



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE
JANEIRO**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO
MULTIDISCIPLINAR**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA E DOS
NÚMEROS IRRACIONAIS:**

Uma proposta para formação de professores

RUTE RIBEIRO MEIRELES ROCHA

Sob a orientação da Professora Doutora

DORA SORAIA KINDEL

ÍNDICE

Apresentação do Curso;

- ▶ Pùblico alvo
- ▶ Carga horária e estrutura;
- ▶ Módulos e encontros;
 - ❖ Conteúdo teórico;
 - ❖ Tarefas principais.
- ▶ Tarefas extras
- ▶ Textos complementares
- ▶ Orientações ao aplicador
- ▶ Referências

APRESENTAÇÃO

Este curso de extensão é produto da dissertação de mestrado defendida na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. A proposta foi construída sobre o alicerce didático das metodologias interativas e de investigação matemática.

Esperamos proporcionar aos professores envolvidos um contato diferenciado com os conceitos em torno dos números irracionais. E, além disso, oferecer uma faísca de inspiração para novas aplicações e experimentações no campo da educação matemática.

PÚBLICO ALVO

Professores de matemática que desejem atualizar sua prática e vivenciar abordagens didáticas diferenciadas para a construção numérica, em particular a do conjunto dos números irracionais.

OBJETIVOS

Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite a percepção da construção do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e especificidades.

CARGA HORÁRIA E ESTRUTURA:

60 h: Das quais 45h em regime presencial (9 encontros de 5 horas) e 15 horas de atividades extras.

MÓDULOS E ENCONTROS

- 1- Os números irracionais: Abordagens e desafios. (5 horas- 1 encontro)
- 2- Incomensurabilidade: A história e sua contribuição. (10 horas - 2 encontros)
- 3- É irracional? Representação decimal/geométrica e significado. (10 horas- 2 encontros)
- 4- Número π . Comum e incomum. (5 horas- 1 encontro)
- 5- Número φ . Curiosidades fundamentais (5 horas- 1 encontro)
- 6- Avaliação e construção. (10 horas- 2 encontros)

ORGANIZAÇÃO

Cada módulo contará com:

- *Referência teórica.* Textos que abordam a temática referente ao assunto do módulo. A leitura dos mesmos poderá ser realizada nos horários destinados para atividades à distância;
- *Roteiros de atividades principais.* Tarefas voltadas para a investigação, percepção e reformulação de conceitos relacionados à irracionalidade.

No fim deste documento norteador, constam tarefas e textos extras que podem vir a fazer parte da aplicação deste curso, caso o tempo e as peculiaridades da turma ofereçam a oportunidade.

MÓDULO 1- OS NÚMEROS IRRACIONAIS: ABORDAGENS E DESAFIOS. (5 HORAS)

OBJETIVOS

Possibilitar ao professor a reflexão sobre as dificuldades geralmente encontradas pelos alunos e, também, sobre algumas sugestões didáticas propostas

Resumo

Trata das questões que se fazem presentes nos contextos de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números irracionais.

Tarefa principal- Módulo 1

1. Foram disponibilizados por email os seguintes documentos para leitura e discussão em grupo:

- 1) “Os números Irracionais e seu ensino: Delineando a imagem conceitual de um grupo de professores” (PietroPaolo, Corbo e Campos, 2013);
- 2) “A construção de significados dos números irracionais no ensino básico.”(Pommer, 2012);
- 3) “A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio” (Ripoll, 204).

2. Baseado na proposta teórica dos textos, você deverá produzir um trabalho que contemple os quatro itens abaixo:

I_ De acordo com o texto 1, os dados coletados revelaram inconsistências nos conhecimentos dos participantes, quanto à ampliação dos campos numéricos, ressaltando fragilidades que poderiam levar alunos a ideias equivocadas sobre esse assunto. Na perspectiva do autor, existem falhas na formação dos professores, expondo a necessidade de colocar em discussão a relevância desses números nos currículos de Matemática. Você concorda com os autores? Justifique sua resposta.

II_ Selecione uma das propostas de abordagem sugerida no texto 2 e justifique a sua escolha apontando pontos positivos e negativos.

III_ Sobre o desenvolvimento da atividade descrita no item II, elabore um pequeno texto respondendo as seguintes perguntas:

- Quais aspectos de aprendizagem podem ser explorados com as tarefas propostas?
- Dentre as tarefas propostas, você se identifica com uma em particular? Justifique sua resposta.

IV_ Sobre o texto “A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio” (Ripoll, 204), você deve elaborar um resumo seguindo os seguintes pontos:

Fazer uma síntese sobre o que trata o texto (no máximo 10 linhas) contemplando os seguintes aspectos:

Foco: Qual é o campo do texto? Tente ser específico

Importância: Qual a importância do texto para você, como professor, e para a sociedade?

Suporte: Quais as principais informações prévias fundamentais para a compreensão do texto?

MÓDULO 2- INCOMENSURABILIDADE: A HISTÓRIA E SUA CONTRIBUIÇÃO. (10 HORAS)

OBJETIVOS

Ambientar o professor na estrutura histórica da percepção da incomensurabilidade.

Resumo

Trata do contexto histórico e da indispensabilidade do conjunto dos números irracionais. Sugestiona-se apresentar as versões históricas para a construção do conjunto dos números irracionais e da incomensurabilidade de medidas.

Roteiro de tarefa- Incomensurabilidade- Módulo 2

Etapa 1: a Partir dos recursos ofertados defina a unidade a ser utilizada e meça o lado dos quadrados dados. Registre.

Etapa 2:

Considerando a unidade utilizada no item anterior, meça os lados dos demais quadrados e suas respectivas diagonais. Registre.

Foi possível encontrar um valor exato? Explique.

Etapa 4:

Produza um texto sobre as observações realizadas hoje, inclua percepções comparativas entre a visão de estudante e a de futuro professor.

MÓDULO 3- É IRRACIONAL? REPRESENTAÇÃO DECIMAL E SIGNIFICADO. (10 HORAS)

OBJETIVOS

Proporcionar a experimentação de tarefas que desenvolvam a percepção da irracionalidade numérica.

Resumo

Sugestão de tarefas que proporcionem a construção conceitual do número irracional e sua representação numérica.

Roteiro - calculadora quebrada- módulo 3

Sua calculadora quebrou.

A tecla de com símbolo de raiz não está funcionando. Calcule estas raízes irracionais. Registre, com detalhes, o procedimento que decidiu realizar.

$\sqrt{2}$	
$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}$	
$\sqrt{7}$	
$\sqrt{11}$	

Quais foram as maiores dificuldades encontradas?

Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê?

Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

Roteiro de tarefa- Representação decimal- Módulo 3

Etapa 1:

Individualmente, utilizando a calculadora, encontre o valor decimal que expressa cada um dos números irracionais. Registre a resposta lida no visor de sua calculadora.

$\sqrt{2}$	
$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}$	
$\sqrt{7}$	
$\sqrt{11}$	
$\sqrt{8}$	
$2\sqrt{2}$	

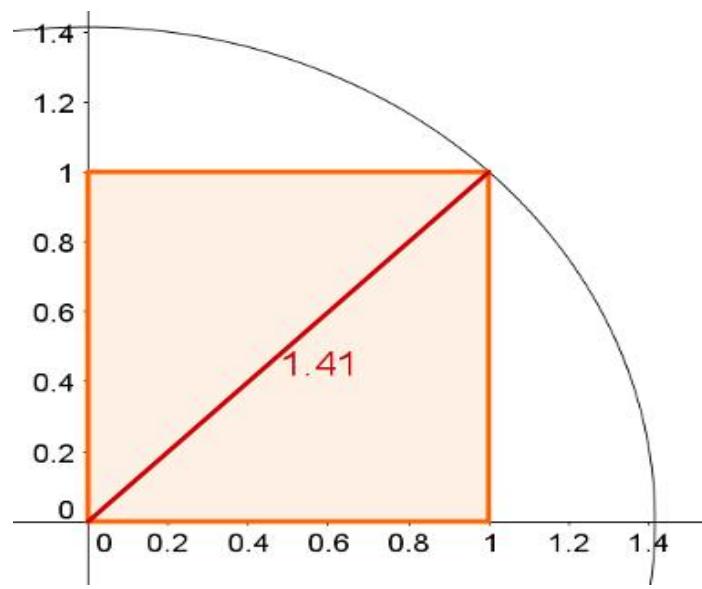
- a) Compare os valores que você encontre com os de seus colegas, o que observou?

- b) Caso tenham encontrado valores diferentes, tentem explicar o motivo.
- c) O valor decimal encontrado para raiz de oito é o mesmo valor encontrado quando se calcula a raiz de 2 multiplicada por 2 na calculadora? Por quê?

Roteiro - Espiral Pitagórica e Representação geométrica- Módulo 3

1- Observe o processo geométrico para a localização de raízes irracionais e repita-o com as raízes selecionadas.

Siga o seguinte processo



Os pontos (representação decimal) marcados anteriormente coincidiram com os encontrados? Houve diferença? Por quê?

Se você precisasse escolher a forma mais precisa de realizar este processo, qual das duas maneiras escolheria? Por quê?

Esta tarefa colaboraria para a aprendizagem do conceito de números irracionais na educação básica? Por quê?

MÓDULO 4- NÚMERO π . (5 HORAS)

OBJETIVOS

Proporcionar a experimentação de tarefas relacionadas ao número π e suas aplicações.

Resumo

Vivenciar possibilidades de observação do número PI e suas aplicações em diversos campos.

Roteiro- Número π - Módulo 4

1^a PARTE

- 1) Meça, com ajuda dos recursos disponíveis, o diâmetro e a circunferência das formas fornecidas e complete a tabela.
- 2) Calcule a razão entre circunferência e diâmetro e registre acrescentando uma nova coluna na sua tabela. O que observou?

OBJETO	CIRCUNFERÊNCIA	DIÂMETRO	C/D

- | a) Este método não é bem avaliado por diversos pesquisadores. Acreditam que ele apresenta uma visão

| equivocada sobre a irracionalidade de π . Explique o motivo.

3) Desenhe circunferências cujos raios meçam

a) $R = 2 \text{ cm}$

b) $R = 3 \text{ cm}$

c) $R = 4 \text{ cm}$

d) $R = 5 \text{ cm}$

e) $R = 8 \text{ cm}$

Em seguida meça a circunferência de cada uma delas usando três tipos de fios diferentes e monte uma tabela com os seus dados. O que observou? Explique suas respostas.

| Roteiro- Número π (continuação) - Módulo 4

Com base nos dados da última tarefa e Utilizando o papel quadriculado, registre no plano cartesiano as medidas de circunferência e diâmetro.

1) Escolha uma das três formas dadas para registrar as medidas dos raios e diâmetros.

a) $(0, d)$ e $(c, 0)$

b) $(d, 0)$ e $(0, c)$

c) (d, c) e (c, d)

*d=diâmetro

*c= circunferência

2) Ligue os pontos referentes à cada uma das circunferências. É possível OBSERVAR o valor de π neste tipo de registro?
Explique.

MÓDULO 5- NÚMERO Φ. CURIOSIDADES. (5 HORAS)

OBJETIVOS

Proporcionar a experimentação de tarefas relacionadas ao número φ e à sequência de Fibonacci.

Resumo

Sugestão de tarefa sobre o número φ . Reflexão sobre conceito de irracionalidade e representação decimal e geométrica.

Roteiro- Sequência de Fibonacci e número áureo - Módulo 5

Você recebeu um envelope com “peças” recortadas em cartolina.

1-Monte um retângulo utilizando todas as peças fornecidas. Desenhe a solução.

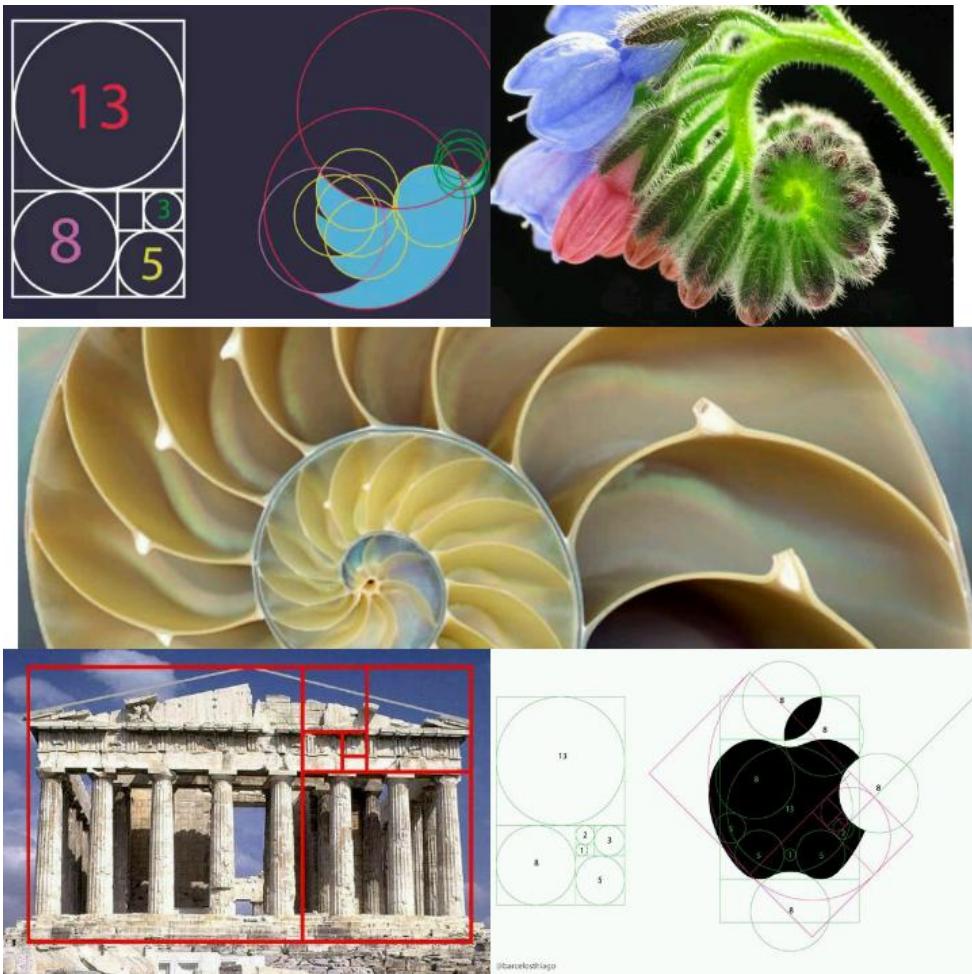
2- Partindo do quadrado menor e considerando-o como unidade, calcule as medidas dos lados de cada quadrado e registre a sequência formada.

3- Quais seriam os 10 valores seguintes?

4- Quais conceitos matemáticos podem ser observados a partir deste raciocínio?

Apresentação de imagens relacionadas á proporção áurea. Discussão em torno do conteúdo e da pouca abordagem do mesmo na educação básica.

Exemplos de imagens:



2^a parte

6- A partir desta sequência, calcule a razão entre cada número e seu antecessor. Registre todos os valores.

7- Agora troque o numerador pelo denominador de cada e calcule o novo valor.

8- Compare os resultados decimais das questões 2 e 3. É possível perceber alguma relação? Explique.

MÓDULO 6- AVALIAÇÃO, CONSTRUÇÃO E SOCIALIZAÇÃO. (10 HORAS)

OBJETIVOS

Socializar tarefas relacionadas aos trabalhos vivenciados e avaliar os resultados da experiência.

Resumo

Oportunidade de vivência e socialização de tarefas diversificadas. Avaliação do curso e da proposta. Cada grupo produzirá uma tarefa vinculada ao tema do curso e aplicará a proposta com a participação dos demais integrantes.

Descrição

Este módulo apresenta-se como culminância das ações e discussões presentes no curso.

O objetivo deste módulo é socializar tarefas, produzidas pelos estudantes, relacionadas aos trabalhos vivenciados e avaliar os resultados da experiência

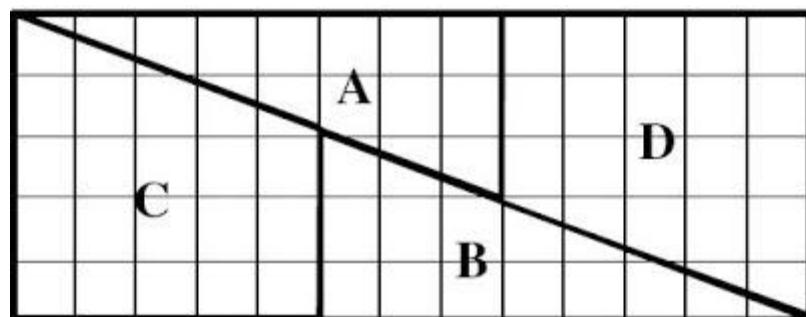
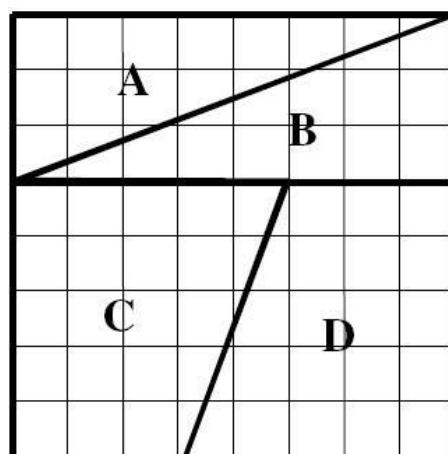
Espera-se que neste estágio de desenvolvimento das idéias trabalhadas, os estudantes estejam preparados para produzir tarefas voltadas para o tema. Também é esperado que se realize uma avaliação do curso e das propostas.

Para este módulo são reservados 2 encontros onde os grupos apresentarão suas propostas de tarefas e também suas considerações sobre a experiência vivenciada.

TAREFAS EXTRAS

1- Sofisma e incomensurabilidade

Este sofisma matemático apresenta um quadrado de área igual a 64 unidades se tornando um retângulo com área igual a 65 unidades.



Onde está a falha na comparação entre as figuras?

É possível encontrar medidas incomensuráveis nas figuras?

Disserte sobre a solução do sofisma e suas possíveis relações com o conceito de incomensurabilidade.

2- Tangram e irracionalidade



Construa o quadrado maior e registre sua constituição através de desenho.

A partir do sorteio de medidas aleatórias, considere-as como o comprimento do lado do quadrado maior e calcule as medidas dos lados das peças do tangram a partir da primeira dada.

Foi possível perceber alguma relação entre a medida do lado e a da diagonal? É possível representar através de alguma sentença matemática?

Sugestão para novas tarefas:

É possível reconstruir e aplicar através do uso dos softwares de construção geométrica algumas das tarefas apresentadas aqui. Exemplos:

- Roteiro de tarefa- Incomensurabilidade- Módulo 2
- Roteiro- Número PI- Módulo 4
- Roteiro- Sequência de Fibonacci e número áureo-Módulo 5

ORIENTAÇÕES AO APLICADOR

■ Módulo 1:

Este módulo é destinado á localização do professor participante no tema e nas propostas didáticas. À primeira vista pode parecer exageradamente teórico, mas é fundamental apresentar ao cursista uma visão panorâmica da proposta. Para tal, é necessário promover uma discussão ampla sobre o tema e os textos, comparando experiências e ouvindo as opiniões.

As sugestões para esse módulo são:

- Disponibilizar os textos antes do encontro presencial.
- Explorar o conceito de investigação matemática a partir de exemplos práticos. Os textos incluídos nesta proposta trazem uma apresentação bastante ampla, no entanto, a visualização de tarefas aplicadas e analisadas produz um efeito maior de familiaridade;
- Ouvir as experiências dos professores em relação à abordagem dos números irracionais, tanto em sua vida profissional quanto em seu desenvolvimento enquanto estudante;
- Conduzir este primeiro momento valorizando o trabalho em grupo e a socialização dos conhecimentos, justificando sua importância no decorrer do curso.

Módulo 2:

A verificação das medidas incomensuráveis é crucial para a compreensão da origem histórica e da gênese da construção do conjunto dos números irracionais.

As tarefas contidas no módulo fogem do paradigma do exercício, e por este motivo necessitam de estímulo por parte do aplicador. Não existe uma resposta ideal para o problema da medição da diagonal do quadrado partindo de unidades, e este paradoxo pode provocar diversos comportamentos nos estudantes: desde o desnorteamento até a simplificação exagerada. Em todos os casos é importante manter o diálogo vivo e aberto durante a aplicação, socializando as dúvidas e descobertas, justificando os questionamentos e direcionando para a exploração do tema em si.

As sugestões para esse módulo são:

- Aplicar a tarefa “incomensurabilidade” antes da apresentação do conteúdo histórico teórico. Essa experiência poderá provocar uma compreensão mais ampla sobre o conceito e sobre o paradigma que o fez surgir.
- Condensar as versões históricas sem permitir que as referências se percam. Existem versões diferenciadas para o surgimento dos irracionais, é importante que sejam apresentadas, mas não existe a necessidade de esmiuçá-las cada uma delas.
- O módulo conta com a previsão de 10 horas presenciais, ou seja, dois encontros. Esse tempo pode ser usufruído de formas diferentes, de acordo com o perfil de cada turma. Para o caso de ser possível

agregar mais tarefas para a compreensão do conceito, constam disponíveis duas tarefas extras: (Sofisma e incomensurabilidade / tangram e irracionalidade). Ambas podem ser aplicadas neste módulo, de acordo com o aproveitamento do tempo.

■ Módulo 3:

Neste módulo o foco é a Visualização e a comparação das possíveis representações para os números irracionais. Uma das constatações da pesquisa que concebeu este curso é a importância da conscientização das diferentes formas de se visualizar a irracionalidade numérica (forma decimal, reta real, representações geométricas) e também das possibilidades para abordagem das mesmas.

Sugestões para esse módulo:

- Este módulo demanda recursos específicos: calculadora, papel quadriculado e material para desenho geométrico. Sendo assim estes recursos poderão ser disponibilizados de acordo com demanda da turma. Caso não seja possível disponibilizar os materiais, é importante informar a necessidade de que cada um traga no dia do encontro presencial;
- Estão disponibilizadas três tarefas, a realização de todas é pode proporcionar muitas oportunidades de construção conceitual sobre irracionalidade, principalmente ao final da realização de todas, onde os resultados poderão ser socializados e discutidos. Portanto é importante administrar bem o tempo

disponível para aproveitar o máximo das oportunidades.

- Como o módulo é dividido em dois encontros é fundamental que haja uma retomada das discussões no segundo encontro, pois a sobreposição das experiências de cada tarefa tem grande potencial, que não deve ser desperdiçado.

■ Módulo 4:

Este módulo é composto de experiências sobre o número π . Estas experiências foram selecionadas a fim de que sejam analisadas as características deste número, mas também questionar seu conceito e sua representação.

Sugestões para esse módulo:

- As tarefas apresentadas neste módulo não possuem um fim em si. Tanto na primeira etapa quanto na segunda é possível incluir recursos e discussões para além das apresentadas aqui.
- Na primeira etapa é possível utilizar instrumentos de medição variados (fita métrica, fios de diferentes espessuras, objetos de diferentes dimensões...), cabe ao aplicador avaliar estas possibilidades e adequá-las ao grupo de estudantes e ao tempo disponível.
- Na segunda etapa, além da possibilidade do uso de softwares de representação geométrica, também é possível variar a utilização de instrumentos (compasso, transferidor...)
- Assim como no módulo 3, a sobreposição das verificações de cada tarefa apresenta grande potencial de construção conceitual, assim como a socialização geral entre os grupos. Principalmente se forem utilizados recursos diferentes em cada grupo.

■ Módulo 5

Neste módulo é apresentado o Número φ a partir da verificação de propriedades da sequência de Fibonacci. Não é possível esmiuçar toda a riqueza destes conteúdos. O número φ , a proporção áurea e sequência de Fibonacci se fazem presentes em diversos estudos e compõe uma extensão aplicabilidade. Por isso o foco é a apresentação de uma das facetas destes conceitos e a relação entre eles.

Sugestões para esse módulo:

- É importante administrar bem o tempo de cada etapa deste módulo, pois a extensa aplicabilidade e as diversas curiosidades podem provocar certo desvio dos objetivos das tarefas. Essas discussões geralmente são muito motivadoras e positivas, mas é importante gerir cada etapa para aproveitar o máximo de cada uma.
- A produção da apresentação das imagens deve estar adequada ao espaço e ao tempo disponível, pois novamente, existe uma infinidade de imagens a serem selecionadas sobre o tema. É interessante diversificar as imagens compondo um cenário abrangente (artes, biologia, fotografia, arquitetura...).
- Novamente, a calculadora será um dos recursos utilizados neste módulo. Sendo assim cabe ao aplicador analisar a melhor estratégia, ou seja, padronizar ou não as calculadoras, pois a utilização de equipamentos diferentes certamente apresentará divergências quanto à aproximação decimal dos resultados. Ambas as estratégias são interessantes do

ponto de vista investigativo e didático, no entanto a decisão deve ser planejada com antecedência.

■ Módulo 6:

A proposta deste módulo é inverter a sala de aula e proporcionar aos professores a experiência de aplicar tarefas sobre o tema estudado, apropriando-se das metodologias aplicadas e experimentando as possibilidades da mesma.

É fundamental incentivar aos grupos que pesquisem e montem as tarefas com afínco e atenção aos detalhes, planejando e organizando roteiros e etapas das mesmas. Também vale ressaltar a importância da presença de todos os cursistas a fim de promover a vivência ampla, ou seja, enquanto alguns estarão na posição de aplicadores e orientadores os demais estarão na posição de alunos. Esta configuração tem o potencial de levantar questionamentos muito apropriados à proposta.

Sugestões para esse módulo:

- Esta proposta disponibiliza 10 horas (dois encontros) para que a proposta seja de fato aplicável. Este tempo pode ser adaptado de acordo com o número de estudantes, turmas com menos de 20 estudantes (com 5 grupos de 4 integrantes, por exemplo) talvez não necessitem de dois encontros para a realização desta avaliação. Sendo assim é possível aproveitar este tempo em outro módulo que, eventualmente, necessite de tarefas ou textos complementares.
- O planejamento das tarefas é muito importante e pode demandar orientações não presenciais, para tal o curso tem disponível 15 horas para estudos à distância.

- Um processo de auto-avaliarão dos estudantes e avaliações do curso podem constar nesse último módulo.

De forma geral, esta proposta é bem flexível do ponto de vista cronológico e instrumental, não há a necessidade de seguir a risca a carga horária ou a utilização dos recursos. Existe uma gama diversa de adaptações possíveis e bem-vindas. Afinal, o objetivo principal é a ampliação dos horizontes e a produção de experiências enriquecedoras e inspiradoras.

Referências teóricas do módulo 1:

- PIETRIPAOLO, Ruy Cesar; CORBO, Olga; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Os números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. In: Congreso De Educaci”N Matemática De América Central Y El Caribe, 1., 2013, Santo Domingo, República Dominicana. *Anais... .* Santo Domingo, República Dominicana: Cemacyc, 2013. p. 15 - 30.
- POMMER, Wagner Marcelo. *A construção de significados dos números irracionais no ensino básico.* 2012. 246 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- RIPOLL, C. C. (2004). A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.

Referências teóricas do módulo 2:

- BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2^a edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.
- ROONEY, Anne. **A história da matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** São Paulo: M.books, 2012. 216 p.

- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.
- STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números.** Londres: Profile Books, 2015. 382 p.

Referências históricas gerais:

- BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2^a edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.
- ROONEY, Anne. **A história da matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** São Paulo: M.books, 2012. 216 p.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

TEXTOS COMPLEMENTARES

- CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011
- KINDEL, Dora Soraia. DISCUTINDO OS RACIONAIS NA 7^a SÉRIE VISANDO A NOÇÃO DE DENSIDADE. 1998. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de

Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula
Mestrado em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

- KINDEL, Dora Soraia. UM AMBIENTE COLABORATIVO A DISTÂNCIA: LICENCIANDOS DIALOGANDO SOBRE OS INFINITOS. 2012. 280 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.
- LIVIO, M.: Razão Áurea - A História do Número ϕ , um Número Surpreendente. Tradução de Matsuama, S., 6a Edição, Rio de Janeiro, Editora Record, 2011
- MAFFI, Caroline; FRAGA, Francieli Bandeira de; MATOS, Diego de Vargas. O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais. Remat, Caxias do Sul, v. 2, n. 1, p.1-9, dez. 2015. Mensal. Disponível em: <[file:///C:/Users/Rute/Downloads/1246-2658-1-PB \(1\).pdf](file:///C:/Users/Rute/Downloads/1246-2658-1-PB%20(1).pdf)>. Acesso em: 29 jun. 2016.
- MENDES, Sônia Cristina da Cruz. Práticas Pedagógicas Para O Ensino Dos Números Irracionais. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.
- NIVEN, Ivan. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 167 p.
- SANTOS, Gilberto Vieira dos. Explorando a Matemática do Número Φ , o Número de Ouro. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 12 out. 2016.