

Série Guias Didáticos de Matemática

35

**Complex:
aprendizagem de números complexos
aplicada à eletricidade**

**Nilson Alves da Silva
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza**

**Editora Ifes
2016**



Instituto Federal do Espírito Santo
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

Nilson Alves da Silva
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Complex
Aprendizagem de Números Complexos aplicada à Eletricidade

Série Guias Didáticos de Matemática Nº 35

**Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e
Educação Estatística**



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Vitória, Espírito Santo
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

S586e Silva, Nilson Alves da.

Complex : aprendizagem de números complexos aplicada à eletricidade / Nilson Alves da Silva, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2016.

48 p. : il. ; 21 cm. - (Série guias didáticos de matemática ; 35)

ISBN: 978-85-8263-139-3

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números complexos. 3. Eletricidade – Estudo e ensino. 4. Didática. 5. Circuitos elétricos. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 510.7

Copyright @ 2015 by Instituto Federal do Espírito Santo
Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907. O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Observação:
Material Didático Público para livre reprodução.
Material bibliográfico eletrônico e impresso.

Realização



Apoio



Editora do IFES

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia
Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564
E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara
Prédio Administrativo, 3º andar. Sala do Programa Educimat
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

Comissão Científica

Dr. Luciano Lessa Lorenzoni - IFES
Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende - IFES
Dr. Marcelo Wagner Pommer - UNIFESP
Dra. Danielli Veiga Carneiro Sondermann

Coordenação Editorial

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Sidnei Quezada Meireles Leite

Revisão

Roberto Carlos Farias de Oliveira

Capa e Editoração Eletrônica

Katy Kenyo Ribeiro

Editoração Eletrônica

Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor/IFES)

Produção e Divulgação

Programa Educimat, IFES



Instituto Federal do Espírito Santo

Denio Rebello Arantes

Reitor

Araceli Verónica Flores Nardy Ribeiro

Pró-Reitora de Ensino

Márcio Có

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Renato Tannure Almeida

Pró-Reitor de Extensão e Produção

José Lezir

Pró-Reitor de Administração e Orçamento

Ademar Manoel Stange

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional

Diretoria do *Campus* Vitória do IFES

Ricardo Paiva

Diretor Geral do Campus Vitória – IFES

Hudson Luiz Cogo

Diretor de Ensino

Marcia Regina Pereira Lima

Diretora de Pesquisa e Pós-Graduação

Sergio Zavaris

Diretor de Extensão

Sergio Kill

Diretor de Administração

MINICURRÍCULO DOS AUTORES

Nilson Alves da Silva. Possui bacharelado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Espírito Santo (1989), Pós graduação em EPT - Educação profissional e Tecnológica pelo Instituto Federal do Espírito Santo - CEFOR (2013) e mestrado em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (2016). É professor do Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Cachoeiro de Itapemirim. E-mail: nilsonalvesdasilva@gmail.com

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza. Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo-UFES, é mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo-UFES, doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e pós-doutora em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa. Atualmente, é professora, pesquisadora e coordenadora geral de pesquisa e extensão do Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância e Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: resolução de problemas, modelagem matemática, educação estatística, produção de significados, linguagem matemática, habilidade matemática, aplicações estatísticas e matemáticas na área das Ciências, Matemática e Engenharias. Atua principalmente na área de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Probabilidade e Estatística nas Engenharias e Ciência da Computação, além de pós-graduações nessas áreas.

A minha família, que teve paciência e me apoiou.

A minha orientadora, incansável, que contribuiu para que pudesse concluir este trabalho e me tornar mestre.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Matéria prima (matriz 21x21) utilizada no <i>Complex</i>	14
Figura 2 - Montagem do transferidor sobre a matriz	15
Figura 3 - Cursores real (horizontal) e imaginário (vertical) – ambos verdes - e cursor resultante - preto.....	15
Figura 4 - Instrumento Didático - <i>Complex</i>	16
Figura 5 - Circuito RL	18
Figura 6 - Circuito RC	19
Figura 7 - Circuito RLC	20
Figura 8- Triângulo de Potência Complexa.....	21
Figura 9 - Representação das coordenadas e grandezas do <i>Complex</i>	22
Figura 10 - Representação do deslocamento no eixo - x (real) para direita ou esquerda.....	23
Figura 11 - Representação do deslocamento no eixo - y (imaginário) para cima ou baixo.....	24
Figura 12 - Representação do Cursor Resultante.....	25
Figura 13 - Representação número real positivo	26
Figura 14 - Representação número imaginário positivo	27
Figura 15 - Representação do módulo e ângulo do vetor resultante.....	28
Figura 16 - Disjuntor termomagnético.....	30
Figura 17 - <i>Complex</i> aplicado ao Problema (P01 – item a).....	31
Figura 18 - <i>Complex</i> aplicado ao Problema (P01 – item b)	32
Figura 19 - Representação no eixo horizontal (real) - 4Ω	34
Figura 20 - Representação no eixo vertical (imaginário) - $7j\Omega$	34
Figura 21 - Representação do vetor resultante ($4\Omega + 7j\Omega$).....	35
Figura 22 - Representação do ângulo do vetor resultante ($4\Omega + 7j\Omega$)	35
Figura 23 - Geração de tensão trifásica.....	37
Figura 24 - <i>Complex</i> aplicado ao Problema (P02 – itens de a a f).....	39

Figura 25 - ângulos do vetores com auxílio do transferidor	41
Figura 26 - Chuveiros elétricos.....	43
Figura 27- Componente elétrico	44
Figura 28 - Circuito RL em série.....	45
Figura 29 - Circuito RL em série.....	46
Figura 30 - <i>Complex</i> aplicado ao Problema (P03 – itens a e b).....	46

Sumário

APRESENTAÇÃO	10
1. Falando dos Números Complexos... ..	11
2. O que é o <i>Complex</i> ?	13
- Construção do <i>Complex</i>	14
3. Como utilizar o <i>Complex</i> , aplicado à aprendizagem de eletricidade(em CA)?	17
- Circuito RL em série	17
- Circuito RC em série	18
- Circuito RLC em série.....	19
- Potência Complexa:.....	20
- Utilizando o <i>Complex</i> :.....	22
4. E agora? Vamos praticar!!!.....	29
- Resolvendo o problema	30
- Fazendo no <i>Complex</i>	33
5. Que tal mais um exemplo?	37
- Resolvendo o problema	38
- Fazendo no <i>Complex</i>	40
6. Apêndices	43
7. Referências	48

APRESENTAÇÃO

Ao longo da experiência do primeiro autor de 26 anos de ensino em cursos técnicos profissionalizantes e na Engenharia Elétrica, na disciplina de circuitos elétricos em corrente alternada, observei as limitações dos alunos na compreensão do conteúdo, pelo fato de que esse conteúdo depende diretamente do domínio e compreensão de números complexos. Geralmente, como alternativa, recorria diretamente ao uso da calculadora científica que transformam as coordenadas retangulares dos números complexos em valores descritos na forma de um vetor com um ângulo, ou seja, a forma polar e vice-versa. O *Complex*, como produto educacional de uma investigação científica, foi elaborado para promover a compreensão e o domínio das operações com números complexos visando uma apropriação do conteúdo de circuitos elétricos em corrente alternada. Nesse guia apresento como utilizar o *Complex* por meio da resolução de alguns problemas tendo como suporte teórico as Situações Didáticas de Brousseau e, suporte metodológico a Engenharia Didática de M. Artigue. Em outras palavras, pretende-se que esse instrumento didático favoreça a produção de significados sobre números complexos pelos alunos. Assim, o guia didático objetiva, principalmente, auxiliar professores de matemática e de eletricidade com informações úteis sobre como utilizar o *Complex* aplicado às práticas pedagógicas, de modo a possibilitar a compreensão do significado do uso dos Números Complexos na aprendizagem de eletricidade.

Vitória, Espírito Santo, 05 de outubro de 2016.

Nilson Alves da Silva

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

1. Falando dos Números Complexos...

Em uma observação sobre o estudo dos Números Complexos relatado por professores que ministram esse conteúdo escolar, nota-se que predominam duas abordagens: uma de forma algébrica e outra geométrica. Ocorre uma predominância do foco geométrico. Porém, a abordagem mais utilizada pelos livros que tratam do ensino de análise de circuitos com corrente alternada é a algébrica. Acredita-se que as duas devam ser contempladas, uma vez que ambas são úteis para a compreensão dos conceitos de circuitos elétricos de corrente alternada, e, por esse motivo, serão valorizadas.

As operações com os Números Complexos são fundamentais para a compreensão e posterior condição de análise do comportamento dos componentes como capacitores, indutores, resistores e suas associações encontradas nos inúmeros circuitos elétricos.

$$\begin{array}{l} \text{Im}(Z) = b \\ \text{Parte Imaginária} \\ \text{Forma algébrica} \\ z = a + bi \\ \text{Parte Real} \\ \text{Re}(z) = a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 = -9 \\ x = \pm \sqrt{-9} \\ x = \pm \sqrt{9} \times \sqrt{-1} \\ x = \pm 3i \end{array}$$

A aprendizagem de operações matemáticas, no domínio imaginário, para compreensão dos componentes será necessária para elaboração de soluções técnicas para muitos equipamentos e máquinas que fazem parte do ambiente industrial, como exemplo de aplicação desses conhecimentos.

A competência necessária para o técnico eletricista depende em grande parte da sua capacidade de análise e de propor de soluções diante das situações que surgem na execução das suas atividades profissionais.

Sendo assim, compreender os significados dos Números Complexos na eletricidade é de grande importância no processo de aprendizagem da eletricidade pelo aluno e, para o professor o *Complex*, será mais um instrumento didático que poderá ser utilizado para aprimorar suas estratégias pedagógicas.

2. O que é o *Complex*?

O *Complex* é um instrumento didático, construído para favorecer a aprendizagem dos conceitos básicos de Números Complexos e seus significados para área de Eletricidade, no caso, a aprendizagem de conteúdos específicos de eletricidade de corrente alternada, tais como, resistência, reatância, impedância, potências ativa, reativa e aparente.

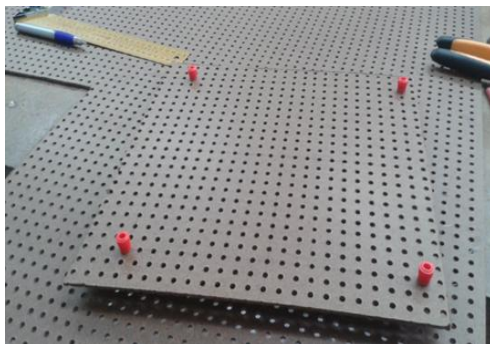
Ao utilizar o *Complex*, a expectativa é de que os alunos sejam capazes de:

- Interpretar as leituras das variáveis dos problemas representados no *Complex*;
- Representar fisicamente no *Complex* os componentes real e imaginário e, também, representar o vetor resultante, tanto na forma retangular como na polar;
- Compreender o significado, na aplicação em eletricidade, dos conceitos de resistência, reatância, impedância, potências ativa, reativa e aparente, nas representações dos componentes real e imaginário, e do vetor resultante montado no *Complex*;
- Fazer uso do *Complex* como instrumento facilitador da aprendizagem de Números Complexos e suas operações para apreensão de conceitos em corrente alternada;
- Utilizar meios não mecânicos e não memorísticos para cálculos de operações com Números Complexos, como uma alternativa para o uso da calculadora científica.

- Construção do Complex

Uma folha de madeirite foi utilizada como base para a formação de um plano cartesiano, 21x21 furos, demarcada horizontalmente (eixo-x) de -10 a +10 e, verticalmente (eixo-y), de $-10j$ a $+10j$, tendo como ponto central a coordenada (0,0). (Figura 1)

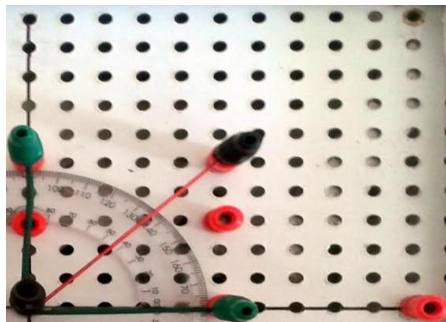
Figura 1 - Matéria prima (matriz 21x21) utilizada no *Complex*.



Fonte: Própria do primeiro autor

Após a delimitação do quantitativo representado por cada eixo, foram utilizados *plugs* de cor vermelho para limitar o final das coordenadas do gráfico cartesiano formando uma figura quadrada. Após este procedimento, adicionou-se um transferidor centrado no ponto zero do gráfico cartesiano para a visualização dos ângulos de cada Número Complexo representado no *Complex*. No caso da Figura 2, o transferidor marca o ângulo de 45° resultante dos componentes do Número Complexo, 5 no eixo real e $5j$ no eixo imaginário.

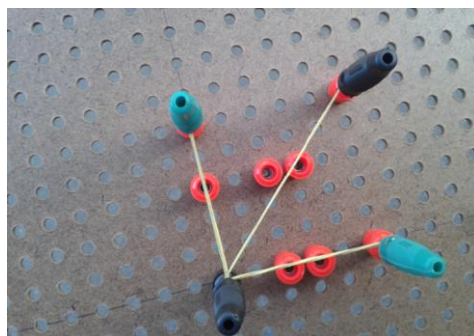
Figura 2 - Montagem do transferidor sobre a matriz



Fonte: Própria do primeiro autor

Realça-se que cada furo da matriz se tornou um ponto do plano cartesiano e poderia ser preenchido com um *plug* de cor vermelho de acordo com a necessidade de cada atividade a ser desenvolvida. Cada *plug* têm um furo que permite o encaixe de um pino representado por cores verde e preta. Todos os pinos são interligados por um elástico ao pino central que representa o ponto zero do plano cartesiano. Esse elástico permite os diversos deslocamentos e representações dos variados números da matriz de 21x21. (Figura 3)

Figura 3 - Cursores real (horizontal) e imaginário (vertical) – ambos verdes - e cursor resultante - preto

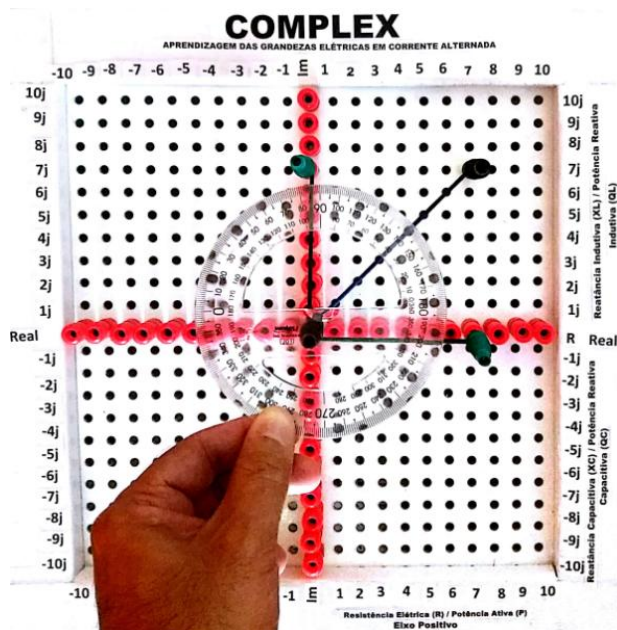


Fonte: Própria do primeiro autor

Os pinos verdes (CURSOR REAL E IMAGINÁRIO) representam o deslocamento no eixo do componente real (x) e no eixo do componente imaginário (yj) do Número Complexo. O pino de cor preta (CURSOR RESULTANTE) representa o Número Complexo do tipo $z = x + yj$. (Figura 4)

Por meio dessa representação, é possível identificar o módulo do Número Complexo (distância até o ponto central) e o ângulo formado com a horizontal.

Figura 4 - Instrumento Didático - *Complex*



Fonte: Própria do primeiro autor

3. Como utilizar o *Complex*, aplicado à aprendizagem de eletricidade(em CA)?

O *Complex* pode ser utilizado como um instrumento didático que favoreça o aprendizado dos conteúdos de eletricidade que envolva Números Complexos, tais como a análise de circuitos elétricos dos tipos RL, RC e RLC.

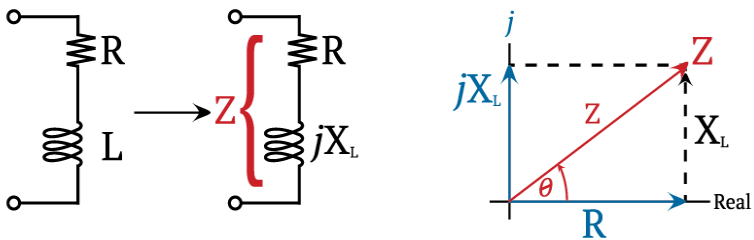
- **Circuito RL em série:** é um circuito muito utilizado na eletricidade e eletrônica. O "**R**" é a grandeza elétrica denominada de resistência elétrica. Matematicamente, ela é uma grandeza real, e é representada no **Complex** no eixo horizontal.



O "**L**" é a grandeza elétrica denominada de indutância elétrica, e provoca no circuito outra grandeza que se chama reatância indutiva, é matematicamente um número imaginário "**jX_L**". Representada no **Complex** no eixo vertical (positivo).

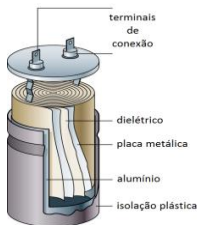
Dessa forma, podemos representar as duas grandezas e obter o vetor resultante "**Z**". O "**Z**" é a grandeza elétrica denominada de impedância elétrica. A impedância é descrita matematicamente de duas formas: a retangular ($R + jX_L$) e a polar $z = z \angle \Theta$. No *Complex* é possível obter as duas representações. (Figura 5)

Figura 5 - Circuito RL



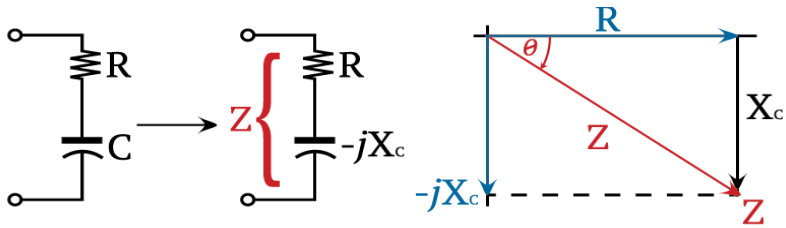
Fonte: Eletricidade básica, Gussow (2009, p.404)

- **Circuito RC em série:** também muito utilizado na eletricidade e eletrônica. O "**R**" matematicamente é uma grandeza real, e é representada no **Complex** no eixo horizontal. O "**C**" é a grandeza elétrica denominada de capacitância elétrica e provoca no circuito uma outra grandeza que se chama reatância capacitiva, é matematicamente um número imaginário " $-jX_C$ ".



Representada no **Complex** no eixo vertical (negativo). Dessa forma podemos representar as duas grandezas e obter o vetor resultante "**Z**". O "**Z**" é a grandeza elétrica denominada de impedância elétrica. A impedância é descrita matematicamente de duas formas: a retangular ($R - jX_C$) e a polar $z = z \angle \Theta$. (Figura 6)

Figura 6 - Circuito RC



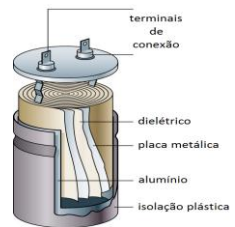
Fonte: Eletricidade básica, Gussow (2009, p.405)

- **Circuito RLC em série:** é o circuito mais utilizado na eletricidade e eletrônica. Pois na prática, o efeito da resistência elétrica está presente no nosso dia a dia nos chuveiros elétricos, ferro elétrico e aquecedores elétricos, por exemplo.



A grandeza L é representada no eixo imaginário positivo e está associada à indutância que, na prática, está presente em motores e transformadores elétricos.

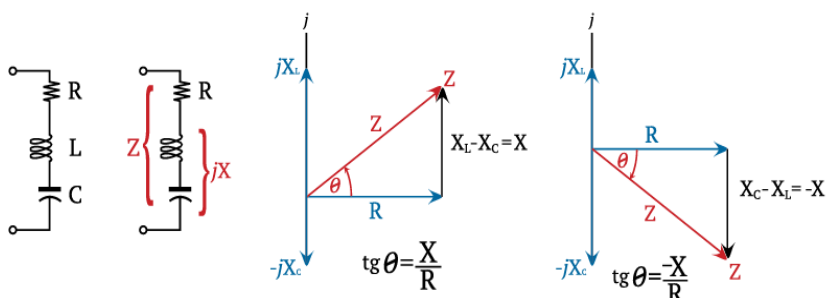
Por fim, a grandeza C é representada no eixo imaginário negativo e representa a capacitância e, na prática, são os capacitores que possuem a propriedade de armazenar carga elétrica. A grandeza denominada impedância (Z) representa a soma vetorial destas grandezas.



Assim, "R", matematicamente, é uma grandeza real, e é representada no **Complex** (no eixo horizontal). O "L" provoca no circuito outra grandeza que se chama reatância indutiva, é

matematicamente um número imaginário " jX_L ", representada no **Complex** no eixo vertical (positivo), e o " C " é a grandeza elétrica denominada de capacitância elétrica, provoca no circuito outra grandeza que se chama reatância capacitiva, é matematicamente um número imaginário " $-jX_C$ ", representada no **Complex** no eixo vertical (negativo). Dessa forma, podemos representar as três grandezas e obter o vetor resultante " Z ". A impedância (" Z ") é descrita matematicamente de duas formas: a retangular [$R + (jX_L - jX_C)$] e a polar $z = z \angle \Theta$. (Figura 7)

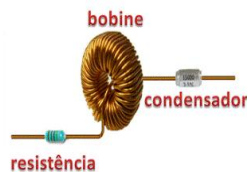
Figura 7 - Circuito RLC



Fonte: Eletricidade básica, Gussow (2009, p.406)

- **Potência Complexa:** O cálculo da potência complexa é possível com a utilização dos Números Complexos. Adota-se como padrão a representação da potência complexa ativa, o "**P**", a reativa o "**Q**" e aparente, o "**S**".

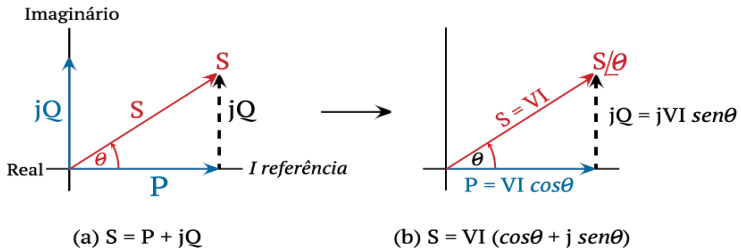
A potência ativa é que executa o trabalho. Ela produz o aquecimento e, nos casos dos motores, é responsável pelo giro do motor e a potência útil no seu eixo.



A potência reativa é de natureza indutiva e/ou capacitiva e armazena energia provocando perdas, reduzindo a potência ativa do circuito ou equipamento.

A potência aparente é a soma vetorial das potências ativa e reativa (indutiva e capacitiva). (Figura 8)

Figura 8- Triângulo de Potência Complexa

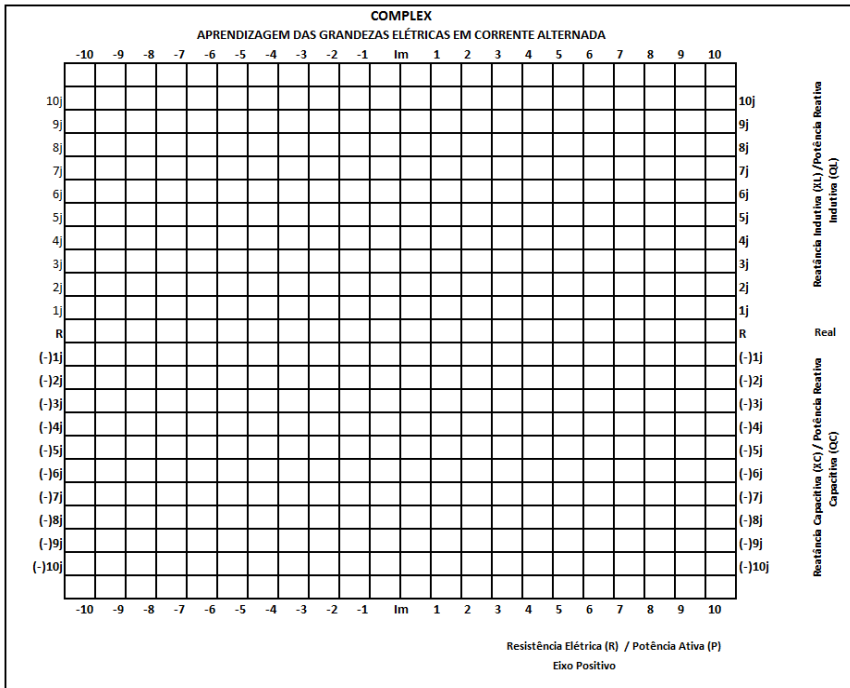


Fonte: Eletricidade básica, Gussow (2009, p.429)

- Utilizando o Complex:

O *Complex* tem descrito no seu corpo as informações das coordenadas de cada eixo e as grandezas relacionadas. A seguir, serão descritos os passos para sua utilização. (Figura 9)

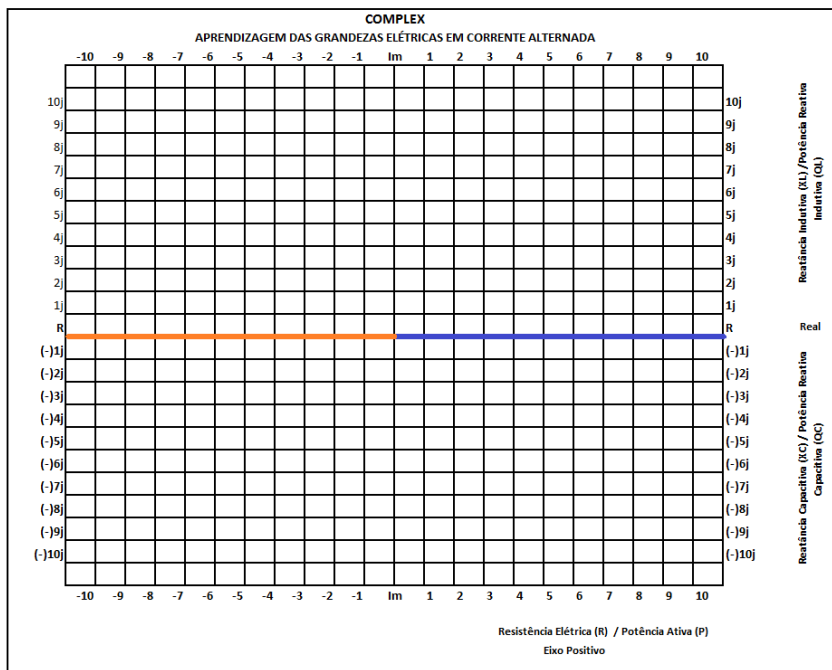
Figura 9 - Representação das coordenadas e grandezas do *Complex*



Fonte: Própria do primeiro autor

1) O eixo horizontal (eixo-x) do plano cartesiano representa os números reais e os seus valores variam de 0 a 10 positivo (+), indicado pela cor azul, e de 0 a 10 negativo (-), indicado pela cor vermelha;(Figura 10)

Figura 10 - Representação do deslocamento no eixo - x (real) para direita ou esquerda

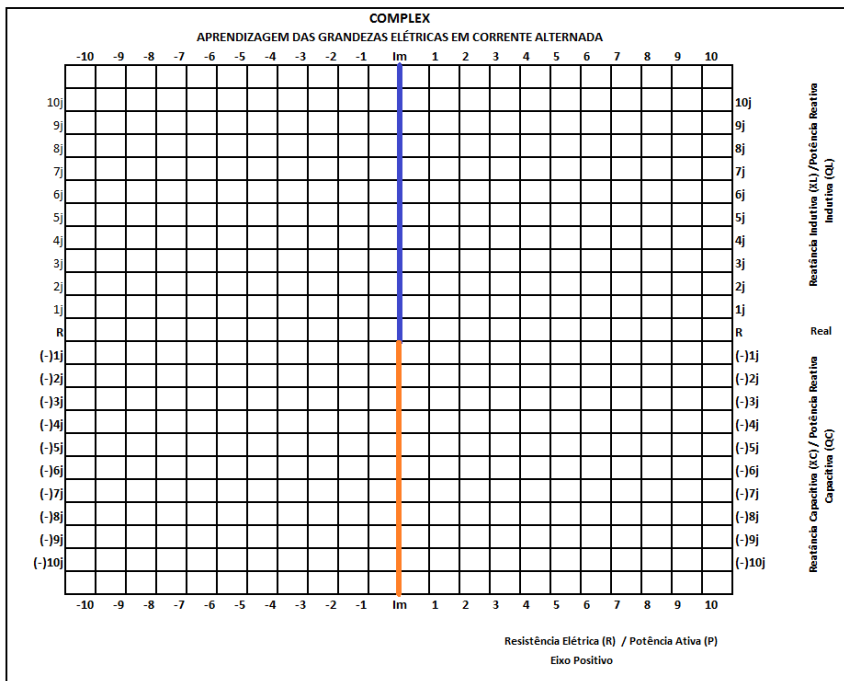


Fonte: Própria do autor

2) No eixo horizontal somente os números reais positivos (+) têm significado para as grandezas elétricas;

3) O eixo vertical (eixo-y) do plano cartesiano representa os números imaginários e os seus valores variam de 0 a $10j$ positivo (+), indicado pela cor azul, e de 0 a $10j$ negativo (-), indicado pela cor vermelha, representado na Figura 11.

Figura 11 - Representação do deslocamento no eixo - y (imaginário) para cima ou baixo

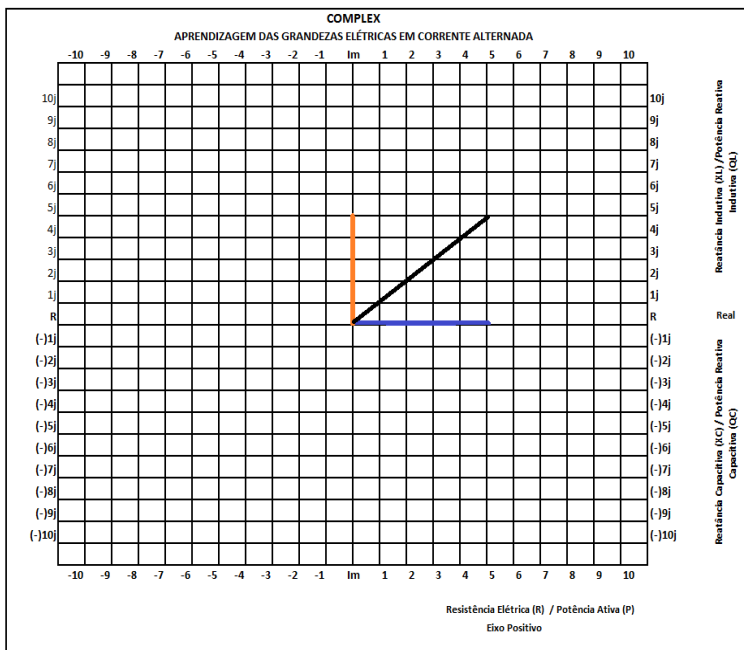


Fonte: Própria do primeiro autor

- 4) No eixo vertical, tanto os números imaginários de valores positivos (+) j , como os valores negativos (-) j , têm significados nas grandezas elétricas;
- 5) O Cursor do eixo real (horizontal) do *Complex* deve ser movimentado somente no seu próprio eixo para a direita ou para a esquerda, de acordo com o número desejado;
- 6) O Cursor do eixo imaginário (vertical) do *Complex* deve ser movimentado somente no seu próprio eixo para cima ou para baixo, de acordo com o número desejado;

7) O Cursor Resultante representa a soma vetorial dos valores dos cursores real e imaginário. Esse cursor resultante deve ser movimentado somente após os deslocamentos do cursor horizontal (real) e vertical (imaginário). O deslocamento do cursor parte da origem e deve formar com os dois cursores - real e imaginário - uma figura de um quadrado ou um retângulo. Isso é necessário para garantir a utilização correta do *Complex*. O vetor na cor preta representa o Cursor Resultante. (Figura 12)

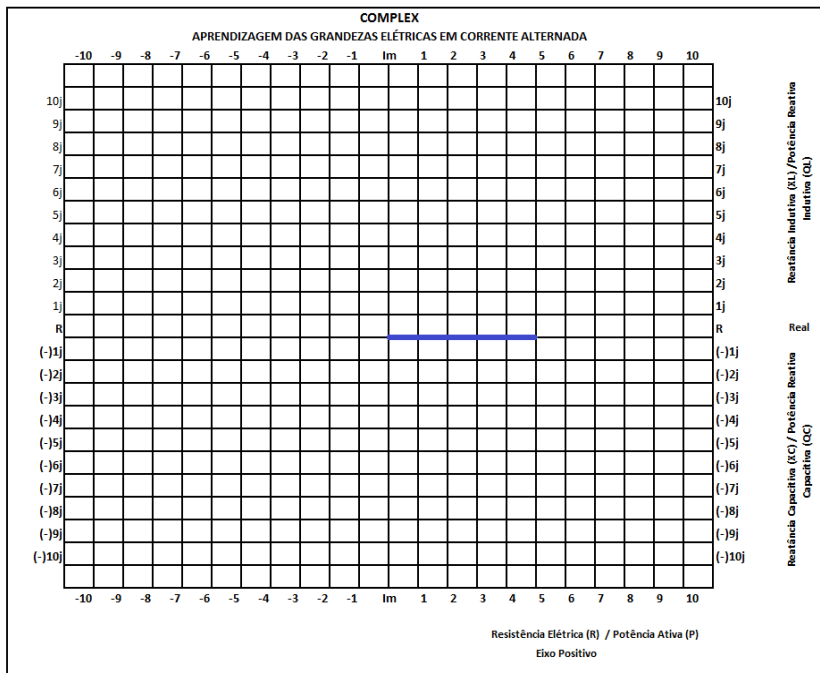
Figura 12 - Representação do Cursor Resultante



Fonte: Própria do autor

8) A representação no *Complex* de um número puramente real será o deslocamento somente do cursor do eixo real (horizontal), indicado pela cor azul e o cursor resultante representará uma reta da origem até o número real desejado (na horizontal). (Figura 13)

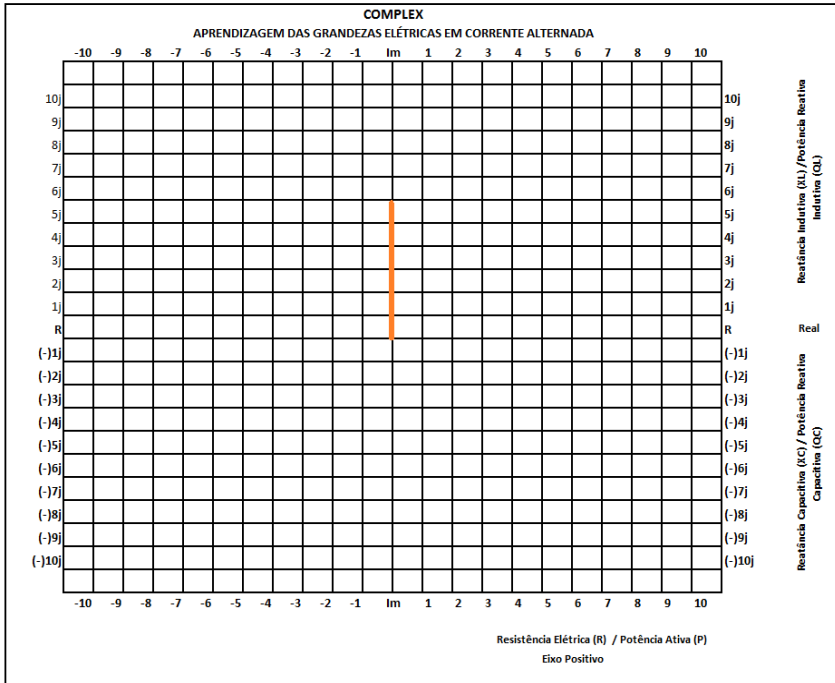
Figura 13 - Representação número real positivo



Fonte: Própria do primeiro autor

9) A representação no *Complex* de um número puramente imaginário será o deslocamento somente do cursor do eixo imaginário (vertical) e o cursor resultante representará uma reta da origem até o número imaginário desejado (na vertical). (Figura 14)

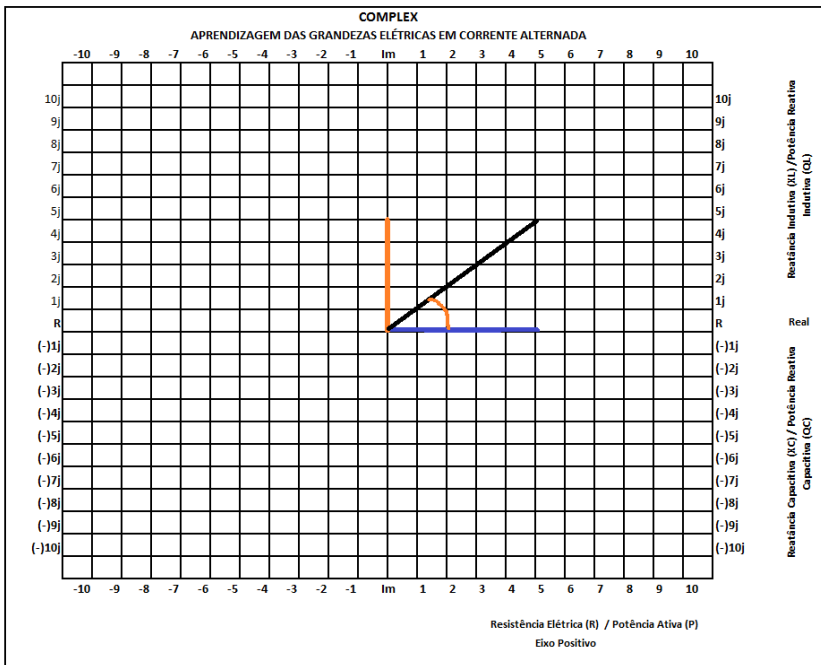
Figura 14 - Representação número imaginário positivo



Fonte: Própria do primeiro autor

10) O módulo do número complexo (parte real e parte imaginária) do tipo $z = x + yi$ é a distância da origem até o local do cursor resultante e o ângulo deste Número Complexo é o ângulo formado entre o vetor resultante e o eixo real (horizontal). (Figura 15)

Figura 15 - Representação do módulo e ângulo do vetor resultante



Fonte: Própria do primeiro autor

4. E agora? Vamos praticar!!!

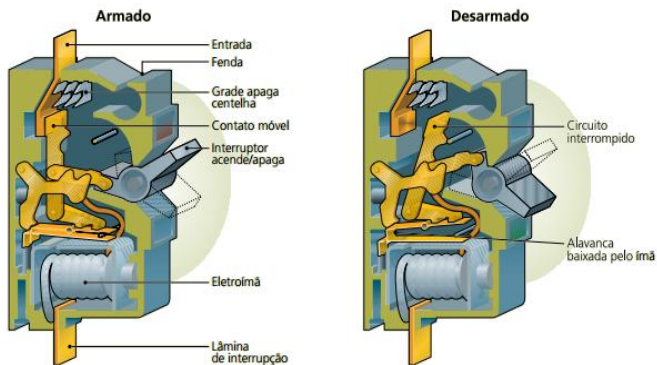
Apresentamos, a seguir, dois problemas que ilustram o uso do *Complex* para os fins que discutimos antes e que foram meio para validar esse instrumento com alunos do Ensino Técnico em Eletrotécnica.

- Problema (P01) - representação retangular dos Números Complexos

A Figura 16 representa um disjuntor termomagnético, que é um dispositivo de proteção das instalações elétricas que previne sobrecargas e curto-circuito. No seu interior, há um eletroímã para agir em caso de curto-circuito, ou seja, em caso de uma corrente muito mais alta do que a desejada. Há, também, uma lâmina bimetálica que ao ser aquecida é dilatada e o disjuntor é desligado. Você é um especialista em instalações elétricas e mediu a resistência elétrica da lâmina bimetálica encontrando o valor de $4(\Omega)$. Mediu a reatância indutiva do eletroímã $7(\Omega)$.

- a) Após representar esses valores medidos no *Complex*, qual a figura geométrica que ele formou?
- b) Se por um descuido na representação no *Complex* o vetor resultante for rotacionado de 90° no sentido anti-horário, que interpretações você daria para as coordenadas dessa representação?
- c) A figura foi alterada?

Figura 16 - Disjuntor termomagnético



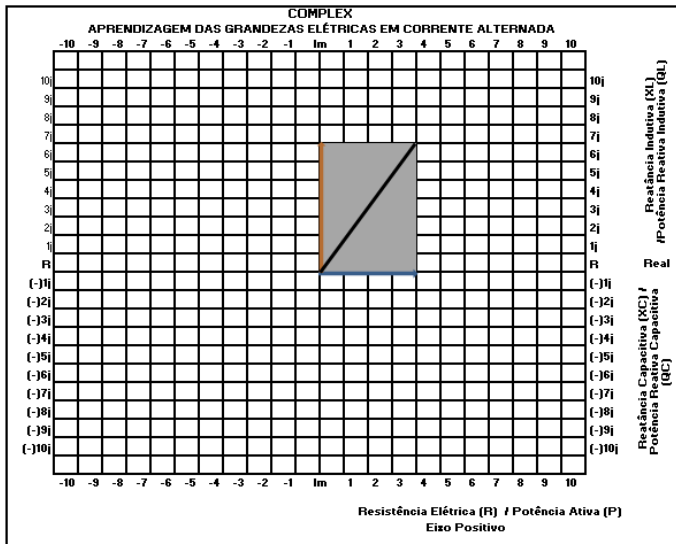
Fonte: <http://eletro.g12.br>

- Resolvendo o problema

Nesse problema o aluno vai montar no *Complex* as informações fornecidas. O primeiro cursor, com a informação da resistência de $4(\Omega)$ é colocado no eixo horizontal positivo por se tratar de uma grandeza real. Agora, o segundo cursor, com a informação da reatância indutiva de $7(\Omega)$, é colocado no eixo vertical positivo, por se tratar, de uma grandeza imaginária. Dessa forma, pode-se obter o vetor resultante que, no caso, é a grandeza denominada de impedância.

Logo, teremos no *Complex*, a representação mostrada na Figura 17. Forma-se um retângulo com coordenadas retangulares $(4 + 7j)$.

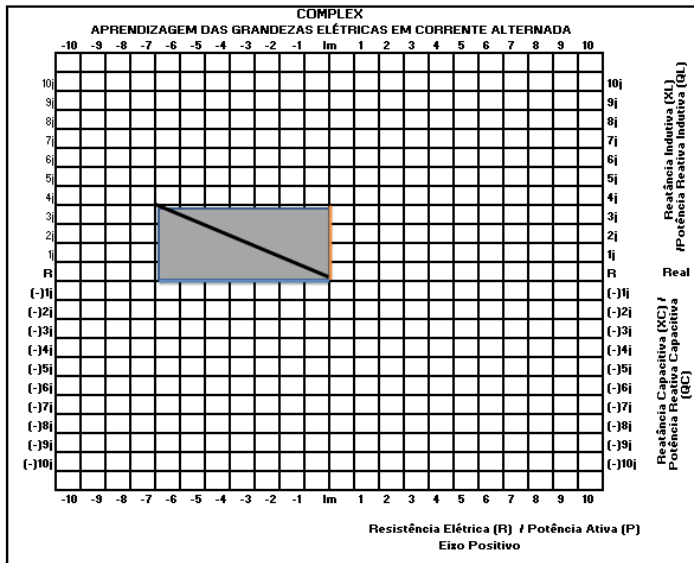
Figura 17 - Complex aplicado ao Problema (P01 - item a)



Fonte: Própria do primeiro autor

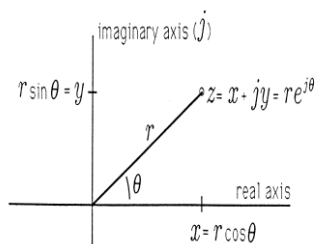
Ao produzirmos um giro de 90°, no sentido anti-horário, obtém-se, novamente, a figura de um retângulo, porém com as coordenadas retangulares invertidas ((-7 + 4j). (Figura 18)

Figura 18 - *Complex* aplicado ao Problema (P01 - item b)



Fonte: Própria do primeiro autor

Nessa atividade a dimensão epistemológica é a interpretação da representação de uma grandeza real e uma imaginária no *Complex*, envolvendo a representação do Número Complexo, os conceitos matemáticos de figuras geométricas e a soma vetorial das grandezas.



A dimensão cognitiva está presente na capacidade de o aluno tomar decisão e realizar as operações matemáticas necessárias.

A dimensão didática está nas características às quais o aluno está inserido, tal como a preocupação com a apropriação do conhecimento de proteção de um circuito elétrico para a prevenção de acidente com eletricidade.



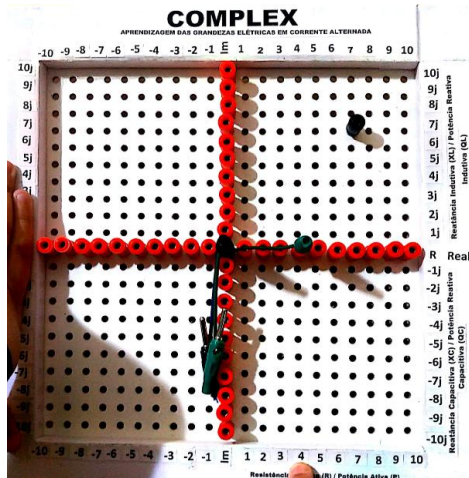
A resposta foi considerada correta se o aluno informou que a figura formada é o **retângulo**, e que, depois de rotacionar 90° , formou novamente **outro retângulo**, invertendo as medidas de altura e comprimento.

- Fazendo no Complex

Resolvendo esse problema no *Complex*, seguem abaixo as Figuras de cada etapa.

Primeiro faremos a representação no *Complex* da grandeza real, que no caso é o valor da resistência elétrica de 4Ω no eixo horizontal (positivo). (Figura 19)

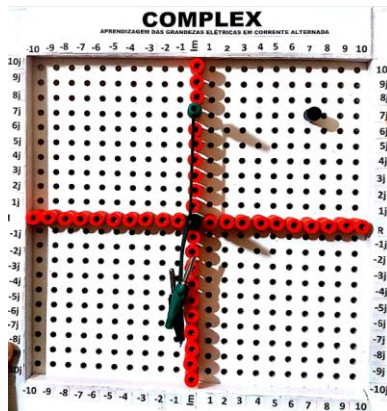
Figura 19 - Representação no eixo horizontal (real) -4Ω



Fonte: Própria do primeiro autor

Em seguida, faremos a representação da grandeza imaginária, que nesse problema, é a reatância indutiva de $7j\Omega$, no eixo vertical (positivo). (Figura 20)

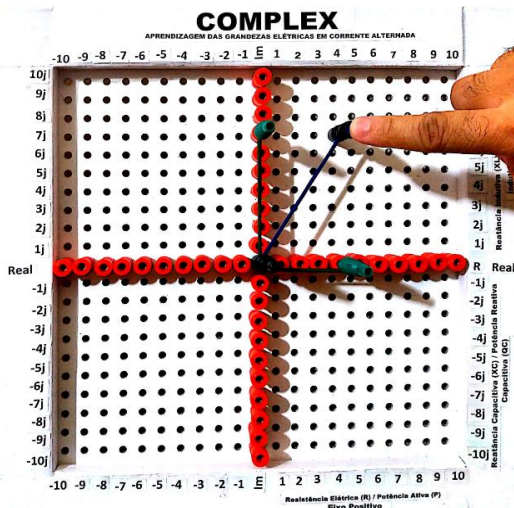
Figura 20 - Representação no eixo vertical (imaginário) $-7j\Omega$



Fonte: Própria do primeiro autor

Agora, com os dois cursores montados ao mesmo tempo, um no horizontal (4Ω) e o outro no vertical ($7j\Omega$), obtém-se a impedância elétrica, que é o vetor resultante ($4 + 7j$). (Figura 21)

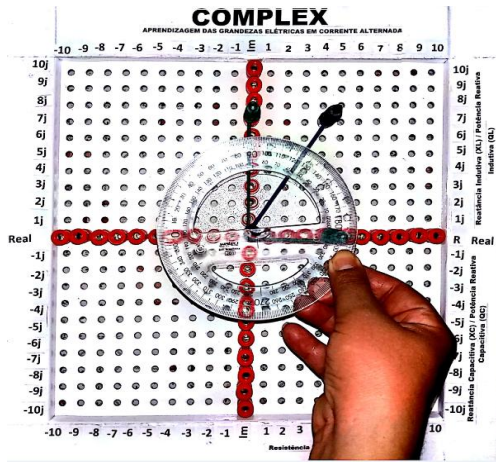
Figura 21 - Representação do vetor resultante ($4\Omega + 7j\Omega$)



Fonte: Própria do autor

Por fim, utilizando o *Complex*, e com o auxílio do transferidor, pode-se visualizar o ângulo formado pelo vetor resultante em relação ao eixo horizontal. (Figura 22)

Figura 22 - Representação do ângulo do vetor resultante ($4\Omega + 7j\Omega$)



Fonte: Própria do autor

5. Que tal mais um exemplo?

- Problema (P02) - a representação geométrica (polar) dos Números Complexos

A Figura 23 (dos gráficos), mostra um Sistema de Geração de Energia Trifásica. Neste sistema, cada tensão $V_{m\acute{a}x}$ é gerada com uma defasagem em relação às outras. A Fase A é a tensão de referência, a Fase B é gerada defasada de um ângulo da Fase A e, em seguida, a Fase C também é gerada defasada do mesmo ângulo da Fase B.

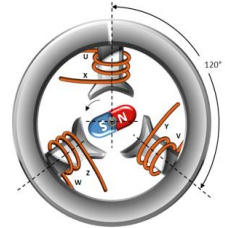
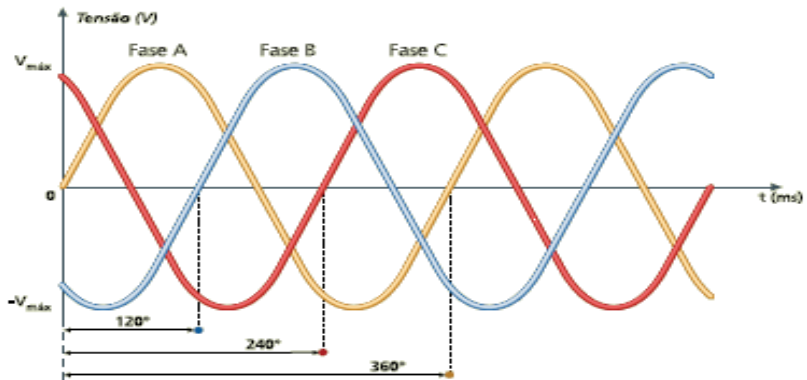


Figura 4.2 Modelo simplificado de um gerador trifásico.

Figura 23 - Geração de tensão trifásica



Fonte: <http://eletro.g12.br>



Dessa forma, as ondas vão se repetindo e mantendo suas defasagens. Este tipo de energia trifásica pode ser gerado por meio das usinas hidrelétricas ou outras formas alternativas como a energia fotovoltaica, solar e biodigestor. É utilizada por muitos equipamentos e máquinas elétricas.

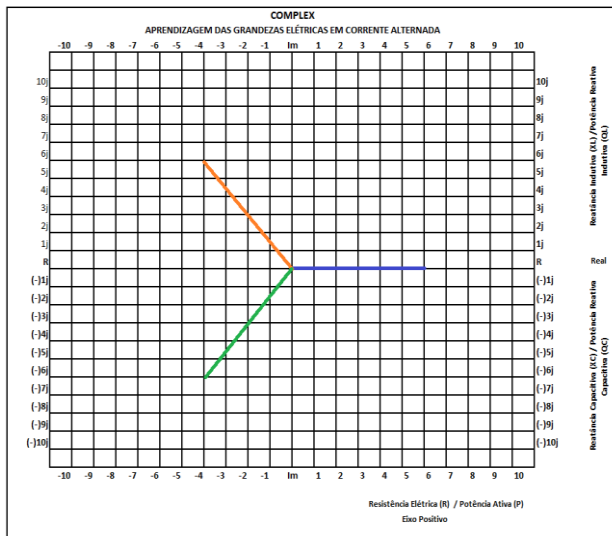
Foi fornecida no *Complex* a representação de um vetor de uma das fases e sua defasagem em relação à origem. A partir do *Complex*, pergunta-se:

- a) Qual o ângulo de defasagem em relação à referência?
- b) Qual a Fase fornecida?
- c) Qual o ângulo em que as fases se repetem?
- d) Qual o ângulo de defasagem da Fase A?
- e) Qual o ângulo de defasagem entre cada tensão gerada?
- f) Represente no *Complex* os ângulos de defasagens das ondas das tensões geradas.

- Resolvendo o problema

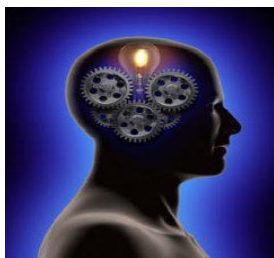
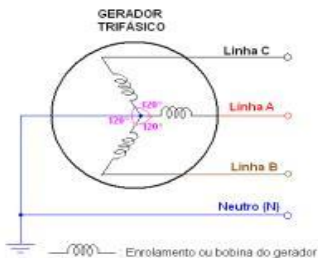
A representação fornecida no *Complex* está apresentada na Figura 24.

Figura 24 - *Complex* aplicado ao Problema (P02 – itens de a a f)



Fonte: Própria do primeiro autor

A dimensão epistemológica nessa atividade será a interpretação da representação do ângulo no *Complex* envolvendo o Número Complexo na forma polar e os conceitos matemáticos de figuras geométricas do ângulo do vetor em relação à referência (eixo horizontal).



A dimensão cognitiva está presente na capacidade de o aluno identificar o ângulo da defasagem das ondas do circuito trifásico e compreender a sua representação no *Complex*.

A dimensão didática está nas características às quais o aluno se apropria do conhecimento da geração da energia elétrica para os circuitos trifásicos aplicada na área de máquinas elétricas estáticas e rotativas na área industrial e sua influência no meio ambiente nas diversas formas de geração de energia elétrica.

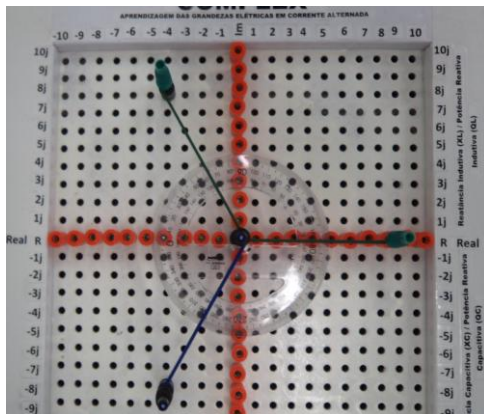


A resposta foi considerada correta se o aluno apresentou as respostas: a) 120° , b) Fase A, c) 360° , d) 0° (zero grau) , e) 120° e f) 0° , 120° , 240° .

- Fazendo no Complex

A representação das ondas fornecidas no *Complex*, forma a disposição abaixo. Com a ajuda de um transferidor, o aluno pode responder a cada um dos itens solicitados no problema. (Figura 25)

Figura 25 - ângulos dos vetores com auxílio do transferidor



Fonte: Própria do autor

- a) Pela visualização da leitura do ângulo no transferidor, observa-se o valor de **120°** que é o ângulo de defasagem em relação à referência;
- b) Pela visualização do *plugs* e dos ângulos formados e da figura das ondas fornecidas no problema, conclui-se que a fase fornecida é a **Fase A**;
- c) Como o transferidor marca entre as três fases um ângulo igual a 120°, conclui-se que o ângulo em que as fases se repetem é de **360°**;
- d) Com a ajuda do transferidor, observa-se que a Fase A está alinhada com o eixo horizontal, logo o ângulo de defasagem da Fase A é **zero (0°)**;
- e) Ao observar, com a ajuda do transferidor, a defasagem entre cada fase, nota-se que o ângulo de defasagem entre cada tensão gerada é de **120°**;

f) A visualização dos vetores, com o auxílio do transferidor, permite concluir que o primeiro vetor da Fase A está alinhado com o eixo horizontal e possui ângulo igual a **zero grau (0°)**, a fase B está defasada de **120°** e a fase C está defasada de **240°**.

6. Apêndices

Outros problemas foram aplicados aos mesmos estudantes e podem ser aplicados para a utilização do *Complex*.

- Números Complexos com representação retangular:

1) Você necessita instalar um chuveiro elétrico em sua residência e deve optar por uma das possibilidades encontradas no mercado e mostradas na Figura 26.

a) Devido à crise energética, você está preocupado com o consumo de energia. Nesse caso, qual dos dois você escolheria e por quê?

b) Suponha que a divulgação do consumo do chuveiro tenha sido feita por meio do *Complex* e conhecendo o custo de R\$ 2,00/Kwh, você pagou por uma hora R\$ 10,00. Com essas informações, qual dos dois chuveiros está representado no *Complex*?

c) Se você pagar pelo mesmo período de uma hora R\$ 14,00, qual é o chuveiro que está representado no *Complex*?

Figura 26 - Chuveiros elétricos



5000W - 127V



7000W - 220V

Fonte: [://static.mobly.com.br](http://static.mobly.com.br)

- Números Complexos com representação polar:

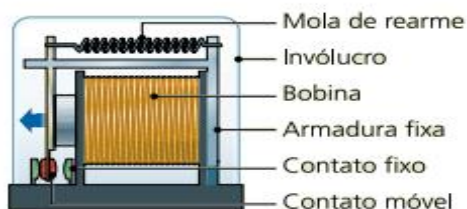
2) Você leu no jornal um anúncio para a contratação de eletricitistas. Para o preenchimento das vagas, os candidatos deverão realizar algumas atividades a serem avaliadas:

- Identificar os componentes elétricos;
- Realizar medições no circuito;
- Montar e realizar reparos nos componentes elétricos;
- Realizar a conferência final e testar os componentes.

Para a seleção, foi proposta uma atividade prática e, para isso, cada um recebeu um multímetro e o componente da figura 27.

- Que componente elétrico é esse?
- Qual grandeza elétrica será medida neste componente?
- Suponha que a medição da grandeza obtida foi de módulo " 3Ω ", você representou no *Complex* no eixo horizontal e seu colega representou no eixo vertical. Quem você acha que está correto, por quê?

Figura 27: Componente elétrico

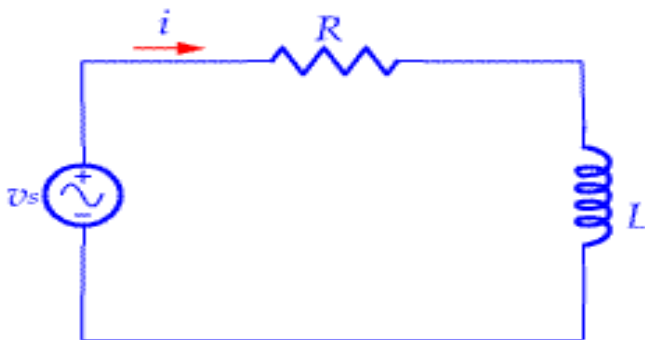


Fonte: <http://eletro.g12.br>

3) Os Circuitos RL das Figuras 28 e 29 são compostos por um resistor em série com um indutor. O resistor em cada circuito produz a potência ativa (W) e o indutor produz a potência reativa (VAR). Essas grandezas estão representadas no circuito da Figura 30 e no *Complex*. Pergunta-se:

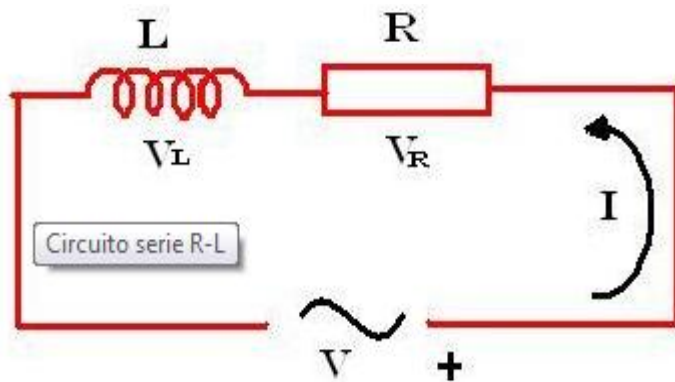
- Qual o valor visualizado no *Complex* para cada uma dessas grandezas?
- Você leu no *Complex* a representação dessas grandezas referentes ao circuito da Figura 29. Quais os valores dessas grandezas?
- Por fim, são visualizados no *Complex* os vetores da soma das potências ativa (W) e a soma da potência reativa (VAR) dos dois circuitos. Qual o valor total de potência ativa e reativa dos dois circuitos? Represente na folha de atividade.

Figura 28: Circuito RL em série



Fonte: <http://e-ducativa.catedu.es>

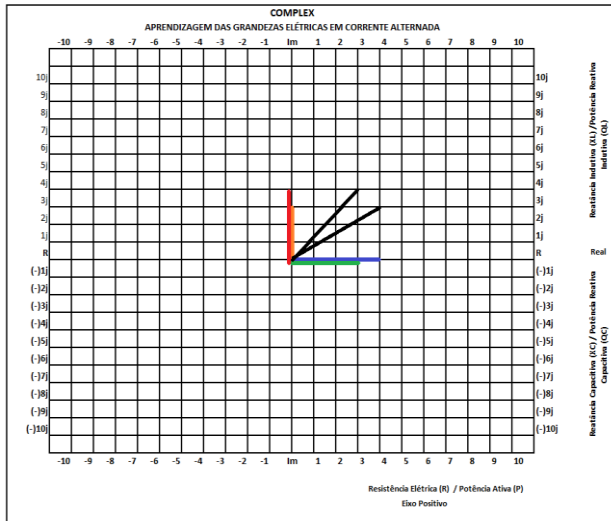
Figura 29: Circuito RL em série



Fonte: <http://e-educativa.catedu.es>

Consulta ao *Complex* para os itens "a" e "b":

Figura 30 - *Complex* aplicado ao Problema (P03 – itens a e b)



Fonte: Própria do autor

7. Referências

CASAS DAS CIÊNCIAS. **Transformadores elétricos**. Disponível em: < www.wikiciencias.casadasciencias.org>. Acesso em: 22 set. 2015.

CURSO DE ELETRICIDADE. **Circuitos elétricos**. Disponível em: < www.e-ducativa.catedu.es >. Acesso em: 24 set. 2015.

EQUIPAMENCURSO DE ELETRICIDADE. Circuitos RL. Disponível em: < www.digilander.libero.it >. Acesso em: 26 set. 2015.

EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS. **Chuveiro elétrico**. Disponível em: < www.static.mobly.com.br>. Acesso em: 24 set. 2015.

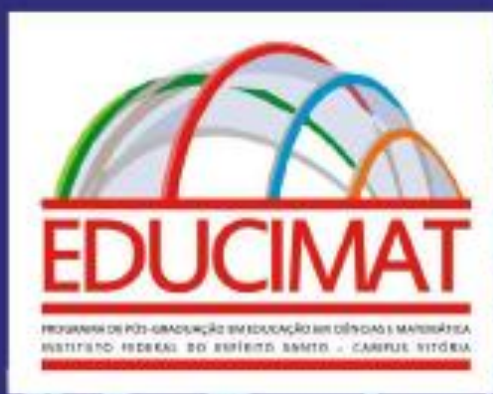
GÁLVEZ, Grecia. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 2. p.26-35.

GUSSOW, Milton. **Eletricidade básica**. Porto Alegre, Bookman, 2009.

MANUAL TÉCNICO CENTRO PAULA SOUZA. PAINEL INDUSTRIA. **Eletrônica: máquinas e instalações elétricas**. Disponível em: < www.eleto.g12.br >. Acesso em: 24 out. 2015.

PÓLYA, George. **How to solve it**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

ROSETTO ELÉTRICA. **Banco de capacitores**. Disponível em: < www.rosettoeletrica.com.br >. Acesso em: 25 out. 2015.



Agência Brasileira do ISBN

ISBN 978-85-8263-139-3



9 788582 631393