Série Guias Didáticos de Matemática

9 A Construção dos Números Reais

Mariana dos Santos Cezar
Rodolfo Chaves

Editora Ifes
2014

Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Mariana dos Santos Cezar
Rodolfo Chaves

A Construção dos Números Reais

Série Guia Didático de Matemática – № 09

Grupo de Pesquisa GEPEMEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

C425p Cezar, Mariana dos Santos.

A construção dos números reais / Mariana dos Santos Cezar, Rodolfo Chaves. - Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2014.
50 p. : il. ; 15 cm. – (Série guias didáticos de matemática; 09)

ISBN: 978-85-8263-036-5

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores - Formação. 3. Números reais. I. Chaves, Rodolfo. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 510.7

Observação:
Material Didático Público para livre reprodução.
Material bibliográfico eletrônico e impresso.

Realização

Apoio

Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Mariana dos Santos Cezar
Rodolfo Chaves

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Série Guia Didático de Matemática – Nº 09

Grupo de Pesquisa GEPEMEM
Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2014

Editora do IFES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, no. 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara.
Prédio Administrativo, 3º. andar. Sala do Programa Educimat.
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040 780

Comissão Científica
Dr. Edmar dos Reis Thiengo, D. Ed. - IFES
Dr. Marcelo Almeida Bairral , D. Ed. - UFRRJ
Drª. Lígia Arantes Sad, Drª. Ed. - UFES
Drª. Sandra Aparecida Fraga da Silva, Drª. Ed. - IFES

Coordenador Editorial
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Sidnei Quezada Meireles Leite

Revisão
Bento Tadeu Cuqueto

Capa e Editoração Eletrônica
Katy Kenyo Ribeiro

Produção e Divulgação
Programa Educimat, IFES

Instituto Federal do Espírito Santo

Denio Rebello Arantes
Reitor

Araceli Verônica Flores Nardy Ribeiro
Pró-Reitora de Ensino

Márcio Almeida Có
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

Renato Tannure Rotta de Almeida
Pró-Reitor de Extensão e Produção

Lezir José Ferreira
Pró-Reitor de Administração e Orçamento

Ademar Manoel Stange
Pró-Reitora de Desenvolvimento Institucional

Diretoria do *Campus* Vitória do IFES

Ricardo Paiva
Diretor Geral do Campus Vitória – IFES

Hudson Luiz Côgo
Diretor de Ensino

Viviane Azambuja Favre-Nicolin
Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

Sergio Carlos Zavaris
Diretor de Extensão

Sergio Kill
Diretor de Administração

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

Mariana dos Santos Cezar. Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo-UFES, é Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo-IFES. Atualmente é técnica administrativa do Instituto Federal do Espírito Santo-IFES, campus Nova Venécia, docente dos cursos de Engenharia Civil e Engenharia de Produção da Multivix Nova Venécia, atuando principalmente nas disciplinas de Probabilidade e Estatística, Álgebra Linear e Geometria Analítica. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente em cursos de formação continuada para professores que lecionam Matemática na Educação Básica.

Rodolfo Chaves. Possui mestrado e doutorado em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro. Leciona no curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino-Aprendizagem, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Ambientes de Aprendizagem, Educação Ambiental, Formação inicial e continuada de professores, Práticas educativas investigativas e Modelagem Matemática. É orientador no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Ifes (EDUCIMAT). É coordenador institucional do Programa LIFE/CAPES desde 2012. É líder do grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura e Aplicada e Educação Matemática do Ifes – GEPEMEM.

Aos professores
e colegas do programa Educimat,
aos amigos e a família.

"Aprender não deve apenas levar-nos até algum lugar,
mas também permitir-nos, posteriormente,
ir além de maneira mais fácil".

Jerome Seymour Bruner

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Propomos esse guia didático para ser utilizado em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, com o intuito de refletirmos sobre como o ensino dos números reais tem sido abordado na Educação Básica e na formação do professor de Matemática, e de como podemos desenvolvê-lo por meio de sua construção.

Como fruto de uma pesquisa de Mestrado pensamos na importância de refletirmos sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números reais. Para tal, optamos por trabalhar com a construção dos números reais descrevendo o problema da medida que ocasionou na constituição do campo racional, a descoberta de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão para o campo irracional, e os cortes de Richard Dedekind que buscou uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais.

Destacamos também a importância de se utilizar esses procedimentos na formação de professores de Matemática, visando uma melhor compreensão dos porquês de possíveis definições de números racionais, irracionais e reais, que podem ser construídas no processo de estudo desse guia.

Desejamos a você leitor (a) que este guia possa proporcioná-lo (a) bons momentos de estudo e de construção de conhecimentos.

Mariana dos Santos Cezar

Rodolfo Chaves

INTRODUÇÃO

A área da Educação e da Educação Matemática atualmente tem realizado pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem na formação do professor de Matemática. Muito tem se discutido sobre a adaptação da teoria concebida na formação inicial à prática docente dos professores de Matemática, em especial, na Educação Básica.

Como professores de Matemática, tivemos a oportunidade de lecionar em redes (municipais, estaduais e federal) de ensino e também atuarmos como tutores em cursos de formação continuada para professores de Matemática. Durante toda a jornada de ensino, tanto no Fundamental quanto no Médio, bem como nas formações, nos deparamos com incoerências e circularidades em relação ao ensino de números reais. Advindas de alunos e professores de Matemática, muitas dúvidas têm emergido quanto à definição dos números, segundo a classificação dos conjuntos numéricos aos quais pertencem. Comprovamos tal problemática em nossa sala de aula, pela dificuldade que encontramos de adaptar as definições que estudamos ao longo de nossa formação inicial para nossos alunos, em especial, da Educação Básica. Essa perspectiva motivou e contribuiu para a constituição desse material.

Diante disso, propomos desenvolver de forma dialógica, com você leitor, a construção dos números reais, tendo como base as obras: Caraça (1989) e Ávila (2006). Buscamos construir os campos dos números racionais, irracionais e reais, com o intuito de compreendermos como suas definições foram constituídas. Tomamos como ponto de partida um breve relato histórico baseado nas de obras de Boyer (2003), Bentley (2009) e Roque (2012), para entendermos como se deu esta construção ao longo do tempo.

Nesse viés, apresentamos a estrutura desse guia didático.

No *Capítulo 1- A Construção dos Números Reais: breve abordagem histórica*, destacamos alguns fatos históricos que permitem entendermos como se deu a construção dos números, por meio de situações problema cotidianas.

No *Capítulo 2: Construção do Campo Racional*, descrevemos a construção do campo racional via medição de segmentos e apresentamos algumas reflexões acerca desse processo.

No *Capítulo 3: Construção do Campo Irracional*, descrevemos essa construção por meio da descoberta de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão para o campo irracional.

No *Capítulo 4: Construção do Campo Real*, descrevemos essa construção por meio dos cortes de Dedekind que buscou uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais.

Durante o estudo dos capítulos convidamos você leitor a participar das reflexões propostas ao longo da construção dos campos numéricos. Esse momento é direcionado a reflexões e discussões em relação ao processo de ensino e de aprendizagem adotado neste guia.

CAPÍTULO 1

A Construção dos Números Reais: breve abordagem histórica

Os números fazem parte de nossa vida. Vivemos cercados por eles seja em uma simples contagem de elementos, seja nas programações computacionais, na música, nas propriedades da luz, no movimento dos planetas, no corpo humano, na simples compra do mercado, enfim, os números constituem boa parte do que usamos e vivenciamos, permeando o universo. Como destaca Bentley (2012, p. X) "os números não eliminam nossa capacidade de nos maravilhar com o mundo, eles a aumenta".

A civilização humana, com suas necessidades habituais, precisou desenvolver procedimentos de contagem para resolver problemas cotidianos, antes mesmo da constituição dos números e dos sistemas numéricos. Um método de contagem utilizado foi o de estabelecer uma correspondência entre ovelhas e pedras, onde cada ovelha correspondia a uma pedra que era guardada em saco, quem nunca ouviu falar dessa história? Roque (2012) relata outra forma de contagem: a utilização de *tokens* – "objetos de argila que representavam diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros etc." (ROQUE, 2012, p. 41). Os *tokens* eram usados nas atividades de economia pois mantinham o controle sobre produtos agrícolas e bens manufaturados. Colocados em potes de argila, parecidos com bolas, representavam quantidades que eram simbolizadas por riscos na superfície dos potes. Cinco *tokens* dentro dos potes correspondiam a cinco riscos na superfície e representavam cinco elementos como: jarras de óleo, quantidades de grãos, dentre outros; a forma dos *tokens* estava associada ao tipo de elemento; a esfera, por exemplo, representava grãos. Com o tempo o homem percebeu que poderia aprimorar sua maneira de contar, assim começou a associar ovelhas, quantidade de grãos, jarras de óleo a riscos em galhos de árvores, ossos de animais, tabletes de argila, ou ainda, por meio de nós em cordões de cipó. “Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado” (ROQUE, 2012, p. 43).

Uma história interessante contada por Bentley (2012) evidencia a importância da contagem e da utilização de instrumentos que possibilitaram essa representação. Ele conta que há muito tempo atrás os chefes das tribos ao enviarem seus guerreiros para batalhas em tribos vizinhas precisavam saber se todos haviam voltado, pois, para cada guerreiro morto, a tribo vizinha tinha que pagar um búfalo como recompensa. Assim, o chefe da tribo precisava registrar o número de guerreiros que haviam saído para a batalha para que pudesse verificar, ao retornarem, quantos havia perdido, para poder buscar sua recompensa. O truque utilizado era: cada guerreiro que saía deveria depositar uma pedra num monte e, ao retornar, cada guerreiro deveria retirar uma pedra do monte. Dessa forma o chefe saberia quantos búfalos iria receber da tribo vizinha. Ao buscar sua recompensa trocava as pedras que sobravam por varinhas, pois seria mais fácil de carregar. Dessa maneira, era possível contar sem mesmo utilizar sistemas numéricos. Se pensarmos nesse contexto, até hoje utilizamos formas de contagem primitiva, por exemplo: em uma turma de alunos que estão realizando uma votação para a escolha do líder da turma, observamos representações de contagem através de traços que são agrupados de cinco em cinco.

De forma semelhante o homem aprendeu a medir sem utilizar instrumentos precisos de medição (como os que possuímos hoje) e sem uma unidade de medida estabelecida. Eles mediam terras utilizando pedaços de cipó, que convencionavam como elementos de medição. Como exemplo, Bentley (2009) retrata que as enchentes, causadas pelas cheias do rio Nilo, que retiravam os limites das fazendas e lotes, faziam com que os egípcios realizassem cuidadosas medições de terra, utilizando instrumentos como pedaços de cipó, e isso proporcionou um desenvolvimento dos processos de medição e contribuiu para o aprimoramento da Geometria. Outro fator importante, destacado por Bentley (2009), foi a descoberta dos números irracionais, pois com o reconhecimento desses números foi possível descrever formas como triângulos, quadrados e círculos, além disso, o número passou a ser usado para representar linhas e formas feitas por linhas. Como explica Roque (2012, p. 101) isso é possível porque "a medida é um procedimento que permite reduzir grandezas a números. Dado um segmento podemos medir seu comprimento".

Sobre o processo de medir Caraça (1989, p. 29) relata que "*medir* e *contar* são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência". Em nosso cotidiano, nas mais variadas circunstâncias, existe a necessidade de medir. A costureira, o engenheiro, o agricultor, e em outras diversas profissões trabalha-se a ideia de medir e contar. Como destaca Caraça (1989) medir é comparar duas grandezas da mesma espécie. Foi assim, através de medições realizadas por vários séculos, que o homem constituiu os números racionais: por meio de comparação de segmentos de reta, cuja ideia é verificar quantas vezes um determinado segmento cabe em outro. Dessa forma, o homem evidenciou através da subdivisão da unidade de medida um número da forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números inteiros, com $n \neq 0$. Esse número, da forma $\frac{m}{n}$, ocasionou na extensão dos campos numéricos, constituindo assim o campo racional.

CAPÍTULO 2

Construção do Campo Racional

Suponhamos que uma pessoa que construiu conhecimento acerca dos números naturais quer contar uma coleção de objetos; como procede?

Conforme destaca Caraça (1989), esse é o princípio da extensão.

> [...] o homem tem tendência a *generalizar* e *estender* todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA, 1989, p. 10).

Dessa forma, pensando em campos numéricos, como generalizar a forma de escrever um número racional? Isto é, como definir um número racional?

Para respondermos a tais questionamentos vejamos o problema da medida proposto na obra Caraça (1989) que intitulamos como "a solução do problema da medida".

A solução do problema da medida

Caraça (1989) questiona: ***o que é medir?*** Comparar duas grandezas da mesma espécie. Mas, para medir três aspectos, precisam ser seguidos:

i) escolha da unidade de medida;

ii) comparação com a unidade;

iii) expressão do resultado dessa comparação por um número.

Duas medidas da mesma natureza possuem uma unidade de medida comum. Cada grandeza é identificada, ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. Partindo desse princípio, iniciamos a construção do campo racional via medição de segmentos.

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos de reta (figuras 1 e 2). Ao compararmos os dois segmentos sobrepondo $\overline{CD}$ em $\overline{AB}$ de modo que o ponto C coincida com o ponto A, observamos que o ponto D cai sobre o segmento $\overline{AB}$. Tal resultado mostra que o comprimento de $\overline{AB}$ é maior que o comprimento de $\overline{CD}$ ou que o comprimento de $\overline{CD}$ é menor que o comprimento de $\overline{AB}$.

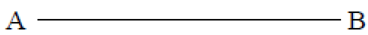

Figura 1: segmento de reta $\overline{AB}$

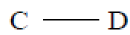

Figura 2: segmento de reta $\overline{CD}$

Mas essa não é a única reflexão. Podemos pensar quantas vezes um comprimento cabe em outro, por exemplo. Para tal, é necessário estabelecer uma unidade de medida padrão e utilizar um número — que é a medida da grandeza em relação a essa unidade — para exprimir o resultado da comparação com a unidade. Por exemplo, na figura 3 o segmento $\overline{CD}$ cabe três vezes no segmento $\overline{AB}$ ou que no segmento $\overline{AB}$ cabe três vezes a unidade $\overline{CD}$ ou ainda, que a medida de $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade, é três. Logo, Caraça (1989) comprova que no problema da medida os três aspectos citados i, ii e iii são necessários.

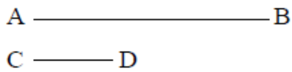

Figura 3: comparação de segmentos de reta

Vale ressaltar ainda que a escolha da unidade de medida está relacionada ao número que se quer obter, uma vez que, devemos pensar qual a unidade mais apropriada. Por exemplo, se queremos mensurar as dimensões de uma mesa, dependendo do tamanho da mesa, é mais apropriado utilizarmos como unidade de medida o metro ou o centímetro, o quilômetro, por exemplo, não seria uma unidade apropriada para tal situação.

Pensando em medidas: (1) ***Construa dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de forma que $\overline{CD}$ caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. Quantas vezes $\overline{CD}$ cabe em $\overline{AB}$ no segmento construído?***

Agora suponha que o conjunto dos números reais seja desconhecido. Dessa forma, responda:

(2) ***Subdivida o segmento $\overline{CD}$ em partes iguais. Tomando cada parte como nova unidade de medida u, quantas vezes u cabe em $\overline{AB}$? Como escrever $\overline{AB}$ em relação à $\overline{CD}$? E $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$?***

E se tomássemos uma medida para o segmento $\overline{AB}$, por exemplo: (3) Tomamos um novo segmento $\overline{AB}$ medindo 11cm, e um novo segmento $\overline{CD}$ medindo 3cm. Divida $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficiente para que uma delas caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. O que se pode dizer da medida de $\overline{AB}$ em relação à antiga unidade $\overline{CD}$?

Como escrever $\overline{CD}$ em relação à $\overline{AB}$ visto que nessa relação obtemos números cujo numerador não é divisível pelo denominador, isto é, números não inteiros. Quanto a isso, Caraça (1989) nos faz refletir sobre o que ele chama de dilema.

Dilema:

i) ou renunciamos o que foi descrito e colocamos como falso;

ii) ou admitimos e temos que reconhecer a insuficiência dos inteiros.

Considerar como falso é renunciar a medição do segmento $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$. Como destaca Caraça (1989) isso levanta novas questões, pois se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade u e não em relação à antiga $\overline{CD}$, então a nova forma de medição tem mais privilégio que a outra? Por quê? E, se desejarmos exprimir sempre a medida por um número – *princípio da extensão* – então temos que reconhecer que o instrumento numérico conhecido até o momento – os números inteiros – é insuficiente para tal logo, temos que completa-lo, mas de que forma?

A esses questionamentos evidenciamos que a dificuldade está quando, em uma subdivisão da unidade em *n* partes iguais, uma dessas partes cabe *m* vezes na grandeza a medir, daí a dificuldade existe no caso da impossibilidade da divisão, isto é, quando *m* não é divisível por *n*.

Assim, para resolvermos a dificuldade precisamos criar um novo campo numérico e é por meio do *princípio da extensão* que fazemos isso. Dessa forma, torna-se possível exprimir a medida do segmento $\overline{CD}$ em relação ao segmento $\overline{AB}$ utilizando frações irredutíveis.

Caraça (1989) ainda destaca o *princípio da economia* que tem como fundamento utilizar novas definições e suas consequências nos moldes de antigas definições, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor desperdício de energia mental.

Caraça (1989, p. 27) afirma que "[...] convém que as novas definições sejam dadas de modo tal que as leis formais das operações lhes sejam ainda aplicáveis". Assim, quando observamos as escritas:

- Para $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{CD}$ = 2 cm, temos: $\overline{AB}$ = 3$\overline{CD}$;

Ou ainda:

- Para $\overline{AB}$ = 4 cm e $\overline{CD}$ = 1 cm, temos: 4 $\overline{CD}$ = $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ = $\frac{1}{4} . \overline{AB}$.

Até mesmo em generalizações do tipo:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \frac{m}{n} . \overline{CD}}, \textbf{ com } \boldsymbol{m} \textbf{ e } \boldsymbol{n} \textbf{ inteiros e } \boldsymbol{n \neq 0}.$$

Evidenciamos que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$. No entanto, Caraça (1989) destaca que temos dois números inteiros que estão entre si na relação aritmética:

(i) ou m é divisível por n, o que teremos definido um quociente inteiro;

(ii) ou a qualidade de m não ser divisível por n nega a existência do quociente inteiro.

Se ocorrer a relação (i) o problema está resolvido no campo dos inteiros. Mas se ocorre a relação (ii) precisaremos *negar a negação*[1] da existência do quociente inteiro, isto é, construir o novo número – o fracionário – que constitui a nova parte do campo generalizado e compõe o novo campo numérico – **os números racionais**.

Não obstante, podemos generalizar a escrita desse número, o que tomamos como a definição dos números racionais:

"Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e $n \neq 0$".

[1] Ver em Caraça (1989, p. 27 - 28). O autor retrata a explicação generalizada dessa relação que denomina como *a negação da negação*. No exemplo em questão, negar a negação é negar a existência de um terceiro número – o quociente - que nada mais é do que o resultado da operação de m por n no caso em que m é múltiplo de n. Caso contrário, precisamos negar a negação da existência desse terceiro número, isto é, ele existe, mas não é inteiro, é o número fracionário.

CAPÍTULO 3

Construção do Campo Irracional

Na Grécia Antiga os pitagóricos acreditavam e defendiam que as razões formadas por números inteiros poderiam expressar a proporcionalidade entre as medidas de quaisquer segmentos, tanto que antes da demanda provocada por Cílon (CHAVES, 2004), no que tange à inexistência de um número que elevado ao quadrado fosse igual a 2 (como contraposição a veracidade do teorema de Pitágoras no que se refere ao cálculo da diagonal do quadrado de lado 1), defendia-se que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado era comensurável.

Em alguns textos, como Boyer (2003), e Chaves (2004, p. 40-41)[2] e Bentley (2009), tal demonstração (a da

---

[2] Chaves (2004) afirma que Apolônio, Aristóxeno, Diógenes de Laércio divergem quanto ao fim de Pitágoras, mas que não há divergência histórica em relação ao episódio que gerou o massacre à academia pitagórica e a seus seguidores. Segundo tal obra, há referências explícitas de que Cílon era o principal articulador das polêmicas levantadas a respeito do discurso de Pitágoras e o principal motivo que o levou a nutrir tamanho ódio pelo geômetra: "*ele fora rejeitado por Pitágoras quando se candidatou à Escola devido a seu comportamento violento e imperioso*". O argumento central de Cílon é pautado exatamente na **inexistência desse tal número que elevado ao quadrado fosse 2**. "*A tática adotada por Cílon — de deturpação de seu discurso — objetivara extirpar não apenas as verdades, as palavras e as ideias pitagóricas, mas sim fazer sucumbir quaisquer vestígios de sua existência em Crotona*" (p.40-41).

incomensurabilidade da razão entre a diagonal e o lado do quadrado) gerou uma crise na Matemática grega, já para Roque (2012) esta demonstração contribuiu para o desenvolvimento dos campos numéricos. Boyer (2003, p. 50) afirma que "os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade Matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros". Isto porque os pitagóricos não aceitavam a nova descoberta, pois iria contrariar suas teorias iniciais, tal como podemos observar na citação a seguir.

> Os pitagóricos descobriram seu erro muito cedo, mas isso foi considerado tão chocante e herético que a verdade foi ocultada. Ironicamente, a verdade veio de um dos grandes de seus feitos – o famoso teorema pitagórico (BENTLEY, 2009, p. 53).

O Teorema de Pitágoras proporcionou que se chegasse a um número cujo quadrado não se sabia a existência e não fazia parte de nenhum campo numérico conhecido até o momento, como expressamos anteriormente. "Portanto, se não há nenhum número natural e nenhum número racional que quando elevado ao quadrado, seja igual a 2, deve existir um outro novo tipo misterioso de número. Um número antinatural. Um número que não podemos escrever" (BENTLEY, 2009, p. 54).

No entanto, toda essa discussão sobre a não aceitabilidade da existência de segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos é questionada por muitos estudiosos da História da Matemática. Roque (2012) destaca que a possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria provocado nenhuma crise na Matemática grega. Pelo contrário, a nova descoberta teria ajudado no desenvolvimento de procedimentos matemáticos para o uso com razões e proporções. No século IV a. C., por exemplo, Eudoxo de Cnidos (408 a.C. - 355 a.C.), com sua *Teoria das Proporções*[3], redefiniu um conceito mais geral de razão entre dois segmentos comensuráveis ou não, utilizando apenas os números inteiros positivos. No entanto, como descreve Ávila (2006, p. 54) "[...] embora tenha sido uma solução genial da crise dos incomensuráveis, ela atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra [...]".

Já no século XVI, Viéte (1540 - 1603) considerou a noção de número e grandezas geométricas distintas. Para os geômetras gregos, a noção de número irracional não era clara embora, em problemas práticos, utilizassem aproximações racionais dos

[3] Ver em Ávila (2006, p. 53 - 55). O autor descreve essa teoria construída por Eudoxo.

valores irracionais, como para o número π e para o número ϕ (número de ouro)[4].

> [...] Pela conjectura de Mendelssohn, os desesperados construtores, tendo acabado de assistirão desmoronamento da segunda pirâmide, mudaram o ângulo para evitar que a mesma coisa acontecesse a terceira. Acontece que, numa pirâmide de 43,5 graus, a razão entre o perímetro e a altura é de 3 π, aliviando a carga (o peso que a estrutura suporta) e mais uma vez indicando a possível preocupação com o número π [...].
>
> Pelas medidas originais, a razão entre qualquer dos lados da base e altura é 1,57, valor bem próximo da razão áurea (1,62). E, se inscrevermos a pirâmide de Quéops num retângulo áureo, a ponta da pirâmide se estenderá só um pouquinho para fora. O mais importante: caso nos atenhamos apenas a uma das faces da pirâmide, veremos que a razão entre a altura desse triângulo e a metade da largura da base é exatamente 1,62 [...] (ATALAY, 2009, p. 96-97).

Além disso, Ávila (2006) destaca que os matemáticos gregos trabalhavam naturalmente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo suas propriedades, sem constituírem uma formulação teórica que as justificasse. Como menciona Cezar (2011) muitos acreditam que a descoberta da existência dos números irracionais se da à descoberta do número π há quase 4000 anos, visto que se formarmos a razão entre

[4] Tal como se pode observar em Atalay (2009) quando menciona a preocupação de construtores de pirâmides em tomar como perímetro da base quadrada, o comprimento da circunferência e cuja altura da mesma seja igual ao raio.

comprimento e diâmetro de um círculo não é possível provar sua racionalidade. Outros até mencionam que a descoberta da incomensurabilidade está atribuída à aplicação do Teorema de Pitágoras, mas não têm certeza dessa afirmação, pois de acordo com os relatos de Roque (2012), por exemplo, os chineses já conheciam o teorema e nem por isso descobriram a irracionalidade da diagonal. Ainda que não se tenha certeza que foram os pitagóricos que chegaram aos incomensuráveis e que tenha existido uma crise na Matemática grega, o fato é que o problema existiu e se prolongou por séculos até que se fundamentassem teoricamente a existência dos números irracionais e dos números reais.

Campo Irracional

Após relatos históricos sobre os números irracionais, responda:
(1) Como você define um número irracional?

Como visto anteriormente a medida de um segmento de reta pode ser representado por subdivisões de outro segmento e determinar assim um número inteiro ou um número fracionário. Mas, sempre existe uma subdivisão de $\overline{CD}$ que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$?

Para responder a tal questão vejamos a crítica do problema da medida descrita por Caraça (1989). Optamos por adotar a nomenclatura crítica da solução do problema da medida.

Crítica da solução do problema da medida

Inicialmente suponha como desconhecido o conjunto dos números irracionais. Com isso, responda a seguinte questão: ***(2) Construa um quadrado com lado medindo 1 unidade. Trace uma de suas diagonais. Considere um dos triângulos e determine a medida de sua hipotenusa.***

a) O que podemos dizer sobre essa medida? Por quê?

b) O que podemos dizer sobre o lado do quadrado e sua diagonal? Por quê?

Vamos refletir a questão anterior por meio da análise o que Caraça (1989) denomina como um caso embaraçoso. Para tal, construímos, um triângulo retângulo isósceles ABC, com AB = AC.

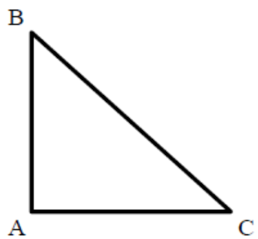

Figura 4: Triângulo retângulo isósceles ABC

Com este triângulo procuramos resolver o problema de achar a medida da hipotenusa BC. Para tal, tomamos como unidade o cateto AB e refletimos: se essa medida existe, então temos um número r = $\frac{m}{n}$ racional irredutível, de modo que:

$$\text{(I)} \quad BC = \left(\frac{m}{n}\right) . AB$$

Como princípio da Geometria, usamos o Teorema de Pitágoras para determinarmos a medida da hipotenusa BC, o qual exprime geometricamente que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como mostra a figura 19.

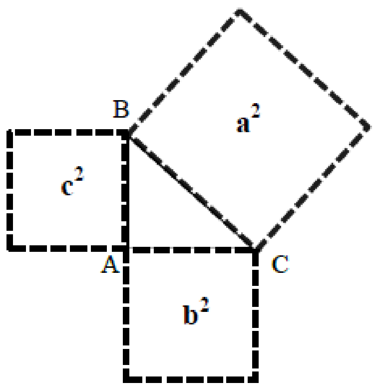

Figura 5: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras

Assim, seja BC = a (hipotenusa), AB = c (cateto) e AC = b (cateto), logo:

$$\text{(II)} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(III)\ BC^{2} = AB^2 + AC^2$$

Como, por hipótese: (IV) AB = BC, substituímos (IV) em (III). Assim, obtemos:

$$BC^{2} = AB^2 + AB^2$$

$$(V)\ \ BC^{2} = 2\ AB^2$$

Por outro lado, elevando ambos os membros de (I) ao quadrado, obtemos:

$$(VI)\ \ (BC)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^{2} . (AB)^2$$

Assim, a existência da medida BC, tomando AB como unidade, e a utilização do Teorema de Pitágoras conduzem a comparação desta igualdade com (V), logo:

$$(VII)\ \ \left(\frac{m}{n}\right)^{2} = 2$$

Caraça (1989) denomina a igualdade (VI) como um *monstro aritmético*. Isso porque, dela concluímos: (VIII) $m^2 = 2\ n^2$. Isto é, que m^2 é um número par, mas se o quadrado de um número é par, esse número também o é, logo m é par. Com isso, devemos ter n ímpar, pois temos suposto que $\frac{m}{n}$ é irredutível.

Seja k um número inteiro cuja metade é m, assim temos: m = 2k. Substituindo em (VIII) temos:

$$(2k)^2 = 2\,n^2$$

$$4k^2 = 2\,n^2$$

$$n^2 = 2k^2$$

Daqui concluímos que n^2 é par, logo n é par. Portanto, n é par e ímpar, o que é um absurdo pela incompatibilidade lógica[5] da Matemática ou como denomina Caraça (1989) isso é uma *monstruosidade aritmética*. Com isso, concluímos que não existe número racional que elevado ao quadrado seja igual a dois. Consequentemente, não conseguimos determinar um número racional $\frac{m}{n}$ que exprima a medida de BC em relação a AB. Logo, encontramos segmentos que não são comensuráveis. Aqui entendemos a descoberta de segmentos incomensuráveis, tanto citada por Bentley (2009) e Boyer (2003) como a descoberta que "assombrou" os pitagóricos.

Para compreendermos melhor esses segmentos definimos:

[5] "Toda teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos – os seres de que trata a teoria - e de afirmações feitas sobre esse conceito. Em estado nenhum da construção se pode tolerar desacordo" (Caraça, 1989, p. 52).

Segmentos comensuráveis: "É possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade" (ÁVILA, 2006, p. 47).

Segmentos incomensuráveis: Não existe uma mesma unidade de medida capaz de medi-los ao mesmo tempo.

Diante da nova descoberta, Caraça (1989) destaca que a *monstruosidade aritmética* nos coloca em uma encruzilhada, onde existem apenas os seguintes caminhos de saída:

Encruzilhada

1) Abandonar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento;

2) Abandonar o Teorema de Pitágoras;

3) Conservar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento e o teorema, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica;

4) Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser, simultaneamente, par e ímpar.

O caminho 1 vai contra o *princípio da extensão,* pois a tendência, da Matemática é estender, generalizar, completar e isso só é abandonado quando existe um "vício" de raciocínio, que não é o caso, logo não pode ser seguido. O caminho 2 é absurdo, uma vez que o Teorema de Pitágoras é uma verdade geométrica. O caminho 4, se seguido, “abalaria” as bases da Aritmética, pois a paridade de um número se reconhece pelo fato dele ser ou não divisível por 2, logo aceitar que um número possa ser par e ímpar, simultaneamente, é impossível. Portanto, só nos resta o caminho 3. Sobre este, Caraça (1989) explica:

> Toda teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos – os seres de que trata a teoria – e de afirmações feitas sobre esses conceitos. Em estado nenhum da construção se pode tolerar desacordo. – Ela é dominada por, entre outros, um *princípio geral de compatibilidade lógica* dos seres e das afirmações, princípio esse que é, na Matemática, a expressão de um outro mais geral que domina toda a construção científica – o princípio do acordo da razão consigo própria (CARAÇA, 1989, p. 52).

Dessa forma, não é possível tomarmos o caminho 3, isso seria discordar dos próprios conceitos matemáticos. Contudo, sendo todos os caminhos rejeitados por contradição ou desacordo, resta-nos conservar tudo: o princípio da extensão, o Teorema de Pitágoras e a compatibilidade lógica. Para tal, precisamos negar a negação; a de que dois segmentos são sempre comensuráveis e admitir a existência de segmentos incomensuráveis, com isso, novos números são descobertos e um novo campo numérico é constituído. **Assim, o que podemos dizer sobre o “novo” número? O que podemos dizer em relação à representação algébrica desse número?**

3.1 – Reflexões

i) Se o número racional é todo número que pode ser escrito na forma de fração, por que quando determinamos o número π da forma $\frac{C}{D}$ onde C é o comprimento do círculo e D é o diâmetro do círculo, dizemos que este número é irracional se está escrito na forma de fração?

ii) É possível determinarmos uma generalização algébrica para o número irracional?

CAPÍTULO 4

Construção do Campo Real

Foi nos meados do século XIX que os matemáticos começaram a sentir necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. Um desses foi o matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916), que ao ensinar Cálculo Diferencial, percebeu ser necessário um tratamento rigoroso para os números reais. Assim, em 1872 publicou uma obra intitulada "*Continuidade e números irracionais*", onde buscou inspiração para sua construção dos números reais na antiga e hábil teoria das proporções de Eudoxo, por notar que o procedimento do grego levava a uma separação dos números racionais em dois conjuntos.

Outros matemáticos como Georg Cantor (1845 – 1918) e Giuseppe Peano (1858 – 1932) também desenvolveram trabalhos fundamentando matematicamente o conceito de número real.

Então responda: **(1)** ***O que é número real?***

Para iniciarmos a construção dos números reais consideramos que alguns conceitos são importantes para compreender esse processo. São eles:

I) Inicialmente admitimos a existência do campo numérico racional (Q) e do conjunto dos pontos da reta (P), uma vez que vamos ver de que maneira podemos estabelecer uma correspondência entre eles. Além disso, vamos considerar como desconhecido o campo irracional;

II) Em seguida, compreender as propriedades características do conjunto (P): *infinidade, ordenação, densidade* e *continuidade*. Definiremos cada uma verificando se no conjunto (Q) existe uma relação de correspondência.

- ***Infinidade***: O conjunto (P) é infinito o conjunto (Q) também é, pois já abrangem o conjunto dos números naturais, que é infinito.

- ***Ordenação***: Dados os pontos A, B e P do conjunto (P), dispostos na reta nessa ordem, temos, por transitividade, que se A precede B e B precede P, o ponto A precede P. Dessa forma, o conjunto (P) é ordenado, pois todo conjunto com critério de ordenação transitivo é ordenado. Em relação ao conjunto (Q), dados dois números racionais r e s, de modo que r precede s, ou seja, $r < s$, podemos admitir de acordo com Caraça (1989, p. 16) que se $r < s$ e $s < t$, então $r < t$. Logo, o conjunto (Q) é ordenado.

- ***Densidade***: todo conjunto que, entre dois de qualquer dos seus elementos exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso. Logo, o conjunto (P) é denso.

  O mesmo é observado no conjunto (Q), uma vez que, dados r e s números racionais quaisquer, de modo que $r < s$ e seja $d = s - r$, se somarmos a r um número $d' < d$, obtemos um número r' maior que r e menor que s. Portanto, a existência de números racionais r' entre r e s depende apenas da existência de números racionais d' menores que d, assim os r' serão tantos quantos forem os d', como destaca Caraça (1989, p. 40, 56 e 57). Logo, o conjunto (Q) é denso.

- ***Continuidade***: Segundo Caraça (1989) a imagem ideal da continuidade, para nós, é a linha reta. Portanto, se quisermos perceber a continuidade, em face de um conjunto qualquer, basta verificar se ele tem a mesma estrutura da reta.

Provavelmente o leitor esteja se perguntando: ***E o conjunto (Q) é contínuo?,*** assim como os sujeitos da pesquisa questionaram. Respondemos da seguinte forma: no final dessa construção falaremos sobre.

Após discutirmos sobre essas características, descrevemos a construção dos números reais por meio dos cortes de Dedekind. Mas, antes de iniciarmos, precisamos entender o que são os cortes.

O conceito de corte

Segundo Caraça (1989), Richard Dedekind atribuiu à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, contínua. Assim, ao tomarmos um ponto P sobre ela, observamos que em relação a P, todos os pontos da reta de repartem em duas classes: a classe (A), dos pontos que estão à esquerda de P e a classe (B), dos pontos que estão à direita de P (figura 20).

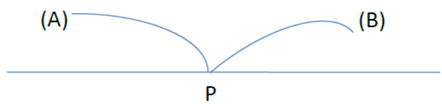

Figura 6: Representação dos Cortes de Dedekind

Sempre que, em uma reta, temos uma repartição dos seus pontos em duas classes, são satisfeitas duas condições:

1ª) nenhum ponto escapa à repartição;

2ª) todo ponto da classe (A) está à esquerda de todo ponto da classe (B) e todo ponto da classe (B) está à direita de todo ponto da classe (A) – diz-se que se tem um corte, do qual (A) e (B) são as classes formadas.

Assim, questionamos: ***haverá sempre um ponto P que produza o corte, isto é, que separe as duas classes?***

Dedekind caracteriza a continuidade da reta por meio dessa afirmação, que é designada como axioma ou postulado da continuidade de Dedekind: "todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)" (DEDEKIND, apud CARAÇA, 1989, p. 60).

(2) ***Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um corte na reta e atribua uma propriedade as classes determinadas pelo corte, de modo que o ponto no corte pertença a uma das classes. Explique seu raciocínio.***

Daqui em diante façamos uma discussão acerca da aplicação desse conceito ao conjunto (R). Para tal, perguntamos: ***"Será possível definir, no conjunto (R), o conceito de corte?"*** (CARAÇA, 1989, p. 61).
De acordo com que Caraça (1989, p. 61) propõe: "É; basta que a – estar à *esquerda de* – em pontos, se faça corresponder – *ser menor que* - em números". Em outras palavras:

> Assim, tem-se um corte no conjunto (R) quando existirem duas classes (A) e (B) de números racionais tais que: 1.º todo o número racional está classificado, ou em (A) ou em (B); 2.º todo número de (A) é menor que todo o número de (B) (CARAÇA, 1989, p. 61).

Retornamos na questão que nos trouxe até aqui: ***“Do ponto de vista da continuidade, os conjuntos (R) e (P) têm a mesma estrutura, como a têm do ponto de vista da infinidade, ordenação e densidade? ou não?”*** (CARAÇA, 1989, p. 61).

Para refletirmos sobre tal questionamento, façamos a questão 3.

(3) Seja (P) o conjunto de pontos da reta. Efetue um novo corte na reta (digamos no ponto E), de modo que a classe (A) dos pontos que estão à esquerda de E sejam todos os números racionais s que elevados ao quadrado são menores que 2 ($s^2 < 2$), e a classe (B) dos pontos que estão à direita de E sejam todos os números racionais r que elevados ao quadrado são maiores que 2 ($r^2 > 2$).

a) O ponto E pertence a algumas das classes? Por quê?

b) O que podemos concluir com esse exemplo?

Façamos algumas reflexões:

Efetuamos uma repartição dos números racionais em duas classes (A) e (B), cujo ponto de repartição seja E. Pelo o que foi descrito, o ponto E pertence à classe (A) ou à classe (B).

Para verificarmos esta afirmação, Dedekind utiliza a seguinte ideia:

1ª) Em (A) colocamos todo número racional *s* cujo quadrado seja menor que 2.

2ª) Em (B) colocamos todo número racional *r* cujo quadrado seja maior que 2.

Constitui esta repartição um corte? Efetivamente sim, pois a 1ª e a 2ª condição são satisfeitas. Mas isso não é suficiente, pois Dedekind observa que estaria faltando algum número; aquele cujo quadrado seja igual a 2, que não pertence a nenhuma das classes, ou seja, não existe no campo racional. Isso nos leva a concluir que há cortes que não possuem elemento de separação. E mais, segundo Caraça (1989) o conjunto (R) não satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind, ou seja, o conjunto (R) não é contínuo. Portanto, a descontinuidade não é do conjunto (Q), mas sim do conjunto (R).

Dessa forma, encontramos a razão da não-biunivocidade da correspondência (R) $\leftrightarrow$ (P). Com isso, devemos negar a negação. Nesse caso, a negação é admitir a não existência geral de um elemento de separação de duas classes. Como destaca Caraça (1989, p. 62), "[...] São esses mesmos que nos vão criar os novos elementos de separação". Para isso, Dedekind (*apud*, Caraça, 1989, p. 62) define:

> [...] chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional separando as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.

Com isso, a natureza do problema encontrado indica a necessidade da introdução de novos números – os irracionais. E mais, a constituição desse número não é tão elementar que a dos racionais, que bastam dois números inteiros – numerador e denominador – para defini-lo. Já, segundo Caraça (1989), para definirmos um número real são necessárias duas infinidades de números racionais – as duas classes (A) e (B) do corte – as quais, cada uma delas possui uma infinidade de números.

Para entendermos melhor, vejamos o exemplo:

Na definição do número racional $\frac{2}{3}$ temos apenas dois números 2 e 3, combinamos pela operação de divisão. Já o número real irracional $\sqrt{2}$ é definido como o número que separa a classe dos racionais *s* cujo quadrado seja menor que 2 da classe dos números racionais *r* cujo quadrado seja maior que 2, isto é, $\sqrt{2}$ é definido como o número que é maior que toda a infinidade dos *s* e menor que toda a infinidade dos *r*.

Diante do exposto, responda: **"*Número Real é todo número racional ou irracional. Por quê?*".**

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Querido (a) leitor (a)

É possível que o processo de construção do campo racional proporcione compreender que, o que consideramos como definição de números racionais: *"Todo número racional pode ser escrito na forma* $\frac{m}{n}$*, com m e n inteiros e* $n \neq 0$*"*, é uma generalização algébrica que permite representar qualquer número pertencente a este conjunto. Em contrapartida, a construção do campo irracional proporcione compreender que, não existe uma generalização algébrica que permita expressar o formato de um número irracional. Com isso entender que para os números irracionais não existe uma única definição.

É possível que o processo de construção do campo real proporcione entendermos o porquê da clássica afirmação "*União dos racionais com os irracionais*". Tal afirmação é constituída nos processos de ensino e de aprendizagem, em especial na Educação Básica, como investigado e constatado por Cezar (2011 e 2014). No entanto, buscamos compreender a partir dos cortes de Dedekind ─ descrito na obra de Caraça (1989) ─ a ideia de união desses conjuntos e, necessariamente que, o corte na reta real que não constituiu um número racional é um número irracional. Tal façanha pode possibilitar à construção de conhecimento acerca da definição de números reais.

Como autores e professores podemos dizer que após estudarmos a construção dos números na obra de Caraça (1989) nos sentimos mais seguros para ensinar.

REFERÊNCIAS

ATALAY, Bulent. **A Matemática e a Mona Lisa**: a confluência da arte com a ciência. 2 ed rev. e ampl. Tradução: Mário Vilela. São Paulo: Publicações Mercuryo Novo Tempo, 2009.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para licenciatura**. 3 ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números:** uma história ilustrada da Matemática. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2º edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Concepções acerca do conceito de Números Reais:** uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica. Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produções de Significados Matemáticos na Construção dos Números Reais**. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

CHAVES, Rodolfo. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação**

matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2001.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro. Universidade Estadual Paulista, 2004.

COSTA, Letícia Vieira Oliveira. **Números Reais no Ensino Fundamental:** alguns obstáculos epistemológicos. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação. São Paulo, 2009.

CRUZ, Willian José. **"Os números reais**": um convite ao professor de matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.

FERREIRA, Jamil. **A Construção dos Números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2011 (Coleção textos universitários).

LINS, Romulo Campos. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus. (Org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11 - 30.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2004.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos:** uma proposta, uma investigação. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental:** análise de uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, 2011.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico:** uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Educação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAD, Ligia Arantes. **Cálculo Diferencial e Integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese de Doutorado (em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, UNESP. Rio Claro, 1999.

SILVA, Amarildo Melchiades. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.

EDUCIMAT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – CAMPUS VITÓRIA

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-8263-036-5
9 788582 630365