INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

O CONCEITO DE DIVISÃO NA FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR

KARIELY LOPES GOMES DE BRITO
MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA

Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Kariely Lopes Gomes de Brito
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

O CONCEITO DE DIVISÃO NA FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Espírito Santo – GEPEM

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2017

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

B862c Brito, Kariely Lopes Gomes de.
O conceito de divisão na formação continuada do professor [recurso eletrônico] / Kariely Lopes Gomes de Brito, Maria Auxiliadora Vilela Paiva. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2017.
46 p. : il.

ISBN: 978-85-8263-265-9

1. Professores - Formação. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Matemática – Problemas, questões, exercícios. 4. Divisão. 5. Aprendizagem. I. Paiva, Maria Auxiliadora Vilela. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título

CDD: 370.71

Realização

Editora do IFES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
Centro de Referência em Formação e Educação à Distância – CEFOR/ IFES
Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara
Vitória – Espírito Santo – CEP.: 29040-860.

Revisão textual
Rita Lélia Guimarães Granha

Capa e Editoração Eletrônica
Katy Kenyo Ribeiro e Wendel Alexandre Albino Macedo

Produção e Divulgação
Programa Educimat (Ifes Campus Vitória)

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

Jadir José Pella
Reitor

Lezi José Ferreira
Pró-Reitoria de Administração e Orçamento

Renato Tannure Rotta de Almeida
Pró-Reitoria de Extensão

Adriana Pionttkovsky Barcellos
Pró-Reitoria de Ensino

Andre Romero da Silva
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Ademar Manoel Stange
Pró-Reitoria de Desenvolvimento Institucional

Centro de Referência em Formação e Educação a Distância
Vanessa Battestin Nunes
Diretora

Campus Vitória
Hudson Luiz Côgo
Diretor Geral

Márcio de Almeida Có
Diretor de Ensino

Marcia Regina Pereira Lima
Diretora de Pesquisa e Pós-Graduação

MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

KARIELY LOPES GOMES DE BRITO é mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo – IFES, atuando na linha de pesquisa: Formação de Professores. Licenciada em Matemática pela Faculdade da Região Serrana – FARESE (2011) e em Pedagogia pela Faculdade de Educação da Serra (2014). É especialista em Xadrez Pedagógico pela Faculdade da Região Serrana (2012) e em Educação Matemática pela Faculdade Capixaba de Nova Venécia (2012). Possui experiência na Educação Básica, atuando na área de Matemática. Atualmente, é membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Espírito Santo - GEPEM. É professora efetiva da Secretaria de Estado do Espírito Santo e da Secretaria Municipal de Itaguaçu.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1577328484960745
Email: karielylopes@hotmail.com

MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1972), mestrado em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (1980) e doutorado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1999). Atualmente, é professora efetiva do Cefor/Reitoria/Ifes – Instituto Federal do ES, atuando no programa de mestrado Educimat do Ifes como professora/pesquisadora e coordenadora do curso de Especialização Lato Sensu Práticas Pedagógicas para Professores do Cefor/Ifes. Tem experiência na área de Educação Matemática no Ensino Fundamental, Médio, Superior e na Educação de Jovens e Adultos, atuando nos temas: Matemática, Formação do Professor, Ensino e Aprendizagem da Matemática. É líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática do ES - GEPEM-ES e fundadora da Regional ES da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/215851931321050
Email: vilelapaiva@gmail.com

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Escrever um livro que contemple um conteúdo matemático em suas abordagens científicas e escolares foi um desafio que nos propusemos a enfrentar. A ideia de construí-lo surgiu durante minha pesquisa de mestrado[1], que nos apontou possíveis caminhos a trilhar relacionados aos saberes docentes sobre o conteúdo divisão.

A construção desse material é resultado das experiências vivenciadas em um curso de formação continuada ofertado aos professores dos anos iniciais do município de Itaguaçu e, sobretudo, do nosso desejo de expandir os estudos acerca do conteúdo divisão.

A formação que desenvolvemos subsidiou-se nas teorias de Shulman (1986, 2015), que nos apresenta uma série de conhecimentos necessários à prática docente, constituindo o que ele denomina a base de conhecimento para o ensino.

Para Shulman (2015), a base de conhecimento se refere a um repertório profissional, são conhecimentos subjacentes à compreensão que o professor deve possuir para promover a aprendizagem de seus alunos. De forma semelhante, Mizukami (2004, p.38) enfatiza as ideias de Shulman e explicita que

> [...] consiste de um corpo de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições que são necessários para que o professor possa propiciar processos de ensinar e de aprender, em diferentes áreas de conhecimento, níveis, contextos e modalidades de ensino.

---

1 A pesquisa de mestrado foi realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, programa vinculado ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes Campus Vitória.

Dessa forma, são abordados conhecimentos de diversas naturezas, todos necessários e indispensáveis à prática profissional do professor, possibilitando a ele compreender o que é necessário para promover a aprendizagem dos alunos.

Nesse contexto, esta obra objetiva dialogar com os colegas formadores que, assim como nós, desejam realizar um estudo aprofundado a respeito do conteúdo divisão e difundi-lo no meio educacional. Da mesma forma, os professores que se interessarem em fazer a leitura também encontrarão subsídios para desenvolver suas aulas, podendo adaptar os conteúdos conforme a própria realidade.

Esperamos que o livro contribua de forma significativa para o processo de ensino e aprendizagem como um todo e desperte nos leitores um olhar atento acerca da importância da construção do conceito de divisão e dos saberes pedagógicos do conteúdo necessários à docência.

1 Introdução

Shulman (1986, 2015) considera necessário que o professor compreenda as várias formas de organizar sua disciplina, ciente que cada uma delas interfere diretamente na aprendizagem dos alunos. Para o autor, a grande diversidade de estudantes exige do docente uma compreensão flexível e multifacetada, adequada à oferta de explicações diferentes dos mesmos princípios ou conceitos. “Essa responsabilidade demanda especialmente a profundidade de compreensão do professor das estruturas da matéria, assim como suas atitudes e entusiasmo com relação ao que está sendo ensinado e aprendido” (SHULMAN, 2015, p.208).

Ao chegar à escola, as crianças trazem consigo conhecimentos matemáticos espontâneos, provenientes das experiências vivenciadas em seu cotidiano. A partir de então, espera-se que esses conhecimentos sejam aprimorados e sistematizados, e que elas possam se familiarizar com a linguagem e os conteúdos matemáticos que circundam o ambiente escolar. Assim, adquire significativa importância que se apropriem dos conceitos matemáticos que permeiam suas ações.

Segundo Lautert e Spinillo (2002), compreender um conceito matemático envolve inúmeros aspectos, como o uso apropriado de procedimentos e estratégias de resolução e também as diversas representações relacionadas ao conhecimento sobre quantidades, número e algoritmos. Além desses aspectos, consideram como relevantes as noções que a criança já possui sobre determinado conceito e os significados que atribui a ele.

Há uma proposta similar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN - 1º e 2º ciclos):

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p.19, grifos nosso).

Dessa forma, para que o aluno atribua significado a uma operação, por exemplo, é preciso que ele estabeleça relações entre ela e outros objetos. Embora seja desejável que essas relações direcionem-se para aspectos do cotidiano desse aluno ou até mesmo da própria Matemática, é essencial que o conteúdo a ser aprendido faça sentido para o aluno e que ele consiga perceber sua aplicabilidade. Desse modo, aos poucos ele construirá a própria compreensão de um determinado conceito.

Nesse contexto, o professor exerce papel fundamental na aprendizagem de seus alunos, pois cabe a ele oferecer meios para que construam conceitos por si mesmos. Porém, as muitas lacunas existentes no âmbito educacional fazem com que, cotidianamente, os professores privem seus alunos de certas experiências por desconhecer aspectos relativos ao conteúdo (SHULMAN, 1986).

Assim, para desempenhar esse papel com conhecimento, qualidade e eficiência, é imprescindível ter uma formação abrangente e apropriada, bem como qualidades profissionais e humanas, como um bom relacionamento com os estudantes e a capacidade de lidar com os desafios do dia a dia. Isso depende, sobremaneira, da capacidade do professor de se atualizar profissionalmente (PONTE, 2014).

Além da formação inicial, com o decorrer do tempo, é preciso pensar em aperfeiçoar e dar continuidade aos saberes docentes, principalmente no que se refere ao trabalho com conteúdos mais específicos. Desse modo, com o intuito de auxiliar formadores/professores no desenvolvimento de abordagens de ensino que visem a construção dos conceitos de divisão, apresentaremos em seguida informações teóricas e sugestões de atividades, ambas relacionadas ao conteúdo divisão.

No capítulo 2 apresentamos as situações do campo multiplicativo, trazendo como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (2014). O objetivo desse capítulo é mostrar diferentes situações em que o conteúdo divisão pode ser trabalhado, na expectativa de contribuir para ampliar o repertório de atividades dos professores.

Em nossa experiência, observamos que atividades envolvendo cálculo mental e calculadora eram pouco exploradas pelos professores em sala de aula, por isso, no capítulo 3 trazemos diferentes exemplos e situações em que as duas estratégias podem ser utilizadas, principalmente para trabalhar o conteúdo divisão.

Outro ponto observado foi que muitos profissionais abordam o algoritmo de forma mecânica, sem entendimento de cada uma de suas etapas, com a crença de que basta somente trabalhá-lo em aula para construir o conceito de divisão. Assim, no capítulo 4, exploraremos esse assunto.

Esperamos que este livro possa, de fato, contribuir para a formação do professor que ensina Matemática, agregando saberes ao conceito de divisão e produzindo experiências e reflexões significativas para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

2
AS SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS

A ideia de trabalhar com as situações multiplicativas surgiu das leituras realizadas sobre o campo conceitual multiplicativo, uma teoria desenvolvida por Gerard Vergnaud.

As pesquisadoras Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014) explicam que a construção e o desenvolvimento de conceitos sofrem influência de diversos fatores, uma vez que o indivíduo não constrói conceitos baseados apenas na resolução de um único problema, nem tampouco de problemas similares. O conhecimento conceitual surge mediante a resolução de situações de caráter teórico ou prático, sendo que cada problema contém em si mesmo diversos conceitos implícitos, que precisam ser dominados para alcançar uma solução.

Ainda segundo as autoras, para construir um conceito é necessário interagir com várias situações (tarefas, problemas, jogos, entre outras), havendo, em cada uma delas, vários conceitos envolvidos. Dessa forma, substitui-se a ideia da formação de um conceito isolado por um campo formado por diversos conceitos, suas representações e situações que se articulam. Esse campo é denominado campo conceitual.

Para Vergnaud, a base para a formação de um campo conceitual é composta por três elementos: as situações, os invariantes e as representações simbólicas. Esses elementos constituem a terna S, I, R, na qual:

> [...] S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referencia), I: Conjunto de invariantes sobre os quais as respostas da operacionalidade dos esquemas (o significado) e R: (conjunto das formas linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, 1990, p.139).

Como forma de exemplificar as proposições anteriores, pode-se dizer que as **situações** seriam os diferentes problemas propostos pelos professores em sala de aula. Os **invariantes** seriam os procedimentos que o aluno adotaria para resolvê-los. Este mobiliza seus conhecimentos e traça estratégias, podendo utilizar, por exemplo, as propriedades das operações. Já a **relação** corresponde à maneira como seriam representadas a situação proposta (problema) e os procedimentos adotados (invariantes), utilizando, por exemplo, símbolos matemáticos, diagramas, gráficos, entre outros.

A proposta de trabalhar com diferentes situações envolvendo as operações do campo multiplicativo (no qual a divisão se insere) também é apresentada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). Nesse documento são apresentados quatro grupos: (i) situações associadas ao que se poderia denominar multiplicação comparativa, (ii) situações associadas à comparação entre razões, que, portanto, envolvem a ideia de proporcionalidade, (iii) situações associadas à configuração retangular, (iv) situações associadas à ideia de combinatória.

Na sequência, apresentamos alguns exemplos para facilitar a compreensão. Explicações mais detalhadas podem ser encontradas na dissertação de Brito (2017).

- **Divisão por distribuição (partição)**

Problema 1 – *Antônia quer dividir 20 balas entre 5 amigos da turma. Quantas balas cada um vai ganhar?*

Problema	Amigos	Balas	Observação
Antônia quer dividir 20 balas entre 5 amigos da turma. Quantas balas cada um vai ganhar?	÷ 5 5 1	20 4 ÷5	A medida que o número de amigos é dividido por 5, a quantidade de balas também é dividida por essa mesma quantidade.

- **Formação de grupos (quotição)**

Problema 2 – *Dona Isabel distribuiu 20 bombons para seus netos de forma que cada um ganhasse 5 bombons. Quantos netos Dona Isabel tem?*

Problema	Netos	Bombons por neto	Observação
Dona Isabel distribuiu 20 bombons para seus netos de forma que cada um ganhasse 5 bombons. Quantos netos Dona Isabel tem?	x 4 1 4	5 20 : 4	Para descobrir o valor que está sendo multiplicado, basta calcular a razão $\frac{20\_bombons}{5\_bombons\_por\_neto} = 4\_netos$

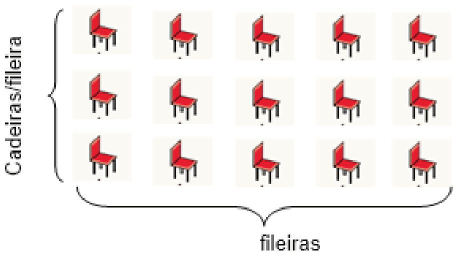
Durante a formação que ofertamos para professores dos anos iniciais de Itaguaçu/ES, vimos que esses tipos de problemas (partição e quotição) são os mais explorados pelos professores em sala de aula. A ideia de distribuir (partição) inclusive, prevalecia.

Normalmente, utilizavam problemas próximos da realidade dos alunos para facilitar o entendimento. Os professores relatavam que o modo de resolver variava de aluno para aluno, sendo que alguns recorreriam aos desenhos e, outros, ao algoritmo.

É fundamental o professor observar como os alunos enfrentam os desafios oferecidos por ambos, uma vez que “estudos mostram que a divisão que envolve quotição (ou ordem inversa) é considerada mais difícil pelas crianças” (WALLAUER, 2006, p.83). Segundo Lautert e Spinillo (2002, p. 238), “uma das explicações para isso é que a noção inicial que a criança tem sobre a divisão, derivada das experiências sociais, é a de repartir um todo em partes iguais até que este todo se esgote”.

Situações de configuração retangular

Problema 3 – *A sala de Mário tem 15 cadeiras, sendo que, em cada fileira, há 3 cadeiras. Quantas fileiras há no total?*



15 cadeiras = 3 cadeira/fil. x **n** fileiras

$$\frac{15 cadeiras}{3 cadeiras / fil} = n fileiras$$

n fileiras = 5

FIQUE ATENTO: Pode acontecer que os professores estejam acostumados a trabalhar com as situações de configuração retangular e com as que envolvem raciocínio combinatório, apenas utilizando a multiplicação. É importante que eles percebam a necessidade de trabalhá-las também com a operação de divisão, permitindo que o aluno não fique limitado a apenas um tipo de raciocínio.

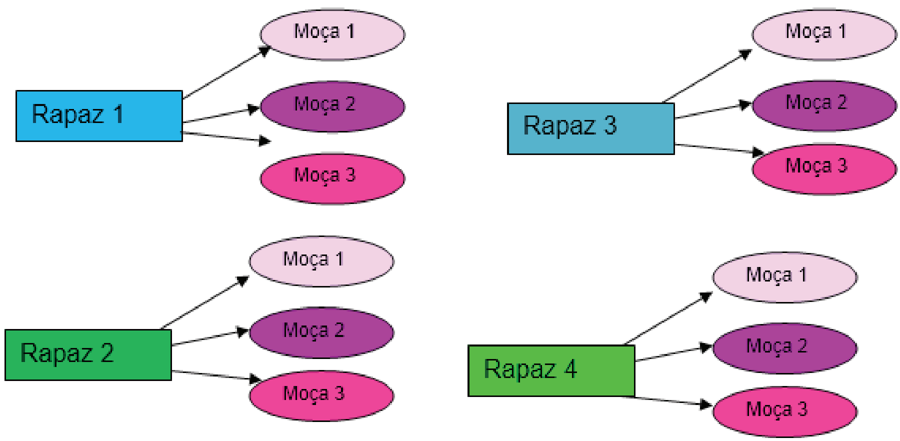
Muitos alunos costumam utilizar desenhos para tentar entender melhor esse tipo de situação, o que é totalmente válido. Porém, consideramos importante também que os professores os incentivem a estabelecer relações entre as informações apresentadas nos problemas e as maneiras de expressá-las utilizando a linguagem matemática. O mesmo é válido para todas as situações multiplicativas.

- **Situações envolvendo raciocínio combinatório**

Problema 4 – *Na festa junina da escola era possível formar 12 casais diferentes para dançar a quadrilha. Como havia 4 rapazes e todos os presentes dançaram, quantas eram as moças?*

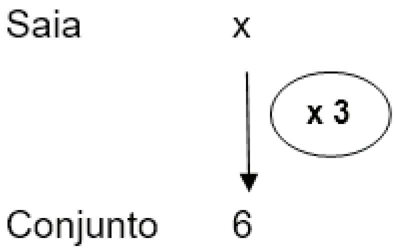
Podemos representar a relação entre rapazes e moças da seguinte forma: o número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças. Dessa forma, 12 casais = 4 rapazes x **n** moças, ou seja, havia na festa 3 moças.

Também podemos utilizar um diagrama para representar a situação.



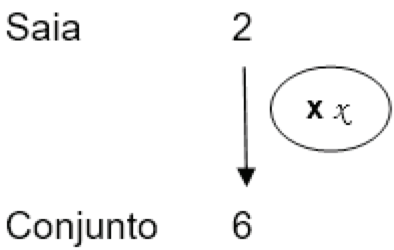
- **Situações de comparação multiplicativa**

Problema 6[2] – Divisão: busca de uma medida - *"São necessárias <u>três vezes mais</u> de tecido para fazer um conjunto do que uma saia. São necessários 6 metros para um conjunto. Quanto de tecido é necessário para fazer uma saia?"*



Para encontrar a quantidade de tecido necessária para fazer uma saia, basta efetuar a divisão *6 metros de tecido (conjunto) / 3 (escalar) = x metros de tecido (saia).* Ou seja, são necessários 2 metros de tecido para fazer a saia.

Problema 7 – Divisão: busca de um escalar - *"São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia, 6 metros para um conjunto. <u>Quantas vezes mais</u> são necessárias para fazer um conjunto (em relação a uma saia)?"*



---

2 Os problemas 6 e 7 foram extraídos de Vergnaud (2014,p.263).

Nesse caso, temos as medidas (2metros e 6metros) e buscamos o operador-escalar (**x** x). Para encontrar o escalar, devemos efetuar a divisão 6 metros / 2 metros = 3 vezes mais.

É preciso que o professor se atente à complexidade de cada tipo de situação, para não repetir apenas problemas que requeiram um mesmo raciocínio, ao longo da formação inicial do aluno. Caso faça isso, o aluno pode vir a desenvolver concepções ou mesmo estratégias que dificultam a assimilação do próprio conceito em foco, assim como de outros, limitando a competência à resolução de problemas daquele tipo (GITIRANA, CAMPOS, MAGINA, SPINILLO, 2014).

ALGUMAS SUGESTÕES

➢ QUESTIONAMENTOS

Para enriquecer as discussões, alguns questionamentos podem ser feitos oralmente para o grupo de professores. Caso considere melhor, peça que façam primeiro no papel e socializem as respostas na sequência. O importante é dar espaço para o diálogo entre os pares.

1) Vocês conheciam esses tipos de problema? Quais suas principais características?
2) Eles são trabalhados em sala de aula? De que maneira?
3) Qual deles é trabalhado com mais frequência ou todos são trabalhados de maneira igual? Por quê?
4) Como os alunos lidam com esses tipos de problemas?
5) Peça também que os professores deem exemplos de problemas que normalmente trabalham em sala de aula.

➢ INVESTIGANDO

(Em grupo ou individualmente)

1) Analisar no livro didático os tipos de problemas de divisão existentes.

2) Elaborar problemas para cada uma das situações multiplicativas.

Normalmente, os livros didáticos priorizam algumas situações em detrimento de outras. É importante o professor ter um olhar atento para isso e não ter como base apenas esse recurso. Por isso, sugerimos na segunda atividade a elaboração dos próprios problemas. Consideramos muito importante também que os problemas sejam discutidos, que os professores antecipem as dificuldades que os alunos poderão apresentar e tenham claros os objetivos a serem alcançados com cada questão. Destacamos aqui a importância de elaborar problemas bem formulados, que não deem margem à ambiguidade e se aproximem da realidade e do nível cognitivo atual de cada um dos alunos.

➢ ATIVIDADES

Em cada seção deste livro apresentaremos uma lista com atividades[3] que podem ser discutidas com os professores durante uma formação. Nosso objetivo é dar uma direção inicial para que os assuntos abordados possam ser efetivamente trabalhados em sala de aula. Ressaltamos, porém, que estas são **algumas sugestões** e que, portanto, os professores não devem pautar o trabalho em sala de aula apenas utilizando-as. Devem servir de base para que possam construir o próprio repertório.

3 As atividades que apresentamos foram construídas durante a formação, seja por nós pesquisadoras ou pelos professores participantes. Essas atividades passaram por diferentes modificações e apresentaremos apenas as versões finais.

Problemas de partição

1) Nas Olimpíadas de Matemática de uma escola, 352 alunos se inscreveram. As provas serão realizadas em 11 salas com a mesma quantidade de alunos. Quantos alunos caberão em cada sala?

2) Um feirante comprou três centos de laranjas e os distribuiu em 10 caixas com a mesma quantidade. Quantas laranjas foram colocadas em cada caixa?

3) A professora Camila comprou um pacote com 50 pirulitos para repartir igualmente entre seus dez alunos. Quantos pirulitos cada um recebeu?

- **Problemas de quotição**

4) Luciana quer organizar as 120 lembrancinhas que entregará no dia de seu aniversário em caixinhas, de forma que cada uma contenha 6 lembrancinhas. Quantas caixinhas serão necessárias?

5) Uma merendeira preparou 558 pães e os acomodou em bandejas, cada uma contendo18 pães. De quantas bandejas a merendeira precisou?

6) Para uma festa de aniversário, Joana comprou 6 garrafas de refrigerante, contendo 2 litros cada. Quantos copos de 300mL poderão ser servidos?

- **Problemas de configuração retangular**

7) Em um auditório, há 28 cadeiras organizadas em quatro fileiras. Quantas cadeiras há em cada fileira?

8) Para cantar o hino nacional, as professoras do 1º e 2º anos organizaram seus 48 alunos em filas com a mesma quantidade de pessoas. Quais as possibilidades de organizar esses filas?

9) Tenho um lote em formato retangular de 275m², cujo comprimento equivale a 25 metros. Quantos metros meu lote tem de largura?

- **Problemas de combinatória**

10) Cássia quer ir a uma festa de final de ano e reclama com sua mãe que não tem “nada para vestir”. Ao tentar animar a filha, a mãe de Cássia diz: “Minha filha, só com suas bermudas e as oito blusas novas que você tem, é possível fazer 48 combinações de roupa. Não precisa se desesperar!”. De acordo com o que foi dito pela mãe de Cássia, indique quantas bermudas ela tem.

11) Carmem oferece em sua sorveteria 15 combinações de sorvete e cobertura, sendo que o cliente pode escolher apenas um sabor e apenas uma cobertura. Sabendo que são 5 os tipos de sorvete, quantos são os tipos de cobertura?

12) Arthur vai fazer uma viagem curta e decidiu levar a menor quantidade de roupas possível. Ele fez as contas e percebeu que, com as roupas que pretendia levar, era possível fazer 20

combinações diferentes usando uma calça e uma camiseta. Se Arthur pegou 4 calças, quantas camisetas separou?

- **Problemas de comparação multiplicativa.**

13) João tem o triplo da quantidade de dinheiro de Maria. Se João tem R$ 135,00, quantos reais tem Maria?

14) Na loja da Angelina, os preços estão duas vezes mais caros do que na loja do Paulistão. Se uma calça custa R$ 230,00 na Angelina, quanto custará essa mesma calça na loja do Paulistão?

15) Mariele foi ao pomar e colheu 88 laranjas. Sua irmã colheu quatro vezes menos essa quantidade. Quantas laranjas a irmã de Mariele colheu?

➢ LEITURA COMPLEMENTAR

Para os que desejam aprofundar os estudos sobre o campo conceitual multiplicativo sugerimos as seguintes referências:

BRITO, K.L.G. **Divisão com números naturais: Um estudo dos saberes (re)construídos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental.** 2017. 194f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2017.

GUERIOS, Ettiene Cordeiro; AGRANIONIH, NeilaTonin; ZIMER, Tania Teresinha Bruns. **Situações aditivas e multiplicativas no ciclo de alfabetização**. In: BRASIL. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Operações na resolução de problemas. Brasília, DF: MEC, SEB, 2014. p. 17- 42.

GITIRANA. V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M.; SPINILLO, A. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA, S. MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, J. A. de; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais.** Curitiba: CRV, 2016, pp.65-82.

ATENÇÃO! Os autores apresentam uma proposta de trabalho que contempla a construção dos conceitos com base em ideias dos campos conceituais, utilizando situações que promovem o pensamento operatório e suas diferentes formas de representação. É importante salientar que as classificações das situações são conhecimentos importantes para a prática docente, pois permitem ao professor propor e selecionar situações variadas, as quais proporcionarão às crianças compreender melhor as situações envolvidas.

Nos textos, além das definições de cada situação multiplicativa, podem ser encontrados também exemplos de atividades e explicações para os raciocínios mobilizados pelos alunos.

3
UM OLHAR SOBRE O CÁLCULO MENTAL E A CALCULADORA

Os procedimentos de cálculo mental apoiam-se nas propriedades das operações e do sistema de numeração (seja ele decimal ou de outra base), colocando em ação diferentes tipos de escrita numérica e de relações entre os números. Trabalhar com esse tipo de cálculo pode se tornar uma atividade interessante e desafiadora, pois dá liberdade ao aprendiz para definir as próprias estratégias, que podem variar conforme o desenvolvimento cognitivo de cada um. Além disso, "o exercício e a sistematização dos procedimentos de cálculo mental, ao longo do tempo, levam-no a ser utilizado como estratégia de controle do cálculo escrito" (BRASIL, 1997, p.76). Assim sendo, o cálculo mental se apresenta como uma base, capaz de contribuir para o desenvolvimento de habilidades futuras. Nesse contexto, ao apresentar situações que estimulem o raciocínio mental de seus alunos, o professor estará contribuindo para uma possível compreensão do cálculo escrito em atividades futuras.

Com relação ao uso de calculadora, Fontes (2010) destaca a possibilidade de associação entre este instrumento e o cálculo mental. Conforme a autora, "[...] há inúmeras atividades que podem ser feitas para desenvolvermos cálculos eficientes, fazendo uso da calculadora, haja vista que o resultado não é o mais importante e sim a construção do percurso para obtê-lo" (FONTES, 2010, p. 8).

Concordamos com a autora que existe a necessidade de compreender criticamente aquilo que a pessoa está fazendo, isso significa que o indivíduo deve ter noção dos cálculos para acompanhar seus resultados e, além disso, compreender como fazê-lo e as possibilidades de fazê-lo de formas diferentes. Sob essas condições, a calculadora passa a ser pensada como uma ferramenta auxiliar, mediadora de um processo de ensino e aprendizagem que valoriza o fazer matemático como um todo. Assim, “na escola, a calculadora não precisa ser usada para obter resultados, mas para auxiliar o aluno a ampliar seu repertório de estratégias de cálculo, inclusive com números maiores” (FONTES, 2010, p. 8).

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais preconizem o uso do cálculo mental e a calculadora nas aulas de matemática, percebemos na formação que ofertamos que esses recursos são pouco explorados em sala de aula. A maioria dos professores apresentou como justificativa o fato de desconhecer alternativas que os auxiliassem em seu trabalho, afirmando inclusive que, em sua formação inicial, não foram preparados para tal. Tudo isso nos faz refletir sobre a relevância de discutir tais assuntos em cursos de formação continuada, pois muitas questões relacionadas à prática do professor não são contempladas na formação inicial (GATTI, 2010).

➢ QUESTIONAMENTOS

Após a leitura do texto, sugerimos alguns questionamentos que podem ser feitos para direcionar as discussões:

- Como o cálculo mental e a calculadora são trabalhados em sua sala de aula?
- Quais tipos de atividades são desenvolvidas normalmente? Cite exemplos.
- Um ou outro é trabalhado com mais intensidade? Por quê?
- Como os alunos lidam com esses procedimentos? Há dificuldades? Quais?

Lembramos que esses são apenas alguns questionamentos; o importante é que os professores reflitam sobre como estão trabalhando em sala de aula. Algumas provocações: Será que está sendo dada a devida atenção a esses tipos de procedimentos ou dedicamos apenas “uma ou duas aulas” a essas ações e priorizamos o ensino do algoritmo? O que estamos fazendo para que nossos alunos construam conceitos? Com certeza, esses são pontos que merecem ser pensados!

PARA DISCUTIR...

Situação 1

O professor estava trabalhando atividades de cálculo mental e propôs que seus alunos explicassem as estratégias que utilizaram para resolver a divisão de 125 por 25.

Caro professor,

a) **Como você resolveria essa questão?**
b) **Comente sobre as estratégias adotadas por cada aluno: Todas são válidas? Houve a aplicação de alguma propriedade das operações matemáticas? Qual (quais)?**
c) **Se algum dos alunos não conseguisse resolver a questão, como você o auxiliaria?**

Formador, é interessante discutir com os professores as estratégias adotadas por cada aluno, incentivando-os a analisar as propriedades utilizadas e os raciocínios desenvolvidos em cada caso. Proponha também que eles expliquem como fariam para resolver mentalmente a operação proposta e, se for o caso, sugira outras divisões.

Situação 2

Na aula de hoje, a proposta do professor é que as atividades sejam feitas utilizando a calculadora. Veja o que aconteceu com uma de suas alunas.

E agora, professor? Quais estratégias podem ser adotadas pela aluna? Lembre-se de que ela precisa utilizar a calculadora!

Formador, caso os professores apontem como única alternativa utilizar a multiplicação, aproveite a oportunidade e incentive-os a explorar outras operações e suas propriedades!

➢ Comentários sobre a situação 1

O aluno de blusa verde utilizou a **decomposição**, decompondo o dividendo da seguinte maneira: 125 = 100 + 25. Em seguida, usou a **propriedade distributiva da divisão em relação à adição** (100 : 25) + (25 : 25). Dessa forma, o resultado seria a soma dos quocientes obtidos (4 + 1 = 5).

Utilizando a linguagem matemática, poderíamos expressar esse raciocínio da seguinte maneira:

$$
\begin{gathered}
125 : 25 = \\
(100 + 25) : 25 = \\
(100 : 25) + (25 : 25) = \\
4 \quad + \quad 1 = \\
5
\end{gathered}
$$

É importante ressaltar que os alunos podem alcançar o mesmo resultado decompondo o dividendo de diferentes maneiras:

- $125 : 25 = (50 + 50 + 25) : 25 = (50 : 25) + (50 : 25) + (25 : 25) = 2 + 2 + 1 = 5$
- $125 : 25 = (75 + 50) : 25 = (75 : 25) + (50 : 25) = 3 + 2 = 5$

O importante é deixar que mobilizem seus raciocínios e tenham a oportunidade de dialogar sobre eles. Dessa forma, o professor poderá entendê-los e intervir, corrigindo possíveis erros que venham a cometer.

O aluno de blusa azul estabelece uma relação com a operação de **multiplicação,** ou seja: multiplica o divisor por números naturais até que o produto seja igual ao dividendo. No caso desse aluno, uma dica seria chamar a atenção para as relações multiplicativas que podem ser estabelecidas.

$$\begin{array}{lcl} 25 \times 2 & = & 50 \\ 25 \times 4 & = & 100 \end{array} \quad \boxed{\times 2} \quad \boxed{\times 2}$$

FIQUE ATENTO:
Observe que, ao dobrarmos um dos fatores, o resultado também dobrou.

O aluno de <u>blusa laranja</u> utilizou a **fatoração.** Essa estratégia consiste em "substituir" o divisor por outros valores correspondentes. No caso apresentado, temos 25 = 5 x 5, nesse caso, em vez de dividir por 25, dividiríamos por 5 e, em seguida, por 5 novamente. Utilizando a linguagem matemática, poderíamos representá-las da seguinte maneira:

125 : 25 =
125 : 5 : 5 =
25 : 5 =
5

- **Comentários sobre a situação 2**

Nessa situação, os professores poderão utilizar qualquer outra tecla: adição, subtração, multiplicação ou a combinação entre elas, por isso, cabe a eles encontrar a estratégia que julgar mais conveniente. É importante fazer com que percebam que existe uma relação entre a divisão e as demais operações e, mais do que isso, que as atividades com a calculadora não estão ligadas à resolução mecânica das operações; essas atividades devem permitir que os alunos mobilizem seus conhecimentos e tracem estratégias próprias para resolvê-las. Na sequência, apresentaremos algumas possibilidades para resolver a mesma questão:

- Utilizando a subtração

O divisor 12 pode ser subtraído do dividendo 180 até que não seja mais possível realizar a subtração, sobrando, assim, um resto de valor igual a 0 ou menor do que o divisor (12). **O resultado será equivalente à quantidade de vezes que o divisor for subtraído.**

$$\left.\begin{array}{l} 180 - 12 = 168 \\ 168 - 12 = 156 \\ 156 - 12 = 144 \\ \qquad\quad \vdots \\ 12 - 12 = 0 \end{array}\right\} \boxed{\textbf{O 12 é subtraído 15 vezes}}$$

Aproveite a oportunidade para mostrar que algo semelhante pode ser feito com a adição, adicionando o divisor 12 até alcançar o resultado ou, nos casos em que têm resto, próximo a ele.

$$\underbrace{12 + 12 + 12 + 12 + \ldots + 12} = 180$$

O divisor 12 será repetido 15 vezes.

- Utilizando a multiplicação

Outra possibilidade é usar a estratégia de tentativa e erro e multiplicar o divisor 12 até que se encontre um fator que resulte no dividendo 180 (ou próximo a ele nas operações com resto).

- Combinando a multiplicação e a subtração

Uma das possibilidades é combinar a multiplicação e a subtração

180
-120 (10 x 12 = 120, nesse caso, o 12 foi tirado dez vezes)
060
- 24 (2 x 12 = 24, nesse caso, o 12 foi tirado 2 vezes)
36
- 36 (3 x 12 = 36, nesse caso, o 12 foi tirado 3 vezes)
0 (não tem como subtrair mais)

O resultado será a quantidade de vezes em que o divisor 12 foi subtraído : 10 + 2 + 3 = 15

Observação: Essa estratégia pode ser uma alternativa para se trabalhar também com as estimativas e o cálculo mental.

➢ ATIVIDADES

CÁLCULO MENTAL

1) Divida mentalmente 844 por 4.

2) Divida mentalmente 843 por 4.

CALCULADORA

3) Utilizando a calculadora, determine o resto da divisão de 10322 por 1588.

4) Utilizando a calculadora, registre uma estratégia para dividir 540 por 10, sem utilizar as teclas 1 e 0.

➢ LEITURA COMPLEMENTAR

Para os que desejam aprofundar os estudos sobre cálculo mental, sugerimos a dissertação de Fontes (2010). Nesse trabalho, a autora traz diferentes abordagens e definições sobre o cálculo mental, relacionando-o com outros procedimentos e apontando seus benefícios. No texto, também há discussões relacionadas à calculadora. Vale a pena conferir.

FONTES, Cintia Gomes da. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais.** 2010. 220 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
Link: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-11112010-162005/pt-br.php

4
UM OLHAR SOBRE O ALGORITMO

Os algoritmos consistem em uma **sequência de etapas que fazem parte de uma instrução exata a ser seguida** (Centurión, 2006). Se executado de forma precisa, o algoritmo apresenta a vantagem de sempre alcançar o resultado correto. Entretanto, sabemos que **nem sempre encontrar a resposta "certa" significa que houve compreensão**: a criança pode executar mecanicamente a operação, sem que tenha significado nem sentido para ela.

Fontes (2010) atesta que o ensino precipitado do algoritmo pode resultar em utilizá-lo sem compreensão, o que se caracteriza por resolvê-lo de forma mecanizada e pela aceitação dos resultados sem questionamento. Segundo a autora, quando "atropelamos" a aprendizagem com o ensino dos algoritmos, antecedendo o domínio do cálculo, não trabalhamos sua lógica, dando ênfase somente às suas regras e sequências, isso gera um conhecimento não questionado, apenas memorizado, unilateral, o que pode gerar um bloqueio do raciocínio, impossibilitando que se estabeleçam relações. Jesus (2005) também afirma que:

> [...] aprender regras e procedimentos sem entendimento pode provocar sérias consequências a longo prazo que não se veem imediatamente. Se os procedimentos são aprendidos como peças soltas de informação sem conexão com o conhecimento **conceptual**, os alunos têm maior dificuldade de os relembrar e transpor para outros conceitos.(JESUS, 2005, p.93)

Analogamente, Guerios, Agranionih e Zimer (2014) afirmam ser desaconselhável que um aluno saiba utilizar o algoritmo e não seja capaz de desenvolver estratégias que lhe permitam resolver um problema solicitado em sala de aula ou até mesmo na vida fora da escola. Como dito anteriormente, não basta o aluno saber fazer o algoritmo, é necessário que ele saiba o porquê de está fazendo e o que se obtém com aquele procedimento. Dessa forma, é de extrema importância que os alunos compreendam os procedimentos realizados, atribuindo significado a operação que será feita. Esse entendimento de "para que serve e como se faz" pode contribuir para não existir a clássica pergunta: "Professora, que continha tenho que usar?" Cremos que, nesse caso, os alunos já seriam capazes de identificar, por conta própria, a operação que deverá ser utilizada.

Megid (2012) entende que os algoritmos não devem ser tomados como ponto de partida para o ensino das operações fundamentais. Em sua concepção, eles devem ser "o ponto de chegada de um caminho que se inicia com as ações concretas dos alunos, passando por suas estratégias pessoais, muitas vezes ancoradas nas habilidades do cálculo mental" (MEGID, 2012, p.2). O livro que propomos também foi elaborado nessa linha de pensamento: acreditamos que os conceitos se constroem baseados em diferentes situações vivenciadas pelos alunos, que perpassam a estimativa, o cálculo mental, a calculadora e se concretizam com a formalização do algoritmo.

ALGUMAS SUGESTÕES

- **Questionamentos**

1) Para você, uma criança que executa corretamente o algoritmo compreendeu a operação?

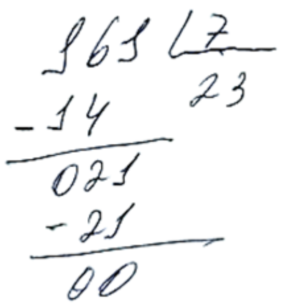
2) Qual o melhor momento para inserir o algoritmo?

3) Comente sobre sua experiência ao trabalhar com o algoritmo. Como os alunos e você se sentem em relação a isso, fale sobre as dificuldades e facilidades sentidas. Qual a reação dos alunos? Quais dificuldades você percebe? Quais dificuldades você enfrenta como professor regente?

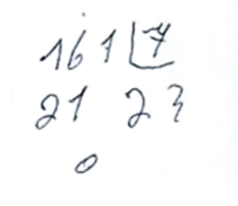
PARA DISCUTIR...

A professora Andressa aplicou uma prova de Matemática para o 5º ano. Observe a resposta de alguns alunos para a seguinte questão: **Em uma escola, foram matriculados 161 alunos no 5º ano. Sabendo que serão formadas sete turmas, quantos alunos cada turma terá?**

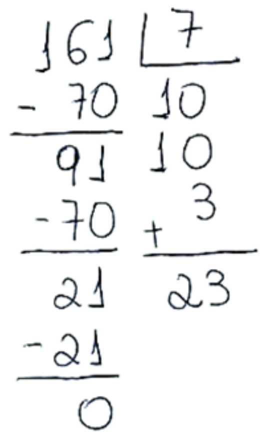
Orly



Maria



Penha



Comente sobre a estratégia adotada por cada aluno, destacando suas características, as vantagens e desvantagens de utilizá-las.

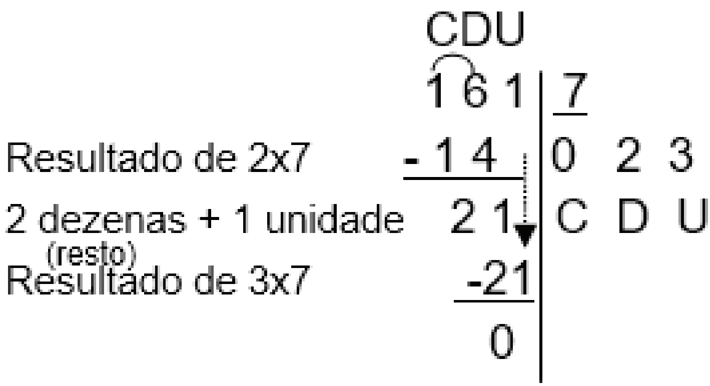
Os alunos Orly, Maria e Penha utilizaram os processos denominados curto, longo e o de subtrações sucessivas, respectivamente. Incentive-os a refletir sobre cada um deles. Em seguida, peça que relatem suas experiências em sala de aula e como costumam trabalhar (apenas continhas armadas, por meio de problemas). Pode acontecer de o processo de subtrações sucessivas ser desconhecido por muitos. Assim, proponha também que eles resolvam uma divisão aplicando esse método, dessa forma, poderão perceber na prática as diferentes formas de efetuá-lo.

➢ **Comentários sobre a situação**

Para melhor compreender os processos, utilizaremos as explicações com base em Centurión (2006)

- Método longo (aluno Orly)

O método longo tem por característica evidenciar a subtração no algoritmo. Como nossa proposta é realizar a operação com compreensão e sentido, explicaremos o passo a passo de cada uma de suas etapas que, muitas vezes, são "puladas", na falsa convicção de que os alunos aprenderão com o tempo, sozinhos.



FIQUE ATENTO:

Pode acontecer de os professores utilizarem a seguinte expressão: "Como 1 não dá para dividir por 7, pegamos o 16". Além de equivocada, esse tipo de expressão pode conduzir os alunos a erros conceituais. Logo, o correto seria dizer "1 centena dividido por 7 é igual a 0 centenas" e fazer o registro do número zero no quociente.

Em primeiro lugar, verificamos que uma centena dividida em 7 partes não pode dar centena no quociente, pois o resultado ultrapassaria a quantidade total de crianças. Dessa forma, colocamos o zero no quociente. Em outras palavras, ao dividir 100 unidades por 7, não teríamos como resultado uma centena inteira: por isso, a utilização do zero na ordem destinada as centenas, ou seja, 1 dividido por 7 dará zero. Consideramos importante que essa etapa não seja "pulada", mas sim que, aos poucos, a própria criança perceba que não há necessidade de utilizar o zero.

No segundo momento, agrupamos a centena com as 6 dezenas. Como uma centena corresponde a 10 dezenas, teremos um total de 16 dezenas para serem divididas por 7. É por essa razão que fazemos um arco acima dos algarismos 1 e 6 (Centurión, 2006). Feita a divisão, encontramos o quociente 2 (dezenas) e um resto também de 2 (dezenas).

O resto deverá ser agrupado a uma unidade de 161, ou seja, temos duas dezenas (que correspondem a 20 unidades) e uma unidade, totalizando 21 unidades para serem divididas por 7, resultando em 3. Sendo assim, o resultado da divisão de 161 por 7 é igual a 23.

- Método curto (aluna Maria)

No método breve/curto, a subtração fica implícita, o que exige mais habilidade de calculo mental por parte dos alunos. Esse método é uma "abreviação" do processo longo: por isso, recomenda-se que os alunos compreendam e dominem as etapas envolvidas no processo longo para que, aos poucos, adquiram autonomia e confiança para empregar o método curto. Assim, colocar o zero na casa das centenas é importante quando ainda não há domínio do algoritmo e das estratégias de resolução.

```
CDU
 1 6 1|__7
0 2 1   0 2 3
   00    C D U
```

É importante ressaltar que, antes de iniciar o estudo com algoritmos, o professor deve se certificar de que seus alunos têm compreensão do sistema de numeração decimal. Para isso, sugerimos que nos primeiros contatos do aluno com o algoritmo, o professor registre as ordens ocupadas pelos algarismos do dividendo e as correspondentes ordens que serão ocupadas pelos algarismos do quociente – como feito nos exemplos anteriores. Acreditamos que essa ação pode minimizar o índice de erros, sobretudo, em questões nas quais o "zero" é um elemento do quociente ou do resto.

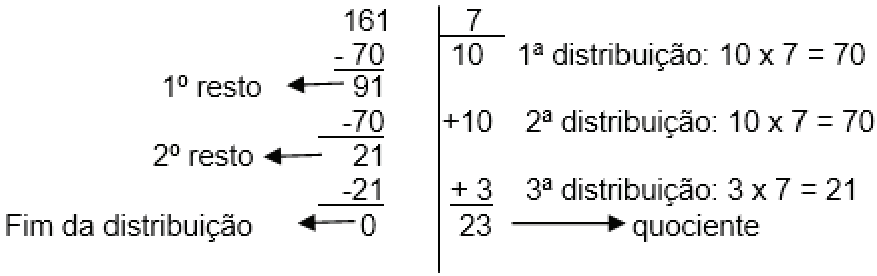
Outra questão: o domínio da tabuada pode agilizar os cálculos por estimativa. Nossa sugestão é que os alunos com dificuldade escrevam a tabuada ao lado da conta ou no rascunho. Isso possibilitará que tenham mais desenvoltura e poderá auxiliá-los a compreender a relação existente entre a multiplicação e a divisão.

- Algoritmo das subtrações sucessivas (aluna Penha)

Esse algoritmo relaciona-se com a subtração sucessiva de parcelas, o que pode estimular o desenvolvimento do cálculo por estimativas. Nesse método são gerados **resultados parciais**

no quociente, que deverão ser **somados** ao final do algoritmo, obtendo-se, assim, o valor final do resultado. Outro ponto a ser considerado é que o **dividendo é analisado como um todo**, e não de forma isolada (valor posicional).

Alguns autores sugerem que esse método seja ensinado antes dos processos longo e curto, pois pode auxiliar a criança no que se refere aos processos dos métodos anteriores.



O algoritmo das subtrações sucessivas também é útil em situações em que o "zero" surge no quociente, pois, ao estimar quantas vezes "cabe", o aluno tem uma percepção mais ampla dos valores, o que pode minimizar a probabilidade de erro. Além disso, como o quociente resulta da soma de valores parciais, a probabilidade de o aluno "esquecer" de acrescentar o zero pode ser minimizada.

➢ ATIVIDADE

1) (Adaptada de Jesus, 2005) O professor do Antônio quase deu um nó na cabeça ao tentar dividir seus alunos em grupos com a mesma quantidade de pessoas. Ao fazer cinco grupos, sobravam quatro alunos. Ao fazer quatro grupos, sobravam três alunos e, ao fazer três grupos, ainda sobravam dois alunos. Quantos alunos havia na turma?

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília, DF, 1997.

BRITO, K.L.G. **Divisão com números naturais: Um estudo dos saberes (re)construídos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental.** 2017. 194f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2017.

CENTURIÓN, M.. **Conteúdo e Metodologia da Matemática. Números e Operações**. São Paulo, Scipione, 2006. p. 150 – 208.

FONTES, C. G. da. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais.** 2010. 220 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

GATTI, Bernadete A. **Formação de professores no Brasil:** características e problemas. Educ. Soc, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, set. 2017. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v31n113/16.pdf. Acesso em: 15 jan. 2016.

GITIRANA. V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M.; SPINILLO, A. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2014.

GUERIOS, Ettiene Cordeiro; AGRANIONIH, NeilaTonin; ZIMER, Tania Teresinha Bruns. **Situações aditivas e multiplicativas no ciclo de alfabetização**. In: BRASIL. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Operações na resolução de problemas. Brasília, DF: MEC, SEB, 2014. p. 17-42.

JESUS, A.M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 91-111.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G.. **As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 18, n. 3, 2002. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php. Acesso em: 10 jan. 2016.

MEGID, M.A.B.A. **Formação de professores e o ensino aprendizagem da divisão**. In: XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, 16, 2012. Campinas: UNICAMP, 2012, p. 4312 – 4323.

PONTE, J.P. Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In: PONTE, J. P. (org). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: UIDEF, 2014, p. 343 – 360.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. E**ducational Researcher,** v.15, n.2, p.4-14, feb.1986. Disponível em: http://www.jstor.org. Acesso em: 10 fev. 2016.

SHULMAN, Lee S.. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec | Nova série**, [S.l.], v. 4, n. 2, june 2015. ISSN 2237-9983. Disponível em: <http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293/297>. Acesso em: 28 oct. 2016. doi:http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino de matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014. 322p.

9 788582 632659