PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Proposta didática: Reflexões acerca do uso da aprendizagem baseada em problemas no ensino de conceitos matemáticos

Gisele de Gouvêa

Rogério Ferreira da Fonseca

São Paulo (SP)

2016

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Defesa realizada em 21/09/2016.

AUTORES

Gisele de Gouvêa: Aluna especial no Programa de Pós Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo na disciplina: Introdução à pesquisa dos saberes profissionais do professor que ensina matemática, no primeiro semestre de 2019, disciplina ministrada pelos professores: Dra. Luciene de Fátima Bertini, Dr. Wagner Rodrigues Valente e Dra. Rosilda Morais, atendendo a um convite após participar do processo seletivo em 2018 com intenção de pleitear uma vaga de Doutorado.Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, pelo Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo (2016). Possui graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo , Campus Guarulhos (2011). Atuou como Professora de Matemática concursada na Prefeitura Municipal de Caraguatatuba . Atuou como Monitora voluntária na disciplina de Resolução de Problemas 1 na EACH USP Leste sob orientação da Prof Dra Patricia Junqueira. Me interesso pela área de novas metodologias ativas no ensino de Matemática. Atualmente estou atuando como Professora Substituta de Matemática com carga horária de 40 horas semanais no IFSP- Caraguatatuba, ministrando aulas nos cursos de Licenciatura em Física e Engenharia Civil.

Rogério Ferreira da Fonseca: Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. Mestre em Educação Matemática pela mesma instituição. Graduado em Matemática (Bacharelado e Licenciatura Plena). Foi professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo por 8 anos, atuando como professor do Ensino Fundamental (5º ao 8º ano) e Ensino Médio, atuou também na Diretoria de Ensino (Oficina Pedagógica) e na Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP/SEE) na área de Matemática. Atualmente é Professor Efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP (Campus São Paulo), onde faz parte do corpo de docentes permanentes do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Atualmente é Coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - IFSP/SPO. Tem experiência no Ensino de Matemática, com ênfase nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Teoria dos Números, Educação Matemática e Formação Continuada de Professores de Matemática.

Introdução

A partir de nossos estudos vinculados à dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo, apresentamos este material, considerando-o como o produto final da nossa pesquisa.

Sua elaboração apresenta sugestões de problemas contextualizados, reais ou realísticos, ligados às possíveis atuações profissionais de estudantes (de determinados cursos de graduação). Enfocamos que o caráter desses problemas é de fim aberto e mal estruturado e contemplam o estudo de alguns conceitos matemáticos, adotando como princípio norteador a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL.

Este material é direcionado ao docente que tenha interesse em trabalhar com uma metodologia de ensino ativa e diferenciada, no caso, o PBL, o qual está associado ao desenvolvimento de competências conceituais e profissionais dos estudantes. Sugerimos também a leitura da dissertação na íntegra.

Apresentamos dois problemas no formato do PBL. Possuem estudos de apoio como complementação, os quais, assim como os problemas em si, podem ser adaptados conforme a realidade dos cursos ao qual estão vinculados (além da experiência de trabalho proveniente de cada tutor/professor). Além de possuírem possíveis encaminhamentos para sua resolução.

Nossas considerações em relação à dinâmica da sala de aula num contexto PBL, baseiam-se nas ideias de Ribeiro (2008). Mais adiante, apresentamos alguns encaminhamentos para a realização das sessões de tutoria, essenciais em uma proposta de ensino no formato do PBL.

3 Sugestões de problemas para abordar conceitos matemáticos por meio do PBL

Neste capítulo apresentaremos duas sugestões de problemas reais de acordo com os preceitos da Aprendizagem Baseada em Problemas, visando o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Tanto o problema 1, quanto o problema 2, poderão ser utilizados em cursos que tenham interesse na área de saúde, ou em políticas públicas, entre outros.

3.1. Orientações Gerais

As orientações feitas neste item são gerais, e versão sobre uma sugestão de dinâmica de acordo com os preceitos do PBL, por seu aspecto mais geral também serve para as diferentes sugestões de encaminhamentos (tratamento matemático e sugestão de abordagens de conceitos matemáticos) que apresentaremos na sequencia.

Inicialmente será fundamental que o tutor (professor) ressalte os principais aspectos envolvendo a dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, promovendo a conscientização a respeito dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito na busca da solução (ou encaminhamento da resolução) do problema proposto. Todos os envolvidos precisam entender que o processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas convencionais, favorecendo um ambiente mais dinâmico e interativo.

Na dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas, e o professor assume a postura de tutor ou mediador da aprendizagem.

O problema será apresentado aos grupos antes dos conceitos matemáticos que serão explorados. Cada grupo deverá eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo, ou seja, deverá atuar como líder da equipe. O relator deverá registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de registrar a indicação das tarefas de cada membro do grupo. Aconselha-se que exista rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, buscando o desenvolvimento de atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As sessões tutoriais devem respeitar aspectos gerais, como: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

Em relação à análise do problema e planejamento da pesquisa, destacamos a apresentação geral a respeito do problema proposto. Objetiva-se ressaltar possíveis relações da situação proposta com as futuras realidades profissionais dos estudantes, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

A partir daí os estudantes deverão iniciar um planejamento para buscar informações acerca do problema, organizar ações e meios para trocas de experiências entre os membros da equipe. Nesta etapa, será fundamental a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para resolver o problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto de pesquisa, de acordo com os objetivos do tutor.

Na etapa que envolve as ações que levarão à resolução do problema deverão ocorrer estudos, pesquisas e intervenções, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores de outras áreas do conhecimento).

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o plano de aulas dificilmente se restringe a um único momento, pois após o primeiro contato com o problema surgirão conjecturas e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido ou pesquisado (durante um determinado período). Nos encontros intermediários os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor analisará as interpretações dos estudantes e poderá indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Entretanto o tutor precisará analisar se as decisões adotadas pelos estudantes levarão à construção de conhecimentos relevantes. Previsões e análises das dificuldades também devem ser mapeadas pelo tutor, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar. Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

Na última etapa da dinâmica envolvendo a Aprendizagem Baseada em Problemas deverá ocorrer a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A socialização ocorrerá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. Propõe-se a apresentação de um relatório no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos, inclusive a indicações de conhecimentos adquiridos. Nessa etapa as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e recomenda-se a validação das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Em relação aos processos de avaliação das sessões, ressalta-se que eles podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Pode-se considerar na avaliação: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação individual dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outro aspectos.

Os conhecimentos adquiridos são indicados pelos próprios estudantes. O tutor ao longo do processo deverá identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos, isto é, verificar se os métodos de resolução e os conceitos matemáticos abordados estão sendo apreendidos significativamente, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

Além das orientações gerais indicadas nos parágrafos anteriores, o tutor poderá discutir aspectos relacionados aos modelos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, essa discussão será fundamental para os encaminhamentos que sugerimos no próximo item.

É importante destacar, por exemplo, que os modelos matemáticos ajudam a fazer estimativas ou previsões, no entanto, eles geralmente não representam literalmente os fenômenos modelados, ou seja, eles não traduzem a pura realidade, mas sim fazem aproximações, e tem suas limitações em relação aos fenômenos estudados.

"Todo modelo teórico é parcial e aproximativo: não apreende senão uma parcela das particularidades do objeto representado". (BUNGE, 2008, pág. 30).

Assim como afirma Stewart (2015, pág. 22), entendemos que "um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real [...]".

Ao modelar um fenômeno do mundo real, temos como propósito entendê-lo, e quiçá fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Stewart ressalta que:

> Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma *idealização.* Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza. (STEWART, 2015, pág. 22)

Na sequência apresentaremos algumas sugestões de tratamento matemático, explorando diferentes conceitos. Não temos a pretensão aqui de sugerir que esses sejam os melhores ou os mais adequados para resolver os problemas propostos, já que são possíveis várias outras abordagens matemáticas, dependendo das escolhas do tutor e dos objetivos de cada curso. Buscaremos apenas ilustrar a potencialidade da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de noções matemáticas.

Problema 1

Microcefalia[1]

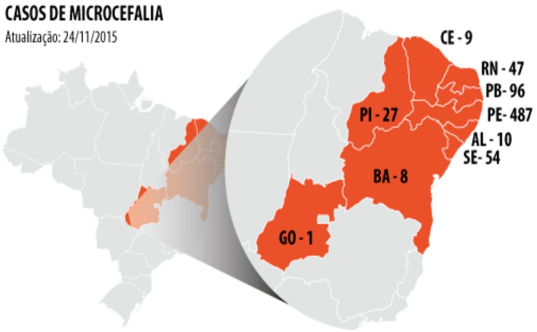

Figura 2 Casos de Microcefalia por RegiãoFonte:http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia

O que é a Microcefalia?

Microcefalia é o nome que se dá quando uma criança tem a cabeça menor do que o considerado padrão. Não é exatamente uma doença, e sim um sinal de que o cérebro pode não estar crescendo como deveria.

É o crescimento do cérebro que faz o crânio crescer. Se o cérebro realmente não se desenvolve, a criança pode vir a ter deficiência intelectual e física, em variados graus. Mas é possível uma criança ter microcefalia e não ter atrasos.

É importante lembrar que o cérebro é um órgão ainda bastante misterioso e surpreendente, e são muitos os casos de problemas cerebrais em que as crianças se desenvolveram muito melhor do que previam os médicos.

Como a microcefalia é diagnosticada?

[1] Texto sobre a Microcefalia retirado de http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia pesquisado em: 15 de Julho de 2016.

Ainda no útero, a microcefalia pode ser diagnosticada quando a medida da cabeça (perímetro cefálico) do feto, quando comparada com outras medidas, e com a idade gestacional, fica abaixo do esperado.

É importante considerar que a medição pode não ser exata, porque depende da habilidade do profissional, da posição do bebê e da qualidade do equipamento.

Quando o bebê nasce à microcefalia é diagnosticada com uma simples fita métrica.

As autoridades brasileiras estão determinando, para efeito de monitoramento, que serão considerados casos suspeitos de microcefalia recém-nascidos (desde que nascidos depois de 37 semanas) com perímetro cefálico de menos de 32 cm.

Apenas a medida não é suficiente para determinar se há má formação. É preciso levar em conta também:

- A circunferência cefálica dos pais (se os pais também tiverem a cabeça pequena, pode ser apenas uma característica hereditária).

- O fato de o bebê ter nascido de parto normal. É recomendável repetir a medida do perímetro cefálico três ou quatro dias depois do parto, porque a cabeça do bebê tem a capacidade de "afinar" para passa pelo canal do parto, e demora alguns dias para voltar ao normal.

- As proporções do corpo da criança. Uma criança de estrutura pequena tende a ter uma cabeça menor.

Diante dos fatos expostos a respeito da microcefalia, e de possíveis informações complementares, responda:

Quais serão os impactos do aumento considerável de diagnósticos de microcefalia nas políticas públicas nos próximos anos? E nas próximas décadas? Quais são as ações dos órgãos públicos em relação a essa nova realidade? É possível a partir de um modelo matemático afirmar ou suspeitar do diagnóstico de microcefalia? Justifique sua resposta à questão anterior utilizando argumentos matemáticos.

3.2. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (1) E ORIENTAÇÕES

TRANSFORMAÇÃO LINEAR[2]

Uma diretriz para o encaminhamento do problema 1 pode ser o estudo da lei do crescimento, considerando que desde o nascimento até atingir a idade adulta, diferentes partes do corpo crescem, cada uma com um fator de escala diferente.

Vamos considerar a relação, tamanho da cabeça (t), por altura do corpo (a). Utilizaremos como critério para a lei do crescimento o delineamento de uma razão entre essas duas grandezas (representado por r=t/a).

Observe o quadro que mostra a razão do tamanho da cabeça pela altura do corpo de uma pessoa durante sua vida. Complete a coluna “Tamanho da Cabeça (t) (cm)”.

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da Cabeça (t) (cm)	Razão (r)
0	50	11	0,22
1	70	15	0,21
2	79	17	0,22
3	86	18	0,21
5	99	19	0,19
10	127	21	0,17
20	151	22	0,15

Quadro 2 Dados de uma pessoa. Fonte: Tabela adaptada de Nunes (2006). Geometria Fractal e Aplicações.

O fenômeno do crescimento não é proporcional, é possível compará-lo com a geometria fractal, que recebe o nome de lei de potência.

A lei de potência consiste em considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

Considerando 10 como base do logaritmo, mas poderia ser qualquer outra.

$$logy = mlogx + b \Leftrightarrow 10^{logy} = 10^{logx^m} * 10^b \Leftrightarrow y = x^m * 10^b \Leftrightarrow y = cx^m, c = 10^b$$

---

[2]Esse Estudo de Apoio foi adaptado de NUNES (2006) INTITULADO: Geometria Fractal e Aplicações. Departamento de Matemática Pura Faculdade de Ciências da Universidade do Porto Janeiro/2006.

Destacamos que, m é o declive da reta e b é a ordenada na origem.

Esta equação descreve a lei de potência y em função de x, em que x é uma potência cujo expoente é o declive da reta.

Vamos mostrar como o procedimento acima apresentado pode ajudar a encaminhar a resolução do problema, para isso utilizaremos como modelo matemático $y = cx^m$, m = 1 e b = 0, o modelo será reduzido a y = cx, c é uma constante. Para adaptar o modelo matemático aos dados do quadro acima, utilizaremos como parâmetro a altura do corpo em cm e o tamanho da cabeça também em cm, mesmo o modelo sendo uma função linear vale destacarmos que dependendo dos valores que iremos atribuir para as grandezas x e y pode haver uma pequena discrepância entre funções lineares encontradas pelos estudantes, caberá ao tutor alertá-los sobre isso, afinal estamos trabalhando com valores reais. Para sabermos o valor da constante c na equação y = cx temos:

Altura do corpo (a) (cm) x	Tamanho da Cabeça (t) (cm) y
50	11
70	15
79	17
86	18

Quadro 3 Altura/ tamanho da Cabeça - Elaborado pela autora

Para encontrar o valor de c, iremos pegar os valores x = 50 e y = 11:

y= cx

11= 50c

c= 11/50   c= 0,22

Assim o modelo será y = 0,22 x, com isso apresentaremos o gráfico do modelo acima definido:

Altura do Corpo (cm) x	Tamanho da cabeça (cm) y
50	11
70	15,4
79	17,38
86	18,92

Quadro 4 Altura do Corpo/ tamanho da Cabeça -Fonte: Quadro elaborado pela autora

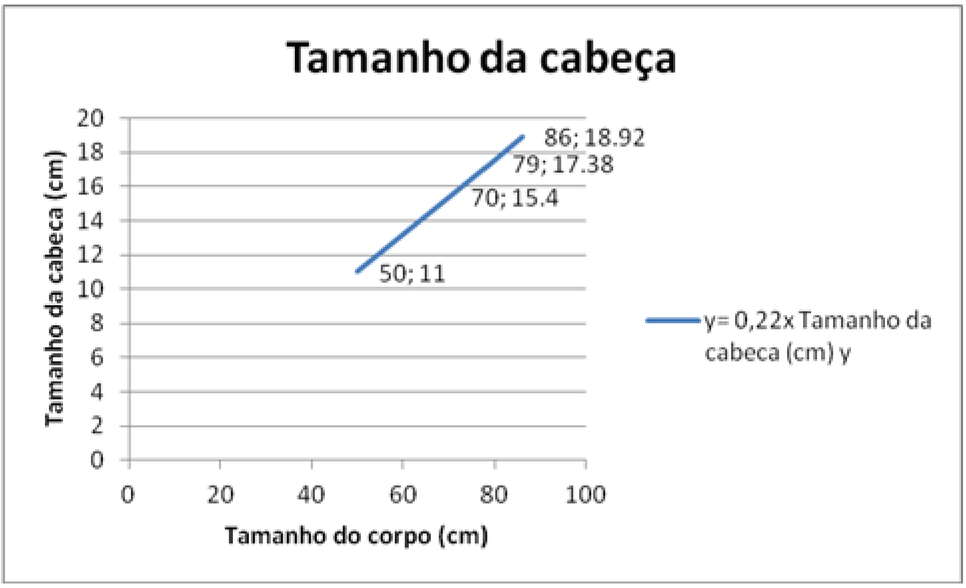

Figura 3- Gráfico elaborado pela autora

Mais especificamente no problema 1, além de aspectos relacionados à Matemática, também poderão ser exploradas questões relacionadas a área de Medicina, com problemáticas a respeito de saúde pública e políticas públicas, entre outras.

O problema será apresentado a cada grupo, que a princípio farão a leitura juntamente com o tutor, em seguida a seleção de termos desconhecidos que estão inseridos no problema para pesquisa posterior.

O tutor ainda poderá apontar questionamentos como: Qual a relevância desse tipo de problema para o poder público? Quais conhecimentos podem estar envolvidos nele? Quais ligações este problema apresenta com o futuro campo de atuação profissional dos estudantes?

Será fundamental que o tutor faça a sugestão do tratamento matemática do problema, caso os estudantes não vislumbrem essa possibilidade. Nesse caso poderão ser propostas as seguintes questões: Será possível desenvolver um modelo matemático para expressar um possível diagnóstico da Microcefalia?

O problema apresentado poderá envolver noções de Transformações Lineares. Conforme o direcionamento do estudo de apoio. Como sugestão de trabalho, o tutor poderá propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos matemáticos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, sala de monitoria ou consultoria, plantão de duvidas), entre outras formas de estudo.

O tutor deverá escolher o melhor momento para realizar institucionalização conceitual das transformações lineares, com base no estudo de apoio para o problema 1, entretanto esclarecemos que tal momento deverá ocorrer após os alunos iniciarem a pesquisa para encontrar possíveis soluções para o problema e terem contato com as noções matemáticas envolvidas.

Outro aspecto importante que deverá ser contemplado na institucionalização é a demonstração de que o modelo obtido realmente é uma Transformação Linear. Caso os diferentes modelos obtidos pelos estudantes não sejam Transformações Lineares, o tutor (professor) deverá mostrar aos estudantes quais propriedades não são satisfeitas, indicando ainda possíveis vantagens ou desvantagens em utilizar uma Transformação Linear para modelar o problema proposto.

Indicamos que com a solução acima, o tutor pode trabalhar com os conceitos: função de modo geral, especificando ainda a função linear, os conceitos de logaritmos, suas propriedades e aplicações, pode ainda trabalhar os conceitos de transformações lineares evidenciando a lei do crescimento, ou seja, a lei de potência, onde sua consistência nos remete a considerarmos os dados em largas escalas numéricas x e y, então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x.

3.3. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (2) E ORIENTAÇÕES

Abaixo estamos propondo uma resolução para o problema utilizando a regressão linear, ou seja, determinando um modelo matemático linear, as possibilidades aqui mencionadas são encaminhamentos a ser proposto pelo tutor em suas consultorias.

É importante ressaltar aos estudantes aspectos importantes da dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, que as aulas são substituídas por consultorias, que cada integrante terão tarefas delegadas, eles terão ao seu dispor uma gama de recursos para auxiliá-los no encontro da solução para o problema da Microcefalia.

Os objetivos dessa dinâmica precisam estar claro aos estudantes, o tutor deve motivá-los para o estudo deste problema.

Ressaltamos que é importante fazer a leitura do problema, apontando os pontos importantes que podem ajudar os alunos na solução.

O tutor deve indicar bibliografias que podem auxiliar os estudantes, os termos próprios do problema pode ser feito um pequeno dicionário para o entendimento de forma geral desse problema.

Destacamos que esta proposta de solução será apresentada como motivação a aprendizagem de conceitos, conforme mencionados abaixo, cabe ao tutor ajudar no sentido de propor a análise do problema, o planejamento da pesquisa, o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema, a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A dinâmica se dá por planejamento, para que não fuja aos objetivos almejados, é importante que o professor/tutor, conduza de forma a não interferir no processo de aprendizagem a menos que seja necessária sua interferência.

Cabe o tutor analisar as interpretações dos alunos, podendo indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, transitando por outras áreas do conhecimento.

Talvez esta resolução não seja vislumbrada pelos estudantes, neste caso, o tutor pode propor esta solução socializando-a com os demais grupos.

Destacamos que a socialização ocorre por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. A solução é apresentada por meio de relatório, constando toda a trajetória, apontando os aspectos vantajosos e também os menos favoráveis do percurso percorrido por todo o grupo, quais pesquisas foram realizadas, os resultados obtidos, os conhecimentos adquiridos por este encaminhamento. Salientamos que as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala recomendando a validação das mesmas, tendo como ponto de partida os conhecimentos adquiridos.

Depois de apresentada alguns aspectos da dinâmica do PBL, ressaltaremos alguns conhecimentos prévios para esta solução, caso o tutor escolha este caminho. Dentre os conhecimentos prévios, destacamos a interpretação de dados apresentados em tabelas; a identificação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, diferença entre incógnita e variável, definição de circunferência, potenciação, noções sobre a relação entre grandezas, taxa de variação e funções, se necessário o tutor pode acrescentar ou retirar alguns conhecimentos prévios, ou mesmo retomar o estudo de determinados conceitos ou conteúdos.

Lembrando que estamos propondo um caminho a ser percorrido, cabe ao tutor fazer adaptações de acordo com os objetivos e especificidades de cada turma ou curso, pois o problema permite explorar uma quantidade considerável de conceitos matemáticos e também de outras áreas.

Entre os conceitos matemáticos que podem ser explorados pelo tutor com este encaminhamento, destaca-se, o estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, o comportamento da função (ser crescente ou decrescente), e taxa de variação; além de assuntos relacionados a Estatística como, Média e Regressão Linear.

Nossa intenção aqui é apenas sugerir caminhos a serem percorridos ou propostos pelo tutor, assim as sugestões não devem ser entendidas como uma receita, e sim como uma alternativa que pode ser integralmente ou parcialmente seguida.

Vale ressaltar a autonomia do tutor no sentido de propor um caminho mais adequado para sua turma, levando em consideração os conceitos a serem aprendidos na consultoria e no curso.

REGRESSÃO LINEAR

Outra possibilidade de encaminhamento para a solução do problema é a utilização da regressão linear, que consiste em determinar um modelo linear para o problema da microcefalia, em seguida destacaremos alguns conceitos matemáticos que podem ser abordados por meio deste procedimento.

	IDADE (x) anos	TAMANHO DA CABEÇA (cm) (y)	x.y	X²
	0	11	0	0
	1	14,7	14,7	1
	2	17,4	34,8	4
	3	18	54	9
	5	18,8	94	25
	10	21,6	216	100
	20	22,6	452	400
∑	41	124,1	865,5	539

Quadro 5 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: Tabela elaborada pela autora

Pretendemos encontrar um modelo na forma y= ax + b, para encontrarmos os coeficientes a e b, temos:

$$a = \frac{n.\sum x.y - (\sum x).(\sum y)}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{7.865,5 - 41.124,1}{7.539 - (41)^2}$$

$$a = \frac{6058,5 - 5088,1}{3773 - 1681} = \frac{970,4}{2092} = 0,5$$

$$a = 0,5$$

$$b = y - a.x; y = \frac{\sum y}{n} = \frac{124,1}{7} \simeq 17,7$$

$$y = 17,7\ ; x = \frac{41}{7} \simeq 5,8 \quad x \simeq 5,8$$

$$b = 17,7 - 5,8\ .0,5 \quad b = 17,7 - 2,9 = 14,8$$

$$y = 0,5\,x + 14,8$$

Iremos construir o gráfico da função y= 0,5 x + 14,8 para isso, temos:

Idade (anos)	Tamanho da cabeça (cm)
0	14,8
1	15,3
2	15,8
3	16,3
4	16,8

Quadro 6 Idade/ Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

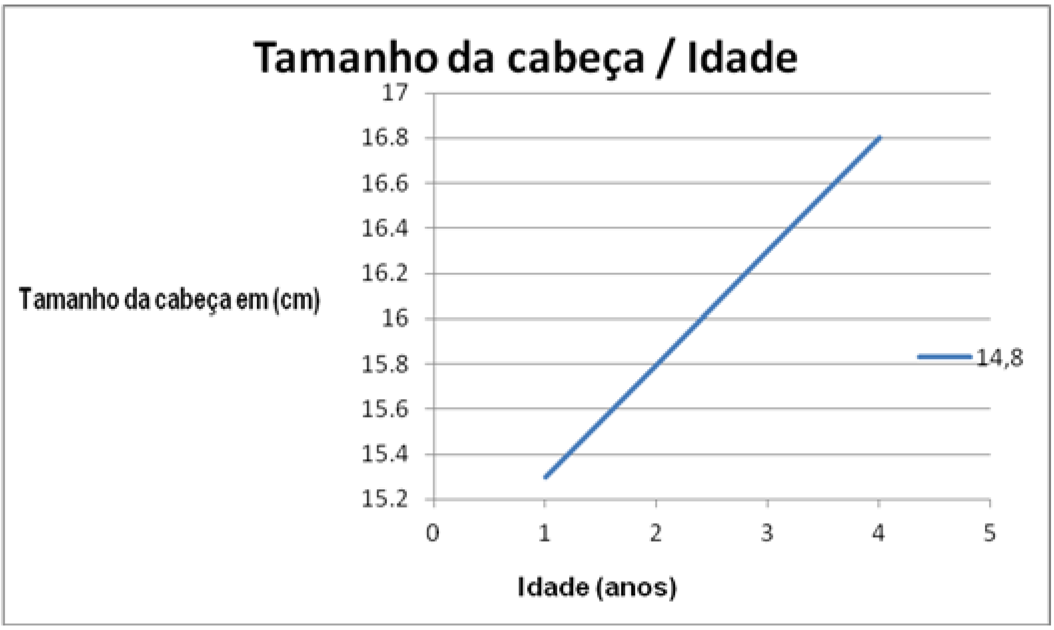

Figura 4- gráfico elaborado pela autora

O gráfico apresentado é um modelo que reduz a resolução do problema a uma função linear, assim é possível calcular em cm o tamanho da cabeça em relação à idade.

Podemos destacar alguns conceitos matemáticos que podem ser explorado se os estudantes optarem por está resolução, dentre eles, destacamos: O estudo de função afim, discussão dos coeficientes a e b, a função ser crescente ou decrescente; assuntos estatísticos como: Média, Regressão linear. Desta maneira está resolução pode auxiliar o tutor/professor, na formação dos conceitos acima destacado, por ser um problema que está presente em nossa sociedade e também fazer parte de problemas a serem encontrados por profissionais da saúde, o problema da Microcefalia encaixa perfeitamente nos preceitos do PBL.

Apontaremos algumas vantagens e desvantagens quando optamos pelo modelo de regressão e assim tornar a resolução do problema de modo linear, uma preocupação da estatística ao analisar dados, é a de criar modelos que explicitem estruturas do fenômeno em observação, o modelo de regressão é um dos métodos estatísticos mais usados para investigar a relação entre variáveis.

A análise de regressão pode ser usada como um método descritivo da análise de dados (como, por exemplo, o ajustamento de curvas) sem serem necessárias quaisquer suposições acerca dos processos que permitiram gerar os dados. Assim destacamos que, a regressão designa também uma equação matemática que descreva a relação entre duas ou mais variáveis.

Podemos destacar outras vantagens, como: fornecer informações estatísticas detalhadas sobre o modelo, permitir utilizar os parâmetros da regressão encontrados para efetuar previsões.

Falaremos sobre algumas desvantagens, como: o modelo escolhido deve ser coerente com o que acontece na prática, isso pode ser resolvido da seguinte maneira: o modelo escolhido deve ser condizente tanto no grau como no aspecto da curva, para representar em termos práticos, o fenômeno em estudo, o modelo deve conter apenas as variáveis que são relevantes para explicar o fenômeno. Nesse sentido o tutor deve orientar seus estudantes, no sentido de tomar cuidado quanto ao modelo a ser encontrada e as variáveis a ser considerada no modelo explorado.

3.4. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (3) E ORIENTAÇÕES

Nesta sugestão de tratamento matemático, o tutor pode rapidamente resgatar aspectos da dinâmica do PBL, destacando todo o processo de ajuda mútua e cooperação entre os integrantes do grupo, ressaltando a importância da participação de todos, para que o trabalho tenha excelência, e que de fato os auxiliem na construção dos conhecimentos necessários para a solução do problema.

O tutor deve orientar sobre possíveis discrepâncias de modelos exponenciais, quando se trata de dados reais, e que dependendo dos dados pode haver modelos diferentes que respondam o mesmo problema, de maneira a evidenciar que isso é comum quando se trata de dados reais. Neste sentido este problema de maneira geral é enriquecedor, pois não deixa com que o caráter real (que faz parte da dinâmica do PBL), se perca pelo caminho.

Aqui podem ocorrer às divisões de tarefas a serem pesquisadas pelos alunos, buscando resolver o problema, o planejamento é extremamente importante e pode contribuir com o êxito na resolução. O tutor pode contribuir com os estudantes, indicando referências bibliográficas a respeito de funções exponenciais e suas aplicações em modelos matemáticos, assim como trabalhos acadêmicos que os auxiliem, lembramos que o tutor tem o papel de mediar às discussões e intervir quando necessário.

É importante alertar os alunos sobre os dados apresentados no problema, discuti-los de maneira que possam entender o que estão retratando, orientá-los a pesquisarem como o problema da Microcefalia tem crescido em nosso país. E questioná-los: É possível intervir nesta realidade? Como? Porque os casos de Microcefalia têm aumentado? Quais políticas públicas podem ser feitas em curto prazo? Entre outros encaminhamentos de questões. Essas discussões e apontamentos devem contribuir com a busca de soluções.

Os conhecimentos prévios, se tratando da Matemática, englobam a potenciação e suas propriedades, suas aplicações, função linear e a construção do gráfico, leitura de dados em uma tabela, reconhecimento de grandezas inversamente proporcional.

Os conceitos matemáticos que serão explorados incluem o ensino de função exponencial, crescimento e decrescimento exponencial, discutir a taxa de variação, iniciar os estudos de logaritmos e suas propriedades.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Iremos propor a resolução utilizando o conceito de função exponencial, lembramos que $y = a^x$ é o modelo de uma função exponencial, mas para o nosso problema teremos que obter uma constante de acerto para o problema estudado, assim temos:

$y = c.a^x$, basta tomar x= 0 e y=11

$11 = c.a^0$ c= 11

Agora iremos utilizar os pontos x=1 e y=14,7, para descobrir o valor de a

$14{,}7 = 11.a^1$

$$a = \frac{14{,}7}{11} \quad a \simeq 1{,}3$$

$y = 11 * 1{,}3^x$

Agora apresentaremos o gráfico

IDADE	TAMANHO CABEÇA (cm)
0	11
0,5	12,54192968
1	14,3
1,5	16,30450858

Quadro 7 Idade/ tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

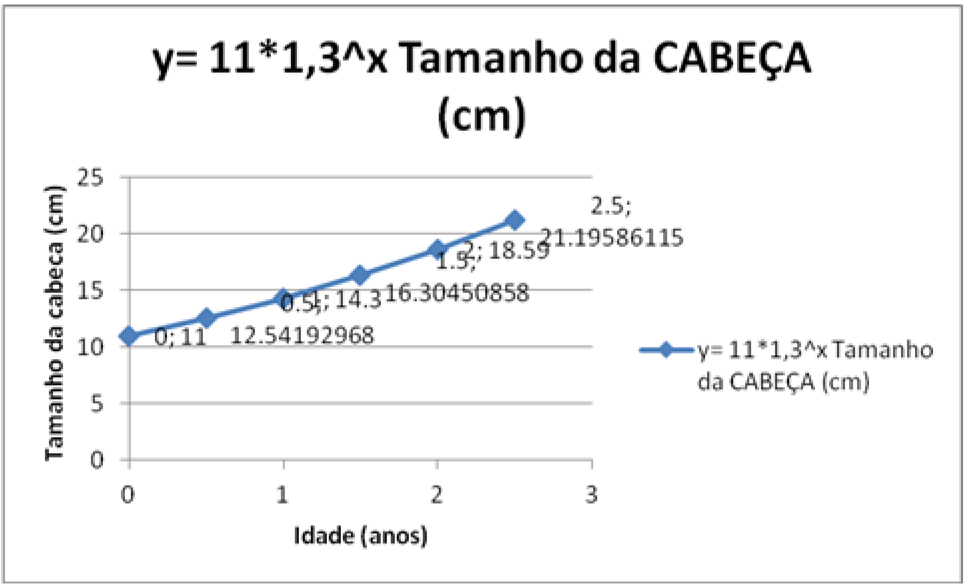

Figura 5- Gráfico elaborado pela autora

Nesta resolução proposta, o tutor pode explorar o conceito de função exponencial, discutindo com os alunos os assuntos: crescimento e decrescimento exponencial, iniciar os estudos de logaritmos. ‘É possível percebemos que um mesmo problema pode ter diversas abordagens diferenciadas, dependendo qual o caminho que a turma escolhe percorrer ou ao que o tutor encaminhe seus alunos para a mais coerente naquele determinado momento de sua aula, pois cabe ao tutor conduzir o problema para o caminho que o trará beneficio para seus alunos e seus aprendizados.

3.5. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO (4) E ORIENTAÇÕES

Neste estudo o tutor e os estudantes poderão explorar o método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas e a relevância na busca por modelos matemáticos para uma determinada situação.

É imprescindível que haja diálogos entre os membros do grupo a respeito das primeiras reflexões, delegação de tarefas e planos de ação, registrar as informações necessárias para a resolução do problema.

Em encontros posteriores (consultorias) os estudantes poderão discutir e analisar as informações e materiais obtidos. Em seguida verificar se esses são relevantes e suficientes para resolver o problema?

Nesta solução como conhecimentos prévios, destacaremos: interpretar e analisar dados por meio de tabelas e noções a respeito de função.

Neste caso o tutor pode tanto iniciar ou aprofundar o estudo de conceitos matemáticos como: matrizes, operações e propriedades, tipos de matrizes (quadrada, transposta, matriz linha e coluna, identidade); sistemas lineares, classificação, discussão e diferentes métodos de resolução de sistemas lineares.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

O ajuste de curvas pelo método dos Mínimos Quadrados tem muitas aplicações, dentre elas, é determinar qual é a função que melhor expressa o tamanho da circunferência cefálica de uma pessoa conhecendo sua idade (em anos).

A tabela abaixo mostra a idade em anos, e o tamanho da cabeça em centímetros (cm):

IDADE (ANOS)	TAMANHO DA CABEÇA (CM)
0	11
1	14,7
2	17,4
3	18

Quadro 8 Idade/Tamanho da Cabeça Fonte: Quadro elaborado pela autora

Pretendemos reduzir este a problema a uma função do tipo: y(x) =α + βx

Neste caso, iremos encontrar os valores de α e β de acordo com os dados da tabela acima, vamos escrever os dados na forma matricial, assim temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \; ; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \text{y=} \begin{pmatrix} 11 \\ 14{,}7 \\ 17{,}4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que A^t é denominada como matriz transposta de A.

Assim temos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} ; \; A^t \; y = \begin{pmatrix} 61{,}1 \\ 103{,}5 \end{pmatrix}$$

Montaremos um sistema com as incógnitas α e β:

$$\begin{cases} 4\alpha + 6\beta = 61{,}1 \\ 6\alpha + 14\beta = 103{,}5 \end{cases}$$

Reduzimos a matriz a um sistema 2 X 2, onde sua resolução pode ser feita pelo método da substituição, que neste caso, é o mais conveniente.

Desta maneira os valores de α e β são:

α=11,72 e β= 2,37

Com os valores acima calculados, podemos voltar a função: y(x)= α + βx

y(x)= 11,72 + 2,37x

O modelo acima nos remete a uma função linear, o que nos permiti construir seu gráfico conhecendo alguns valores. Assim temos:

FUNÇÃO	Y(X)= 11,72 + 2,37X
IDADE(ANOS)	TAMANHO CABEÇA (CM)
0	11,72
1	14,09
2	16,46
3	18,83

Quadro 9- Idade/ tamanho da cabeça. Fonte: elaborado pela autora

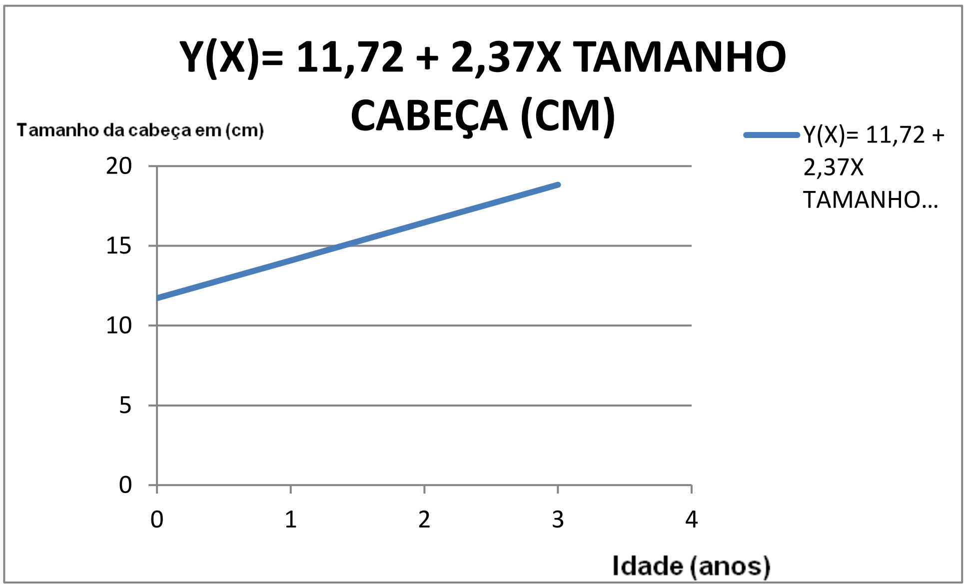

Figura 6- Gráfico Elaborado pela autora

Nesta solução, podemos explorar os estudos de Matrizes suas propriedades e definição, Operações envolvendo as Matrizes (adição, subtração e multiplicação), Sistemas Lineares e suas classificações, discussão de diferentes formas de resolver um sistema linear, podemos destacar os métodos da adição, substituição, escalonamento, uso de determinantes, entre outros métodos que o tutor achar mais conveniente.

Lembramos que estamos deixando como proposta alguns encaminhamentos de soluções, é evidente que diante da proposta do PBL pode surgir outras soluções trazidas pelos estudantes, elas deve, ser exploradas de forma a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos grupos envolvidos na dinâmica que o PBL propõe a seus estudantes.

Desta maneira também pode surgir alguma solução que não seja adequada para o problema, esta deve ser discutida, porém o tutor pode ressaltar quais são os objetivos que serão almejados com tais problemas a serem explorados.

No PBL é preciso que os alunos entendam que cada problema a ser explorado, tem vários objetivos e expectativas de aprendizagens, envolvendo a inserção de novos conceitos ou até mesmo a aplicação de conceitos já estudados.

Problema 2

No problema 2 abordaremos o cálculo da dimensão fractal da irregularidade do contorno de células e estruturas que formam os tumores malignos.

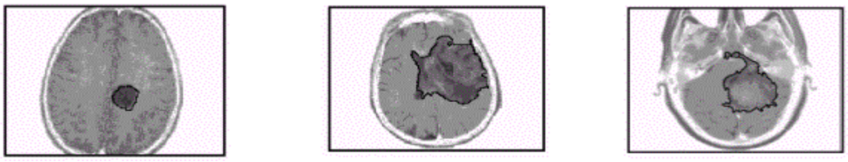

Figura 7 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos de alguma maneira tentar caracterizar qual estágio se encontra os tumores malignos no sistema nervoso central. As imagens acima foram adquiridas através de ressonância magnética, das quais foram comparadas imagens de cistos (tumores benignos), imagem de gliomas (tumores malignos) e imagens de lesões massivas. Com a técnica da dimensão fractal é possível obter uma melhor diferenciação entre tumores benignos dos malignos pelo fato destes possuírem características marcante através de maior irregularidade em seu contorno. Assim, extraindo-se a dimensão fractal destes contornos, pode-se classificar os tumores malignos dos benignos e, posteriormente, o estágio em que se encontra os tumores malignos.

Analisando as imagens a seguir, utilizando o processo de contagem das caixas, cada imagem gerará um sistema de pontos, que por sua vez dá origem a uma reta que pode ser observada na imagem 8 e 9. É possível construir um gráfico que pode ajudar no diagnóstico? Apresente-o.

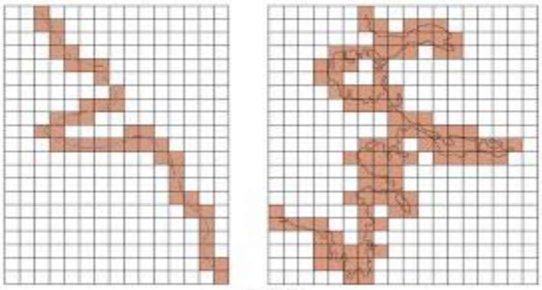

Figura 8 http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando salvar.html?m=1

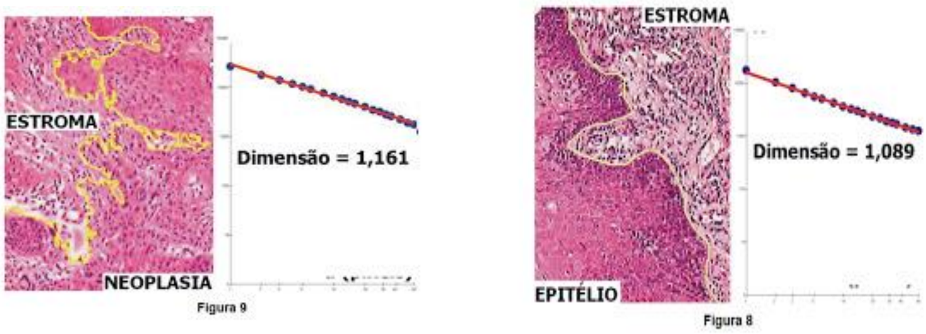

Figura 9 – Gráfico de Diagnóstico http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Estudo de apoio para o Problema 2

O **tapete de Sierpinski** é construído cortando-se o nono central de um quadrado, cortando depois os centros dos oito quadrados mais pequenos que ficam, e assim por diante. O análogo tridimensional é a **esponja de Menger**, uma rede aparentemente sólida com uma superfície infinita e volume nulo.

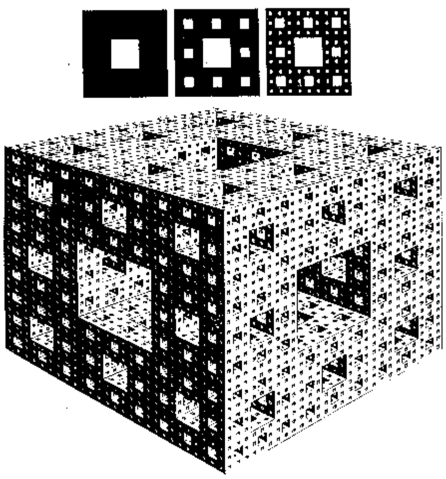

Figura 10- J.Gleick,Ed.Gradiva,1994,p.139.Figura7-TapetedeSierpinski

A partir da construção desses fractais, podemos introduzir a geometria fractal ou geometria da natureza em sala de aula.

A prática pedagógica utilizada atualmente no ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aprendiz, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos a aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro desta perspectiva, trazer para a sala de aula atividades que ao mesmo tempo desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa que a metodologia aplicada impõe.

É importante ressaltar que as atividades a serem realizadas devem ser planejadas de forma a promover a efetiva participação de todo o grupo, levando, de uma forma cooperativa e homogênea, todos às conclusões esperadas.

A busca da interação entre um novo cotidiano–prático e participativo–e uma organização de conteúdos mais abrangente tornará possível a introdução de teorias desenvolvidas mais recentemente, por níveis acadêmicos superiores, gradativamente ao longo do desenvolvimento curricular da Matemática.

Reforçando a idéia de que alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes do que aplicar algoritmos de papel e lápis a exercícios rotineiros, a Geometria Fractal vem permiti-los explorar os conceitos matemáticos trabalhando com as mãos, tanto na construção de modelos, quanto no desenho de quadrados consecutivas interações dos fractais clássicos.

Como exemplo de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, podemos citar a construção do fractal triminó.

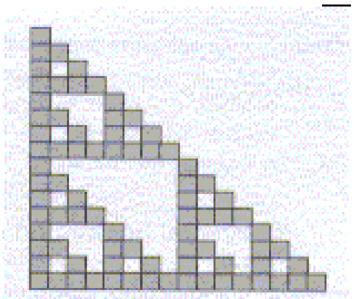

Figura 11- Fractal Triminó

Para se construir esse fractal triminó de nível3, deve-se pegar as pecinhas e, primeiramente fazer a conexão de 3 quadrados em forma de L, de modo que este será um fractal triminó de nível1.A partir daí, deve-se substituir cada peça quadrada por um triminó L, obtendo-se assim um fractal triminó de nível2. Repetindo o processo executado na obtenção do fractal triminó de nível2, obteremos o fractal triminó de nível3. Após a construção desse fractal pudemos explorar o número de peças que foi utilizado, perguntando qual seria o número de peças necessárias para se construir um fractal triminó de nível4?E de nível5?E de nível n? Facilmente aluno irá perceber que a fórmula é 3 elevado ao nível que se procura, então nível 1=3^1=3; nível 2=3^2=9; nível 3=3^3=27;....e nível n=3^n.

Uma outra sugestão é construir o cartão fractal(Triângulo de Sierpinski).

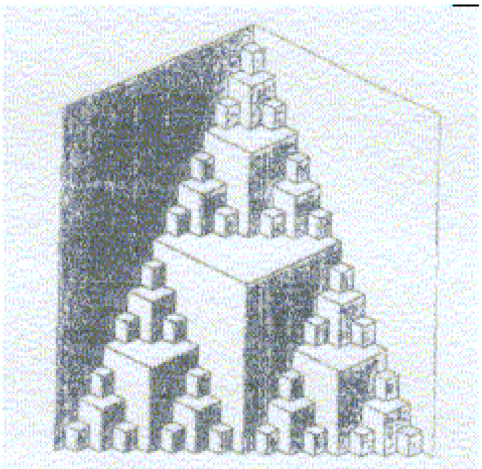

Figura 12- Cartão Fractal

Transcendendo as limitações impostas pela Matemática Clássica. Mandelbrot, em seu trabalho, ressaltou que os matemáticos foram, de certa forma iludidos pela

Natureza que mostrou ter mais imaginação na diversidade de formas que apresenta. A percepção de tais formas levou esses matemáticos a estudá-las sob os aspectos que Euclides não alcançou, tomando-se, assim, um estudo das "formas sem formas" ou "morfologias dos amorfos". Foi aceitando este desafio que Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza e implementou o seu uso em inúmeras aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou *fractais*.

Assim desta maneira é possível apresentar o gráfico que pode ajudar um médico em seu diagnóstico.[23]

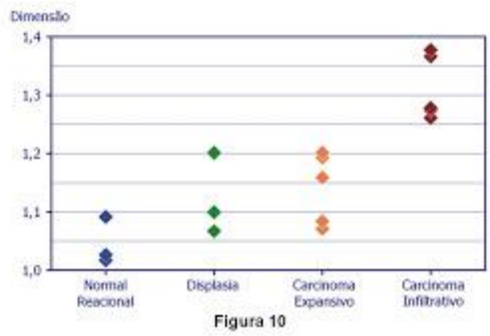

Figura 13- Gráfico de Diagnóstico http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Fractais- Contexto Histórico[34]

Já que estamos falando sobre os fractais cabe nos deixarmos claro ao leitor o que venha ser.

No final do século XIX e no início do século XX, múltiplos conjuntos de pontos do plano Euclidiano começaram a aparecer na matemática. Ainda que, fossem apenas curiosidades, estes conjuntos designados fractais, ganharam importância. Atualmente é reconhecido que estes conjuntos revelam fenômenos biológicos e físicos.

[3] O estudo do problema 2 foi retirado do Livro Álgebra Linear com Aplicações. Décima Edição. Howard Anton e Chris Rorres.

[4]Apresentando os fractais em sala de aula. Disponível em :<www.sbembrasil.org.br>files>trabalhos em 04 de Março de 2016.

Muitos fractais podem ser transformados em fragmentos menores (que são semelhantes ao fractal maior). Vale ressaltar que quando um fractal é aumentado, mantém-se tão complexo quanto a figura original.

Quanto mais ampliado estiver um fractal, maior detalhe é possível distinguir. Na realidade, estas figuras resultam de múltiplas interações da aplicação de modelos matemáticos, sendo que o princípio de auto-semelhança resenta a chave para a criação de fractais.

Presentes na Natureza em diversas manifestações, os fractais têm ocupado os interesses e o estudo de inúmeros matemáticos, que, nas investigações, têm exposto resultados extraordinários e surpreendentes fenômenos.

A seguir veremos algumas imagens dos fractais na natureza.

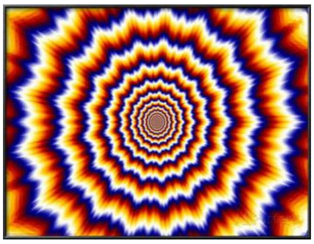


Figura 14- Exemplo de Fractais no cotidiano. Retirado de: aromadadoamor.blogspot.com

3.6. SUGESTÃO DE TRATAMENTO MATEMÁTICO E ORIENTAÇÕES PARA O PROBLEMA 2[5]

Apresentaremos a seguir uma estratégia para o desenvolvimento de modelos matemáticos que possibilitem o estudo e diagnóstico de tumores malignos do ponto de vista matemático.

No problema 2 há questões envolvendo problemáticas na área da saúde, políticas públicas, entre outras. Podendo ser aplicado em cursos de Medicina, Enfermagem, Odontologia, entre outros.

---

[5] Está solução foi uma adaptação do artigo de Vesterna, Kobiyama intitulado: A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner-SC. 2010. Árvore vol.34 no.4 Viçosa July/Aug.2010

Por se tratar de um problema que está relacionada com prática destes profissionais, ele não foge as características essenciais para a aplicação da metodologia que estamos propondo.

Primeiramente o tutor pode propor que os alunos pesquisem e tragam para os encontros tutoriais imagens de células que contém tumores de forma geral, motivando o estudo de aplicações dos fractais na medicina.

Os alunos em pequenos grupos de 4 ou 5 alunos, devem levantar os pontos de aprendizagem, neste caso o tutor pode sugerir caminhos a serem seguidos, indicar leituras, entre outros. Uma ferramenta matemática denominada contagem de caixas pode auxiliar no diagnóstico de tumores.

Imagine uma figura qualquer, por exemplo, a folha de uma planta e que sobre esta imagem, seja colocada numa malha quadriculada transparente, como a figura abaixo:

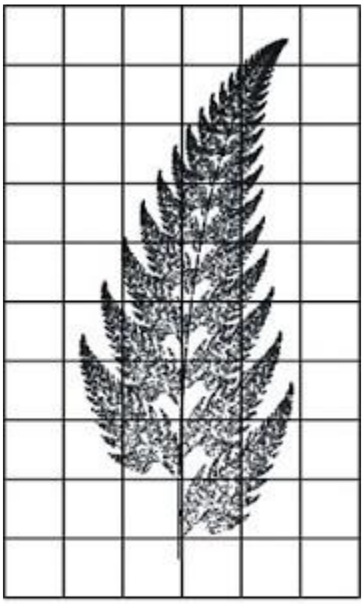

Figura 1

Figura 15 – Planta sobre malha quadriculada. Fonte: Retirado de http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

A malha é composta de um número x de quadradinhos chamados de caixas, sendo que a medida do lado da caixa é y. Colocaremos sobre esta figura outras malhas do mesmo tamanho, porém mais finas, ou seja, malhas cujas caixas tenham medidas menores do que y. Observe a figura 2 a seguir:

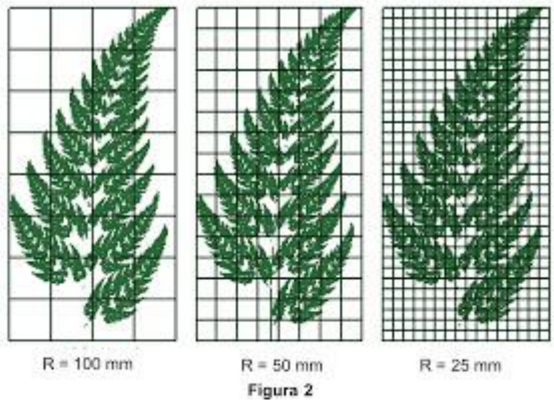

Figura 16- Planta sobre malha quadriculada Fonte: extraído de
http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html?m=1

Podemos contar quantas caixas de cada malha são necessários para cobrir a imagem. No primeiro caso, cada caixa tem 100 milímetros de lado sendo necessários 26 caixas para cobrir a imagem. Da folha; na segunda malha que possui caixas com lados medindo 50 milímetros são necessários 90 caixas; e finalmente, a terceira malha com caixas medindo 25 milímetros são necessários 315 caixas. Com isso temos três pontos, dentre, (100; 26), (50; 90), (25; 315). Podemos com os pontos gerados construir um gráfico, com o modelo a seguir y=ax, onde a é a inclinação ou coeficiente angular da reta. Esse coeficiente angular fornece também a dimensão do gráfico que pode ser inteira ou fracionária como geometria fractal. Iremos a seguir apresentar o gráfico:

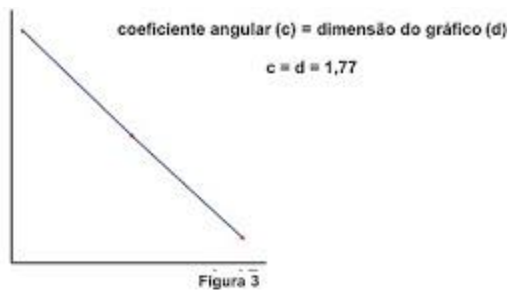

Figura 17- Gráfico do modelo matemático. Fonte: extraído de
http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica- ajudando-salvar.html?

Esta ferramenta matemática pode ajudar no processo de diagnóstico de tumores malignos.

Como orientação para este encaminhamento, primeiramente os alunos em grupos devem fazer a leitura do problema, em seguida levantar os pontos de aprendizagem e delegar tarefas aos integrantes do grupo.

Indicamos como sugestão de estudo o processo de contagem de caixas, já que é um processo matemático que pode ajudar na resolução do problema. Como conhecimentos prévios, destacamos identificar informações explicitas e implícitas em gráficos, reconhecer grandezas inversamente proporcionais e grandezas diretamente proporcional.

Com este encaminhamento de estudo o tutor pode iniciar ou aprofundar conhecimentos a respeito de: função linear, crescimento e decrescente, o estudo da contagem de caixas com a utilização de malha quadriculada.