Série Guias Didáticos de Matemática

44

O Problema das Idades, da Escada Rolante e do Caminho da Formiga:

Planejamentos Colaborativos em Resolução de Problemas

Vanessa Ribeiro Gaigher
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Luciano Lessa Lorenzoni

Editora Ifes
2017

Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Vanessa Ribeiro Gaigher
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Luciano Lessa Lorenzoni

O Problema das Idades, da Escada Rolante e do Caminho da Formiga : Planejamentos Colaborativos em Resolução de Problemas

Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2017

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

G137p Gaigher, Vanessa Ribeiro.
O problema das idades da escada rolante e do caminho da formiga : planejamentos colaborativos em resolução de problemas / Vanessa Ribeiro Gaigher, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, Luciano Lessa Lorenzoni. - Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2017.
36 p. : il. ; 30 cm (Série guias didáticos de matemática ; 44)

ISBN: 978-85-8263-228-4

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas, questões, exercícios. 3. Professores de matemática – Formação. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. II. Lorenzoni, Luciano Lessa. III. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Título

CDD: 510.7

Realização

EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Vanessa Ribeiro Gaigher
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Luciano Lessa Lorenzoni

O Problema das Idades, da Escada Rolante e do Caminho da Formiga : Planejamentos Colaborativos em Resolução de Problemas

Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2017

Editora do IFES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, no. 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
Centro de Referência em Formação e Educação à Distância – CEFOR/IFES
Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara
Vitória – Espírito Santo – CEP.: 29040-860

Comissão Científica
Drª Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, D.Ed. – IFES
Dr. Luciano Lessa Lorenzonni, D.Sc. – IFES
Dr. Oscar Luiz Teixeira de Resende, D.Sc. – IFES
Drª. Yuriko Yamamoto Baldin D.Sc.– UFSCar
Drª. Julia Schaetzle Wrobel, D.Sc. – UFES

Coordenação Editorial
Alex Jordane de Oliveira, D.Ed. - IFES
Danielli Veiga Carneiro Sondermann, D.Ed. – IFES

Revisão

Drª Maria Alice Veiga Ferreira de Souza – IFES

Capa e Editoração Eletrônica
Katy Kenyo Ribeiro

Produção e Divulgação
Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (GEPEME)
Programa Educimat (IFES – *Campus* Vitória)

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

VANESSA RIBEIRO GAIGHER é mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo- IFES atuando nas linhas de pesquisa: Resolução de Problemas e Formação de Professores. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo- UFES (2011). Possui experiência na Educação Básica atuando na área de Matemática. Atualmente é membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística. É professora efetiva da Secretaria de Estado do Espírito Santo.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1406478925903794
Email: van_gaigher@yahoo.com.br

MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA possui Pós-doutorado em Resolução de Problemas de Matemática na Universidade de Lisboa-Portugal. Atualmente é professora de Matemática das graduações e pós-graduações do Instituto Federal do Espírito Santo-Ifes, Coordenadora Geral de Pesquisa e Extensão do Cefor - Reitoria - Ifes, docente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT) do Ifes e da Pós-Graduação em Gestão Pública da UFES, foi Coordenadora Administrativa do Mestrado em Educação Agrícola UFRRJ-Ifes, Coordenadora da Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Ifes e é pesquisadora bolsista da UAB. Tem experiência na área de Matemática, atuando principalmente na área de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Probabilidade e Estatística nas Engenharias e Cursos das Ciências Exatas. E na Educação Matemática nos seguintes temas: produção de significados, linguagem matemática, habilidade matemática, aplicações estatísticas e modelagens matemáticas. É membro da Câmara de Assessoramento da FAPES. É consultora do periódico científico Boletim GEPEM da UFRRJ, Ifes Ciência e Debates em Educação Científica e Tecnológica do IFES.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/2876710785262591
Email: alicevfs@gmail.com

LUCIANO LESSA LORENZONI é Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (2003). Atualmente é professor do Instituto Federal do Espírito Santo. Tem experiência na área de Matemática Aplicada com ênfase em Pesquisa Operacional e Modelagem Matemática na Educação Matemática. Também atua no EDUCIMAT - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do IFES.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7959495705859101
Email: lllorenzoni@ifes.edu.br

Aos meus pais, que lutaram para propiciar condições de alcançar meus objetivos e incentivaram meus estudos. Em especial, ao meu pai que, ao lado de Deus, certamente está radiante de felicidade por minha conquista! Aos amigos e professores do Educimat (IFES) e aos familiares, que foram apoio para a conclusão dessa grande etapa!

Sumário

APRESENTAÇÃO

A resolução de problemas em matemática é um método que, apoiada em Pólya (2006), orienta que para se resolver um problema matemático é necessário a execução de quatro etapas, a saber: 1 - compreensão do problema; 2 - estabelecimento de estratégias; 3 - execução do plano de estratégias e 4 - *looking back* (retrospecto).

Diversos documentos que fornecem direcionamentos para a Educação Brasileira orientam que a resolução de problemas seja uma prática inerente à disciplina de Matemática para aprimorar, no estudante, o raciocínio matemático, a criticidade, autonomia e criatividade frente a um problema para que, em conjunto, essas características propiciem uma mudança no quadro atual da educação em Matemática.

Os planejamentos e orientações, contidas nesse guia, são frutos de um trabalho colaborativo que perpassou por etapas de planejamento/execução/reflexão. Essas, por sua vez, são características de um método aplicado na educação japonesa, denominado *Lesson Study*, que orientou a condução metodológica da pesquisa de Mestrado que originou esse guia didático.

Reunimos, assim, os planejamentos de 3 (três) aulas baseadas em resolução de problemas, com vista à contribuir para a prática de docentes em Matemática que desejam utilizar a resolução de problemas em suas aulas, possibilitando uma outra perspectiva educacional.

Apresentamos com imensa satisfação esse guia, que reuniu todos os esforços dos participantes da pesquisa, que atuaram com ímpeto para o sucesso da mesma e das aulas empreendidas.

Vanessa Ribeiro Gaigher
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Luciano Lessa Lorenzoni

INTRODUÇÃO

A motivação para a construção desse guia surgiu a partir da proposta de produto educacional de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT) do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) que investigou as contribuições que emergem de ações colaborativas e reflexivas na formação de professores de matemática em aulas de resolução de problemas.

A pesquisa "Formação do Professor de Matemática em aulas de resolução de problemas a partir de ações colaborativas e reflexivas" foi desenvolvida no Instituto Federal de Espírito Santo (Ifes), com professores de Matemática da Educação Básica, dentre eles mestrandos do próprio programa. As aulas foram planejadas colaborativamente, por esses professores, e executadas com alguns alunos da graduação em Matemática da Universidade Federal do Espirito Santo (UFES). Foram realizadas reflexões posteriores à execução do planejamento com objetivo de analisar quais elementos do plano de aula foram satisfatórios e quais necessitavam de alterações.

Os três problemas propostos nos planejamentos não exigem conteúdos inerentes à nível de graduação em Matemática, por serem problemas matemáticos do tipo mal estruturados. O interesse em problemas com essa característica, deriva da justificativa de que podem ser solucionados com objetos matemáticos diferentes. O foco nessa particularidade é que, por meio deles, é possível identificar e analisar diferentes abordagens, exemplos e estratégias que possam ser utilizadas na prática pedagógica de docentes em Matemática. Sendo assim, os planejamentos podem ser adaptados e aplicados com alunos da Educação Básica, seja do Ensino Fundamental ou Médio.

Nesse contexto, se faz necessário esclarecer alguns pressupostos que guiaram a construção coletiva dos planejamentos. Convidamos os leitores que, para maior aprofundamento no tema, consultem a dissertação de mestrado que foi fonte desse produto educacional.

A resolução de problemas é um método que defende o cumprimento de quatro etapas fundamentais para se resolver um problema, a saber: 1 - a compreensão do problema; 2 - elaboração de um plano; 3 - execução de um plano e 4 - retrospecto e análise da solução encontrada, ou *looking back*.

Para Pólya (2006), não é possível resolver um problema se ele não for bem compreendido. Para isso, faz-se necessário que a questão esteja bem escrita, planejada e que o nível de dificuldade esteja adaptado ao nível de conhecimento da turma. Nessa etapa, o planejamento deve observar se no enunciado do problema há trechos passíveis de bloqueios do fluxo de raciocínio dos estudantes e/ou palavras que não fazem parte do contexto dos mesmos (SOUZA; GUIMARÃES, 2016). Para verificar se o problema foi bem compreendido, o professor deve conduzir a etapa de compreensão com base em questionamentos que não sejam amplos, como alguns usualmente utilizados em aulas, tais como: O que você entendeu do problema? (WROBEL et al., 2016).

Na segunda etapa, o aluno necessita estabelecer um plano de execução, ou seja, os caminhos a serem percorridos até que se chegue à solução. Nessa busca pela estratégia, o professor deve estimular seus alunos indagando-os, por exemplo, se "conhecem um problema correlato?" Se sim, "é possível utilizá-lo?" entre outros (PÓLYA, 2006, p. 7).

A execução da estratégia estabelecida pelo aluno é a terceira etapa da resolução de problemas. Com o plano já estabelecido, sua execução se torna mais fácil (PÓLYA, 2006). Dessa forma, o plano fornece apenas um roteiro do que deverá ser executado, isso não significa que detalhes, que anteriormente não haviam sido percebidos, não podem ser incluídos ao plano original durante o processo de execução. Isso evidencia que as etapas da resolução de problemas não são isoladas. O autor atenta que se o plano for esquecido pelo aluno, é bem provável que o mesmo sofreu influências de meios externos, seja do professor, ou de outros alunos. Sendo assim, é necessário que o professor tenha cautela em seu planejamento para verificar se sua condução de aula não está direcionando o pensamento do aluno para uma estratégia já previamente estabelecida.

A quarta etapa é o *looking back* (retrospecto). Por meio dela, o professor pode promover em sala de aula um ambiente em que os estudantes são levados a realizar discussões matemáticas, verificar se sua estratégia está matematicamente correta, aprender por meio do erro e, ainda, buscar meios de solução mais fáceis para resolver o mesmo problema.

Em conjunto a esses pressupostos, o *Lesson Study* baseia-se em uma configuração espiralada, composto por etapas de planejamento/execução/reflexão, em que o professor, por meio da experiência coletiva e da prática investigativa, aprende, compartilha, agrega e constrói conhecimento, isto é, o *Lesson Study* pode ser uma ferramenta eficaz para elevar a qualidade do currículo, do ensino e da aprendizagem na localidade em que ele se empreende (ISODA; OLFOS, 2009).

No planejamento do *Lesson Study* ocorre o estabelecimento de metas, que são discutidas e planejadas em conjunto por professores e demais interessados nas aulas que serão empreendidas. Nele são considerados aspectos, tais como: i) estudo sobre as orientações curriculares e livros didáticos de matemática, ii) conteúdo a ser trabalhado, conhecimentos prévios dos estudantes, iii) familiaridade com o contexto do problema a ser proposto, iv) planejamento dos questionamentos que serão feitos aos alunos, v) antecipação à possíveis respostas, dúvidas e estratégias utilizadas pelos estudantes e vi) como os alunos serão avaliados. O foco da aula está direcionado para a aprendizagem do estudante.

Posteriormente ao planejamento, um dos professores que participou da primeira etapa, executa esse planejamento na turma, enquanto os demais participantes atuam como observadores da aula. A observação é direcionada para as situações ocorridas, destacando as respostas, dificuldades e facilidades dos alunos, atitudes e respostas do professor, bem como se o planejamento atingiu o objetivo, ou se será necessário realizar um novo planejamento a fim de melhorar o que já foi posto em prática.

Imediatamente após a execução da aula, todos os professores (professor que executou a aula e os observadores) reúnem-se para discutir e refletir sobre os aspectos benéficos ou não da prática de ensino do professor, que serão, inclusive, base para o replanejamento e a reexecução da aula, reiniciando o ciclo planejamento/execução/reflexão. Além disso, é objeto de discussão, nessa reunião, os impactos da ação do professor sobre a aprendizagem, ingrediente igualmente importante para a reformulação da aula.

À guisa de conclusão, apresentamos no capítulo que segue, orientações que foram base para o planejamento dos três problemas utilizados nas aulas da Pesquisa.

O PROBLEMA DAS IDADES

O problema que denominamos "Problema das idades" (Quadro 1), envolve além de raciocínio lógico um conhecimento prévio acerca de Equações Polinomiais do 1º grau, Sistema de Equações Lineares e Sistema de Numeração Decimal.

Quadro 1. O Problema das Idades

Meu pai me contou que, em 1938, conversava com o avô dele e observaram que a idade de cada um era expressa pelo número formado pelos dois últimos algarismos dos anos que haviam nascido. Assim, quando meu pai nasceu, qual era a idade do meu avô?

Fonte: GRUPO VIRTUOUS, 2016.

Sugerimos que a execução da aula em torno desse problema tenha duração de 100 minutos, e que objetivos claros sejam definidos. Esses podem ser acerca do trabalho em torno de um conteúdo específico ou para desenvolver a autonomia do estudante ao resolver problemas, por exemplo.

Com o objetivo estabelecido, pense em diferentes estratégias que possam ser utilizadas pelos seus estudantes.

Lembre-se: Nem todos alunos possuem a mesma mente matemática que você, alguns compreendem melhor utilizando esquemas e desenhos, outros equações. É importante que o problema seja abordado de diferentes formas para que o alcance da sua aula seja maior!

Créditos: http://4.bp.blogspot.com

REGISTRE essas palavras em seu planejamento escrito juntamente com o **significado** delas no contexto do problema!

Pense no contexto dos alunos, se eles estão familiarizados com o tema ou se o enunciado possui alguma palavra ou trecho passível de bloqueio do fluxo do raciocínio do estudante.

Faça questionamentos para auxiliar os alunos a compreenderem o problema, bem como a estabelecerem estratégias eficientes de resolução, tais como: Quantas pessoas estão envolvidas nessa situação? Sobre o quê eles estão conversando? Quem é o mais velho? O que significa os dois últimos algarismos dos anos que haviam nascidos? Qual o valor posicional de cada um dos algarismos que formam o ano 1938?

NÃO responda seus próprios questionamentos, caso tenha feito algum que gerou silêncio em toda a turma, é provável que este tenha sido amplo! **REFORMULE-O**!

Caso entenda ser necessário, reformule o enunciado do problema. Um dos elementos que causou confusão durante a aula foi o enunciado trazer uma situação em que o filho narra a conversa entre seu pai e seu bisavô. Talvez seja interessante, utilizar nomes e reformular a narrativa.

Créditos: https://br.vexels.com

Dê tempo para os alunos estabelecerem suas estratégias e sempre que demonstrarem dúvidas, compartilhe com os demais alunos. Por vezes, a dúvida de um pode auxiliar no raciocínio de outros estudantes. Além disso, ao executar essa ação, você poderá criar um ambiente de discussão matemática em que hipóteses são testadas, validadas e justificadas.

Solicite que os alunos compartilhem suas estratégias, mesmo se não possuírem certeza se estão corretas.

Peça que registrem suas soluções na lousa, e exponha-as lado a lado. Utilize as diferentes estratégias para conectá-las e tornar a solução do problema mais rica matematicamente. Isso é uma prática comum em escolas que utilizam o *Lesson Study*.

Em caso de o aluno apresentar uma solução errada. **VALORIZE** sua participação. Diga: **Muito bem, você está no caminho!, Apesar de apresentar erros, seu raciocínio foi interessante!**.

Peça para que a turma tente ajudá-lo a compreender seu erro.

Créditos: eccoShutterstock

Ao final, verifique se os alunos compreenderam as soluções. E faça uma revisão do que foi visto durante a aula, a fim de buscar caminhos mais curtos e matematicamente elegantes para a solução do problema.

Algumas soluções apresentadas para o Problema das Idades durante as aulas são descritas abaixo. A primeira utilizou tentativa e erro e a segunda, Sistema de Numeração Decimal e Equação do Primeiro Grau.

Primeira solução:

O primeiro passo para resolver esse problema é identificar que a conversa se passa em um ano diferente do ano em que o filho narra a situação. Sendo assim tem-se que em 1938, o pai e o bisavô do narrador tinham idades de igual valor que o número formado pelos últimos dois algarismos do ano em que cada um nasceu.

Portanto tem-se que o bisavô deve ter nascido antes de 1900, pois caso ele nascesse depois de 1900, ele seria mais novo que o pai do narrador. Além disso, o pai do narrador nasceu entre 1900 e 1937. Com esses intervalos estabelecidos pode-se fazer alguns testes e verificar o que ocorre. Por exemplo:

Se o pai nasceu em 1901, ele teria 37 anos em 1938. E isso não satisfaz a condição, pois 01 ≠ 37. Sendo assim, para obtermos uma igualdade, necessitamos aumentar o ano em que o pai nasceu. Prosseguindo dessa maneira, encontramos que se ele nasceu em 1919, ele teria 19 em 1938. Satisfazendo a condição pois 19=19.

Logo o pai nasceu em 1919 e possuía 19 anos quando a conversa ocorreu.

Já vimos que o bisavô nasceu antes de 1900. Então se ele nasceu em 1899, então ele teria 1938 - 1899 = 39 anos, em 1938. O que não satisfaz a condição do problema, pois 99 ≠ 39. Se ele nasceu em 1860, então em 1938 ele teria 1938 - 1960= 78 anos. O que também, não torna a condição verdadeira, pois 60 ≠ 78. Isso significa que é necessário aumentar o ano em que ele nasceu.

Caso seu nascimento tenha ocorrido em 1869, então em 1938 ele teria 1938 - 1869 = 69 anos. O que torna verdadeira a condição, uma vez que 69 = 69.

Destarte, o pai nasceu em 1919 e em 1938, ano que aconteceu a conversa, ele tinha 19 anos. Já o bisavô nasceu em 1869, em 1938 tinha 69 anos. Assim quando o pai nasceu, o bisavô tinha 69 – 19 = 50 anos.

Segunda solução:

Nessa solução é necessário relembrar que nosso Sistema de Numeração Decimal possui valores posicionais. Por exemplo:

O número 2356 pode ser decomposto pela soma 2.1000+ 3.100+5.10+6.1.

Utilizaremos esse raciocínio para solucionar o problema. A determinação dos intervalos dos anos em que ocorre o nascimento do pai e do bisavô segue a mesma lógica que a primeira solução. Ou seja, o pai tem que ter nascido entre 1900 e 1937 e o bisavô antes de 1900. Sendo assim, temos:

Idade do pai: x anos.

Assim, a idade do pai será dada pelo resultado da subtração entre o ano de 1938 e o ano em que ele nasceu. Como não sabe-se quais são os últimos dois algarismos do ano de nascimento do pai temos que:

$$x = 1938 - 19ab; com\ a\ e\ b \in \mathbb{N}$$
$$x = 1938 - (1000 + 9.100 + 10.a + b.1)$$
$$x = 1000 + 9.100 + 3.10 + 8.1 - 1000 - 9.100 - 10.a - b.1$$
$$x = 38 - 10.a - b$$

Pelo enunciado, a idade do pai é igual aos dois últimos algarismos do ano em que nasceu, portanto temos uma segunda igualdade:

$$x = 10.a - b$$

Assim, os valores de a e b serão dados pelo sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x = 38 - 10.a - b \\ x = 10a + b \end{cases}$$

Logo, a solução para esse sistema é $a = 1\ e\ b = 9$.

Como a idade deve ser igual aos últimos dois algarismos do ano em que ele nasceu, temos que x = $10.1 + 1.9 \ = 19$anos.

De maneira semelhante, temos que:

Idade do bisavô: y anos.

Assim, a idade do bisavô será dada pelo resultado da subtração entre o ano de 1938 e o ano em que ele nasceu. Sabemos que o bisavô nasceu antes de 1900 e os dois últimos algarismos do ano em que ele nasceu são desconhecidos assim:

$$y = 1938 - 18cd; c\ e\ d \in \mathbb{N}$$
$$y = 1938 - (1000 + 8.100 + c.10 + d.1) =$$
$$y = 1000 + 9.100 + 3.10 + 8.1 - 1000 - 8.100 - c.10 - d.1 =$$
$$y = 138 - c.10 - d.1$$

Pelo enunciado, a idade do bisavô é igual aos dois últimos algarismos do ano em que nasceu, portanto temos uma segunda igualdade:

$$y = c.10 - d.1$$

Assim, os valores de c e d serão dados pelo sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} y = 138 - 10.c - d \\ \quad y = 10.c + d \end{cases}$$

Logo, a solução para esse sistema é $c = 6$ e $d = 9$

Como a idade deve ser igual aos últimos dois algarismos do ano em que ele nasceu, temos que y = $10.6 + 9.1 = 69\ anos$

Portanto o pai nasceu em 1919 e em 1938, ano que aconteceu a conversa, ele tinha 19 anos. Já o bisavô nasceu em 1869 e em 1938, tinha 69 anos.

Sendo assim, o bisavô tinha 69 – 19 = 50 anos quando o pai do menino nasceu.

O PROBLEMA DA ESCADA ROLANTE

O problema que denominamos de “Problema da escada rolante” (Quadro 2) envolve conteúdos de Raciocínio Lógico e Equações do 1º grau.

Quadro 2. O problema da Escada Rolante

Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis em uma escada rolante em movimento. Para isso, foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, uma subindo um degrau de cada vez enquanto a outra subia dois degraus de cada vez. Ao chegar ao topo, a primeira pessoa contou 21 degraus enquanto a segunda contou 28. Com esses dados, essas pessoas conseguiram responder à questão: quantos degraus são visíveis nessa escada rolante?

Fonte: AFONSO, 2016.

Sugerimos que esse problema seja abordado para turmas a partir do 8º ano, por se tratar de alunos que já possuem conhecimento acerca do conteúdo a ser abordado.

Assim como o problema anterior, sugerimos que esse seja planejado para ser executado em 2 (duas) aulas de 50 (cinquenta) minutos cada.

Créditos: http://4.bp.blogspot.com

Defina objetivos claros para trabalhar com esse problema. É interessante que ele seja utilizado com fim em: estabelecer um ambiente colaborativo entre os estudantes, criar oportunidades de diálogos, desenvolver a confiança dos alunos-graduandos em justificar matematicamente suas estratégias, desenvolver do raciocínio lógico, potencializar a compreensão do texto do problema e utilizar equações do primeiro grau para resolver situações-problemas.

A maior dificuldade dos alunos que resolveram esse problema foi em relação à **compreensão** do texto!

Observe se há algum trecho, no texto, que cause bloqueio no fluxo de raciocínio dos alunos.

Verifique se eles sabem o que é uma **escala rolante**! Leve para a aula, uma imagem ou um vídeo para mostrar aos estudantes a função e o funcionamento do objeto!

Em nosso estudo, verificamos que o trecho “degraus visíveis” causou confusão no estabelecimento de estratégias dos alunos.

Anote em seu planejamento lembretes para a realização de **questionamentos** com a finalidade de ressaltar o **significado** desse trecho no texto.

DICA: Você pode utilizar o nome de algum de seus alunos!

Os professores, que planejaram uma aula em torno desse problema, optaram por reescrever (Quadro 3) o texto para criar uma situação mais familiar para os alunos.

Quadro 3. Problema das escadas reescrito

Thiago e Camila, ao passearem por um *shopping*, começaram a subir, juntos, uma escada rolante. Thiago subia um degrau por vez e Camila dois degraus por vez. Ao chegar ao topo, Thiago contou 21 degraus enquanto Camila contou 28. Quantos degraus são visíveis nessa escada rolante?

Fonte: AFONSO, 2016, adaptado.

Após apresentar o problema para a turma, solicite que algum aluno faça a leitura em voz alta. Não leia para ele, pois sua leitura pode dar direcionamentos sobre quais trechos são mais importantes!

Elabore questionamentos para que, durante a execução, você possa verificar se os estudantes compreenderam esses trechos. Algumas sugestões são:

- ✓ O que é uma escada rolante?
- ✓ Em qual local vocês já viram uma escada rolante?
- ✓ O que significa degraus visíveis?
- ✓ Como são gerados os degraus em uma escada rolante que está subindo?
- ✓ O degrau que Camila e Thiago começaram a contar pode aparecer novamente na escada rolante?
- ✓ Quando Thiago e Camila sobem, gera mais degraus para Thiago, gera mais degraus para Camila ou gera igual?

LEMBRE-SE: tente se **antecipar** às respostas dos estudantes e **planeje** qual explicação irá fornecer para cada questionamento!

Questione aos alunos se é possível fazer algum esquema ou desenho para representar o problema. Em nosso estudo, essa prática mostrou-se benéfica para desenvolver o raciocínio dos estudantes.

Caso algum aluno demonstre ter dúvidas e dificuldades em estabelecer estratégias de resolução ou em desenvolver o raciocínio do problema, peça para esse compartilhar com os demais colegas. Ressaltamos que a dúvida de um pode auxiliar no raciocínio de outros estudantes.

Além disso, é possível criar um ambiente de discussão matemática em que hipóteses são testadas, validadas e justificadas.

Conecte as diferentes soluções dos estudantes!

Ao final, solicite que os alunos registrem e expliquem suas soluções na lousa, expondo-as lado a lado.

Créditos: eccoShutterstock

Créditos: https://br.vexels.com

Planeje quanto tempo será destinado para cada uma das etapas da Resolução de Problemas: Compreensão, estabelecimento de estratégias, execução e *looking back.* E não se esqueça de avaliar os estudantes.

Caso nenhum aluno estabeleça uma estratégia de solução, incentive-os à construir um esquema ou desenho para representar a situação-problema. Abaixo descreveremos algumas estratégias que podem apareceram durante a aula.

Primeira Solução:

Considere a quantidade total de degraus sendo x.

Assim, Thiago contou 21 degraus, logo ele deixou de caminhar $x - 21$ degraus da escada rolante.

Do mesmo modo, Camila contou 28 degraus, deixando de contar $x - 28$ degraus da escada. Além disso, observe que Camila caminha de dois em dois degraus, então ela efetivamente caminhou apenas 14 degraus e não 28.

Assim Camila caminhou mais rápido do que Thiago. Podemos estabelecer uma relação de proporcionalidade entre a quantidade de degraus e o tempo para chegar ao topo.

Quantidade de degraus	**Tempo**
21	t
14	y

Onde:

$t = tempo\ do\ Thiago$
$y = tempo\ da\ Camila$

Logo tem-se:

$$\frac{21}{14} = \frac{t}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{y} = \frac{3}{2}$$

Existe, portanto, uma constante de proporcionalidade dada por $k = \frac{2}{3}$. Desse modo podemos considerar que:

$$\frac{Quantidade\ de\ degraus\ não\ andados\ por\ Thiago}{Quantidade\ de\ degraus\ não\ andados\ por\ Camila} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x - 21}{x - 28} = \frac{3}{2}$$

$$2.(x - 21) = 3.(x - 28) \quad \therefore x = 42$$

Logo a quantidade de degraus da escada é igual a 42.

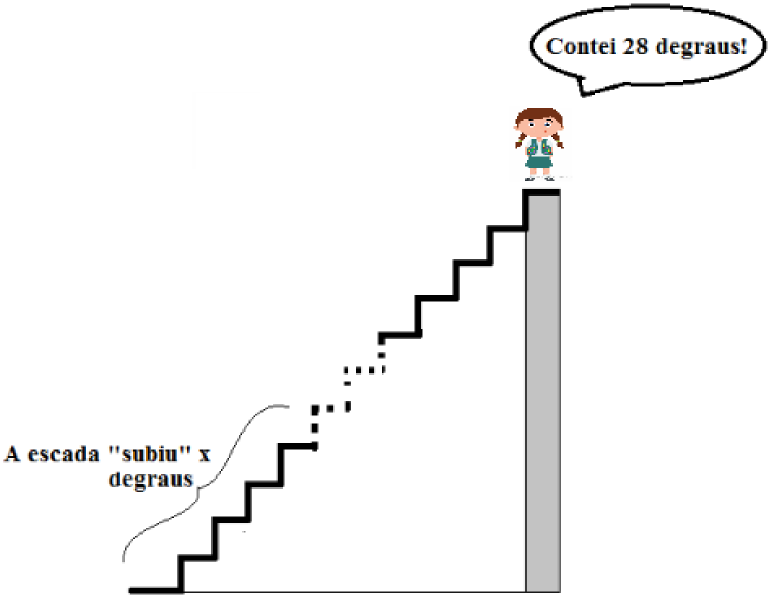
Segunda solução:

Vamos utilizar um esquema elaborado para entender o movimento de cada um dos sujeitos da situação. Isto é:

- 1º Esquema: Para mostrar o movimento de Camila;
- 2º Esquema: Para mostrar o movimento de Thiago;

Esquema 1: Movimento da Camila

Considere por x a quantidade de degraus que a escada subiu quando Camila chegou ao topo da escada.

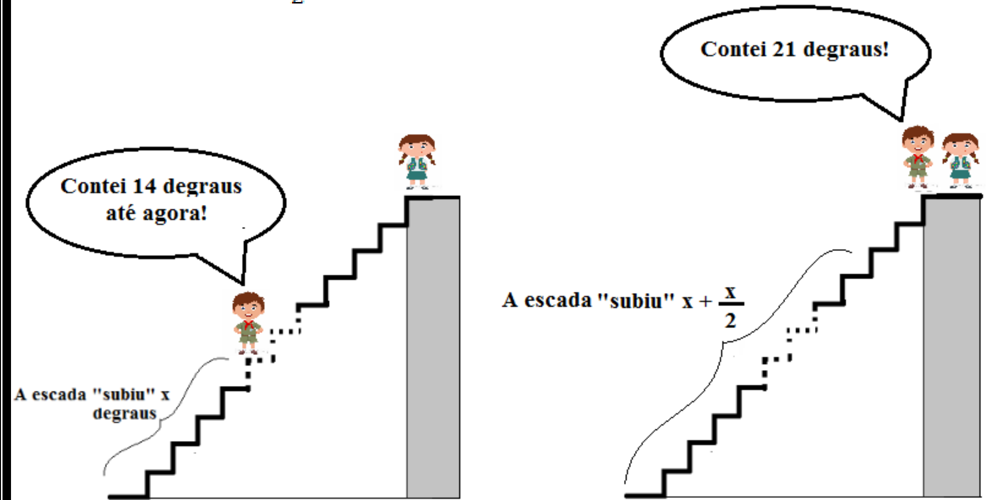


Assim para Camila, apareceram 28 + x degraus (Expressão 1).

Esquema 2: Movimento do Thiago

Nesse mesmo instante (quando Camila chega ao topo) Thiago andou 14 degraus, pois ele anda 1 por vez, já Camila anda 2 degraus por vez, logo quando ela chega ao topo, Thiago terá andado a metade dos degraus que ela contou.

Mas ainda faltam 21-14= 7 degraus para ele chegar ao topo. Dessa forma, se ao andar 14 degraus a escada subiu "sozinha" x degraus, então para subir os 7 degraus restantes, a escada terá que subir "sozinha" mais $\frac{x}{2}$ degraus.



Para Thiago, apareceram 21 + x + $\frac{x}{2}$ degraus (Expressão 2).

Como a escada é a mesma, tem-se uma igualdade entre as expressões 1 e 2.

$$28 + x = 21 + x + \frac{x}{2}$$
$$\therefore x = 14\ degraus$$

Logo a quantidade total de degraus visíveis será 28 + 14 = 42 degraus.

O PROBLEMA DA FORMIGA

Envolvendo os conteúdos de Teorema de Pitágoras, podendo expandir para Semelhança de Triângulos, Funções Trigonométricas Inversas e Lei dos Cossenos, o Problema da Formiga (Quadro 3) pode ser trabalhado, em 2 (dois) aulas de 50 (cinquenta) minutos cada uma, com turmas a partir do 9º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 3. Problema da Formiga

Uma formiga não voadora mora na superfície de um cubo maciço com aresta de um metro. Para ir do vértice G ao vértice oposto A, a formiga vai percorrer qual distância mínima?

Fonte: VIANA; SÔNEGO; MENDES, 2014.

Esse problema foi utilizado com o objetivo de desenvolver o pensamento crítico e reflexivo diante de situações-problemas que envolvam o pensamento geométrico e a utilização do Teorema de Pitágoras.

Você também pode elencar quais competências e habilidades podem ser desenvolvidas nos estudantes, ao resolverem o Problema da Formiga.

Nossa Sugestão...

COMPETÊNCIAS:

- Visualizar e estabelecer relações no hexaedro;
- Reconhecer a possibilidade de utilização do Teorema de Pitágoras;
- Desenvolver o pensamento crítico em situações que requerem observação, investigação e exploração.

HABILIDADES:

- Visualizar;
- Explorar;
- Investigar.

Para a etapa de **compreensão** do problema destaque palavras que podem não fazer parte do léxico dos estudantes e destine um espaço em seu planejamento para anotar o significado dessas palavras dentro do contexto do problema.

Em nossa experiência, destacamos as palavras:

Não-voadora:

Existem formigas que possuem asas e que podem realizar pequenos voos. No caso do problema, ela não possui asas e lhe resta, então, caminhar pelo cubo.

Maciço:

Sólido Maciço é aquele que não possui partes ocas, cujos componentes do seu interior são bem unidos, densos ou espessos.
Sugestão: Mostrar a imagem de um cubo de madeira

Aresta e vértice:

Aresta é o segmento de reta resultante do encontro de duas faces.
Vértice é o encontro de duas arestas.

Após apresentar o problema para a turma, solicite que algum aluno faça a leitura em voz alta. Não leia para ele, pois sua leitura pode dar direcionamentos sobre quais trechos são mais importantes!

Caso os alunos não explicitem dúvidas com relação às palavras do léxico do problema, questione-os:

- ✓ O que é um cubo? Vamos desenhá-lo?
- ✓ O que significa a palavra maciço?
- ✓ O que são arestas? E vértices?
- ✓ De quais maneiras a formiga pode caminhar no cubo?
- ✓ De qual local a formiga começará a caminhar?
- ✓ Qual o destino final da formiga?

Anote outras possíveis dúvidas que podem surgir na etapa de compreensão que, não necessariamente, estão relacionadas ao léxico do texto do problema.

Em nossas aulas, alguns alunos questionaram sobre a posição espacial do cubo.

O cubo está apoiado em alguma superfície? Ou ele está "sobrevoando"?

Lembre-se que caso considere que o cubo esteja apoiado sobre alguma superfície plana, como uma mesa, por exemplo, a formiga teria uma região menor para caminhar, uma vez que a face apoiada sobre a superfície não poderia ser explorada pela formiga.

Incentive os estudantes em elaborar um desenho ou esquema para resolver o problema. Como esse problema utiliza elementos da geometria, desenhar a situação-problema é importante para organizar o raciocínio na resolução.

Tente antecipar as estratégias de resolução que serão utilizadas pelos estudantes para resolver o problema. Elencamos abaixo algumas estratégias que surgiram dos nossos alunos. Algumas delas não estão corretas, contudo foram ponto de partida para a construção do raciocínio final.

1ª estratégia: Os alunos consideraram que a formiga poderia "atravessar" o cubo e consideraram o menor caminho sendo a diagonal do cubo.

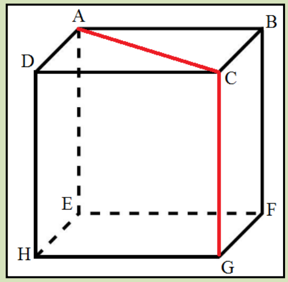
Caso essa estratégia se faça presente, ressalte o significado da palavra maciço.

2ª estratégia: Os alunos consideraram que a formiga poderia caminhar apenas pelas arestas e concluíram que o menor caminho teria comprimento de 3m.

Caso apareça essa estratégia, questione-os: A formiga pode caminhar por toda a face do cubo? O valor final da distância, caso ela ande na face, será maior ou menor que o resultado encontrado por você?

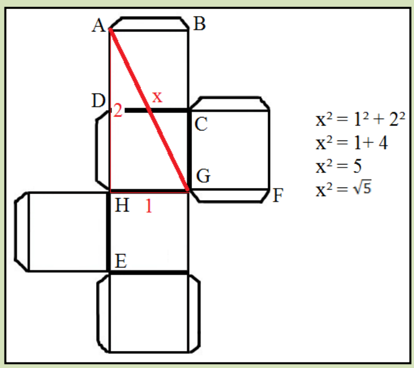
3ª estratégia: Os alunos consideraram que a formiga poderia caminhar pela diagonal de uma das faces do cubo e percorrer uma aresta em direção ao ponto de chegada.

Apesar de coerente, o raciocínio ainda não está totalmente correto. Peça para o estudante que apresentou essa solução, teste e compare outros caminhos que não passem pela diagonal de uma das faces, mas por segmentos de retas que tenham extremidades em pontos diferentes dos vértices do cubo.



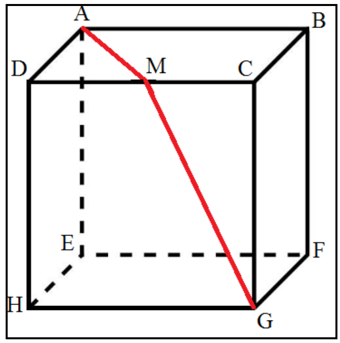
4ª estratégia: Essa estratégia foi apresentada por alguns estudantes que pensaram em planificar o cubo e identificar os vértices nessa planificação.
Essa estratégia é uma das estratégias que foi planejada para ser trabalhada com os alunos.

Leve um cubo construído com papel para mostrar a planificação do mesmo!



Estratégia de solução planejada:

Nessa solução, consideraremos que a formiga irá percorrer o trajeto formado pelo segmento $\overline{GM}$, onde M é o ponto médio da aresta $\overline{DC}$ e o segmento $\overline{MA}$



Sendo assim tem-se:

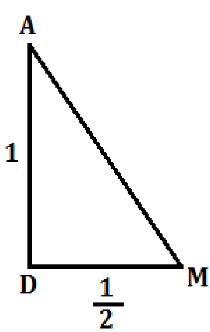
$$\overline{MC} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{CG} = 1$$
$$\overline{MD} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{DA} = 1$$

Como os triângulos ΔADM e ΔGCM são retângulos em D e C, respectivamente, pode ser aplicado o Teorema de Pitágoras em ambos para obter os segmentos desejados.

Logo:

Para ΔADM → $\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2$

Como $\overline{AD}$ é uma aresta do cubo e $\overline{DM}$ é metade da aresta do cubo, tem-se que:

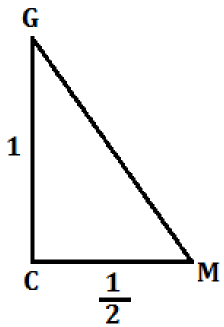


$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2$$
$$\overline{AM}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\overline{AM}^2 = 1 + \frac{1}{4}$$
$$\overline{AM}^2 = \frac{5}{4}$$
$$\overline{AM} = \sqrt{\frac{5}{4}} \rightarrow \overline{AM} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

De modo análogo:

$\Delta GCM \rightarrow \overline{GM}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CM}^2$



$$\overline{GM}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CM}^2$$

$$\overline{GM}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{GM}^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\overline{GM}^2 = \frac{5}{4}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\frac{5}{4}} \rightarrow \overline{GM} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{GM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim a distância a ser percorrida pela formiga será de:

$$\overline{AM} + \overline{GM} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\ m$$

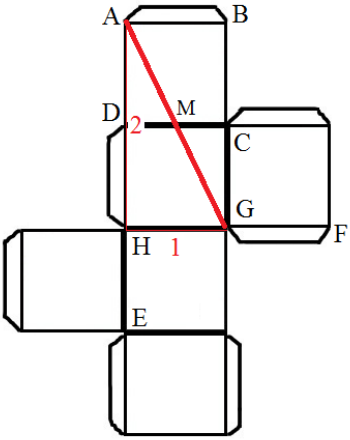
Não esqueça de esclarecer que distâncias são sempre positivas, por isso não utilizamos os resultados negativos!

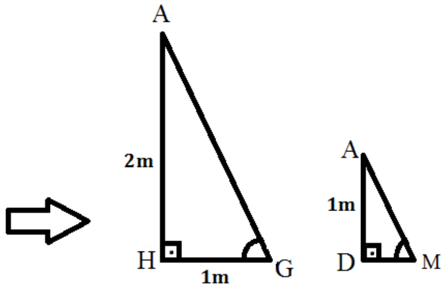
Utilize **calculadora** para facilitar os cálculos.
Caso opte, você pode trabalhar com **aproximações de raízes.**

Uma vez solucionado o problema, **PROVOQUE** os estudantes para provarem que o menor caminho deverá passar pelo ponto médio da aresta $\overline{DC}$. Para tal, peça que eles considerem que o M esteja à uma distância menor que $\frac{1}{2}$ do vértice C.

Sugestões...

1) **DEMONSTRE** em conjunto com os estudantes que o menor caminho deverá passar pelo ponto médio da aresta. Para tal, pode ser utilizado o conteúdo de Semelhança de Triângulos pois $\Delta\, AGH \sim \Delta\, AMD$ por possuírem dois ângulos congruentes. Assim:

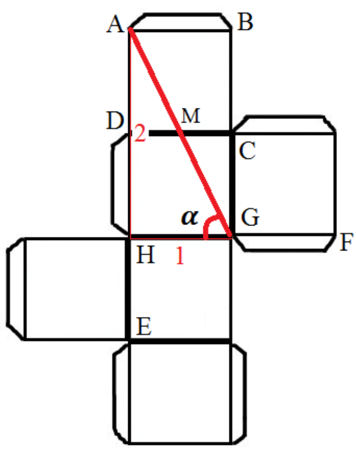




$$\frac{2}{1} = \frac{1}{\overline{DM}} \rightarrow \overline{DM} = \frac{1}{2}$$

Além $\overline{DC} = \overline{DM} + \overline{MC}$ disso, o que implica que $\overline{MC} = \frac{1}{2}$ e portanto $\overline{DM} = \overline{MC}$. Conclui-se então que M será o ponto médio a aresta $\overline{DC}$

2) Não esgote o problema apenas no que foi pedido. Você pode propor que os estudantes encontrem por exemplo, qual o ângulo que a formiga deverá iniciar seu trajeto de modo que ele seja mínimo.



A resolução para essa proposta de continuidade do Problema da Formiga envolve o conteúdo de

Relações Trigonométricas Inversas.

Denotando o ângulo formado ao traçar o trajeto da formiga no cubo de α temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{HG}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1}$$

$$\alpha = \arctan\ (2)$$

$$\alpha \cong 63{,}43°$$

3) Peça para que os alunos formulem alguns problemas com os dados iniciais do problema dado.

REFERÊNCIAS

CÁLCULO: Matemática para Todos. São Paulo: Segmento, n.40. Mensal, 2014, p.18-36.

AFONSO, A. P. **Matematiquês.** Disponível em: <http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=271>. Acesso em: 2 jan. 2016.

GRUPO VIRTUOUS. **Só Matemática**. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/desafios/desafio76.php>. Acesso em: 2 jan. 2016.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El enfoque de Resolución de Problemas**: En la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006, 203p.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. **Quadrante**, v. 24, n. 2, p. 135-162, 2015.

VIANA, A.; SÔNEGO, D.; MENDES, R. Coragem, estúpido! **Revista Cálculo**, ano 4. n.40. Editora segmento, São Paulo, SP. p.18-36, 2014.

WROBEL, J. S. et al. Inquiries in Problem Solving with Contributions from Lesson Study. In: 40TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, Szeged, 2016. **Proceedings of the 40th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education**, Szeged: Springer, v.1, 2016. p.341.

EDUCIMAT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – CAMPUS VITÓRIA

Agência Brasileira do ISBN

9 788582 632284

ISBN: 978-85-8263-228-4