



PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Proposta didática: O ensino de noções de cálculo diferencial e integral
por meio da aprendizagem baseada em problemas

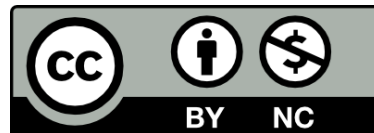
Debora Vieira de Souza

Rogério Ferreira da Fonseca

São Paulo (SP)

2016

Este trabalho está licenciado sob uma Licença Creative Commons Atribuição-
NãoComercial 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>.



Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Defesa realizada em 14/03/2016.

AUTORES

Debora Vieira de Souza: Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo - IFSP/SP. Possui especialização em Educação Matemática pela Universidade Nove de Julho (2010) e graduação em Matemática pelo Centro Universitário FIEO (2007). Atua como docente nas Faculdades Integradas "Campos Salles", ministrando disciplinas voltadas à Matemática Aplicada aos Negócios e Matemática Financeira.

Rogério Ferreira da Fonseca: Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. Mestre em Educação Matemática pela mesma instituição. Graduado em Matemática (Bacharelado e Licenciatura Plena). Foi professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo por 8 anos, atuando como professor do Ensino Fundamental (5º ao 8º ano) e Ensino Médio, atuou também na Diretoria de Ensino (Oficina Pedagógica) e na Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP/SEE) na área de Matemática. Atualmente é Professor Efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP (Campus São Paulo), onde faz parte do corpo de docentes permanentes do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Atualmente é Coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - IFSP/SPO. Tem experiência no Ensino de Matemática, com ênfase nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Teoria dos Números, Educação Matemática e Formação Continuada de Professores de Matemática.

Introdução

A partir de nossos estudos vinculados à dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo, apresentamos este material, considerando-o como o produto final da nossa pesquisa.

Sua elaboração apresenta sugestões de problemas contextualizados, reais ou realísticos, ligados às possíveis atuações profissionais de estudantes (de determinados cursos de graduação). Enfocamos que o caráter desses problemas é de fim aberto e mal estruturado e contemplam o estudo de noções de Cálculo Diferencial e Integral, adotando como princípio norteador a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL.

Este material é direcionado ao docente que tenha interesse em trabalhar com uma metodologia de ensino ativa e diferenciada, no caso, o PBL, o qual está associado ao desenvolvimento de competências conceituais e profissionais dos estudantes. Sugerimos também a leitura da dissertação na íntegra.

Apresentamos quatro problemas no formato do PBL. E desse total, dois deles possuem alguns estudos de apoio como complementação, os quais, assim como os problemas em si, podem ser adaptados conforme a realidade dos cursos ao qual estão vinculados (além da experiência de trabalho proveniente de cada tutor/professor).

Nossas considerações em relação à dinâmica da sala de aula num contexto PBL, baseiam-se nas ideias de Ribeiro (2008b) e Araújo e Arantes (2009). Mais adiante, apresentamos alguns encaminhamentos para a realização das sessões de tutoria, essenciais em uma proposta de ensino no formato do PBL.

O uso do PBL no ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral, como limites, derivadas e integrais, está atrelado às diversas áreas de conhecimento. Esse campo de estudos é uma ferramenta útil às possíveis realidades profissionais dos estudantes e, portanto, pode ser contemplado sob uma perspectiva que explore as aplicações de forma ativa e construtiva. Isto é, faz-se necessário estabelecer conexões efetivas entre conhecimentos teóricos e as prováveis atuações práticas, as quais, de fato,

aproximem os conceitos matemáticos abordados em sala de aula com realidades profissionais dos estudantes.

Formas diferenciadas de se contemplar a disciplina de Cálculo podem aproximar os conceitos às necessidades reais dos discentes. Almeja-se que esse campo de estudos propicie o encorajamento dos alunos perante a uma tomada de decisões; que sejam capazes de resolver problemas; que realizem novas descobertas por meio dos conceitos estudados; além de entender que a Matemática é uma ciência conectada às mais diversas áreas do conhecimento.

Para tanto, busca-se vislumbrá-la de forma significativa, possibilitando uma visão global dos conteúdos e permitindo que os universitários estejam aptos para a inserção nos setores profissionais. O processo de ensino e aprendizagem pode ser favorecido por meio de situações contextualizadas, interdisciplinares, que colaborem com a construção de conhecimentos transdisciplinares, ou seja, que contribuam com o desenvolvimento de competências conceituais, atitudinais e procedimentais.

Propomos que o ensino de Cálculo ocorra de forma dinâmica, na qual tanto o aluno quanto o professor participem ativamente do processo de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, atrelamos o ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral à Aprendizagem Baseada em Problemas (Problem-Based Learning - PBL), almejando ressignificar saberes na área de Cálculo. Isso porque o PBL é uma metodologia de ensino que adota o uso de problemas reais ou realísticos (aqueles que são passíveis de ocorrer em uma certa área profissional) durante o processo de ensino e aprendizagem.

A característica de problemas no formato do PBL explora situações desafiadoras. Os mesmos devem ser mal estruturados e de fim aberto, pois objetivam que os conhecimentos sejam extensivos e flexíveis. As situações apresentadas aos alunos possibilitarão que os mesmos tomem o problema para si. Com isso, entende-se que serão mais motivados a aprender determinados conceitos de forma significativa, promovendo perspectivas transdisciplinares, as quais possam ir além dos ambientes da sala de aula. Com isso, busca-se alcançar mudanças de comportamentos e a adoção de uma visão holística dos conhecimentos por parte dos estudantes.

A dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas

Antes de iniciar o processo de aprendizagem é fundamental que ocorra a conscientização acerca dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito. Os estudantes precisam entender que todo processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas tidas como tradicionais, proporcionando um ambiente mais dinâmico e interativo.

Para tanto, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas (recomenda-se que no PBL, os grupos não sejam formados com mais de oito alunos) e o professor assume agora a postura de tutor ou facilitador da aprendizagem.

Os problemas selecionados são apresentados às equipes antes dos conceitos serem abordados. Para analisá-los, cada grupo deve eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo – atua como líder da equipe. Já o relator tem a função de registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de pontuar quais serão as tarefas de cada membro antes dos próximos encontros. É preciso que haja rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, a fim de trabalhar atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As dinâmicas das sessões tutoriais respeitam alguns aspectos gerais. São elas: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios (ARAÚJO; ARANTES, 2009). Vejamos:

- Análise do problema e planejamento da pesquisa

Ocorre nessa fase a apresentação de uma visão geral sobre a situação a ser explorada. A intenção é mostrar o quanto o problema está próximo de suas futuras realidades profissionais, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

Parte-se, então, para a execução de um mapeamento e busca de informações sobre o problema: surgem organizações de ações e trocas de experiências entre os membros da equipe. Destacamos, também, que nessa etapa, deverá surgir a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para responder ao problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto (de pesquisa), dependendo das intencionalidades do tutor das aulas.

- Ações que levarão à resolução do problema

Nessa etapa ocorre o desenvolvimento de estudos, pesquisas e intervenções em favor do problema, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores).

A dinâmica do plano de aulas no formato PBL dificilmente se restringe a um único momento. Após o primeiro contato com o problema, no qual surgirão indagações, hipóteses e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido (o que pode ter sido feito ao longo de uma semana, por exemplo). De posse de seus materiais de estudos, ou seja, com as pesquisas realizadas, os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor, realizando suas orientações, analisa as interpretações dos alunos e possibilita encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Todavia, esse tutor precisa analisar se a escolha das variáveis, das decisões adotadas pelos alunos não irá levar à construção de conhecimentos incompatíveis. Previsões e análises das dificuldades também devem ser uma das preocupações desse facilitador, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar.

Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

- Socialização dos conhecimentos produzidos e produção de relatórios

Essa será a última etapa do trabalho com problemas no formato PBL. Essa socialização se dá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor envolvido. Propõe-se a apresentação de um relatório acadêmico-científico, no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos ao final da proposta.

As soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e pode-se efetuar validações das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Os processos de avaliação dessas sessões podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Dentre eles pode-se considerar: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outras.

Sendo assim, os conhecimentos adquiridos são pontuados pelos próprios estudantes. E o tutor ao longo do projeto tende a identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos. Ou seja, os métodos de resolução e os conceitos matemáticos trabalhados vão sendo institucionalizados durante todos os encontros, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

A seguir, apresentamos sugestões de problemas ligados às noções de Cálculo Diferencial e Integral de acordo com o PBL.

Problema 1 – Água mineral contaminada



Figura 2 – Água mineral.

Fonte: Retirado de <http://franquiaempresa.com/>

Com a escassez de água no Estado de São Paulo, a demanda de uma Companhia de Água Mineral aumentou muito. A demanda foi tão grande que o gerente precisou adquirir 10 milhões de litros de água de outro fornecedor.

Infelizmente, houve a desconfiança de que a água que ele comprou estava contaminada pela bactéria *Pseudomonas aeruginosa*. De que forma essa desconfiança poderia ser confirmada ou refutada?

Suponha que adotando uma das formas que você indicou para a verificação da contaminação na água, a desconfiança foi confirmada, a água realmente está contaminada por *Pseudomonas aeruginosa*, indicando uma quantidade de 13 UFC/100ml.

Qual é a quantidade de *Pseudomonas aeruginosa* para que a água seja considerada imprópria para o consumo?

Se você fosse o gerente dessa Companhia, o que você faria para não ter prejuízo e não perder toda a água adquirida?

Orientações Didáticas

Seguem abaixo algumas questões subjacentes que poderão complementar o planejamento para a resolução ou encaminhamento do problema. Caso essas

questões não sejam propostas pelos estudantes (organizados em grupo) elas poderão ser feitas pelo tutor. Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes do grupo para iniciar a pesquisa.

- Existe alguma diferença entre água contaminada e água poluída?
- As bactérias *pseudomonas aeruginosa* podem causar que tipo de prejuízos à saúde?
- Qual é a taxa de proliferação da população desse tipo de bactéria?
- Qual é o limite tolerável para que esse tipo de bactérias não cause prejuízos à saúde?
- Como pode ocorrer a contaminação por tais tipos de bactérias? Como se faz a análise para verificar a qualidade da água? Quais são as exigências das agências nacionais como o Ministério da Saúde, em relação à água mineral.

Uma sugestão para uma possível solução desse problema é desenvolver um modelo matemático para representar a situação e verificar qual quantidade de água mineral (não contaminada) seria necessária acrescentar aos 10 milhões de litros para que a contaminação atinja um nível de concentração que não prejudique a saúde humana.

Poderiam ser explorados modelos baseados em funções afim, exponenciais, ou funções com várias sentenças, considerando a taxa de variação desses tipos de funções. A escolha por um determinado modelo poderá considerar dados de pesquisas científicas (artigos publicados) sobre a taxa de crescimento desse tipo de bactérias em água mineral¹⁰.

O tutor deverá ficar atento aos encaminhamentos dos alunos, pode ser que eles proponham soluções sem considerar conceitos matemáticos, caso isso ocorra, o tutor poderá ressaltar também a importância do tratamento matemático da questão, por meio de questões, por exemplo, qual é a taxa de variação do crescimento da população desse tipo de bactérias em função do tempo? Poderá ressaltar ainda que o uso de um modelo poderá auxiliar na tomada de decisão em relação ao problema

¹⁰ O artigo intitulado "Variação da microbiota natural e de *pseudomonas aeruginosa* em água mineral não carbonatada embalada em diferentes materiais durante o armazenamento a 30°C ± 1°C" pode ser bastante útil no desenvolvimento do estudo. (Disponível em <<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-20611997000200019>>. Acesso em: 02 jan. 2016).

proposto, com previsões ou simulações. Também poderá sugerir o estudo de modelos existentes para o crescimento populacional de bactérias, ressaltando sua importância e limitações perante a situação real.

Esse problema envolve conhecimentos relacionados às áreas de Biologia, Química, Matemática, Medicina, Economia, entre outras, dependendo do tipo de solução que será proposto pelos grupos, após pesquisas e estudos complementares.

Problema 2 – Impactos ambientais causados por poluentes químicos



Figura 3 – Incêndios em tanques de combustível.
Fonte: Retirado de <http://odia.ig.com.br/>

O incêndio que teve início em um dos tanques de combustível de uma indústria, no bairro do Alemoa, cidade litorânea de São Paulo, que gerou diversas explosões em outros tanques causou diversos prejuízos naturais. Os impactos ambientais do incêndio que atingiu seis tanques poderão durar vários anos, contaminando as águas, manguezais, plantas e animais.

Além disso, com a emissão de poluentes na atmosfera, existe a possibilidade de ocorrência de chuvas ácidas, o que comprometeria a vegetação da serra do Mar. Estima-se que bilhões de litros de água que foram usados no resfriamento dos tanques voltaram para o ecossistema aquático com resíduos do combustível e dos produtos químicos que compõem a espuma usada para debelar o fogo.

De acordo com a Companhia Ambiental do Estado (Cetesb), na época do incêndio a quantidade de oxigênio disponível na água foi reduzida dramaticamente e a temperatura subiu 7°C acima do tolerável para os peixes, o que causou a morte de oito toneladas deles.

Realize uma pesquisa para indicar os impactos ambientais causados pelo incêndio relatado no início, e busque desenvolver um modelo matemático para fazer previsões sobre o tempo que será necessário para que os impactos sejam recuperados.

Estudo de apoio para o problema 2¹¹

Para incentivar os estudos dos impactos ambientais causados pelo incêndio descrito na situação anterior, e indicar algumas informações e dados que serão necessários para iniciar tais estudos, vamos propor a análise e resolução do caso de uma Petroquímica que poluiu uma Baía:

A Petroquímica Ltda., companhia especializada no tratamento de resíduos poluentes derramou, acidentalmente, uma grande quantidade do Agente Oleoso na Baía Bonita. Feitas medições após o acidente, concluiu-se que a concentração do Agente Oleoso nas águas da baía era de 10 ppm (partes por milhão).

Na baía existem manguezais que, por sua flora e fauna características, são considerados zonas de proteção ambiental. Infelizmente, não é possível remover por meios mecânicos o Agente Oleoso que polui os manguezais: corre-se o risco de causar danos ainda maiores ao ecossistema local.

Além disso, a pesca na baía constitui o único meio de sobrevivência para diversas colônias de pescadores que vivem ao seu redor. Devido à contaminação dos peixes pelo Agente Oleoso, a pesca na baía foi proibida.

Numa tentativa de ressarcir, em parte, os danos causados ao meio ambiente e o prejuízo sofrido pelos pescadores, moveu-se uma ação popular contra a Petroquímica para o estabelecimento de uma multa a ser investida em Programas de Despoluição da baía e em auxílio às famílias desempregadas.

Após uma cuidadosa análise da situação, cientistas ambientalistas, garantiram que a baía tem uma capacidade de se autodepurar a uma taxa de 20% ao ano. Baseando-se nesta hipótese, estabeleceram, então, o seguinte modelo matemático para a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo:

¹¹ Esse estudo de apoio foi inspirado e adaptado do capítulo 6 do livro *Aprendendo Cálculo com Maple*, de Angela Rocha dos Santos e Waldecir Bianchini. Ano: 2002. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_06.pdf>. Acesso em: 12 maio 2015.

$$p(1) = 10$$

$$p(n+1) = 0,8p(n)$$

(Este é um exemplo de um sistema dinâmico discreto)

Utilize este modelo, para fazer as seguintes previsões indicadas no quadro abaixo:

Ano	Poluente (ppm)	Ano	Poluente (ppm)	Ano	Poluente (ppm)	Ano	Poluente (ppm)
1		6		11		16	
2		7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

Quadro 2 – Previsão do total de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Adaptado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

A partir dos dados indicados no quadro anterior, construa um gráfico para indicar as previsões calculadas por você:

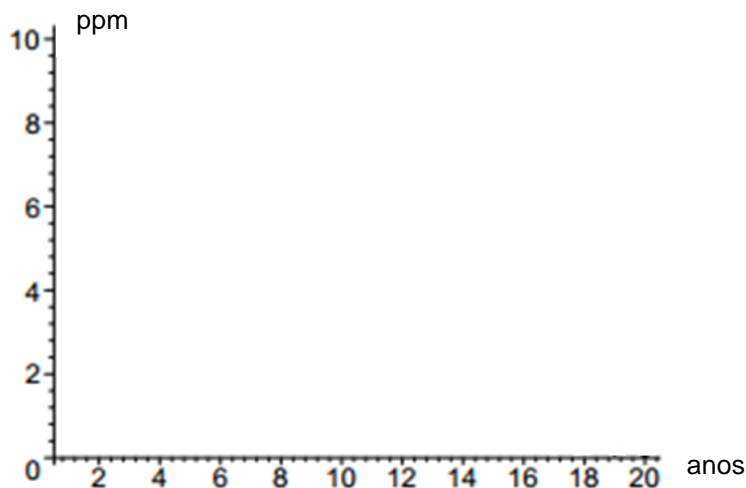


Figura 4 – Gráfico relacionado às previsões (poluentes x anos).
Fonte: Adaptada do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Suponha que de posse destes dados, os advogados da Petroquímica, em defesa do seu cliente, alegaram junto ao tribunal que não houve um dano real ao meio ambiente provocado pelo derramamento do Agente Oleoso na baía, porque ao final de algum tempo o nível de poluição da baía retornaria ao seu padrão inicial. Para fundamentar esta linha de argumentação, usaram a fórmula $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, explicando que esta

fórmula traduzia em termos matemáticos precisos o que aconteceria com a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo. Além disso, explicaram também que a fórmula acima significa, matematicamente, que após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero.

O promotor da ação achou que havia alguma coisa errada nesta história, “justificada matematicamente”, mas não sabia como contestar os argumentos matemáticos apresentados. Uma de suas assistentes chamou atenção para o verdadeiro significado matemático da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$.

A assistente argumentou que, embora depois de muitos anos a concentração do Agente Oleoso realmente se aproximaria de zero, os peixes e o restante da fauna e da flora aquáticas estariam contaminados e impróprios para o consumo. Por este motivo a pesca na baía seria proibida até que a concentração do Agente Oleoso fique abaixo de 2 ppm.

Para fundamentar seu raciocínio apresentou o seguinte gráfico, ilustrativo da situação descrita:

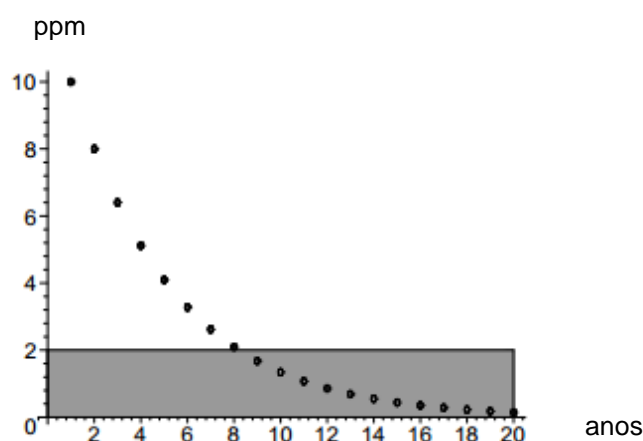


Figura 5 – Previsão da concentração de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Assim, pelos dados apresentados pelos ambientalistas e pelo gráfico acima, ela concluiu que transcorreriam oito longos anos até que a baía pudesse ser liberada para a pesca. Propôs, então que fosse cobrada da Petroquímica uma multa de 10 milhões de reais por cada ano em que a pesca estivesse proibida. Pelos dados apresentados, a multa total devida seria de 80 milhões de reais.

Além disso, a assistente da promotoria afirmou que a interpretação matemática dada pelos advogados da Petroquímica estava correta, mas era apenas uma pequena parte da história. O significado mais preciso da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$ é que para qualquer nível de concentração C do Agente Oleoso haverá um tempo T , que pode estar muito, muito longe no futuro, tal que para todo $t \geq T$, isto é, para qualquer tempo posterior, teremos que $|p(n)| < C$.

Dessa maneira, para que a pesca pudesse ser liberada teríamos que ter $C = 2$ ppm e, neste caso, $T = 9$ anos.

O promotor então argumentou que, embora o nível de 2 ppm fosse adequado para a liberação da pesca na baía, a fauna e a flora, especialmente dos manguezais, só se recuperariam completamente quando o nível de concentração do Agente Oleoso ficasse abaixo de 0,5 ppm e apresentou o gráfico a seguir:

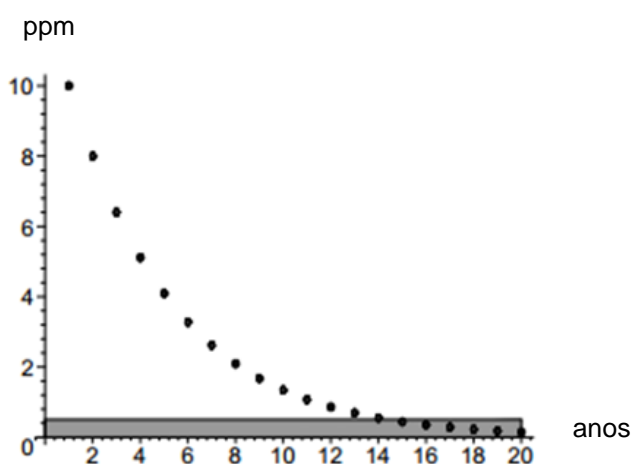


Figura 6 – Nível de concentração do Agente Oleoso no decorrer dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Concluindo, então, que este nível só seria atingido quando $t \geq 14$.

Tendo em vista os argumentos apresentados por ambas as partes, o juiz condenou a Petroquímica a pagar uma multa de 140 milhões de reais.

É possível determinar quanto tempo deve-se esperar até que a concentração de poluentes fique abaixo do nível indicado, nos seguintes casos? Em caso afirmativo determine quanto tempo será necessário, em caso negativo justifique.

(a) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 30% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,5 ppm.

(b) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 10% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,1 ppm.

No julgamento acima, apesar de todos os interessados terem concordado com a multa estipulada, muitos especialistas discordaram do nível aceitável de poluição. Para cada um dos especialistas consultados este nível seria de:

- ✓ Para o Especialista A o nível aceitável de poluição é de 12 ppm;
- ✓ Para o Especialista E o nível aceitável de poluição é de 3 ppm;
- ✓ Para o Especialista Q o nível aceitável de poluição é de: 1 ppm;

Qual seria o valor da multa que a Petroquímica deveria pagar levando em conta a opinião de cada um dos especialistas consultados?

Em geral, qual é o nível de poluição aceitável para que seja permitido o contato da água com o corpo humano, por exemplo, para banhar-se?

Ainda em relação ao julgamento, os advogados da Petroquímica apelaram da sentença alegando que a baía já apresentava um nível de poluição antes do derramamento do Agente Oleoso. Supondo que a concentração de agentes poluidores na baía é normalmente de 0,1 ppm, os ambientalistas obtiveram o seguinte modelo matemático para prever a concentração de poluentes ao longo do tempo:

$$p(1) = 10$$

$$p(n + 1) = 0,1 + 0,8(p(n) - 0,1)$$

Este modelo, em vez de levar em conta a quantidade de poluição da baía, estima a diferença entre o nível de poluição atual e o nível de poluição natural 0,1. Em outras palavras, se o nível aceitável é C, a Petroquímica será multada por cada ano no qual $|p(n) - 0,1| \geq C$. Levando em conta este modelo, determine por quantos anos a Petroquímica deverá ser multada se o nível tolerado é de 0,05 ppm.

Orientações Didáticas

No primeiro momento, o tutor poderá retomar algumas considerações a respeito da dinâmica das aulas. O mesmo deve esclarecer que a abordagem PBL será direcionada para trabalhar diversos conceitos além dos matemáticos.

Neste problema há questões associadas à área ambiental, ao entendimento de reações químicas elementares, a problemáticas ligadas à economia, ética, dentre outras. Devem-se promover momentos para análises e reflexões acerca do problema.

O problema é apresentado a cada grupo. Recomenda-se a leitura compartilhada. Mediante a compreensão dos estudantes, o tutor começa a realizar suas inferências, com a intenção de que as primeiras questões de aprendizagem sejam identificadas, solicitando também que indiquem palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes dos grupos.

Indagações como: Quais os apontamentos mais relevantes nesse problema? Que conhecimentos o grupo acredita que estejam envolvidos nessa situação? Todas as informações pertinentes aos conteúdos matemáticos foram dadas? Quais dimensões além do campo matemático esse problema possui? Que tipo de ligações existe com as questões profissionais? Que estratégias o grupo pode usar para propor alguma resolução? etc.

Essa fase é crucial na proposta PBL, pois os alunos são confrontados com uma situação nova. Por meio das primeiras discussões realizadas, dos conflitos gerados a partir dessa situação, juntamente com os questionamentos do tutor e dos membros do próprio grupo, desequilíbrios cognitivos podem surgir, e então é necessário analisar que conhecimentos já existem a respeito dessa situação. Ou seja, trabalha-se com um levantamento de informações prévias e com a identificação de questões de aprendizagem (de ordem conceitual, social e psicológica).

A partir dessa primeira mediação, o tutor pode listar quais são os conhecimentos já adquiridos por esses alunos e como os mesmos interagem entre si. Logo, serão realizadas orientações a respeito das indagações. Dessa forma, há como identificar quais variáveis são elementares no problema e quais provavelmente serão adotadas para que estudos complementares possam contribuir para sua resolução.

Explicações iniciais realizadas pelos grupos são interpretadas como hipóteses. E estas, por sua vez, precisam ser investigadas. Assim, estudos referentes ao problema precisam ser aprofundados. As primeiras ideias envolvendo planos de ação começam a aparecer: Quais conhecimentos são necessários para que o problema seja resolvido? A respeito das questões ambientais, jurídicas, éticas, que aspectos precisam ser inevitavelmente considerados? O que vocês acreditam que está implícito nessa situação?

Na proposta PBL, é necessário ter uma visão holística a respeito da análise e interpretação do problema. Os grupos devem, então, estabelecer suas prioridades de estudos e seus objetivos de aprendizagem, pois afinal, nesta metodologia de ensino, espera-se que os próprios estudantes mobilizem seus conhecimentos.

Todo esse processo envolve a mediação do tutor. Após a delegação de tarefas, em parcerias ou de forma individual, e com o apontamento de alguns planos de ação, pode-se propor a realização de um relatório do encontro ao final dessa reunião.

O problema em questão envolve noções de Limites. Como sugestão de trabalho, o tutor pode propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, salas de monitoria, plantão de dúvidas), entre outras formas de estudo. Durante a dinâmica do PBL, o tutor pode também realizar encontros com uma característica mais expositiva a respeito dos principais conceitos, sem infringir a autonomia dos estudantes.

Ao trazer para discussão algo sobre limite, como a compreensão da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, por exemplo, os alunos precisarão ter em mãos os recursos e pesquisas que realizaram sobre o assunto. O intuito é que, de modo autônomo, os estudantes mobilizem seus conhecimentos, verificando o que compreenderam, identificando suas concepções sobre o assunto. Seus registros e análises realizadas devem ser amplamente discutidos.

Esse é o momento para que se aborde a importância da Matemática aplicada a situações realísticas; que se evidencie o quanto certos conhecimentos são relevantes.

No problema em questão é possível identificar conhecimentos prévios a respeito da análise de tabelas e gráficos, e suas interpretações sobre o comportamento das funções dadas.

Como questionador e provocador, o tutor poderá retomar o problema e os gráficos construídos, permitindo que os alunos percebam o que acontece com a concentração de poluentes à medida que os anos se passam. Para isso, sugerimos alguns questionamentos: O que significa a afirmação “Após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero”?; Como esta frase se relaciona com os gráficos? É verdadeira a ideia de que os valores da concentração de poluentes irão zerar em algum momento? Matematicamente, como isso pode ou não ser refutado?

A fim de discutir a definição matemática sobre limites, o tutor pode também explorar graficamente a definição desse conceito, fazendo-o de forma coletiva, o com o intuito de clarificar possíveis incompreensões iniciais.

Com essa etapa de esclarecimentos e discussões, novos estudos devem ser encaminhados. Surgem rediscussões entre os participantes e busca-se integrar as ideias matemáticas ao problema dado. Após os estudos necessários e indicados (o que pode se concretizar ao longo de vários encontros, dependendo da ênfase dada ao problema, das orientações fornecidas pelo tutor, do cronograma e da flexibilidade das aulas, do trabalho e interpretação dos membros da equipe, dentre outros fatores), os estudantes devem apresentar quais as propostas de soluções para o problema analisado.

Essa fase pode ser feita mediante sugestões de soluções apresentadas ao tutor, a partir de suas mediações em cada grupo. Consequentemente, as estratégias de resolução e desenvolvimento de todo percurso, podem ser apresentadas à turma de modo geral – com a adoção de recursos audiovisuais, exposição de trabalhos/projetos, explanação dos modelos projetados. Os discentes têm a oportunidade de rever suas considerações e de analisar os argumentos utilizados para defendê-las. Há uma formulação geral a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos e das propostas de soluções para o problema dado. Logo, faz-se necessário validá-las.

Com os questionamentos dos demais integrantes da sala e apontamentos feitos pelo tutor, e outros integrantes do processo de avaliação (professores de outras áreas, por exemplo), é possível verificar a viabilidade das soluções apresentadas. Modificações podem ser realizadas, caso haja necessidade. E, com isso, ocorrem os processos de avaliações, descritos anteriormente. Para que isso seja ainda mais eficaz, o tutor deve oportunizar aos estudantes uma participação efetiva, de modo que percebam suas atuações ao longo do processo, seu desempenho, seu compromisso com a equipe, evolução ao longo da dinâmica, dentre outras observações.

A adoção e adaptação do problema abordado tem como objetivo colaborar com a formação de profissionais que de alguma forma atuem em questões relacionadas ao meio ambiente. Sendo este o caso, esse profissional precisa estar dotado de uma base sólida de conhecimentos teóricos e práticos ligados a diferentes áreas, como Matemática, Física, Química e Biologia, contemplando também uma visão crítica e global de aspectos políticos, econômicos, sociais e culturais.

Problema 3 – Projetando embalagens em forma cilíndrica¹²

Diversas indústrias de produtos alimentícios utilizam embalagens de lata em formato cilíndrico para comercializar seus produtos.

A produção de latas (que são utilizadas para armazenar ervilhas, extrato de tomate, óleo de soja, leite condensado, leite em pó, etc.) busca adotar técnicas para obter algumas otimizações, por exemplo, minimizar as perdas de materiais, de custos e atrasos ou maximizar os lucros. Diante de tais necessidades, surgem certas indagações:



Figura 7 – Alimentos dentro de latas.
Fonte: <http://nutriatualidades.blogspot.com.br>

Como cortar a matéria-prima, no caso metal, de forma a obter a maior quantidade possível de unidades e a menor quantidade de rejeitos?

Suponha que você seja contratado por uma Empresa de Produtos Alimentícios, com o intuito de colaborar com o processo de fabricação de embalagens referentes às latas de extrato de tomate, em formato cilíndrico, procurando reduzir seus gastos e minimizar perdas de material.

Sua primeira tarefa será maximizar o volume da lata de extrato de tomate. Sabendo-se que a Empresa compra da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional) chapas de folha-de-flandres retangulares, você deverá determinar dimensões ótimas da chapa que resultam no maior volume da lata, supondo que o volume seja conhecido.

¹² Esta situação foi inspirada e adaptada de alguns sites que contemplam a área de Mecânica e de Pesquisas Operacionais. Disponíveis em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=matematica-ajuda-industria-fazer-cortes-pacotes-perfeitos&id=010170100219#.VrO7Thar TIW>> e <http://www.sobrapo.org.br/o_que_e_po.php>. Acesso em: 01 ago. 2015.

Como você pode determinar a forma mais econômica dessa lata (adotando-se o volume V), estabelecendo relações entre a altura h e o raio r que minimize o custo do material usado?

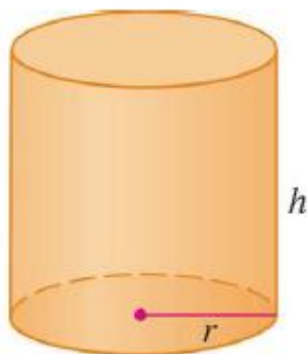


Figura 8 – Formato da lata.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto¹³

Será que na prática, as latas produzidas e comercializadas realmente seguem com rigor às proporções encontradas, como isso pode ser verificado? Como explicar os resultados encontrados na questão anterior?

Estudo de apoio para o problema 3¹⁴

Buscando explicar os fenômenos observados no item anterior. São feitas as seguintes considerações:

O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados por retângulos: esses retângulos são cortados da folha com uma ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (figura 9), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, porém tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, encontre qual é a relação entre h e r (figura 8).

¹³ Esta ilustração, assim como as figuras 9 e 10, foi retirada de uma ficha de entrega de projeto (*Fecha de entrega de proyecto*), a qual fez parte das aulas de Matemática Básica 2, da Facultad de Ingeniería da Universidad de San Carlos de Guatemala, em 2014. Disponível em: <http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Proyecto2_103-1-00-2014_MB2-1s.pdf>. Acesso em 06 fev. 2016.

¹⁴ A atividade de apoio ao estudo para o problema 3 foi extraída e adaptada do livro de James Stewart, em relação às aplicações de derivadas. STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, v. 1, 2006.

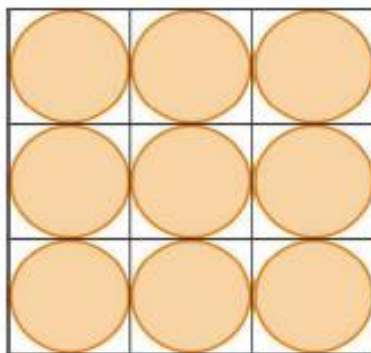


Figura 9 – Discos cortados em quadrados.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (figura 10). Encontre qual é a relação entre h e r se for adotada essa estratégia.

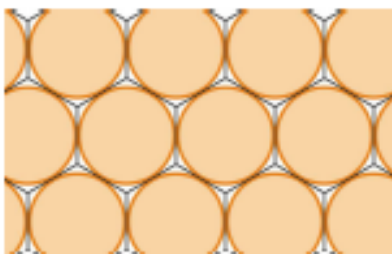


Figura 10 – Discos cortados em hexágonos.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Ao realizar os cálculos necessários, provavelmente os valores numéricos que serão encontrados para a razão h/r estarão próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo.

Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que r , que são dobrados sobre as laterais da lata. Se levarmos em conta isso, deveremos aumentar o valor numérico da razão h/r .

Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em juntar os lados para formar as latas. Se cortarmos os discos a partir de hexágonos (figura 10), vamos considerar que o custo foi dado e será proporcional a relação:

$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi h + k(4\pi + h)$, onde k é recíproco do comprimento que pode ser associado ao custo de uma unidade de área de metal.

Dessa forma, mostre que essa expressão é minimizada quando:

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\frac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}}}$$

Após a explicação de tais fenômenos e dando continuidade aos estudos sobre o projeto solicitado pela Empresa, aplique seus conhecimentos à seguinte situação¹⁵:

“Em uma das etapas do processo de produção da massa de tomate, a polpa já processada é mantida em um recipiente cilíndrico. Para retirar completamente a polpa de dentro desse recipiente, pelo orifício inferior, são utilizadas duas pás acopladas a um eixo que corta o centro do cilindro. Para esvaziar completamente o recipiente, a pá imediatamente ao lado do orifício é mantida fixa, enquanto a outra executa uma revolução completa no sentido anti-horário. Seguindo a sua política de minimizar custos, a Empresa decidiu usar chapas de mesmo material utilizado nas latas, mantendo o perímetro de 36 cm.”

Sua tarefa agora é calcular o maior volume do recipiente onde será guardada a polpa, tendo como base a chapa referida.

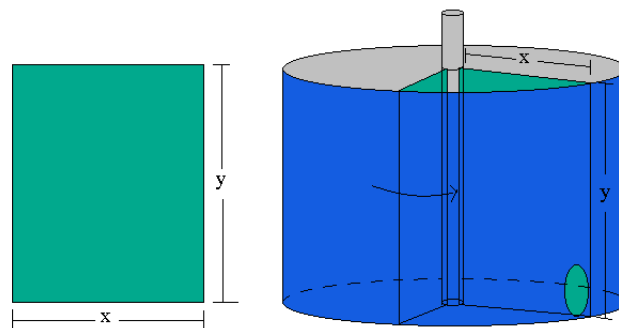


Figura 11 – Esquema da chapa utilizada.
Fonte: Retirada do projeto E-cadernos de Cálculo I

¹⁵ Esta situação foi adaptada do Projeto *E-cadernos de Cálculo I*, da Universidade de Brasília – UnB. O projeto foi realizado no segundo semestre de 2002, sobre o monitoramento do prof. Marcus Vinícius A. Moreira. Disponível em: <<http://www.mat.unb.br/grad/aulas/cadernos/calculo1/projetos/projeto1.html>>. Acesso em: 25 jul. 2015.

Para a fabricação de embalagens metálicas, diferentes tipos de chapas de metal são utilizadas, como a folha de flandres, a folha cromada, folha stancrom e folha não revestida.



Figura 12 – Embalagens metálicas.
Fonte: Retirado de www.agroevento.com

Em que consistem as diferenças de um material para outro, do ponto de vista de conhecimentos químicos?

Que vantagens fazem com que existam muitas embalagens de metal no mercado?

Por que se utiliza folha cromada ao invés de folha de flandres em certos casos?

Orientações didáticas

A gestão da sala de aula se dará de modo análogo aos problemas anteriores, adotando-se determinadas particularidades.

Inicialmente deverá ser feita a apresentação do problema dado e mobilização dos grupos contemplando ideias sobre otimização de lucros e a relevância desse assunto na área de atuação profissional, considerando cursos de graduação que envolvam Gestão de Produção, Economia ou questões relacionadas às áreas de Química, Biologia, entre outros.

As seguintes questões poderão complementar a dinâmica inicial da tutoria: Quais devem ser os materiais mais adequados para se produzir as embalagens? De que forma um profissional pode realizar algumas previsões em relação ao custo-benefício? Que estratégias podem ser adotadas a fim de se obter as dimensões ótimas da chapa? Quais conhecimentos voltados a essa área devem ser indicados como prioritários? É possível identificar os conceitos matemáticos envolvidos no problema

apenas com a leitura do mesmo? Em relação ao volume dado e a determinação de cálculos de áreas de superfícies, que conceitos estudados em momentos anteriores devem ser explorados?

Ainda no momento inicial deverão ser realizados diálogos entre os membros da equipe a respeito das primeiras reflexões; delegação das tarefas e dos planos de ação; registro das informações imprescindíveis e destaque para a atuação do coordenador e do relator.

No segundo momento (em outros encontros) serão discutidas e analisadas as informações e materiais obtidos. Sugestivamente questiona-se se “as informações que os estudantes conseguiram na delegação das primeiras tarefas são viáveis”? Houve material de estudo referente às abordagens matemáticas em questão, como taxa de variação e otimização?

Será fundamental a realização de constantes mediações por parte do tutor: direcionamentos dos grupos; sugestão de materiais de estudo e recursos de apoio (textos, trabalhos acadêmicos a respeito do assunto, livros didáticos, exemplos de aplicação).

De posse dos materiais de estudos analisados ou organizados, surge o compartilhamento de informações entre os integrantes de cada grupo. Se cada equipe estiver efetivamente pesquisando os dados elementares à resolução do problema, será possível que realizar relatórios envolvendo questões gerais a respeito da produção das embalagens e pode-se (conforme estiver no planejamento do tutor) propor um estudo específico dos conceitos matemáticos envolvidos. Caso isso não ocorra, o tutor poderá sugerir como encaminhamento o estudo de derivadas e suas aplicações em problemas que envolvem otimização. Pode-se orientá-los para a realização de estudos individuais e/ou coletivos sobre: definições de conceitos; noções a respeito das principais regras de derivação; relações pertinentes aos valores de máximos e mínimos e às aplicações ao problema apresentado.

A parte referente ao estudo de apoio dada neste problema tem o intuito de contribuir com o processo de aprendizagem. Com essa proposta podem ser explorados conhecimentos sobre áreas de superfícies, otimizações e moldes dos recortes de embalagens.

O tópico referente a verificação das dimensões de embalagens cilíndricas encontradas nas prateleiras dos supermercados é viável. Nessa etapa, o tutor pode propor que os alunos realmente façam os testes na prática; que analisem diferentes embalagens, comparando os valores encontrados apenas por meio de medições usuais com os cálculos feitos através da aplicação do conceito de derivadas. Assim, é possível construir argumentos válidos que justifiquem as relações existentes entre raio e altura de embalagens cilíndricas.

Mediante essa proposta, os conhecimentos podem ser ampliados, pois há como abordar também questões envolvendo o custo da manufatura, a degradação (oxidação) de determinados tipos de materiais e outras relações matemáticas que se fundamentam nos conhecimentos sobre derivadas, além de questões relacionadas à sustentabilidade.

Problema 4 – Produção de citricultura¹⁶



Figura 13 – Produção de laranjas.
Fonte: Retirado de www.rankdobrasil.com.br

Setor altamente organizado e competitivo, a citricultura é uma das mais destacadas agroindústrias brasileiras. Responsável por 60% da produção mundial de suco de laranja, o Brasil é também o campeão de exportações do produto.

O cultivo de laranja no Brasil se divide em dois períodos distintos. O primeiro, de 1990 a 1999, se caracteriza pelo aumento da produção e conquista da posição de líder do setor. O segundo, a partir de 1999, é o período de consolidação da capacidade e desempenho produtivo. São colhidas, anualmente no País, mais de 18 milhões de toneladas de laranja ou cerca de 30% da safra mundial da fruta.

Para manter a liderança do setor, o Ministério da Agricultura investe no apoio a adoção de sistemas mais eficientes, como a produção integrada, com medidas para reduzir os custos, aperfeiçoar e ampliar a comercialização do produto. O Ministério tem, ainda, ação efetiva na fiscalização e prevenção ao aparecimento de pragas e doenças. O Estado de São Paulo é responsável por 74% desse total (IBGE – 2012).

Atualmente as informações configuram-se, cada vez mais, como essencial para a gestão, tomada de decisão e sucesso em uma atividade econômica. Na citricultura paulista, na última década, mudanças intensas foram registradas, com acentuados impactos em tecnologia, custo de produção, receita e rentabilidade. Essa evolução

¹⁶ Este problema foi inspirado em sites ligados à produção de laranjas no Brasil e análises sobre Agronegócios. Disponíveis em <http://www.agricultura.gov.br/vegetal/culturas/citrus> e <http://www.investe.sp.gov.br/setores-de-negocios/agronegocios/laranja/>. Acesso em 05 set. 2015.

contribuiu para agravar ainda mais a crônica carência de dados estatísticos e econômicos da cadeia citrícola.

Que tipo de informações a respeito da citricultura está disponível? A partir de tais informações é possível fazer algum tipo de previsão considerando os próximos anos? Quais aspectos interferem diretamente na produção de sucos de laranja?

Tratando-se de aspectos ligados à Economia, é possível identificar a taxa de variação do custo total quando x unidades são produzidas. De que forma a compreensão de conceitos matemáticos podem contribuir para a compreensão dos aspectos econômicos de um citricultor?

Orientações didáticas

A situação acima poderá ser proposta em cursos de graduação que estejam relacionados à formação de profissionais que atuem em Agronomia, Economia, Produção, entre outros.

Dispondo os alunos em grupos e tendo como intenção evidenciar aspectos vinculados à nossa realidade e à economia do país, o tutor pode sugerir a leitura e análise do texto que segue.

Texto complementar:

Sistema de produção de citros & importância econômica

“A história da citricultura brasileira está intimamente ligada à própria história do país. Poucos anos após a descoberta do Brasil, entre 1530 e 1540, os portugueses introduziram as primeiras sementes de laranja doce nos Estados da Bahia e São Paulo. Dadas às condições ecológicas favoráveis, as plantas produziram satisfatoriamente, a ponto de os frutos da laranja ‘Bahia’ serem reconhecidas ainda no Brasil Colônia como maiores, mais sucosos e de excelente qualidade do que os produzidos em Portugal. Mas, somente a partir dos anos 30 do século passado, a citricultura começou a ser implantada comercialmente nos Estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Bahia, tendo apresentado maiores índices de crescimento nos estados do Sudeste e Sul.”

A citricultura brasileira apresenta números expressivos que traduzem a grande importância econômica e social que a atividade tem para a economia do país. Alguns desses números são mostrados concisamente: a área plantada está ao redor de 1 milhão de hectares e a produção de frutas supera 19 milhões de toneladas, a maior no mundo há alguns anos. O país é o maior exportador de suco concentrado congelado de laranja cujo valor das exportações, juntamente com as de outros derivados, tem gerado cerca de 1,5 bilhão de dólares anuais. O setor citrícola brasileiro somente no Estado de São Paulo gera mais de 500 mil empregos diretos e indiretos.

A Região Nordeste responde por 9% da produção nacional, constituindo-se na segunda maior região produtora do país, com mais de 110.000 hectares cultivados e mais de 1,5 milhões de toneladas. Dentre os estados produtores, o destaque fica com os estados Bahia e Sergipe, respectivamente segundo e terceiro produtores nacionais, que representam juntos 90% de toda área plantada. A citricultura nordestina tem grande potencial para implementar seu crescimento sobretudo em função da ausência de doenças e pragas de grande importância que se encontram distribuídas no Sudeste, maior centro produtor. No que diz respeito ao incremento e geração de empregos, percebe-se que devido à instalação de muitas casas de embalagens (packing-houses) e aumento da exportação do limão tahiti para o Mercado Europeu, muitos empregos diretos e indiretos têm sido oferecidos, na ordem de 100 mil. ”

*Claudio Luiz Leone Azevêdo
Embrapa, dez 2003*

Esse material pode instigar a curiosidade dos alunos, promover discussões e incentivar o levantamento de alguns pontos relevantes, como: apontar necessidades das empresas ligadas ao ramo de citriculturas; investigar alguns impactos econômicos que esse setor representa ao país; denotar alguns impactos na sociedade em relação a geração de lucros, da receita e da criação de empregos, dentre outros.

Essa dinâmica associada a outras informações levantadas pelos demais grupos seriam apresentadas de modo coletivo, usando esquemas, palavras-chave, mapas

conceituais, etc. A partir desse momento, começam os trabalhos de análises e discussão do problema em si.

O tutor tem o papel de conduzir esse processo: Que visão o grupo tem em relação ao problema e às suas aplicações profissionais? A equipe possui conhecimentos sobre funções marginais? Como levantar informações sobre os temas que estão implicitamente relacionados com o problema, em especial as taxas de variação (taxa de variação envolvendo produção, custo, lucro e receita)? De que formas há impactos econômicos desse tipo de situação à nossa sociedade? Que conceitos matemáticos há por trás das diferentes questões desse problema (como a relação entre a quantidade de produtos a serem produzidos e a mão-de-obra necessária)?

Possivelmente ocorrerão reencontros das equipes de trabalho, etapas nas quais há elaboração de estratégias de ação e seleção de referências complementares. Será possível elaborar roteiros de estudos ligados às necessidades das empresas/indústrias nesse caso e planejamentos voltados ao campo matemático.

Em relação à matemática, espera-se que os grupos percebam o quanto o trabalho com funções marginais está ligado ao conceito de derivadas e integrais. Deseja-se que haja uma gama de conhecimentos prévios essenciais ao desenvolvimento dos novos assuntos a serem trabalhados, como: análise e interpretação de funções no cotidiano; a compreensão de taxas de variação; a leitura e interpretação de gráficos; manipulação algébrica; e escolha do modelo matemático.

Tanto os alunos quanto o tutor poderiam observar se há domínio em relação a esses conhecimentos. Caso existam lacunas, planos de estudos paralelos podem ser indicados, a fim de retomar conceitos. Ao longo dos encontros e dos estudos individuais, que também são necessários, os alunos podem trocar suas experiências e se ajudar mutuamente.

A partir dessas orientações, os grupos provavelmente encontrarão referências ligadas a Matemática Aplicada às áreas Econômica e Administrativa. O tutor tem a incumbência de fornecer outras sugestões que contribuam para esse roteiro de estudos. Vincular o problema às ideias sobre o comportamento de funções e taxa de variação será fundamental.

É possível que ocorra uma abertura para o tutor realizar ponderações a respeito do campo matemático, principalmente quando se tratar de definições e regras de derivação/integração. Outro caminho é que o tutor proponha aos alunos a pesquisa de alguma definição ou técnica a ser usada e que, de modo voluntário, expliquem o que compreenderam a respeito do assunto. Ou seja, os estudantes agirão de forma independente, mesmo com a atuação do tutor, podendo fazê-lo com o apoio dos recursos disponíveis: lousa, computadores, livros didáticos, entre outros.

Com a proposta de estudos finalizada, os estudantes partem então para os processos de resolução do problema em si, atrelando suas aprendizagens com seu campo de atuação profissional. E as etapas posteriores ocorrem conforme detalhamos nas abordagens gerais do processo do PBL.