

**Série Guias Didáticos de Matemática**

**61**

**Teorema de Pitágoras e o Geogebra:  
Uma Relação Possível**

---

**Gilson Abdala Prata Filho  
Ligia Arantes Sad**

**EDIFES  
2018**

Copyright @ 2018by Instituto Federal do Espírito Santo



**Instituto Federal do Espírito Santo**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**  
**Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática**

**GILSON ABDALA PRATA FILHO**  
**LIGIA ARANTES SAD**

## **TEOREMA DE PITÁGORAS E O GEOGEBRA: UMA RELAÇÃO POSSÍVEL**

Série Guias Didáticos de Matemática – nº 61

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo**

**Vitória**

**2018**

(Biblioteca do Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância - Cefor)

P912t Prata Filho, Gilson Abdala.

Teorema de Pitágoras e o Geogebra: uma relação possível [recurso eletrônico] / Gilson Abdala Prata Filho, Ligia Arantes Sad. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2018.

2344kb. : il. ; pdf (Série guias didáticos de matemática ; 61)

ISBN: 978-85-8263-384-7

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Pitágoras, Teorema. 3. Ensino – meio auxiliares. I. Sad, Ligia Arantes. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 510.7

## **Editora do IFES**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo  
Pró-Reitoria de Extensão e Produção  
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255  
Tel. (27) 3227-5564 E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

## **Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática**

Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara  
Sala do Programa Educimat  
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

## **Comissão Científica**

Dr<sup>a</sup> Ligia Arante Sad, D. Sc - Ifes  
Dr<sup>a</sup> Maria Auxiliadora Vilela Paiva, D. Sc – Ifes  
Dr. Rodolfo Chaves, D. Sc Ifes  
Dr. Geraldo Cláudio Broetto, D. Sc – Ifes

## **Coordenação Editorial**

Sidnei Quezada Meireles Leite  
Danielli Veiga Carneiro Sondermann  
Maria Auxiliadora Vilela Paiva  
Michele Waltz Comarú  
Maria das Graças Ferreira Lobino

## **Revisão**

Lis Motta

## **Capa e Editoração Eletrônica**

Katy Kenio Ribeiro

## **Editoração Eletrônica**

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor/IFES)

## **Produção e Divulgação Programa**

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e  
Matemática Centro de Referência em Formação e  
Educação à Distância

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo.



**Instituto Federal do Espírito Santo**

**Jadir José Pela**

Reitor

**Adriana Pionttkovsky Barcellos**

Pró-Reitora de Ensino

**André Romero da Silva**

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

**Renato Tannure Rotta de Almeida**

Pró-Reitor de Extensão e Produção

**Lezi José Ferreira**

Pró-Reitor de Administração e  
Orçamento

**Luciano de Oliveira Toledo**

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional

**Diretoria do Campus Vitória do Ifes**

**Hudson Luiz Cogo**

Diretor Geral do Campus Vitória-Ifes

**Marcio de Almeida Có**

Diretor de Ensino

**Marcia Regina Pereira Lima**

Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

**Christian Mariani Lucas dos Santos**

Diretor de Extensão

**Roseni da Costa Silva Pratti**

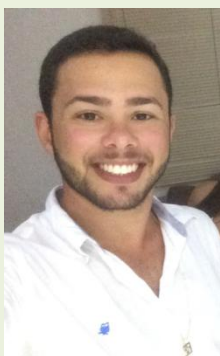
Diretor de Administração

Centro de Referência em Formação e Educação à Distância

**Vanessa Battistin Nunes**

Diretora do Cefor

## APRESENTAÇÃO DOS AUTORES



Gilson Abdala Prata Filho é mestrando em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), atuando na linha de pesquisa de Práticas Pedagógicas no contexto da educação em Ciências e Matemática. É graduado em Licenciatura em Matemática pelo Ifes - *Campus Cachoeiro de Itapemirim* (2015), e em Licenciatura em Pedagogia pela Faculdade Educacional da Lapa (Fael) (2018), especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Educação do Espírito Santo (2016). Atua como professor de Matemática na Educação Básica.

**Currículo Lattes:** <http://lattes.cnpq.br/1104520906892599>

**Email:** [gilson.abdala@hotmail.com](mailto:gilson.abdala@hotmail.com)



Ligia Arantes Sad é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho (Unesp), especialista e graduada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes). Atualmente é professora efetiva do Centro de Formação e EaD – Cefor/Ifes, do Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática (Educimat), atuando e pesquisando nos campos da História da Matemática, Educação Matemática, Epistemologia e Diversidade Cultural.

**Currículo Lattes:** <http://lattes.cnpq.br/1714140036102231>

**Email:** [aransadli@gmail.com](mailto:aransadli@gmail.com)

## APRESENTAÇÃO DO GUIA DIDÁTICO

Este Guia Didático é produto educacional da pesquisa de mestrado intitulada **TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ANÁLISES EPISTEMOLÓGICAS DE TIVIDADES EM TURMAS DE 9º ANO DA REDE PÚBLICA**, desenvolvida durante o ano de 2016 a 2018 no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), com o objetivo de analisar as contribuições de uma abordagem metodológica, no ensino fundamental, utilizando a História da Matemática e situações problemas via GeoGebra no estudo do Teorema de Pitágoras, tendo como princípio a produção de significados como aspecto central para aprendizagem.

Neste guia apresentamos a História da Matemática e o uso do software GeoGebra no processo educacional, com objetivo de contribuir para a prática docente e para o estudo do Teorema de Pitágoras.

Propusemos um breve manual do GeoGebra e algumas sugestões de atividades a serem desenvolvidas para aqueles que terão o primeiro contato com o *software*. Em consonância com o objeto matemático da pesquisa – o Teorema de Pitágoras – apresentamos o passo a passo, no GeoGebra, de três demonstrações do teorema: a de Pitágoras, a de Euclides e a de Leonardo Da Vinci. Além disso, trazemos algumas sugestões de atividades com aplicação do teorema que podem ser trabalhadas com o auxílio do *software*. Por fim, apresentamos recursos que podem ser utilizados pelos professores como alguns livros e trabalhos que abordam o tema apresentado na pesquisa, *softwares* que podem ser utilizados no ensino e aprendizagem de Matemática e trabalhos a respeito do tema.

Esperamos que você, professor, possa desfrutar positivamente deste material e adaptá-lo sempre que achar necessário durante o processo educacional.

Boa Leitura e Bom Uso!  
Os Autores.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                       |                                        |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Figura 1: Tela Inicial.....                           | 19                                     |
| Figura 2: Construção de reta.....                     | 22                                     |
| Figura 3: Equação da reta na caixa de entrada.....    | <b>Error! Indicador Não Definido .</b> |
| Figura 4: Localização de Pontos.....                  | 46                                     |
| Figura 5: Reta paralela e perpendicular.....          | 47                                     |
| Figura 6: Construção de Polígonos.....                | 48                                     |
| Figura 7: Estudo de Função.....                       | 49                                     |
| Figura 8: Semelhança de triângulos.....               | 27                                     |
| Figura 9: Demonstração no GeoGebra - Pitágoras.....   | 28                                     |
| Figura 10: Área dos quadriláteros.....                | 30                                     |
| Figura 11: Demonstração no GeoGebra - Da Vinci.....   | 32                                     |
| Figura 12: Demonstração no GeoGebra - Euclides.....   | 35                                     |
| Figura 13: Possível resolução para atividade 2.....   | 49                                     |
| Figura 14: Possível resolução para a atividade 3..... | 50                                     |
| Figura 15: Possível resolução para a atividade 4..... | 51                                     |
| Figura 16: Altura do prédio.....                      | 53                                     |
| Figura 17: Medida da parte quebrada da árvore.....    | 54                                     |
| Figura 18: Comprimento do fio de energia.....         | 55                                     |
| Figura 19: Diferença entre as estacas.....            | 56                                     |
| Figura 20: Força Resultante.....                      | 57                                     |
| Figura 21: Elementos de uma pirâmide.....             | 58                                     |



## SUMÁRIO

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUÇÃO.....                                          | 11 |
| 2. UM POUCO DE TEORIA.....                                  | 13 |
| 3. MANUAL DO GEOGEBRA.....                                  | 19 |
| 3.1 SUGESTÃO DE ATIVIDADES NO GEOGEBRA.....                 | 24 |
| 3.1.1 (Re)conhecendo o <i>software GeoGebra</i> .....       | 24 |
| 3.1.2 Localização no Plano Cartesiano.....                  | 24 |
| 3.1.3 Construção de retas paralelas e perpendiculares.....  | 24 |
| 3.1.4 Construção de Polígonos.....                          | 25 |
| 3.1.5 Estudo de Função do 1º grau.....                      | 25 |
| 4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO GEOGEBRA.....   | 26 |
| 4.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR PITÁGORAS..... | 26 |
| 4.1.1 Demonstração no GeoGebra.....                         | 27 |
| 4.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DA VINCI.....      | 29 |
| 4.2.1 Demonstração no GeoGebra.....                         | 30 |
| 4.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR EUCLIDES..     | 32 |
| 4.3.1 Demonstração no GeoGebra.....                         | 33 |
| 5. SUGESTÕES DE ATIVIDADES.....                             | 36 |
| 5.1 RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS.....          | 36 |
| 5.2 A ESCADA E O PRÉDIO.....                                | 37 |
| 5.3 A ÁRVORE QUEBRADA.....                                  | 37 |
| 5.4 A INSTALAÇÃO ELÉTRICA.....                              | 38 |
| 5.5 AS ESTACAS DE MADEIRA.....                              | 38 |
| 5.6 FORÇA RESULTANTE DE UM CORPO.....                       | 38 |
| 5.7 ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE REGULAR.....                  | 39 |
| 6. SUGESTÕES DE RECURSOS DIDÁTICOS.....                     | 40 |
| 6.1 LIVROS.....                                             | 40 |
| 6.2 OUTRAS SUGESTÕES DE TRABALHOS.....                      | 42 |
| 6.3 <i>SOFTWARES</i> .....                                  | 43 |
| 7. SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES.....               | 45 |
| 7.1 LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO.....                    | 46 |
| 7.2 CONSTRUÇÃO DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES.....    | 46 |
| 7.3 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS.....                            | 47 |
| 7.4 ESTUDO DE FUNÇÃO DO 1º GRAU.....                        | 48 |

|                                                    |           |
|----------------------------------------------------|-----------|
| 7.5 RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS..... | 49        |
| 7.6 A ESCADA E O PRÉDIO.....                       | 52        |
| 7.7 A ÁRVORE QUEBRADA.....                         | 53        |
| 7.8 A INSTALAÇÃO ELÉTRICA.....                     | 54        |
| 7.9 AS ESTACAS DE MADEIRA.....                     | 55        |
| 7.10 FORÇAS RESULTANTES.....                       | 56        |
| 7.11 ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE REGULAR.....        | 57        |
| <b>8. CONSIDERAÇÕES.....</b>                       | <b>60</b> |
| <b>REFERÊNCIAS.....</b>                            | <b>61</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática perpassou por muitas transformações que influenciaram e influenciam na prática docente. Este ensino pode ser uma prática tradicionalista podendo ser associada ao Ensino Tradicional da Matemática (ETM) em que o professor é o emissor do conteúdo e o aluno apenas receptor, não sendo produzido, necessariamente, o significado por parte deste na concepção do professor Rodolfo Chaves<sup>1</sup> até uma prática que permite o educando desenvolver habilidades, relacionar informações e ser capaz de aplicar a Matemática em sua realidade.

Apesar das mudanças na abordagem da Matemática, ainda é frequente a prática docente embasada na descontextualização da Matemática com a realidade dos educandos ou com outras disciplinas. Isto ocorre, segundo Chaves (2004), no ambiente hegemônico em que o professor não contextualiza e nem associa os conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento, como a Física, a Biologia, a Química entre outras. Desta forma há uma preocupação apenas em ensinar a Matemática para e pela Matemática, privilegiando o aspecto do formalismo. Desta forma, a Matemática desenvolve-se

“(...) através de aulas expositivas, descontextualizadas, com referência exclusiva à Matemática, centrada somente no discurso do professor, que replica o discurso do livro pronto a ser consumido, como uma programação curricular que não permite a experimentação, com a investigação (...)” (CHAVES, 2004, p. 9)

Com o intuito de transformar o modo como se trabalha a Matemática, muitas vezes vista como imutável e inquestionável, em uma Matemática viva que foi construída ao longo dos anos, para atender as necessidades das civilizações, diversas metodologias têm sido desenvolvidas e abordadas em sala de aula, como a utilização da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem. A História da Matemática pode contribuir para o estudo dos

---

<sup>1</sup> CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais?** Rio Claro, SP, 223 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro – São Paulo, 2004

conceitos matemáticos, haja vista que considera o processo histórico e, por meio deste, possibilita a produção de significados na construção e desenvolvimento da Matemática escolar e acadêmica. Vários são os argumentos favoráveis para a utilização da História da Matemática no ensino e aprendizagem. Veja a seguir um pouco desta metodologia que desde o final da década de 1980 têm ganhado espaço na Educação Matemática.

## 2. UM POUCO DE TEORIA

A História da Matemática ganhou espaço, no Brasil, no final da década de 1980, com a polêmica levantada ao Movimento da Matemática Moderna. Antes disso, pouco se falava a respeito de sua aplicação e utilidade na prática docente. Tem se consolidado como campo de conhecimento ao longo dos últimos 30 anos, e, mais recentemente, vem se despontando como tendência metodológica. Com o passar dos anos, diversas pesquisas foram realizadas e apontam o uso da História da Matemática como processo metodológico que auxilia no processo de ensino e aprendizagem, conforme citaremos algumas a seguir.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) , a Matemática é composta por um conjunto de unidades temáticas que “orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2017, p. 224). Essas unidades estão divididas em cinco, sendo elas: *Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística*. A unidade temática de Geometria compõe um estudo de conceitos e procedimentos úteis na resolução de situações da realidade, e por isso, não pode ser resumido apenas em aplicações de fórmula (BRASIL, 2017, p. 230).

Em consonância, os PCN afirmam que:

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42).

Desta forma, e em conformidade com Mendes (2015, p. 123), considerar o processo histórico contribui também para dar significado e mostrar a importância dos tópicos matemáticos na construção e desenvolvimento da Matemática que conhecemos nos dias de hoje. Percebemos que diferente do que é apresentada aos discentes, a Matemática é algo construído ao longo do tempo com intuito de auxiliar nas atividades cotidianas do homem em determinado contexto e época, com a finalidade de suprir necessidades. Apropriar da História na Educação Matemática traz benefícios para o ensino e aprendizagem, por exemplo, ajudando a responder a muitos “porquês” matemáticos, haja vista que este é um elemento provocador de investigação e

gerador da própria Matemática (MENDES, 2015, p. 134). Além de contribuir nas respostas dos acontecimentos, indagações e inquietações, o conteúdo histórico proporcionará “a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento” (BRASIL, 1998, p. 43). Assim, utilizá-la pode permitir um resgate histórico cultural, promover abordagem da Matemática como uma construção da própria humanidade, “desconstruindo” a ideia de seu distanciamento da realidade.

De acordo com Miguel & Miorim (2011), junto com a compreensão e à significação, durante o processo de ensino e aprendizagem, surgem os “porquês” de aceitar os fatos, fórmulas, raciocínios entre outros procedimentos. Segundo os autores, existem três categorias de porquês a serem considerados por aqueles que ensinam Matemática, são eles: porquês cronológicos, lógicos e pedagógicos. Os porquês cronológicos são aqueles ligados às explicações de razão natural, histórica, cultural e convencional, não podendo ser caracterizados como uma necessidade lógica, como por exemplo, *Porque há 60 segundos em um minuto?* Os porquês lógicos são aqueles que se baseiam em proposições previamente aceitas, como por exemplo, os aceitos axiomas: *O produto de dois números negativos é um número positivo*. Já os porquês pedagógicos são “os procedimentos operacionais que geralmente utilizamos em sala e que se justificam mais por razões de ordem pedagógica do que históricas ou lógicas” (MIGUEL; MIORIM, p. 47, 2011). Como exemplificação, *Por que ensinar a extrair o maior divisor comum entre dois números pelo método de subtrações excessivas e não pela decomposição simultânea?*

A História é revestida do papel fundamental para unir esses três porquês de modo a haver uma promoção no ensinar e aprender a Matemática com base na compreensão e significação. Além disso, é necessário que saibamos, não só porque trabalhar, mas também como trabalhar a História na construção da Matemática. Com esse intuito, Jankvist (2009) propõe três questionamentos que devem ser feitos, caso a História da Matemática seja utilizada, a saber:

- a) porquê a História pode/deve ser utilizada no ensino e aprendizagem da Matemática; b) como a História pode/deve ser utilizada no ensino e aprendizagem da Matemática; c) de que forma os argumentos para o uso são abordados, ou seja, os porquês e como, estão inter-relacionados. (JANKVIST, 2009, p. 236 – tradução nossa)

Sendo assim, faz-se necessário, ao optar por esta metodologia, definir porquê e como a História da Matemática será utilizada com finalidade de alcançar os objetivos propostos. Desta forma, Jankvist (2009) categoriza os ‘porquês’ e ‘como’ utilizar a História, seja como uma ferramenta para ensinar e aprender Matemática ou no que se refere à História com o objetivo de conhecer ela mesma, seu desenvolvimento e transformações.

A História como ferramenta é relacionada a como os estudantes aprendem Matemática. O autor destaca que a História pode ser fonte de motivação e auxiliar na “ajuda e sustento do interesse e entusiasmo do sujeito” (JANKVIST, 2009, p. 237). A História pode ser uma ferramenta cognitiva no suporte do ensino e aprendizagem de Matemática fornecendo diferentes pontos de vista. A História como ferramenta cognitiva contribui, segundo esse autor, na identificação de obstáculos epistemológicos, auxiliando não só na identificação destes como também em sua superação. Diferentemente, a História como objetivo de conhecer ela mesma, serve para,

(...) mostrar aos estudantes que a Matemática existe e evolui no tempo e no espaço; que é uma disciplina que tem sofrido uma evolução e que não surgiu do nada; que os seres humanos participaram dessa evolução; que a Matemática evoluiu através de muitas culturas diferentes ao longo da História e que essas culturas tiveram influência na modelagem da Matemática (...). (JANKVIST, 2009, p.239 – tradução nossa)

A História como objetivo está relacionada com as “questões externas” (desenvolvimento histórico das “coisas”, sua aceitação pela sociedade, dificuldades e etc.), enquanto que a História como ferramenta está voltada às com as questões internas (conceitos, teorias, disciplinas e métodos) da Matemática. É importante que esses argumentos categorizados (História como ferramenta e como objetivo) se inter-relacionem para que se justifique o uso (porquê e como) da História.

De modo geral, outros argumentos favoráveis à utilização da História são destacados por Miguel (1997, p.77- 93), sendo eles:

- 1) É uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem da Matemática.
- 2) Constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da Matemática.
- 3) Constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da Matemática.

- 4) É uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de Matemática.
- 5) É um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino.
- 6) Constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos.
- 7) É um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico.
- 8) É um instrumento unificador dos vários campos da Matemática.
- 9) É um instrumento promotor de atitudes e valores.
- 10) Constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica.
- 11) É um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática.
- 12) É um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural.

Estes argumentos podem ser agrupados, segundo Miguel & Miorim (2011), em duas categorias, os de natureza epistemológica (1 a 5, 7 e 10) e os de natureza ética (6, 8, 9 e 11). Os argumentos epistemológicos são assim chamados, porque estão relacionados à aprendizagem da Matemática (conceitos, fórmulas, teorias e etc.) e os argumentos éticos visam uma abordagem na formação ética pela aprendizagem Matemática.

Utilizar a História na Educação Matemática, não é apenas inserir dados históricos, como por exemplo, data, local, personagem principal, consiste, sim, em priorizar por uma “investigação histórica como um princípio de ensino, de aprendizagem e de socialização do conhecimento matemático” (MENDES, 2015, p. 120). Dentre as formas de utilizar a investigação em sala de aula, Mendes (2015) destaca alguns exemplos como: atividades manipulativas extraídas diretamente ou adaptadas da História da Matemática, investigação de problemas históricos, estudo de textos de fontes primárias, utilização de vídeos didáticos baseados em textos históricos, entre outros. Cada uma dessas propostas pode ser abordada em sala de aula, entretanto, requer do professor comprometimento em aprofundar-se no assunto a ser trabalhado, buscar a veracidade das fontes a serem utilizadas, promovendo a participação dos alunos na construção do conhecimento de forma ativa, reflexiva e crítica.

Nas proposições de investigação relacionadas às situações problemas, utilizando a História da Matemática, o professor ao viabilizar a interação dialógica entre os envolvidos favorece a reflexão sobre noções Matemáticas e outras do contexto sociocultural em que foram desenvolvidas. Cabe ao docente



encaminhar, segundo Mendes (2015, p. 131), “as transposições do conhecimento matemático histórico investigado para as situações cotidianas atuais do conhecimento (...)”, ou seja, é preciso realizar uma transposição didática para que o aluno seja capaz de aplicar o conhecimento em problemas práticos e/ou em novas situações.

É possível pensar em investigação histórica com o uso dos livros didáticos e, a partir deles. Pode-se abordar problemas matemáticos de obras antigas, atuais e/ou de paradidáticos para possibilitar aos discentes compreender a Matemática durante a investigação histórica, usada como um exercício dinâmico experimental.

Segundo Mendes (2015, p. 141),

Trata-se de uma dinâmica investigatória, ou seja, o aluno desenvolverá seu espírito investigador na construção da sua própria aprendizagem ao explorar as informações históricas, ou seja, investigar a construção histórica de determinados tópicos matemáticos, conforme os aportes matemáticos utilizados para produzir aquela Matemática, e porque não houve um avanço maior, tal como se tem atualmente a esse respeito.

Assim, a investigação histórica pode assumir um papel de estruturação na aprendizagem, entretanto, não deve ser desenvolvida como se fosse um roteiro sobre como “se fazer Matemática”, mas com a preocupação de serem conectadas aos aspectos cotidianos, escolares e científicos, desde a introdução ao conteúdo até as aplicações.

Aprender Matemática vai além de memorização de conceitos, “é um fenômeno de discurso” e tornar-se participante na aprendizagem “é o mesmo que aprender a pensar de uma forma Matemática” (SFARD, 2008 apud NORONHA; MENDES, 2015). Portanto, para que os estudantes possam participar ativamente no processo de aprendizagem e, ao mesmo tempo, pensar matematicamente, é importante que se utilize de recursos/ferramentas disponíveis, como por exemplo, os recursos tecnológicos. A utilização desses recursos na Educação pode acontecer em qualquer área do conhecimento, o que muda é sua abordagem pedagógica no processo.

De acordo com Valente (2001) essa abordagem pode acontecer de forma que o computador ‘ensina’ o aluno (instrucionismo) ou o aluno ‘ensina’ o

computador (construcionismo). Na primeira abordagem ocorre a instrução com auxílio do computador e os *softwares* utilizados servem como tutoriais com explicitação das informações necessárias. Já na segunda, o computador torna-se ferramenta que permite ao a resolução de problemas ou a realização de tarefas propostas. Para Valente (2001, p. 2) o uso dos *softwares* oferece ao aluno a “possibilidade de desenvolver hipóteses, testá-las, analisar resultados e refinar os conceitos” o que pode contribuir para “melhor compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade” (BRASIL, 1998). Desta forma, percebemos que a utilização de *softwares* educacionais podem proporcionar aulas mais criativas, motivadoras e dinâmicas, envolvendo os alunos de forma a explorarem e aprofundarem a compreensão de conceitos e se envolverem de forma significativa nas aulas de Matemática para novas descobertas e para a aprendizagem.

O uso da tecnologia contribui não só para os discentes, mas também para o professor e segundo Borba & Penteado (2005) usá-la, auxilia na ocorrência de um ensino qualificado e também para a melhoria da própria prática pedagógica. No entanto, é importante que os professores compreendam como usar a tecnologia de maneira que os discentes possam construir os conceitos estudados, ser crítico, reflexivo, criativo entre outros. Durante a realização das atividades, cabe ao professor o papel de mediador para realizar as intervenções necessárias a fim de produzir conhecimento.

Dentre diversos aplicativos voltados para o meio educacional, faremos menção do GeoGebra, um *software* desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade de Salzburgo na Áustria que envolve álgebra, geometria, estatística, gráficos, entre outros. Entre as diversas aplicações do *software*, temos a inserção de funções e equações, além de poder acrescentar objetos dinamicamente após suas construções; trabalhar com diversas variáveis para os números, pontos, vetores; determinar raízes e pontos extremos; derivar e integrar funções.

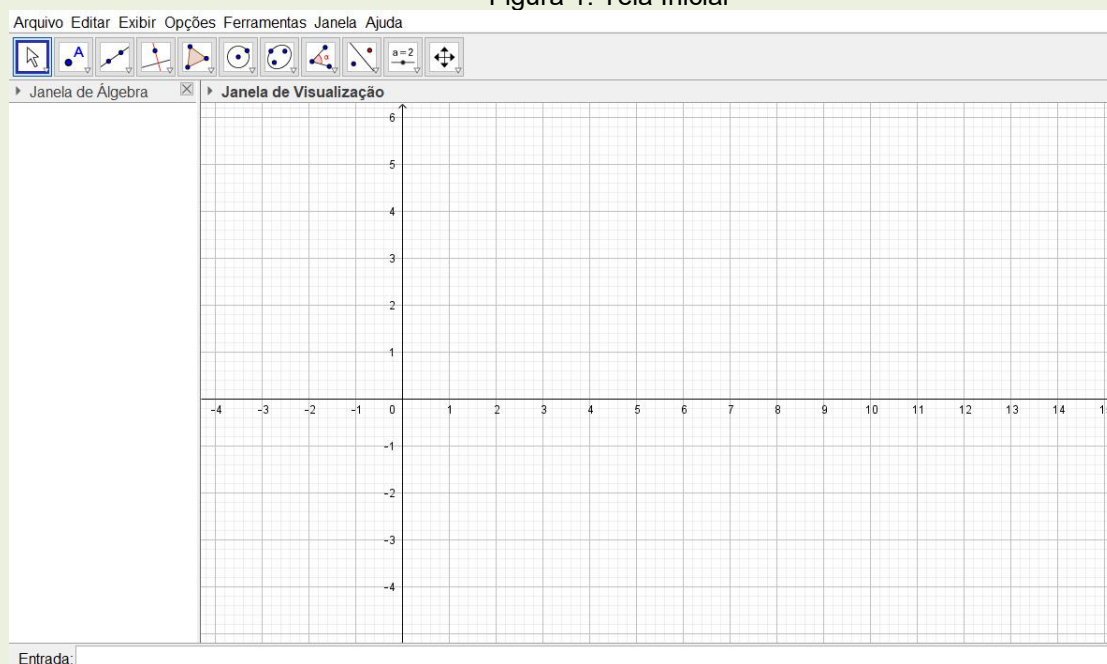
Que tal conhecer um pouco mais deste *software*, suas funções e algumas sugestões de atividades que podem ser aplicadas em um primeiro momento, e por que não dizer contato, com o GeoGebra? Acompanhe a seguir.

### 3. MANUAL DO GEOGEBRA

O GeoGebra<sup>2</sup> é um *software* que envolve Álgebra, Geometria, Estatística, gráficos, entre outros. Entre as diversas aplicações do *software*, temos a inserção de funções e equações, além de poder acrescentar objetos dinamicamente após suas construções; trabalhar com diversas variáveis para os números, pontos, vetores; determinar raízes e pontos extremos; derivar e integrar funções. O *software* apresenta diversas versões, sendo na versão 5.0 possível trabalhar com a geometria espacial. Atualmente está disponível na versão *Windows*, *Linux* e *Android*, podendo ser feito o download pelo site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) de forma gratuita.

A tela inicial (Figura 1) do GeoGebra dispõe da barra de menus e de ferramentas, Janela de Álgebra e Visualização, listas de comando e a caixa de entrada.

Figura 1: Tela Inicial



Fonte: Autoria própria

#### ➤ BARRA DE FERRAMENTAS



<sup>2</sup> Desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade de Salzburgo na Áustria.

A Barra de Ferramentas concentra todas as funções úteis para construções, movimentos, obtenção de medidas e modificação de objetos construídos. Para ativar a função, basta clicar com o botão direito do mouse sobre ícone. Este ícone exibirá outros ícones ocultos com outras funções.

Por exemplo, ao clicar no ícone “Pontos”, a função ponto apresentará outras funções disponíveis dentro deste mesmo ícone. Para utilizá-la, basta movimentar o mouse e clicar sobre a função desejada. A seguir, apresentamos as funções presentes em cada ícone. Entretanto, sugerimos que você abra o GeoGebra em seu dispositivo e verifique cada uma delas

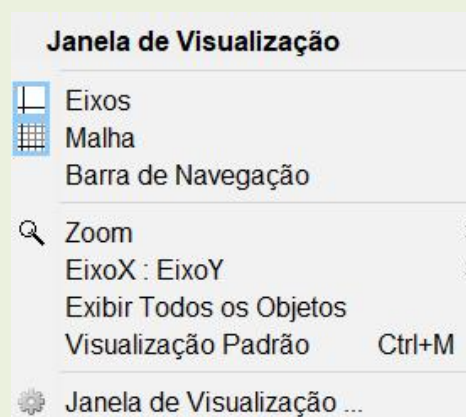


| <b>Ícone</b> | <b>Função</b>                                                                                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              | Mover<br>Função a mão livre<br>Caneta                                                                                                                     |
|              | Ponto<br>Ponto em Objeto<br>Vincular/Desvincular ponto<br>Interseção de dois objetos<br>Ponto médio ou centro<br>Número complexo<br>Otimização<br>Raízes  |
|              | Reta<br>Segmento<br>Segmento com comprimento fixo<br>Semirreta<br>Caminho poligonal<br>Vetor<br>Vetor a partir de um ponto                                |
|              | Reta perpendicular<br>Reta paralela<br>Mediatriz<br>Bissetriz<br>Reta tangente<br>Reta polar ou diametral<br>Reta de regressão linear<br>Lugar geométrico |
|              | Polígono<br>Polígono Regular<br>Polígono Rígido<br>Polígono Semi deformável                                                                               |
|              | Círculo dados centro e um de seus pontos<br>Círculo dados centro e raio<br>Compasso<br>Círculo definido por três pontos                                   |

|                                                                                     |                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Semicírculo definido por dois pontos<br>Arco Circular<br>Arco Circuncircular<br>Setor Circular<br>Setor Circuncircular                               |
|    | Elipse<br>Hipérbole<br>Parábola<br>Cônica por Cinco Pontos                                                                                           |
|    | Ângulo<br>Ângulo com Amplitude Fixa<br>Distância, comprimento ou perímetro<br>Área<br>Inclinação<br>Lista<br>Relação<br>Inspetor de Funções          |
|    | Reflexão em relação a uma reta<br>Reflexão em relação a um ponto<br>Inversão<br>Rotação em torno de um ponto<br>Translação por um vetor<br>Homotetia |
|   | Controle deslizante<br>Texto<br>Inserir Imagem<br>Botão<br>Caixa para exibir/esconder objetos<br>Campo de Entrada                                    |
|  | Mover Janela de Visualização<br>Ampliar<br>Reduzir<br>Exibir/Esconder objetos<br>Exibir/Esconder rótulos<br>Copiar estilo visual<br>Apagar           |

## ➤ OUTRAS FUNÇÕES

- ✓ Para habilitar/desabilitar os eixos ou malhas, clique com o botão direito na Janela de Visualização, aparecerá a janela ao lado. Clicando em uma das funções (Eixo ou Malha), você habilitará ou desabilitará essas opções.



- ✓ Para movimentar dentro da Janela de Visualização, selecione o ícone



e em seguida a função “Mover”. Com esta função ativada, mova os objetos construídos na Janela de Visualização.

- ✓ Para cancelar alguma função que esteja usando, aperte a tecla *Esc*.

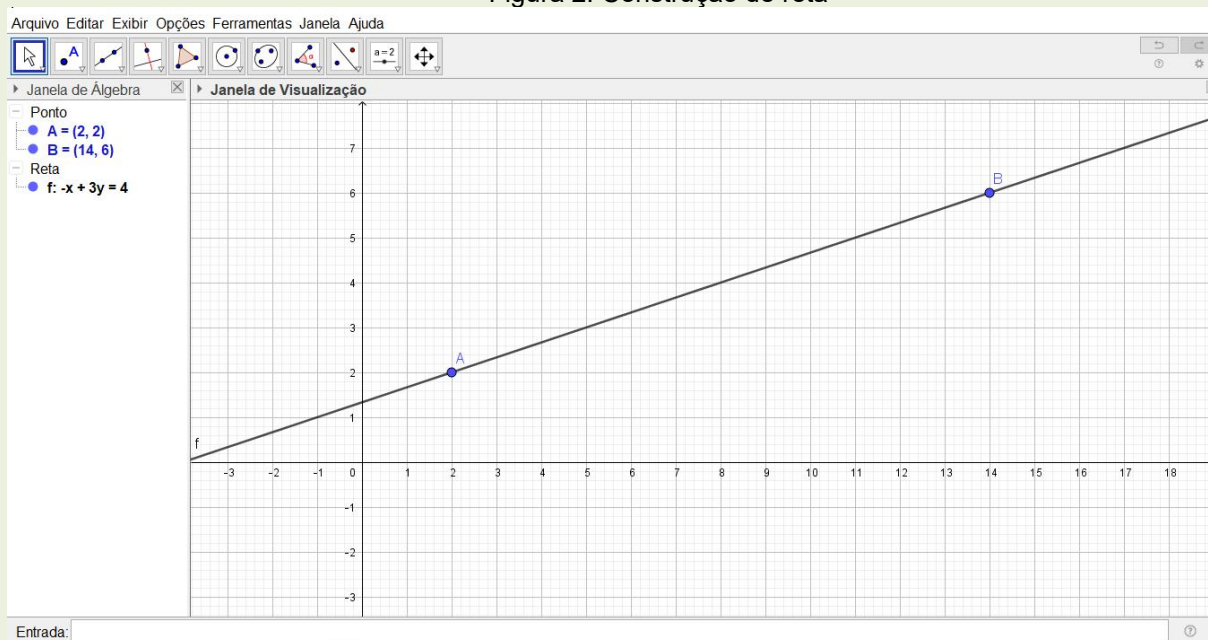
### ➤ JANELA DE VISUALIZAÇÃO E JANELA DE ÁLGEBRA

No *software* GeoGebra é possível operar com as representações geométricas, aritméticas e algébricas simultaneamente, de forma que, ao construirmos uma reta na Janela de Visualização, obteremos sua lei de formação e as coordenadas de dois pontos pertencentes a esta reta, na Janela de Álgebra



**Pratique:** Na barra de ferramentas, clique no ícone . Em seguida, selecione a função “reta”. Na Janela de Visualização, clique em um ponto qualquer e depois em um novo ponto. Feito isso, na Janela de Álgebra aparecerá as coordenadas dos pontos marcados e a função que representa a reta formada por esses pontos. Veja a seguir.

Figura 2: Construção de reta



Fonte: Autoria própria

Neste exemplo, selecionamos a função para criar retas e na Janela de Visualização marcamos o ponto  $B = (2, 2)$ , em seguida o ponto  $C = (14, 6)$ , a reta formada é  $f$ : reta (B, C):  $-x + 3y = 4$ . Podemos também, por meio da equação

da reta obter a representação geométrica correspondente a ela.

### HORA DE PRATICAR COM O GEOGEBRA

- 1) Resolva o sistema abaixo, determinando o conjunto solução

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

- 2) Considerando as funções abaixo, determine:

- A(s) raízes ou zeros da função
- Classifique a função como crescente ou decrescente.
- Faça o estudo do sinal
- Para a função do 2º grau, determine o vértice.

- $f(x) = 2x - 4$
- $g(x) = -x + 3$
- $h(x) = x^2 - 4x + 3$
- $z(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 81$



### #FicaDica

Os conteúdos de equações e funções podem ser trabalhados utilizando as ideias iniciais aqui apresentadas, no entanto, faça as adaptações que achar necessário. No conteúdo de equações, é possível determinar o conjunto solução a partir da representação geométrica. No estudo de funções, é possível identificar as raízes, a inclinação da reta, vértices de funções de

Vamos apresentar no capítulo seguinte algumas sugestões de atividades que você, professor(a), pode utilizar caso nunca tenha utilizado o *software*.



### 3.1 SUGESTÃO DE ATIVIDADES NO GEOGEBRA

Neste subcapítulo sugerimos conteúdos matemáticos que podem ser abordados com auxílio do GeoGebra para que os estudantes possam explorar mais este *software*. As atividades foram organizadas sequencialmente, o que não impede, caso queiram, propô-las de forma diferente do exposto. Outra sugestão é que façam questionamentos pertinentes ao estudo de determinado conteúdo, indo além do que apresentamos aqui.

Os conteúdos propostos estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>3</sup> permitindo o desenvolvimento de habilidades desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

#### 3.1.1 (Re)conhecendo o *software* GeoGebra

Sugerimos que a atividade inicial seja conduzida de forma livre para que os estudantes possam despertar o interesse e curiosidade para manusear e utilizar o *software*. Oriente-os apenas para selecionar as funções na barra de ferramentas e clicar na Janela de Visualização. Solicite-os que verifiquem as ocorrências nas Janelas de Álgebra e de Visualização para que criem relações entre elas.

No capítulo 7 temos algumas sugestões de resolução para as atividades a seguir.

#### 3.1.2 Localização no Plano Cartesiano

Esta atividade tem como objetivo localizar pontos no plano cartesiano e determinar o pertencimento ou não dos pontos de uma reta. Construa pontos sobre Janela de Visualização e solicite que os estudantes determinem as coordenadas de cada ponto, observando na Janela de Álgebra.

#### 3.1.3 Construção de retas paralelas e perpendiculares

Esta atividade tem como objetivo determinar retas paralelas e perpendiculares entre uma reta qualquer. A construção de retas paralelas e perpendiculares aparece como uma das habilidades a serem desenvolvidas no estudo de

---

<sup>3</sup> A Base Nacional Comum Curricular é um documento de referência curricular nacional obrigatória, inclusive com propostas pedagógicas. Foi terminada e disponibilizada em 2017 para todas as áreas de conhecimento da educação infantil e ensino fundamental. Na área de *Matemática*, no item 4.2.1.2, à página 270, consta a indicação do Teorema de Pitágoras para o 9º ano da Educação Básica (Disponível em: [basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC). Acesso em 28 dezembro de 2017).



Geometria do 6º Ano. Utilizando o ícone , solicite a construção de retas paralelas e perpendiculares

### 3.1.4 Construção de Polígonos

O estudo sistematizado das figuras planas inicia-se desde o 1º ano do Ensino Fundamental em que ocorre o reconhecimento do formato das faces das figuras espaciais a partir das figuras planas, como quadrado e retângulo, por exemplo. Desta forma, esta atividade tem como objetivo construir polígonos e verificar alguns de seus elementos, como lados, vértices e ângulos. Utilizando

o ícone  construa polígonos ou polígonos regulares.

### 3.1.5 Estudo de Função do 1º grau

O estudo de funções inicia-se, segundo a BNCC, no 9º ano do Ensino Fundamental permitindo que haja compreensão das relações de dependência unívoca entre duas variáveis, das representações numéricas, algébricas e gráficas (BRASIL, 2017, p. 269).

Nesta atividade faremos apenas a construção gráfica da função, cabendo a você, fazer os questionamentos pertinentes a este conteúdo.

Faça o estudo da função do 1º e 2º grau utilizando a caixa de entrada, ou se

preferir, use a função controle deslizante, no ícone .

Você pode desenvolver esta atividade no estudo de funções do 2º grau. Caso queira, no item 3 da sugestão do passo a passo crie três controles deslizantes, **a**, **b** e **c**.

Agora que você já conhece algumas das diversas funções do GeoGebra e também realizou algumas atividades, vamos propor a você três demonstrações de um dos teoremas mais ‘famosos’ da Matemática, o Teorema de Pitágoras. Apresentamos apenas três demonstrações, no entanto, na dissertação que originou este guia, você encontrará outras duas demonstrações.

#### 4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO GEOGEBRA

Desde essa época antiga até o século XX, centenas de demonstrações foram produzidas a partir do Teorema de Pitágoras. Por exemplo, o professor inglês Elisha Scott Loomis, apresentou em seu livro *The Pythagorean Proposition* mais de 300 demonstrações deste teorema. Em 1927, a primeira edição do livro continha 230 demonstrações e em 1940, ampliou para 370. Apresentaremos aqui três destas demonstrações que historicamente são destacadas: a de Pitágoras, Euclides e Leonardo Da Vinci.

*Observação: As demonstrações sem o uso do software podem ser encontradas na dissertação*

##### 4.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR PITÁGORAS



Professor(a), nesta demonstração você poderá fazer a retomada de alguns conteúdos/conceitos já estudados. Caso sinta necessidade, revise com a turma noções sobre:

- Polígono
- Ângulos (medidas e classificações)
- Retas Paralelas
- Razão e Proporção
- Semelhança de Triângulos

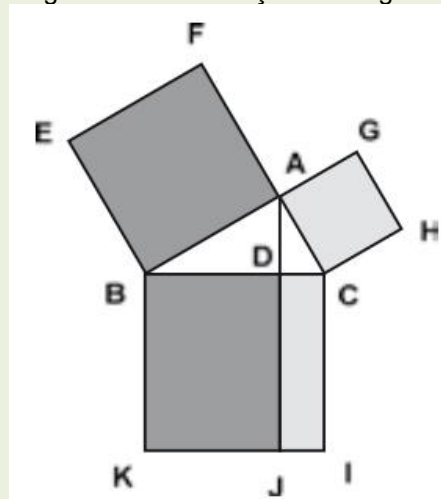
Acredita-se que a demonstração realizada por Pitágoras (ou pitagóricos) tenha sido feita utilizando, segundo alguns historiadores, a *Teoria da Proporcionalidade*. Essa demonstração é baseada na decomposição do quadrado formado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo em dois retângulos. A soma destas áreas é igual à soma dos quadrados formados sobre os catetos deste triângulo.

Segundo Urbaneja (2008), a prova realizada por Pitágoras pode ter sido feita a partir das razões entre os lados dos três triângulos retângulos, resultando na

semelhança entre eles e também pela proposição [VI, 19] em que a razão entre a área dos triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. A demonstração a seguir será realizada por meio da semelhança entre os triângulos ABC, ABD e ADC

*“Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, e seja AD perpendicular ao lado BC, de acordo com a proposição [VI, 8] de Os Elementos de Euclides, os triângulos DBA e DAC são semelhantes com o triângulo ABC, sendo semelhantes entre si”, (URBANEJA, 2008, p. 111 – tradução nossa)*

Figura 3: Semelhança de triângulos



Fonte: Urbaneja (2008, p. 111)

#### 4.1.1 Demonstração no GeoGebra

I. Abra o software.

II. Na Janela de Visualização, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção “Eixo”. Desta forma, os eixos da malha serão desabilitados.

III. Clique no ícone  em seguida a função “polígono”.

IV. Na Janela de Visualização marque os pontos A, B e C.

V. Clique no ícone  em seguida a função “ângulo” para verificar a medida do ângulo A. Clique nos vértices BAC, para determinar a medida do ângulo A que deve apresentar a medida igual à 90°. Para ajustar a medida do ângulo, caso seja diferente, arraste os vértices. Caso clique na ordem CAB, você determinará a medida do ângulo externo do vértice A.

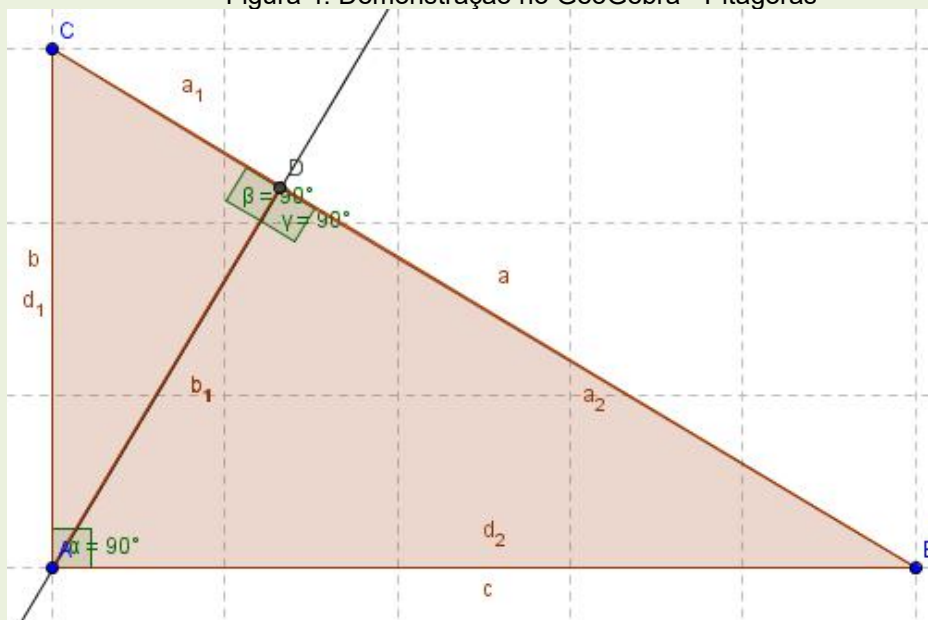
VI. Após a construção do triângulo retângulo BAC, clique no ícone  e selecione a função “reta paralela”. Crie uma reta paralela entre o vértice A e o lado BC. Para isso, clique no vértice A e em seguida clique no lado BC. A reta será criada.

VII. Clique no ícone  e selecione a função “ponto”. Com o mouse, encontre a interseção entre a reta paralela e o lado BC, clique nesta interseção criando o ponto D.

VIII. Temos Três Triângulos  $\triangle BAC$  (*pol1*),  $\triangle ADC$  (*pol2*),  $\triangle BDA$  (*pol3*). Clique no ícone  e selecione a função “Polígono”. Construa os triângulos ABC, ACD e ABD.

IX. Clique no ícone  e selecione a função “ângulo”. Clique nos vértices CDA e ADB.

Figura 4: Demonstração no GeoGebra - Pitágoras



Fonte: Autoria própria

X. Vamos estabelecer as relações entre os triângulos  $\triangle BAC$ ,  $\triangle ADC$ ,  $\triangle BDA$ , determinando a semelhança entre eles.

#### Semelhança entre os triângulos

$$\triangle BAC \sim \triangle BDA$$

$$\triangle BAC \sim \triangle ADC$$

$$\triangle BDA \sim \triangle ADC$$

#### Razão entre os lados

$$R_1 = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}$$

$$R_4 = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}}$$

$$R_7 = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

$$R_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$$

$$R_5 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$R_8 = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$$

$$R_3 = \frac{\overline{AC}}{\overline{DA}}$$

$$R_6 = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

$$R_9 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

XI. Na caixa de entrada, digite as razões uma de cada vez e aperte a tecla <enter>. Na Janela de Álgebra aparecerá a medida de cada razão.

**R<sub>1</sub>**

$$R\_1 = c/a\_2$$

**R<sub>6</sub>**

$$R\_6 = b/a\_1$$

|                      |               |                      |                 |
|----------------------|---------------|----------------------|-----------------|
| <b>R<sub>2</sub></b> | $R_2 = a/d_2$ | <b>R<sub>7</sub></b> | $R_7 = a_2/b_1$ |
| <b>R<sub>3</sub></b> | $R_3 = b/b_1$ | <b>R<sub>8</sub></b> | $R_8 = d_2/d_1$ |
| <b>R<sub>4</sub></b> | $R_4 = c/b_1$ | <b>R<sub>9</sub></b> | $R_9 = b_1/a_1$ |
| <b>R<sub>5</sub></b> | $R_5 = a/d_1$ |                      |                 |

Observe que as razões ( $R_1 = R_2 = R_3$ ), ( $R_4 = R_5 = R_6$ ) e ( $R_7 = R_8 = R_9$ ). Precisamos mostrar que  $BC^2 = BA^2 + AC^2$ , de acordo com o Teorema de Pitágoras. Pela tabela do item VIII, temos que  $BA^2 = BD \times BC$  ( $R_1$  e  $R_2$ ) e  $AC^2 = BC \times DC$  ( $R_5$  e  $R_6$ ) e pela Figura 9 temos que  $BC = BD + DC$ .

XII. Na caixa de entrada digite<sup>4</sup>  $a_2 * a$  e aperte <enter>. Em seguida,  $a_1 * a$  e aperte <enter>. E por fim, digite  $(a_1 + a_2)^2$ . Esses comandos referem-se à  $BA^2$ ,  $AC^2$  e  $BC^2$ , respectivamente.

Ao efetuarmos a soma de  $BA^2 + AC^2$  obtém a medida de  $BC^2$ . Podemos realizar a operação de adição entre os segmentos.

XIII. Digite na caixa de entrada  $(a_2 * a) + (a_1 * a)$  e aperte a tecla <enter>. O valor será igual ao determinado na operação  $(a_1 + a_2)^2$ . Desta forma, demonstramos o Teorema de Pitágoras.

## 4.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DA VINCI

Professor (a) nesta demonstração você poderá fazer a retomada de alguns conteúdos/conceitos já estudados. Caso sinta necessidade, revise com a turma noções sobre:

- Polígono
- Polígono Regular
- Soma dos ângulos internos
- Perímetro
- Congruência de Triângulos

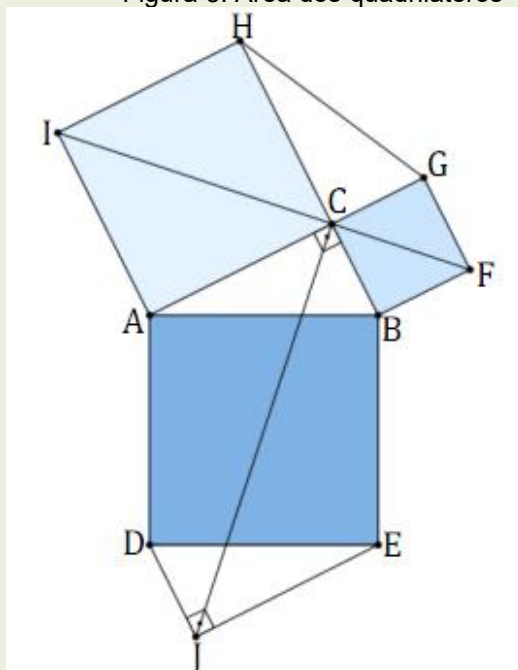


Leonardo da Vinci (1452-1519) também apresenta uma demonstração do Teorema de Pitágoras, baseando-se na comparação de áreas. Considerando um triângulo ABC, reto em C, sobre seus lados são projetados quadrados

<sup>4</sup> O asterisco (\*) representa a operação de multiplicação.

ABDE, AIHC, BCGF. Da Vinci acrescentou sobre o lado DE o triângulo DEJ e sobre o vértice C um triângulo com catetos CH e CG. Unindo-se os vértices I, C e F, criou-se o segmento IF, de forma que os ângulos  $\widehat{ICH}$ ,  $\widehat{HCG}$ ,  $\widehat{FCG}$  sejam adjacentes e sua soma igual a  $180^\circ$ . Considerando os IB e CD, temos pelo caso de congruência LAL que os triângulos CDJ e IBF são congruentes, logo os segmentos CJ e IF são iguais. Desta forma os quadriláteros FIHG, ACJD, CBEJ, AIFB são congruentes. Leonardo Da Vinci considerava que a soma das áreas dos quadrados AIHC e BCGF é igual à área do quadrado ABED.

Figura 5: Área dos quadriláteros



Fonte: Autoria Própria

Considerando as áreas dos quadriláteros temos:  $A_{FIHG} + A_{AIFB} = A_{CBEJ} + A_{ACJD} \rightarrow A_{BCGF} + A_{HCG} + A_{AIHC} = A_{ABDE} + A_{DEJ}$ . Como os triângulos  $A_{HCG}$  e  $A_{DEJ}$  são iguais, temos que  $A_{BCGF} + A_{AIHC} = A_{ABDE}$

#### 4.2.1 Demonstração no GeoGebra

I. Abra o *software*.

II. Na Janela de Visualização, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção “Eixo”. Desta forma, os eixos da malha serão desativados.



III. Clique no ícone e selecione a função “polígono”. Na Janela de Visualização, construa um triângulo  $\triangle ABC$ , reto em C.

IV. Sobre os lados AB, BC e AC construa três quadrados, para isso, clique no



ícone e selecione a função “polígono regular”. Clique nos pontos BA, nesta ordem, construindo o quadrado ABED. Clique nos pontos CB, nesta ordem, construindo o quadrado BCGF e por fim, clique nos pontos AC, construindo o quadrado AIHC.

V. Construa um triângulo retângulo HCG, reto em C, entre os catetos CH e CG.



Clique no ícone e selecione a função “polígono”. Clique no ponto HCGH para construir o triângulo solicitado.

VI. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Clique no ponto I e construa um segmento até F, passando por C. Desta forma, os ângulos ICH, HCG e GCF são adjacentes e a soma dos três é igual a  $180^\circ$ .

VII. Determine o comprimento do segmento IF. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Clique no ponto I até o F.

VIII. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Construa um segmento CJ do mesmo comprimento que IF, em relação ao lado DE. Verifique na Janela de Álgebra o comprimento dos segmentos. Para isso arraste o ponto J.

IX. Clique no ícone  e selecione a função “polígono”. Construa um triângulo DJE.

X. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Construa o segmento IB e o segmento CD.

Considerando os segmentos IB e CD, pelo caso de congruência *Lado-Ângulo-Lado* (LAL), temos que os triângulos  $\triangle CDJ$  e  $\triangle IBF$  são congruentes. Desta forma os quadriláteros FIHG, ACJD, CBEJ, AIFB são congruentes.

XI. Clique no ícone  e selecione a função “polígono”. Construa os quadriláteros IFGH, FBAI, CBEJ, ADJC,

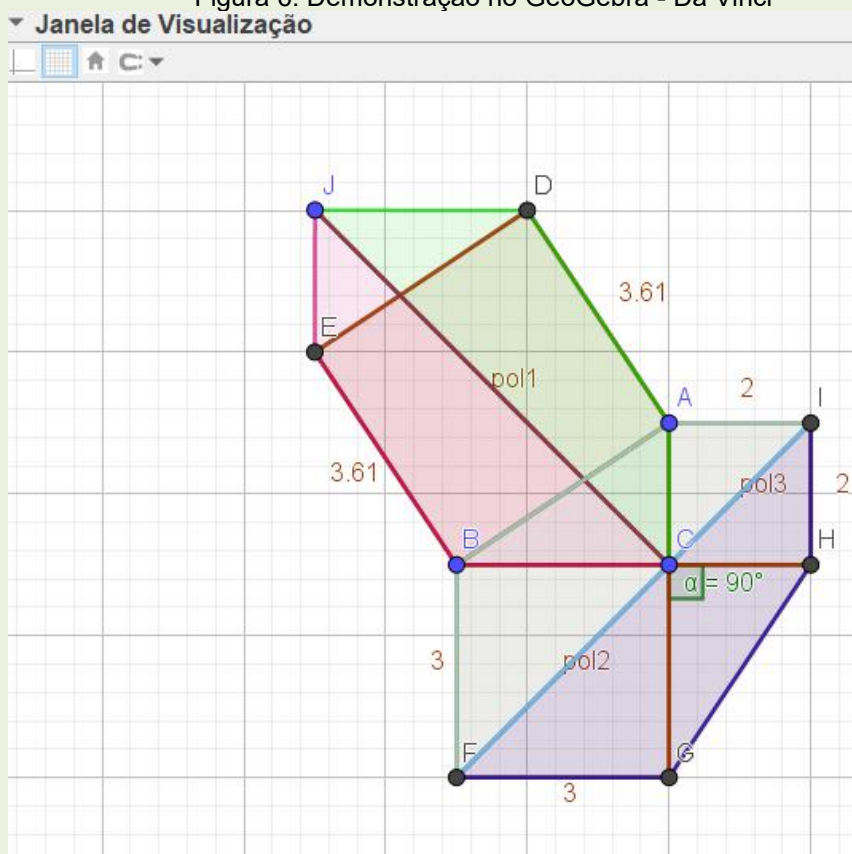
XII. Clique no ícone  e selecione a função “área”. Clique sobre os polígonos IFGH, FBAI, CBEJ, ADJC.



XIII. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Clique sobre os segmentos dos quadriláteros e determine o comprimento de cada um deles. Desta forma os quadriláteros FIHG, ACJD, CBEJ, AIFB são congruentes.

XIV. Na Janela de Álgebra, podemos verificar que a área do *pol1* é igual a soma das áreas do *pol2* e *pol3*. Podemos determinar também que  $A_{FIHG} + A_{AIFB} = A_{CBEJ} + A_{ACJD} \rightarrow A_{BCGF} + A_{HCG} + A_{AIHC} = A_{ABDE} + A_{DEJ}$ . Como os triângulos  $A_{HCG}$  e  $A_{DEJ}$  são iguais, temos que  $A_{BCGF} + A_{AIHC} = A_{ABDE}$

Figura 6: Demonstração no GeoGebra - Da Vinci



Fonte: Autoria própria

#### 4.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR EUCLIDES.



Professor (a) nesta demonstração você poderá fazer a retomada de alguns conteúdos/conceitos já estudados. Caso sinta necessidade, revise com a turma noções sobre:

- Polígono
- Polígono Regular
- Ângulos
- Congruência de Triângulos



Euclides de Alexandria (300 a.C) foi um matemático responsável pela obra *Os Elementos* composta por 13 volumes que abordam a geometria plana, números, teoria das proporções, os incomensuráveis e geometria no espaço.

O Teorema de Pitágoras aparece no Livro I na proposição 47, de forma lógica e “uma inusitada elegância e uma modesta economia de elementos geométricos” (URBANEJA, 2008, p.114). O teorema “reaparece” no Livro VI nas proposições 30 e 31 nos problemas de semelhança de figuras.

A demonstração a ser realizada a seguir, considera a proposição 36 e 41 em que “paralelogramos que tem mesmas bases sobre as mesmas paralelas são iguais (I-36) e se paralelogramos tem a mesma base que o triângulo e estão sobre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo (I-41).”

#### 4.3.1 Demonstração no GeoGebra

I. Abra o *software*.

II. Na Janela de Visualização, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção “Eixo”. Desta forma, os eixos da malha serão desabilitados.

III. Clique no ícone  e selecione a função “polígono”. Na Janela de Visualização, construa um triângulo  $\triangle ABC$ , reto em A.

IV. Para verificar a medida do ângulo C, clique no ícone  e selecione a função “ângulo”. Em seguida, clique no ponto CAB, respectivamente. Caso não seja a medida de  $90^\circ$ . Aperte a tecla <Esc>, clique no ícone  e selecione a função “mover”. Clique no ponto C e mova-o para formar o ângulo reto.



V. Clique no ícone  e selecione a função “polígono regular”. Na Janela de Visualização, construa quadrados sobre os lados do triângulo retângulo  $\triangle ABC$ . Clique nos pontos AB, nesta ordem, construindo o quadrado ABED. Clique nos pontos BC, nesta ordem, construindo o quadrado BCFG e por fim, clique nos pontos CA, construindo o quadrado CAHI.



VI. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Construa os segmentos CD e AI.

Vamos determinar a congruência entre os triângulos  $\triangle CBD$  e  $\triangle AIB$ .



VII. Clique no ícone  e selecione a função “polígono”. Construa os triângulos  $\triangle CBD$  e  $\triangle AGB$



VIII. Clique no ícone  e selecione a função “ângulo”. Clique nos pontos ABG, depois em BGA e por fim em GAB. Nesta etapa, determinamos os ângulos do triângulo  $\triangle AGB$ . Ainda com a função “ângulo” habilitada, clique nos pontos DBC, BCD e CDB, determinando a medida dos ângulos do triângulo  $\triangle CBD$ .



IX. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Clique sobre os lados dos triângulos  $\triangle CBD$  e  $\triangle AGB$ . Temos que os triângulos são semelhantes pelo caso de congruência *Lado-Ângulo-Lado* (LAL).



X. Clique no ícone  e selecione a função “reta paralela”. Clique no segmento CF e no ponto A, construindo assim, uma paralela com este segmento.



XI. Clique no ícone  e selecione a função “ponto”. Crie um ponto J, na interseção entre a reta paralela criada e o lado GF. Crie também, um ponto K, na interseção entre a reta e o lado BC do triângulo  $\triangle ABC$ .

A proposição I-41 do livro *Os Elementos de Euclides* afirma que se um paralelogramo e um triângulo de mesma base estiverem sobre a mesma linha paralela, a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo. Observando a construção, temos que o triângulo  $\triangle AGB$  e o retângulo BGJK, tem a base BG situada entre duas retas paralelas. Assim, o retângulo BGJK tem o dobro da área do triângulo  $\triangle AGB$ . Vamos verificar com as funções disponíveis no GeoGebra.



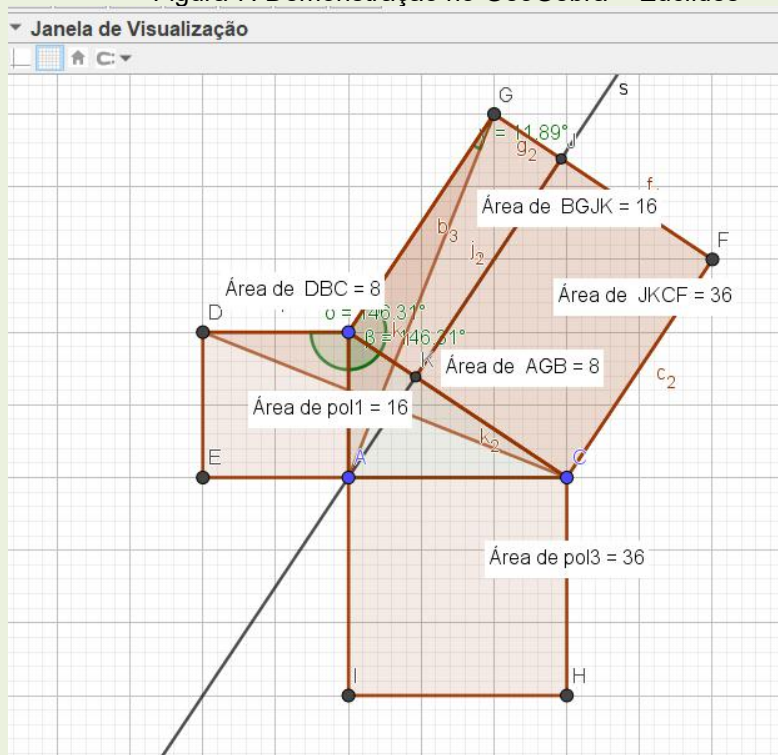
XII. Clique no ícone  e selecione a função “polígono”. Construa o retângulo BGJK.



XIII. Clique no ícone  e selecione a função “Área”. Clique sobre o triângulo  $\triangle AGB$  e sobre o retângulo BGJK. Na Janela de Visualização, verifique se a área de BGJK é igual ao dobro da área de AGB.

O mesmo ocorre para o quadrado ABDE e o triângulo  $\triangle DBC$ <sup>5</sup>. Podemos verificar também, seguindo os itens XII e XIII, que os quadriláteros JKCF e ACHI possuem a mesma área. Assim, a área do quadrado BCFG é igual à soma das áreas do quadrado ABDE e ACHI, sendo demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Figura 7: Demonstração no GeoGebra - Euclides



Fonte: Autoria Própria

<sup>5</sup> Os  $\triangle DBC$  e  $\triangle AGB$  são congruentes pelo caso LAL.

## 5. SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos sugestões de atividades abordando o conteúdo do Teorema de Pitágoras com auxílio do GeoGebra. Propusemos o passo a passo a ser realizado no *software*, no entanto, este deverá ser utilizado apenas para o docente.

Em algumas das atividades apresentamos alguns questionamentos, porém, você poderá realizar outros que considerar pertinente durante o estudo. Permita e estimule que os estudantes criem outras maneiras de resolução. As possíveis respostas para estes questionamentos estão como Nota de Rodapé.

### 5.1 RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

O objetivo desta atividade é mostrar que a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ , em que **b** e **c** são os catetos do triângulo retângulo e **a** é a hipotenusa, é válida não apenas para quadrados formados sobre os lados do triângulo retângulo, mas sim para outros polígonos regulares e círculos.

Para realizar as atividades a seguir você pode solicitar ou se o estudante desejar, desabilitar o “Eixo” e/ou “Malha” na Janela de Visualização. É possível também alterar as cores dos polígonos/círculos construídos. Caso desejar siga os passos a seguir:

- ❖ Clique sobre o objeto construído com o botão direito e selecione a opção “Propriedades”. Abrirá uma nova janela. Selecione a opção “Cor”, em seguida escolha a cor que desejar para seu objeto construído.
- ❖ Na construção dos polígonos regulares, sugerimos o quadrado e o hexágono, no entanto você poderá solicitar outros polígonos.

**QUESTIONAMENTO:** Qual a relação que podemos estabelecer a partir das áreas destes quadrados?<sup>6</sup>

- 1) Construa outro polígono regular sobre o triângulo retângulo.

**MODO 1:** Caso opte por abrir uma nova janela, você deverá repetir os passos do número 1 desta atividade. Você poderá abrir uma nova janela. Clique na barra de menus na opção “Arquivo”. Selecione a opção “novo”. O GeoGebra te

---

<sup>6</sup> **Resposta:** A área do quadrado formado sobre a hipotenusa do triângulo é igual a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos do triângulo. Temos a relação  $a^2 = b^2 + c^2$  denominada como Teorema de Pitágoras

dará a opção de gravar ou não o arquivo feito anteriormente. Refaça os passos do número 1.

**MODO 2:** Sem abrir uma nova janela, você poderá apagar os quadrados construídos e utilizar o mesmo triângulo retângulo. Clique no ícone , em seguida clique sobre cada quadrado e aperte a tecla <delete> para apagar o quadrado selecionado.

### QUESTIONAMENTOS:

- a) A relação entre as áreas que ocorreu no número 2 ocorre também se construirmos hexágonos sobre os lados do triângulo retângulo?<sup>7</sup>
  - b) Se construirmos outros polígonos regulares sobre este triângulo essa relação permanece?<sup>8</sup>
  - c) O que acontece se ao invés de construirmos polígonos regulares, construíssemos círculos sobre os lados?<sup>9</sup>
- 2) Construir círculos sobre os lados do triângulo retângulo.

Essa construção permite responder a questão c do número anterior. Observamos que o Teorema de Pitágoras é válido para qualquer polígono construído sobre os lados do triângulo retângulo. Além disso, podemos construir outras figuras de forma que a relação continua sendo válida.

### 5.2 A ESCADA E O PRÉDIO

Imagine uma escada de 6 metros de comprimento apoiada até o topo de um prédio. A base desta está a 2 metros de distância da base do prédio. Qual a altura máxima que esse prédio precisa ter para que a escada fique totalmente apoiada?

### 5.3 A ÁRVORE QUEBRADA

Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura do tronco da árvore que restou em pé é de 12 m, e a ponta da parte quebrada está a 9 m da base da árvore, qual é a medida da outra parte quebrada da árvore?

Esta situação foi inspirada pelo problema do bambu quebrado presente no Tratado de *Chui-Suang*

---

<sup>7</sup> **Resposta:** Sim, a relação permanece pois, de acordo com o Teorema de Pitágoras, o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos deste triângulo.  $a^2 = b^2 + c^2$ , onde **b** e **c** são catetos e **a** é a hipotenusa.

<sup>8</sup> **Resposta:** idem a anterior

<sup>9</sup> **Resposta:** A resposta será dada a partir da construção no número 4. No entanto, a relação não se altera.

Existe um bambu de 10 pés de altura que se encontra quebrado de tal maneira que seu extremo superior se apoia no solo a uma distância de três pés da base. É solicitado calcular a que altura a ruptura ocorreu. (URBANEJA, 2008, p. 110).

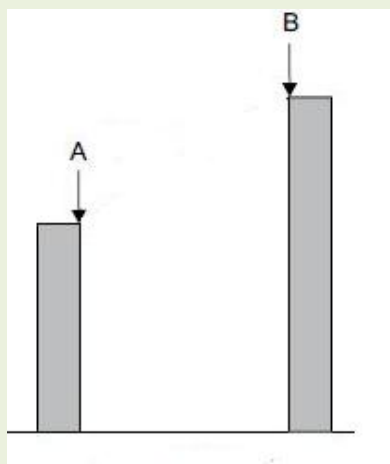
Estes dois problemas podem ser resolvidos utilizando as equações quadráticas através do Teorema de Pitágoras.

#### 5.4 A INSTALAÇÃO ELÉTRICA

Um poste de energia de 6 metros foi instalado a 8 metros de distância de uma residência cuja caixa de luz se encontra a 2 metros do solo. Quantos metros de fio são necessários para ligar energia a esta residência? Caso a caixa de luz estivesse na base da casa a medida do comprimento do fio seria a mesma? Justifique.

#### 5.5 AS ESTACAS DE MADEIRA

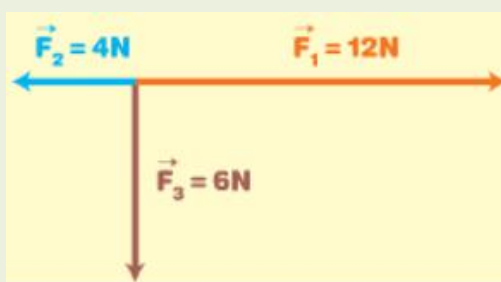
Duas estacas de madeira, perpendiculares ao solo e de alturas diferentes, estão distantes uma da outra, 1,5 m. Será colocada entre elas outra estaca de 1,7 m de comprimento, que ficará apoiada nos pontos A e B, conforme mostra a figura.



Qual a diferença entre a altura da maior estaca e a altura da menor estaca, nessa ordem?

#### 5.6 FORÇA RESULTANTE DE UM CORPO

Três forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  atuam sobre um corpo, como a figura a seguir.



Determine a força resultante exercida sobre o corpo.

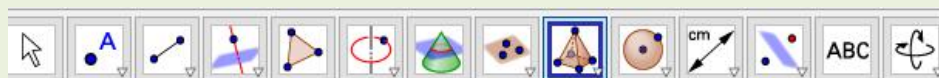
**DICA:** Este conteúdo é estudado na disciplina de Ciências (Física). Caso ache necessário, converse com o (a) professor (a) desta disciplina para que possam desenvolver esta atividade juntos.

## 5.7 ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE REGULAR

Você é um explorador e numa de suas aventuras descobre uma pirâmide, até então desconhecida. A única “informação” que conseguiu obter é que é uma pirâmide de base quadrada, medindo 4,24 metros. Curioso para saber a medida de outros elementos, voltou para seu escritório. Utilizando o *software* GeoGebra, determine:

- a) A altura da pirâmide;
- b) O apótema da pirâmide;
- c) O apótema da base;
- d) Sem o uso do *software*, como poderíamos determinar essas medidas?

Na barra de Menu clique em “Exibir” e selecione a opção “Janela de Visualização 3D”. A barra de ferramentas apresentará algumas funções não disponíveis na Janela de Visualização 2D, observe:



Os eixos aparecerão em três dimensões, em que o vermelho, verde e azul, refere-se, respectivamente,  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

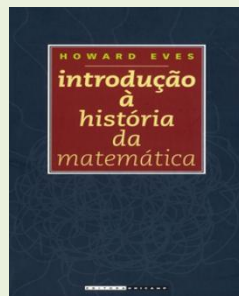


## 6. SUGESTÕES DE RECURSOS DIDÁTICOS

Neste capítulo indicamos alguns recursos didáticos que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem, dentre eles, livros, *softwares* e trabalhos divulgados sobre o objeto matemático aqui estudado.

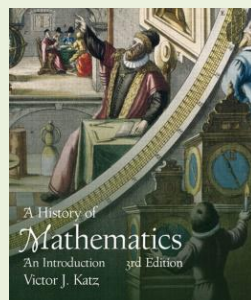
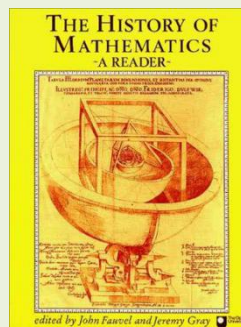
### 6.1 LIVROS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.



EVES, Howard. **Introdução à História da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

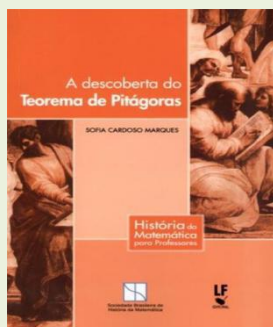
FAUVEL, John; GRAY, Jeremy. **The History of Mathematics: a reader**. Reino Unido: The open university, 1987.



KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics: an introduction**. 3 ed. New York: Pearson Education, 2009.



KLINE, M. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University, v. 1, 1990.



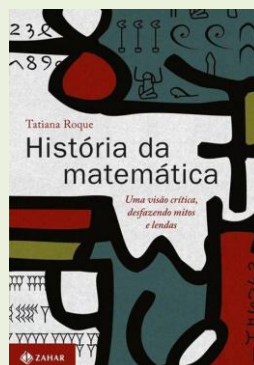
MARQUES, Sofia Cardoso. **A descoberta do teorema de Pitágoras**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. (Coleção História da Matemática para professores – SBHMat).

MENDES, Iran. Abreu. **História da Matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015 (Coleção História da Matemática para professores)



MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 4ª reimpressão. Rio de Janeiro: Zahar, 2017 [2012].



## 6.2 OUTRAS SUGESTÕES DE TRABALHOS

A obra intitulada “*El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años*” de Urbaneja, propõe algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Dentre elas, o artigo destaca o teorema nas civilizações pré-helênicas (babilônicos, egípcios, hindus e chineses) e no mundo grego apresentando as demonstrações de Pitágoras e de Euclides. O texto traz também, de forma sucinta, outras demonstrações que surgiram no decorrer da História, como a de Pappus (300 d.C), a de Thâbit Ibn Qurra (826-901), a de Bhaskara (1114-1185), a de Leonardo Da Vinci (1452-1519), a de Anaricio-Göpel (1824) e Perigal (1830). Conheça mais sobre esta obra acessando o link abaixo.

- ❖ **Referência** URBANEJA, Pedro Miguel González. El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. **Sigma**, Espanha, n. 32, p. 103-125. 2008
- Link** [http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_32/8\\_pitagoras.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf)

Gaspar & Mauro exploram o teorema por meio da História da Matemática e da Etnomatemática. Inicialmente fazem abordagem do teorema na Antiga Babilônia. Nesse contexto, as autoras destacam a escrita babilônica realizada em tábulas de argilas que contém problemas e soluções matemáticas, como por exemplo, a tábula de Plimpton 322. Tudo indica que nesta tábula já a mais antiga relação pitagórica encontrada. Confirmam em:

- ❖ **Referência** GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. **Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática**. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003

A tábula de Plimpton 322 também é trazida na obra “*Revisitando teoremas e problemas: ensaios sobre a diversidade na Matemática*” de Dassie, Carvalho & Lima. Assim como na obra de Gaspar & Mauro, os autores apresentam o texto cuneiforme que consiste em 4 colunas e 15 linhas que são associadas à relação pitagórica. Além disso, a obra traz outras situações que apresentam o teorema além de Pitágoras, como por Euclides, por Bhaskara e pelos chineses. Dê uma olhada.

- ❖ **Referência** DASSIE, Bruno Alves; CARVALHO João Bosco P. Fernandes de; LIMA, Mário Luiz A. de. Teorema de Pitágoras, além de Pitágoras. In: \_\_\_\_\_. **Revisitando teoremas e problemas:** ensaios sobre a diversidade na Matemática. Rio de Janeiro: InterMat, 2009. p.18-27.

As três sugestões acima são mais teóricas e históricas e com rigor matemático. No entanto Imenes, em um de seus trabalhos, aborda de forma lúdica a demonstração do Teorema de Pitágoras. O livro “*Vivendo a Matemática – descobrindo o Teorema de Pitágoras*” sugere a construção de um quebra cabeça que permite determinar a relação entre áreas. Em seguida, situações práticas a partir dessa relação e por fim, na generalização dos ‘pitagóricos’ que conhecemos como Teorema de Pitágoras. Dê uma conferida em:

**Referência** IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática:** descobrindo o teorema de pitágoras. São Paulo: Scipione, 2000.

### 6.3 SOFTWARES

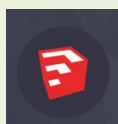
Cabri -  
Geometry



É um software comercial, de geometria dinâmica, produzido pela companhia francesa Cabrillog.

<https://education.ti.com/pt/software/details/en/937B64F367FD469EAE79E3AC216B3B69/89cabri>

SketchUp



É um software próprio para a criação de modelos em 3D no computador. Foi originalmente desenvolvido pela At Last Software, uma empresa estadunidense com sede em Boulder, Colorado, a qual foi adquirida pela Google. O programa está disponível nas plataformas Windows e Macintosh

<https://www.sketchup.com/download>

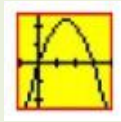
Wolfram  
Alpha



É um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido pela Wolfram Research. É um serviço on-line que responde às perguntas diretamente, mediante o processamento da resposta extraída de base de dados estruturados

<http://www.wolframalpha.com/>

Winplot



É um programa para gerar gráficos de 2D e 3D a partir de funções ou equações matemáticas. Os menus do sistema são simples. Aceita funções matemáticas de modo natural

<http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe>

XLogo



É uma linguagem de programação interpretada, voltada para crianças, jovens e até adultos. É utilizada com grande sucesso como ferramenta de apoio ao ensino regular e por aprendizes em programação de computadores.

<https://xlogo.en.softonic.com/>

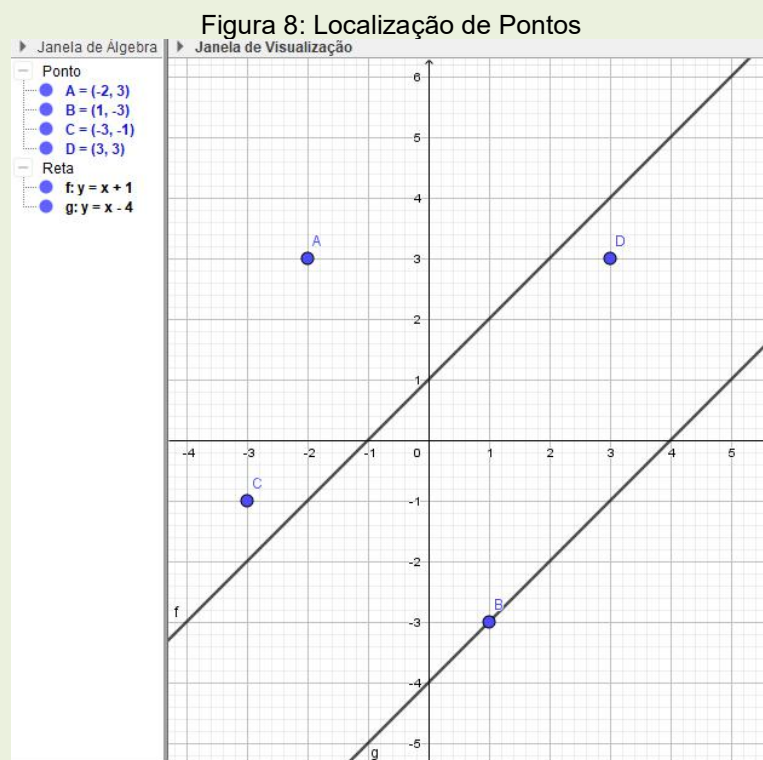
# **Sugestões de Resolução das Atividades**

## 7. SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

### 7.1 LOCALIZAÇÃO NO PLANO CARTESIANO.

**\*Sugestão de passo a passo\***

1. Na barra de ferramentas, selecione o ícone  , em seguida a função “Ponto”. Na Janela de Visualização, crie quatro pontos distintos, A, B, C e D.
2. Verifique na Janela de Álgebra as coordenadas dos pontos criados.
3. Na caixa de entrada, digite as equações:  $y = x + 1$  e  $y = x - 4$ .
4. Verifique quais pontos criados pertencem à(s) reta(s) construída(s).



Fonte: Autoria Própria

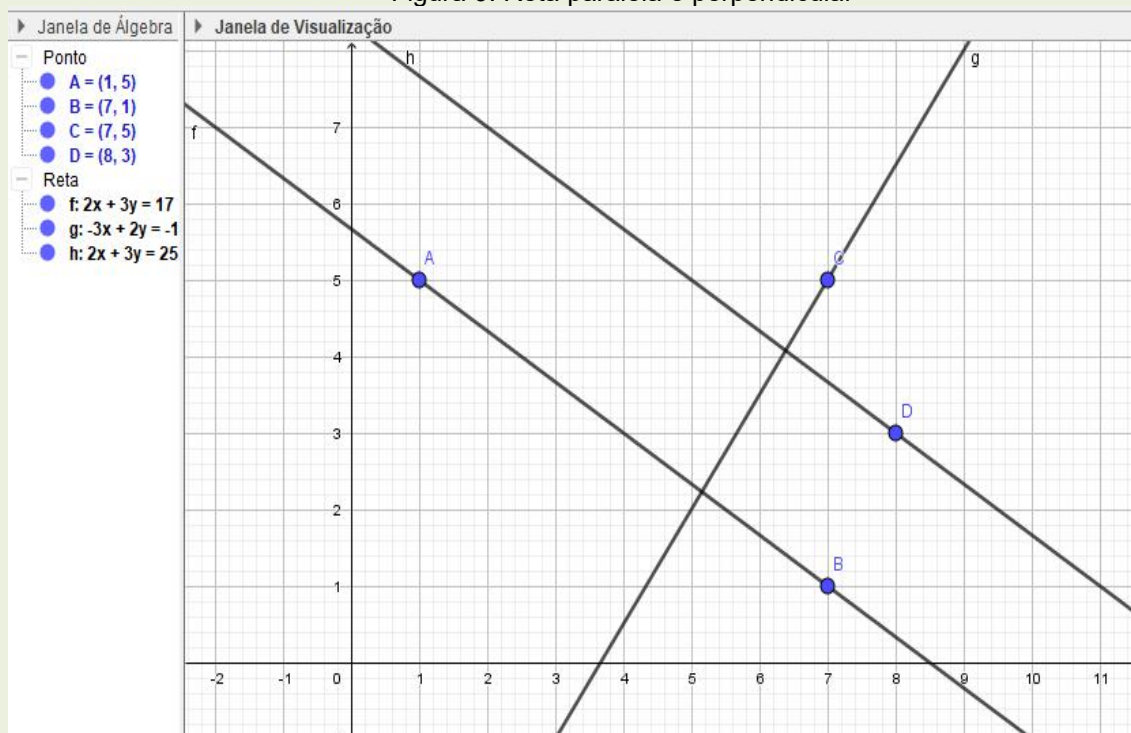
### 7.2 CONSTRUÇÃO DE RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES.

**\*Sugestão de passo a passo\***

1. Clique com o botão direito sobre a Janela de Visualização. Selecione a função “Eixos” e desabilite-o.
2. No ícone  , selecione a função “reta”. Na Janela de Visualização, clique em dois pontos, A e B, quaisquer.
3. Na Janela de Álgebra aparecerá as coordenadas dos pontos criados e a equação da reta construída a partir destes.

4. No ícone , selecione a função “reta perpendicular”. Sobre a Janela de Visualização
5. crie um ponto C e em seguida,
6. clique na reta construída, construindo assim, a reta perpendicular a ela.
7. Verifique na Janela de Álgebra a coordenada do ponto C e equação da reta perpendicular.
8. Ainda com o ícone  ativado, selecione a função “reta paralela”. Crie um ponto D. Em seguida, clique sobre a reta construída inicialmente. Você obterá a reta paralela a ela, que passará pelo ponto D.
9. Verifique na Janela de Álgebra a coordenada do ponto C e a equação da reta paralela a reta inicial.

Figura 9: Reta paralela e perpendicular



Fonte: Autoria Própria

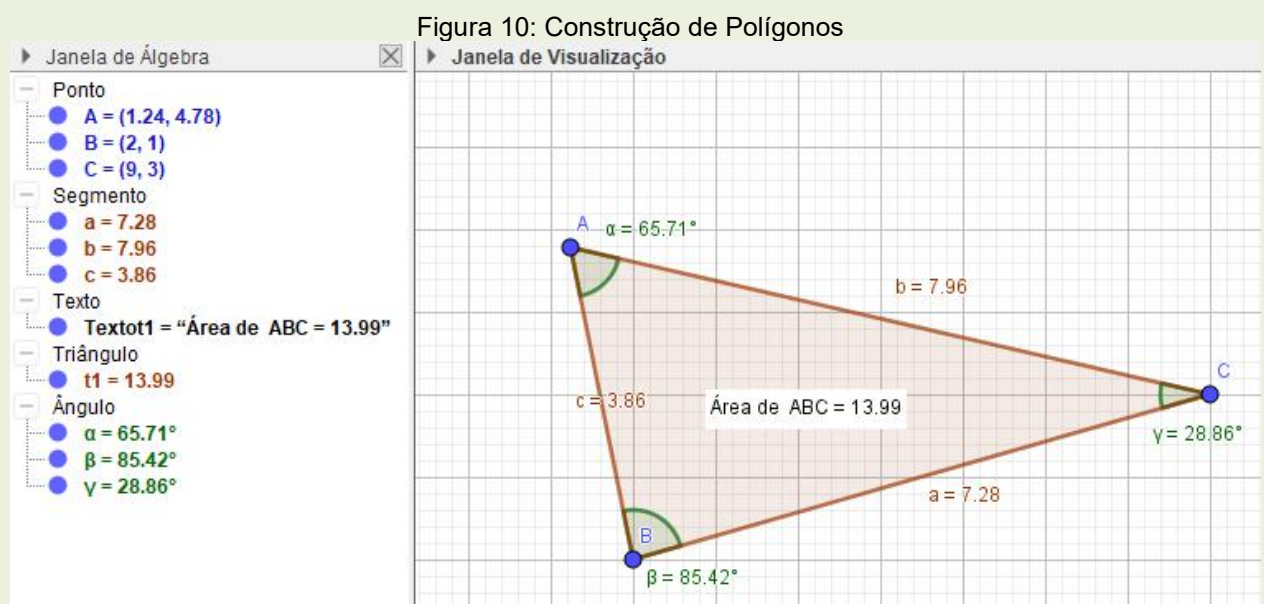
### 7.3 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS

**\*Sugestão de passo a passo\***

1. Abra o *software* e desabilite o eixo
2. Clique no ícone  e selecione a função “Polígono”
3. Na Janela de Visualização construa polígono qualquer.



4. As medidas dos lados estão na Janela de Álgebra, bem como a área do polígono construído. No entanto, essas medidas podem ser obtidas também por funções contidas na barra de ferramentas.
5. No ícone  selecione a função “Área”. Clique sobre o polígono construído e obterá a área do mesmo.
6. Para determinar o comprimento dos lados, utilize o mesmo ícone do passo 5. Selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Clique sobre os lados do polígono e obterá o comprimento de cada um.
7. Vamos verificar a medida dos ângulos do polígono. Clique no ícone  e selecione a função “Ângulos”. Selecione três vértices consecutivos do polígono para obter a medida do ângulo. Observe que de acordo com a ordem de seleção dos vértices você poderá calcular o ângulo externo.



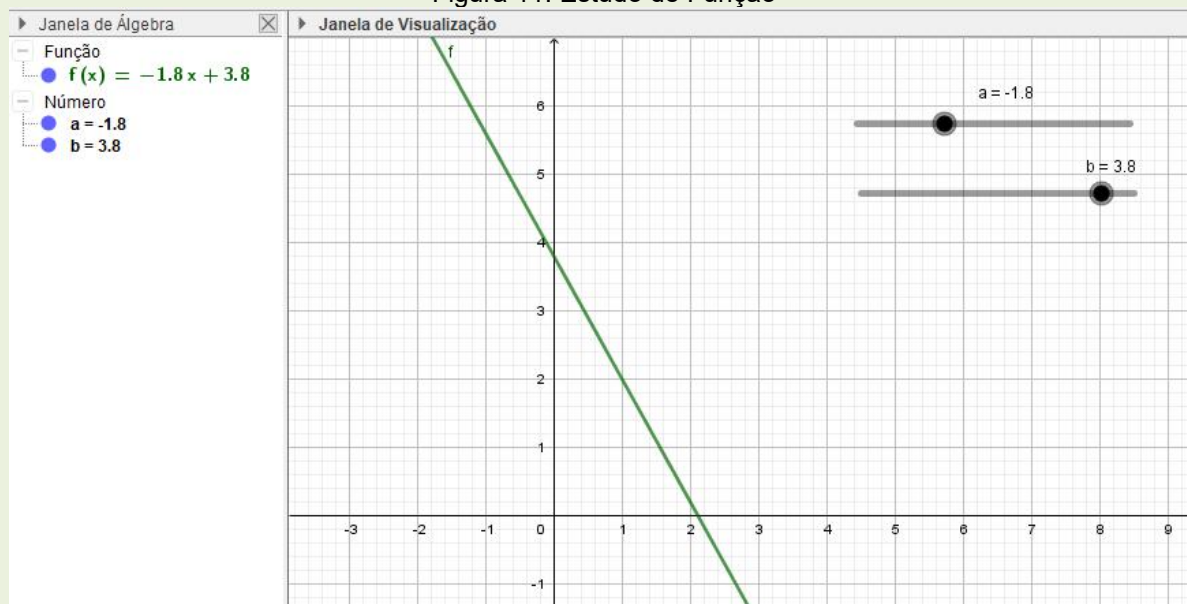
Fonte: Autoria Própria

## 7.4 ESTUDO DE FUNÇÃO DO 1º GRAU

1. Abra o *software* e verifique se o “Eixo” e a “Malha” estão habilitados.
2. No ícone  selecione a função “Controle Deslizante”.
3. Na Janela de Visualização crie dois controles deslizantes, **a** e **b**.
4. Na caixa de entrada digite a função  $f(x) = ax + b$ . A função será construída
5. Com os controles deslizantes você alterar o valor dos coeficientes da função  $f(x)$  e verificar o comportamento do gráfico.



Figura 11: Estudo de Função



Fonte: Autoria Própria

## 7.5 RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

❖ Comparando as áreas dos quadrados sobre o triângulo retângulo.

1) Construa um triângulo.

- I. Clique no ícone  e selecione a função "Polígono".
- II. Na Janela de Visualização, construa um ABC, reto em A.

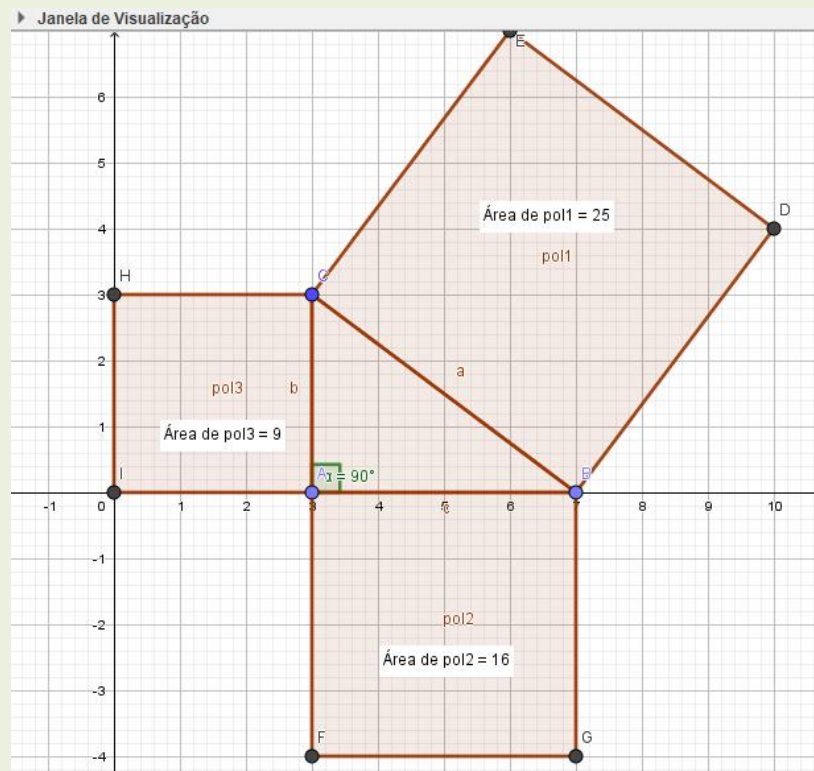
III. Clique no ícone  e selecione a função "Ângulo". Clique nos vértices BAC e verifique se o triângulo construído é um triângulo retângulo.

2) Construa um quadrado sobre cada lado do triângulo retângulo.

- I. Clique no ícone  e selecione a função "Polígono Regular"
- II. Com a função do passo I ativada, clique sobre o lado BC. Abrirá uma caixa de diálogo para determinar a quantidade de vértice que este polígono possuirá. Digite o número 4 e aperte a tecla <enter>.
- III. Repita o passo II para os outros dois lados do triângulo ABC.

IV. Clique no ícone  e selecione a função "Área". Clique sobre cada quadrado construído para determinar suas respectivas áreas.

Figura 12: Possível resolução para atividade 2



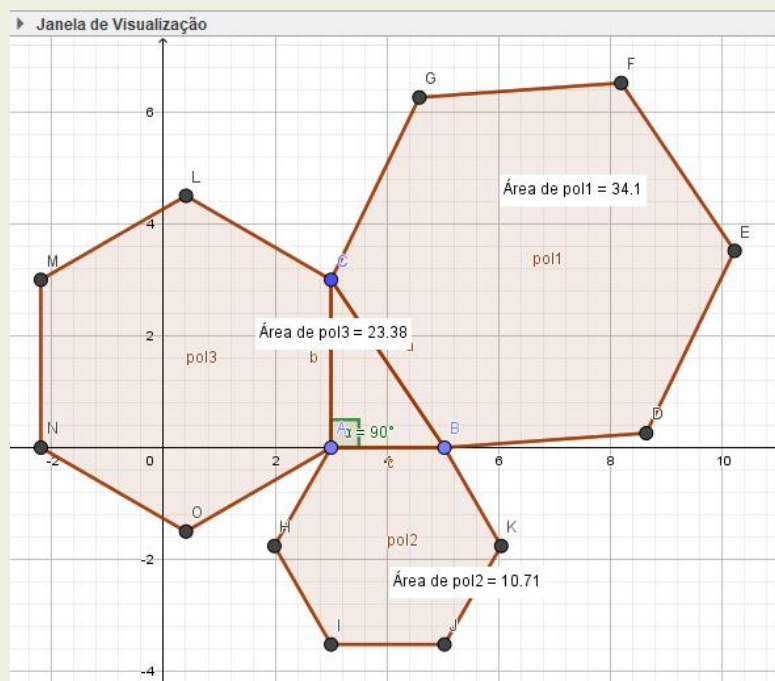
Fonte: Autoria Própria

❖ Comparando área de outro polígono sobre o triângulo retângulo.

- I. Clique no ícone  e selecione a função “Polígono Regular”
- II. Clique sobre o lado BC. Abrirá uma caixa de diálogo para determinar a quantidade de vértice que este polígono possuirá. Digite o número 6 e aperte a tecla <enter>.
- III. Repita o passo II para os outros dois lados do triângulo ABC.
- IV. Clique no ícone  e selecione a função “Área”. Clique sobre cada hexágono construído para determinar suas respectivas áreas.

Figura 13: Possível resolução para a atividade 3<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Neste exemplo percebemos uma aproximação feita pelo próprio software na soma das áreas dos hexágonos sobre os catetos e a área no hexágono sobre a hipotenusa. .



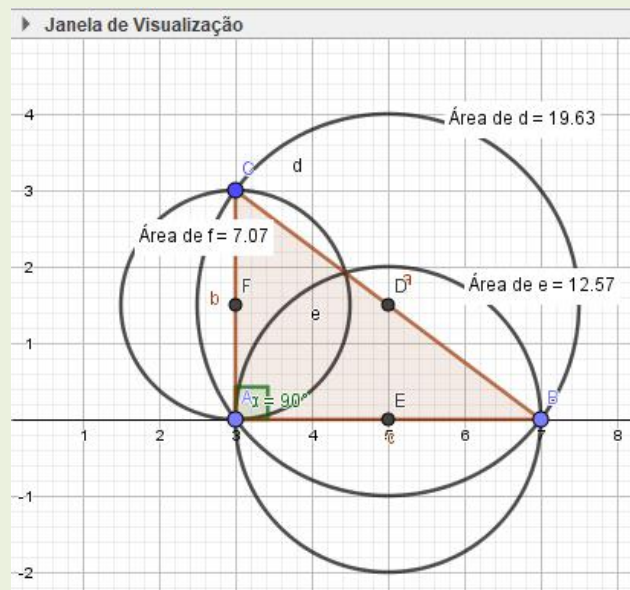
Fonte: Autoria própria

#### ❖ Construção do círculo sobre os lados do triângulo retângulo

Você terá os dois modos, como no número 3. Os passos a seguir serão de acordo com a escolha do modo 2.

- I. Determine o ponto médio dos lados do triângulo para ser o centro dos círculos a serem construídos. Clique no ícone  e selecione a opção “Ponto Médio ou centro”.
- II. Para determinar o ponto médio do lado BC, clique no vértice C e em seguida no B (ou vice versa). Faça esse mesmo procedimento para os outros lados.
- III. Clique no ícone  e selecione a função “Círculos dados centro e um de seus pontos”
- IV. Clique sobre o ponto médio de um dos lados. Este será o centro do círculo. Em seguida arraste até um dos vértices pertencentes a este lado. Repita para os outros dois lados.
- V. Clique no ícone  e selecione a função “Área”. Clique sobre cada círculo construído para determinar suas respectivas áreas.

Figura 14: Possível resolução para a atividade 4



Fonte: Autoria Própria

Por questões de aproximação do *software*, o valor da área do círculo maior (19,63) difere de 0,01 na soma dos dois círculos menores (7,07 e 12,57), no entanto, compreendemos que a soma da área dos círculos menores é igual a área do círculo maior.

## 7.6A ESCADA E O PRÉDIO

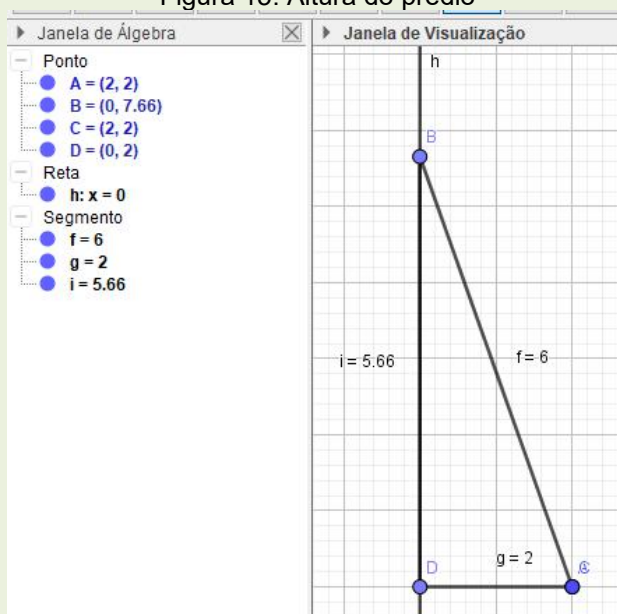
- I. Clique no ícone  e selecione a função “Segmento de comprimento fixo”.
- II. Na Janela de Visualização, construa um segmento de comprimento igual a 2.
- III. Clique no ícone  . Disponha o segmento de comprimento 2 na posição horizontal, pois de acordo com a situação, representa a distância entre a base do prédio e da escada. Este segmento possui um ponto fixo e ou móvel permitindo sua movimentação na janela.
- IV. Clique no ícone  e selecione a função “Reta perpendicular”. Vamos construir uma perpendicular representando o prédio.
- V. Repita o passo I para construção de um segmento de comprimento igual a 6, para representar a escada.
- VI. Posicione o segmento do passo V de modo que um dos seus pontos (o móvel) fique sobre um dos pontos do passo III. O outro ponto (o fixo) deverá ficar sobre a reta perpendicular.

VII. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Construa um segmento entre o vértice do segmento de comprimento igual a 2 e o vértice do segmento de comprimento igual a 6 que interceptou a reta perpendicular.

VIII. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Clique no segmento construído no passo VII. Você descobrirá a altura do prédio.

IX. Na Janela de Álgebra podemos verificar também o comprimento deste segmento. Ele representa a altura do prédio.

Figura 15: Altura do prédio



Fonte: Autoria Própria

### 7.7A ÁRVORE QUEBRADA

Simplificaremos as medidas dadas no problema para que a construção não fique muito extensa e tenha que reduzir o tamanho da Janela de Visualização.

I. Clique no ícone  e selecione a função “Segmento de comprimento fixo”.

II. Construa um segmento de comprimento igual a 4.

III. Clique no ícone  . Disponha o segmento de comprimento 4 na posição vertical, pois de acordo com a situação, representará altura do

tronco de árvore que restou em pé. Este segmento possui um ponto fixo e ou móvel permitindo sua movimentação na janela.

IV. Repita o passo I para construção de um segmento de comprimento igual a 3, para representar a distância entre a ponta quebrada e a base da árvore.

V. Posicione o segmento do passo V na horizontal de tal forma que um de seus vértices sobreponha o vértice do segmento do passo III, sendo perpendiculares entre si.

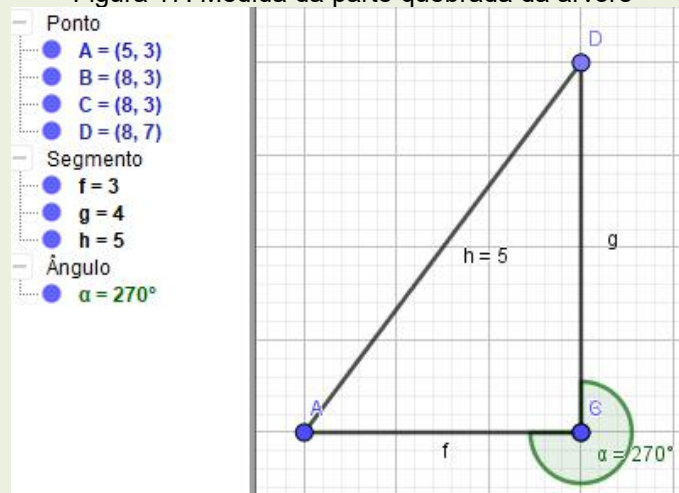
VI. Clique no ícone  e selecione a função “Ângulos”. Verifique se o ângulo formado entre os segmentos construídos anteriormente são perpendiculares.

VII. Clique no ícone  e selecione a função “Segmento”. Crie um segmento oposto ao ângulo reto formado pelos segmentos do passo III e V.

VIII. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Determine o comprimento do segmento do passo VIII.

IX. Após realizar o item IX, você determinou a medida da parte quebrada da árvore. Não esqueça de triplicar a medida encontrada pois no início fizemos a simplificação.

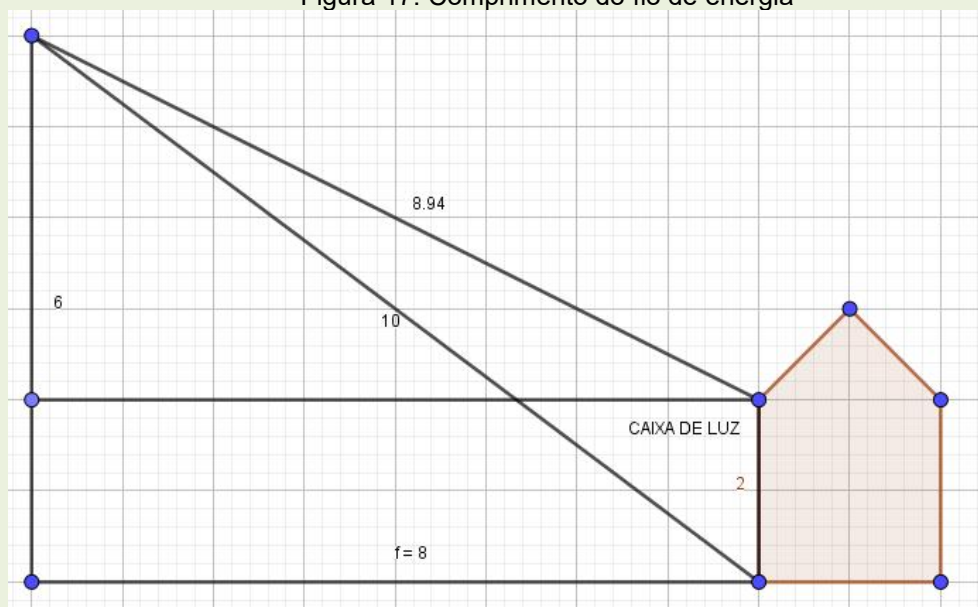
Figura 17: Medida da parte quebrada da árvore



Fonte: Autoria Própria

- I. Clique no ícone  e selecione a função “Segmento de comprimento fixo”.
- II. Construa um segmento de comprimento igual a 8 na posição horizontal. Este representará a distância entre a casa e o poste de energia.
- III. Com a mesma função do passo I, construa um segmento, na vertical, de comprimento igual a 6, para representar o poste.
- IV. Com a função do passo I ativada, sobre o vértice contrário ao do segmento vertical, construa um segmento de comprimento igual a 2.
- V. No ícone , clique na função “segmento” e determine a distância entre o topo do poste à caixa de luz.
- VI. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro” e determine o comprimento do segmento criado no passo anterior. Essa medida representa o metro do fio usado para fazer a instalação.

Figura 17: Comprimento do fio de energia



Fonte: Autoria Própria

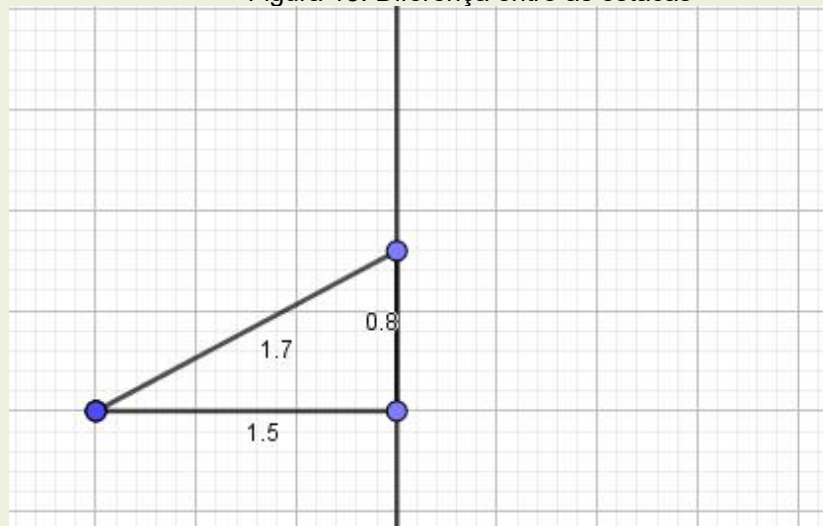
## 7.9 AS ESTACAS DE MADEIRA

Apresentamos uma construção mais simples, no entanto, estimule e permita a criatividade entre os estudantes na resolução.



- I. Clique no ícone  e selecione a função “segmento com comprimento fixo”. Crie um segmento de comprimento igual a 1,5 e sem seguida outro segmento de comprimento igual a 1,7.
- II. Posicione o segmento de comprimento igual a 1,5 na horizontal.
- III. Clique no ícone  e selecione a função “Reta perpendicular”. Sobre uma das extremidades do segmento, construa uma reta perpendicular. Esta representará a estaca maior.
- IV. Selecione o segmento de comprimento igual a 1,7 e posicione-o de forma que uma de suas extremidades esteja sobreposta sobre a extremidade do segmento de comprimento igual a 1,5.
- V. Posicione o segmento do passo IV de forma que a outra extremidade esteja sobre a reta perpendicular.
- VI. Clique no ícone  selecione a função “segmento” e construa um segmento entre as extremidades dos outros dois segmentos sobre a reta perpendicular.
- VII. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Determine o comprimento do segmento construído no passo VI. Esta será a diferença entre a maior e a menor estaca.

Figura 18: Diferença entre as estacas



Fonte: Autoria Própria

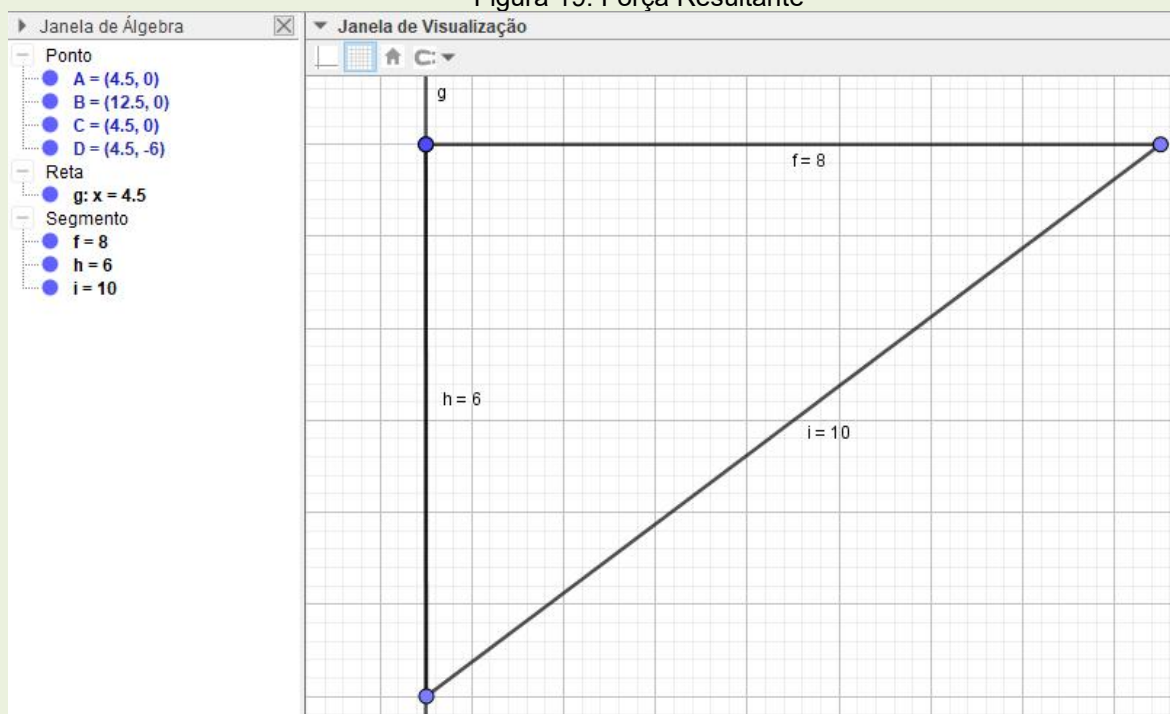
### 7.10 FORÇAS RESULTANTES

- I. Revise sobre como calcular força resultante. a) SOMAR se estiverem no mesmo sentido b) SUBTRAIR se estiverem em sentidos contrários e c) Aplicar o Teorema de Pitágoras caso as forças sejam perpendiculares.
- II. Determinando, primeiramente a resultante entre as forças  $F_1$  e  $F_2$ , temos que forças  $F_r = 8N$ .



- III. Clique no ícone  e selecione a função “segmento com comprimento fixo”. Construa um segmento de comprimento igual a 8 na horizontal (Neste caso da esquerda para a direita pois é o sentido que a força resultante irá atuar)
- IV. Clique no ícone  e selecione a função “Reta perpendicular”. Sobre uma das extremidades do segmento, construa uma reta perpendicular ao segmento do passo III.
- V. Clique no ícone  e selecione a função “segmento com comprimento fixo”. Construa um segmento de comprimento igual a 6.
- VI. Posicione o segmento construído no passo V sobre a reta perpendicular.
- VII. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Construa um segmento que ligue as extremidades dos segmentos do passo III e V.
- VIII. Clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Determine o comprimento do segmento construído no passo VII. Este representará a força resultante.

Figura 19: Força Resultante



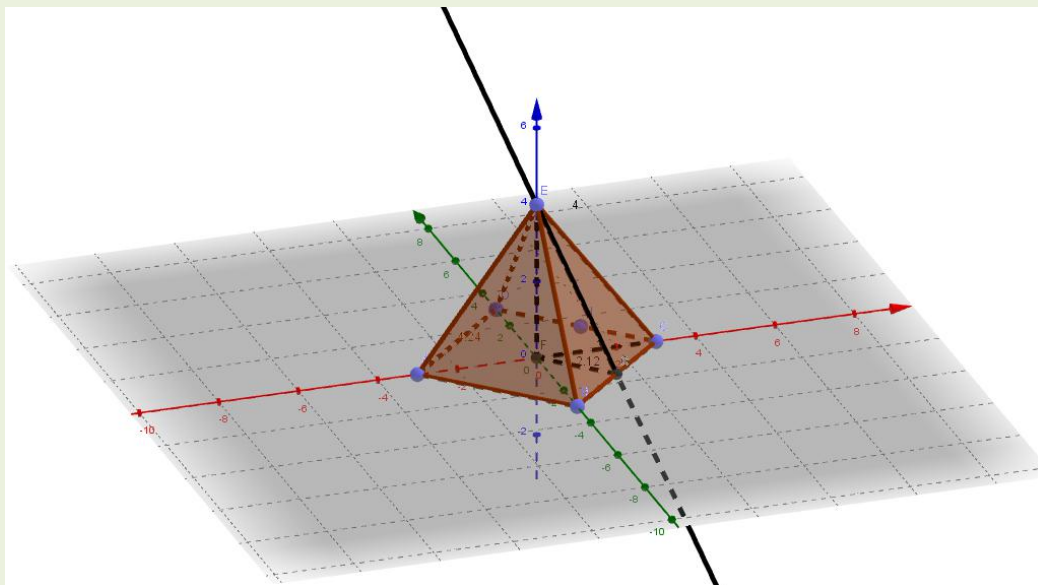
Fonte: Autoria Própria

## 7.11 ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE REGULAR

- I. Clique no ícone  e selecione a função “pirâmide”.

- II. Construa a pirâmide. Crie os pontos A (eixo x), B (eixo y), sobre o eixo negativo, e os pontos C (eixo x) e D (eixo y) sobre o eixo positivo. Por fim, o ponto E (eixo z). Você terá uma pirâmide.
- III. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Clique no ponto E até o ponto de origem dos três eixos. Cria-se um novo ponto, F.
- IV. Este segmento criado no passo III será a altura da pirâmide. Para determinar a altura, clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Meça o segmento e obterá a altura.
- V. Clique no ícone  e selecione a função “Reta perpendicular”. Clique no vértice da pirâmide e sobre uma das arestas da base.
- VI. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Sobre a reta criada no passo V, crie um segmento entre o vértice e a aresta. Este segmento refere-se ao apótema da pirâmide.
- VII. Para determinar a medida do apótema da pirâmide, clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Meça o segmento.
- VIII. Clique no ícone  e selecione a função “segmento”. Crie um segmento entre a aresta do quadrado até a origem dos eixos. No passo VI, ao construir um segmento entre o vértice e a aresta, um novo ponto (G) foi criado. Use este ponto para ligar o segmento à origem dos eixos. Esse segmento representará o apótema da base.
- IX. Para determinar a medida do apótema da base, clique no ícone  e selecione a função “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Meça o segmento.

Figura 20: Elementos de uma pirâmide



Fonte: Autoria Própria

Sem o uso do *software* essas medidas podem ser calculadas utilizando o Teorema de Pitágoras, pois ao representarmos o apótema da base e da pirâmide, em relação à altura da pirâmide, obtemos um triângulo retângulo.

## 8. CONSIDERAÇÕES

Como vimos, o ensino da Matemática passou e passa por transformações que interferem no processo de ensino e aprendizagem. Buscando inová-lo, os professores buscam metodologias dinamizadoras que despertem o interesse, a criatividade e a participação dos alunos, enquanto sujeitos ativos, no processo de aprendizagem. Nesse contexto, o presente Guia Didático tem como objetivo auxiliar os professores na prática docente no que se refere à utilização da História da Matemática e do *software* GeoGebra – ferramentas que, a nosso pensar, potencializam o ensino da Matemática diante de uma maior integração entre teoria e prática dos participantes.

Deve-se ter em vista que as atividades apresentadas constituem apenas sugestões que podem e devem ser adaptadas conforme o nível da classe e a necessidade de cada professor. Sendo assim, fica a nossa recomendação: explorem o *software* além do proposto, façam questionamentos além dos apresentados nas atividades, provoquem a construção de novas estratégias para as demonstrações, proponham atividades diferentes do que sugerimos e busquem sempre por outras informações pertinentes aos assuntos aqui abordados.

Em síntese, apresentamos neste guia apenas um referencial metodológico diferenciado com sugestões que podem ser abordadas no estudo do Teorema de Pitágoras. Esperamos que você, querido (a) professor (a), faça bom uso deste material e que diferentes (e produtivos) resultados sejam alcançados em sala de aula!

Muito Obrigado!  
Os autores

## REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (PCN)**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>> Acesso em: 27 jul 2017.

JANKVIST, Uffe Thomas. A Categorization of the “Whys” and “Hows” of using History in Mathematics in Education. **Educational Studies in Mathematics**. 71 v, n. 3, p. 235-26, 2009. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.473.1018&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 18 set 2016.

MENDES, Iran. Abreu. **História da Matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015 (Coleção História da Matemática para professores)

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e argumentos questionadores. **Zetetiké**, 5 v, p.73-129, Campinas: Unicamp, 1997.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIZUKAMI, Maria das Graças Nicoletti. **Ensino**: As abordagens no processo. Jundiaí, SP: E.P.U, 1986

NORONHA, Claudianny Amorim; MENDES, Iran Abreu (Org.). Professor aprendendo com Geometria Dinâmica em um ambiente colaborativo, discursivo e *on-line*. In: \_\_\_\_\_. **Ensino de Ciências e Matemática**: múltiplos enfoques na formação de professores. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015. (Série Educação Geral, Educação Superior e Formação Continuada do Educador)

VALENTE, José Armando. A Informática na Educação: Como, Para que e Por que. **Revista de Ensino de Bioquímica**, São Paulo, s/v, n.1, 2001



Agência Brasileira do ISBN



ISBN: 978-85-8263-384-7