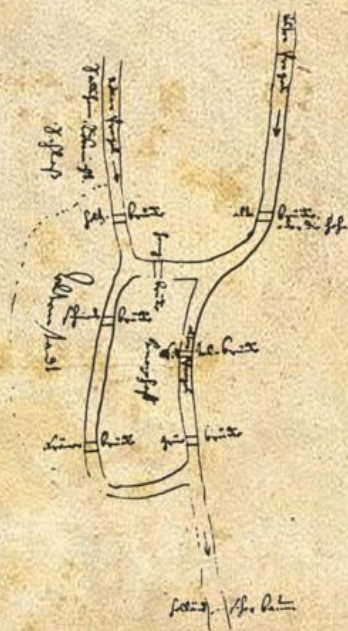
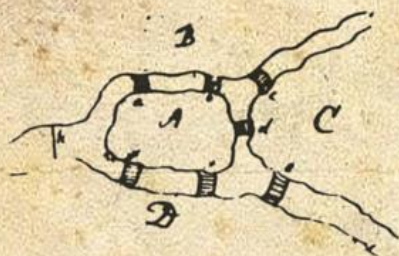


# ENSINANDO GRAFOS A PARTIR DE ABORDAGEM HISTÓRICO-INVESTIGATIVA

Lauro Chagas e Sá  
Sandra Aparecida Fraga da Silva



Ifes  
2016

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

*Lauro Chagas e Sá*  
*Sandra Aparecida Fraga da Silva*

## **ENSINANDO GRAFOS A PARTIR DE ABORDAGEM HISTÓRICO-INVESTIGATIVA**

# Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes

## **Denio Rebello Arantes**

Reitor

*Diretoria do Campus Vitória do Ifes*

## **Araceli Verónica Flores Nardy Ribeiro**

Pró-Reitora de Ensino

## **Ricardo Paiva**

Diretor Geral

## **Márcio de Almeida Có**

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-graduação

## **Hudson Luiz Cogo**

Diretor de Ensino

## **Ricardo Tannure Almeida**

Pró-Reitor de Extensão e Produção

## **Márcia Regina Pereira Lima**

Diretora de Pesquisa e Pós-graduação

## **José Lezir**

Pró-Reitor de Administração e Orçamento

## **Sergio Zavaris**

Diretor de Extensão

## **Ademar Manoel Stanger**

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional

## **Roseni da Costa Silva Pratti**

Diretor de Administração

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

S111e Sá, Lauro Chagas e.

Ensinando grafos a partir de abordagem histórico-investigativa / Lauro Chagas e Sá, Sandra Aparecida Fraga da Silva. – Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2016.

54 p. : il. ; 21 cm.

ISBN: 978-85-8263-128-7

1. Teoria dos grafos. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Matemática – Historiografia. 4. Aprendizagem. I. Silva, Sandra Aparecida Fraga da. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 511.5

© 2016 by Instituto Federal do Espírito Santo

É proibida a reprodução, mesmo que parcial, por qualquer meio, sem autorização escrita dos autores e dos detentores dos direitos autorais.

## **Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática**

Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara.

Prédio Administrativo, 3º andar.

Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

## **Comissão Científica**

Alex Jordane de Oliveira, D. Ed. – Ifes

Lígia Arantes Sad, Dra. Ed. – Ifes

Julia Schaetzle Wrobel, D.Sc. – Ufes

## **Revisão**

Priscila de Oliveira Queiroz

## **Produção e Divulgação**

Programa Educimat, Ifes

## **Capa e Editoração Eletrônica**

Lauro Chagas e Sá

## MINICURRÍCULO DOS AUTORES

### **Lauro Chagas e Sá**

Licenciado em Matemática pelo Ifes (2014), especialista em Tecnologia Educacional (2015) e Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo programa Educimat/Ifes (2016). É Professor efetivo do Instituto Federal do Espírito Santo – *campus* Linhares e Coordenador de Gestão de Processos Educacionais do Pibid/Ifes. Lidera o Grupo de pesquisa Educação Matemática e Educação Profissional (Emep) e participa do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo (Geem/ES) e do Grupo de Pesquisas em Práticas Pedagógicas de Matemática (Grupem).

### **Sandra Aparecida Fraga da Silva**

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2000), mestre (2004) e doutora (2009) em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela mesma instituição. É professora do Ifes, atuando no curso de Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Educação de Ciências e Matemática. Coordena o subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência e o Laboratório de Ensino de Matemática do Ifes/Vitória. Lidera o Grupo de Pesquisa em Prática Pedagógica em Matemática (Grupem) e é vice-líder do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo (Geem-ES).

# SUMÁRIO

**PRIMEIRA PONTE:** INICIANDO A CONVERSA..... 5

**SEGUNDA PONTE:** POR DENTRO DA HISTÓRIA..... 7

**TERCEIRA PONTE:** AMPLIANDO OLHARES SOBRE OS GRAFOS ..... 12

**QUARTA PONTE:** A ABORDAGEM HISTÓRICO-INVESTIGATIVA ..... 16

**QUINTA PONTE:** IMPLICAÇÕES EM SALA DE AULA..... 21

    ATIVIDADE 1: UMA CARTA PARA OS ALUNOS..... 21

    ATIVIDADE 2: PROJETANDO A IMAGEM DE KÖNIGSBERG ..... 26

    ATIVIDADE 3: USANDO A MAQUETE ELETRÔNICA..... 32

    ATIVIDADE 4: FICHA COM A HISTÓRIA DA TEORIA DE GRAFOS ..... 40

**SEXTA PONTE:** ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ..... 50

**SÉTIMA PONTE:** REFERÊNCIAS ..... 52



## PRIMEIRA PONTE: INICIANDO A CONVERSA

Apresentamos, neste material, uma proposta de abordagem histórica para a Teoria de Grafos. As atividades apresentadas foram aplicadas em duas turmas de segundo ano de Ensino Médio, durante a produção do trabalho de conclusão de curso (SÁ, 2014) e da pesquisa de mestrado (SÁ, 2016) do primeiro autor deste material, sob orientação da segunda autora.

Alguns aspectos normativos reforçam as potencialidades de se abordar a Teoria de Grafos, tema deste fascículo, na sala de aula do Ensino Médio. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem, explicitamente, a discussão de grafos:

No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler (BRASIL, 2006, p. 94).

Já no Espírito Santo, onde as pesquisas de graduação e de mestrado foram desenvolvidas, o Currículo Básico da Escola Estadual (ESPIRITO SANTO, 2009) sugere a “introdução à Teoria dos Grafos” para o segundo ano do Ensino Médio e “resolução de problemas utilizando grafos” para o terceiro ano.

Considerando as aplicações dos grafos em problemas de transporte metroviário e no sistema de buscas do *Google*, que apresentaremos no próximo capítulo, perceberemos que estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte. Por esse motivo, torna-se

oportuna a discussão desta teoria junto aos alunos do ensino médio, o que defenderemos e detalharemos na seção seguinte.

Este material didático se organiza em sete blocos, chamados de pontes, em alusão às Sete Pontes de Königsberg, que foi o ponto de partida para a estruturação da Teoria de Grafos.

Essa primeira ponte, a que estamos no momento, compartilhamos as motivações para produção deste produto educacional. Na segunda ponte, realizaremos uma breve incursão na história da Teoria dos Grafos para que, na terceira ponte, possamos ampliar nossos olhares sobre algumas aplicações dessa área da Matemática.

Na quarta ponte, apresentaremos o marco teórico da Investigação Matemática ao defendermos a abordagem que denominamos histórico-investigativa. As experiências de ensino são o tema da discussão enquanto atravessamos a quinta ponte.

A sexta ponte apresenta algumas considerações advindas do passeio realizado e relacionando-o aos referenciais teóricos adotados. A sétima, e última, ponte traz as referências citadas neste material.

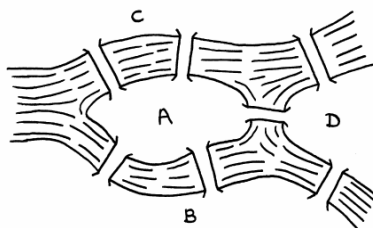


Para fazer download da dissertação de mestrado e dos modelos de atividades para impressão, que acompanham esse material, acesse <http://educimat.vi.ifes.edu.br>.

## SEGUNDA PONTE: POR DENTRO DA HISTÓRIA

No início do século XVIII, especula-se que os cidadãos da cidade russa de Königsberg costumavam passar suas tardes de domingo a caminhar em torno da sua localidade. Königsberg é constituída por quatro áreas de terra separadas pelo Rio Pregel, sobre o qual há sete pontes, tal como ilustrado na figura 1. O problema que os cidadãos fixaram era caminhar ao redor da cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e, se possível, retornar ao seu ponto de partida.

Figura 1 – Esboço da cidade de Königsberg



Fonte: Hopkins; Wilson, 2004, p. 198.

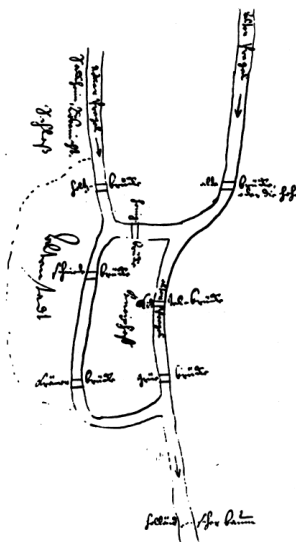
Em 1730, Leonhard Euler (1707-1783) chega à Rússia para ocupar a cadeira de Filosofia Natural na Academia de Ciências de São Petersburgo. Três anos mais tarde, com a saída de Daniel Bernoulli (1700-1782), ele tornou-se o principal matemático da Academia, que, nessa época, tinha lançado uma revista de matemática, chamada de *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Esta revista foi, durante muito tempo, abastecida com contribuições de Euler. Segundo Boyer (1974, p. 324), “os editores não tinham que se preocupar com a falta de material enquanto a pena de Euler trabalhasse”.

Após tomar conhecimento sobre a notoriedade de Euler, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg enviou uma carta ao matemático suíço em nome de Heinrich Kiihn, um professor de matemática local. As



mensagens trocadas inicialmente não foram recuperadas, mas uma carta datada de 09 de março de 1736 indica que eles haviam discutido o problema. Parte dessa carta enviada a Euler está apresentada a seguir:

Você prestaria a mim e a nosso amigo Kiihn o mais valioso serviço, colocando-nos muito em dívida com você, culto Senhor, se você nos enviasse a solução, que você conhece bem, para o problema das sete pontes Könisberg, juntamente com uma prova. [...] Eu adicionei um esboço das referidas pontes... (SACHS; STIEBITZ; WILSON, 1988, p. 134).

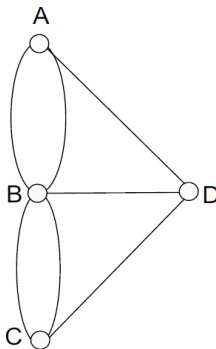


Quatro dias após receber essa última mensagem do prefeito, Euler escreveu a Giovanni Jacopo Marinoni (1676-1755), um matemático e engenheiro italiano que morava em Viena. Na carta, parcialmente apresentada a seguir, o matemático suíço apresenta o problema das Sete Pontes de Königsberg e tece alguns comentários sobre o problema que ele recebera.

Um problema me foi apresentado sobre uma ilha na cidade de Königsberg, cercada por um rio, atravessado por sete pontes, e foi me perguntado se alguém poderia atravessar as pontes separadas em uma caminhada contínua de tal forma que cada ponte fosse atravessada apenas uma vez. Fui informado que até então ninguém havia demonstrado a possibilidade de fazer isso, ou mostrado que é impossível. Esta questão é tão banal, mas pareceu-me digno de atenção em que nem a geometria, álgebra, ou mesmo a arte de contar foram suficientes para resolvê-lo (HOPKINS; WILSON, 2004, p. 202).

Verificamos, então, que a partir do Problema das Pontes de Königsberg, Euler sistematizou um novo campo da Matemática – era o surgimento da Teoria dos Grafos. O matemático não precisou de mais de uma quinzena de dias para resolver o enigma. Para isso, ele criou um modelo matemático que simulasse a cidade russa, que é o que hoje chamados de grafo. Durante a elaboração do grafo, ele representou as porções de terra (ilhas e margens) por pontos e as pontes por linhas ligando esses pontos (figura 3).

Figura 3 – Grafo que representa a cidade de Königsberg.



Fonte: Malta; 2008, p. 12.

Apesar de não utilizar as denominações atuais da Teoria dos Grafos, Euler analisou a quantidade de arestas que incidem em cada vértice, ou seja, analisou o grau dos vértices. Então, o matemático percebeu que só se

pode realizar um caminho passando em todas as pontes uma única vez se, e somente, cada porção de terra possuir uma quantidade par de pontes. Em homenagem ao matemático suíço, esse caminho, ou passeio, é chamado de euleriano. Mais formalmente, enunciamos essa observação do matemático suíço da seguinte forma:

***Teorema (dos Caminhos Eulerianos)***

(a) Se um grafo conexo<sup>1</sup> tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.

(b) Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então ele possui um caminho euleriano aberto, que começa em um vértice, percorre todas as arestas e termina em um vértice diferente do inicial.

(c) Se um grafo conexo não tem vértices de grau ímpar, então ele tem um caminho euleriano fechado, que começa e termina no mesmo vértice, percorrendo todas as arestas.

(LÓVASZ, PELIKÁN, VESZTERGOMBI, 2005, p. 133).

No dia 03 de abril de 1736, o matemático enviou a resposta ao prefeito da cidade próxima a Königsberg, apresentando sua solução para o problema e questionando o prefeito russo sobre a vinculação da Teoria dos Grafos à Matemática:

Assim você vê, mais nobre senhor, como este tipo de solução tem pouca relação com a matemática, e eu não entendo por que você espera que um matemático possa produzi-la, ao invés de qualquer outra pessoa, já que a solução baseia-se na razão e sua descoberta não depende de qualquer princípio matemático. Devido a isso, eu não sei por que questões comuns que têm tão pouca relação com a matemática são resolvidas mais rapidamente pelos matemáticos do que por outros (HOPKINS; WILSON, 2004, p. 201).

---

<sup>1</sup> Um grafo é conexo, se existir um caminho entre qualquer par de vértices.

Apesar de não vincular sua resolução do problema à matemática, Euler se interessou em divulgar sua análise para a comunidade científica da época. O matemático apresentou sua solução no artigo "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", enviado ao *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. O artigo, que foi escrito em latim e traduzido para o francês (EULER, 1851), é dividido em vinte e um parágrafos numerados, dos quais o primeiro atribui o problema à geometria da posição, os próximos oito são dedicados à solução do Problema das Sete Pontes de Königsberg e os demais generalizam o problema. Embora datado de 1736, o jornal de Euler só foi publicado em 1741, com reimpressão em 1752.

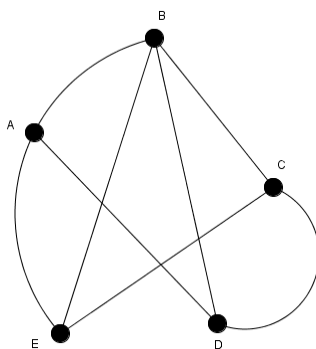
Após a resolução do Problema das Sete Pontes de Königsberg, começaram a surgir novos problemas, como o do Caixeiro Viajante, o das Quatro Cores e o do Carteiro Chinês, que permitiram o desenvolvimento da Teoria dos Grafos. Ainda assim, o problema de Euler e o de Hamilton, que foi discutido anos depois, formam os principais problemas históricos com Grafos.

Depois de passar por um século de pouco desenvolvimento, a Teoria dos Grafos apresenta-se na segunda metade do século XIX, impulsionada pelos problemas de aplicação em diversas áreas. Boaventura Netto (2006) cita a utilização de modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, em 1847, por Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) e, dez anos mais tarde, na enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, por Arthur Cayley (1821-1895).

## TERCEIRA PONTE: AMPLIANDO OLHARES SOBRE OS GRAFOS

Neste material, consideramos o grafo  $G$  como um modelo matemático formado por um conjunto finito não vazio  $V$  e um conjunto  $A$  de subconjuntos de dois elementos de  $V$ . Os elementos de  $V$  são denominados vértices (ou nós) de  $G$  e os elementos de  $A$  são arestas de  $G$ . Por exemplo, no grafo apresentado a seguir, temos  $V = \{A, B, C, D, E\}$  e  $A = \{(A,B); (A,D); (A,E); (B,C); (B,D); (B,E); (C,D); (C,E)\}$ .

Figura 4 – Exemplo de um grafo



Fonte: SÁ, 2014, p. 23.

É importante destacar que um grafo pode ser não orientado, como na figura 4, ou orientado (também chamado de grafo direcionado ou digrafo). Em um grafo orientado, as arestas são pares ordenados, ou seja, um vértice é considerado a “origem” e o outro o “destino”. Graficamente, os segmentos são substituídos por setas.

No caso de grafos não-orientados, ou simplesmente grafos, dizemos que dois vértices são adjacentes se há uma aresta conectando-os, ao passo que uma aresta é incidente aos vértices que ela conecta. Por exemplo, no caso do grafo da figura 4, os vértices A e B são adjacentes e a aresta (C,D) é incidente em C e em D. No caso dos grafos orientados, dizemos que um

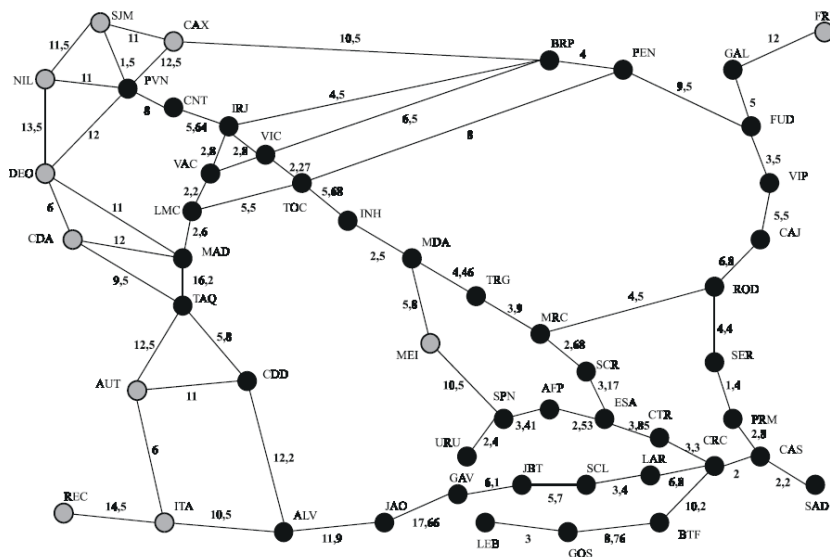
vértice  $X$  é adjacente a um  $Y$  se, e somente se,  $(X,Y)$  pertence ao conjunto de arestas do grafo. No caso de incidência em grafos orientados, há de se considerar que a aresta  $(X,Y)$  é incidente somente em  $Y$ , enquanto a aresta  $(Y,X)$  incide em  $X$ .

Estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte e muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre esse conhecimento. Dependendo da aplicação, as arestas do grafo podem ter direção, ligar um vértice a ele próprio e ainda ter um peso (numérico) associado. A seguir, listamos a aplicação de grafos em problemas de transporte metroviário e no sistema de buscas do Google.

O uso de modais de vias segregadas – como metrô, veículo leve sobre trilhos (VLT) e transporte rápido por ônibus (BRT, em inglês) – tem sido alternativa para sanar o problema de mobilidade urbana em diversas cidades do mundo. O trabalho de Carmo, Boaventura Netto e Portugal (2002), por exemplo, discute o projeto de uma rede metroviária através de um modelo de grafos, no qual os vértices são estações unidas por trechos de linhas, representados por arestas. Nessa experiência, os autores incluíram no modelo dados de curso de construção e de demanda de passageiros, fazendo com que o grafo passasse a ser valorado. Carmo, Boaventura Netto e Portugal (2002) apresentam, em seu texto, um exemplo baseado no metrô do Rio de Janeiro:



Figura 5 – Grafo que modela o metrô do Rio de Janeiro.



Fonte: Carmo; Boaventura Netto; Portugal, 2002, p. 22.

Ao final do estudo, Carmo, Boaventura Netto e Portugal (2002) destacam o uso deste modelo no processo de tomada de decisão em outros contextos de planejamento ou expansão, não só de um sistema viário, como também de outras modalidades de transportes, como o BRT (*Bus Rapid Transit*), ou Transporte Rápido por Ônibus, que utiliza veículos em vias segregadas.

Sabemos que hoje em dia a rede mundial de computadores é um mecanismo poderoso para a obtenção de informações. Com isso, além de questões de transporte, encontramos Teoria de Grafos em um dos buscadores mais populares: o *Google*. Isto despertou interesse das pesquisadoras Almeida e Coleman (2016) em discutir a contribuição da Matemática, por meio de grafos, para tamanho sucesso do buscador.

Quando digitamos um termo do qual desejamos obter informações no Google, encontramos uma lista de sites que possuem alguma ligação com

o que procuramos. Segundo o algoritmo utilizado pelo *Google*, apresentado em Almeida e Celeman (2016), a importância de um site depende da importância dos sites que possuem link para ele. Assim, forma-se uma rede de informações que pode ser representada por um grafo, em que cada aresta direcionada indica que existe *link* da página A (vértice A) para página B (vértice B). Trata-se, nesse caso, de uma *Web* admissível, isto é, em que cada página possui pelo menos um *link* para uma outra.

O *PageRank*, desenvolvido pelos fundadores do *Google*, Larry Page e Sergey Brin em 1998, é um algoritmo usado pelo buscador para determinar a relevância ou importância de uma página, a partir da existência de arestas entre os vértices que as representam. Segundo o *Google* (s.d.),

[...] a classificação das páginas (*PageRank*) confia na natureza excepcionalmente democrática da Web, usando sua vasta estrutura de *links* como um indicador do valor de uma página individual. Essencialmente, o *Google* interpreta um link da página A para a página B como um voto da página A para a página B. Mas o *Google* olha além do volume de votos, ou links, que uma página recebe; analisa também a página que dá o voto. Os votos dados por páginas ‘importantes’ pesam mais e ajudam a tornar outras páginas ‘importantes’”.

Com isso, considerando as aplicações dos grafos em problemas de transporte metroviário e no sistema de buscas do *Google*, percebemos que as estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte.

## **QUARTA PONTE: A ABORDAGEM HISTÓRICO-INVESTIGATIVA**

A pouca atenção dada na sala de aula à resolução e formulação de problemas, à interpretação e validação de resultados, à conjectura e prova, à discussão e argumentação contribui, segundo Segurado (2002), para criar nos alunos uma visão empobrecida do modo de trabalhar em Matemática. Com o objetivo de superar essa situação, propomos a metodologia da Investigação, que é, para os matemáticos, “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar respectivas propriedades” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 13).

Em sala de aula, investigações matemáticas também podem se constituir como atividades para os alunos, conforme a vertente apresentada a seguir:

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que reformulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 9).

O conceito de investigação para o ensino, enunciado acima, ajuda a trazer para sala de aula o espírito genuíno da atividade matemática. Neste caso, o aluno é convidado a agir como um matemático, formulando conjecturas, apresentando resultados, discutindo e argumentando com seus colegas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009). Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de maneira mais ou menos

consistente, utilizar vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática: a exploração e formulação de questões, a construção de conjecturas, o teste e a reformulação dessas hipóteses e a justificação de conjecturas, com avaliação do trabalho.

No processo investigativo, a curiosidade é o combustível para o desenvolvimento; já em Paulo Freire, a curiosidade contrapõe a pedagogia da resposta, fundamentada na Educação Bancária. De acordo com Freire (1996), os pressupostos dessa educação se assentam na narração alienante.

[...] A Educação Bancária, nesse sentido, repercute como um anestésico, que inibe o poder de criar próprio dos educandos, camuflando qualquer possibilidade de refletir acerca das contradições e dos conflitos emergentes do cotidiano em que se insere a escola e o aluno (SARTORI, 2010, p. 135).

Contrapondo-se à Educação Bancária, a concepção de uma educação problematizadora, segundo Freire (1996), está fundada na crença da humanização dos educadores e dos educandos. A pergunta ou situação que dispara a investigação é, nesse sentido, fundamental no processo educativo, pois...

[...] se colocam como desafio dentro da situação gnosiológica e surgem em um ambiente de liberdade e criatividade. Na educação bancária, prática educativa que coíbe a curiosidade e teme a manifestação das perguntas, o educador age como narrador de conteúdos, doador de respostas previamente elaboradas e prontas para ser [sic] memorizadas, dificultando o pensar certo, autêntico e crítico do educando (ALMEIDA; STRECK, 2010, p. 314).

Ainda sobre o processo de investigação no ensino de Matemática, Skovsmose (2000) destaca que o paradigma do exercício, marcante na cultura escolar, pode ser contraposto a uma abordagem de investigação. Segundo o pesquisador, neste modo de se trabalhar, cria-se um cenário que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Assim, nas palavras de Skovsmose (2000, p. 81), “quando os alunos

assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem”.

As questões sobre a gestão de sala de aula como tempo para a execução da atividade, se os alunos vão trabalhar em grupo ou individualmente e os recursos utilizados, exige que o professor tenha bem definidos os objetivos a serem atingidos. O desenvolvimento de atividades investigativas requer um conhecimento aprofundado do conteúdo abordado, pois o professor precisa acompanhar os questionamentos dos alunos e conduzir discussões coletivas. Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1998), geralmente a estrutura escolhida pelo professor para uma aula de investigação consiste em três fases:

- introdução da tarefa pelo professor (quer seja apenas um ponto de partida ou uma questão bem definida) e arranque da sua realização pelos alunos (interpretação da situação e definição do caminho a seguir),
- realização da tarefa (durante a qual o professor interage com os alunos individualmente ou em pequeno grupo), e
- apresentação de resultados pelos alunos e sua discussão (comparação das interpretações da tarefa, estratégias seguidas e resultados obtidos; é frequente surgirem novas questões para futura investigação).

(OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998, p. 4).

Completando as ideias apresentadas acima, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam que a primeira fase, embora curta, é importante por ser o momento em que o professor garante que todos os alunos entendem o sentido da tarefa. Tendo sido assegurada a compreensão dos alunos acerca da atividade que irá se realizar, o professor passa a assumir um papel mais de mediador, uma vez que as atividades matemáticas investigativas por si só não influenciam na aprendizagem do aluno. Nessa perspectiva, Oliveira, Segurado e Ponte (1998), afirmam que o papel do professor na mediação da aula é importante, principalmente para valorização e debate das diferentes estratégias utilizadas:

O professor terá como papel fundamental iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou estimulantes e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que tem habitualmente respostas correctas ou ideias válidas (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998, p. 3).

Propomos, neste material, uma abordagem histórico-investigativa, de modo que a realização de tarefas de investigação poderá proporcionar aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos. Co isso, uma reflexão sobre a utilização da História na Educação Matemática nos conduz a uma escolha teórica. Baseada nas ideias de Vygostky, a perspectiva sociocultural, defendida por nós, enxerga a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas em atividades didáticas de Matemática.

Em uma categorização referente ao uso de História da Matemática, Dynnikov e Sad (2007) apresentam três opções para o emprego de fontes históricas em sala de aula: de modo factual, de modo processual e como fonte de significado. No primeiro caso, a História da Matemática é utilizada para dar mais veracidade, por meio de nomes, imagens e registros. Assim, essa metodologia se apresenta de modo ilustrativo e estático, na qual a única incumbência do professor é escolher o material e preparar a exposição. A segunda forma, mais dinâmica, percebe as fontes históricas como instrumentos que auxiliam no ensino de Matemática, pois permitem que o aluno conheça o processo realizado por um Matemático para a resolução de um problema. Nesse caso, ainda não há uma transposição da história para o contexto escolar e o papel do professor é mediar e auxiliar nos registros. No terceiro modo de se utilizar de História em sala de aula, o papel das fontes históricas (primárias e secundárias) é produzir significados em meio às próprias experiências dos alunos, proporcionando, principalmente, uma ampliação da maneira com que eles entendem e lidam com a Matemática. Nesse caso, o professor precisa intensificar o dinamismo e os ecos produzidos pela voz de autores nos alunos.

Acreditamos que a História da Matemática é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que oportuniza um diálogo entre

práticas atuais e fontes históricas, conforme previsto nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos e de conhecimento que vão entrar na relação didática (BRASIL, 2006, p. 86).

Para atender às diretrizes apresentadas acima, a prática proposta neste material é orientada pela perspectiva sociocultural de Miguel e Miorim (2011) e o terceiro modo de utilizar a história, de Dynnikov e Sad (2007). Assim, na abordagem histórico-investigativa, a realização de investigações tem o objetivo de proporcionar aos alunos uma atividade semelhante à dos matemáticos, permitindo-lhes o prazer da descoberta (ROCHA, 2002) e apresentando-lhes a matemática como produção humana (MIGUEL, 1997; 2009).

## QUINTA PONTE: IMPLICAÇÕES EM SALA DE AULA



### ATIVIDADE 1: UMA CARTA PARA OS ALUNOS

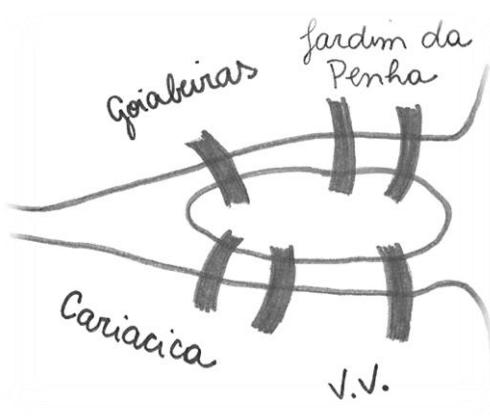
Um dos principais resultados do levantamento histórico realizado com trabalho de conclusão de curso (SÁ, 2014) diz respeito ao Problema das Seis Pontes de Vitória. Nesse sentido, realizamos uma “adaptação pedagógica” (MENDES, 2009, p. 109), adequando o problema das pontes da capital capixaba à carta recebida por Euler (que será apresentada na Atividade 4). Dessa forma, garantimos uma carga de aspectos provocadores da criatividade dos estudantes, defendida por Mendes (2009).

No documento a ser entregue para os alunos, substituímos o nome do prefeito pelo do pesquisador e o nome do professor Kihn pelo da professora regente da classe. Então, a carta elaborada também tem o papel de incentivar o empirismo e o raciocínio dedutivo.



Saudações!

Você prestaria um grande favor a mim e a professora Carla, se você nos enviasse a solução para o problema das seis pontes de Vitória, juntamente com uma justificativa. Nesta cidade há um rio atravessado por seis pontes e é perguntado se alguém pode atravessar todas as pontes de tal forma que cada ponte seja atravessada apenas uma vez. É possível fazer isso e voltar ao ponto de partida? Adicionei um esboço das referidas pontes.



Aguardo resposta,

Lauro.



## Comentários sobre a validação

No dia da entrega das cartas, em 2013, não pude acompanhar a aula de matemática nas turmas de segundo ano. Dessa forma, as cartas foram entregues à professora regente para que ela repassasse aos seus alunos. Com as cartas produzidas, esperávamos que pelo menos um aluno apresentasse rudimentos do Teorema da Existência do Caminho Euleriano para que esta carta fosse utilizada como disparador da primeira aula, quando se fosse discutir a solução de Euler. Nesse sentido, destacaríamos que a resolução do problema por um aluno de Ensino Médio não possui menor valor que a de um matemático.

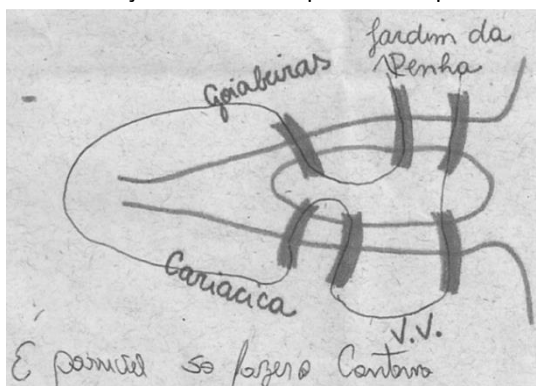
Iniciamos a aula seguinte recolhendo as cartas produzidas pelos alunos. Em uma turma, dos vinte e dois alunos em sala, cinco não entregaram o material. Em contrapartida, nenhum aluno da segunda turma deixou de entregar a carta e nem a entregou em branco. Ao observar as respostas dos alunos, notamos que os principais erros cometidos foram em decorrência da má interpretação do enunciado do problema ou da figura apresentada. Durante a resolução empírica, alguns alunos cometeram três tipos de erro:

- i) Não procurou voltar ao ponto de partida, o que indica que o aluno não se atentou para o questionamento sobre a possibilidade de se fazer o percurso e retornar ao ponto inicial.
- ii) Passaram pela mesma ponte duas vezes, o que indica que o aluno não se atentou para a orientação de cada ponte só deveria ser atravessada uma única vez.
- iii) Não respeitaram a delimitação das pontes, o que aponta para uma não atribuição de significado ao modelo matemático, de modo que o aluno

não percebeu que, na prática, estaria indo de Vila Velha à Vitória sem nenhum meio físico especificado.

Embora não tenham justificado sua resposta, alunos das duas turmas apresentaram uma alternativa de trajeto. Sabendo que não poderia ser realizado um percurso que passasse por todas as pontes e voltasse ao ponto de origem passando uma vez por cada ponte, os alunos comentaram que este percurso poderia ser realizado pela Rodovia do Contorno<sup>2</sup>, como mostra a figura a seguir.

Figura 6 – Solução alternativa apresentada pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador, 2013.

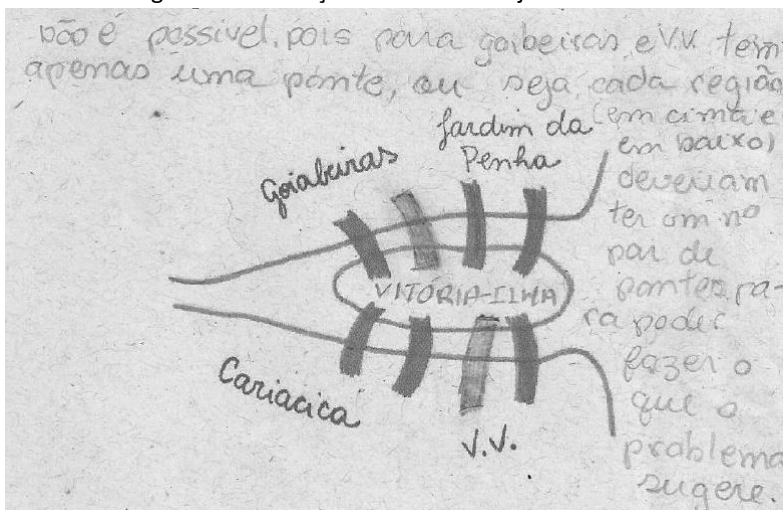
Esta alternativa de trajeto já havia sido apresentada nos Estudos Pilotos, quando foi nos revelado que a Rodovia do Contorno atravessa o Rio Santa Maria da Vitória.

Apenas um dos alunos conseguiu elaborar um enunciado que justifica a inexistência do caminho solicitado pela professora Carla (Figura 5).

---

<sup>2</sup> A Rodovia do Contorno é o nome popular do trecho da BR-101 entre Carapina, na Serra, e a interseção da BR-101 com a BR-262, em Cariacica.

Figura 7 – Resolução correta e com justificativa.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador, 2013.

Transcrição do texto:

*Não é possível, pois para Goiabeiras e V.V. tem apenas uma ponte, ou seja, cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um nº par de pontes para poder fazer o que o problema sugere.*

Ao dizer que “cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um número par de pontes”, o aluno apresenta o Teorema dos Caminhos Eulerianos no seu discurso. Assim, como utilizaremos esta resolução para discutir a estruturação da Teoria dos Grafos, já poderemos inferir que a utilização da carta adaptada possibilita discussões sobre aspectos básicos e iniciais sobre grafos.

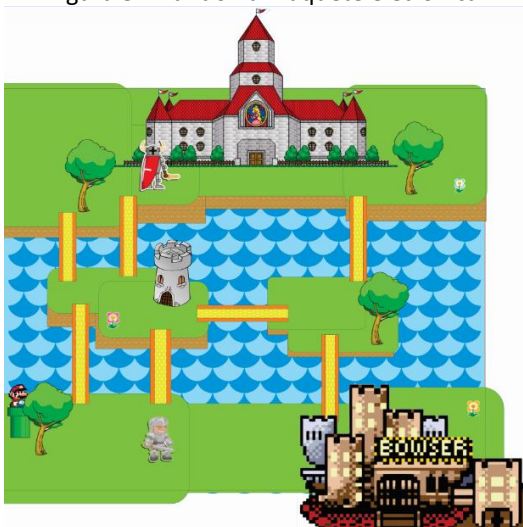


## ATIVIDADE 2: PROJETANDO A IMAGEM DE KÖNIGSBURG

A proposta apresentada neste capítulo foi validada em novembro de 2015, com três turmas de segundo ano de ensino médio do turno matutino. Durante os dias em que acompanhamos as turmas, a quantidade de alunos variou de vinte a vinte e cinco.

Nesta oportunidade, a maquete eletrônica, tema da pesquisa de mestrado, foi substituída pela projeção da imagem de fundo, de modo que a proposta se mantivesse próxima ao planejado pelo pesquisador. A imagem do fundo da maquete, apresentada na figura 8, foi construída por um aluno do Ifes – Linhares. Segundo ele, a inspiração pela aparência medieval foi afinada com um dos alunos que construíram a Maquete Eletrônica. Os alunos retomaram o estilo do jogo *Super Mário World*, com uso das imagens de castelos e de personagens e do esquema de cores.

Figura 8 – Fundo na maquete eletrônica.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.



## Comentários sobre a validação

Em sala de aula, o pesquisador projetou a imagem de fundo da maquete, dizendo que esta representava uma cidade do interior da Rússia. Em seguida, apresentou uma adaptação do Problema das Pontes de Königsberg, dizendo que uma princesa do castelo mais ao norte gostaria de passear pelo seu reino, atravessando cada uma das pontes uma única vez e retornando a sua residência. Dessa forma, o pesquisador convidou os alunos a investigarem o problema, para posteriormente formularem uma carta coletiva de resposta à princesa. Assim, mantemos o gênero textual original da História da Matemática.

Após a enunciação do problema, o pesquisador e a professora deixaram que os alunos fizessem tentativas, criassem hipóteses e discutissem entre si. Em duas turmas, alguns alunos chegaram a se levantar da cadeira para discutir com seus colegas possíveis trajetórias e procurar por explicações (figuras 9 e 10).

Figura 9 – Aluna apresentando suas conjecturas aos colegas.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

Figura 10 – Alunas comparando suas hipóteses frente à turma.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

Na terceira turma, embora os alunos não tenham se levantado para apresentar suas hipóteses, desenvolveram suas discussões em pequenos grupos, enquanto também tentavam criar, em seus cadernos, um caminho que passasse pelas sete pontes (figura 11).

Figura 11 – Aluna tentando criar caminhos em seu caderno.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

Sobre o comportamento dos alunos que não foram ao quadro, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 30) destacam que “pode parecer que nada está acontecendo ou que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade, no entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas”. Nesse sentido, analisando tanto o caso dos alunos que foram a frente quanto os que ficaram em suas cadeiras conjecturando, confiamos que o cenário de investigação foi estabelecido em sala de aula.

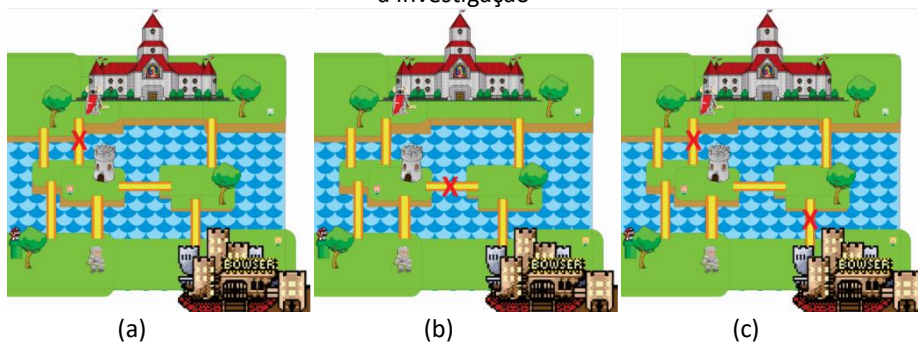
A construção de uma carta de resposta à princesa, atribuída como atividade posterior, apresentou o problema de investigação; tarefa com o objetivo de conduzir os alunos à descoberta de uma conjectura, o que caracteriza as atividades investigativas para descobrir (GOLDENBERG, 1999). Neste caso, a formalização de um conceito constitui a parte crítica, que diferencia este tipo de investigação da categoria apresentada anteriormente. Como esta dinâmica foi planejada para uma aula de 50 minutos, conduzimos este momento como uma oportunidade para sistematização do que foi construído. Este direcionamento também é apontado por Goldenberg (1999, p. 6) quando afirma que uma atividade investigativa para descobrir “poderá igualmente servir como parte do corpo ou mesmo final de uma sequência de aprendizagem”.

Ao final do processo investigativo, os alunos das três turmas perceberam que o problema não tinha solução. As cartas coletivas foram estruturadas pelos alunos e escritas na lousa pelo pesquisador. Com isso, evidenciamos que o papel do professor em mediar a discussão, manter o interesse pelo assunto, apresentar contra-argumentações e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que tem habitualmente respostas corretas (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998, p. 3).



Durante a concepção da carta, os alunos justificaram a impossibilidade do passeio pela quantidade total ímpar de pontes da região (sete). Antes de escrever isso na carta, o pesquisador questionou os alunos se a retirada da ponte que liga a ilha da torre com a margem norte (figura 12a) solucionaria o problema. Os alunos perceberam que não e, em uma das turmas, a aluna argumentou que esta ponte não poderia ser retirada para não perder a simetria da figura. Para a turma desta aluna, o pesquisador apresentou o contraexemplo da figura 12b, que contém uma quantidade par de pontes, dispostas simetricamente, e que também não possui caminho. Finalizando este teste de hipóteses, o pesquisador sugeriu a eliminação de duas pontes, conforme ilustra a figura 12c, deixando a região com cinco pontes, sem simetria e com o caminho solicitado pela princesa.

Figura 12 – Modelos dos contra-exemplos apresentados pelo pesquisador durante a investigação



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

A contra-argumentação reitera a postura de Oliveira, Segurado e Ponte (1998), sobre a importância da mediação em certos momentos da investigação; por meio da interação entre o pesquisador e as turmas que os alunos passaram a notar que o impedimento para o passeio pelas pontes não estava no número

total de pontes, mas na quantidade de pontes que cada região possuía. Assim, atestaram que para a princesa percorrer todas as pontes e retornar ao seu castelo, seria necessário que todas as regiões tivessem uma quantidade par de pontes.

A partir da análise da questão de paridade, o pesquisador fez um breve questionamento aos alunos: seria possível sair de algum local da Grande Vitória, percorrer as seis pontes da região metropolitana e voltar ao ponto de partida? Ao refletirem e discutirem, os alunos concluíram que: por possuir duas regiões com quantidade ímpar de pontes, seria possível percorrer todas as pontes da Grande Vitória, mas sem retornar ao ponto de partida.

Em síntese, após essas investigações, os estudantes conjecturaram que se uma região tem mais de dois pontos com quantidade ímpar de pontes, então não é possível realizar um passeio que passe por todas as pontes. Contudo, se essa região possuir exatamente dois pontos com quantidade ímpar de pontes, então é possível percorrer todas as pontes, desde que o passeio comece em um dos locais com quantidade ímpar de acessos. E, ainda, que se na região não houver pontos com quantidade ímpar de pontes, então é possível realizar um passeio que passe por todas as pontes e voltar ao ponto de partida. Assim, sem saber, os alunos tinham acabado de enunciar o Teorema dos Caminhos Eulerianos, de 1736.

No final deste primeiro dia, após informar os alunos sobre a veracidade do problema apresentado, passamos a sistematizar conceitos abordados ao longo das investigações. Considerando o percurso traçado pelos alunos durante a aula, definimos um grafo a partir do exposto em Malta (2008, p. 15): “Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos”. Em seguida, retomamos a conjectura apresentada na carta coletiva para formalizar o Teorema do Caminho Euleriano (apresentado na página 12 deste material).



### ATIVIDADE 3: USANDO A MAQUETE ELETRÔNICA

A experiência de ensino com utilização da maquete eletrônica aconteceu em abril de 2016, com duas turmas de segundo ano do turno matutino. Este recurso foi construído durante a pesquisa de mestrado (SÁ, 2016), de natureza qualitativa, investigou aprendizagens discentes durante construção e utilização de uma maquete eletrônica para ensino da Teoria de Grafos.

Para construção da maquete eletrônica, adotamos como formato metodológico a pesquisa-ação, considerando a participação de alunos e professores do curso técnico em Automação Industrial do Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Linhares, na construção da maquete eletrônica. As etapas da pesquisa compreenderam: fase exploratória, definição da abordagem, realização de seminários, registros em atas, apresentação do projeto em Feiras de Matemática e validação da proposta educativa em dois momentos.

Para iniciar a interação com a maquete eletrônica, o usuário deve selecionar a ilha de partida, o que acende um LED verde. Em seguida, pressiona o botão de uma das pontes que dão acesso à região onde ele está, acendendo seu LED amarelo na ponte utilizada e indicando o novo local onde o usuário se encontra com um outro LED verde.

Figura 13 – Interação com a maquete, com destaque para a LED acesa indicando ponte já utilizada.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2015.

A cada nova interação, apaga-se o LED verde de um local e acende-se o do destino, acendendo-se também o LED da ponte recém-atravesada. Além disso, mantêm-se acessos os LEDs amarelos das pontes utilizadas. Quando não há mais possibilidade de deixar uma região sem repetir nenhuma ponte, acende-se um LED vermelho no canto superior-esquerdo da maquete eletrônica, indicando fim das possibilidades de percurso. O usuário deve, então, pressionar o botão de reiniciar, que fica ao lado do LED vermelho, para tentar realizar o percurso novamente.



Caro professor, você também pode utilizar a maquete eletrônica com seus alunos! Para isso, reserve uma visita ao Laboratório de Matemática do Ifes *campus* Vitória ou ao Ifes *campus* Linhares, com os autores deste material, no endereço [lauro.sa@ifes.edu.br](mailto:lauro.sa@ifes.edu.br) e [sfraga@ifes.edu.br](mailto:sfraga@ifes.edu.br).



## Comentários sobre a validação

Dando início à intervenção, o pesquisador e a professora apresentaram a maquete eletrônica, contextualizando sua criação por alunos do Ifes Linhares. Em seguida, o pesquisador apresentou o Problema das Sete Pontes, sem explicitar que se tratava de uma situação real, da cidade de Königsberg. Após a enunciação do problema, o pesquisador e a professora organizaram os alunos em grupos de até três estudantes, para que pudessem interagir com a maquete de modo mais organizado, realizando investigações para solucionar o problema.

Figura 14 - Alunos realizando investigações na maquete eletrônica.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2016.

Em uma das turmas, os alunos se revezaram em frente à maquete e, enquanto um grupo fazia uso do recurso, os demais estudantes começavam a conjecturar possibilidades de respostas, a partir do registro da maquete em foto. Neste caso, percebemos sua contribuição como catalisador da curiosidade, elemento importante do processo investigativo.

Figura 15 – Alunos realizando investigações prévias a partir da foto da maquete eletrônica.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2016.

Figura 16 – Alunos realizando investigações prévias a partir da foto da maquete eletrônica.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2016.

Ao deixar que os alunos fizessem tentativas, criassem hipóteses e discutissem entre si, procuramos, novamente, seguir as orientações de Skovsmose (2000, p. 71), que “no cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo”. Os alunos, então, começaram a tentar criar um caminho que passasse pelas sete pontes, encarando o desafio que lhes foram apresentados.

Com a utilização da maquete eletrônica, confirmamos nossa hipótese em relação a representação imagética dos grafos pelos alunos. Como não foi possível operar no modelo apresentado, o que ocorreu durante a atividade de validação, quando os alunos usaram pincel para simular caminhos na lousa onde a o fundo da maquete foi projetado. Percebemos que este impedimento incentivou os alunos a construírem seus modelos no caderno e que, nessa transposição, rudimentos da representação gráfica dos grafos surgiram, potencializando assim o processo de construção dos conceitos relacionado a este conteúdo.

Na outra turma de segundo ano, os alunos também adotaram a estratégia da foto da maquete como subsidio para a investigação. Entretanto, com o desenvolvimento da aula, levantaram e se aproximaram à maquete, para realizarem melhor suas análises observando diretamente o recurso.

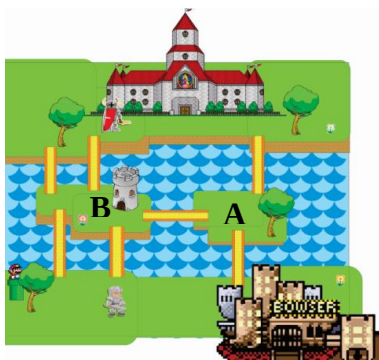
Figura 17 – Alunos rodeando a maquete eletrônica no primeiro de atividades.



Fonte: Acervo dos pesquisadores, 2016.

A partir da observação, creditamos o sucesso da maquete principalmente ao *layout* com o estilo do jogo *Super Mário World*, fazendo uso das imagens de castelos e de personagens e do esquema de cores. Outro fator importante foi a interação oportunizada pela existência de botões de das lâmpadas de LED.

Durante a interação entre a maquete, atuamos na perspectiva da educação problematizadora, em que a pergunta não é o mais importante no processo educativo. Nesta concepção de educação, o professor passa a ser responsável por iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos e colocar questões esclarecedoras ou estimulantes:



Aluno: Tem que começar por aqui [A], né?

Lauro: Sim... Na maquete tem que começar por aqui, mas no caderno pode começar por qualquer uma das quatro regiões...

Aluno: Tá... Eu consegui... Olha aqui... Ia ter que trocar uma ponte...

Lauro: Mas no caso da maquete não tem como, né...

Aluno: É... Mas se eu começar por aqui [A] não tem como eu voltar...

Lauro: Por que?

Aluno: Porque se eu começar por aqui [A] e vir por aqui [A-B]...

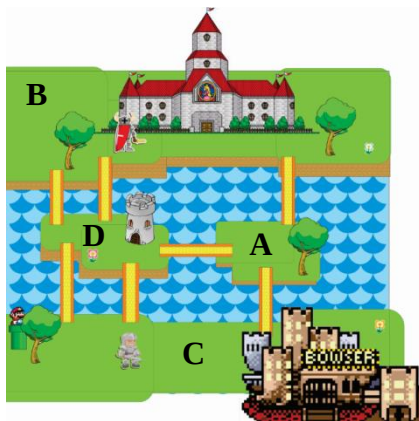
Lauro: Mas qual é o problema, então?

Aluno: Uma ponte vai ficar faltando...

Lauro: Mas, do jeito que está, tem alguma forma de fazer?

Aluno: Ah, não tem não...

No exemplo a seguir, percebemos o conceito de investigação matemática para o ensino apresentado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Neste caso, os alunos formulam conjecturas, apresentam resultados, discutem e argumentam entre si, propondo possibilidades para travessia das pontes:





Aluna A: Agora você está aqui [A]... Aí você pode vir pra cá [B]...

Aluno B: Aí depois pra cá [C]...

Aluna A: Não tem como, filho de Deus... você quer pular da ponte?

[risos]

Aluna A: Passa pra cá [D], olha... Aí você já passou por duas pontes até agora...

Aluna C: Essa você tem que deixar aberta...

Aluna A: Aí você vai nadando, né...

Aluna C: Não... você tem que deixar aberta pra você passar por cima dela...

Aluna A: Ah, tá... Agora você está aqui [D] e faltou uma, duas, três, quatro pontes... Aí você vai voltar pra cá [C] e ir pra cá [A]...

Aluna C: Só que aí vão ficar faltando três pontes...

Aluno B: Aí você pode passar por aqui [A-D] e faltar duas pontes...

Aluna A: Ah, saquei...

Aluna C: Só que não vai dar pra voltar pr'aqui [A] porque já usamos as três pontes...

Aluna A: Sempre vai faltar uma...

Aluna C: Eu também acho que sempre vai faltar uma...

Finalizando a primeira aula, propusemos a escrita de um relatório de investigação que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 109), permitiria “ao professor saber se os alunos estão progredindo de acordo com suas expectativas [...] e ao aluno saber como seu desempenho é visto pelo professor”. Esse instrumento substituiu a carta coletiva proposta na primeira experiência de ensino, ou seja, os alunos precisariam apresentar neste relatório não as conclusões que tiraram da investigação, mas também as questões levantadas acerca da situação proposta, os modos como organizaram os dados e as conjecturas provadas e refutadas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2008).

Apesar das orientações dadas pelo pesquisador e pela professora de matemática da turma, observamos nas respostas dos relatórios – talvez por não estarem acostumados, inicialmente, com esse tipo proposta de análise – a ausência das questões levantadas acerca da situação, dos modos de organização dos dados e das conjecturas provadas e refutadas; mesmo os alunos tendo apresentado, de

forma prática, tais questões durante a aula. O que recebemos como respostas nos relatórios foram, de modo simplificado, conclusões da investigação com narrativas sem argumentação.

A conclusão da maioria dos grupos relacionou o problema à quantidade total de pontes, equívoco elucidado na aula seguinte, quando o professor apresentou novas questões que permitiram aos alunos conjecturar se uma região tem mais de duas porções de terra com quantidade ímpar de pontes, então não é possível realizar um passeio que passe por todas as pontes.

Foi curioso perceber que em dois relatórios, a simplicidade na redação da tarefa investigativa fez com que alguns grupos associassem o problema a um quebra-cabeça ou ainda “uma pegadinha” para testar o raciocínio dos alunos. A partir dos enunciados produzidos pelos grupos, corroboramos a ideia que investigar significa propor questões para as quais não temos resposta pronta e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos interpretar, estudar e responder de modo organizado.

Sobre a situação relatada nesta atividade, reafirmamos o papel do professor na mediação da aula, considerando sua contribuição na validação de resultados e na prova de conjecturas (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998). Nessa mesma perspectiva, acreditamos que o tempo para discussão dos resultados e validação dos modelos precisa ser ampliado nas próximas oportunidades, para que os alunos consigam elaborar representações mais complexas.



#### **ATIVIDADE 4: FICHA COM A HISTÓRIA DA TEORIA DE GRAFOS**

Nesta seção, apresentamos um material que apresenta o que se acredita ser a estratégia adotada por Euler para resolver o Problema das Sete Pontes de Konisberg. Sua produção ocorreu para o trabalho de conclusão de curso (SÁ, 2014), mas sua validação foi feita também para a pesquisa de mestrado.

Para tornar o processo mais dinâmico, não apresentamos diretamente o modelo formulado pelo matemático suíço. Transformamos as heurísticas de Euler em dicas para os alunos, deixando que eles elaborassem os diagramas e fizessem a contagem dos graus dos vértices, até chegar ao Teorema da Existência de Caminhos Eulerianos.

Ao validarmos a atividade 2, em 2015, percebemos que, apesar dos resultados positivos na avaliação trimestral, a sistematização de discussões não favoreceu a construção dos conceitos por parte dos alunos. Dessa forma, ao validar a atividade 3, em 2016, ampliamos a produção escrita dos alunos com a solicitação de um relatório de investigação e na formalização escrita de conceitos de grafos, vértices, arestas, grau de vértice e caminho euleriano, por meio de atividade de sistematização, detalhada a seguir.

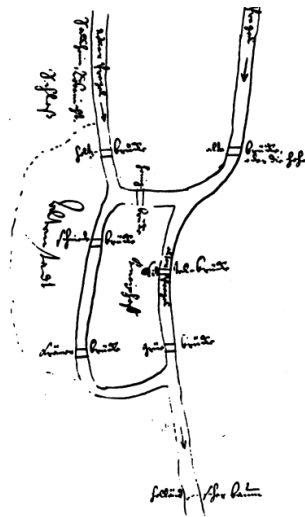
## UM POUCO DE HISTÓRIA

Numa cidade russa chamada Konisberg havia sete pontes cruzando o Rio Pregel. Muitos moradores dessa cidade se questionavam sobre a existência de um caminho no qual alguém pudesse sair de algum ponto da cidade, percorrer as sete pontes uma única vez e voltar ao ponto inicial. Essa dúvida ficou no ar até que Leonard Euler recebeu uma carta do prefeito da cidade vizinha a Konisberg, a pedido de um professor de matemática. Veja um fragmento da carta recebida por Euler.

*Danzig, 09 de março de 1736.*

*Você prestaria a mim e a nosso amigo Kiihn o mais valioso serviço, colocando-nos muito em dívida com você, culto Senhor, se você nos enviasse a solução, que você conhece bem, para o problema das sete pontes Könisberg, juntamente com uma prova. [...] Eu adicionei um esboço das referidas pontes...*

*Carl Leonhard Gottlieb Ehler*



Para solucionar o problema, Euler criou um modelo matemático que simulasse a cidade russa, que é hoje chamado de **grafo**. Para tanto, ele representou as porções de terra (ilhas e margens) por pontos e as pontes por linhas ligando esses pontos.

**1)** Tente desenhar no espaço abaixo o grafo que Euler construiu.

Após chamar cada linha de aresta e cada ponto de vértice, Euler passou a analisar o número de arestas que incide em cada vértice. Esse número é chamado de *Grau de um vértice* e é escrito como  $G(v)$ , onde  $v$  é o vértice analisado.

**2)** Quantos vértices tem o grafo que você desenhou? E quantas arestas?

---

**3)** Enumere os vértices do seu grafo com letras do nosso alfabeto (A, B, C,...) e em seguida, diga qual o grau de cada um desses vértices.

---

---

**4)** Observe o grafo que você esboçou na atividade 1 e veja se é possível percorrer todas as pontes e voltar ao ponto inicial. Justifique sua resposta.

---

---

Na linguagem da Teoria dos Grafos, o passeio que percorre todas as arestas e retorna ao ponto inicial é chamado de *caminho euleriano fechado*. Determinamos um caminho desse tipo por meio do Teorema

que diz: *um grafo conexo admite caminho euleriano fechado se, e somente se, todos os vértices têm grau par.*

Vale lembrar que, também há os *caminhos eulerianos abertos*, nos quais é possível realizar um trajeto que percorre todos as arestas, sendo que os pontos inicial e final são distintos. Para que um grafo possua um passeio euleriano aberto, ele precisa ter exatamente dois vértices com grau ímpar.

**5)** A partir das discussões realizadas, o que é possível concluir? Escreva suas conclusões em forma de carta, respondendo à correspondência do prefeito Carl Ehler.

---

---

---

---

A partir da leitura do texto e da resolução das atividades, escreva o que você entende por...

a) Grafos: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) Vértices: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

c) Arestas: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d) Grau de vértice: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

e) Caminho Euleriano: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



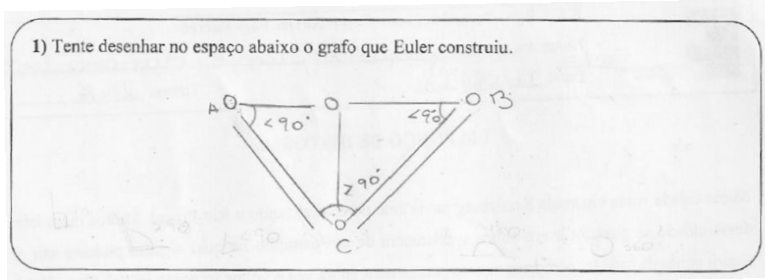
## Comentários sobre a intervenção

Após recolher as cartas dos alunos, na validação da atividade 1, entregamos a atividade que narra o processo de construção da Teoria dos Grafos, por Euler. Para leitura do texto e resolução das questões, os alunos se organizaram em duplas ou em trios, que foram designados pelos próprios alunos. A seguir, apresentamos respostas dos alunos e algumas reflexões sobre essas soluções. De acordo com o referencial teórico do Jogo de Vozes e Ecos, nas respostas dos alunos, encontramos ecos produzidos pela voz dos autores. Esses ecos podem ser classificados em superficiais, mecânicos e de assimilação.

Os **ecos superficiais** são produzidos quando o aluno não consegue entender a voz. Nesta experiência, os ecos superficiais aconteceram principalmente no emprego da notação da Teoria de Grafos ou na confusão entre os termos dessa teoria e os da Geometria. Na primeira questão, por exemplo, os alunos precisariam construir um modelo semelhante ao elaborado por Euler. A dupla que apresentou a resolução a seguir (figura 18) elaborou corretamente um modelo matemático que poderia simular a cidade russa. Entretanto, quando as alunas tentaram identificar o grau dos vértices, elas acabaram aplicando o conceito de graus de Geometria, quando deveriam analisar o número de arestas que incide em cada vértice.



Figura 18 – Eco superficial emitido durante a resolução da primeira questão.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Embora o material impresso explicasse que o grau de um vértice é escrito como  $g(v)$ , onde  $v$  é o vértice analisado, a mesma dupla não conseguiu utilizar a notação adequada e fez uso de um registro próprio para expressar esse conceito. Ainda que os números utilizados (3 e 4) apontem para uma identificação da quantidade de arestas que incidia em cada vértice, a presença do símbolo de graus ( $^{\circ}$ ) retoma a confusão entre nomenclaturas da Geometria e da Teoria dos Grafos. Além disso, a dupla só expressou o grau de três dos quatro vértices, como se pode perceber ao associar as figuras 18 e 19.

Figura 19 – Eco superficial emitido durante a resolução da terceira questão.

3) Enumere os vértices do seu grafo com letras do nosso alfabeto (A, B, C, ...) e em seguida, diga qual o grau de cada um desses vértices.

3AG; 3BG; 4CG

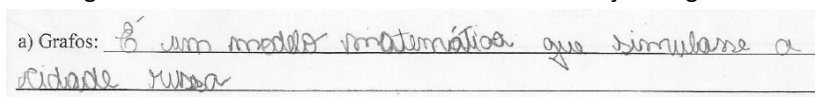
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Além de todos os indícios apresentados, a dupla também apresenta uma incoerência, quando na resposta da primeira questão ela indica que o grau do vértice C é maior que noventa graus e na terceira questão ela informa que o grau desse vértice é 4. Sendo assim, podemos perceber que a dupla

em questão apresenta todas as características do eco superficial apresentadas em Boero, Pedemonte e Robotti (1997).

Segundo Boero, Pedemonte e Robotti (1997), **os ecos mecânicos** acontecem quando os alunos repetem ou parafraseiam a voz verbal ou a solução correta de um exercício padrão. É o que aconteceu com uma das duplas observadas, quando tentaram definir grafos, conforme exposto na figura 20. Nota-se que o conceito apresentado pela dupla é uma transcrição das informações apresentadas no texto. Não houve preocupação sequer em alterar a flexão do verbo “simular”, que fora escrito exatamente como consta na voz do narrador.

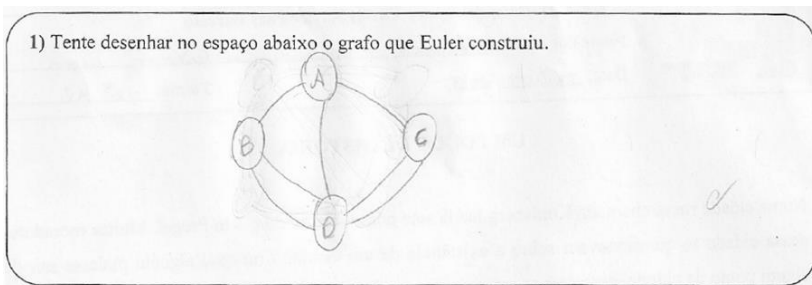
Figura 20 – Eco mecânico emitido durante a definição de grafos.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

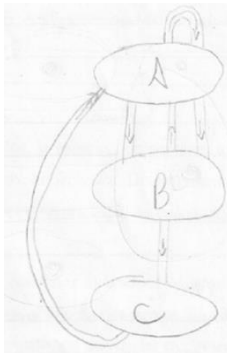
Outra característica dos ecos mecânicos apresentada em Boero, Pedemonte e Robotti (1997) é que o estudante não ultrapassa este nível se não for incapaz de explorar o conteúdo e/ou o método transmitido pela voz, a fim de resolver um problema que difere, em certa medida, da situação inerente à voz. Essa característica se manifestou em uma das duplas que seguiu as orientações e elaborou um modelo matemático para o Problema das Sete Pontes de Konisberg (figura 21), mas que não conseguiu se apropriar da ideia apresentada para aplicá-la no Problema das Seis Pontes de Vitória (figura 22).

Figura 21 – Resolução da primeira questão por uma das duplas.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Figura 22 – Tentativa de resolução do Problema das Pontes de Vitória.



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Nesse exemplo, podemos dizer que há um discurso objetivado, pois o aluno demonstra identificar as informações e o contexto no qual o enunciado está inserido. Em contrapartida, não há apropriação dessas informações e nem inserção no contexto do citado, já que ele não foi capaz de empreender seus conhecimentos em uma atividade que em pouco se diferenciava da original.

Os **ecos de assimilação** podem ser detectados quando o aluno é capaz de transferir o conteúdo e/ou método transmitido pela voz para outras situações problemas propostas, que são parcialmente semelhantes ao

inerente à voz. No caso da figura 23, percebemos que a inserção de palavras que não estavam presentes na narrativa entregue aponta para um processo de apropriação do discurso e produção de um novo enunciado, que é gramaticalmente adequado à situação proposta.

Figura 23 – Eco de assimilação emitido durante a definição de grafos.

a) Grafos: São representações gráficas capazes de simular lugares para resolução de problemas

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador.

Figura 24 – Eco de assimilação emitido durante a definição de grafos.

a) Grafos: Grafos é um modelo de mapa que nos ajuda a chegar os resultados mais mais rápidos

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador, 2013.

Tanto no enunciado da figura 23 quanto no da figura 24, não conseguimos delimitar o enunciado do citante e o do citado. Com efeito, verifica-se que, nesses discursos, os alunos produziram um discurso bivocal, o que evidencia a compreensão e apropriação dos enunciados anteriores.

## SEXTA PONTE: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Durante a validação das atividades deste material, foi possível estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e do matemático Euler. Na primeira intervenção, em 2013, verificamos que alguns alunos apresentaram rudimentos do Teorema da Existência do Caminho Euleriano e, além disso, um aluno enunciou o teorema durante a resolução do Problema das Pontes de Vitória. Com efeito, essas cartas foram utilizadas como disparador da discussão da solução de Euler. Nesse sentido, acreditamos ter evidenciado que a resolução de um aluno de Ensino Médio não possui menor valor que a de um matemático.

Durante a pesquisa de mestra, quando validamos as atividades 2 e 3, percebemos que os alunos fugiram da crença de uma “realidade estática” (SARTORI, 2010, p. 135), condenada na perspectiva freireana. Dessa forma, os estudantes assumiram o processo de exploração e explicação, fazendo com que o cenário de investigação se constituísse como um ambiente de aprendizagem (SKOVSMOSE, 2000).

Após a validação da atividade 4, que narra o processo de criação da Teoria dos Grafos, observamos que os alunos produziram ecos de diferentes tipos. Os ecos superficiais foram marcados pela não compreensão da voz do narrador e pela confusão entre as nomenclaturas utilizadas na Teoria de Grafos e na Geometria. Isso oportunizou uma revisão do material na pretensão de destacar as diferenças entre os termos arestas e vértices, em função de cada contexto. Os ecos mecânicos caracterizaram o grupo de alunos que apenas consultou o material entregue sem que houvesse apropriação do conteúdo trabalhado. Os ecos de assimilação, embora em menor quantidade, mostraram que a utilização de conceitos antes de uma apresentação formal potencializa o processo de compreensão do discurso,

uma vez que após vivenciarem uma situação alusiva à criação da Teoria dos Grafos, alguns alunos conseguiram se apropriar melhor dos conceitos apresentados.

A partir da realização desse estudo, inferimos que algumas contribuições da História da Matemática na abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio são de caráter cognitivo e social. Por caráter cognitivo, entendemos que os ecos produzidos pelos alunos durante a atividade proposta apontam para uma apropriação do conhecimento facilitado por meio do uso da História da Matemática. Por caráter social, destacamos que a perspectiva histórica nos permite mostrar que a matemática é uma ciência em contínuo desenvolvimento e que este processo é fruto de trabalho de todas as pessoas.

Por fim, mostrando-se como uma abordagem possível, este material aponta novos caminhos para investigações em Educação Matemática. Ainda sobre Teoria dos Grafos, torna-se oportuno pesquisar contribuições de outras metodologias na abordagem desse tema no Ensino Médio e até mesmo no Ensino Fundamental.

## SÉTIMA PONTE: REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria de Fatima Lins Barbosa de Paiva; CELEMAN, Soraya. A Matemática escondida no Google. **Revista do Professor de Matemática**, v. 80, p. 42-45, 2013. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/80/10.html>>. Acesso em: 14 mai. 2016.

ALMEIDA, Cristóvão Domingos de; STRECK, Danilo R. Pergunta. In: STRECK, Danilo R.; REDIN, Euclides; ZITKOSKI, Jaime José. **Dicionário Paulo Freire**. 2. ed., ver. amp. 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Osvaldo. **Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos**. 4.ed. São Paulo: E. Blücher, 2006.

BOERO, Paolo; PEDEMONTE, Bettina; ROBOTTI, Elisabetta. Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a vygotskian perspective. In: PME CONFERENCE, 21nd, 1997, Finlândia. **Proceedings...** Disponível em: <<http://www.dm.unito.it/semdidattica/2011/app/boero21.pdf>>. Acesso em: 21 out. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2006.

CARMO, Maria Rita Rocha; BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; PORTUGAL, Licínio da Silva. Uma heurística interativa para geração de caminhos em grafos com restrição de grau: aplicação ao projeto de sistemas metroviários. **Pesquisa Operacional**, v. 22, n. 1, p. 9-36, jun. 2002.

DYNNIKOV, Circe Mary Silva da Silva; SAD, Ligia Arantes. **Uma abordagem pedagógica para o uso de fontes originais em História da Matemática**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo Básico Escola Estadual - Ensino médio: área de Ciências da Natureza**. Vitória: SEDU, 2009. v. 2. Disponível em: <[http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU\\_Curriculo\\_Basico\\_Escola\\_Estadual.pdf](http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual.pdf)>. Acesso em: 06 out. 2012.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GOLDENBERG, E. Paul. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 35-50.

GOOGLE. **Por que usar o Google**. s.d. Disponível em: <[http://www.google.com/intl/pt-BR/why\\_use.html](http://www.google.com/intl/pt-BR/why_use.html)>. Acesso em: 14 mai. 2016.

HOPKINS, Brian; WILSON, Robin J.. The truth about Konisberg. **The College Mathematics Journal**, vol. 35, n. 03, p. 198-207, mai, 2004.

LÓVASZ, László; PELIKÁN, József; VESZTERGOMBI, Katalin. **Matemática discreta**: elementar e além. Tradução de Ruy de Queiroz. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MALTA, Gláucia Helena Sarmento. **Grafos no Ensino Médio**: uma inserção possível. 2008. 158f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MENDES, Iran Abreu. Atividades Históricas para o ensino de Trigonometria. In: MIGUEL, Antônio. et. al. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, Antônio. et. al.. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. As potencialidades pedagógicas da história da matemática da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **ZETETIKÉ**, Campinas/SP, v. 5, n. 8, Jul./Dez. 1997. p.73-105.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI. **Actas**. Portalegre: SPCE-SEM, 1998 (p.107-125). Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto10.pdf>> Acesso em: 30 ago. 2014.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.



ROCHA, Alexandra. Os alunos de Matemática e o trabalho investigativo. In: Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI). **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Associação dos professores de Matemática, 2002.

SÁ, Lauro Chagas e. **História da Teoria dos Grafos e algumas contribuições no Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, 2014.

SÁ, Lauro Chagas e. **Construção e utilização de maquete eletrônica para ensino de grafos**: aprendizagens discentes a partir de uma abordagem histórico-investigativa. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Vitória – ES, 2016.

SACHS, Horst; STIEBITZ, Michael; WILSON, Robin J.. An historical note: Euler's Konisberg Letters. **Journal of Graph Theory**, vol. 12, n. 01, p. 133-139, 1988.

SARTORI, Jerônimo. Educação bancária/Educação problematizadora. In: STRECK, Danilo R.; REDIN, Euclides; ZITKOSKI, Jaime José. **Dicionário Paulo Freire**. 2. ed., ver. amp. 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000, p. 66-91.

**Este guia didático apresenta propostas para abordagem de grafos no ensino médio, contemplando os marcos teóricos da Investigação Matemática e da História da Matemática para o ensino. Foi elaborado durante a pesquisa de mestrado “*Construção e utilização de maquete eletrônica para ensino de grafos: aprendizagens discentes a partir de uma abordagem histórico-investigativa*” de Lauro Chagas e Sá, sob orientação da Profa. Dra. Sandra Aparecida Fraga da Silva, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), no ano de 2016.**

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-8263-128-7



9 788582 631287



**INSTITUTO FEDERAL**  
Espírito Santo