

The background of the cover features a series of light gray lines radiating from a central point on the left side, creating a sunburst or fan-like effect against a light blue background.

**Série Guias Didáticos de Matemática**

**56**

**Associando Grafos e Logística:  
Exemplos com Prática Educativa**

---

**Claude Killian de Alvarenga  
Luciano Lessa Lorenzoni**

**Editora Ifes  
2018**

**Instituto Federal do Espírito Santo**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática**

**CLAUDE KILLIAN DE ALVARENGA  
LUCIANO LESSA LORENZONI**

**ASSOCIANDO GRAFOS E LOGÍSTICA:  
EXEMPLOS COM PRÁTICA EDUCATIVA**

Série Guias Didáticos de Matemática – nº 56

Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo



Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Espírito Santo

Vitória  
2018

Copyright @ 2018 by Instituto Federal do Espírito Santo  
Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº. 1.825 de 20 de dezembro de 1907.  
O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Material didático público para livre reprodução.  
Material bibliográfico eletrônico e impresso



(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

A473a Alvarenga, Claude Killian de.

Associando grafos e logística : exemplos com prática educativa  
[recurso eletrônico] / Claude Killian de Alvarenga, Luciano Lessa  
Lorenzoni. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Espírito Santo, 2018.

46 p. : il. ; 21 cm (Série guia didático de matemática ; 56)

ISBN: 978-85-8263-362-5

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Modelos  
matemáticos. I. Lorenzoni, Luciano Lessa. II. Instituto Federal do  
Espírito Santo. III. Título

CDD: 510.7

**Editora do IFES**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo  
Pró-Reitoria de Extensão e Produção  
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia Vitória – Espírito Santo – CEP 29056-255  
Tel. (27) 3227-5564 E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

**Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática**

Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara  
Sala do Programa Educimat  
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

**Comissão Científica**

Dr. Luciano Lessa Lorenzoni, D. Sc IFES  
Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende, D. Sc – IFES  
Dr. Hélio Rosetti Júnior, D.Sc. - IFES  
Dr. Geraldo Bull da Silva Junior, D. Ed – EAMES

**Coordenação Editorial**

Sidnei Quezada Meireles Leite  
Danielli Veiga Carneiro Sondermann  
Maria Auxiliadora Vilela Paiva  
Michele Waltz Comarú  
Maria das Graças Ferreira Lobino

**Revisão**

Claude Killian de Alvarenga  
Dr. Luciano Lessa Lorenzoni

**Capa e Editoração Eletrônica**

Katy Kenio Ribeiro

**Editoração Eletrônica**

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor/IFES)

**Apoio Técnico**

Alessandro Poletto  
Ana Christina Alcoforado Capa

**Produção e Divulgação Programa**

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática Centro de  
Referência em Formação e Educação à Distância  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo



## **Instituto Federal do Espírito Santo**

**Jadir José Pela**

Reitor

**Adriana Pionttkovsky Barcellos**

Pró-Reitora de Ensino

**André Romero da Silva**

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

**Renato Tannure Rotta de Almeida**

Pró-Reitor de Extensão e Produção

**Lezi José Ferreira**

Pró-Reitor de Administração e Orçamento

**Luciano de Oliveira Toledo**

Pró-Reitora de Desenvolvimento Institucional

**Diretoria do Campus Vitória do Ifes**

**Hudson Luiz Cogo**

Diretor-Geral do Campus Vitória-Ifes

**Marcio de Almeida Có**

Diretor de Ensino

**Marcia Regina Pereira Lima**

Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

**Christian Mariani Lucas dos Santos**

Diretor de Extensão

**Roseni da Costa Silva Pratti**

Diretor de Administração

Centro de Referência em Formação e Educação à Distância

**Vanessa Battistin Nunes**

Diretora do Cefor

## MINICURRÍCULO DOS AUTORES

### CLAUDE KILLIAN DE ALVARENGA



Mestre em Educação em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo – IFES, Campus Vitória – 2018, atuando na linha de pesquisa da Modelagem Matemática. Possui graduação em Administração – 1992. Possui especialização em Gestão Empresarial pela FAESA – 2000. Especialização em Planejamento e Gerência de Operações pela UFES – 2001, área Logística, atua como Professor do Ensino Básico Técnico e Tecnológico do Ifes Campus Viana

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4771137793254422>

E-mail: [killianalvarenga@gmail.com](mailto:killianalvarenga@gmail.com)

### LUCIANO LESSA LORENZONI



Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1991), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (1996) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (2003). Atualmente é professor do Instituto Federal do Espírito Santo. Tem experiência na área de Matemática Aplicada com ênfase em Pesquisa Operacional e Modelagem Matemática na Educação Matemática. Também atua no EDUCIMAT – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do IFES

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7959495705859101>

E-mail: [lllorenzoni@ifes.edu.br](mailto:lllorenzoni@ifes.edu.br)

*A minha família,  
professores, amigos e colegas  
de trabalho por todo o apoio, atenção,  
carinho e sobretudo pela compreensão.  
Ao meu orientador Luciano Lessa Lorenzoni,  
por toda a paciência e parceria investidos  
neste projeto, fruto de um trabalho construído  
ao longo do mestrado com muita dedicação.*

## APRESENTAÇÃO

Este Guia Didático apresenta-se como uma ferramenta voltada para o ensino pedagógico, em que os professores que atuem no âmbito da matemática tradicional ou mesmo para aqueles em que trabalham em outras disciplinas que pretendam envolver conteúdos que presentes ou não, permitam dar uma abordagem mais prática, poderão fazer uso deste trabalho como referencial em suas atividades com os alunos.

Nesta publicação, construída a partir de uma pesquisa aplicada, foi elaborada para ser um produto educacional, pois o conteúdo dialoga com a Teoria dos Grafos, no âmbito da Modelagem Matemática, de modo que permita aos docentes trabalharem com temas que estejam correlacionados a aplicações reais, vividas cotidianamente, seja por pessoas ou mesmo por empresas, principalmente, quando atividades logísticas geram questões demandadas que se encontram presentes nesta temática.

Diariamente, muitas empresas operam na distribuição de seus produtos, utilizando-se de processos que demandam uma parcela de seu tempo e que envolvem movimentos de roteirização de veículos de carga, preocupados na escolha de um determinado caminho a percorrer, que proporcione maior agilidade e eficiência logística, minimize as distâncias a serem percorridas e sobretudo na otimização do tempo de movimentação, o que por consequência, possam obter uma expressiva redução nos custos operacionais relativos as entregas de seus produtos. O uso da Teoria dos Grafos, associado às aulas de logística ou mesmo da matemática aplicada, apresenta-se adequadamente como um conteúdo que auxilia nestas questões.

As aplicações práticas desenvolvidas para este Guia Didático necessitam de um laboratório de informática, pois os alunos precisam operar um *software* facilmente encontrado na *web*, além de ter acesso à internet para operar com o *Google Maps*, ambos os programas são apresentados aqui, os quais permitem fazer o tratamento das informações e dos valores introduzidos, com o objetivo de gerarem respostas que possam servir de suporte nas decisões quanto aos caminhos mínimos que, escolhidos, orientem as melhores rotas.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>09</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA.....</b>	<b>12</b>
3.1	EXEMPLOS CONCEITUAIS E PRÁTICOS.....	13
3.2	EXERCITANDO GRAFOS.....	23
3.3	OUTROS EXEMPLOS DE GRAFOS .....	25
<b>4</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA E LOGÍSTICA .....</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>O PROGRAMA GRAFOS.....</b>	<b>28</b>
5.1	ELABORAÇÃO DO EXERCÍCIO NO PROGRAMA GRAFOS.....	28
5.2	UTILIZANDO O PROGRAMA – EXEMPLO.....	30
<b>6</b>	<b>CONJUNTO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS.....</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>ATIVIDADE COM <i>GOOGLE MAPS</i> – O CAMINHO MÍNIMO .....</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>45</b>
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desenvolver um conteúdo prático, transformador e que contribua para a educação de nossos jovens é uma tarefa enriquecedora e estimulante, constituindo-se em um tremendo desafio aos educadores que acreditam ser possível aproximar seus alunos dos conteúdos teóricos retirados dos livros e reuni-los com a prática vivida e real dentro do mercado de trabalho.

A elaboração deste guia didático surge como uma ferramenta pedagógica que busca reunir conteúdos matemáticos que possam ser utilizados em operações logísticas, especificamente no segmento de distribuição e roteirização para entrega de produtos, objetivando atender uma demanda empresarial quanto a uma formação técnica atenta as mudanças exigidas pelo nível da modernidade deste século.

Como professor do ensino médio e também do ensino superior, todos os anos costumo refletir muito sobre o que devo trabalhar com os meus alunos, principalmente quando me deparo com a tarefa para fazer o planejamento das minhas aulas. Esta preocupação é própria da natureza docente de sempre procurar por elaborar adequações dentro de seu conteúdo programático, de modo que lhe permitirá trabalhar ao longo do período a fim de evitar transtornos e também como a obrigação de entregar ao setor responsável que cuida das questões pedagógicas de ensino no âmbito administrativo, contudo e apesar do que, nós docentes ficamos presos ao ementário que nos é entregue, onde este encontra-se engessado e presente em todas as disciplinas, fruto do projeto pedagógico do curso, do qual estamos cientes, mas não nos permite muita flexibilidade quanto a promover mudanças sobre outros temas que gostaríamos de abordar em aula.

A Teoria dos Grafos e a Modelagem Matemática são áreas do conhecimento que não estão, geralmente, muito presentes nos livros do ensino médio, pior ainda, nos livros do ensino básico, claro que há publicações sobre o assunto, mas estas não demonstram muito aprofundamento sobre o assunto, apenas citam. E é exatamente a proposta que este guia traz para o leitor, ou seja, elaborar o conteúdo programático do plano de ensino, utilizando-se desta temática, mas aqui neste caso, voltado para prática.

Considerando que esta tarefa de incluir a temática apresentada neste guia seja possível a sua inserção nos planos de aula, como sugestão, procurem trabalhar com os seus alunos algumas técnicas que permitam a participação deles, envolvendo-os dentro do assunto, permitindo a discussão a partir dos aspectos não apenas conceituais, mas também de ordem prática. Este guia didático vem com esta proposta, de modo a auxiliar aos docentes, apresentando-se como uma ferramenta de orientação, promovendo ainda mais o ensino matemático e permitindo que um conteúdo como a Teoria dos Grafos surja como uma modalidade que possa ser associado à logística, deste modo atuando na *práxis* educativa.

A abordagem deste guia didático foi construída a partir do momento em que me debrucei sobre alguns materiais e produções acadêmicas sobre o assunto e vislumbrei que poderia, então, ser elaborada e aplicada uma pesquisa para alicerçar esta temática. Assim, a partir da criação de algumas atividades propostas dentro dos

conteúdos que trabalho no curso técnico de logística para os alunos do ensino médio, me senti motivado e iniciei o desenvolvimento do produto educacional.

Ao me deparar com a estrutura da Teoria dos Grafos, observei que seria perfeitamente possível pensar em alguns exercícios que fossem elaborados a fim de complementar alguns dos conteúdos presentes em determinadas disciplinas da área técnica da logística, como o planejamento da entrega de produtos aos clientes, por exemplo.

Na análise inicial, pesquisei e verifiquei que as atividades aplicadas em sala de aula a serem elaboradas com a Teoria dos Grafos podem ser trabalhadas utilizando-se de uma ferramenta tecnológica que, aqui neste caso, trata-se de um programa informático de livre acesso e gratuito encontrado na internet para *download*, o qual permite pela sua facilidade de manipulação, explicar seu mecanismo e apresentar dados de um problema, o que facilitaria aos discentes encontrar os resultados, exercitando qualquer atividade apresentada de modo prático, rápido e, sobretudo, motivador.

Por fim, reforço que este guia didático consiste em conteúdos de rápido aprendizado, flexíveis na sua estrutura de ensino, condizentes com a realidade laboral, ilustrados por imagens de fácil assimilação, compostos com argumentos próprios e com exemplos práticos e simples, e sobretudo construído com muita dedicação, pois o que se pretende é trazer uma proposta de atividades matemáticas, utilizando a Teoria dos Grafos, por meio da modelagem matemática, de modo que permita que os alunos obtenham um aprendizado prático e que represente um significado na sua formação como cidadão, observadas as aplicações reais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste trabalho o que se pretende é abordar a aplicação da Teoria dos Grafos centrada em uma estratégia com posicionamento científico, considerando as situações reais do cotidiano empresarial por meio da Modelagem Matemática. Como sustentáculo desta pesquisa trago como referencial teórico os fundamentos de Rodney Bassanezi.

A ideia é exatamente propor dentro do curso técnico em logística o uso da Teoria dos Grafos, de modo que auxilie uma melhor compreensão matemática. É por este caminho que pretendo levar este conhecimento ao curso de logística, através de aplicações práticas que conduzam o aluno a compreender e a associar a Teoria dos Grafos como uma particularidade da logística, utilizando-se de ferramenta apropriada, por meio do olhar da modelagem matemática. De acordo com Bassanezi (2004),

ao contrário dos que acreditam ser a matemática aplicada uma matemática inferior – onde os problemas são abordados com técnicas modestas ou métodos computacionais que desvalorizam esta ciência – pensamos que, para o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades, necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano. É também nessa capacidade de estabelecer relações entre os campos da matemática e os outros, evitando reproduzir modos de pensar estanques fracionado, que, a nosso ver, está o futuro da formação de novos quadros de professores e pesquisadores, prontos a enfrentar o desafio de pensar a unidade na multiplicidade (BASSANEZI, 2004, p.15).

D'Ambrósio (1986) trata a Modelagem Matemática como uma forma de interação do conteúdo de sala de aula com questões reais. Conforme o autor, a modelagem é um processo muito rico para encarar situações reais e culmina na solução efetiva do problema que, de modo geral, não é matemático nem uma simples resolução formal de um problema artificial.

Quanto ao referencial de uma análise voltada à prática, a concepção de um processo de aprendizagem, Zabala (1998) afirma não ser possível ensinar nada ao aluno, sem antes partir de uma ideia de como a aprendizagem possa ser produzida. A aprendizagem depende de características próprias dos indivíduos. Assim, é este caminho que necessita de um enfoque pedagógico que torne possível observar a atenção aos diferentes aprendizes, permitindo trabalhar como um eixo estruturador. Dessa forma, no critério para estabelecer o nível de aprendizagem devem ser observados os conhecimentos e as capacidades prévias de cada aluno. Considerando esta proposição, deve-se fixar, do mesmo modo, a forma de ensinar.

Para poder estabelecer os vínculos entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios, em primeiro lugar é preciso determinar que interesses, motivações, comportamento, habilidades, etc., devem constituir o ponto de partida. Para conseguir que os alunos se interessem é preciso que os objetivos de saber realizar, informar-se e aprofundar sejam uma consequência dos interesses detectados; que eles possam saber sempre o que se pretende nas atividades que realizam e que sintam que o que fazem satisfaz alguma necessidade. Mas para isso é indispensável que os

meninos e meninas tenham a oportunidade de expressar suas próprias ideias e, a partir delas, convém potencializar as condições que lhes permitam revisar a fundo estas ideias e a ampliar as experiências com outras novas, fazendo com que se deem conta, também, de suas limitações, situando-os em condição de modificá-las se for necessário, ao mesmo tempo que se buscam outras alternativas (ZABALA, 1998, p. 94).

Quando abordamos os conteúdos práticos dentro de uma determinada aprendizagem, seus significados são ampliados para além da simples questão do que ensinar, encontrando o caminho e dando sentido na indagação sobre por que ensinar. Deste modo, finalizam por envolver os objetivos da educação, definindo, assim, suas ações práticas no âmbito concreto de um ambiente da sala de aula.

A Matemática ensinada nas escolas, dentro de um contexto geral, prepara o educando a compreender o mundo ao seu redor, no entanto este deve buscar no seu ambiente observar ações no intuito de validar as ideias que lhe sejam apresentadas ou que encontrem-se numa conjectura de certeza ou incerteza conforme a natureza da ideia.

### **3 DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA**

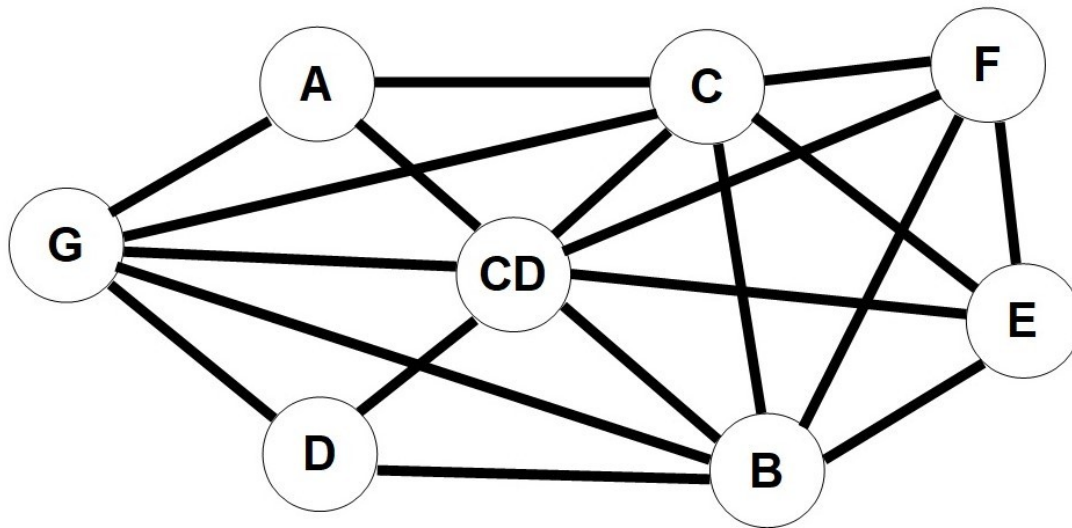
As atividades presentes neste produto educacional foram escolhidas e modeladas de modo que permitam facilitar a compreensão dos docentes em auxílio quanto às práticas educacionais associadas à área da logística.

Neste capítulo, o estudo segue pela prática educativa por meio da aplicação de exercícios com Grafos e consiste na apresentação de alguns conceitos, de modo que permita ser elaborado um plano de atividades e que estas possam ser trabalhadas nas aulas, preferencialmente em laboratório de informática, já que exigirá o uso do software Grafos.

No mundo empresarial, no que se refere especificamente ao transporte de produtos, as rotas dos veículos precisam sempre ser ajustadas, considerando o que já é muito utilizado na logística de distribuição de cargas. Estas operações são realizadas diariamente envolvendo todas as modalidades de transportes, repensadas de modo a se evitar custos adicionais que inviabilizem as entregas aos clientes e produzam prejuízos em razão de um planejamento ineficiente.

Ao adotar esta temática dos Grafos para a prática educativa, a concepção que se pretende passar para o aluno é a obtenção de um resultado logístico satisfatório. Como exemplo ilustrativo, o grafos representado na Figura A, mostra um esquema com vértices A, B, C, D, E, F, G e todos estão conectados ao vértice CD. Note-se que a partir de um centro de distribuição – CD, as entregas de produtos deverão atender aos pedidos partindo deste ponto, assim o que se pretende é percorrer todos os pontos dentro desta rota, com o intuito de minimizar as distâncias já conhecidas, bem como o tempo em que o veículo estará em trânsito.

Figura A – Estrutura de Grafos a partir de um CD



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

### 3.1 EXEMPLOS CONCEITUAIS E PRÁTICOS

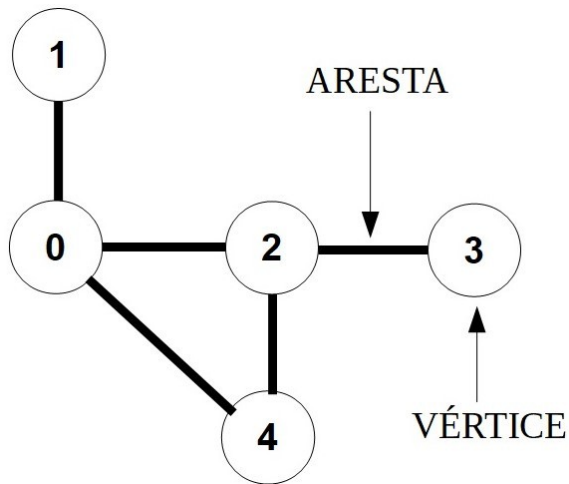
Antes de ser iniciada qualquer atividade no computador com os alunos, me refiro ao Laboratório de Informática, recomendo aos docentes que se verifique com o setor responsável e técnico a permissão para que seja instalado o software Grafos e que sejam feitos os testes com o programa, de modo que os alunos possam operá-lo, isto se faz necessário em casos que sejam exigidas senhas de acesso na instituição de ensino. Outra recomendação, antes das atividades práticas, é preciso esclarecer alguns conceitos sobre as estruturas dos Grafos, como exemplos que possam ser apresentados a eles, trilhando por uma sequência de figuras, desde as mais simples até as mais complexas e com isto, escolha aquelas que permitam ir trabalhando os conceitos presentes em cada uma delas associando com modelos voltados a realidade do cotidiano.

#### EXEMPLO 1:

Conceito básico: Um grafo  $G$  é uma estrutura formada por dois conjuntos  $(V,A)$ , com a Figura B, mostre os cinco vértices e as cinco arestas que os conectam.

Como proposta, neste exemplo de exercício podem ser exploradas alguns aspectos de correlação entre os vértices, associando-os ante aos pares do conjunto. Reforce com os alunos os conceitos de aresta e vértice.

Figura B – Grafo como conjunto



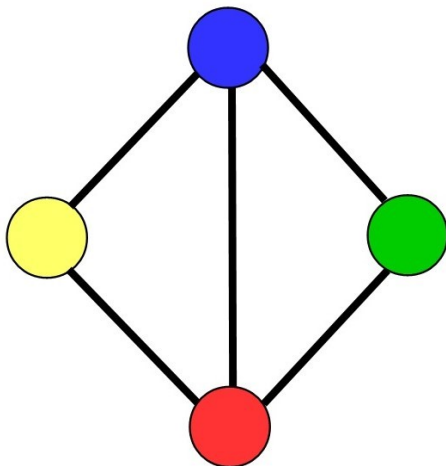
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

#### EXEMPLO 2:

Em razão do possível desconhecimento por parte da maioria dos alunos sobre a temática dos Grafos, inicialmente, estes costumam associar as estruturas como figuras geométricas, o que não deixa de ser, dependendo de alguns tipos de formas apresentadas. Sabendo disso, o docente pode, por opção, contemplar imagens que se assemelhem a geometria, deste modo explorando tais conceitos, o que pedagogicamente, favorece muito a explanação do assunto.

Neste exemplo, para facilitar a compreensão dos alunos, procure por figuras que se assemelhem a objetos, conforme podem ser vistas nas Figuras C, D, E e F.

Figura C – Grafo diamante

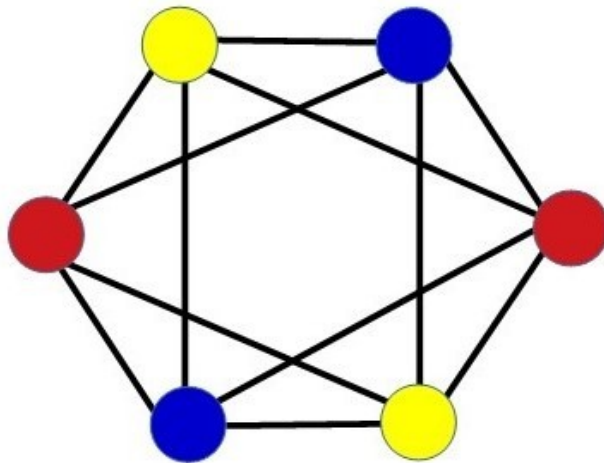


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A Figura C apresenta-se com quatro vértices e cinco arestas, sendo dois vértices que se relacionam com ligações pares e outros dois vértices com ligações ímpares. Este tipo de relação ou conexão, pode dar início a algumas discussões com os alunos, apesar de sua simplicidade.

---

Figura D – Grafo cúbico com triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na Figura D, a estrutura apresenta um Grafo Hamiltoniano, isto ocorre a partir do momento em que é possível deslocar-se para cada vértice por um caminho, passando uma única vez, perfazendo um Ciclo Hamiltoniano.

Na Figura D, observa-se que para cada vértice partem quatro arestas, assim denominando-se uma estrutura em grafos de grau 4.

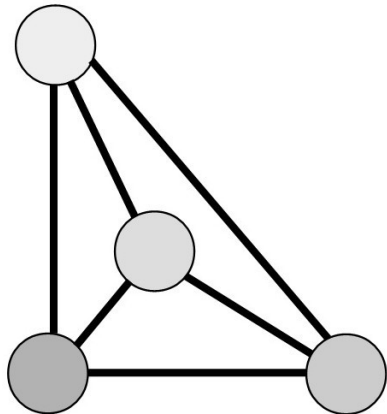
A geometria da Figura D apresenta um Hexágono, e aqui como exemplo de atividade com os alunos, pode se trabalhar a relação entre os seis vértices da seguinte forma:

Imaginando que dos seis pontos conhecidos na Figura D, três deles fossem de uma mesma empresa que oferece o serviço de transportes, e que para cada uma das cores presentes, sendo o verde, azul e vermelho fosse um tipo diferente de veículo de carga, pode se afirmar que, pelo menos entre duas empresas que compõe toda a estrutura, uma empresa necessariamente atenderia os requisitos.

---



Figura E – Grafo triangular

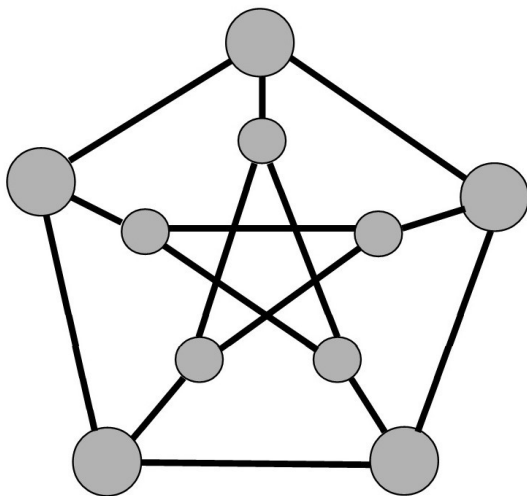


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na Figura E, apesar de sua forma simples com quatro vértices e seis arestas, podem ser trabalhados alguns conceitos como, se o grafo é completo, conexo e plano. Ainda na Figura E, podem ser explorados os números de arestas que partem de cada vértice, neste caso é chamado de Grafo com grau 3, ou seja, para cada vértice oferecem-se partidas de três arestas.

No campo da logística, este tipo de estrutura em que se permitem conexões para todos os pontos, evidencia uma particularidade que muitas empresas de distribuição gostariam de ter ao traçar suas rotas, já que se tornaria possível cobrir uma determinada região independentemente de o veículo ter que passar por um ponto sem necessidade para fazer a entrega de produtos. Sabendo-se disso, a aplicação de uma atividade com os alunos, utilizando-se deste conceito quanto ao grau do grafo, já facilita muito ao traçar uma roteirização.

Figura F – Grafo cúbico com pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A Figura F, apresenta um grafo conexo, regular de grau três com ciclo Hamiltoniano.

Nesta Figura F, há vários elementos que podem ser trabalhados com os alunos e cito como um exemplo simples, relacionar a estrutura como se fosse uma empresa que possua um sistema informático implantado de modo que todos os seus setores permitem acessar a mesma informação de modo compartilhado.

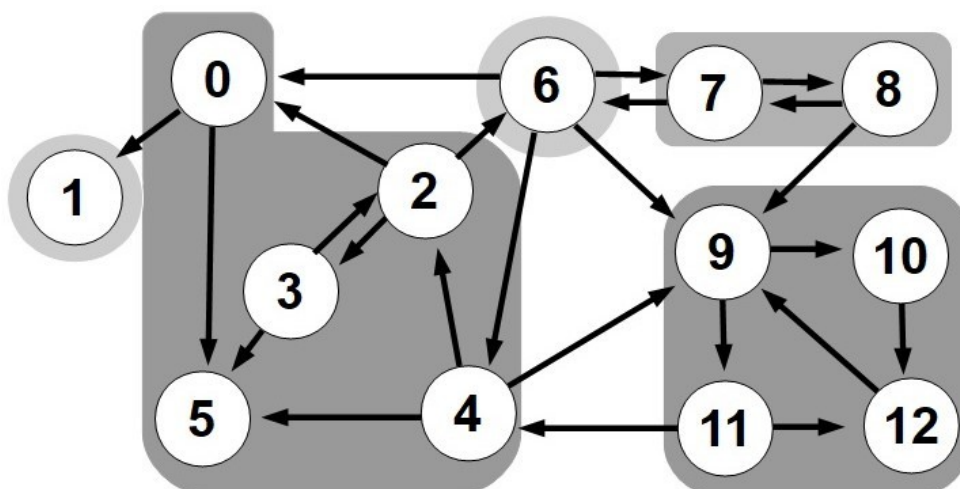
Existem *softwares* que atuam como facilitadores de informação compartilhada, e que contribuem para dar maior velocidade na tomada de decisão, que olhando pelo prisma logístico, já favorece a uma organização numa maior vantagem nos negócios, quando o assunto é obter informação a qualquer momento e quando precisar.

Ainda em relação a Figura F, quando associada a logística de distribuição, note-se que um único veículo é suficiente para atender as entregas, permitindo cobrir geograficamente todos os pontos, e melhor, partindo de quaisquer um deles. Procure dispor os vértices de modo que estejam presentes estas conexões. Conforme o professor observa que desenvolvimento da aula é satisfatório, sugiro gradativamente aumentar o grau de complexidade do grafo com o objetivo de instigar os alunos, inclusive trabalhando o lado geométrico da matemática.

### EXEMPLO 3:

Apresente o Grafo da Figura G, explicando que os vértices se comunicam de forma direcionada, mostre que a ponta da seta é o que estabelece esta direção. Reforce com os alunos que as arestas presentes apontam numa direção, isto significa que somente é possível ir, mas não voltar, com três exceções que se encontram presentes nos vértices 2 e 3, 6 e 7 e 7 e 8.

Figura G – Grafo direcionado ou dígrafo



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

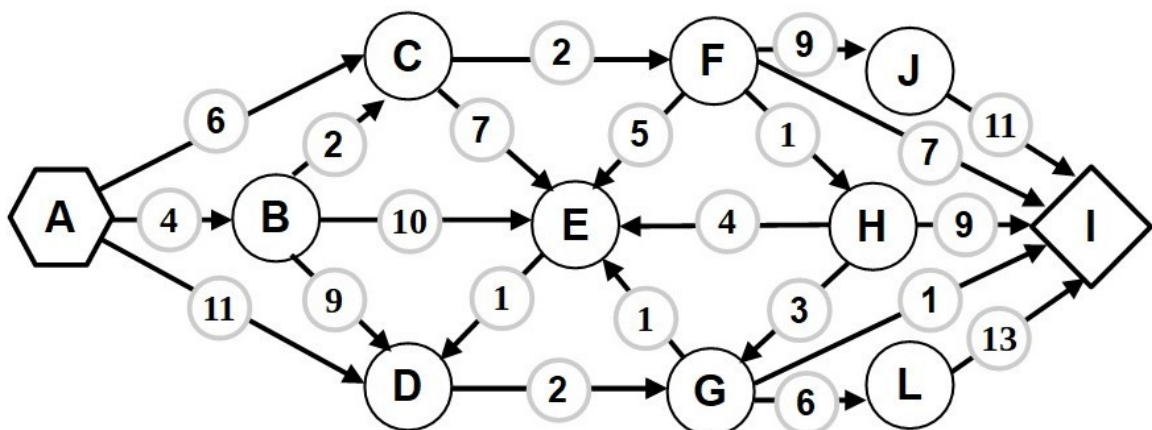
Do ponto de vista da logística de distribuição, uma estrutura em grafos, conforme representada na Figura G, em que configure uma área de cobertura para proceder com entregas e que apresente este tipo de comportamento, ou seja, no conjunto existem arestas unidirecionais partindo de diversos pontos, pode ser utilizado como exemplo de atividade a ser desenvolvida em aula, o professor poderá modelar a estrutura numa matriz, isto certamente exigirá uma maior atenção ao fazer a transferência dos dados de modo a fazer o planejamento de um roteiro de entregas.

A Figura G, pode ser trabalhada com os alunos da seguinte forma:

Para cada região composta por um conjunto de vértices (pontos) pertencentes às áreas mais escuras, considere como se fosse uma cidade, assim nesta figura, observe que existem 5 cidades, no conjunto em que estão presentes os vértices {0,2,3,4,5} seriam como se fossem 5 pontos de entrega nesta área de cobertura, bem como em outra região composta pelos vértices {9,10,11,12}.

Como o grafo apresentado na Figura G é do tipo orientado, note-se que não há como dar início na partida com origem na região composta pelo vértice 1, neste caso específico, seriam necessários pelo menos dois veículos de entrega de modo que se permita percorrer todo o traçado neste grafo, contudo há um problema, em ambas as situações, utilizando-se de dois veículos, não há possibilidade de retorno, apesar que seja possível atender os 13 vértices a partir do vértice 7.

Figura H – Grafo direcionado ou dígrafo e valorado



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A Figura H apresenta uma estrutura em que as arestas possuem valores, aqui o professor poderá trabalhar os aspectos que envolvem custos, distâncias, tempos, quantidades etc., mas atenção, repare que o grafo é direcionado, sendo permitido um sentido em alguns dos pontos. Isto pode restringir o traçado, principalmente de retorno ao ponto de origem.

Como atividade, sugiro desafiar os alunos a buscarem o menor caminho entre um ponto e outro, o que neste exemplo acima, se partirmos do vértice A com destino ao vértice I, o menor caminho será percorrer o seguinte traçado: Dado o conjunto  $\{(A,B) = 4, (B,C) = 2, (C,F) = 2, (F,H) = 1, (H,G) = 3, (G,I) = 1\}$

Se os valores se referirem a distância a percorrer, sem que se repitam os mesmos pontos, forem estabelecidos por quilômetros, então o total da distância percorrida entre a origem no ponto A e o destino no ponto I, será de 13 quilômetros.

Este tipo de atividade é muito comum em todo o tipo de serviços de transportes, porém os modais transportadores, sejam caminhões, comboio ferroviário, embarcações, aeronaves e dutos, considerando algumas exceções dos dutos em que não há retorno os demais, precisam retornar ao ponto de origem, o que na prática não funciona assim, ou seja, toda a frota retorna de algum jeito.

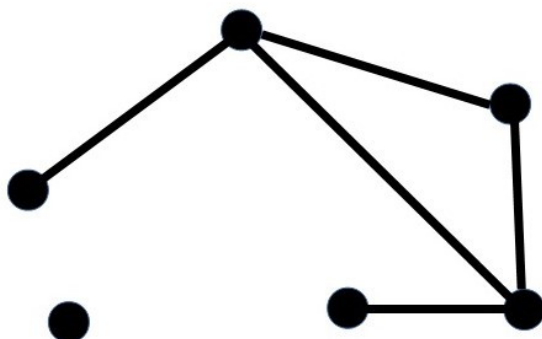
O professor pode utilizar a Figura H, para outras situações, podendo também ser aplicada em processos de produção, como linhas de manufatura, observando o tempo entre um vértice e outro, como se fossem tarefas que devam corresponder economicamente com outras, já que um grafo direcionado como este, pode não haver necessidade de retorno, exceto em sistemas reversos produtivos.

De um modo geral o professor poderá instigar muitas discussões na turma em que for trabalhar com estruturas mais complexas, como já disse, o objetivo é promover nos alunos a curiosidade por meio dessas aplicações com a Teoria dos Grafos.

#### EXEMPLO 4:

Um grafo pode se apresentar com um ou mais vértices sem conexão, neste caso denominam-se subgrafos.

Figura I – Sub-grafo



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O exemplo 4 pode se referir a cidades em que não exista conexão. Neste caso trata-se de um grafo não conexo, pois o vértice 5 na Figura I, não comunica-se com os demais.

O isolamento de um ponto em um dado conjunto deve ser um argumento em aula, considerando que na prática ocorrem, por vezes, situações reais deste tipo. Aqui pode-se representar uma área em que um determinado tipo de modal não faça conexão, o professor poderá propor outro tipo de modal, que assuma o papel de ligação, assim permitindo a conexão a todos os vértices.

#### EXEMPLO 5:

Na Figura J, cada vértice deste grafo tem um grau par, portanto este é um grafo Euleriano. Seguindo as arestas em ordem alfabética obtém-se um circuito/ciclo Euleriano.

Na Teoria dos Grafos, um caminho completo com as propriedades descritas acima de não retrazar nenhum arco é chamado de TRAJETÓRIA de EULER. Este conceito prevê que certas estruturas de grau ímpar, poderão impedir tal trajetória de ser concebida. No entanto, existem grafos com caminhos Eulerianos, se houver dois vértices de grau ímpar. Nesse caso, ao se acrescentar uma aresta ligando estes dois vértices, o novo grafo passa a ser um circuito Euleriano.

Um grafo  $G$  conexo possui caminho euleriano se e somente se ele tem exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar, Figura J.

Figura J – Grafo Euleriano

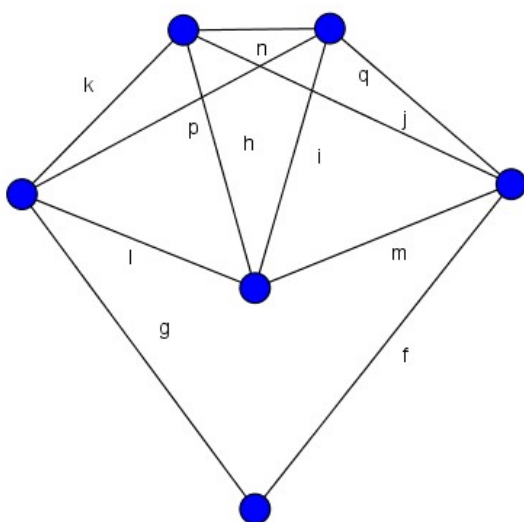
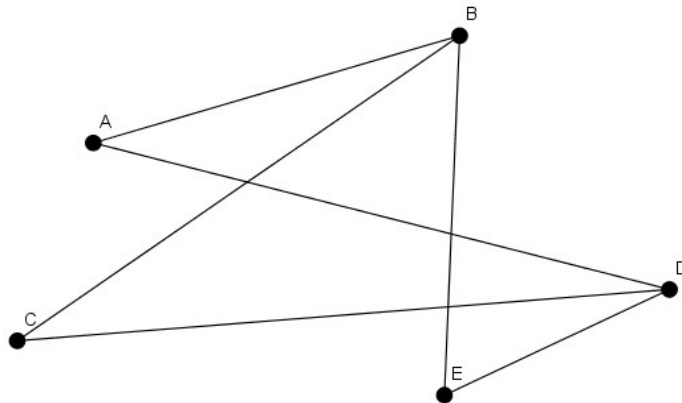


Figura K – Grafo Euleriano



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

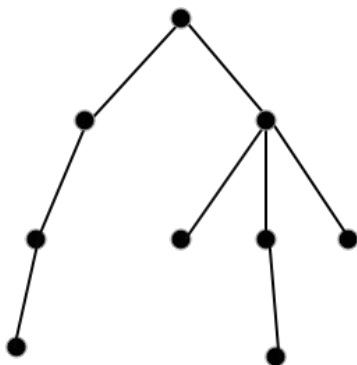
A figura K configura um tipo de grafo Euleriano, mais simples que a anterior, porém com a presença de vértices pares e ímpares.

---

#### EXEMPLO 6:

Um grafo bidirecional é chamado de *árvore* se, e somente se, ele for conexo e não tiver ciclos. Conforme demonstrado na Figura L.

Figura L – Grafo Árvore



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

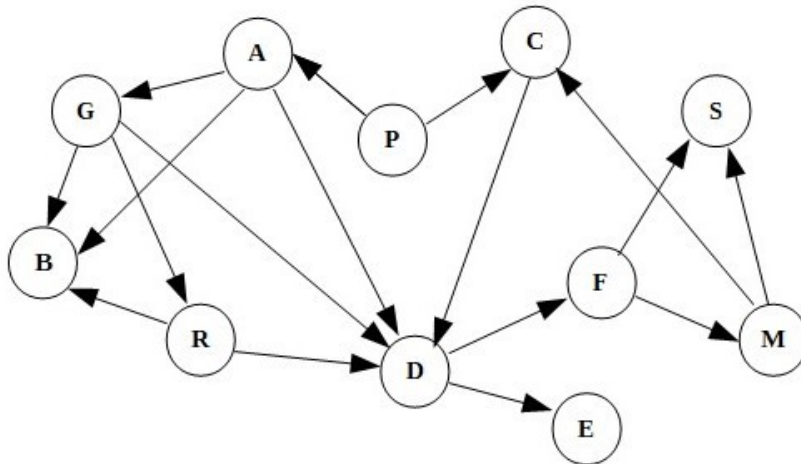
Neste modelo de grafo proposto na Figura L, podem ser discutidas as ramificações que produzam outros pontos em função de um desses pontos, aqui como exemplo prático, exploram-se as relações presentes e muito comuns no âmbito familiar ou de um organograma.

---

### EXEMPLO 7:

O grafo exposto na Figura M pode ser usado para explicar relações entre empresas, podendo ser comercial, acionária, informação compartilhada, dentre outros aspectos.

Figura M – Grafos e *Network*



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

São inúmeras as associações que podem ser trabalhadas com Grafos, em vez de números e letras, opte por utilizar de logomarcas que representem um determinado setor. Peça aos alunos que produzam sua própria estrutura, conforme exemplificado na ilustração da Figura N, relacionando um segmento específico.

Figura N – Grafos e *Network*



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

### 3.2 EXERCITANDO GRAFOS

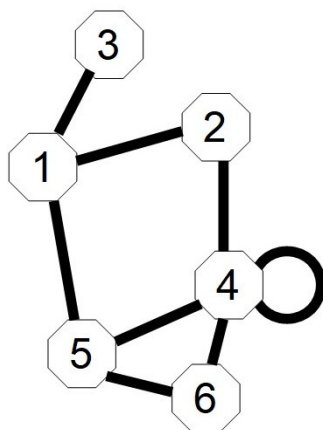
Recomendo aos docentes, a partir dos conceitos dados neste guia didático ou por outros mecanismos, que procurem por imagens na *Internet* utilizando-se de qualquer site de busca em que nestes estejam presentes imagens que representem ou associem aos Grafos. Essa busca pode ser realizada utilizando-se da palavra Grafos na língua portuguesa ou mesmo na língua inglesa, se preferir, escrevendo *Graphs Theory* no buscador. O docente ao fazer a pesquisa no site com a língua inglesa poderá observar um leque ainda maior que surgirá sobre o tema. Analise cada figura detalhadamente e escolha aquelas que estejam mais adequadas ou que relacionem ao seu trabalho como educador, além do conhecimento sobre o assunto, em particular quanto aos conteúdos que costuma adotar na sua metodologia de ensino.

Note que não são poucas as imagens, e como dica, oriento o professor fazer a opção por aquelas que permitam aos alunos uma compreensão mais rápida e prática sobre o assunto. Solicite a turma de alunos, que a partir da exposição da imagem, que estes reproduzam e registrem em seus cadernos escolares sobre o que foi dado como aprendizado. Note que a projeção das imagens dos grafos seja feita com o auxílio de um *data-show* e peça aos alunos que escrevam ou respondam sobre as características presentes nas imagens. Neste tipo de atividade, o objetivo é exercitar as características presentes nos modelos em que cada professor considerar conveniente.

Note que para cada figura que se apresente aos alunos, o professor deverá estar preparado ou, pelo menos, já ter em mãos os conceitos para cada imagem.

01) Determine o tipo de grafo abaixo

Figura O – Grafos e características



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Resposta:**

Grafo não direcionado

Com formação de Ciclo 1,2,4,6,5

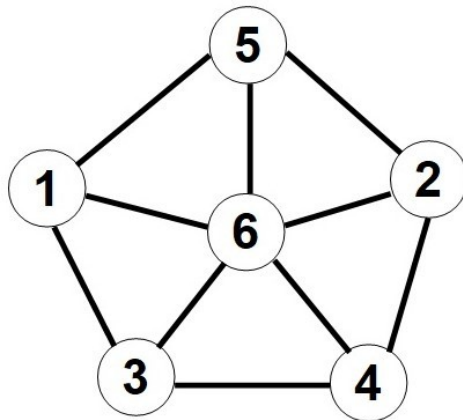
Há laço no vértice 4

---



02) Determine o tipo de grafo abaixo

Figura P – Grafos e características



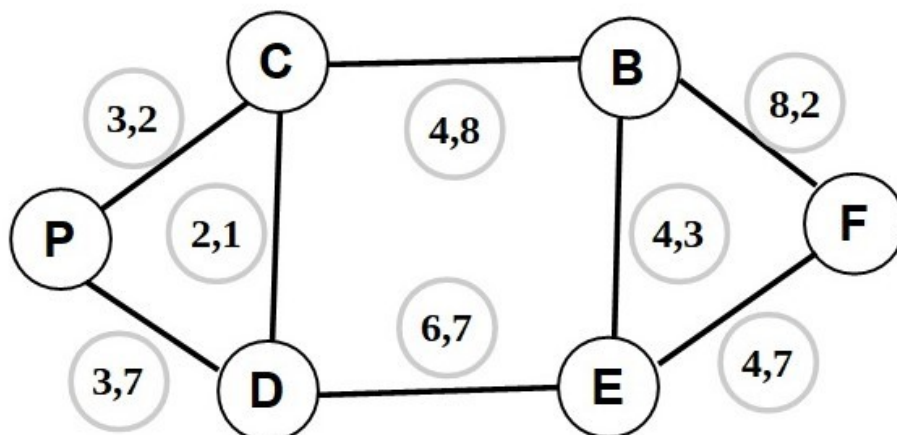
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Resposta:**

Grafo não direcionado  
Com formação de Ciclo  
Não há laços

03) Uma empresa de distribuição de bebidas pretende montar um roteiro utilizando um modelo matemático conhecido por GRAFOS. A operação de entrega da mercadoria tem como ponto de partida o **vértice P**, e o que se pretende é encontrar o caminho mais curto até o **ponto F**. Considerando os valores das arestas em km presentes nos retângulos, determine o caminho mais curto conforme ilustrado na Figura Q.

Figura Q – Grafos e distribuição



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A atividade na Figura Q pode ser realizada para a construção de outros conceitos em que fica a critério de cada professor, conforme suas escolhas. O objetivo aqui é

possibilitar primeiramente o ensino e a aprendizagem de alguns conceitos elementares da Teoria dos Grafos aos estudantes e depois, pela associação da Teoria dos Grafos como meio matemático a ser praticado em atividades que envolvam a logística de distribuição de carga, destacando em aula um tema contemporâneo, como entregas rápidas e eficientes.

As elaborações dos exercícios, no contexto geral, devem ser focados alguns pontos, apontando conceitos elementares da Teoria dos Grafos, como exemplo: vértice, aresta, grafo simples, grafo dirigido ou dígrafo, grafo cíclico e acíclico, com laço, bipartido, trivial, grau, nulo, conexo, dentre vários outros tipos.

### 3.3 OUTROS EXEMPLOS DE GRAFOS

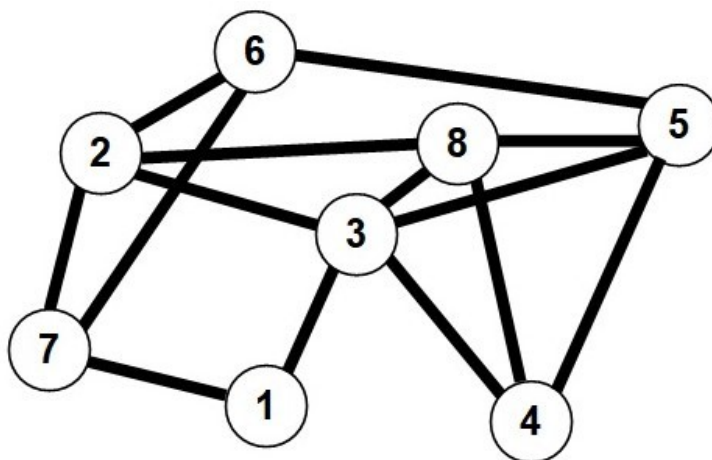
Seguem aqui mais alguns exemplos de imagens que podem ser trabalhadas pelos docentes com os alunos em sala de aula, e que são facilmente encontradas por buscadores na Internet.

Novamente sempre recomendo que as figuras devam ser apresentadas de modo que associem suas arestas com valores entre seus pares, sendo que os vértices podem ser utilizados com nomes de pessoas, cidades, objetos ou mesmo números e letras.

Considerando que a temática dos Grafos não é muito conhecida nas escolas de ensino fundamental e do ensino médio, oriento aos educadores a seguirem uma sequência que permita aos poucos que seus alunos possam gradualmente compreender sobre o assunto.

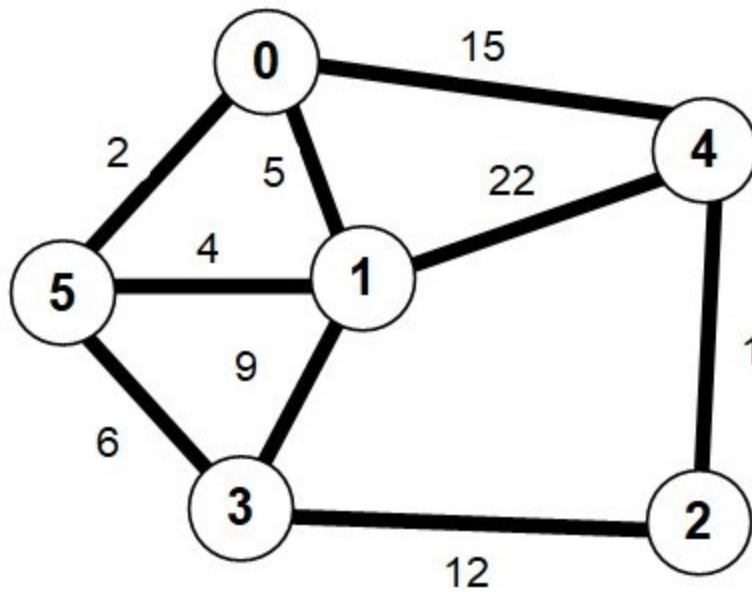
As Figuras R, S e T podem ser utilizadas aqui como exemplo de uma sequência

Figura R – Vértices numerados



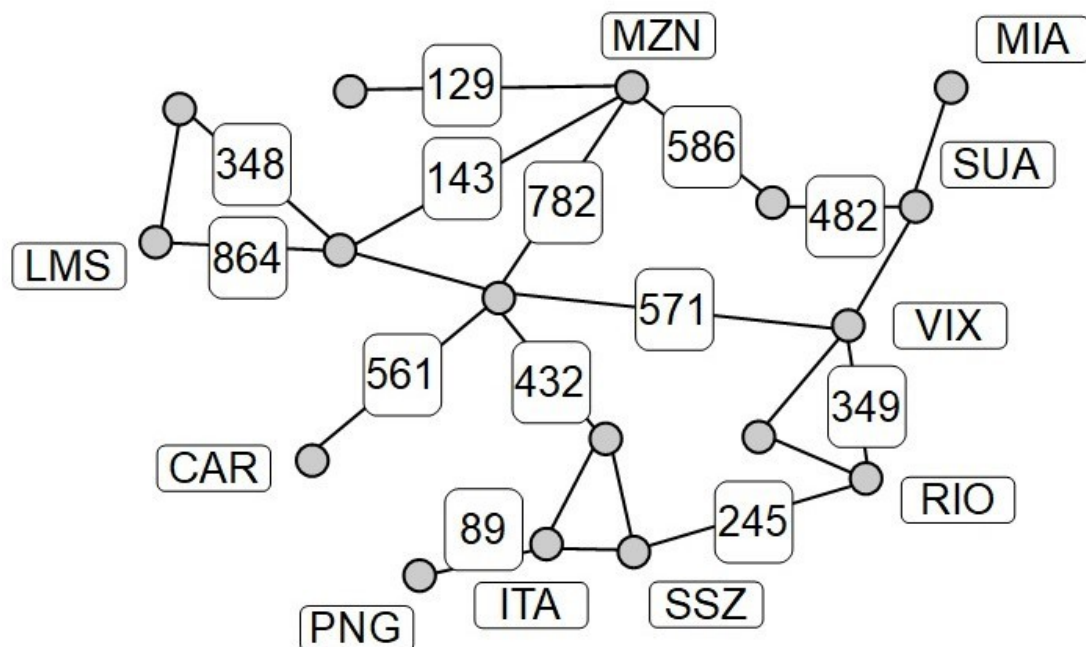
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura S – Vértices numerados com Arestas valoradas



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura T – Vértices com nomes de Cidades e Arestas com valores de distâncias



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA E LOGÍSTICA

A proposta deste tema sobre modelagem matemática deve representar atividades que tenham como base uma situação comum, que estejam presentes no dia a dia das empresas que fazem entregas, e que o tempo é o maior inimigo quando se busca maior produtividade e redução de despesas. As empresas que atuam no ramo de entregas, sobretudo as do transporte rodoviário, enfrentam diariamente situações que muitas vezes podem representar um grande prejuízo.

Hoje em dia, os clientes exigem prazos menores, nível de serviço satisfatório, produtos na condição física conforme anunciado e principalmente preço justo. Para isto a logística trabalha de modo a proporcionar a empresa este conjunto de forças a fim de promover lucro suficiente para que a empresa possa se manter no mercado, e este cresce a cada dia, além da demanda também crescer dependendo das condições econômicas da região.

Considerando que um determinado mercado demanda por produtos, e que uma empresa que atua no ramo de distribuição é responsável por atender este mercado, ocorre então, por meio do processamento de vários pedidos de clientes localizados em diferentes pontos desta região, uma situação-problema. Neste caso, o gestor logístico poderá recorrer e fazer uso dos grafos para elaborar por meio de um esquema a rota do veículo de carga. Para que isto seja possível, este precisará cobrir estas entregas no menor tempo possível. Para que isto possa ser resolvido, os tempos entre os pontos (vértices) já deverão ser previamente conhecidos, assim permitindo ser traçada uma rota entre estes.

Elabore um modelo de exercício, de modo que possa formar um cenário hipotético em que um gestor logístico frequentemente se depare com um problema comum. Este tipo de exercício pode ser aplicado utilizando-se imagens de mapas locais e regionais. Recomendo que os mapas contenham informações fáceis de serem compreendidas e inicialmente não sejam muito complexos na forma como se apresentam, pois isto facilitaria uma visão mais clara para o aluno.

Como início de atividade, recomendo trabalhar com um questionamento bastante simples:

**QUAL É O CAMINHO MÍNIMO QUE POSSA SER PERCORRIDO DE MODO QUE PERMITA REDUZIR O TEMPO OU A DISTÂNCIA DE DESLOCAMENTO DO VEÍCULO (DE CARGA OU PASSAGEIRO)?**

Aqui como exemplo, recomendo que ao preparar o exercício, que procure por dados reais ou indicadores que frequentemente são encontrados em sites de empresas de transportes. Estes dados devem conter informações que representem as distâncias entre as cidades, tempo médio do percurso, custo de movimentação médio do veículo de carga ou passageiro, além de outras variáveis que envolvam o conjunto do que pretende-se trabalhar em aula.

---

## 5 O PROGRAMA GRAFOS

O programa Grafos, em todas as suas versões, é um software muito simples e fácil de ser instalado, não exigindo muitos requisitos da configuração de um computador. Foi criado para auxiliar nas aplicações da Teoria dos Grafos e dos algoritmos, sendo desenvolvido com o objetivo de criar e analisar a estrutura dos grafos, sendo uma ferramenta direcionada para estudos no ramo da matemática que estuda as propriedades dos grafos. O programa oferece suporte para a modelagem desses grafos para resolver problemas reais.

Com uma arquitetura leve, algo em torno de um mega de espaço de ocupação no disco rígido da máquina, o programa permite que seja utilizado gratuitamente, podendo ser levado para sala de aula, ou em laboratórios de informática da escola. Ao professor que fizer uso do programa para demonstração em aula, exige-se a utilização de um equipamento *data-show*, de modo que possa ser projetado e apresentado seus recursos aos alunos.

Na prática, quanto ao funcionamento dos recursos do programa, destaco as estruturas dos traçados e seus valores matemáticos em que podem ser inseridos, considerando as conexões entre os vértices por meio das arestas.

O link abaixo direciona o leitor a um portal, no qual é possível fazer o *download* do programa Grafos, além de outros *softwares* voltados para a área da educação.

<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/10466>

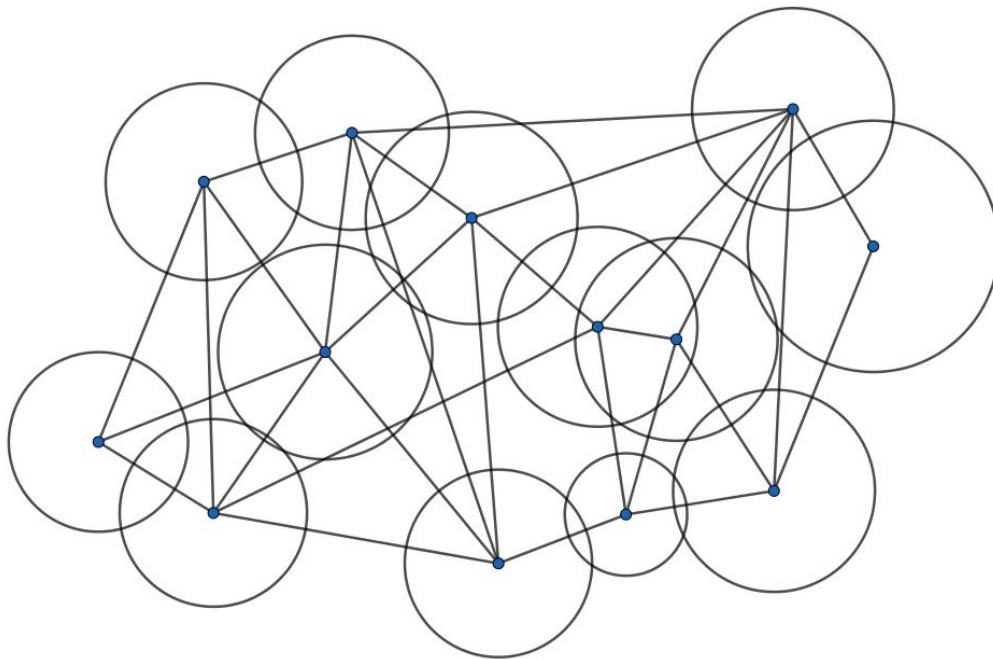
O site apresenta-se como um banco internacional de objetos educacionais com vários recursos que podem ser utilizados em todas as séries de ensino, inclusive de nível superior. Considerando que há uma quantidade enorme de ferramentas de ensino, recomendo que seja necessário utilizar-se dos filtros presentes na página com o objetivo de ser feita uma busca mais detalhada do objeto educacional que o professor deseja trabalhar.

---

### 5.1 ELABORAÇÃO DO EXERCÍCIO NO PROGRAMA GRAFOS

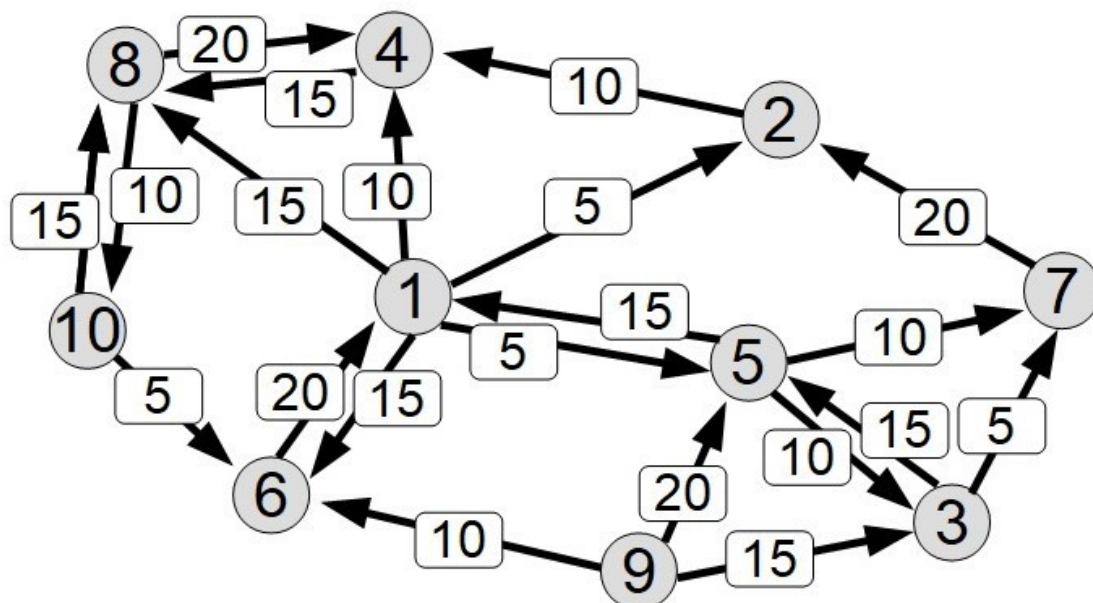
A elaboração do exercício proposto pode ser apresentada aos alunos com base em informações e valores fictícios ou reais, mas desde que sejam comuns nas empresas transportadoras, que por meio de índices estatísticos, em decorrência de operações pelo mesmo caminho, conhecem os valores quanto a tempo de percurso, distância e custo da viagem. De um modo geral, a confecção do valor do frete referente ao deslocamento de um veículo entre origem e destino, sofre influência de acordo com a região de entrega, além também das empresas considerarem outros valores que compõe o preço final, conforme ilustrado nas Figuras P e Q, mas que não são tratados aqui neste guia, contudo o programa grafos pode ser utilizado para estruturar estas informações, caso seja de interesse do docente.

Figura P – Grafos e influência regional no preço do frete



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura Q – Grafos e valoração dos caminhos



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

## 5.2 UTILIZANDO O PROGRAMA – EXEMPLO

Uma determinada empresa de distribuição de mercadorias recebe uma planilha eletrônica contendo uma programação para modelar um roteiro. A planilha apresenta três colunas, sendo que na primeira constam as atividades, na segunda coluna está presente a procedência e a última o tempo de percurso. Ao analisar as informações, insere os dados num programa computacional (Grafos) de modo que possa obter a melhor rota com o tempo de cobertura reduzido. O gestor depara-se com o seguinte problema:

Tabela 1

ATIVIDADE	PROCEDÊNCIA	TEMPO (minutos)
A	-	45
B	-	50
C	A	30
D	B	90
E	B	25
F	C, D	65
G	E	140
H	G	115

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

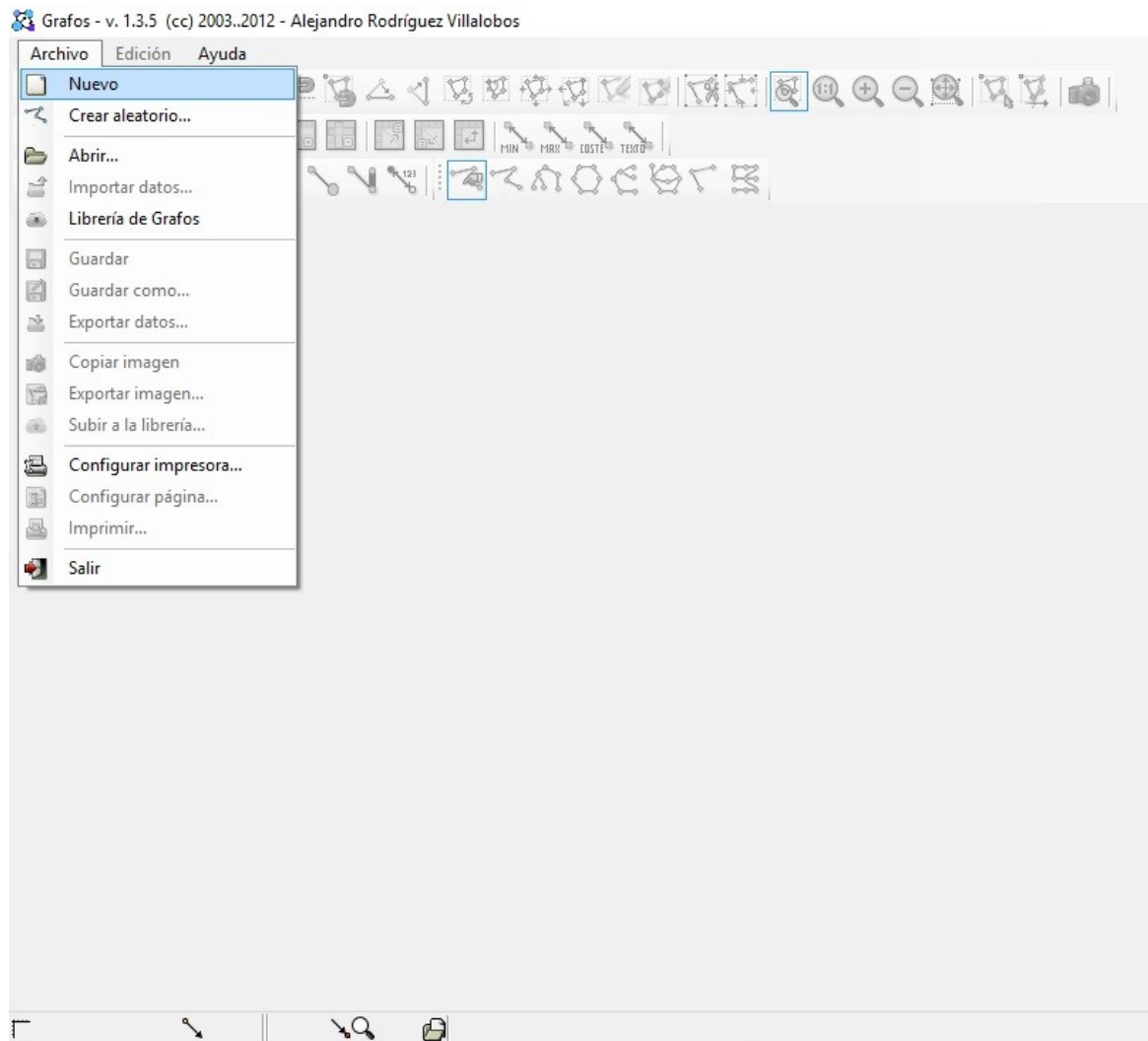
Para a execução do exercício proposto, esta atividade deverá utilizar a ferramenta do programa Grafos, onde o professor com a tela aberta, o aluno deve clicar na opção Archivo (Arquivo) e posteriormente selecionar e abrir um novo (Nuevo), conforme a Figura 1.

O programa Grafos em sua versão 1.3.5 é simples e útil que pode ser levado para sala de aula. No caso desse estudo, a utilização do laboratório de informática, existente na instituição pesquisada, favoreceu uma compreensão na prática do alunado quanto ao funcionamento de uma estrutura dos traçados, considerando as conexões entre os vértices por meio das arestas.

É importante ressaltar que conforme o nível de complexidade cresce, o uso da computação passa a ser indispensável. O programa Grafos, quando alimentado por dados e informações, gera, após uma análise, o resultado de rotas adequadas, minimizando os caminhos que devem ser percorridos.

As Figuras 1 e 2, respectivamente, apresentam a tela do programa, em que, deve se abrir um novo arquivo e a partir disto, com a área de trabalho do programa aberta, o próximo passo é clicar no formato de Edição e escolher o modo Gráfico, assim, pode se dar início a construção da rede conforme os dados que se apresentarem nos problemas.

Figura 1 – Programa Grafos (Arquivo Novo)



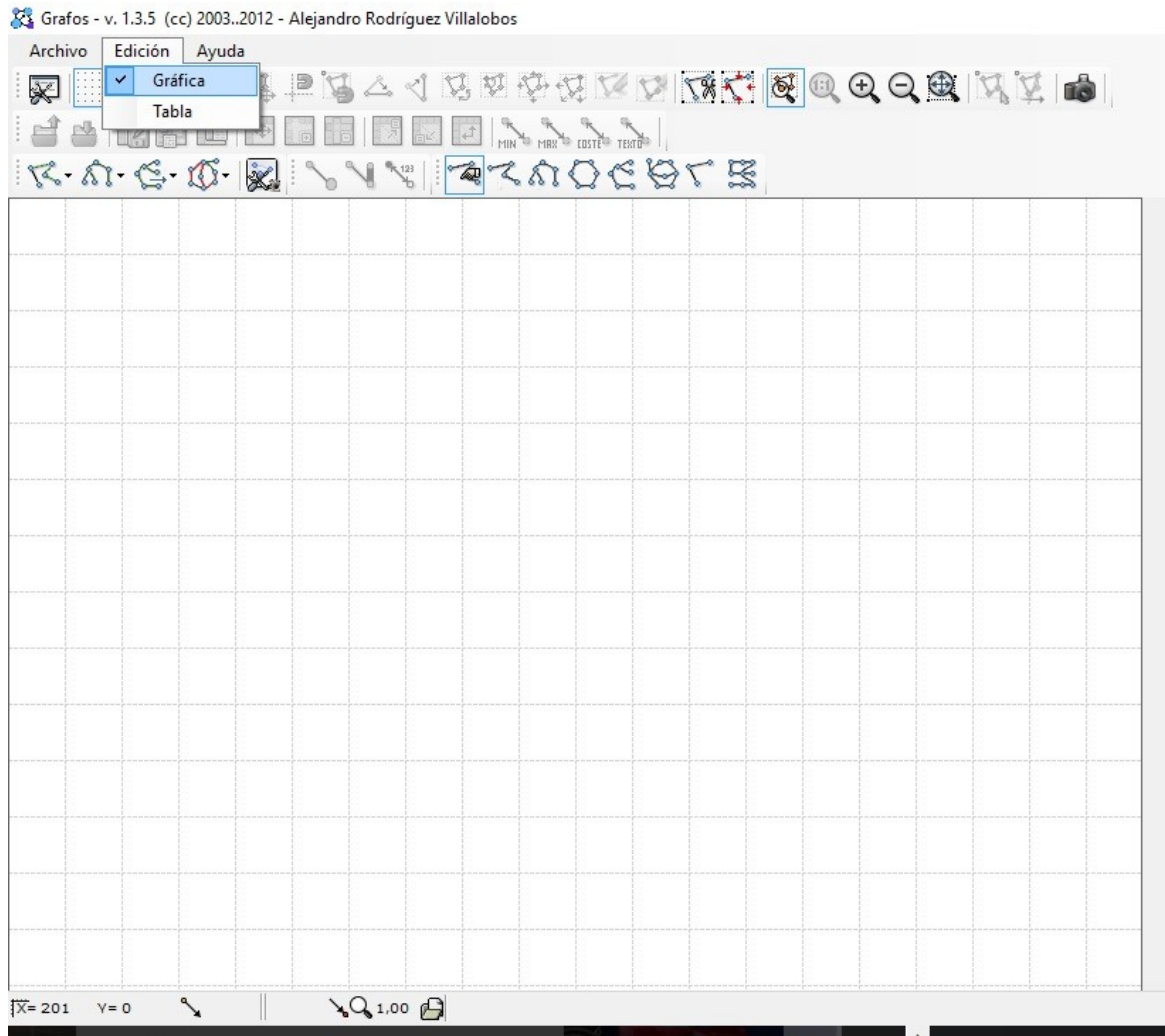
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na Figura 1, na janela que oferece o comando do Arquivo é possível criar aleatoriamente uma estrutura com grafos, pois o programa oferece esta opção em casos que o número de vértices (nodos) e o número de arcos já sejam conhecidos. Apesar dos números entre vértices e arcos serem introduzidos pelo usuário, as ligações construídas neste conjunto poderão posteriormente serem remanejadas, excluídas ou mesmo criadas novas ligações, inclusive alterar a posição dos vértices na grade.

Informe aos alunos que a construção do grafo a ser gerado na tela do programa, inicialmente deve ser feito manualmente, pois com isto o aluno aprenderá como funciona o mecanismo de introdução dentro dos campos das arestas que unem os vértices.



Figura 2 – Programa Grafos (Modo de Edição)



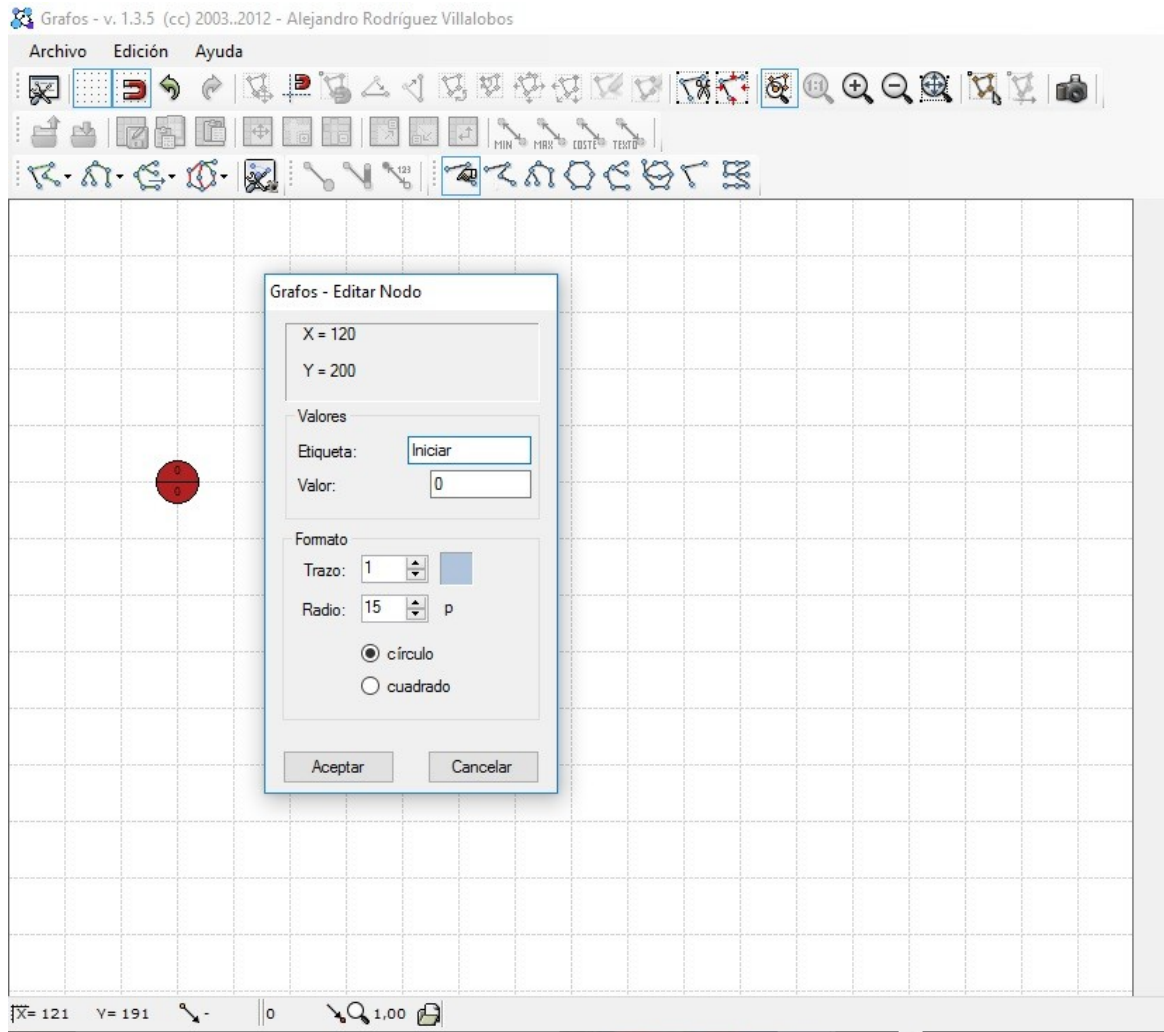
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O programa se apresenta com um plano quadriculado, conforme Figura 2, do qual conta com algumas ferramentas que podem realizar múltiplas tarefas. É importante ressaltar que para se dar início com a construção da rede deve se ter previamente as informações já elaboradas para serem inseridas no programa.

A partir das informações coletadas, o modo Gráfico permitirá a visualização de todo o conjunto de vértices que serão alocados na área de trabalho, bem como suas ligações pelas arestas. É possível também alterar as posições dos vértices no plano, desde que, ao serem movimentados, estes não ocupem os mesmos pontos nos cruzamentos em que outros vértices já estejam posicionados, pois o programa não permite que nas mesmas linhas do plano coexistam dois vértices simultâneos.

A seguir, na Figura 3, o próximo passo dado refere-se aos vértices e sua nomeação, bem como seus valores. Dando um duplo clique na área de trabalho, surgirá o primeiro vértice. Com a janela aberta, na caixa etiqueta, pode ser dado um nome ao vértice. No exemplo abaixo, foi denominada a palavra “Iniciar”.

Figura 3 – Programa Grafos (Edição dos Vértices)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para continuar a construção da rede, devem ser dados duplos cliques na tela que assim surgirão tantos nós (vértices) quanto forem necessários. Este procedimento deverá ser seguido até que todos os nós estejam completos.

A seguir, cada nó (vértice) deverá ser nomeado conforme os valores contidos na coluna ATIVIDADE transferindo estes, de maneira que se complete o exercício proposto, conforme apresentado na tabela 1.

Cuide para que a nomeação dada aos vértices esteja perfeitamente correta de modo a garantir tanto o resultado final do exercício como a qualidade exigida pelo próprio conjunto construído.

Tabela 1

ATIVIDADE	PROCEDÊNCIA	TEMPO (minutos)
A	-	45
B	-	50
C	A	30
D	B	90
E	B	25
F	C, D	65
G	E	140
H	G	115

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Um detalhe do programa Grafos, é que este oferece ao usuário a possibilidade de escolher entre dois formatos do vértice, podendo ser representado por um círculo ou por um quadrado, isto serve para diferenciar os pontos do conjunto de vértices, caso em que o formato escolhido poderá assumir um papel diferenciado nas relações de conexões, como por exemplo: ORIGEM e DESTINO.

As posições dos pontos não seguem um padrão, podendo estes serem distribuídos conforme a preferência do usuário, contudo devem ser considerados alguns pontos antes de se proceder com os lançamentos dos valores.

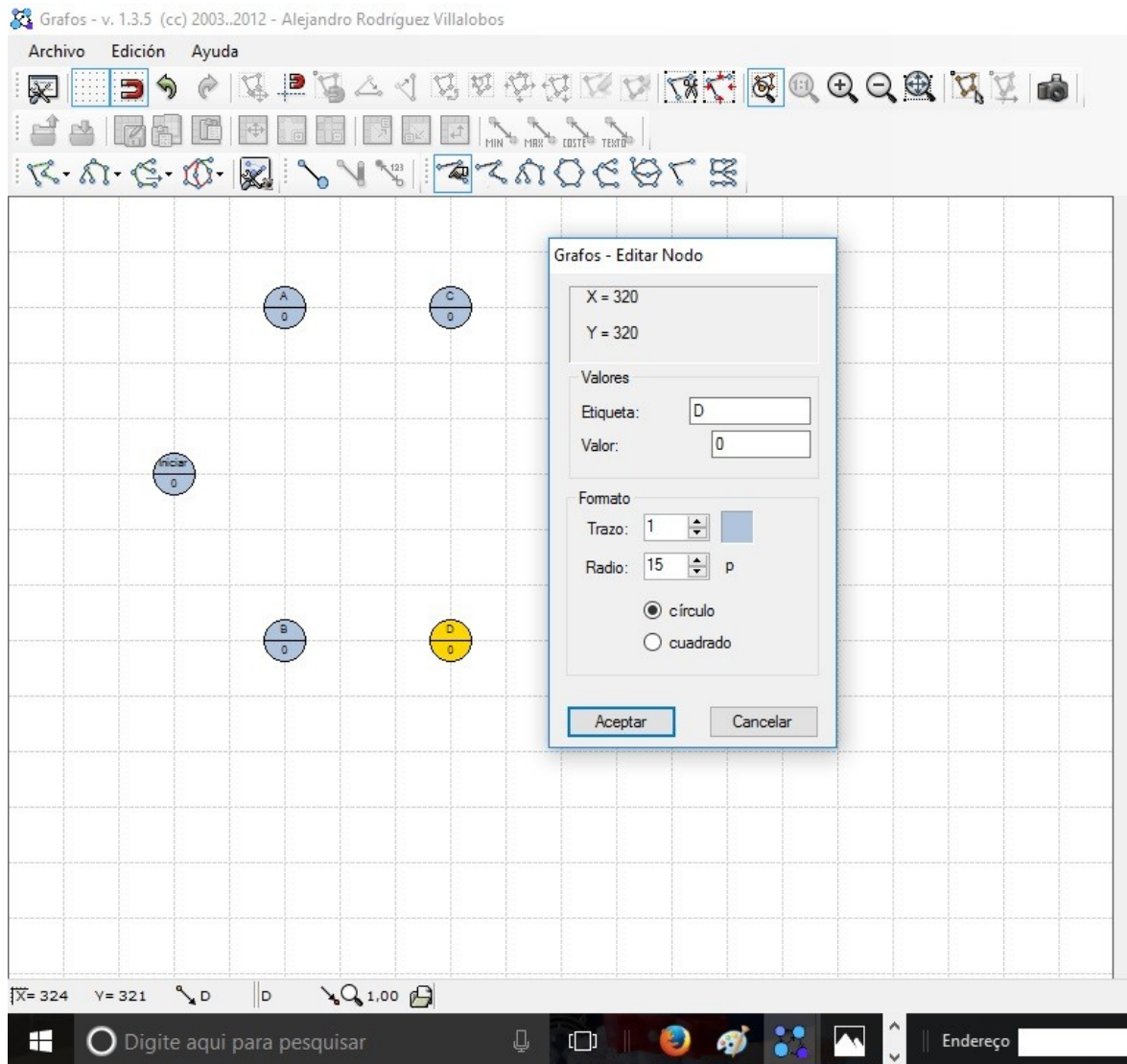
Primeiro deve-se observar que o vértice de partida deverá ser nomeado, segundo ponto, evite posicionar os vértices muito próximos, pois as arestas, quando valoradas, poderão confundir visualmente o leitor, por último, organize o layout do conjunto, de modo que fiquem claras as informações, pois os resultados do programa projetarão a estrutura em grafos.

Todos os vértices, depois de colocados nas posições, conforme as preferências do usuário poderão receber valores, bem como as arestas que os conectam, assim, o programa poderá analisar estes dados e executar o que se propõe na atividade.

Na Figura 4, conforme os vértices são posicionados na grade, o usuário caso deseje, poderá alterar tais posições, bastando para isto clicar e mover para outra posição de sua escolha, contudo o programa manterá a aresta, que acompanhará o vértice, mas dependendo da posição, poderá ocorrer cruzamento das arestas, o que não signifique ocorrer em perdas dos dados, mas apenas estético.

As edições nos vértices (nodos) devem ser realizadas uma por uma, esta ação permite individualizar informações para cada ponto, sendo um vértice para o início e outro para o fim do caminho, os demais são os pontos que podem ser percorridos de acordo com o menor caminho presente na rota.

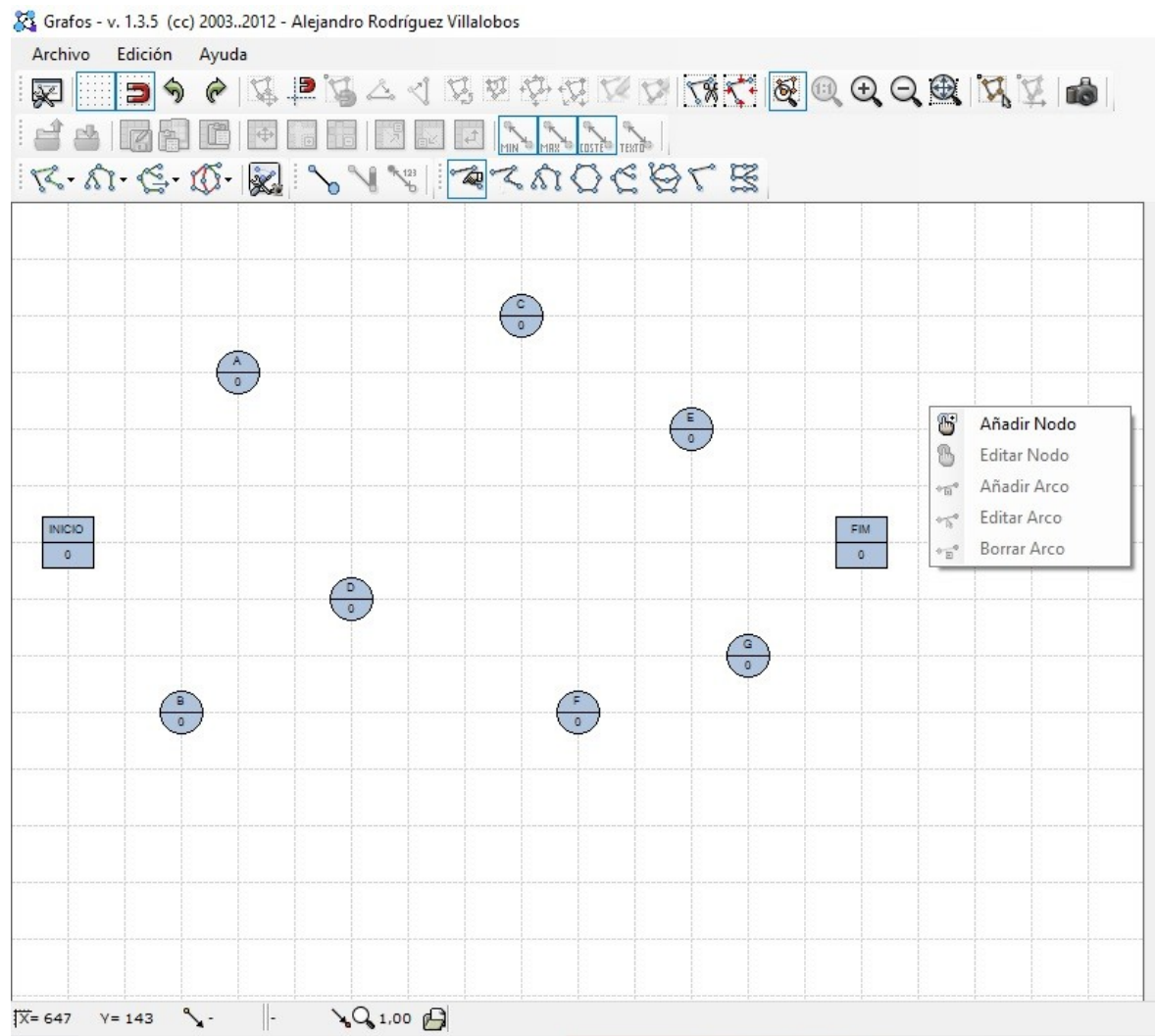
Figura 4 – Programa Grafos (Editando os vértices)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na Figura 5, permaneça posicionando os nós (nodos) do Grafos, e se preferir você poderá aumentar o tamanho destes, esta opção encontra-se na janela de edição do vértice (nodo) e no quesito Formato aumente o valor do Radio para um valor acima de 15, recomendo que o valor seja de até 20, pois ele fica muito grande, reduzindo os espaços contidos na tela.

Figura 5 – Programa Grafos (Editando os vértices)

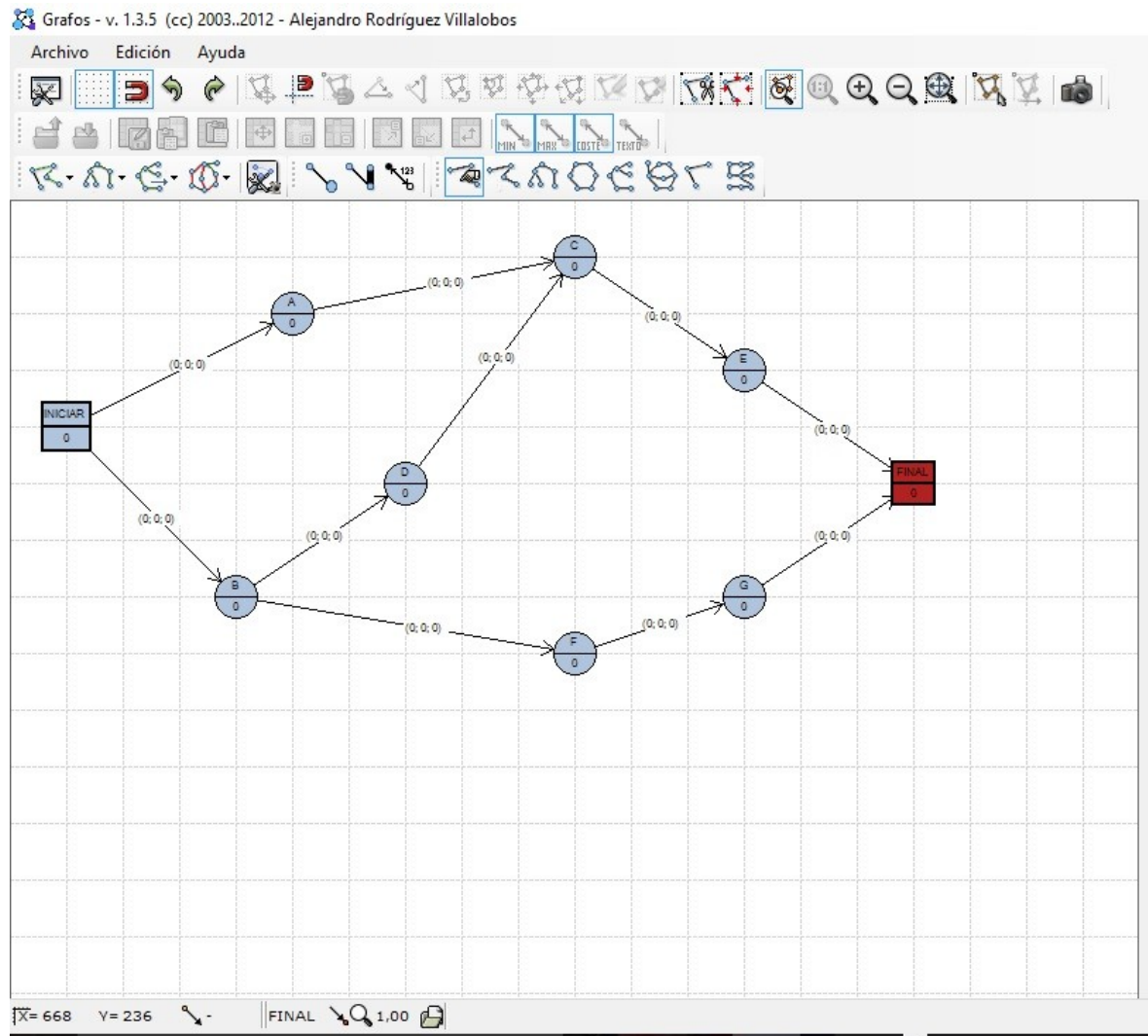


Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A figura 6 apresenta os lançamentos da tabela projetando as rotas possíveis dentro do cenário. Como dica, sugiro posicionar os vértices de modo a evitar os cruzamentos entre os arcos. Deve-se ter o cuidado quanto a posição dos vértices, atentando que estes devem prever um certo nível de afastamento. A posição destes pontos são necessárias, pois quando as arestas forem colocadas, as informações contidas no programa que acompanham as arestas devem ficar visíveis de modo que seja permitida a sua visualização e também a compreensão dos alunos quanto aos valores presentes.

Com um total de oito vértices sobrepostos na tela, certifique-se que o primeiro e o último vértices receberão a etiqueta de INÍCIO e FIM respectivamente, continue a posicionar os demais vértices e etiqeue com as letras A, B, C, D, F e G, conforme mostrado na figura 6

Figura 6 – Programa Grafos (Projeção exemplificada)



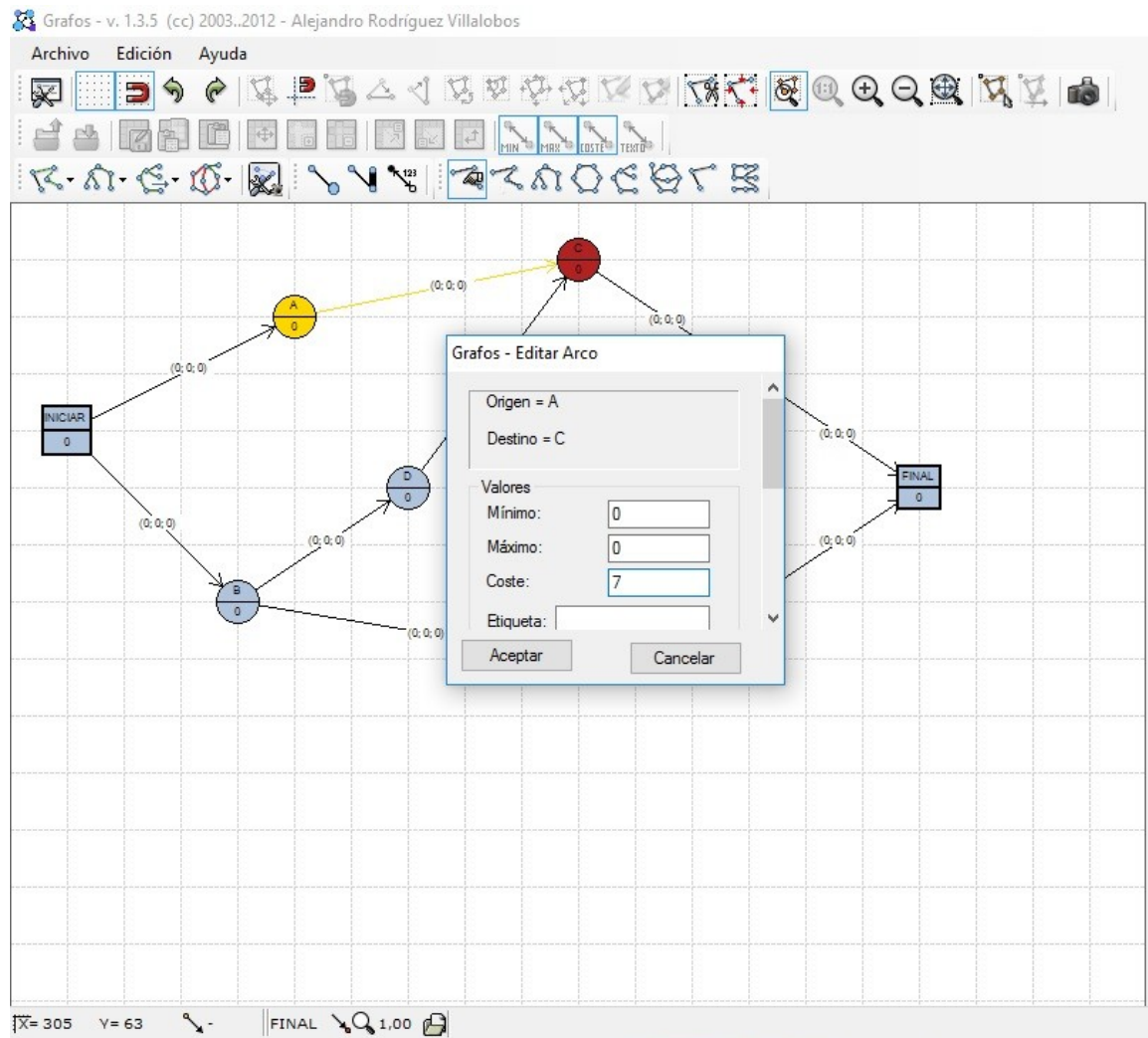
Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Dando um duplo clique nas arestas (arcos), presente entre os vértices correspondentes, abrirá uma janela de diálogo. A partir do campo “custo”, que permite introduzir então os valores indicados na referente tabela, clique em aceitar. A aresta passará a ter o valor o qual foi introduzido, siga com este mesmo procedimento, que deverá ser feito até que a última aresta receba seu valor.

Conforme apresentado na Figura 7, a edição dos arcos devem conter os dados de acordo com os valores designados para o lançamento.



Figura 7 – Programa Grafos (Edição dos arcos)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para isto, repetiremos o mesmo procedimento para cada uma das rotas (arcos), de modo que sejam transferidos os valores referidos na tabela 1.

Tabela 1

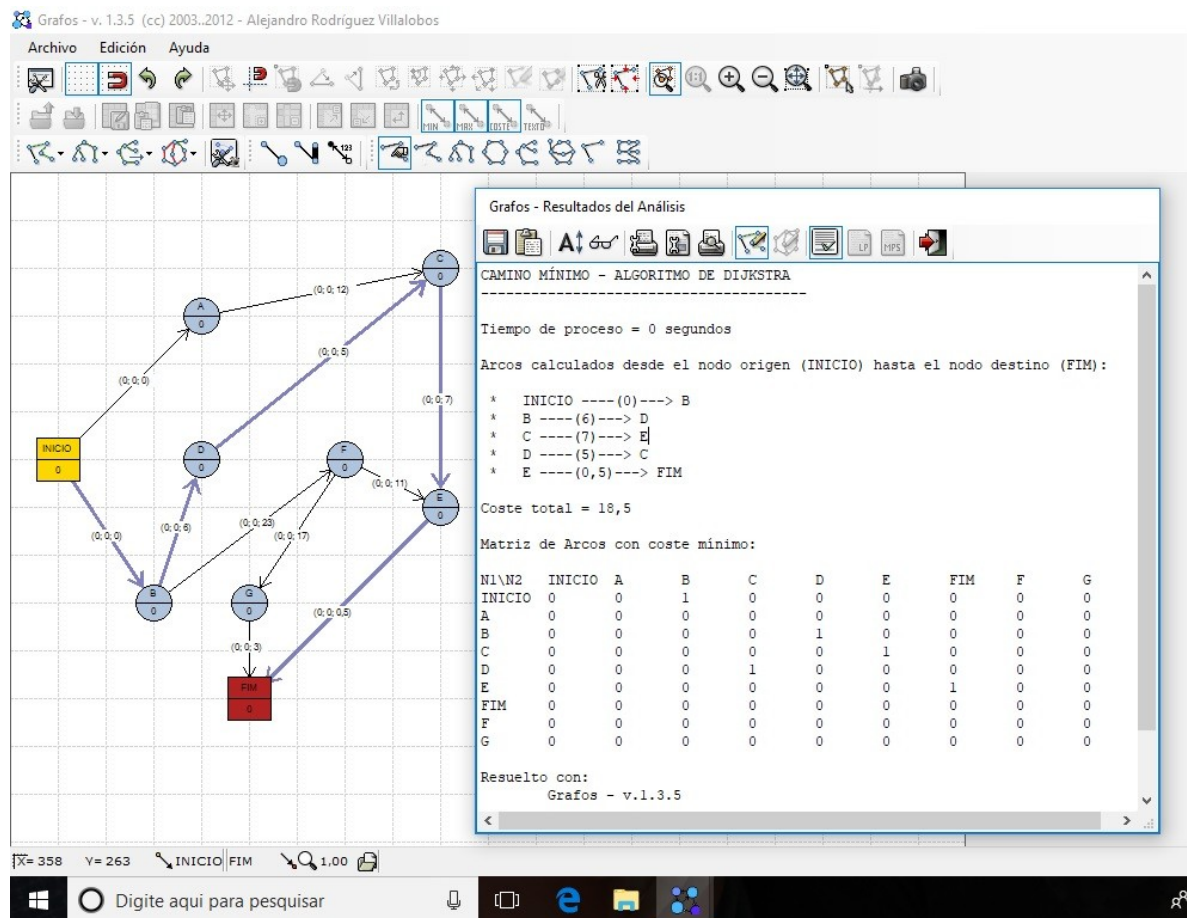
ATIVIDADE	PROCEDÊNCIA	TEMPO
A	-	45
B	-	50
C	A	30
D	B	90
E	B	25
F	C, D	65
G	E	140

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Dando um duplo clique na aresta entre os vértices correspondentes, abrirá uma janela de diálogo no campo “custo”, introduz-se então o valor indicado na referente tabela e clique em aceitar. A aresta passa a ter o valor introduzido e este mesmo procedimento deve ser feito até que a última aresta receba seu valor.

Para isto, repetiremos o mesmo procedimento para cada uma das rotas (arcos), de modo que sejam transferidos os valores referidos na tabela.

Figura 8 – Programa Grafos (Resultados)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

A atividade aqui proposta é passível de ser alterada em seus valores e até na quantidade e posições de nós e arcos, inclusive com arcos reversos e laços, não apresentados neste guia. Assim, como uma recomendação, sugiro que o professor, ao fazer o *download* do programa procure se familiarizar com este, pois no momento que for utilizá-lo em aula certamente deverão estabelecer, a critério de cada professor, os procedimentos conforme a atividade que se pretenda fazer.

Notem que o programa Grafos possui diversos tipos de algoritmos que podem ser utilizados de acordo com o objetivo que se pretende alcançar.



## 6 CONJUNTO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

Neste guia didático trago como método de trabalho docente a construção de um planejamento de aulas por meio de uma tabela contendo uma sequência didática, servindo apenas como exemplo e com a simples pretensão de auxiliar na prática educativa, apesar de que existem outras formas de se fazer um planejamento, contudo a fundamentação desta sequência tem origem em Zabala (1998) que considera este tipo de método mais apropriado.

O primeiro elemento que identifica um método é o tipo de ordem em que se propõem as atividades. Deste modo, pode se realizar uma primeira classificação entre métodos expositivos ou manipulativos, por recepção ou por descoberta, indutivos ou dedutivos, etc. A maneira de situar algumas atividades em relação às outras, e não apenas o tipo de tarefa, é um critério que permite realizar algumas identificações ou caracterizações preliminares da forma de ensinar (ZABALA, 1998, p. 53).

Caso o educador opte por uma sequência didática, Zabala (1998, p.55), pontua:

- a) *Atividade motivadora relacionada com uma situação conflitante da realidade experiencial dos alunos.*
- b) *Explicação das perguntas ou problemas que esta situação coloca.*
- c) *Respostas intuitivas ou “hipóteses”.*
- d) *Seleção e esboço das fontes de informação e planejamento da investigação.*
- e) *Coleta, seleção e classificação dos dados.*
- f) *Generalização das conclusões tiradas.*
- g) *Expressão e comunicação.*

Caso o docente encontre um espaço em suas aulas para exibição de vídeos sobre o assunto, recomendo que o faça, pois o alunado interessa-se muito por mídias, uma maneira de descontrair em momentos quando as aulas sejam mais teóricas. Na tabela encontram-se dois *links* que podem auxiliar nesta tarefa, no entanto há muitos outros *links* que tratam do tema em língua portuguesa e em outras línguas. Quanto ao tipo de linguagem, dentro deste tema, uma boa dica é procurar por vídeos em espanhol, pois são muito ricos em conteúdo e muitos explicativos, mas indico apenas para o professor, já que para exibição em sala de aula, a maioria dos alunos poderia considerar muito entediante tentando compreender esta língua, que inclusive é mais fácil do que se fosse ouvir outro material na língua inglesa.

Ao final das atividades, é importante que o professor apresente aos alunos um pequeno questionário sobre toda a temática que foi trabalhada, solicitando que manifestem o que aprenderam e apontem sobre o uso prático em suas vidas, esta ação evidencia e promove constantes melhorias no processo do ensino e aprendizagem, observando se esta ou aquela atividade é apropriada. Cabe ao professor também buscar por atualizações dentro do assunto, conversando com colegas, participando de eventos, e trabalhos que possam ser submetidos a entidades que corroboram com o tema. O Quadro 2 apresenta uma sequência didática com as atividades propostas, sendo que na primeira coluna são apontados os objetivos específicos para cada aula e na segunda coluna as dinâmicas com os alunos, podendo ser estas, divididas em momentos pedagógicos.

Quadro 2 – Conjunto de atividades didáticas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	DINÂMICAS/MOMENTO PEDAGÓGICO
<p><b>AULA 1</b></p> <p>Apresentar a Teoria dos Grafos.</p> <p>Associar figuras sobre a temática dos Grafos.</p> <p>Abordar os conceitos prévios da Teoria dos Grafos.</p> <p>Apresentar possíveis aplicações em outras áreas do conhecimento.</p>	<p>Em sala de aula, utilizando recursos didáticos como: <i>data show</i>, computador, internet e quadro branco.</p> <p><b>(M1)</b> Promover associações, apresentando exemplos comuns nos relacionamentos entre pares dos alunos.</p> <p><b>(M2)</b> Apresentar figuras que associem uma estrutura entre pares por meio dos Grafos.</p>
<p><b>AULA 2</b></p> <p>Difundir o conhecimento abordado pelo tema.</p> <p>Aproximar da realidade dos alunos a aplicação dos Grafos como forma de associar a teoria à prática.</p> <p>Discutir sobre o desafio das sete pontes de Königsberg.</p>	<p><b>(M3)</b> Discutir o tradicional problema das pontes de Königsberg.</p> <p><b>(M4)</b> Em sala de aula, os alunos poderão elaborar modelos propostos e discutir com o Professor a Teoria dos Grafos sobre o olhar da Modelagem Matemática e da prática logística.</p>
<p>Apresentar o software Grafos, demonstrando sua aplicação na construção de redes de relacionamento quanto ao planejamento e procedimentos de roteirização analisando rotas mais econômicas quanto ao uso de veículos na distribuição de cargas.</p>	<p><b>(M5)</b> No laboratório de informática do <i>campus</i> investigado, o professor apresentará o tema “Utilizando Grafos na Logística” e solicitará aos alunos que discutam sobre as diversas aplicações que sejam possíveis dentro do tema, externando seus conhecimentos sobre o conteúdo.</p>
<p>Aprofundar o conhecimento promovendo a utilização por meio da prática utilizando-se do programa Grafos no computador.</p>	<p><b>(M5)</b> O professor exibirá para os alunos o vídeo “Introdução à Teoria dos Grafos” disponível em <a href="https://www.youtube.com/watch?v=pbDHIMFGgLk">https://www.youtube.com/watch?v=pbDHIMFGgLk</a> como meio introdutório e motivacional para o desenvolvimento desta sequência didática. Após o vídeo será realizada discussão com os alunos a partir de questões norteadoras.</p>
<p>Associar a Teoria dos Grafos a logística de distribuição de modo real e prático, apresentando modelos matemáticos por meio de exercícios.</p>	<p><b>(M6)</b> No laboratório de informática <i>campus</i> o professor exibirá para os alunos o vídeo “O Problema do Caminho Mínimo” disponível na internet em <a href="https://www.youtube.com/watch?v=LmGRAIpF28Q">https://www.youtube.com/watch?v=LmGRAIpF28Q</a></p> <p><b>(M7)</b> O professor aplicará exercícios práticos pelo uso do programa Grafo, solicitando que os alunos apresentem os resultados obtidos e discutam os aspectos apresentados, avaliando possíveis distorções e sugerindo melhorias.</p>
<p>Evolução da temática por meio dos registros das sugestões dos alunos para repensar a sequência didática.</p>	<p><b>(M8)</b> Os alunos avaliarão a sequência didática executada, assim como a utilização dessa proposta pedagógica para a compreensão do tema em aplicado.</p>

## 7 ATIVIDADE COM GOOGLE MAPS – O CAMINHO MÍNIMO

É muito comum hoje em dia nos depararmos com tecnologias em nossos aparelhos *smartphones* que oferecem serviços de localização imediata, com o auxílio de satélites e aplicativos que permitem seu bom funcionamento com o objetivo de traçar a rota mais curta entre origem e destino. Esta ferramenta da era digital é um facilitador que considera a região em que no encontramos, com dados já conhecidos, como nome de ruas e avenidas, sinalização semafórica, distância entre uma quadra e outra, velocidade permitida para o local, além de outras informações pertinentes dentro do programa do aplicativo.

Tamanho é a rapidez no desenvolvimento e na evolução da tecnologia em *softwares* e *hardwares* que tornou possível a estes recursos se sofisticarem ainda mais, contudo a permissão para utilizá-los ainda é cara para a grande maioria da população. Contudo existem muitas empresas que optam por fazer uso de sistemas mais simples, gratuitos e fáceis de serem encontrados, sendo inúmeras as opções existentes no mercado.

Uma das tecnologias que encontra-se presente no nosso cotidiano e é muito conhecida mundialmente é o *Google Maps*. Esta ferramenta tem várias aplicações práticas que podem ser utilizadas em conjunto com outras atividades de modelagem, sobretudo com Grafos. Por conter grande quantidade de informação, além da ilustração por meio de mapas, o programa por sua vez oferece uma quantidade de recursos com níveis de inteligência sofisticados, fáceis de operar e capazes de matematizar determinadas funções que auxiliam na tomada de decisões.

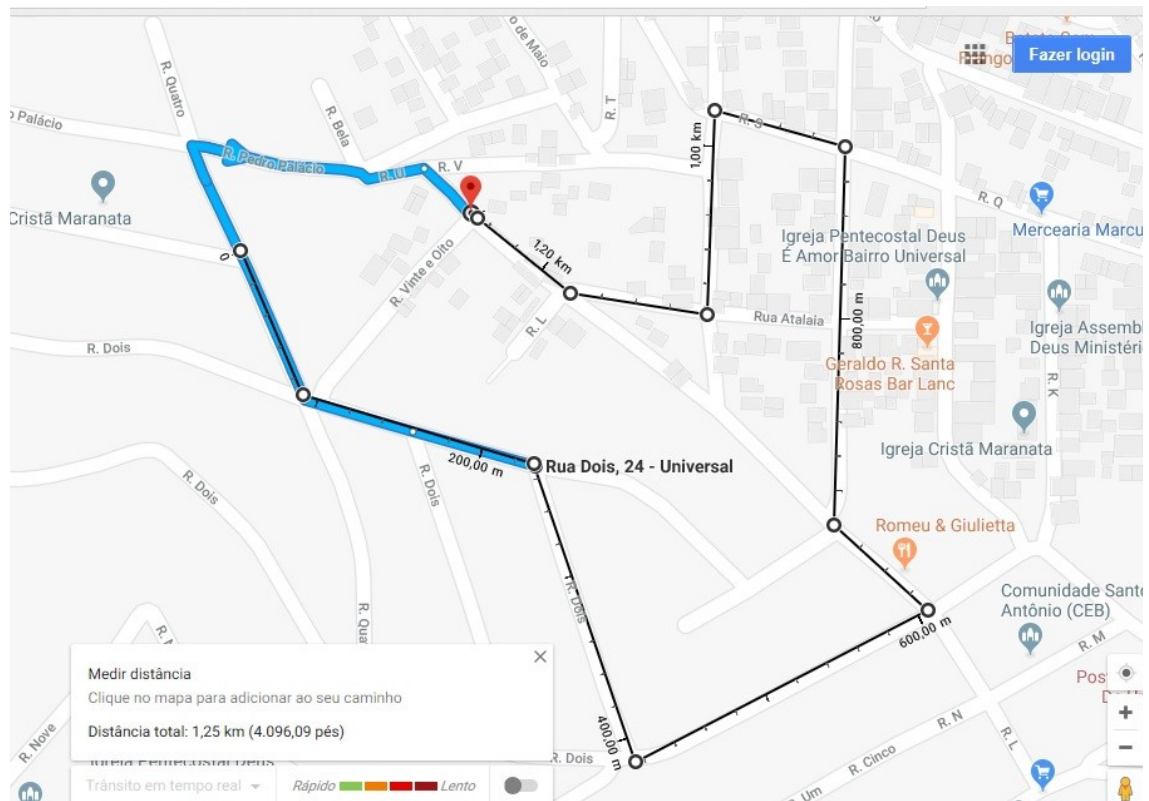
É por este viés que podemos considerar o *Google Maps* como uma ferramenta que hoje traz dentro de sua estrutura computacional recursos que permitem calcular a distância entre pontos que sejam estabelecidos pelo usuário, pode este ser aplicado como atividade em aula, associando ao programa Grafos e seus conceitos.

Ao imaginarmos uma determinada região com uma infraestrutura composta por ruas e avenidas, além de pontes, túneis, etc, sabemos que torna-se bastante complexo compreender como é possível o deslocamento entre um ponto e outro de maneira que sejam reduzidos os tempos envolvidos no trajeto.

Para se ter uma ideia a Figura 9 apresenta um complexo sistema viário com vias coloridas e outras descoloridas, todas se entrelaçam em alguns pontos. Aqui nesta figura encontra-se presente uma estrutura em Grafos que permite abordar questões como distância e tempo.



Figura 10: Grafo no Google Maps



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A particularidade da Teoria dos Grafos está em sua simplicidade e fácil compreensão. Explorar essa característica de um conteúdo matemático, tão peculiar, torna-se dever do professor no Ensino Médio. As percepções a partir dos conteúdos da Teoria dos Grafos permitem apontar para um leque de possibilidades, que se abrem devido a sua potencialidade de adaptação ao assunto, mostrando ao estudante que o raciocínio matemático não precisa ter todo um aparato de fórmulas, mas que o pensamento pode ser visto em um nível de abstração por meio de aplicações práticas de grafos mais simples, condizentes com o cotidiano de muitas empresas de logística.

Atividades como estas no Ensino Médio podem abrir um novo horizonte e tornar mais claro aos alunos que, não obstante, as soluções que resultam de um modelo matemático nem sempre se traduzem como sendo as mais adequadas, o que já havia sido identificado por Skovsmose (2001), que destaca o nível de importância que a matemática pode assumir no desenvolvimento de cidadãos críticos.

Quando a proposta deste estudo veio à tona, a ideia de trabalhar com a Teoria dos Grafos me pareceu pouco atrativa inicialmente, mas, ao debruçar-me sobre o assunto, percebi que seria perfeitamente possível, considerando que os conteúdos matemáticos presentes na teoria traziam à luz alguns aspectos que poderiam ser integrados com elementos presentes em disciplinas técnicas do curso de logística. Com isso, foi possível desenvolver atividades que envolvessem grafos associados à logística. Tais possibilidades começaram no decorrer da pesquisa, sendo pensadas de modo que se relacionassem com a realidade que o aluno poderia encontrar no mercado para o qual a formação do curso se destina.

Este guia didático, que partiu de conceitos da linha teórica dos grafos, passando pela elaboração de etapas didáticas, é um produto educacional que proporciona aos alunos condições que favorecessem o desenvolvimento da compreensão prática desse conceito, relacionando-se à logística de distribuição e suas variáveis, alcançando a análise do conhecimento adquirido pelos alunos e sua destes em relação ao conteúdo apresentado, bem como sua aplicabilidade em outras áreas, e que permite construir novos valores e ainda obter resultados satisfatórios.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 4. ed. Campinas: Papirus. 1998.

Metrô CPTM. Secretaria dos transportes metropolitanos. Governo do Estado de São Paulo. **Mapa do transporte metropolitano**. Disponível em: <<http://www.metro.sp.gov.br/pdf/mapa-da-rede-metro.pdf>>. Acesso em 09/04/2017.

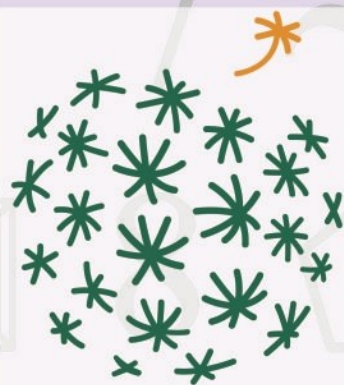
Pesquisa Operacional II – Aula 25 – **Introdução à Teoria dos Grafos**. Engenharia de Produção Univesp – Pesquisa Operacional II Curso de Engenharia de Produção. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=pbDHIMFGgLk>> Acesso em: 17/02/2017.

Pesquisa Operacional II – Aula 27 – **O Problema do Caminho Mínimo** – Algoritmo de Dijkstra. Engenharia de Produção Univesp – Pesquisa Operacional II Curso de Engenharia de Produção. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=LmGRAIpF28Q>>. Acesso em: 17/02/2017.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.





# EDUCIMAT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Agência Brasileira do ISBN



ISBN 978-85-8263-362-5