi
Oscar Luiz Teixeira de Rezende
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação
semiótica na formação do conceito de número racional

Série Guias Didáticos de Matemática - n° 46

Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo, 2018

Copyright @ 2018 by Instituto Federal do Espírito Santo Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº. 1.825 de 20 de dezembro de 1907. O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Observação:
Material didático público para livre reprodução.
Material bibliográfico eletrônico e impresso.

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

N244e Dalvi, Silvana Cocco.

A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação semiótica na formação do conceito de número racional /Silvana Cocco Dalvi, Oscar Luiz Teixeira de Rezende, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza. - Vitória: Instituto Federal de Educação, 40 p. : il. ; 30 cm (Série guias didáticos de matemática ; 46)

ISBN: 978-85-8263-282-6

1. Educação matemática crítica. 2. Modelagem. 3. Modelo de cooperação investigativo. 4. Representação semiótica. 5. Formação de conceitos. I. Rezende, Oscar Luiz Teixeira de. II Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. III. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Título.

CDD: 510.7

REALIZAÇÃO



Editora do IFES

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564 E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara
Sala do Programa Educimat
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

Comissão Científica

Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende, D. Sc - IFES
Dr.^a Leônia Gabardo Negrelli, D. Ed - UTFP
Dr. Luciano Lessa Lorenzoni, D. Sc IFES
Dr.^a Maria Alice Veiga Ferreira de Souza,
D. Ed - IFES

Coordenação Editorial

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Sidnei Quezada Meireles Leite

Revisão

Silvana Cocco Dalvi
Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende

Capa e Editoração Eletrônica

Editoração Eletrônica

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor/IFES)

Produção e Divulgação Programa

Educimat, IFES



**Instituto Federal do Espírito
Santo**

Jadir Jose Pella
Reitor

Adriana Piontkovsky Barcellos
Pró-Reitor de Ensino

Andre Romero da Silva
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

Renato Tannure Rotta de Almeida
Pró-Reitor de Extensão e Produção

Lezi José Ferreira
Pró-Reitor de Administração e Orçamento

Ademar Manoel Stange
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional

Hudson Luiz Côgo
Diretor Geral do Campus Vitória – Ifes

Márcio Almeida Có
Diretor de Ensino

Márcia Regina Pereira Lima
Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

Christian Mariani Lucas dos Santos
Diretoria de Extensão

Roseni da Costa Silva Pratti
Diretor de Administração

MINICURRÍCULO DOS AUTORES



SILVANA COCCO DALVI é Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo- IFES atuando na linha de pesquisa da Modelagem Matemática. Tem graduação em matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Alegre, especialização lato-sensu em Matemática pela Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herd” e especialização em Educação Infantil pela Universidade Castelo Branco.

Atualmente é professora do ensino fundamental na Prefeitura Municipal de Castelo, Espírito Santo. Tem experiência com a formação continuada de professores.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7484846967719596>

Email: silvanaej@hotmail.com



OSCAR LUIZ TEIXEIRA DE REZENDE é Doutor em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal de Viçosa, Mestre em Informática pela Universidade Federal do Espírito Santo, Bacharel e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa. Atualmente é professor do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória.

Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Discreta, Programação Linear, Lógica Fuzzy e Estatística, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem Matemática na Educação, Otimização, Educação Estatística e Educação Matemática. Também atua no EDUCIMAT - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do IFES

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1085387566931992>

Email: oscarltr@gmail.com



MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo-UFES, mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo-UFES e doutorado em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Pós-doutorado em Resolução de Problemas de Matemática na Universidade de Lisboa-Portugal. Atualmente é professora de Matemática das graduações e pós-graduações do Instituto Federal do Espírito Santo- Ifes, Coordenadora Geral de Pesquisa e Extensão do Cefor-Reitoria-Ifes, docente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT) do Ifes e da Pós-Graduação em Gestão Pública da UFES. Tem experiência na área de Matemática e na Educação Matemática.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2876710785262591>

Email: alicevfs@gmail.com

APRESENTAÇÃO

Quando escolhemos uma proposta educacional acreditamos que com ela alcançaremos com sucesso nossos objetivos. Junto com essa escolha vem nossos propósitos educacionais de contribuir com a aprendizagem dos alunos no que tange aos conteúdos específicos da matemática, mas também o de formar sujeitos críticos e reflexivos, capazes de exercerem sua cidadania minimizando os contrastes sociais em que vivemos.

Esse guia didático é fruto de nossa pesquisa de mestrado desenvolvida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática- Educimat, no período de 2015 a 2018 com alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola localizada em Castelo, Espírito Santo.

Nosso objetivo é que ao discriminar essa experiência vivenciada na sala de aula possamos contribuir para que reflita sobre a própria prática pedagógica encontrando subsídios para desenvolver uma prática pedagógica de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica.

Organizamos o guia de forma articulada entre a teoria e a prática, pois entendemos que elas caminham juntas no desenvolvimento profissional docente. Olhamos para a sala de aula numa vertente didática com foco no ambiente de aprendizagem e numa vertente cognitiva com destaque para a compreensão da formação do conceito de número racional.

Abordaremos nesse guia a parte teórica que sustenta as concepções didática e cognitiva. Em seguida, discriminaremos o desenvolvimento da prática pedagógica da modelagem na perspectiva sociocrítica tendo como tema o problema da escassez de água em Castelo.

Esperamos que esse guia seja um recurso didático eficaz nas mãos dos professores cuja desenvolvimento profissional é constante. A reflexão da prática docente leva a sua transformação possibilitando aos professores repensarem seus conceitos sobre o ensino da matemática na atualidade.

Boa leitura!

Os autores

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	10
2.REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1 Cenários para investigação	12
2.2 Modelagem matemática na perspectiva sociocrítica	15
2.3 Modelo de cooperação investigativa – modelo-CI	18
2.4 Teoria dos registros de representação semiótica.....	21
3 DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE MODELAGEM	24
3.1 Primeira aula - Apresentação da reportagem.....	24
3.2 Segunda aula – Discussões a partir das informações apresentadas na reportagem ..	24
3.2.1 Os alunos são “convidados” a realizarem a investigação com o olhar da matemática	26
3.3 Terceira aula - Os alunos socializam os procedimentos adotados para fazer as medições do consumo diário de água	27
3.4 Quarta aula - Os alunos realizam atividades envolvendo a teoria dos registros semióticos.....	30
3.5 Quinta aula - Continuação das atividades envolvendo a teoria dos registros de representação semiótica.....	34
3.6 Sexta aula – Interpretação do modelo construído	38
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
REFERÊNCIAS	

1.INTRODUÇÃO

Às vezes nos perguntamos porquê temos que repensar constantemente a nossa prática pedagógica. Porque as coisas do mundo não são estáticas, a tecnologia desenvolve-se e nos influencia cada vez mais, a sociedade se transforma, o modo de produção e o jeito de viver das pessoas se modificam ao longo do tempo. Assim também é o trabalho docente.

Skovsmose (2013) ao refletir sobre a presença da matemática na sociedade tecnológica em que vivemos explica que para que ocorra uma educação matemática crítica é necessário desenvolver três conheceres matemáticos que possuem natureza distintas a saber;

- 1) *Conhecer matemático*, que se refere à competência normalmente entendida como habilidades matemáticas, incluindo as competências na reprodução de teoremas e provas, bem como ao domínio de uma variedade de algoritmos [...].
- 2) *Conhecer tecnológico*, que se refere às habilidades em aplicar a matemática e às competências na construção dos modelos [...]. De forma geral, é o entendimento necessário para usar uma ferramenta tecnológica para alcançar alguns objetivos tecnológicos.
- 3) *Conhecer reflexivo*, que se refere à competência de refletir sobre o uso da matemática e avaliá-lo. Reflexões têm a ver com avaliações das consequências do empreendimento tecnológico (SKOVSMOSE, 2013, p. 115-116):

O conhecer matemático é suporte para o conhecer tecnológico e o conhecer reflexivo. O conhecer tecnológico utiliza-se do conhecer matemático e outros para a construção de um modelo que resolva um problema específico, mas não viabiliza uma postura reflexiva da própria atuação na sociedade. O conhecer reflexivo pode ser considerado um metaconhecimento que precisa dos conhecimentos matemático e tecnológico, para cumprir a sua função de desenvolver a criticidade nos estudantes. Seu objeto de reflexão é o próprio modelo matemático e suas correlações.

Entendemos que numa atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica, o conhecer tecnológico utiliza-se do conhecer matemático e outros para a construção de um modelo que represente o problema em questão e para o qual encontre uma possível solução, sem, no entanto, trazer à luz uma postura reflexiva dos impactos da utilização desse modelo. O conhecer reflexivo, ao se apoiar nos conhecimentos matemático e tecnológico, contribui para que os alunos tenham condições de avaliar os impactos de suas escolhas na sociedade, podendo emergir do modelo matemático e das suas relações com a realidade.

Nossa pesquisa foi ancorada nos pressupostos da educação matemática crítica intitulada: **A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação**

semiótica na formação do conceito de número racional. O cenário investigativo (Skovsmose, 2008) favoreceu a prática da modelagem na perspectiva sociocrítica (Barbosa, 2003) nos possibilitando olhar para a sala de aula em duas vertentes distintas, mas que se articulam no processo ensino e aprendizagem de matemática a qual definimos como vertentes didática e cognitiva

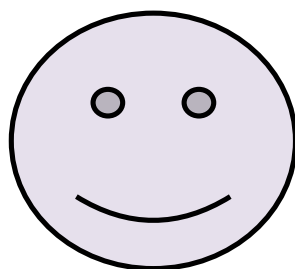
Na vertente didática nosso olhar recai sobre a importância da comunicação entre professor e alunos influenciando na aprendizagem. Nos embasamos no modelo de cooperação investigativa, Modelo, CI elaborado por Alro e Skovsmose (2010) que trata do diálogo como um processo investigativo de perspectivas.

Na vertente cognitiva nosso olhar voltou-se para a compreensão da formação do conceito de número racional. Ancoramos nosso referencial na teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2009) que explica que a compreensão dos objetos matemáticos requer a coordenação de diferentes registros semióticos que não se opera espontaneamente devendo ser estimulada.

Após sintetizarmos no guia a parte teórica, apresentamos e discutimos o desenvolvimento de uma prática pedagógica de modelagem na perspectiva sociocrítica. Em seguida, apresentamos nossas considerações finais.

2.REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO



O momento em que um cenário para investigação é apresentado aos alunos é um momento de aberturas de possibilidades de sentidos. Atividades que envolvem *pesquisa* costumam ser assim.

SKOVSMOSE, 2014, p. 46

De acordo com Alro e Skovsmose (2010) O ensino tradicional é caracterizado como aquele em que a aula praticamente é dividida em dois momentos: no primeiro, o professor apresenta o conteúdo; e, no segundo, os alunos fazem exercícios usando o conteúdo e as técnicas que foram apresentados. O professor checa as respostas.

Essa forma de ensinar matemática está presente no paradigma do exercício em que as atividades geralmente são preparadas pelo autor do livro-texto, admitindo-se uma (e somente uma) resposta correta para cada questão. Todas as informações para resolver uma situação-problema já estão contempladas em seu enunciado. Não cabem questionamentos, e os fatores socioeconômicos atuais não são discutidos.

Num cenário investigativo o professor adota uma postura de investigador das perspectivas dos alunos e da realidade a que pertencem. Os contextos econômicos, políticos e sociais são discutidos por meio da educação matemática. Trata-se de trazer a matemática para o nosso tempo, dando maior significado ao que se estuda.

O importante num cenário investigativo é incentivar os alunos a pesquisar, discutir, buscar estratégias, analisar os procedimentos e modelos construídos. Os alunos são livres para aceitarem ou não o convite a investigação. Não temos garantias de que o convite será aceito, por isso ele deve ser definido de forma dialogada com os alunos.

É interessante propor temas que retratem suas preocupações sem deixar transparecer, num primeiro momento, a presença da matemática. Conforme se adentra nas discussões, a matemática vai-se revelando. O tema pode desdobrar-se em questões mais profundas, dependendo dos encaminhamentos da investigação. É essencial que os alunos se envolvam na investigação e tenham a clareza de que estão em busca de novos conhecimentos, ou seja, há uma intencionalidade na atividade que estão desenvolvendo.

O autor esquematizou um figura com seis ambientes de aprendizagem envolvendo o paradigma do exercício e cenário para investigação. Considerou como referência à matemática pura, à semirrealidade e à vida real. Essas referências indicam o ambiente de aprendizagem que está sendo proposto, orientando o aluno no que deve ser feito. Observe a Figura 1 com os diferentes ambientes de aprendizagem:

Figura 1: Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2008, p. 23)

- A primeira referência da matriz diz respeito à matemática aplicada, refere-se à matemática e somente a ela.
- A semirrealidade refere-se a uma situação construída artificialmente. Está pautada num contrato em que todas as informações relevantes já estão descritas no problema, sendo considerado como obstrução qualquer questionamento que se configure em fatos apresentados pela realidade.
- A referência à realidade trabalha com a matemática em situações reais e permite acrescentar ou questionar informações sobre o problema.

Conforme destaca Skovsmose (2008, 2010), a Figura 1 serve para orientar o planejamento do professor. Deve-se analisar se todos os ambientes foram contemplados durante o ano letivo e em quais ambientes os alunos tiveram maior dificuldades de desenvolver as tarefas, por isso devem ser revisitados com maior frequência, para superar as dificuldades e avaliar o tempo gasto no desenvolvimento da atividade em cada ambiente. Os ambientes (1) e (3) podem ser usados após uma atividade investigativa, para fixar ou consolidar conceitos. O primordial é buscar um equilíbrio entre os diferentes ambientes de aprendizagem, pois todos eles são necessários à educação matemática.

Ao transitar do paradigma do exercício para um cenário investigativo, professores e alunos podem sentir-se inseguros e até mesmo incapazes. A questão “aberta” traz certo grau de imprevisibilidade. Nessa perspectiva, a “zona de risco” que se forma num cenário investigativo é bem maior que a existente no paradigma do exercício em que a aula já está fechada e totalmente dominada pelo professor que transmite o que planejou. Entretanto, trabalhar na “zona de risco” pode significar ricas possibilidades de novas aprendizagens em que o aluno desenvolve sua capacidade intelectual recorrendo aos próprios conhecimentos, aventurando-se na busca por outros e procurando estabelecer conexões com a realidade.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA SOCIOCRIÁTICA

Fotos do Rio Castelo em 2016.



Fonte: Acervo dos autores

Mais do que informar matematicamente, é preciso educar criticamente através da matemática.

BARBOSA, 2003, p. 6

A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica foi inspirada na educação matemática crítica tendo como expoente Barbosa (2003). Segundo Barbosa (2003,) as atividades escolares devem propiciar a reflexão sobre os procedimentos e resultados dos modelos matemáticos construídos preparando os estudantes para exercer a cidadania na sociedade.

Barbosa (2004a, p.4), considera que dois pontos são cruciais na prática da modelagem matemática:

- A referência num contexto real – os temas para estudo devem ser extraídos do contexto sociocultural dos alunos. Devem constituir-se realmente em um problema para eles, fazer parte do mundo-vida das pessoas.
- Não possuir esquemas prévios para abordar o problema – como os procedimentos não são fixados de antemão, só os conhecem a medida que os alunos usam sua autonomia e investigam um possível caminho para solucionar o problema. Isso exige esforço intelectual.
-

Nesse contexto, Barbosa (2004b) considera que ao seu ver:

O ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo (BARBOSA, 2004b, p. 75).

O espaço da sala de aula passa a ser um lugar onde cada aluno tem oportunidades de expressar suas ideias, compartilhar os conhecimentos adquirindo novos, questionar, levantar hipóteses, contrapor pontos de vistas, opinar e ouvir opiniões. Barbosa (2007) considera a sala de aula um espaço discursivo de muitas vozes, as quais serão reconhecidas, secundarizadas ou simplesmente ignoradas.

Barbosa (2007) toma a noção de *rotas de modelagem* no sentido da ação do discurso dos alunos na prática de modelagem em torno da construção do modelo matemático referente à situação-problema em estudo. A ênfase no discurso produzido na atividade legitima as ações. Definiu três formas de discussão num processo de modelagem na perspectiva sociocrítica: as discussões matemáticas, as técnicas e as reflexivas.

As discussões matemáticas referem-se aos conceitos e às ideias integralmente pertencentes à disciplina matemática. As discussões técnicas, ao processo de matematização da situação em estudo. E, por sua vez, as discussões reflexivas referem-

se à conexão entre os pressupostos utilizados na construção do modelo matemático e os resultados, bem como à utilização desses últimos na sociedade (BARBOSA, 2007, p. 165).

Essas discussões possuem natureza distintas. Além delas, Barbosa (2007) percebeu que outras discussões permeavam a prática da modelagem e não cabiam na classificação anterior reduzida ao modelo matemático. Essas discussões foram chamadas de discussões paralelas e referem-se àqueles discursos em que os alunos refletem sobre o contexto social ou a vida em sociedade, bem como as ideias e/procedimentos matemáticos que não tiveram um papel claro na construção do modelo.

Sendo uma prática investigativa, poder-se-ia pensar que a modelagem matemática na perspectiva sociocrítica tomaria muito tempo das aulas prejudicando o cumprimento do currículo. Entretanto, Barbosa (2004b) esclarece que esse argumento não se fundamenta uma vez que essa prática pode ser desenvolvida em projetos mais curtos ou longos. Assim, ele organizou os papéis do professor e dos alunos numa prática de modelagem sociocrítica o que chamou de “casos” a saber:

- Caso 01: O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
- Caso 02: O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
- Caso 03: A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema (BARBOSA, 2004b, p. 76-77).

Conforme observamos, o tempo não constitui um empecilho à modelagem sociocrítica, que pode ser desenvolvida em projetos curtos de algumas aulas ou mais longos, dependendo dos objetivos e direcionamentos do professor. Podem-se incluir atividades extraclasse, pesquisas ou entrevistas com profissionais de outras áreas. O tema pode ser único ou diversificado, levado pelo professor como sugestão ou escolhido exclusivamente pelos alunos. É notável que os procedimentos diferem muito das atividades desenvolvidas no paradigma do exercício e um leque de atributos que expandem os conceitos matemáticos é considerado.

2.3 MODELO DE COOPERAÇÃO INVESTIGATIVA – MODELO-CI



Fonte: <https://pt.dreamstime.com/ilustra%C3%A7%C3%A3o-stock-crian%C3%A7a-dos-desenhos-animados-um-estudo-na-sala-de-aula-image55852330> (adaptação)

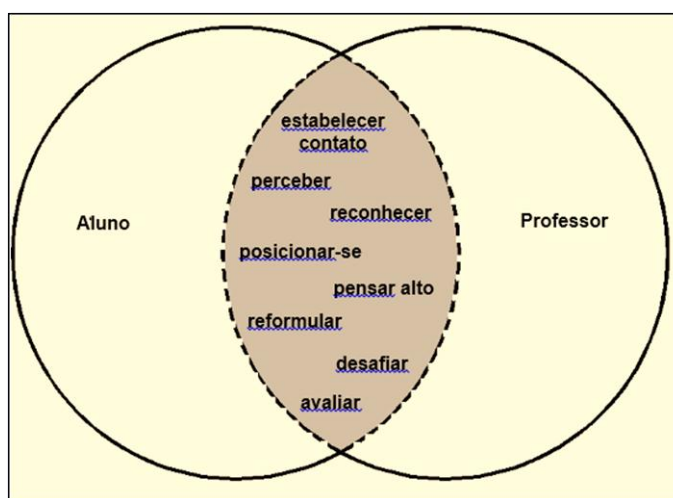
O ponto importante é que as perspectivas dos alunos, e não a explicação do professor, podem ser o ponto de partida para uma cooperação investigativa. Dito de forma mais abrangente: os atos de comunicação inclusos no Modelo-CI trazem os alunos e suas perspectivas para o centro do palco do processo educativo.

ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 72

Alro e Skovsmose (2010) afirmam que a comunicação na sala de aula interfere na qualidade da aprendizagem. O ato de comunicar-se não deve ser imposto numa relação coercitiva de dominação, mas fundamentado pelo diálogo, visto como um processo investigativo de perspectivas e imprevisível. Para os autores, dois aspectos são imprescindíveis na realização de uma investigação: o envolvimento dos participantes e a natureza “aberta” da atividade. A aprendizagem é uma experiência individual, mas acontece em contextos sociais encharcados em relações interpessoais.

Na Figura 2, apresentamos um esquema do modelo de cooperação investigativa, Modelo-CI, em que estão reunidos oito atos dialógicos de comunicação entre professor e alunos.

Figura 2: O modelo de cooperação investigativa



Fonte: Alro e Skovsmose (2010, p.69)

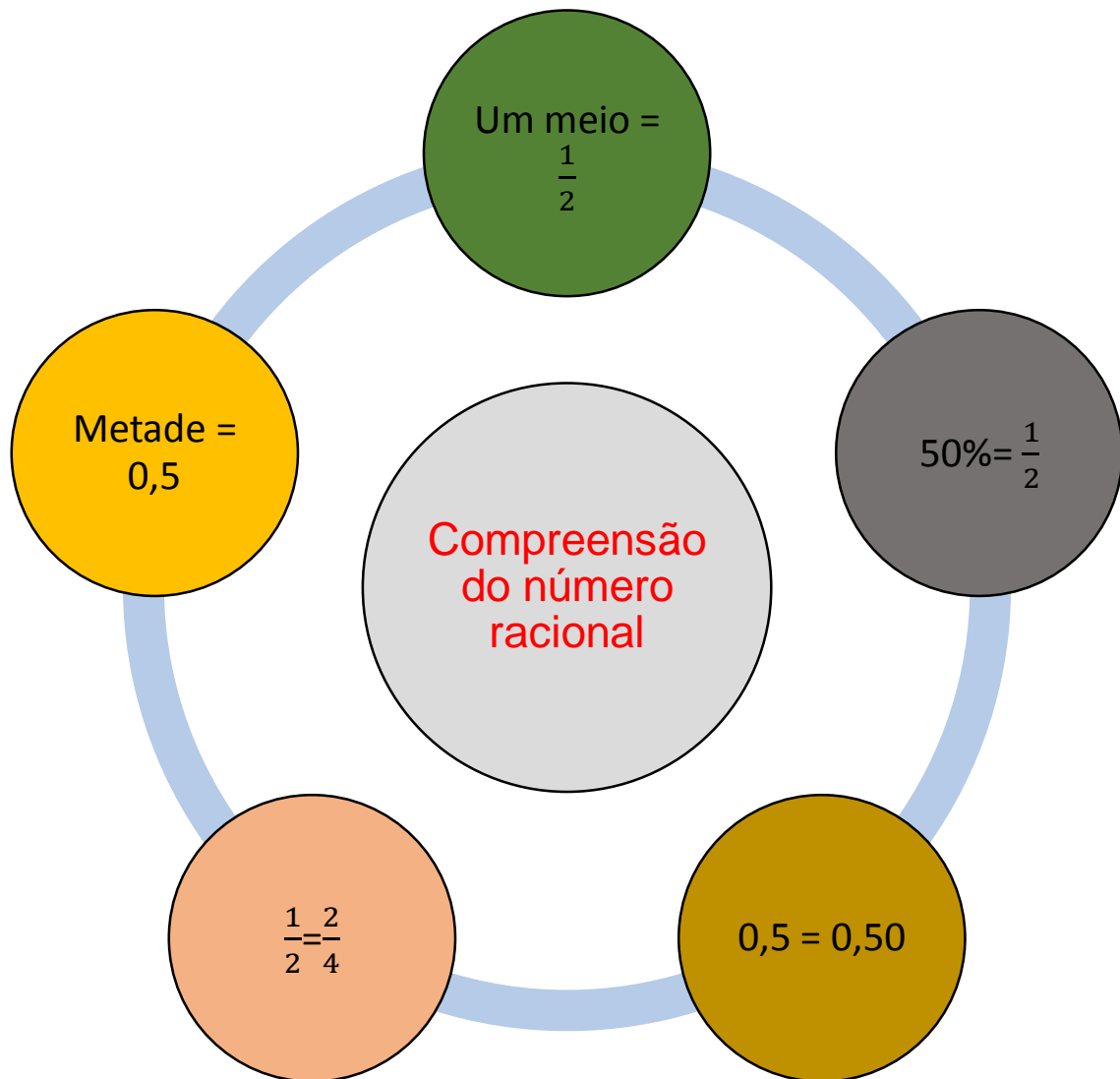
Esses atos dialógicos funcionam como ponte entre a forma como o aluno está entendendo a questão e a mediação feita pelo professor que, ao escutá-lo, o orienta. Discriminaremos a seguir cada um desses elementos:

- O estabelecer contato como maneira de criar uma sintonia entre os participantes, prestando atenção nas perspectivas um do outro e às suas contribuições. Abrange aspectos emocionais da cooperação investigativa exigindo respeito mútuo, responsabilidade e confiança uns nos outros
- O perceber perspectivas é um processo de examinar possibilidades, criar hipótese, manter a curiosidade. Os alunos assumem a condução do processo investigativo procurando descobrir o que ainda não sabem ou pensam não saber.

- Depois de perceber uma perspectiva de forma colaborativa, ela será reconhecida e conhecida pelo grupo. É um esforço de matematizar a situação em que as propostas poderão ser reformuladas e aprofundadas
- O ato de posicionar-se está relacionado ao de compartilhar o que se sabe, expressar o que pensa estando receptivo às argumentações de seu posicionamento. Declarações do tipo “Não compreendi.”, “Certo?”, “Não acha isso?” revelam que a comunicação está ocorrendo não na tentativa de defender um ponto de vista porque ele é pessoal, mas de torná-lo público para ser analisado e questionado se deve ser aceito ou rejeitado.
- O pensar alto torna o pensamento público. Defender posições pensando alto permite que as perspectivas sejam conhecidas por todos. É uma conversação em que os participantes examinam e descrevem seus pressupostos sobre a questão.
- Reformular significa repetir o que já foi dito do seu jeito. É um parafrasear elucidando o processo argumentativo. Os participantes confirmam o entendimento de uma perspectiva comum ou eliminam dúvidas ainda existentes no processo de investigação.
- Desafiar significa tentar ver as coisas em outro sentido. Uma pré-condição para desafiar o aluno é o esclarecimento de perspectivas dando sugestões investigativas.
- O avaliar as perspectivas faz parte de todo processo investigativo e é feito por alunos e professor. Nesse processo questão de que está ‘certo’ ou ‘errado’ não pode prevalecer. Avaliar é fazer um *feedback* construtivo.

Dialogar compreende realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p.134). Não é qualquer ato da fala que pode ser considerado como um diálogo, pois por meio dos atos dialógicos é possível construir algo em conjunto. Quando o processo de aprendizagem é marcado por atos dialógicos, dizemos que ocorreu um processo de aprendizagem dialógica.

2.4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA



Fonte: Acervo dos autores

E a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja o “enclausuramento” de cada registro.

DUVAL, 2013, p.22

Toda comunicação matemática é feita por meio de representação. De acordo com Damm (1999, p.137), “[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação”. O que ensinamos são as várias representações de um objeto matemático que não é perceptível, isto é, não é acessível sensorialmente, tampouco instrumentalizado com aparelhos, como o microscópio, balanças, como ocorre em outras áreas do conhecimento científico. Sua apreensão se dá obrigatoriamente por meio de representações.

Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação (DAMM, 1999, p.137).

A teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval trata de uma teoria de aprendizagem matemática que considera essa diversidade de representações para o objeto matemático. Duval (2009) introduz o termo “registros de representação semiótica” para designar os diferentes tipos de representação semiótica para o objeto matemático. Podemos falar em registro na língua natural, registro numérico, registro figural, entre outros. Cada registro é heterogêneo, possuindo os próprios elementos cognitivos para o seu funcionamento.

Para que um sistema de signo forme um registro de representação semiótica, três condições são necessárias: a formação de uma representação identificável – as regras que definem um sistema de representação, os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis num registro; os tratamentos – são transformações de representações dentro de um mesmo registro; as conversões – são transformações externas em relação ao registro da representação de partida (DUVAL, 2009, p.55-59).

No ensino da matemática, usa-se uma variedade de representação semiótica: os registros multifuncionais com representação discursiva, os registros multifuncionais com representação não discursiva, os registros monofuncionais com representação discursiva e os registros monofuncionais com representação não discursiva. Na Figura 3, exemplificam-se, com maior clareza, essas representações:

Figura 3: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	Representação discursiva	Representação não discursiva
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentação mediante observações, crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais. Cálculo	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2013, p.14)

Duval (2013) considera essencial a mudança de registro para que ocorra a compreensão em matemática. O “enclausuramento” em um único registro não permite ao aluno reconhecer o objeto matemático em suas várias representações. A coordenação de registros permite a identificação das características do objeto matemático em cada um dos registros, ou seja, podemos dizer que os diferentes registros se complementam no sentido de que um registro evidencia determinada propriedade do objeto mais que outro. Assim,

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro (DUVAL, 2013, p. 14-15).

Essa questão é específica da aprendizagem matemática diferente da aprendizagem das ciências baseadas na experimentação e na observação (DUVAL, 2013, p. 23). Duval (2013) considera que essa coordenação entre os registros não se opera espontaneamente, devendo ser estimulada pelo professor.

3 DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE MODELAGEM

A prática da modelagem na perspectiva sociocrítica foi desenvolvida numa escola municipal localizada em Castelo, Espírito Santo, em 2016, com 18 alunos 8º ano do ensino fundamental.

Numa prática pedagógica de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica é importante que os alunos participem da escolha do tema a ser estudado. Esse tema deve fazer parte do contexto sociocultural dos alunos, portanto, eles precisam ser ouvidos o que estreita a relação entre o ensino da matemática e a realidade.

Numa conversa em sala, durante uma das minhas aulas de matemática, indaguei aos alunos qual problema fora do ambiente escolar mais os preocupavam e merecia nossa atenção. Depois de algumas sugestões, o grupo deixou claro que a escassez de água os preocupava. Acreditamos que a escolha se deve ao fato que Castelo, nos últimos anos, passou por racionamento de água e o rio que corta o município está com seu volume de água muito baixo

3.1 Primeira aula - Apresentação da reportagem

Nesse momento foi exibido na sala de recursos audiovisuais a reportagem: Água, planeta em crise¹ que trata do problema da crise hídrica não só no Brasil, mas também em outros países e, algumas medidas adotadas pelo governo para tentar solucionar o problema.



Os alunos assistiam a reportagem apresentada no vídeo fazendo anotações das informações que mais lhes chamavam a atenção. A reportagem contribuiu para que os alunos adquirissem maiores informações sobre a grave situação da água que não era só em Castelo, mas também no mundo.

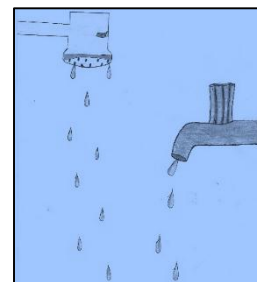
3.2 Segunda aula – Discussões a partir das informações apresentadas na reportagem

De volta a sala de aula fizemos as discussões sobre o que mais chamou a atenção dos alunos na reportagem, que de acordo com Barbosa (2007), é aconselhável num ambiente de modelagem sociocrítica que os alunos se envolvam em discussões de natureza distintas, sendo elas discussões matemáticas, discussões técnicas e discussões reflexivas.



¹ Essa reportagem é encontrada no site: g1.globo.com/.../veja-cinco-reportagens-da-serie-agua-planeta-em-crise-do-jg.html.

Apresentamos alguns discursos que foram caracterizados como diálogo com base no Modelo-CI elaborado por Skovsmose (2006). A fim de evitar a personalização dos participantes, identificamos os alunos com a letra A, acompanhado de um número, o pesquisador/professor pela letra P e todos os alunos com a letra G.



Diálogo 1 - Os alunos discutem a abrangência e importância do tema

P: Vocês acham importante estudar o consumo de água?

G: Sim.

A10: A água é muito importante pra gente. Porque se a gente for deixando com o tempo vamos ficar sem água.

P: Vocês concordam com a ideia dela?

G: sim.

A5: Eu concordo.

P: Então vocês acham importante estudar esse assunto aqui na escola?

A13: Mas não só na escola como em outros locais porque [tipo] se for estudar só na escola as pessoas que estão na escola vão ter essa consciência mas os outros não... Se a gente não tiver água [tipo assim] a gente não sobrevive, a gente precisa de água

P: Você está colocando, então, que o assunto é importante e deve ser estudado na escola e também em outros locais fora da escola. É isso?

A13: É.

P: Vocês concordam com a opinião dela?

G: Sim.

P: Vocês acham que é esse o caminho?

G: Sim

P: Fala A10.

A10: A água, a gente precisa pra viver com ela. A gente não consegue viver sem ela. A gente tá vendo que a água tá acabando, nossas florestas estão acabando...A gente até vê mas não corre atrás pra cuidar. Algumas pessoas até correm mas a maioria sabe [sabe do problema] e não consegue correr atrás.

P: A10 levantou uma situação muito séria. Nós sabemos que a água está acabando mas não tomamos uma [...]

Diálogo 2 – Os alunos socializam e interpretam informações do vídeo

A2: Eu anotei aqui que falou que mais de 1,8 bilhões de pessoas vão ficar sem água até 2025. A3 me disse que a população do mundo é de 7 bilhões. Então é muita gente, muita gente mesmo. (Esses dados são aproximados)

P: Parabéns A2 pela sua participação e conclusão também.

Diálogo 3 - As discussões ganham espaço local

A10: A água é mal distribuída igual tem umas pessoas que usam o máximo que pode, tem um controle pra poder sobreviver. Já há algumas pessoas que consegue ter bastante água. Em Castelo eu acho que não falta água, a gente usa o que a gente não precisa, a gente usa mais do necessário a nossa sobrevivência

P: A10 trouxe a discussão do consumo de água para nossa cidade, trouxe a questão para Castelo. Vocês acham que nós castelenses usamos a água de forma consciente?

G: Não.

A3: Tem gente que lava carro todo dia!

P: Espera aí! Esse “não” não foi unânime? Todos responderam não?

A13: Nem sempre professora. Algum ser humano deve salvar Castelo (referindo-se que nem todos os castelenses desperdiçam água)

A2: Eu tava vindo pra escola com o Rafael [aí tipo] tem um lugar que tava saindo água da calçada, assim, aí eu vi uma mulher que tava lavando a calçada. Eu pensei: não é

*possível!!! Um monte de gente fala que não pode lavar a calçada, mas não tem jeito não.
P: Então deixa eu reformular minha colocação: Nós castelenses, a maior parte de nós,
usamos a água de forma consciente?*

G: Não.

Diálogo 4 - Os alunos falam da sua relação com o problema em estudo

A14: A gente tá com água e não estamos nem aí para os que não tem.

P: Nós não estamos nem aí para o que está acontecendo. É isso?

A5: É.

A12: A gente gasta...

A09: A gente não se preocupa enquanto a gente tem aqui. A gente só se preocupa quando a gente não tiver. Entendeu?

A12: Só quando chegar o nosso dia...

A18: Quando a gente tem a água a gente não se preocupa

A07: E quando a gente não tem água...

A15: A gente sabe que ela está acabando mas a gente não se preocupa.

A16: A gente sabe que vamos ficar sem água!

A14: Que quando a gente tem água a gente não tá ligando pra quem não tem, né. A gente tá usando a nossa do jeito que a gente quer!



Professor as discussões apresentadas têm uma abordagem socioambiental e também devem fazer parte das aulas de matemática favorecendo desenvolver nos estudantes uma competência crítica. A matemática nessa perspectiva contribui para redimensionar o olhar dos alunos sobre a realidade e transformá-la.

3.2.1 Os alunos são “convidados” a realizarem a investigação com o olhar da matemática

Dando prosseguimento a aula, o pesquisador/professor “desafia” os alunos a enxergarem o problema não-matemático trazido por eles com o olhar da matemática, conforme apresentamos no Diálogo 5:

Diálogo 5 – O problema da escassez de água é visto com o olhar da matemática

P: O que podemos estudar matematicamente com esse assunto? Esse assunto tem relação com a matemática? Deixa eu ser mais clara! Esse assunto é muito amplo e gostaria que vocês simplificassem um pouco. O que dá para estudarmos com ele.

A11: A distribuição da água fazendo um infográfico.

A1: A porcentagem de água gasta em alguns lugares e cidades comparando com outros lugares.

A13: fazer uma pesquisa dentro ou fora da escola e depois fazer gráficos [tipo assim] gráficos e porcentagem.

A7:[Tipo] Podemos trabalhar como eles e depois produzir um cartaz ou alguma coisa.

P: Isso aí!

A10: Fazer uma pesquisa em todas as escolas de Castelo sobre o consumo de água. Ver se a água é tratada ou é de esgoto, se tem pessoas que passam sede. Mostrar a realidade do nosso mundo tornando isso visível para todos.

P: Ok! Vocês estão delimitando esse tema que é imenso. Mais alguém?

A12: A quantidade de pessoas no mundo e a quantidade de água que cada uma utiliza em lugares com muita escassez de água e em lugares com muita água chegando a uma diferença.

P: Muito bom!

A17: Um gráfico com o número de pessoas que gastam água em comparação ao número de pessoas que economizam.

A2: Fazer uma pesquisa com especialista para ver quanto tempo ainda temos água e o que cada um tem que poupar antes dela acabar.

P: O que você entende A2 por poupar?

A2: Cuidar da água, fazer as coisas gastando menos.

P: Joia! Muito bom!

A18: Todo mundo poderia trazer a conta de água pra ver o que cada um gasta.

O professor oportuniza os alunos a verbalizarem como poderia ser feito um trabalho com o tema em discussão, usando os conhecimentos matemáticos. Nenhuma atividade no campo específico da matemática é imposta aos alunos. Os alunos entendem o “desafio” feito pelo professor e apontam suas sugestões. Professor e alunos se comunicam de forma cooperativa, tratando, agora o tema numa abordagem dos conteúdos matemáticos.

Os diálogos envolvendo a problemática da escassez de água nos ajudou a descobrir o modo de pensar dos alunos em relação ao tema, e a elaborar a questão desafiadora: **Eu sou gastão de água?** que consistia em que cada aluno medisse o seu consumo diário de água.

Essa medição seria feita em casa, na realidade de cada um. Essa é uma característica da modelagem: buscar os dados para estudo em fontes reais extraídos do contexto sociocultural dos alunos.



Professor, observe que essa questão desafiadora aceita várias respostas. Nenhum procedimento a priori foi definido de como realizar essa medição. O propósito é estimular o esforço intelectual dos alunos. Os encaminhamentos dados só serão conhecidos a medida que eles realizam a investigação. Os atos dialógicos do Modelo-CI favorecem a troca de informações e conhecimentos.

3.3 Terceira aula - Os alunos socializam os procedimentos adotados para fazer as medições do consumo diário de água

Caracterizamos essa atividade de modelagem sociocrítica no “caso 2” sugerido por Barbosa (2004) onde o professor formulou o problema inicial: “Eu sou gastão de água?” e os alunos saíram da sala de aula para coletar os dados e trabalhar matematicamente com eles. Os alunos foram convidados a explicarem as estratégias e os resultados obtidos nas medições. Identificamos três procedimentos distintos de medição, a

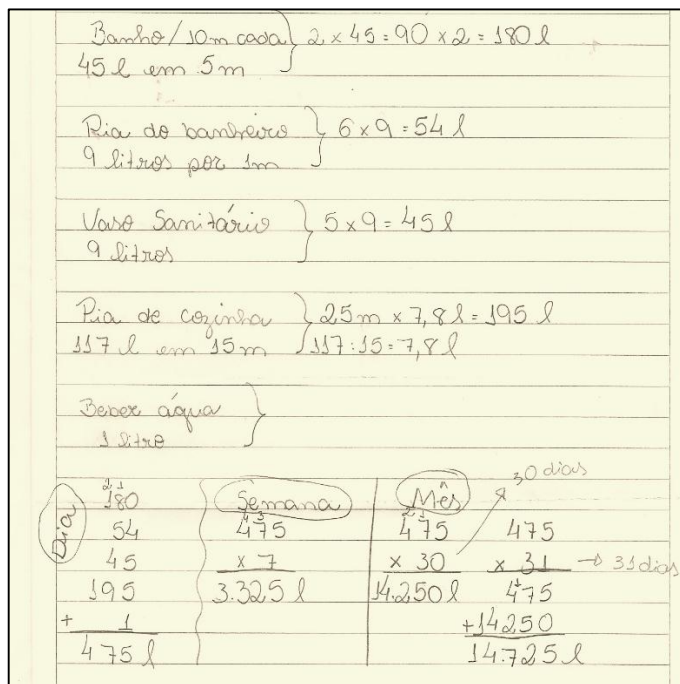
saber:

Um grupo de alunos pesquisou na internet o tanto de água gasto por minuto em cada atividade em que usava água. Marcava o tempo de consumo e depois multiplicava pelo valor pesquisado somando os resultados, obtendo o consumo diário de água.



Na Figura 04 expomos o registro de um dos alunos que usou essa estratégia. Em sua pesquisa na internet, considerou que um banho de 5 minutos² consome 45 litros, a pia do banheiro 9 litros por minuto e a pia da cozinha 117 litros em 15 minutos. As ações registradas foram dois banhos de 10 minutos cada, 6 minutos com a torneira da pia do banheiro aberta, 5 descargas consumindo 9 litros cada, 25 minutos usando a torneira da cozinha e 1 litro de água que foi ingerido.

Figura 4: Estratégia de medição do consumo de água feito por A10



Fonte: Diário de bordo de A10

Outro grupo de alunos priorizou os baldes e garrafas pet, mas sentiram necessidade de pesquisar na internet. Na Figura 5, mostramos como A12 particionou o seu consumo de água. Os baldes de água usados no banho estão em litros e para o consumo da descarga considerou três descargas durante um dia gastando 20 litros em cada uma totalizando 60 litros.

Figura 5: Medição do consumo diário de água feito por A12

² No registro de A10 a unidade de tempo minuto é representada pela letra m.

Banha: 290 litros
 Escovar os dentes: 9 litros
 Escovar a pasta: 1,5 litros
 Desbarça: 60 litros
 Beber água: 2 litros
 Total: 362,5 l

Fonte: Diário de bordo de A12

Outro grupo de alunos usou como estratégia a conta de água. A Figura 6 mostra que o aluno A15 observou o consumo de água mensal de sua casa e dividiu por 30 para calcular o consumo diário. Para calcular o seu consumo diário dividiu o valor pelo número de pessoas da casa.

Figura 6: Medição do consumo diário de água feito por A15

Conta de água - mês 08

23.000 l - 4 pessoas - 30 dias

23.000	/ 30	766,666	/ 4,000
200	766,666 l	36666	191,6665
200		6666	
20		26660	
		26660	
Eu gaste aproximadamente		26000	
191,6665 l de		20000	
água por dia.		0	

Fonte - Diário de bordo de A15

Conforme Alro e Skovsmose (2010) num processo investigativo o “certo” ou “errado” não devem prevalecer, pois alunos e professor devem “avaliar” as perspectivas discutindo sobre elas. Os alunos conjuntamente por meio do diálogo concluíram que o uso da média não responde satisfatoriamente a indagação: “Eu sou gastão de água?” uma vez que o que se encontra é o consumo médio e não o consumo individual

Professor nessa aula os alunos explicaram as estratégias usadas nas medições e apresentaram seus resultados. O diálogo foi importante para que a investigação matemática se tornasse pública. No processo investigativo deve-se examinar e avaliar todas as perspectivas que surgem no diálogo como novas possibilidades de aprendizagem.

3.4 Quarta aula - Os alunos realizam atividades envolvendo a teoria dos registros semióticos

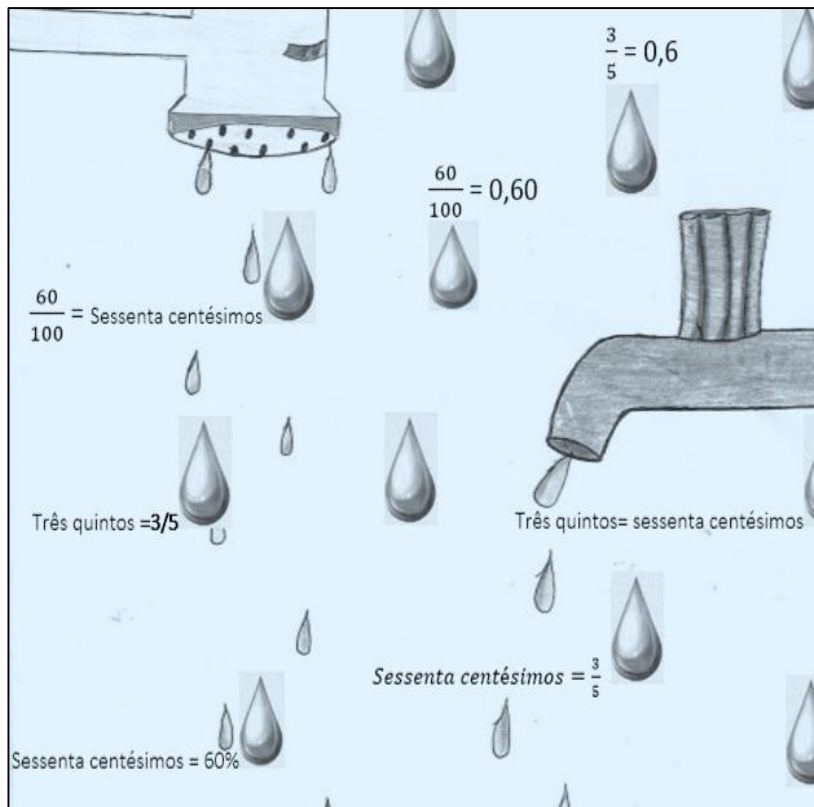
Após as discussões envolvendo os procedimentos usados na medição e resultados do consumo diário de água analisamos os diários de bordo de cada um e organizamos o consumo deles na Tabela 01. Identificamos nas colunas de que maneira eles particionaram as medidas do seu consumo, separando em categorias: banho, descarga, beber, etc. Essa tabela foi socializada com todos os alunos e serviu como base de dados para trabalhar as análises.

Tabela 01: Consumo diário de água dos alunos em categorias

Aluno	Banho	Descarga	Beber	Outros	Pia	Lavar as mãos	Escovação	TOTAL (Litros)
A01	180	35	2	16		2		232
A02	390		2	40				435
A03	360	18		30	75			483
A04	270	60				30	33	393
A05	70	56	3			2		131
A06	96	18	1	0,6		70	5	190,6
A07	45	35	3			9,8	1,7	94,5
A08	180	40	1	5			1	227
A09	240	18	0,6			12	12	282,6
A10	180	45	1	195	54			475
A11	60	18	2	55			12	147
A12	290	60	2			1,5	9	362,5
A13	150	28	1	119,5	12			310,5
A14	405	42	1,8			36		484,8
A15								191,66
A16	240	27	0,8				12	291,8
A17								533
A18								541,6

Fonte: Os autores

A Tabela 01 deu suporte para a elaboração de atividades envolvendo a Teoria dos registros de representação semiótica que trata da aprendizagem do objeto matemático. O objeto matemático que emergiu do processo de medição foi o número racional, objeto de estudo dessa pesquisa.



De acordo com Duval (2003) a coordenação simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo não se opera espontaneamente, devendo ser estimulada pelo professor. Assim, tendo a prática pedagógica de modelagem na perspectiva sociocrítica desencadeando o processo matemático de medição feito pelos alunos, elaboramos as questões de 01 a 05, investigando a formação do conceito de número racional.

Os alunos foram organizados em grupos, espontaneamente, e podiam trocar as informações uns com outros a qualquer momento. Durante esse tempo, o pesquisador/professor passava entre os grupos acompanhando os trabalhos. Quando observou que já tinham concluído as questões fizeram as discussões com todos os grupos juntos. Nessa aula, os alunos fizeram as duas primeiras questões a saber:

01. Exprese o consumo de água de A6 encontrado na Tabela 01 em forma de fração irredutível.

O consumo diário de água de A6 (Tabela 01) foi de 190,6 litros. A questão envolve uma conversão do registro simbólico numérico fracionário para o registro simbólico decimal exato. Para isso, os alunos trabalham também com o registro em língua natural, pois precisam interpretar a questão que traz como *variáveis pertinentes* a expressão “fração irredutível” usada no registro fracionário

No registro de A6, Figura 7, notamos que ela faz um tratamento simplificando $\frac{1906}{10}$ por 2 chegando a fração irredutível solicitada na questão 01.

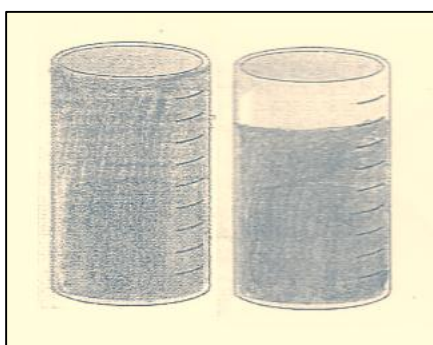
Figura7: Tratamento no registro simbólico numérico fracionário feito por A13

$$\frac{1906}{10} : 2 = \frac{953}{5}$$

O mesmo objeto matemático é representado por $190,6$; $\frac{1906}{10}$; $\frac{953}{5}$. Para Duval (2013, p. 23) esse reconhecimento de um mesmo objeto matemático, por meio de múltiplas representações, é fundamental para que o alunos possam por si mesmos, transferir ou modificar formulações ou representações de informações numa resolução de problemas.

02-A Figura 8 representa algum dado numérico que está na Tabela 01. Qual número é esse e de quem é essa informação?

Figura 8: Questão 02



Fonte: Os autores

O número da Tabela 01 a ser identificado é 1,8 litros de água, que corresponde a ingestão de água de A14. Trata-se de uma conversão do registro figural contínuo para o registro simbólico numérico decimal exato. No Diálogo 6 sublinhamos o momento em que os alunos socializam essa questão.

Diálogo 6 – Conversão do registro figural contínuo para o registro simbólico numérico decimal exato

P: Vocês entenderam a figura? São dois recipientes divididos em dez partes iguais? (Alguns murmúrios na sala).

A5: Dez é o total aqui. Vai ficar $\frac{10}{10}$. Vai dá um inteiro aqui. Não é não?

P: Sim! Está certíssimo. $\frac{10}{10}$ é um inteiro. E o que mais?

A5: No outro vai ficar 10 (referindo-se ao denominador) e... (É interrompida)

A2: Oito aqui.

A5: Um, dois, três, ... oito (conta em voz alta). Isso: $\frac{8}{10}$ dá para simplificar que dá $\frac{4}{5}$. Esse vai dá um inteiro (aponta para o primeiro recipiente) e esse $\frac{4}{5}$ (mostra o segundo).

P: Escreve no quadro A5 para discutirmos a questão. Alguém pensou de outro jeito? Outro grupo? Uma representação diferente de A5?

A15: Nós chegamos a representar $\frac{8}{10}$.

P: Mas essa é a representação final A15? Não faltou nada aí não? $\frac{8}{10}$ representa os dois recipientes?

A15: Não! $\frac{8}{10}$ representa esse (mostrando o segundo recipiente).

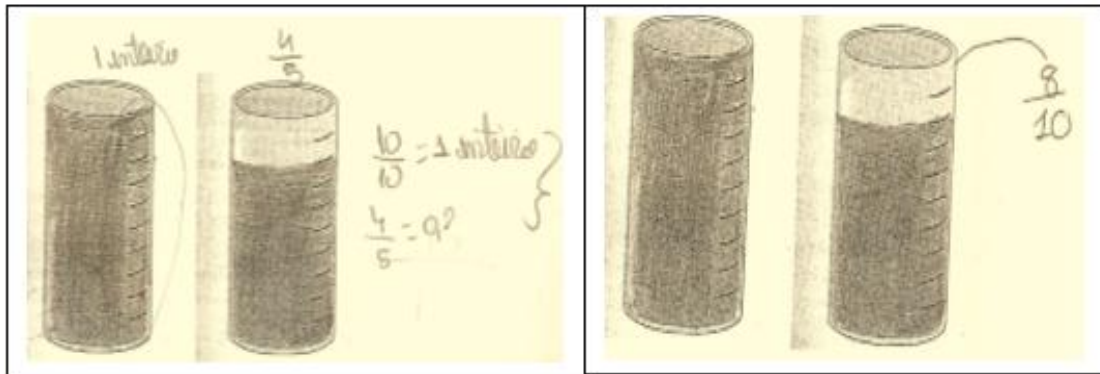
P: Há! E então? Cadê a representação do outro?

A15 e outros alunos: Está dividido em 10 e está pintado 10: dá um inteiro.

P: Ok! Vamos contribuir com a representação de A5 que está aqui no quadro. Ela colocou $\frac{10}{10}$ que representa 1 inteiro. Até aí, ok! E o outro recipiente $\frac{4}{5}$.

Na Figura 9, A5 indica, separadamente, as frações que correspondem aos recipientes: um inteiro como $\frac{10}{10}$ e a fração como $\frac{4}{5}$ que também é representado por 0,8 e A15 representa apenas o segundo recipiente pela fração $\frac{8}{10}$.

Figura 9: Registro de conversão feito por A5 e A15, respectivamente



Fonte: Produção textual de A5 e A15, respectivamente

A associação da figura representada na questão não acontece instantaneamente a quantidade de água 1,8 litros. Segundo Duval (2009) a atividade de conversão não é tão imediata e simples quanto parece ser, pois é preciso analisar como se efetua o procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes.

Notamos na Diálogo 6 e nos registros de A5 e A15 (Figura 9) que esses alunos associam o registro figural contínuo ao registro simbólico numérico fracionário, mesmo sem ter essa representação na Tabela 1. Os alunos fazem a correspondência do recipiente inteiro (representação figural) a uma fração $\frac{10}{10}$ e não a um inteiro que está representado pelo um no número 1,8. O mesmo acontece com a parte fracionária da representação figural.

O professor abre mão da sua perspectiva construída anteriormente para construir uma nova perspectiva dialogando com os alunos. Ele não imaginava que os alunos se enveredariam por esse caminho fracionário. Conforme explica Alro e Skovsmose (2010) a natureza do processo investigativo é a **construção como produto coletivo enfatizando a noção de cooperação investigativa** onde o professor também pode enxergar as coisas por outro lado.

No Diálogo 7 é continuação do Diálogo 6, onde os participantes descobrem caminhos que os conduzem ao número 1,8 representado na Tabela 01. Surge a forma fracionária mista.

Diálogo 7 – Os alunos convertem o registro figural para o registro simbólico numérico fracionário na forma mista ($1\frac{4}{5}$) convertendo essa representação para o registro simbólico numérico decimal exato (1,8)

P: Tem uma forma única para representar esses dois recipientes juntos, ou vai ficar assim, separadinhos?

A6 e outros alunos: É a forma mista!

A18: É o um (1) grandão e a fração do lado.

P: Ótimo! Já temos a forma mista juntando as contribuições de vocês. Um inteiro e quatro quintos ($1\frac{4}{5}$). Mas onde está essa representação na tabela? Na tabela não está na forma mista, está em outra representação, mas que significa a mesma quantidade hachurada nos recipientes. É qual é essa representação?

G: Silêncio (Ninguém arriscou um palpite).

P: Calma! Vamos pensar! Nós temos um desenho e uma forma mista. Não é isso turma?

G: É.

P: E tem um número na tabela que nós ainda não identificamos!

A5: É o da A16 que deu 0,8.

P: Isso aqui ($1\frac{4}{5}$) representa 0,8? (Silêncio no grupo).

A6: Pode ser o de A12. Conforme o A4 tinha falado o consumo dela foi de 80%. Faltou dois espaços para consumir tudo. É como se 10 fosse o 100% e esses 8 espaços cheios o 80%. Então 0,8 estaria representado por 80%.

P: Legal, isso aí! Muito bom! Acho que é um caminho. Mas lembra-se do recipiente inteiro. Analisem e vê se desse jeito chegam ao número da tabela. (Murmúrios).

A5: É o da A14, porque o inteiro é o um e os quebrados o 0,8 dando 1,8 que tá na tabela.

P: Parabéns! Parabéns pessoal! (O grupo bate palmas com alegria). É isso aí gente! É esse: 1,8 – um inteiro e oito décimos (Muitos murmúrios no grupo).

Duval (2013) afirma que a originalidade da atividade matemática está na possibilidade de trocar de registro de representação a todo momento. O caminho de conversão feito pelos alunos inicia-se no registro figural elaborado na questão 02, passa pela forma mista, associam a porcentagem e finalizam com o registro decimal 1,8 representado na Tabela 01. Vários registros semióticos são mobilizados pelos alunos.

Professor observe que o diálogo é visto como um processo investigativo de perspectivas. Os alunos verbalizam como estão entendendo a questão que, ao tornar-se pública, é discutida e analisada. Assim, o diálogo é uma ação imprevisível, pois a qualquer momento a investigação pode enveredar-se por outros caminhos. A imprevisibilidade não deve ser vista como um obstáculo, mas como uma possibilidade de crescimento intelectual tanto para os alunos como para o professor.

3.5 Quinta aula - Continuação das atividades envolvendo a teoria dos registros de representação semiótica

Nessa aula, adotamos a mesma organização dos alunos em grupos, deixando um tempo da aula para a realização das questões e depois socializando com todos os grupos. Foram desenvolvidas nessa aula as questões 03, 04 e 05 a saber:

03- A9 consumiu 0,6 litros bebendo água. Expresse esse consumo por meio de desenho.

No Diálogo 8, 09 explica como fez a conversão proposta.

Diálogo 8 – Conversão de 0,6 litros de água para o registro figural

P: 0,6 é mais ou menos que 1 litro?

G: É menos.

P: Então cabe em 1 litro né?

G: Sim.

P: Ok! Gostaria que alguém explicasse como resolveu essa questão.

A09: Eu fiz assim: 0,6 é menos que 1 litro inteiro, então eu fiz um desenho dividido em 10 partes iguais e pintei só seis que é 600ml.

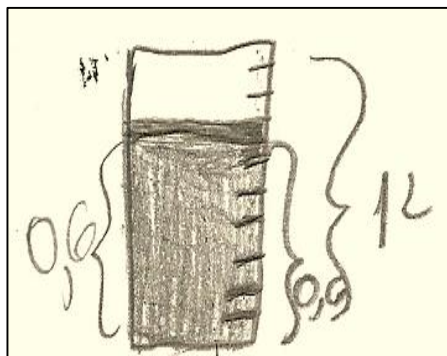
P: Mas espera aí! Por que dividiu o litro em 10 partes?

A09: Porque eu coloquei como se cada espaçozinho valesse 100 ml - 0,1 do litro.

P: Muito bom. Você fez sabe que: 100 ml = 0,1 litro. Teve alguém que fez diferente? [...]

Em sua fala o aluno A09 explica como fez o desenho como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10: Representação figural do objeto matemático número racional feito por A09



Fonte: Produção textual de A09

A09 explica como procedeu ao reconhecer que 100 ml corresponde a 0,1 do litro, fazendo o tratamento dentro do registro simbólico numérico decimal exato e como se deu a conversão para o registro figural.

Dando continuidade ao Diálogo 9, segue o Diálogo 10, onde A14 explica como procedeu.

Díálogo 10 – Explicação de A14 para a conversão de 0,6 litros para o registro figural

P: Teve alguém que fez diferente?

A14: Eu peguei 600 ml e coloquei 1000 ml embaixo que corresponde a 1 litro ($\frac{600}{1000}$). Aí eu dividi por 100 e deu $\frac{6}{10}$ e eu fiz o desenho.

A professora “desafia” a turma perguntando se alguém fez diferente. O Díálogo 10 mostra que já se tinha chegado a uma resposta, mas há um esforço da professora em “estabelecer contato”, estimulando os alunos a verbalizarem novas perspectivas a fim que fossem “percebidas”, “reconhecidas” e “avaliadas” pela grupo. O aluno A14, então, “*pensa alto*”, e torna público como procedeu para fazer a conversão.

A14 tem como ponto de partida a informação 0,6 litros no enunciado da Questão 03. A partir dela faz conversões e tratamentos conforme é apresentado na Figura 11.

Figura 11: Conversão e Tratamento feito por A14

The image shows a student's handwritten work on a yellow background. On the left, there is a fraction $\frac{600}{1000} = \frac{6}{10}$ where the zeros in the numerator and denominator have been crossed out. To the right of this is a hand-drawn grid with several columns and rows, representing a decimal or a measurement scale.

Fonte: Produção textual de A14

Na fala do aluno A14 observamos que ele faz a conversão do registro simbólico numérico decimal exato, para o registro simbólico numérico fracionário, ao transformar o número decimal 0,6 litros para $\frac{600}{1000}$. Em seguida faz um tratamento dentro do registro simbólico numérico fracionário ao simplificar a fração $\frac{600}{1000}$ para $\frac{6}{10}$. Só então faz a conversão para registro figural. Nessa sua estratégia ao fazer um tratamento dentro do registro simbólico numérico fracionário (simplificar a fração) ele obteve uma representação que facilitou a conversão para o registro figural.

No Díálogo 11, continuação da anterior, os alunos explicam como fizeram um tratamento dentro do registro simbólico numérico fracionário exato a partir da explicação de A14.

Díálogo 11 – Tratamento no interior do registro simbólico numérico fracionário: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

P:A10 você descobriu outra fração equivalente a essa? Uma outra representação para essa questão. Eu ouvi vocês discutindo isso enquanto faziam (Vários alunos murmuraram ao mesmo tempo).

A10: É que nós simplificamos.

A11: Mas aí ficaram 5 espaços cada um valendo 200 ml. Aí pintamos só 3 espaços.

A17: Tem que simplificar a fração.

A3: Simplificando a fração vai ficar três quintos. Diminui o tanto de pedaços.

A10: É isso aí.

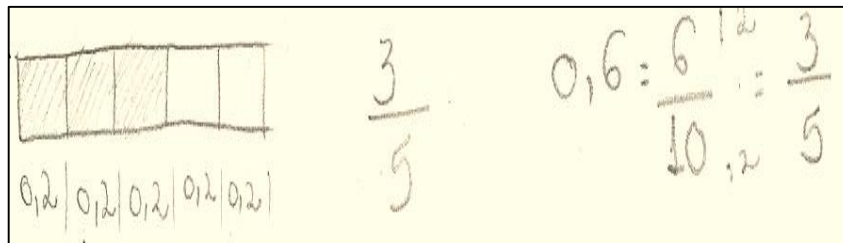
P:Todas essas representações são do número decimal 0,6? (Enquanto relatavam registrei no quadro a estratégia).

G: Sim.

P: Ótimo! Notaram, então, que não temos uma única forma para representar os números. Podemos representar o mesmo número de várias formas.

Na Figura 12, a operação cognitiva de tratamento e o desenho feito por A10 que participou do Diálogo 11.

Figura 12: Tratamento no registro simbólico numérico fracionário feito por A10



Fonte: Produção textual de A10

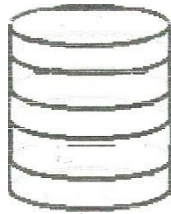
Observamos que os alunos fazem a conversão no primeiro momento, do registro decimal para o fracionário: $0,6 = \frac{6}{10}$. Faz um tratamento: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Depois, converte do registro fracionário para o figural. Ainda opera no registro decimal representando cada parte do desenho por 0,2 conforme o registro de A10.

A seguir apresentamos mais duas atividades que foram elaboradas com o intuito de investigar a formação do conceito de número racional.

04-Arredondando a dezena o consumo diário da aluna A12 é de 360 litros diário de água. $\frac{4}{5}$ desse valor gastou com o banho. O que podemos concluir em relação ao seu consumo de água? Apresente argumentos matemáticos.

05- A16 relatou que mediu a água que bebeu usando 4 copos que deu um consumo de 800ml por dia. O desenho da Figura 17 representa um recipiente de um litro. Pinte o consumo de A16 nesse desenho e escreva uma fração correspondente a esse consumo. (Considere que os copos são do mesmo tamanho)

Figura 13: Questão 05



Fonte: Os autores

Professor essas são algumas sugestões de atividades elaboradas a partir de uma prática pedagógica de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica que estimulam os alunos a desenvolverem as atividades cognitivas de Tratamento e Conversão. Outras podem ser elaboradas. Observe que o diálogo favoreceu novas oportunidades de aprendizagem tornando o aluno protagonista do processo ensino e aprendizagem de matemática.

3.6 Sexta aula – Interpretação do modelo construído

Retomamos a questão inicial: Eu sou gastão de água? Os procedimentos e resultados da medições e as discussões em sala propiciaram aos alunos a reflexão sobre o próprio consumo de água. Todos se autoavaliaram como gastões de água sendo necessário mudança nos hábitos diários.

A prática da modelagem sociocrítica levou os alunos a buscar dados, organizá-los, abordá-los matematicamente, avaliar os resultados traçando novas estratégia (Barbosa, 2004) de forma crítica sob o problema socioambiental destacado por eles. A modelagem sociocritica aproximou a realidade social aos conteúdos escolares.

O diálogo foi um fator que contribui para a participação dos alunos nas aulas tornando o ambiente escolar um espaço democrático de vozes que expressam pensamentos distintos. Esse olhar dado a educação matemática desenvolve nos alunos competências democrática, uma das preocupações da educação matemática crítica.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que a construção de um ambiente de aprendizagem marcado pelos atos dialógicos do Modelo-CI favorece a formação do conceito de números racionais. A comunicação dialógica estabelecida pelos atos da fala de *“estabelecer contato”*, *“perceber”*, *“reconhecer”*, *“posicionar-se”*, *“pensar alto”*, *“reformular”*, *“desafiar”* e *“avaliar”* propiciam um ambiente escolar onde o aluno tem oportunidade de expressar suas ideias, formular questões, buscar estratégias de resolução examinando as possibilidades de investigação.

O encaminhamento dado a prática pedagógica da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica deu espaço a um trabalho pedagógico que valoriza os diversos registros semióticos de um objeto matemático. A iniciativa dos alunos em particionar as medidas de seu consumo de água separando em categorias nos deu suporte para organizarmos a Tabela 01. Com base nessa tabela elaboramos as questões de tratamento e conversão do número racional mobilizando distintos registros.

É importante ressaltar o papel do diálogo durante a realização dessas conversões (Tabela 01). Ao socializa-las de forma intencional pela professora os alunos compartilhavam os conhecimentos que possuíam e investigavam novas perspectivas matemáticas para as conversões que emergiam dos processos interativos entre eles e a professora.

Professor, acreditamos que a prática pedagógica de modelagem na perspectiva sociocrítica discutida nesse guia didático, articulada ao Modelo-CI e a teoria dos registros de representação semiótica constituem fonte de pesquisa para que possa refletir sobre o processo ensino e aprendizagem de matemática. Esperamos que esse guia o auxilie a entender e mergulhar num cenário de investigação que oferece possibilidades diversas para um trabalho pedagógico que torna o ensino da matemática atual as demandas da nossa sociedade.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte - MG: Autêntica Editora, 2010.

BARBOSA, J. C. A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: IN: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, 2004a, Recife-PE. **Anais...** Recife- PE: SBEM, 2004. 1 CD-ROM, 2004.

BARBOSA, J.C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, v. 2 n.4, p. 73–80, 2004b.

BARBOSA, J.C. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA- SIEMAT, 2003, Santos. **Anais...** Santos: [s.n.], 2003.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira.; CALDEIRA, Ademir Donizete.; ARAUJO, Jussara Loiola. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife - PE: SBEM, 2007. p. 161–174.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-154.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**. São Paulo-SP: Editoria Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sivia Dias Alcântar (Org.). **Aprendizagem em Matemática : registro de representação semiótica**. [S.l.]: Papyrus, 2013. p. 11–33.

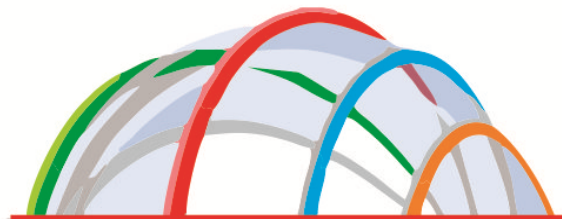
MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2013. p. 57-70.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, n.31, ano 21, Rio Claro, 2008. p. 79-102.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas- SP: Papyrus, 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: A questão da democracia**. 6. ed. Campinas- SP: Papyrus, 2013.

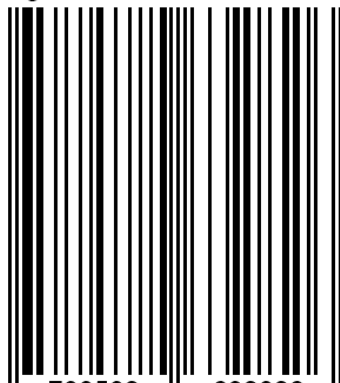
SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação matemática crítica**. 1. ed. Campinas- SP: Papyrus, 2014.



EDUCIMAT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – CAMPUS VITÓRIA

Agência Brasileira do ISBN



9 788582 632826

ISBN: 978-85-8263-282-6

