



Série Guias Didáticos de Matemática

20

**Atribuição de Significados ao
Conceito Algébrico de Variável:
Repensando a formação do professor**

**Mirian Angeli
Maria Auxiliadora Vilela Paiva**

**Editora Ifes
2014**



Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

Mirian Angeli
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS AO
CONCEITO ALGÉBRICO DE VARIÁVEL:
repensando a formação do professor
Série Guia Didático de Matemática – Nº 20

Grupo de Pesquisa GEPEM-ES
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática do
Espírito Santo



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2014

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

A582a Angeli, Mirian.

Atribuição de significados ao conceito algébrico de variável : repensando a formação do professor / Mirian Angeli, Maria Auxiliadora Vilela Paiva. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2014.

xi, 65 p. : il. ; 15 cm. – (Série guias didáticos de matemática ; 20)

ISBN: 978-85-8263-082-2

1. Algebra – Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Professores – Formação. I. Paiva, Maria Auxiliadora Vilela. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 512

Copyright @ 2013 by Instituto Federal do Espírito Santo
Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto No. 1.825 de 20 de dezembro de 1907. O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Observação:
Material Didático Público para livre reprodução.
Material bibliográfico eletrônico e impresso.

Realização





Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

Mirian Angeli
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS AO
CONCEITO ALGÉBRICO DE VARIÁVEL:
repensando a formação do professor.
Série Guia Didático de Matemática – Nº 20

Grupo de Pesquisa GEPEM-ES
Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática do
Espírito Santo



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2014

Editora do IFES

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, no. 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática

Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara
Prédio Administrativo, 3º. andar - Sala do Programa Educimat.
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040 780

Comissão Científica

Prof. Dr. Rodolfo Chaves (Membro Interno, IFES)
Prof. Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende (Membro Interno, IFES)
Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro (Membro Externo, UFABC)

Coordenador Editorial

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Sidnei Quezada Meireles Leite

Revisão

A definir

Capa e Editoração Eletrônica

David Paolini Develly

Produção e Divulgação

Programa Educimat, IFES



Instituto Federal do Espírito Santo

Denio Rebello Arantes

Reitor

Araceli Verónica Flores Nardy Ribeiro

Pró-Reitora de Ensino

Marcio Almeida Có

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

Renato Tanure

Pró-Reitor de Extensão e Produção

Lezi José Ferreira

Pró-Reitor de Administração e Orçamento

Ademar Manuel Stange

Pró-Reitora de Desenvolvimento Institucional

Diretoria do *Campus* Vitória do IFES

Ricardo Paiva

Diretor Geral do Campus Vitória – IFES

Hudson Luiz Cogo

Diretor de Ensino

Marcia Regina Pereira Lima

Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

Sergio Zavaris

Diretor de Extensão

Roseni da Costa Silva Pratti

Diretor de Administração

MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

Mirian Angeli. Professora dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Sanitária e Ambiental, da Faculdade da Região Serrana (FARESE). Formada em Licenciatura em Matemática, pela Faculdade da Região Serrana (FARESE), especialista em Educação Matemática e em Gestão Escolar, pela Faculdade Capixaba de Nova Venécia (UNIVEN). Possui experiência como professora na educação básica, nos Ensinos Fundamental (segundo segmento), Médio e Superior.

Maria Auxiliadora Vilela Paiva. Possui graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Espírito Santo (1972), mestrado em Matemática, pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (1980), e doutorado em Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1999). Professora aposentada da UFES – ES, atualmente trabalha como professora/ pesquisadora do CEFOR – Centro de Referência em Formação e em EaD, do IFES, e atua no programa de Mestrado Profissional EDUCIMAT. Compõe a equipe de coordenação da Especialização Proeja à distância, do IFES. Tem como linhas de pesquisa “Formação inicial e continuada de professores” e “Práticas pedagógicas e recursos didáticos no contexto da Educação Matemática”, atuando nos seguintes temas: saberes docentes, identidade profissional, ensino-aprendizagem da Matemática e resolução de problemas.

Aos professores e futuros professores de Matemática, que por
meio do diálogo constroem os saberes da docência.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma
gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

Madre Teresa de Calcutá

Sumário

APRESENTAÇÃO.....	10
INTRODUÇÃO.....	12
1. O conceito de Variável na Álgebra.....	15
2. Por que é importante atribuir significados aos Conceitos Matemáticos?.....	20
3. Como investigar nas aulas de Matemática?.....	24
4. Usando as variáveis na investigação matemática	27
4.1. A Variável como Incógnita.....	27
4.2. A Variável como Argumento ou Parâmetro.....	30
4.3. A Variável como Generalizadora de Modelos.....	35
4.4. A Variável como Sinal Arbitrário.....	38
4.5. Aos Professores.....	39
5. Construção de Zonas de Perfis de Significação: uma experiência com licenciandos em Matemática.....	40
5.1. Quadro resumo das Zonas de Perfis de significados atribuídos para variável.....	43
6. O que dizem os Licenciandos em Matemática.....	45
6.1. Aos Professores.....	51
7. Apontando caminhos para uma aprendizagem dialógica com vistas à atribuição de significados	53
8. Considerações para uma proposta de formação	

	de professores de Matemática.....	56
8.1.	Proposta de Curso.....	58
9.	Bibliografias Sugeridas.....	61
	REFERÊNCIAS.....	62

APRESENTAÇÃO

Este Guia Didático, fruto da pesquisa de mestrado de Mirian Angeli, orientada pela prof^a Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva, é direcionado à formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática. Tanto professores da Licenciatura em Matemática, formadores de professores, bem como licenciandos, futuros professores e professores da Educação Básica em serviço, poderão usufruir deste material, no sentido de refletirem sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

O significado atribuído por alunos e professores ao conceito de Variável é essencial para a construção do pensamento algébrico, e nosso trabalho de pesquisa aponta para o fato de que muitas dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra estão relacionadas à falta de atribuição de significados aos conceitos algébricos.

No sentido de trabalhar e refletir sobre o conceito de variável e seu significado, faremos, então, neste Guia, uma discussão sobre a importância de se atribuir significado a um conceito e sobre o papel de atividades investigativas neste processo.

Neste material, apresentamos atividades utilizadas na pesquisa desenvolvida com alunos de uma licenciatura em Matemática de uma instituição particular de ensino, a partir da teoria de Zonas

de Perfis de Significação, de Mortimer (1994, 1995, 2000), e de ideias de Usiskin (1995), além de concepções dos licenciandos, as quais surgiram a partir da análise dos dados coletados.

As concepções dos estudantes puderam ser observadas também nos relatos que eles produziram, trazendo suas impressões sobre as atividades aplicadas, sobre o conceito de Variável e sobre considerações acerca do ensino da Álgebra nas Licenciaturas, que também fazem parte deste Guia.

Toda esta discussão nos permitiu fazer inferências e sugerir uma proposta de formação de professores no sentido de que a Álgebra seja trabalhada, nas licenciaturas e nas formações continuadas, interligando os conceitos ao seu processo de ensino e aprendizagem e ao conteúdo de Álgebra da Educação Básica.

Como possíveis impactos, esperamos que este Guia sirva de apoio a cursos de formação de professores de Matemática e contribua para uma reflexão sobre mudanças no ensino e aprendizagem da Álgebra nas Licenciaturas em Matemática, de modo a contribuir para uma discussão sobre a Álgebra Escolar mais relacionada aos conceitos estudados na graduação e com maior ênfase aos significados dos conceitos algébricos.

INTRODUÇÃO

Falar e trabalhar com a Álgebra tem se tornado um desafio nas escolas de Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. Isso acontece pelo fato de que muitos estudantes apresentam dificuldades relacionadas a essa área da Matemática, encontrando obstáculos à sua aprendizagem e à atribuição de significados aos conceitos algébricos.

Como sabemos, o contato com a Álgebra, propriamente dita, tem início no 7º ano, com o estudo das equações e inequações do primeiro grau, mas é no 8º ano que os alunos são expostos a uma maior gama desse campo algébrico. É compreensível que equívocos relacionados ao ensino e aprendizagem da Álgebra aconteçam e estes, muitas vezes, acompanham professores e alunos por todo o Ensino Fundamental, Médio e, não tão raro, pelo Ensino Superior. A questão da Álgebra Escolar é discussão de autores de livros didáticos, como é o caso de Imenes & Lellis (1994, p. 2), quando expressam que

professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar, outros tentando engolir técnicas de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significado para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos de 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem poucos resultados:

na 1ª série do 2º Grau é necessário repetir tudo.

É preciso que o professor leve em consideração que grande parte desses problemas, destacando as dificuldades encontradas pelos alunos diante do algebrismo, pode conduzir a “não” significação dos conceitos algébricos, em especial o de Variável, a qual, na grande maioria das vezes, é vista apenas como uma “letra”, como podemos observar em nossas experiências no ensino e pesquisa da Matemática.

Quanto à atribuição de significados a conceitos algébricos, em especial ao conceito de Variável, precisamos pensar numa estratégia para propiciar uma aprendizagem que favoreça sua significação, considerando a diversidade de papéis que a Variável pode assumir, de acordo com a situação em que é utilizada. Como alternativa e estratégia para superar tal dificuldade, apresentamos atividades numa linha investigativa, de forma que o estudante possa fazer conjecturas, estabelecer relações e se colocar como protagonista da própria aprendizagem.

Nessa perspectiva, acreditamos ser de grande importância que se dedique uma atenção especial à Álgebra Escolar, tanto no que se refere à sua introdução nas séries finais no Ensino Fundamental quanto em seu prosseguimento no Ensino Médio, tendo em vista que os alunos possam atribuir significados aos conceitos

algébricos essenciais, como é o caso da Variável. Da mesma forma, merece atenção a Álgebra estudada nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, que, em sua grande maioria, também é muito distante da realidade das salas de aula do ensino básico.

Este Guia propõe atividades de investigação e sugestões de trabalho com a Álgebra, no sentido de contribuir com a formação de professores e de futuros professores de Matemática nos diversos níveis e modalidades de ensino.

Além da sugestão de atividades e de formas como estas podem ser abordadas em sala de aula, o presente material também possui discussões teóricas sobre os conceitos presentes nas atividades, no sentido de contribuir para a construção de saberes necessários para se trabalhar a Álgebra nas escolas de ensino fundamental. Assim, o Guia apresenta considerações acerca do conceito de Variável, de como trabalhar de forma investigativa nas aulas, visando à atribuição de significados aos conceitos e alocando-os em zonas de significação, que serão explicitadas mais adiante e que já foram estabelecidas na pesquisa referida anteriormente.

1. O Conceito de Variável na Álgebra

Tratar do conceito de Variável em sala de aula pode parecer tarefa simples para nós, professores, entretanto, ele nem sempre é trabalhado de forma correta e clara. Pela experiência de docência e convivência em ambientes com outros professores, percebemos que muitos não trabalham a multiface de tal conceito, que muitas vezes é utilizado de forma aleatória para dar nomes às letras.

Pensando nas dificuldades apresentadas pelos alunos ao trabalharem o conceito de variável e considerando que essas dificuldades geram, na maioria das vezes, fracasso escolar, buscamos enriquecer este Guia com autores que nos ajudam a pensar e refletir sobre as questões pontuadas. Alguns deles trazem diferentes concepções do uso da Variável, que contribuem para dar significado a este conceito.

Para início de conversa, afirmar que “o conceito de variável é multiface” (USISKIN, 1995, p. 10) implica dizer que, de acordo com sua utilidade, as variáveis podem receber denominações diferentes e, por isso mesmo, merecem atenção especial quanto aos seus usos dentro das atividades trabalhadas em sala de aula.

Outro ponto a considerarmos sobre o conceito de variável é o fato de alguns estudantes – e aqui digo a grande maioria deles –

acreditarem que uma variável é sempre uma letra e que esta sempre representa um número. Usiskin (1995), que estudou os vários usos das variáveis dentro das diversas concepções de Álgebra, destaca que algumas daquelas podem representar pontos na Geometria, por exemplo, assim como pontos de interrogação, traços e que sinais de operações podem ser, também, variáveis.

Seguindo a mesma linha de pensamento, Usiskin (1995, p. 12) ressalta que “as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra”. Dentro dessa mesma ideia, acreditamos ser possível a construção das zonas de perfis do conceito de variável¹, ancorada na Teoria dos Perfis Conceituais, de Eduardo Mortimer, levando em consideração que não é aconselhável tentar reduzir o conceito de variável a apenas uma concepção.

Com base nos estudos de Usiskin e de experiências docentes, consideramos, então, que as variáveis podem assumir diferentes papéis no estudo da Álgebra, dependendo da finalidade e da concepção que se faz dela. Dentre essas, Usiskin (1995) define e

¹ As zonas de perfis mencionadas serão mais bem explicadas adiante, numa seção específica.

caracteriza quatro principais concepções. Em uma primeira, o autor coloca a Álgebra como **aritmética generalizada**, na qual as variáveis possuem papéis de traduzir e generalizar situações. Dentro desse modo de pensar, Usiskin (1995) explica que,

em nível mais avançado, a noção de variável como generalizadora de modelos é fundamental em modelagem matemática. Muitas vezes, encontramos relações entre números que desejamos descrever matematicamente, e as variáveis são instrumentos utilíssimos nessa descrição (p. 13).

Em outra concepção, esse autor coloca a Álgebra como sendo um meio para **resolver problemas**: entendemos que “as variáveis são ou *incógnitas*² ou constantes, tendo como instruções-chave para seu uso *simplificar e resolver*³” (USISKIN, 1995, p. 15).

De acordo com o autor, ainda podemos ter a Álgebra como um estudo de **relações entre grandezas**.

Dentro dessa concepção, uma variável é um *argumento* (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um *parâmetro* (isto é, representa um número do qual

² O dicionário Houaiss (2004, p. 408) expressa que a incógnita, dentro da Matemática, é um “valor a ser determinado na solução de uma equação ou de um problema”. Sendo assim, uma incógnita é um valor desconhecido, representado por uma letra, que deve ser determinado, somente nas equações.

³ Grifos dos autores.

dependem outros números). Só no contexto desta concepção existem as noções de variável independente e variável dependente. As funções surgem quase imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem do argumento ou parâmetro x (USISKIN, 1995, p. 16).

Para nós, professores, é importante considerar que esta última função da variável é uma das mais indicadas por alguns educadores de Matemática para introduzirem os estudos de Álgebra, de acordo com Usiskin (1995). Nessa concepção de Álgebra, as instruções-chave são **relacionar, analisar e construir gráficos**, o que pode favorecer um caminho mais amplo e contínuo do processo de ensino e aprendizagem.

Outra concepção da Álgebra que precisamos considerar é o estudo das **estruturas**, em que, segundo Usiskin (1995, p. 18), “a variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Essa é a visão da variável na álgebra abstrata”. Percebemos que essa forma de enxergar a variável é a que mais se aplica na Álgebra vista nos cursos de Licenciatura em Matemática, e requer dos estudantes saber manipular e justificar. Por exemplo, no trabalho com Anéis dos Inteiros ou com Polinômios e suas propriedades e características próprias.

Além dessas concepções de Álgebra e seus respectivos papéis, as variáveis, assim como toda a Álgebra, possuem importância em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, na ciência da computação, em que

muitas vezes se identificam as variáveis com fileiras de letras e números. [...] As aplicações da computação tendem a envolver grandes números de variáveis que podem representar muitos tipos diferentes de objetos. Ademais, os computadores são programados para manipular as variáveis, de maneira que não podemos reduzi-las com vistas a tornar mais fácil a tarefa de manipulação cega (USISKIN, 1995, p. 19).

Usiskin (1995, p. 20) completa seu pensamento ao expressar que, nos estudos de programação,

aprende-se a considerar a variável como um argumento muito antes do que se costuma fazer em álgebra. [...] Enfim, [...] é provável que os alunos venham a aprender os diversos usos das variáveis bem mais cedo do que hoje.

É, pois, necessário que ofertemos aos nossos alunos um ensino que propicie uma aprendizagem da Álgebra de forma que eles possam vivenciar os diversos empregos das variáveis, para que sejam capazes de atribuir significados a este conceito e aos demais conceitos algébricos.

2. Por que é importante atribuir significados aos conceitos matemáticos?

É comum ouvirmos, dos estudantes, em nossas aulas, a tradicional frase “para que serve isso em minha vida?”, ou ainda, “para que eu preciso estudar isso?”. Precisamos compreender que isso acontece, muitas vezes, porque os conceitos apresentados aos estudantes em sala de aula não fazem sentido para eles. E isso pode ser decorrente da não atribuição de significados desses estudantes aos conceitos matemáticos estudados.

Em relação aos conceitos trabalhados em sala de aula e construídos pelo indivíduo, assumimos que estes podem se formar distintamente de acordo com sua natureza. Assim, é preciso que nos atentemos para uma construção significativa de tais conceitos científicos, buscando trazê-los para a compreensão dos estudantes. Mas, o que seria essa tal construção significativa de conceitos, em especial, os matemáticos?

Primeiramente, vale frisar que um conceito fazer sentido e receber um significado para um estudante não representa a mesma coisa. Para entendermos melhor, Vygotsky (2008, p. 181) expressa que sentido seria "a soma de todos os eventos psicológicos que a palavra desperta em nossa consciência e

significado como uma das zonas do sentido; a mais estável e precisa”. Estabelecemos, então, que o sentido refere-se ao contexto em que tal conceito aparece, podendo alterar-se quando o contexto se altera, enquanto o significado permanece o mesmo, independentemente de uma alteração ou não de sentido.

Quanto à necessidade do significado, Silva e Salvi (2013) destacam que

o aprendizado de um conceito ocorre a um estudante quando este é capaz de atribuir-lhe significado, inserindo-o conscientemente ao seu cabedal de conhecimentos, podendo lançar mão dele, se necessário, a ponto de tornar-se um movimento natural quando requerida sua aplicação em situações correlatas (2013, p. 3).

Sabemos que existem algumas aprendizagens que podem não passar pela atribuição de significados, pois se utilizam de memorizações e treinos, como é o caso dos “conteúdos procedimentais” (Zabala, 1998). Fazendo uma ligação com o que já foi dito sobre o assunto de atribuição de significados, podemos considerar que neste processo de memorizar e treinar haverá dificuldades de utilização do conteúdo aprendido numa aplicação seguinte, em situações semelhantes ou não. Explicamos isso pelo fato de que não estamos trabalhando conceitos, mas procedimentos e que o processo de significação não envolve somente a compreensão, mas também a expressão. Mas, como

assim “expressão”? Consideramos a expressão de um conceito aprendido a “organização mental dos significados daquilo que se quer dizer para possibilitar a sua exteriorização” (MACEDO, 2008, p. 76).

Seguindo o mesmo caminho de pensamento, Macedo (2008) mostra que atribuir significado a um conceito não se trata apenas de compreendê-lo, mas saber sua expressão mais adequada em situações variadas. Podemos observar essa situação quando um aluno, ao aprender um novo conceito, tenta fazer relações com aquilo que já aprendeu. Fazendo relações com o que já foi apresentado, Rego (2011, citado por SILVA E SALVI, 2013, p. 4) ressalta que

a significação – ato de atribuir significado - ocorre de modo singular, apesar de constituído socialmente, caracteriza-se por uma composição individual. Ao se deparar com um conceito sistematizado novo o estudante busca atribuir-lhe significado, por meio de semelhança com outros já internalizados.

Assim, a atribuição de significados dentro da aprendizagem da Álgebra, especialmente no que se refere ao conceito de variável, envolve aspectos sociais e individuais, necessitando ser desenvolvida uma metodologia própria nas aulas de Matemática, que envolva integração e investigação. Sob esse aspecto, acreditamos que o trabalho com atividades investigativas em

Álgebra se apresente como um caminho para a compreensão e expressão do conceito de variável e, também, de outros mais.

3. Como investigar nas aulas de Matemática?

Favorecer a investigação foge daquilo que conhecemos como o ensino tradicional de Matemática, no qual, de acordo com Alro e Skovsmose (2010, p. 51),

[...] as aulas costumam ser divididas em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, geralmente em conformidade com um livro-texto. Em seguida, os alunos fazem alguns exercícios pela aplicação direta das técnicas apresentadas. O professor confere as respostas. Uma parte essencial do trabalho de casa é resolver exercícios do livro. Há variações possíveis no tempo gasto com a parte expositiva e com a resolução dos exercícios. Outros elementos podem ser combinados com esse modelo, por exemplo, os alunos podem apresentar pequenos seminários ou exercícios resolvidos.

Esse modelo mecanizado de um processo de ensino e aprendizagem da Álgebra faz com que alunos e professores adotem uma tendência letrista, excluindo qualquer possibilidade de se trabalhar a Álgebra de forma investigativa. Ainda sobre essa metodologia puramente tradicional de ensino, Lins e Gimenez (1997) descrevem que nesse modelo acontece a sequência “*técnica (algoritmo)/ prática (exercícios)*”⁴ (p. 105),

⁴ Grifos dos autores.

que, ainda hoje é o que se encontra na grande maioria de livros didáticos do mercado brasileiro e, o que pode ser ainda pior,

é que essa prática não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo – *inclusive no Brasil* – já mostraram ser ineficaz e mesmo pernicioso à aprendizagem (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 106).

Levando em consideração o exposto e com base em nossas experiências de fracassos e sucessos no ensino da Álgebra, numa tentativa de criar outros momentos em sala de aula além daquele do Paradigma do Exercício⁵, em que professores e alunos participam da discussão das atividades a serem trabalhadas em sala, é que a investigação é indispensável.

É importante lembrarmos que o desenvolvimento de um trabalho que favoreça a investigação exige práticas de sala de aula voltadas a fomentar o espírito de curiosidade nos estudantes, trazendo também metodologias diferenciadas daquelas com base puramente em exercícios e aulas expositivas.

⁵ Skovsmose (2000).

Falando então, de fato, sobre a investigação matemática, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20) esclarecem que essa deve acontecer em quatro momentos:

o primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro momento inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último, que diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. Esses momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc.

Como expresso, para se trabalhar sob uma perspectiva investigativa nas aulas de Matemática é preciso refletir acerca do conteúdo que está sendo tratado em sala de aula, permitindo que os estudantes elaborem questionamentos, levantem hipóteses, discutam com os demais colegas e com os professores, para que sejam capazes de chegar a um resultado satisfatório.

Nessa perspectiva, compreendemos que, para que o trabalho com a investigação aconteça de modo a favorecer uma aprendizagem com mais significado para o estudante, o professor deve fazê-lo perceber que, apesar de poderem dispor do auxílio do professor, o êxito de uma atividade de investigação é centrado especialmente na autonomia e iniciativa de si próprio.

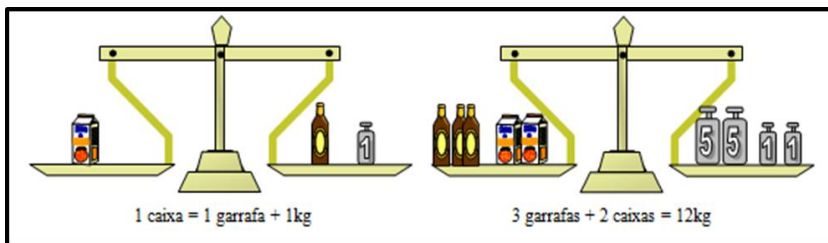
4. Usando as variáveis na investigação matemática

Como já vimos, o conceito de variável possui alguns aspectos que o caracterizam de acordo com o papel assumido em cada contexto. Dentro dessa perspectiva, apresentamos algumas sugestões de atividades que procuram retratar as facetas deste conceito. Para uma melhor visualização, as atividades foram separadas em tópicos, de acordo com o papel que assumem.

4.1. A Variável como Incógnita

Atividade 1:

Observe a situação apresentada nas balanças a seguir, que estão em equilíbrio entre si:



- a) No quadro acima, temos dois tipos de representações de uma mesma situação. Represente-a você também, mas de

outra forma, com o auxílio da linguagem escrita, utilizando variáveis.

- b) Se retirarmos as duas caixas, o que acontece na segunda balança?
- c) Se colocarmos uma garrafa + 1 kg no lugar de cada caixa da segunda balança, o que acontecerá?
- d) Resolva a situação expressa no quadro, determinando qual a massa de cada caixa de suco e de cada garrafa.

Atividade 2:

Leia o problema que segue:

Um cavalo e um burro caminhavam juntos levando sacos muito pesados, todos com o mesmo peso. Lamentava-se o cavalo da sua pesada carga quando o burro lhe disse:



"De que te queixas? Se eu levasse um dos teus sacos, a minha carga seria o dobro da tua."

E se eu te desse um saco, a tua carga seria igual à minha!"

- I) É possível determinar quantos sacos leva cada um dos animais apresentados no problema? Se sim, determine essa quantidade.
- II) Quantos sacos levam, juntos, o burro e o cavalo?
- III) Qual estratégia você adotou para chegar à resposta da primeira questão?
- IV) Seria possível encontrar a resposta em questão de outra forma? Cite.

Potencialidades das Atividades 1 e 2:

Uma atitude de investigação frente às atividades apresentadas acima permite ao estudante considerar diferentes formas de representação de uma mesma situação. Representações tais como: representação ilustrativa, expressão algébrica (sistema de equações) ou, ainda, fazendo uso do raciocínio lógico e de tentativas. Estas situações problemas destacam o papel da variável como um valor determinado, que é encontrado pela operacionalização dos dados do problema, isto é, como incógnita. Além disso, a investigação favorece que o estudante faça suposições com possíveis sugestões de alterações nas questões e explique como chega às suas conclusões.

4.2. A Variável como Argumento ou Parâmetro

Atividade 3:

(Adaptada do material do Proeja/IFES) Observe a tirinha:



- Explique como foi possível que o garoto chegasse à resposta correta, mesmo não sabendo qual o número pensado por seu colega.
- Escreva uma expressão geral para o problema apresentado na tirinha.
- Se você pensar em um número diferente de seu colega, a resposta encontrada por vocês será diferente? Justifique.

Potencialidades da Atividade 3:

Esta atividade potencializa o cálculo mental dos estudantes, além da tradução deste cálculo numa expressão que pode gerar uma

função. Estabelece o papel da variável como um valor qualquer na relação entre grandezas. E, ainda, com auxílio da investigação, o aluno é instigado a procurar justificativas para explicar como foi possível que sempre se chegasse ao mesmo resultado.

Atividade 4:

(Adaptada do material do Proeja/ IFES). A espessura da pele humana varia entre 0,5 e 2mm, podendo atingir 4 mm na palma da mão e na sola dos pés. Dentre outras, uma função da pele é regular a temperatura do corpo. Quando sentimos excesso de calor, o sistema nervoso desencadeia um conjunto de respostas que resultam na perda de água através do suor, que, ao evaporar, carrega consigo uma quantidade substancial de calor, provocando o resfriamento do corpo. A quantidade de calor perdida através da pele depende da área da superfície corporal. Essa é uma das muitas situações que mostram a necessidade de se saber calcular a área da superfície do corpo humano. Os dermatologistas estabeleceram a seguinte fórmula matemática para calcular, aproximadamente, essa área A , em m^2 , em função da massa m , em kg, de um indivíduo:

$$A = 0,11.\sqrt[3]{m^2}$$

- I) Neste caso, a fórmula apresentada para calcular a área da superfície do corpo humano de um indivíduo qualquer pode assumir um outro papel dentro da Matemática. Qual seria esse papel?
- II) Qual a relação que existe entre as variáveis apresentadas na fórmula acima?
- III) Calcule a área da superfície do seu corpo.
- IV) Em uma fórmula, quando atribuímos valores às variáveis que são independentes, as variáveis dependentes passam a assumir um papel – o mesmo papel daquelas variáveis que utilizamos nos problemas com equações do primeiro grau, por exemplo. Que papel é esse?

Atividade 5:

(Adaptada do material do Proeja/ IFES). Sabemos que hoje, no Brasil, a obesidade vem se tornando cada vez mais comum, especialmente entre os jovens (Fonte: IBGE, Comunicação Social/ Agosto 2010). Sendo assim, é importante que estejamos atentos

a hábitos mais saudáveis de vida, ressaltando uma alimentação mais equilibrada e a prática de esportes.

Para o controle de peso e da situação ideal para a saúde, existe o IMC, o Índice de Massa Corpórea, que é um cálculo simples de ser feito por meio de uma fórmula, na qual se divide a massa (peso) pelo quadrado da altura.

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{(\text{altura})^2}$$

A partir do cálculo, existe uma tabela, utilizada pela OMS (Organização Mundial de Saúde) que estabelece critérios para indicar a situação da pessoa em relação ao resultado encontrado.

Condição	IMC em adultos
abaixo do peso	abaixo de 18,5
no peso normal	entre 18,5 e 25
acima do peso	entre 25 e 30
obeso	acima de 30

- Calcule seu índice de massa corporal.
- Como está a sua condição?
- Você acha que somente o cálculo do IMC é suficiente para indicar se uma pessoa é obesa ou não? Justifique.

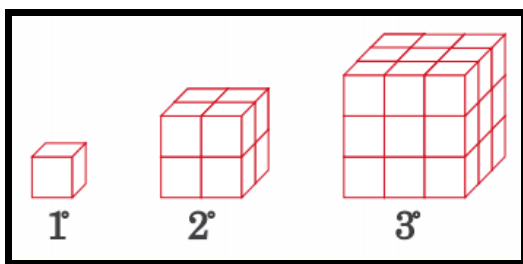
Potencialidades das Atividades 4 e 5:

Tais atividades mostram a variável assumindo seu papel na relação entre grandezas ou, ainda, na criação de um padrão, dependendo da visão e abordagem a ser adotada nas aulas. A atividade de número 4 propõe que o estudante busque um novo papel para uma das variáveis quando a outra já foi substituída por um valor qualquer, que seria o de incógnita, pois a expressão se transforma numa equação. Além disso, permite que o estudante faça uma relação entre a fórmula apresentada e uma função. Em relação à atividade 5, a mesma não foi totalmente potencializada com a abordagem em que foi apresentada. Isso não significa que essa atividade seja inviável ou menos importante, mas que será preciso inferir novas formas de investigar a questão, isto é, será preciso propor outras questões que viabilizem reconhecer o papel da variável por trás do problema. As atividades em questão ainda dão caminho a uma discussão acerca de condições de saúde do indivíduo que está solucionando a questão, o que pode culminar num trabalho multidisciplinar com outras áreas do conhecimento.

4.3. A Variável como Generalizadora de Modelos

Atividade 6:

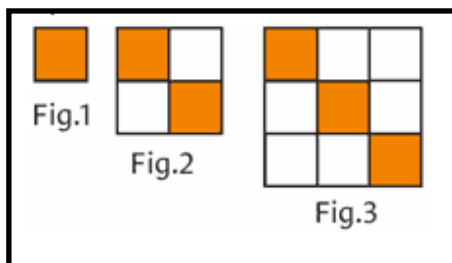
(Adaptado do material do Proeja/ IFES). Veja a sequência de pilhas de cubo:



- a) Quantos cubos menores tem cada construção?
- b) Fazendo a próxima (4ª) construção de cubos menores, quantos destes serão necessários?
- c) Quantos cubos seriam necessários para fazer a 5ª construção?
- d) É possível chegar a um padrão nessa construção. Que padrão é esse?
- e) De quantos cubos menores precisaríamos para fazer a enésima (que está na posição n) construção?

Atividade 7:

Observe a sequência que segue:



Vamos, agora, fazer o que se pede:

- a) Construa as duas próximas figuras da sequência.
- b) A figura 17 terá quantos quadrados no total? E quantos serão coloridos?
- c) Se uma das figuras tem 169 quadrados no total, quantos são coloridos? Por quê?
- d) Monte uma tabela que traduza a construção da sequência expressa.
- e) É possível estabelecer um padrão para a construção da sequência acima. Escreva esse padrão, explicando o porquê dele.
- f) O que você entende pela palavra “padrão”?

Atividade 8:

Observe a sequência de desenhos apresentada a seguir:



- I) Qual será o 10º elemento dessa sequência? Descreva como procedeu para encontrar a resposta.
- II) Determine o 16º elemento da sequência e diga como o encontrou.
- III) Qual deverá ser o 24º elemento dessa sequência? Faça isso sem usar desenhos e diga qual foi o meio adotado para chegar à resposta.
- IV) Quais são as figuras que estariam nas posições 21, 12 e 18? Por quê?
- V) Qual será a figura que ocupará a posição 107 dessa sequência? Explique.
- VI) É possível estabelecer um padrão para tal sequência? Em caso afirmativo, que padrão é esse?

Potencialidades das Atividades 6, 7 e 8:

Essas atividades propiciam aos estudantes o estabelecimento de relações com aquilo que aparece de comum em cada uma delas, a

fim de criar um padrão que funcione como um modelo para se determinar posições das sequências. Nessas sequências, as variáveis relacionadas se apresentam como generalizadoras de modelos, isto é, como um valor qualquer na criação de padrões. Com esse tipo de atividades, os estudantes são levados a fazerem conjecturas sobre a formação das sequências e como é possível chegar a generalizações dentro da Matemática.

4.4. A Variável como Sinal Arbitrário

Atividade 9:

Escreva as Propriedades Matemáticas apresentadas a seguir, com auxílio da linguagem algébrica:

- a)** O sucessor de um número natural é esse número mais uma unidade.
- b)** Um número primo é aquele que é diferente de um e é divisível apenas por um e por ele mesmo.
- c)** Em uma multiplicação de dois números inteiros quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto (Comutatividade).

- I)** Nos casos acima, você acha que é necessário substituir as variáveis utilizadas por números, para escrever as situações por meio da linguagem algébrica? Por quê?

Potencialidades da Atividade 9:

A última atividade apresentada refere-se ao uso das variáveis na Álgebra Abstrata como um objeto arbitrário, que podem ou não ser representadas por uma “letra”. Com este tipo de atividade, é possível estabelecer com os estudantes a importância da variável para a Álgebra Abstrata e, além disso, estabelecer relações desta com a Álgebra vista na Educação Básica.

4.5. Aos Professores

As atividades propostas nesta seção do Guia servem como uma das alternativas para o trabalho com a Álgebra. A partir delas, esperamos que vocês, professores, elaborem suas próprias situações problemas, adequando-as à realidade na qual atuam, visando a promover uma aprendizagem que, de fato, tenha significado para os estudantes.

5. Construção de Zonas de Perfis de Significação: uma experiência com licenciandos em Matemática

Levando em consideração que este Guia foi construído a partir e em conjunto com a dissertação de mestrado que teve como objetivo *investigar o significado que os licenciandos de Matemática de uma instituição particular de ensino superior atribuem ao conceito de variável na Álgebra*, cuja pesquisa contava com a aplicação das atividades investigativas apresentadas aqui, além de questionário, entrevistas, intervenção e produção de relato, as análises forneceram caminhos para se pensar o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Com base nas análises dos dados coletados, foi-nos possível estabelecer/criar quatro zonas de perfis de significação conceitual de variável, com base nos estudos de Mortimer (1994, 1995, 2000) sobre a criação das zonas de perfis conceituais, e nas ideias de Usiskin (1995) sobre as concepções da Álgebra e os diferentes papéis das variáveis dentro dessas concepções. São eles: **Variável como um valor qualquer na criação de padrões; Variável como um valor único originário do cálculo; Variável na relação entre grandezas; e Variável como objeto arbitrário na Álgebra abstrata.**

Nas respostas que os estudantes deram aos questionamentos e situações problemas apresentados a eles durante a pesquisa realizada, foi possível perceber que nem todos conseguem perpassar por todas essas zonas de perfis de significação. Aqueles que consideram a variável como um valor qualquer que pode variar, provavelmente se enquadrariam na zona de perfil da **variável na relação entre grandezas**. Já aqueles que admitem que a variável é uma incógnita, que vai possuir um valor que depois tornará a ser uma equação verdadeira, estão dentro da zona de perfil que considera a **variável como um valor único originário do cálculo**.

Os estudantes que afirmam que a variável pode ser um valor qualquer e que pode ser usada em generalizações mostram que conseguem transitar pela zona que dá significado à **variável como um valor qualquer na criação de padrões**. Mais escassos, mas não inexistentes, os estudantes que consideram que uma variável não precisa ser uma letra e/ou que uma letra não precisa ser substituída por um número alcançam a zona de perfil que significa a **variável como um objeto arbitrário na Álgebra abstrata**.

As duas últimas zonas de perfis apresentadas são as menos comuns nas respostas dadas pelos estudantes. Um maior contingente de licenciandos considera apenas as duas primeiras

ou apenas uma delas como sendo o conceito de variável. Para atingir as zonas de perfis de **um valor qualquer na criação de padrões e objeto arbitrário na Álgebra Abstrata**, os estudantes precisam ser levados à reflexão da existência dos mesmos, e isso pode ser feito por meio das atividades que utilizem raciocínios de generalizações gerais, de forma que possam visualizar as letras em estruturas abstratas.

O ideal para uma aprendizagem significativa da Álgebra seria que os estudantes fossem capazes de passar por todas essas zonas de perfis de significação do conceito de variável. Entretanto, nas salas de aula esse conceito nem sempre é trabalhado, o que acarreta o fato de o aluno não conseguir diferenciar os papéis que uma variável pode assumir em situações diversas. A transição do estudante por essas zonas de significação implicaria um processo de ensino e aprendizagem que levaria em conta as várias facetas da Álgebra e os diversos usos das variáveis, que, segundo os próprios licenciandos, são as grandes vilãs da aprendizagem da Álgebra.

É importante que um trabalho mais efetivo seja realizado nos cursos de formação de professores de Matemática, buscando fazer relações da Álgebra Abstrata tratada na licenciatura com os conteúdos algébricos do ensino básico, para que nós,

professores, estejamos preparados para o desenvolvimento de um trabalho com a Álgebra, de fato efetivo, neste nível de ensino.

Outra questão refere-se a certos tratamentos estereotipados, com ideias engessadas sobre o ensino da Álgebra. Por exemplo, a ideia de que uma variável precisa sempre ser uma letra e que, na grande maioria dos casos, aparece na forma do x e do y . Uma visão mais ampla da Álgebra, perpassando os vários perfis conceituais, se faz necessária para que o pensamento algébrico seja, de fato, construído na educação básica.

Para reforçar essa ideia, trazemos a seguir um quadro das zonas de perfis de significados de variável.

5.1. Quadro resumo das Zonas de Perfis de Significados atribuídos para Variável

A seguir, mostramos um quadro que tem o objetivo de resumir, de forma ilustrativa, as zonas de perfis de significados criadas, ancoradas na significação que os licenciandos em Matemática fazem do conceito de variável, mas que podem servir de subsídio para um trabalho com este conceito em qualquer nível de ensino:

Quadro: Zonas de Significação do Conceito de Variável

Zona do Perfil de Significado	Características	Exemplos
Cálculo	Variável como uma incógnita, em que a “letra” está no lugar de um número determinado que será encontrado pela operacionalização.	Equações e Sistemas de Equações.
Relações	A variável é um valor que pode variar de acordo com a situação apresentada, sendo assim indeterminado.	Funções e Fórmulas.
Padrões	A “letra” é algo que pode receber quaisquer valores e podem-se criar modelos para serem utilizados.	Generalizações (sequências), Fórmulas.
Álgebra Abstrata	Variável é uma letra ou não, e este símbolo usado pode ou não representar um número.	Provas e demonstrações de teoremas, corolários.

Fonte: Produção da autora (Adaptado de RIBEIRO, 2008, p. 112) (2015)

6. O que dizem os licenciandos em Matemática

Para mostrar e disseminar as impressões que os estudantes tiveram acerca da pesquisa, especialmente suas concepções sobre o conceito de variável, propusemos a esses licenciandos a produção de um relato de participação na pesquisa. Nele, os estudantes puderam também expressar sua opinião e dar sugestões quanto ao trabalho com a Álgebra, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior. A justificativa para a apresentação de tais relatos neste material circunda o fato de que, com base neles, podemos observar a influência do trabalho com atividades investigativas que visam ao diálogo e à atribuição de significados aos conceitos no ensino e na aprendizagem da Álgebra.

Dentre os relatos produzidos selecionamos alguns, que passaram por uma revisão ortográfica autorizada pelos licenciandos e estão apresentados a seguir. Os estudantes não serão identificados pelo nome.

Relato da Licencianda 1

A pesquisa foi importante para nós, licenciandos em Matemática, para refletirmos sobre o conceito de variável. Percebemos o quanto ela é importante em questões, exercícios, conteúdos e resoluções de problemas.

Em relação às variáveis, percebi que considerava a Álgebra como algo complicado e, na verdade, não é tão difícil. Basta que entendamos bem o conceito de variável para que os problemas algébricos fiquem mais fáceis para serem resolvidos.

Acredito que, ao atuar como professora de Matemática, para trabalhar com conceitos da Álgebra, faria uso de problemas práticos, usando materiais do dia a dia, recursos lúdicos que incluiriam as variáveis. Dessa forma, considero que os alunos absorveriam melhor os conceitos matemáticos propostos.

Relato da Licencianda 2

As atividades de investigação utilizadas na coleta de dados foram uma boa alternativa para incentivar nossa curiosidade e, dessa

forma, despertar nosso interesse. Senti que houve mudança no modo como via a variável, pois com formas diversas de apresentar problemas algébricos, além de explorar os conhecimentos específicos, também se explora o raciocínio lógico.

Trabalharia os conceitos algébricos de uma forma que despertasse interesse nos alunos, com problemas e dados reais, talvez até coletados pelos próprios alunos, materiais concretos confeccionados por eles, como jogos, entre outros, trabalhados em grupo. Usaria uma didática que contribuísse para uma aula diferente, deixando de lado as aulas tradicionais em que o professor transmite e o aluno absorve e reproduz.

O ensino superior é mais complicado, pois, na minha opinião, deve-se dar mais ênfase aos conceitos de Álgebra. Entretanto, para facilitar o aprendizado dos estudantes, a utilização de uma linguagem mais simples e comum a eles pode ajudar. Aulas mais atrativas e não as monótonas, cheias de apostilas, nas quais o aluno apenas faz a leitura e reproduz. Trabalhos em grupo, pois esses trabalhos levam o estudante a entender certos conteúdos e repassar o que aprendeu, de forma que o restante de sua turma também tenha compreensão deles. Trabalhar mais com conteúdos que sirvam aos futuros professores na sua situação.

Relato da Licencianda 3

As questões e atividades propostas na pesquisa, nas etapas de coleta de dados, permitiram-nos uma reflexão sobre os conceitos referentes à Álgebra, mostrando a necessidade de uma reflexão e direcionamento corretos deles. Cursando o último período da faculdade de Licenciatura em Matemática, compreendi, por meio da realização desta pesquisa, que as variáveis podem assumir vários papéis e não apenas o de “substituir um número”, conforme abordado diversas vezes quando eu cursava o ensino fundamental e médio.

Hoje, ao trabalhar Álgebra, pretendo primeiramente demonstrar, por meio de problemas, as diferentes utilidades das variáveis. Desmitificar o “ x ” como única opção de variável e fazê-los compreender que nem sempre a variável requer sua substituição por um número. Os alunos precisam desenvolver um alicerce suficientemente sólido quanto aos conceitos, para que possam partir para os cálculos necessários à resolução de problemas algébricos.

Na faculdade não foi muito diferente do ensino médio e fundamental. Ficamos períodos inteiros nos dedicando a decorar e reproduzir provas para teoremas diversos e nos perdemos no entendimento da essência dos conceitos. Por este motivo, muitos

acabam por criar “antipatia” pela Álgebra, podendo isso refletir em suas atuações enquanto professores. Os cursos de Licenciatura deveriam auxiliar os estudantes quanto à formação correta dos conceitos algébricos e orientar quanto aos métodos mais adequados de trabalhá-los nos ensinos médio e fundamental.

Relato da Licencianda 4

As atividades de investigação utilizadas para a coleta de dados foram satisfatórias, em relação à nossa compreensão do conceito de variável.

Nas aulas dedicadas à pesquisa, aprendi diferentes concepções de variáveis, como incógnitas, generalizações, etc. E também notei que tinha uma noção equivocada, pois achava que a variável era apenas uma incógnita. No decorrer da investigação os questionamentos não se mostravam difíceis, mas quando era para colocar no papel se tornava um tanto complicado.

Como professora de Matemática, iniciaria o trabalho com Álgebra mostrando no concreto, para depois inserir o conceito de variável. Um exemplo disso seria como trabalhar equação.

Poderia levar uma balança (aquela de dois pratos), colocaria pesos iguais para que os estudantes notassem a igualdade e depois substituiria os alimentos por outros, ainda com pesos iguais. Numa próxima etapa, poderia inserir a letra para representar um alimento, mostrando a incógnita.

O trabalho com a Álgebra no Ensino Superior poderá ser explorado abrangendo o que se utilizará na prática. Talvez se não cobrassem tanto, os alunos até aprendessem mais. As atividades são mecanizadas e as respostas são enormes, o que dificulta ainda mais o aprendizado.

Relato da Licencianda 5

Por se tratar de uma pesquisa que envolve Álgebra, fui surpreendida com as questões, pois quando o tema foi apresentado e, pelo conceito de Álgebra que tinha em mente, pensei que as atividades envolveriam descrição de fórmulas e teoremas, conforme é trabalhado no ensino superior. As atividades me provocaram, levando-me a pensar e elaborar equações. Esse modelo de exercícios é bastante investigativo e introduz, de forma “espontânea”, a importância da variável.

Quanto à mudança na minha compreensão em relação às variáveis presentes em problemas algébricos, houve mudança sim, pois anteriormente a esta pesquisa o conceito que eu tinha sobre variáveis era de que elas só poderiam ser incógnitas. Hoje tenho conhecimento de que elas podem assumir outros papéis além de incógnita, tais como generalizadoras, parâmetro ou argumento e objeto arbitrário.

Como professora, trabalharia o conceito de variável inicialmente com a exploração do conhecimento dos alunos, depois desenvolveria algumas atividades a fim de mostrar-lhes a necessidade de representar valores com variáveis e, a partir de então, apresentaria o conceito de variável.

Para o trabalho com a Álgebra no ensino superior, a minha sugestão é desenvolvê-la de forma clara, atribuindo significado aos teoremas abordados e mostrando como devemos trabalhá-los na Educação Básica, caso seja conveniente.

6.1. Aos Professores

Os relatos apresentados mostram que, de fato, o trabalho com atividades de investigação pode despertar o interesse dos

estudantes e contribuir para a significação de conceitos, como é o caso da variável.

7. Apontando caminhos para uma aprendizagem dialógica com vistas à atribuição de significados

Como intenção essencial, buscamos mostrar com o presente Guia caminhos possíveis para ensinar a aprender Álgebra, especialmente no que se refere ao conceito da variável algébrica. Entretanto, para apontar caminhos metodológicos com o objetivo descrito, é preciso considerar aspectos relevantes da sala de aula, como os pré-conceitos trazidos pelos estudantes, suas perspectivas e necessidades primárias, que são importantes para que os mesmos deem sentido àquilo que aprendem em sala de aula.

Com base no ensino da Álgebra como vem sendo trabalhado na Educação Básica nos dias de hoje, entendemos que algumas alternativas podem ser apresentadas no sentido de contribuir com a aprendizagem de conceitos algébricos. Dentre elas, podemos destacar a necessidade de uma reforma nos currículos escolares de Matemática, especialmente no Ensino Fundamental, que distribua, de forma mais intercalada, os conteúdos algébricos, apresentando-os na medida em que forem sendo necessários e não de forma maçante como aparecem hoje na grande maioria dos planos de ensino de Matemática. Isso, porém, não é tarefa simples, nem de execução imediata, pois depende de vários setores da Educação Básica.

Outro tópico a ser considerado para fazer com que os estudantes se interessem e compreendam os conceitos trabalhados é a importância de nos conscientizarmos, cada vez mais, de que o planejamento das aulas é essencial; assim como, de forma mais incisiva, de que a elaboração de atividades e de materiais didáticos é uma prática que contribui para o reconhecimento e a adequação da didática ao contexto dos estudantes.

De forma mais concreta, uma alternativa para o trabalho com a Álgebra pode ser o uso da Resolução de Problemas como metodologia, e, dentro desse uso, a utilização de problemas em uma linha investigativa, que permitam aos estudantes buscarem, em seus pré-conceitos e em seus registros, subsídios para solucionarem tais problemas. Como sugestão, é possível então dar início à construção de algum conceito, apresentando problemas a que estes estejam relacionados, registrando como os estudantes procedem para chegar a uma solução, além de as dúvidas sobre os problemas.

Dando prosseguimento, é importante reservar momentos de conversa com os alunos, individual ou coletivamente, na intenção de permitir que eles exponham suas impressões, dificuldades e sugestões para as atividades. A partir daí, é importante uma interferência mais ativa de nossa parte, como professores, com o objetivo de conduzir o pensamento dos estudantes cada vez mais

para perto do conceito que se deseja trabalhar. Nessa interferência, devemos buscar recursos variados, como apresentações com o *data show*, listas impressas para serem discutidas em grupos⁶, chamar os alunos ao quadro, entre outros.

No intuito de confrontar as informações fornecidas pelos estudantes com os problemas apresentados inicialmente, pode ser relevante a aplicação de várias listas contendo atividades de investigação, em que o mesmo conceito levantado nas etapas anteriores é considerado, entretanto, de forma mais aprofundada, necessitando de uma investigação e interpretação mais pormenorizada dos estudantes.

Com base nos confrontos realizados, novos momentos de discussão coletiva e individual devem ser proporcionados e registrados pelos alunos, na forma de relatos, por exemplo. Acreditamos que esse seja um dos caminhos possíveis para a atribuição de significados aos conceitos algébricos, pois quando o estudante passa a dar sentido àquilo que trabalha em sala de aula, compreendendo suas relações com outros conceitos já construídos e o papel daquele conceito dentro do seu processo de aprendizagem da Matemática, ele, de fato, aprende.

⁶ No que se refere ao trabalho em grupos, ele é muito importante no trabalho investigativo, pois sugere trocas de ideias e experiências. Entretanto, é preciso estabelecer coletivamente as regras para esse tipo de trabalho.

8. Considerações para uma proposta de formação de professores de Matemática

Embasadas nos estudos desta pesquisa e levando em consideração a importância de um trabalho na Educação que propicie a nós, professores, e aos alunos um processo de ensino e aprendizagem que lhes faça sentido, trazemos, a seguir, princípios que devem ancorar as formações inicial e continuada de professores.

Os cursos superiores de licenciaturas, bem como os de formação continuada de professores, em especial os de Matemática, precisam considerar, na elaboração de suas ementas e planos de ensino, uma metodologia em que o diálogo seja integrante, fundamental e indispensável, visto que um processo de ensino e aprendizagem baseado numa metodologia dialógica favorece a autonomia e a construção da identidade profissional dos envolvidos.

Além do diálogo, os cursos de formação de professores de Matemática precisam envolver a investigação e/ ou a resolução de problemas como metodologias de ensino, auxiliando os professores a desenvolverem a capacidade de serem elaboradores de atividades e não apenas copiadores. Dessa forma, as metodologias citadas favorecem uma aprendizagem

com mais significado dos conceitos Matemáticos, tanto para estudantes quanto para professores.

Outra opção para que o professor forme sua identidade profissional pode ser a produção de relatos, como os que foram produzidos pelos licenciandos envolvidos na pesquisa descrita anteriormente. Essa produção faz com que o professor, ou futuro professor, reflita acerca de sua prática (ou de como ela será), buscando subsídios para suas aulas, visando sempre a um trabalho que propicie aos estudantes uma aprendizagem mais eficaz, com base no diálogo e na atribuição de significados àquilo que se aprende em sala de aula.

Quanto ao conceito de variável, o professor de Matemática precisa, inicialmente, ser levado a refletir sobre este (assim como qualquer outro), considerando suas diversas facetas e sua polissemia⁷ para, a partir daí, ser capaz de elaborar e utilizar atividades nas quais as variáveis sejam evidenciadas em seus diferentes papéis na Álgebra, incentivando que diferentes zonas de perfis de significação desse conceito (criadas na pesquisa descrita anteriormente) apareçam nas respostas dos estudantes.

É importante ressaltar ainda que, por mais que este material seja fruto de uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Superior,

⁷ A palavra polissemia é usada para expressar que o conceito de variável possui vários significados.

ele é destinado a professores de qualquer nível de ensino, pois entendemos que a forma de trabalho proposta neste Guia seja interessante também para a base do ensino escolar da Álgebra, nos Ensinos Fundamental e Médio.

Com base nesses princípios, trazemos uma proposta de um curso de Álgebra a professores de Matemática e aos que ensinam Matemática, com ênfase no conceito de variável, buscando contribuir para a metodologia desses profissionais. Em cursos de Licenciatura, esta proposta de curso pode se caracterizar como uma das atividades das disciplinas de Didática, Metodologia ou Fundamentos da Álgebra, visando à integração entre teoria e prática. A proposta do curso a seguir foi dividida em oito momentos distintos, mas pode ser reorganizada de acordo com as necessidades do contexto em que ele for realizado.

8.1. Proposta de Curso

Tema: Variando a Variável na Álgebra: dando significados ao conceito.

Objetivo Geral: Contribuir para um processo de ensino e aprendizagem da Álgebra com mais ênfase no diálogo e na atribuição de significados aos conceitos.

Público Alvo: Professores de Matemática e que ensinam Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

Carga Horária: 40 horas (que podem ser divididas de acordo com a necessidade dos indivíduos participantes).

Organização Inicial do Curso:

Momentos	Atividades a serem desenvolvidas	Carga Horária
Momento 1	- Conversa informal sobre o que pensam da Álgebra e seu ensino; - Realização de uma dinâmica que propicie aos professores expressarem a concepção ou crença que possuem em relação à Álgebra e seu processo de ensino e aprendizagem.	2 horas
Momento 2	- Leitura e discussão em grupo de curtos textos que tratem das concepções e do papel da Álgebra no Ensino Básico; - Escrita conjunta de um texto sobre o assunto ou de construção de um mapa conceitual.	4 horas
Momento 3	- Atividade em grupo de elaboração de atividades de Álgebra pelos professores; - Discussão dos usos e papéis da variável em problemas matemáticos e sobre as zonas de perfis criadas para a significação do conceito de variável; - Classificar essas atividades dentro de uma das zonas de perfis estudados.	10 horas
Momento 4	- Apresentação das atividades no coletivo e reestruturação das mesmas após sugestão dos grupos.	4 horas
Momento 5	- Aplicação em sala de aula do Ensino Básico das atividades elaboradas pelo grupo e levantamento de questões e dificuldades surgidas na ação.	5 horas
Momento 6	- Relato – a todo o grupo da formação – da experiência vivida com os alunos em sala de aula; - Identificação das zonas de significação mais exploradas pelos estudantes durante a aplicação.	5 horas
Momento 7	- Escrita, a várias mãos, desses relatos e organização dos mesmos pelo grupo.	8 horas
Momento 8	- Avaliação do curso de formação.	2 horas

9. Bibliografias Sugeridas

Como este material se destina a auxiliar professores e futuros professores de Matemática em suas aulas de Álgebra, abaixo listamos algumas referências complementares para o planejamento de aulas.

Revista digital - **Nova Escola** – Disponível em:

<http://revistaescola.abril.com.br/>;

Site - **Falando em Matemática** – Disponível em:

<http://falandoemmatematica.blogspot.com.br/2010/03/jogo-de-algebra.html>;

Jogos de Álgebra no site Atividades de Matemática – Disponível em:

<http://www.atividadesdematematica.com/jogar-gratis/jogos-de-raciocinio/algebra-puzzle>;

Dominó de operações – Disponível em:

http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/img/jogos/pdf/dominio_das_operacoes.pdf;

LELLIS, JAKUBO e IMENES. **Para que serve a Matemática? – Álgebra**. 17 ed. Paradidático. 2009;

MACHADO, N. J. **Série Vivendo a Matemática**. Scipione. Paradidático.

RAMOS. **Coleção A Descoberta da Matemática**. Ática.

GUELLI. **Contando a história da Matemática**. Revista. Ática, 1993.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Tradução de Orlando Fonseca. 2ª ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2010.

IMENES, L. M. LELLIS, M. **O currículo tradicional e a educação matemática. O problema: um descompasso**. A educação matemática em revista. v. 2, n. 1, p. 5 – 12, 1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MACEDO, D. C. **A construção do significado**. In: Saber Digital: Revista Eletrônica do CESVA. v. 1, n. 1, p. 70-84, mar./ago. Valença. 2008.

MARANHÃO, M. C. S. A. et al. **Projeto: o que se entende por Álgebra?** In: Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Recife, 2004.

MORTIMER, E. F. **Evolução do atomismo em sala de aula: mudanças de perfis conceituais**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

_____. **Conceptual change or conceptual profile change?** Science & Education, New York: Springer, v. 4, p. 265-297, 1995.

_____. **Linguagem e Formação de Conceitos no Ensino de Ciências**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.

PONTE, J. P. BROCARD, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

RIBEIRO, A. J. **Multisignificados de Equação e o Ensino de Matemática: Desafios e Possibilidades**. São Paulo: Blucher, 2008.

SILVA, A. G. O.; SALVI, R. F. **A atribuição de significado a partir do aproveitamento didático do erro em prova escrita de matemática**. In: Anais XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Curitiba, 2013.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Educação Matemática Crítica**. São Paulo: Papirus, 2008.

_____. **Cenários Para Investigação**. Bolema, nº 14, p. 66 a 91, 2000.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo, 7ª Ed. 2ª tiragem, 2008.

ZABALA, A. **A prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.



Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-8263-082-2



9 788582 630822