Matemática

Cálculo Diferencial e Integral III

Luciano Moura Cavalcante

Ed UECE

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Matemática

Cálculo Diferencial e Integral III

Luciano Moura Cavalcante

2ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2015

Geografia

História

Educação Física

Química

Ciências Biológicas

Artes Plásticas

Computação

Física

Matemática

Pedagogia

Editora Filiada à

ABEU
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação

No Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo Diferencial e Integral II, estudamos a derivação e integração de funções de apenas uma variável, ou seja, funções com domínio nos reais e contradomínio também real, e cuja lei de formação era $y = f(x)$.

Trabalharemos com funções que têm mais de uma variável independente, e iremos definir e aplicar os conceitos de derivada e integral. Neste primeiro capítulo, definiremos as funções de várias variáveis e veremos os conceitos de limites e continuidade para esse tipo de função.

No segundo capítulo, estudaremos a derivação com funções de várias variáveis. Definiremos, também, as derivadas parciais, com base no conhecimento de derivada para as funções ordinárias, ou de uma variável, passando, em seguida, para suas aplicações práticas com o uso do diferencial total e da regra da cadeia.

No terceiro capítulo, estudaremos, primeiramente, a derivada direcional. Partindo do conceito de derivadas parciais, interpretadas como a inclinação de uma superfície nas direções dos eixos x e y, definiremos a derivada direcional como a inclinação da superfície em uma direção qualquer. Em seguida, estudaremos um método de maximização e minimização de funções a duas variáveis e concluiremos a unidade com um método de maximização e minimização de funções com qualquer número de variáveis, chamado método dos multiplicadores de Lagrange.

No quarto capítulo, iniciaremos o estudo das integrais múltiplas, a partir da definição da integral dupla em coordenadas cartesianas e, posteriormente, trabalharemos com as integrais duplas em coordenadas polares. Uma vez que tenhamos desenvolvido métodos básicos para integrar funções a duas variáveis, mostraremos como essas integrais são úteis no cálculo de volumes de sólidos, áreas de superfícies, além de muitas outras aplicações.

No quinto capítulo, estudaremos, inicialmente, a integral tripla em coordenadas cartesianas ou retangulares, com base no que aprendemos na unidade anterior sobre integral dupla. Em seguida, trabalharemos a integral tripla em coordenadas cilíndricas e esféricas.

O autor

Capítulo 1

Funções de várias variáveis

Objetivos

- Definir funções de várias variáveis.
- Estudar limites e continuidade com funções de várias variáveis.

1.1. Funções de duas variáveis

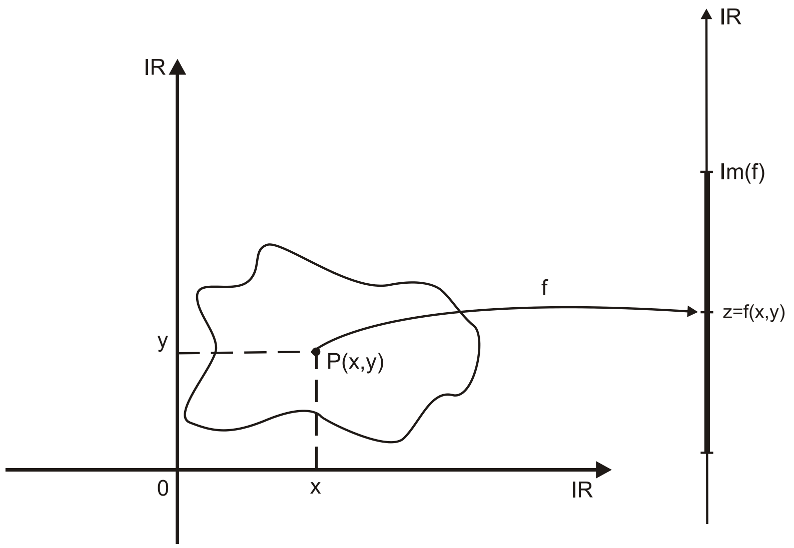
A ideia de funções de duas ou mais variáveis já é por nós conhecida, apesar de não conhecermos as suas formalidades. Sabemos, por exemplo, que a área de um retângulo cuja base mede x unidades e a altura mede y unidades é A = x.y, onde x e y podem assumir quaisquer valores reais não negativos. Assim, podemos dizer que a área do retângulo depende de duas variáveis x e y e ambas pertencem ao conjunto $D = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Seja $D \subset R^2$ um conjunto de pares ordenados de números reais (x, y). Uma função f. definida de D em R, é uma lei que associa, a cada par ordenado (x, y) de D, um único número real z = f(x, y). O conjunto D é chamado de domínio da função f, ao passo que o conjunto formado por todos os valores de z = f(x, y), com (x ,y) em D, chamado de contradomínio de f. Como f é uma função real, o contradomínio será sempre o conjunto R dos números reais ou um subconjunto de R

O número real z = f(x , y), associado ao par (x, y), é chamado imagem do par (x, y), através da função f. O conjunto das imagens de todos os pares (x, y) do domínio D é o subconjunto $Im(f) = \{f(x, y) / (x, y) \in D\} \subset R$, chamado conjunto imagem de f. Graficamente, temos:

$$f : D \subset R^2 \to R$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

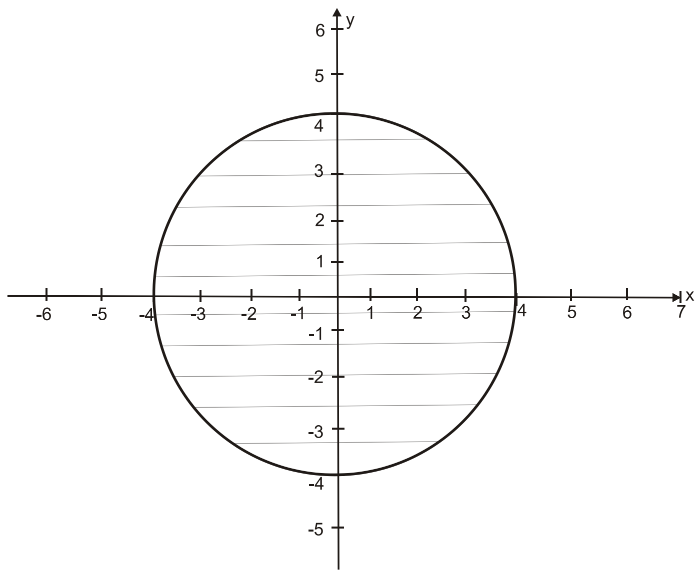


Exemplo 1:

Determine o maior domínio D $\subset$ R ^{2}, de modo que as correspondências abaixo definam uma função f : D $\rightarrow$ R. Faça um esboço do gráfico de D em R^2 e encontre Im(f).

a) f(x, y) = $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Como z = $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ é um número real, sabe-se que a raiz quadrada em R só existe se o radicando $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 \leq 16$, e, assim, o domínio será D = {(x, y) $\in$ R^2 / $x^2 + y^2 \leq 16$ }, que é um subconjunto do R^2, limitado pela circunferência centrada na origem e raio 4.



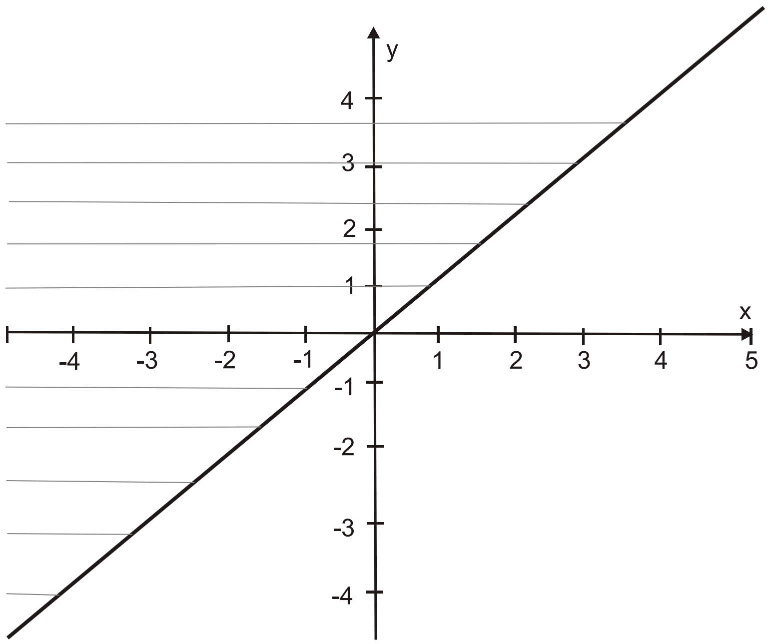
O conjunto imagem de f será R_+, pois $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ só pode assumir valores não negativos de R.

b) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

Para que a função seja bem definida, é necessário que $y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$.

Portanto, o seu domínio será $D = \{(x, y) \in R^2 / y \geq x\}$.

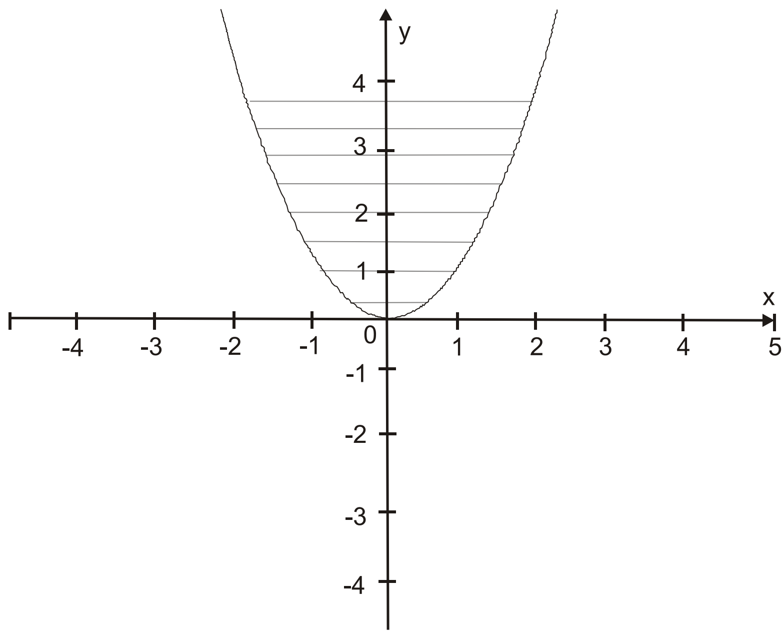
Para representá-lo no plano, observemos que $y \geq x$ é um semiplano definido pela reta $y = x$, que é a fronteira da região e está contida na região.



Pelas mesmas razões apresentadas no item (a), temos que $Im(f) = R_+$.

c) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{y - x^2}}$

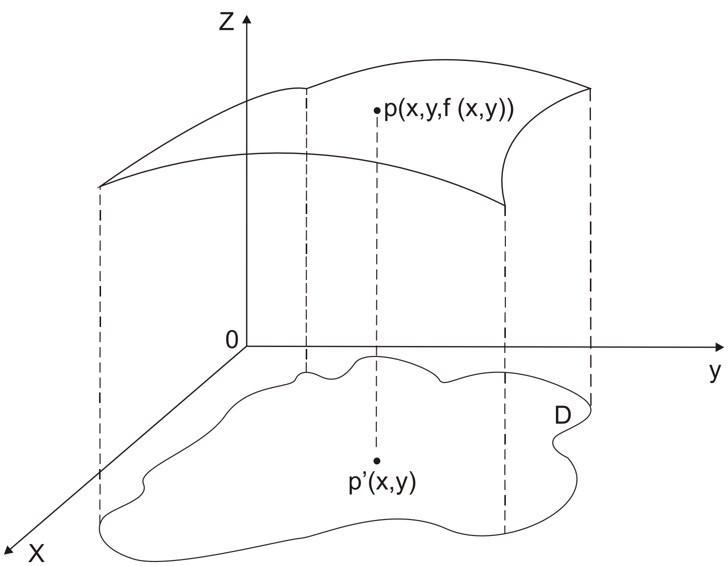
Essa função estará definida em todos os pontos do plano em que essa fração exista. A fração existirá, se seu denominador existir e for diferente de zero. Portanto, devemos ter $y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2$. Então, o domínio da função será $D = \{(x, y) \in R^2 / y > x^2\}$.



É importante lembrar que, para uma função estar bem definida, é necessário que ela seja definida para todos os pontos do seu domínio.

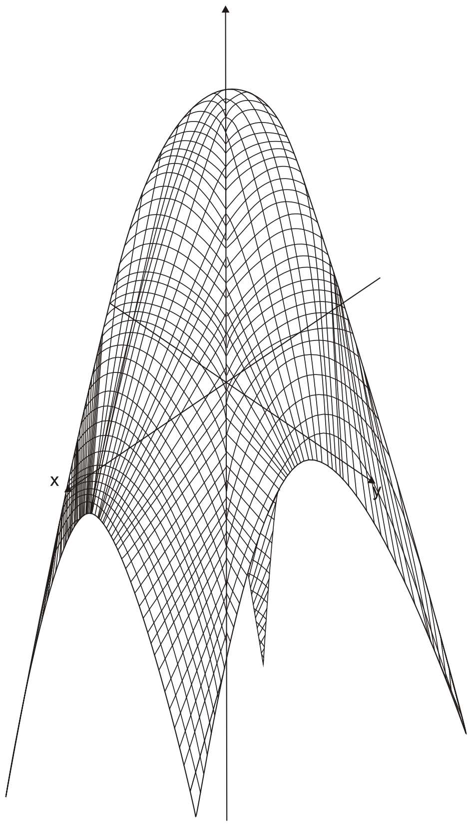
1.2. Gráfico

O gráfico de uma função $f: D \subset R^2 \rightarrow R$ é o subconjunto definido como $G(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / z = f(x, y)\} \subset R^3$, isto é, $G(f)$ é uma superfície.



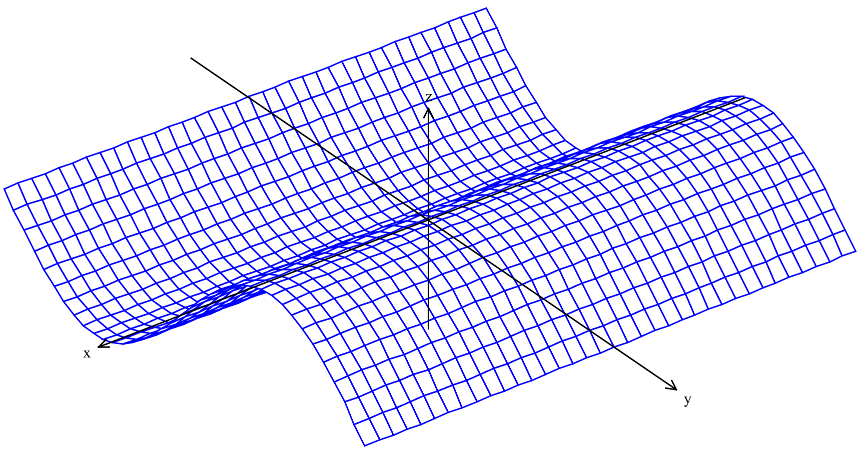
Exemplo 1:

A função $z = 9 - x^2 - y^2$, cujo gráfico representamos na figura abaixo, é um parabolóide e tem todo o R^2 como domínio.



Exemplo 2:

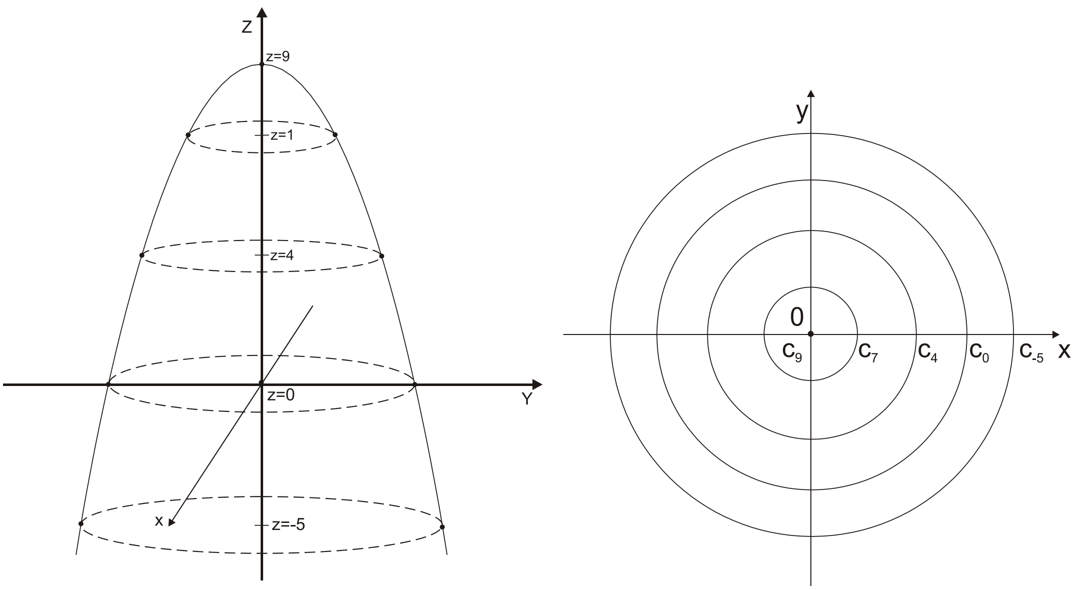
A função f(x, y) = sen y, que representamos na figura, tem R como domínio e o intervalo [-1 , 1] como conjunto imagem.



Existem duas ferramentas que são importantes no traçado e na análise do comportamento de uma superfície. A primeira delas é o conjunto de curvas da forma f(x, y) = k, que são curvas obtidas por cortes na superfície, com planos da forma z = k paralelos ao plano xy, contidas na superfície, e são chamadas de curvas de contorno. A outra ferramenta é o conjunto dos pontos P(x, y) que satisfazem a f(x, y) = k, formando, em geral, curvas onde cada curva C_k é chamada curva de nível da função f quando z = k.

Exemplo 3:

As curvas de contorno e o conjunto das curvas de nível da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, do exemplo anterior, são mostrados na figura.



Uma aplicação prática, muito comum do uso das curvas de nível de uma superfície, são os mapas topográficos, nos quais uma paisagem tridimensional, tal como uma cadeia de montanhas, é representada por linhas de contorno bidimensionais, representando as curvas de mesma elevação, que são conhecidas como curvas de nível da superfície.

1.3. Funções de três ou mais variáveis

Uma função a três variáveis é uma lei f que, a cada ponto P(x, y, z), pertencente a um domínio $D \subset R^3$, associa um único valor real w, que é a imagem de P.

Tomemos, por exemplo, $w = \dfrac{1}{x+y+z}$. Podemos dizer que w é uma função de x, y e z, definida para todo P(x, y, z) $\neq$ O (0, 0, 0), tendo R como conjunto imagem. Toda função a três variáveis tem a forma

$f : D \subset R^3 \to R$

$(x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z)$.

O gráfico de uma função a três variáveis é composto por um conjunto de quádruplas ordenadas $(x, y, z, f(x, y, z))$, estando, portanto, no espaço R^4, não podendo portanto ser traçado ou visualizado.

Em geral, uma função f de n variáveis é uma regra, ou lei, que associa, a cada **n-upla** de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pertencente a um domínio $D \subset R^n$, um único número real $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Essas funções têm as mesmas características das funções de duas ou três variáveis, e seu gráfico é da forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, estando no espaço de dimensão n + 1.

Neste texto, direcionaremos nosso estudo para as funções de duas ou três variáveis, por se tratarem de funções com maior aplicabilidade.

1.4. Limites e Continuidade

O limite de funções com duas ou mais variáveis é semelhante ao limite de funções de uma variável, com a diferença de que existem duas ou mais variáveis independentes envolvidas, em vez de uma, o que dificulta a questão da proximidade de valores.

1.4.1. Noções de limites com funções de duas variáveis

Seja $f : D \subset R^2 \to R$ uma função. Estamos, agora, interessados em observar o comportamento de f(P) para todos os pontos P próximos de P0, mesmo nos casos em que P0 não pertença a D. Se f(P) está bem próximo de um número real L, quando P está convenientemente próximo de P0, mas $P \neq P0$, então dizemos que o limite de f(P), quando P tende a P0, é L e escrevemos $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$ ou $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$.

De uma maneira mais formal, dizemos que $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P - P0| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$.

Teorema da unicidade:

O limite de uma função em um ponto é único, ou seja, se

$\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1$ e $\lim_{P \to P_0} f(P) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

O cálculo de limites, usando a definição, já apresentava um certo grau de dificuldade, mesmo para funções de uma só variável, quando, então, foram observadas algumas propriedades que facilitaram os cálculos.

Para funções de duas ou mais variáveis, o grau de dificuldade é ainda maior, mas também podemos verificar a existência de algumas propriedades que nos permitirão verificar a existência e calcular alguns limites.

Em princípio, são válidas, para os limites com funções de mais de uma variável, todas as propriedades de limites de funções com uma variável, ou seja, se L, M e k são constantes quaisquer reais, com

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$, então são válidas as propriedades:

P1 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$

P2 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) - g(x, y)] = L - M$

P3 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) . g(x, y)] = L . M$

P4 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k . f(x, y) = k . L$

P5 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$

P6 $\lim [f(x , y)]^{m/n} = L^{m/n}$, se m e n são números inteiros e $L^{m/n} \in R$.

Além dessas propriedades, podemos, ainda, usar processos de fatoração, sempre que for possível, para determinar um limite de funções com várias variáveis.

Uma outra propriedade, muito interessante para se calcular limites de funções com duas ou mais variáveis, é baseada no cálculo de limites de funções com uma variável por limites laterais.

“ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$”

Essa propriedade dos limites laterais afirma que o limite de f(x), quando x tende para a, existe e é igual a L, se os limites à direita e à esquerda de a existirem e forem iguais. Isso porque, sobre a reta real, só existem dois caminhos para se aproximar do valor de a.

Para funções de duas ou três variáveis, a situação é mais complicada, visto que há uma infinidade de curvas diferentes, ao longo das quais o ponto pode ser aproximado.

Trabalhando com funções a duas variáveis, o nosso objetivo é definir o limite de f(x, y) quando P(x, y) tende para $P_0(x_0, y_0)$, ao longo de uma ou mais curvas que pertençam ao domínio de f(x, y) e passem, necessariamente, por $P_0(x_0, y_0)$. Se esses limites forem todos iguais a L, podemos, então, sugerir que o limite da função existe naquele ponto e é igual a L. Se, pelo menos, um dos caminhos escolhidos tiver um limite diferente, então o limite da função não é definido no ponto.

Exemplo:

Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Em primeiro lugar, observe que essa função é definida em todos os pontos do plano, exceto na origem, e pretendemos verificar se ela possui limite nesse ponto.

Para verificar a existência do limite, aí tomemos alguns caminhos de tendência para a origem O(0, 0) e analisemos o comportamento da função.

i) O eixo x é composto por pontos da forma (x, 0) e passa na origem. Como y = 0, ao longo desse caminho teremos f(x, 0) = $\dfrac{x.0}{x^2+0^2}$ = $\dfrac{0}{x^2}$ = 0.

ii) Se tomarmos o eixo y como caminho, teremos o x = 0 com y diferente de zero e a função f(0, y) = 0.

iii) Tomemos, agora, como caminho, a família de retas que passam pela origem, cuja equação geral é y = mx. Assim, teremos f(x, mx) = $\dfrac{x.mx}{x^2+(mx)^2}$

$$= \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Para valores diferentes de m, a função assumirá diferentes valores. Portanto, pelo teorema da unicidade, podemos concluir que o limite não existe.

b) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

Poderíamos fazer a mesma abordagem do limite anterior para verificar a existência desse limite, mas, observando a forma de definição dessa função, faremos uma análise diferente, pois

$$f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \Rightarrow f(x, y) = \frac{x(x-y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \Rightarrow f(x, y) = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0.$

c) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} \dfrac{x + xy - 5}{xy^3 + y^2 + 2y - 1}.$

Para verificar a existência e calcular o valor desse limite, é suficiente que se observe que essa função é definida no ponto $P_0(0, 1)$ e, consequentemente, em todos os pontos nas suas proximidades, logo

$$\lim_{(x,y) \to (0,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{x + xy - 5}{xy^3 + y^2 + 2y - 1} = \frac{0 + 0.1 - 5}{0.1^3 + 1^2 + 2.1 - 1} = -\frac{5}{2}$$

1.4.2. Noções de continuidade com funções de duas variáveis

O conceito de continuidade de funções é independente do espaço em que a função esteja definida. No estudo das funções com uma variável, tivemos essa definição de continuidade, que adaptamos, aqui, para funções a duas variáveis.

Sejam $f : D \subset R^2 \to R$ uma função e $P_0 \in D$ um ponto. Dizemos que f é contínua em P_0 se, e somente se, satisfaz às condições:

i) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ existe

ii) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$

Se, pelo menos, uma das condições acima não se verifica, dizemos que f é descontínua em P_0.

De uma maneira mais formal, temos:

$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$|P - P_0| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$.

Exemplo:

Verifique se é contínua ou descontínua a função dada no ponto indicado.

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ em $P_0(0, 0)$

No exemplo (a), do parágrafo anterior, verificamos que

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe, logo f é descontínua em $P_0(0, 0)$.

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ em $P_0(0, 0)$

No exemplo (b), do parágrafo anterior, mostramos que

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$

Como f(0, 0) = 0, então temos que $\lim\limits_{P \to P_0} F(P) = f(P_0) = 0$. Portanto, a função é contínua na origem.

Se $f, g : D \subset R^2 \to R$ são funções contínuas em $P_0 \in D$ e $k \in R$, então são válidas as seguintes propriedades:

P1. A função k . f é contínua em P_0.

P2. As funções $f \pm g$ são contínuas em P_0.

P3. A função f . g é contínua em P_0 .

P4. A função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em P_0, desde que $g(P_0) \neq 0$.

1.4.3. Noções de limite e continuidade para funções de três variáveis

Todos os resultados obtidos para as funções a duas variáveis podem ser estendidos para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$ é uma função a três variáveis, então

$f(x, y, z)$ é limitada em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e esse limite é L se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $| f(x, y, z) - L | < \varepsilon$, sempre que $| P - P_0 | < \delta$, para todo ponto $P(x, y, z)$ nas proximidades de P_0.

Representamos esse limite por $\lim \quad f(x, y, z)$ ou

$\lim \quad f(x, y, z)$.

$f(x, y, z)$ é contínua em (x_0, y_0, z_0), se o limite e o valor da função forem iguais nesse ponto.

$f(x, y, z)$ é contínua em $(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Todas as propriedades de limites e continuidade que foram discutidas para as funções de duas variáveis, são válidas para as funções de três ou mais variáveis.

Síntese do Capítulo

Neste primeiro capítulo, definimos funções de duas ou mais variáveis. Estudamos e discutimos, também, limites e continuidade com esse tipo de função, dando ênfase, principalmente, às funções com duas variáveis, uma vez que essas são funções de grande aplicabilidade e mais fáceis de serem trabalhadas.

Atividades de avaliação

1. Dada a função $f(x, y) = x^2y - xy^2 + 4$, determine:

a) $f(1, 2)$; b) $f(0, -1)$; c) $f(a, 2a)$; d) $f(-3, -2)$.

2. Sendo $f(x, y, z) = e^{xy}.\text{sen}(\pi z)$, determine:

a) $f(0, 2, 1)$; b) $f(3, -1, 0)$; c) $f(1, -1, 3)$; $f(-2, 2, 1)$.

3. Determine o maior domínio $D \subset R^2$, de modo que as leis abaixo definam funções de D em R. Faça, se possível, um esboço de f no R^3 e encontre a imagem de f:

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

c) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

d) $f(x, y) = y/x^2$

e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y^2}$

f) $f(x, y) = \ln xy$

4. Esboce um mapa das curves de nível das funções para os valores indicados:

a) $z = x^2 + y^2$; para k = 0, 1, 4, 6, 9, 16.

b) $z = xy$; para k = 1, 2, 3, 4, 5

c) $z = y/x$; para k = - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

d) $z = y^2 / x$; para k = - 3, - 2, - 1, 1, 2, 3

5. A temperatura T, em qualquer ponto (x, y), em uma placa de metal plana, é dada por $T(x, y) = 2x^2 + 4y^2$. Trace as curvas isotérmicas de T em 0, 1, 4, 6 e 8.

6. Calcule o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} (2x^2 - 5xy + 3y^2 + 4)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x + e^y}{senx + \cos y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2 - xy)$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 5^{3x-2y}$

7. Verifique se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ e, caso exista, determine seu valor:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

8. Mostre que o valor da função $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4}$ tende a 0 quando (x, y, z) tender para (0, 0, 0), ao longo de qualquer reta x = at ; y = bt ; z = ct.

9. Mostre que não existe o limite de $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4}$ em (0, 0, 0), pois a função tende para um valor diferente de 0, quando (x , y z) tende para (0, 0, 0), através de uma curva da forma $x = t^2$; y = t ; z = t.

10. Mostre que a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & ,(x, y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua na origem.

Sugestão: faça $z = x^2 + y^2$.

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} & ,(x, y) \neq (0,0) \\ 5 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$. É possível redefinir f(0 , 0) de modo que essa função se torne contínua na origem?

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: Um Novo Horizonte. Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. 6ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. Vol. II.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2002. Vol II.

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2003. Vol. II.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª Ed. São Paulo: Harbra, 1995. Vol. II.

Capítulo 2

Derivadas parciais

Objetivos

- Conhecer as derivadas com funções de várias variáveis.
- Definir e aplicar a diferencial total com funções de várias variáveis.
- Estudar a regra da cadeia com suas aplicações.

2.1. Derivadas Parciais

O processo de derivação de uma função de várias variáveis pode ser reduzido a um caso de derivação de uma função ordinária y = f(x), considerando-se a função de n variáveis como uma função de uma só variável a cada vez.

Sabemos que a definição de derivada de uma função a uma variável y = f(x) é

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

Tomemos, então, uma função $f: D \subset R^2 \to R$, onde $z = f(x, y)$. Definamos a derivada parcial dessa função, com relação à variável x, como

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \text{ se esse limite existir.}$$

Analogamente, definamos a derivada parcial de z = f(x, y), com relação à variável y, como sendo

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \text{ se o limite existe.}$$

Analisando essa definição, algumas considerações podem ser feitas:

1. Essa definição pode ser aplicada em toda função com um número qualquer de variáveis, pois, quando se deriva uma função de várias variáveis com relação a uma das variáveis, as demais têm comportamento de constante.

Se w = f(x, y, z), então $f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$, se esse limite existir.

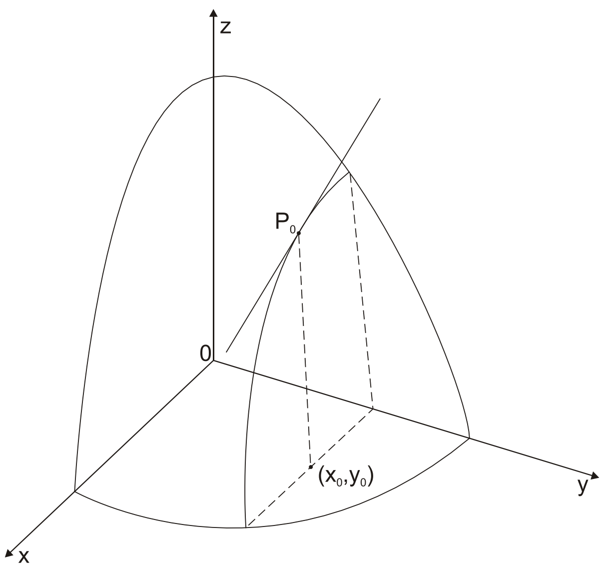
2. Quando aplicamos a derivada parcial de f(x , y), com relação à variável x a um ponto fixo $P_0(x_0, y_0)$, obtemos a inclinação da reta tangente à superfície, naquele ponto, na direção indicada pelo eixo x.

Para verificar essa afirmação, tomemos a derivada de f(x, y) aplicada ao ponto fixo $P_0(x_0, y_0)$.

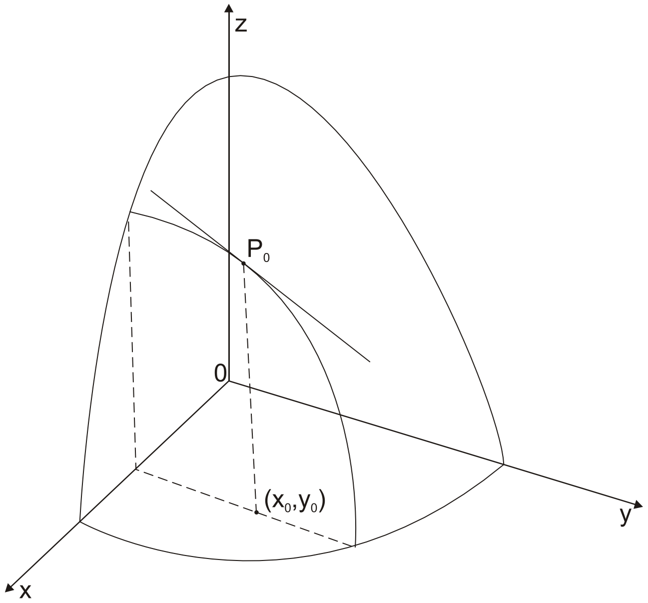
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$, se o limite existe.

Podemos interpretar o fato de y ser constante, como a superfície z = f(x, y), tendo sido cortada por um plano $y = y_0$, cuja interseção com a superfície é uma curva $z = f(x, y_0)$, contida na superfície e que depende, apenas, da variável x.

Lembre-se de que a interseção de dois planos é uma reta e a interseção de um plano com uma superfície é uma curva.



A mesma interpretação pode ser dada com relação à derivada parcial $f_y(x, y)$, que nos dá a inclinação da reta tangente à superfície na direção indicada pelo eixo y quando aplicada a um ponto. Por isso, é chamada de derivada de f(x, y) na direção do eixo y.



O processo de encontrar uma derivada parcial é chamado de derivação parcial, e a notação $f_x(x, y)$ representa a derivada parcial da função $f(x, y)$, com relação à variável x. Outras formas de notação podem ser usadas para representar uma derivada parcial, desde que fique bem **clara** a variável na qual se está derivando a função.

Tomemos, por exemplo, a função $w = f(x, y, z)$. Suas derivadas parciais de primeira ordem podem ser representadas por:

$f_x(x, y, z) = f_1(x, y, z) = D_1f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, para representar a derivada parcial com relação à primeira variável que é x.

$f_y(x, y, z) = f_2(x, y, z) = D_2f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial y}$, para a derivada parcial com relação a y.

$f_z(x, y, z) = f_3(x, y, z) \quad D_3f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, para a derivada parcial com relação a z.

Aqui, na derivação de funções com mais de uma variável, não tem sentido a notação linha para a representação da derivada, pois ela não especifica a variável na qual se está derivando a função.

Uma outra observação que, aqui, deve ser feita, é que, no processo de derivação parcial, são válidas todas as regras de derivação que conhecemos quando estudamos a derivada das funções ordinárias (funções com apenas uma variável

Exemplo 1:

Encontre as derivadas parciais da função $f(x, y) = x^3 – 4xy + y^2 + 5$.

Solução:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = - 4x + 2y$.

Veja que, na primeira derivada com relação à variável x, consideramos $y^2 + 5$ como constante, pois é independente da variável x. Na derivação em relação a y, o termo x^3 foi considerado constante.

Exemplo 2:

Encontre a equação da reta tangente à superfície $z = \ln(xy)$ no ponto $P_0(1, 2, \ln2)$ na direção do eixo x.

Solução:

Como queremos as equações da reta tangente, no ponto P_0, na direção do eixo x, então devemos cortar a superfície com o plano $y = 2$, resultando a curva de interseção $z = \ln(2x)$ contida na superfície.

A inclinação da reta desejada é, portanto, a derivada dessa função resultante, com relação a x, aplicada no ponto.

Mas $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x}.2 = \frac{1}{x}$, logo $\frac{\partial z}{\partial x}(1, \ln2) = 1$, que é a inclinação da reta tangente à superfície no ponto P_0, na direção do eixo x**.** Portanto, a equação da reta tangente à superfície será:

Lembre-se de que estamos no espaço R^3, onde as equações de uma reta podem ser paramétricas, simétricas ou reduzidas.

$z - \ln 2 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, \ln2)(x - 1)$, ou seja, $z - \ln 2 = 1 .(x - 1)$ ou

$z = x - 1 + \ln 2$

2.2. Derivadas parciais de ordem superior

No estudo das derivadas de funções ordinárias, foi definida a derivada de segunda ordem de uma função $y = f(x)$ como sendo a derivada da função derivada de primeira ordem, ou seja, $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$.

Para as funções com várias variáveis, o processo de derivação se repete sempre, observando-se que, se as derivadas parciais de ordem n são, também, funções diferenciáveis, existem, então, as derivadas parciais de ordem n + 1.

Tomemos, como exemplo, uma função a três variáveis w = f(x, y, z). Se ela for derivável com relação às três variáveis x , y e z, então as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ podem ser funções deriváveis a três variáveis. Portanto, devemos ter:

A partir de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{11}(x, y, z) = f_{xx}(x, y, z).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{12}(x, y, z) = f_{xy}(x, y, z).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{13}(x, y, z) = f_{xz}(x, y, z).$$

A partir de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{21}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{22}(x, y, z) = f_{yy}(x, y, z).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{23}(x, y, z) = f_{yz}(x, y, z).$$

A partir de $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = f_{31}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = f_{32}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z).$$

Teorema

Se uma função f(x, y) tem derivadas parciais contínuas, pelo menos até a ordem dois, então $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Esse resultado pode ser estendido para qualquer ordem de diferenciação de uma função com mais de duas variáveis. Por exemplo, para a função f(x, y,z), temos que $f_{123} = f_{132} = f_{213} = f_{231} = f_{312} = f_{321}$.

Exemplo:

Dada a função $f(x, y, z) = x^3y^2 + 5yz^2 - 7x^2yz + 8$, mostre que $f_{12} = f_{21}$; $f_{13} = f_{31}$ e $f_{23} = f_{32}$.

Solução:

Primeiramente, encontramos todas as derivadas de primeira ordem, para, em seguida, determinarmos as de segunda ordem.

$$f_1 = 3x^2y^2 - 14xyz \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{12} = 6x^2y - 14xz \\ f_{13} = -14xy \end{cases}$$

$$f_2 = 2x^3y + 5z^2 - 7x^2z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{21} = 6x^2y - 14xz \\ f_{23} = 10z - 7x^2 \end{cases}$$

$$f_3 = 10yz - 7x^2y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{31} = -14xy \\ f_{32} = 10z - 7x^2 \end{cases}$$

Portanto, é fácil observar que $f_{12} = f_{21}$; $f_{13} = f_{31}$ e $f_{23} = f_{32}$.

2.3. A diferencial total

No estudo da derivada de uma função ordinária y = f(x), definimos $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ onde Δx é o incremento da variável x e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ é o incremento da variável y. Mesmo sendo um número muito pequeno, sabemos que $\Delta x \neq 0$, o que nos permite dizer que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq f'(x)$ e que existe um número ε, cujo valor depende de Δx, tal que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \Rightarrow \Delta y = f'(x) . \Delta x + \varepsilon . \Delta x$

Esse resultado, quando aplicado a um ponto fixo x_0 no domínio da função, pode ser escrito na forma $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \,.\, \Delta x + \varepsilon \,.\, \Delta x$. Mas sabemos, também, que o valor de ε depende do Δx e que $\varepsilon \to 0$, quando $\Delta x \to 0$, o que implica dizer que dy = f'(x). dx é a diferencial da função e é interpretado, geometricamente, como o erro produzido no valor da função, dada a existência de um erro dx na variável x.

Para as funções de duas ou mais variáveis, podemos ter uma interpretação semelhante e definir a diferencial da função, que chamaremos **"diferencial total".**

Para isso, tomemos uma função a duas variáveis z = f(x, y), cujo incremento pode ser visto como a soma de dois incrementos parciais, um dependente da variável x e o outro, da variável y.

Assim, $\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y = (\frac{\partial z}{\partial x} \,.\, \Delta x + \varepsilon_1 \,.\, \Delta x) + (\frac{\partial z}{\partial y} \,.\, \Delta y + \varepsilon_2 \,.\, \Delta y)$.

Fazendo $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, teremos que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0, 0)$, e a diferencial total da função será:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \,.\, \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \,.\, \Delta y$, onde dz é o erro no valor da função z = f(x, y) quando admitimos erros Δx e Δy nas variáveis x e y, respectivamente.

Para a função z = x, temos que $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, logo

$dz = dx = 1 \,.\, \Delta x + 0 \,.\, \Delta y = \Delta x$.

Para a função z = y, temos $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, logo teremos que $dz = dy = \Delta y$.

Isso torna natural o uso da notação $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Assim, podemos escrever $dz = \frac{\partial z}{\partial x} .dx + \frac{\partial z}{\partial y} .dy$.

Esse resultado pode ser generalizado para toda e qualquer função com um número qualquer de variáveis.

Se $w = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, então a sua diferencial total será:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}.dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n}.dx_n \,.$$

Exemplo 1:

Se $w = 5x^3y^2z + 2yx - xz^2$, determine dw.

Solução:

Sendo w uma função de três variáveis x, y e z, então

$dw = \frac{\partial w}{\partial x}.dx + \frac{\partial w}{\partial y}.dy + \frac{\partial w}{\partial z}.dz$ ou $dw = (15x^2y^2z + 2y - z^2)\,dx + (10x^3yz + 2x)\,dy + (5x^3y^2 - 2xz)\,dz$.

Exemplo 2:

Determine a quantidade de madeira necessária para a confecção de uma caixa sem tampa, na forma de um paralelepípedo retangular, cujas medidas internas devem ser 16 cm de comprimento, 12cm de largura e 8cm de altura, sabendo-se que a madeira usada tem 6mm de espessura.

Solução:

Vamos interpretar a quantidade de madeira desejada como sendo um acréscimo no valor do volume interno da caixa, ou seja, um erro para mais no volume interno da caixa, quando temos um comprimento x = 16, uma largura y = 12 e uma altura z = 8.

O erro, em cada uma das medidas, depende da espessura da madeira, lembrando-se que, no comprimento e na largura, temos acréscimo nas duas extremidades, enquanto, na altura, temos, apenas, em uma extremidade, pois a caixa é sem tampa.

Assim, dx = dy = 2 . 0,6 = 1,2 e dz = 0,6.

Se V é volume da caixa, então V = x.y.z, o que implica em $\frac{\partial V}{\partial x} = y.z$; $\frac{\partial V}{\partial y} = x.z$ e $\frac{\partial V}{\partial z} = x.y$.

Agora, fazendo $dV = \frac{\partial V}{\partial x}.dx + \frac{\partial V}{\partial y}.dy + \frac{\partial V}{\partial z}.dz \Rightarrow$

$dV = y.z.dx + x.z.dy + x.y.dz$, que, substituindo valores, temos:

$dV = 12.8.1{,}2 + 16.8.1{,}2 + 16.12.0{,}6 \Rightarrow dV = 384\ cm^3$.

A quantidade de madeira, por ser considerada um acréscimo no volume da caixa, é de $384cm^3$. Mas, como a sua espessura é de 0,6cm, podemos expressá-la em cm^2 , dividindo o resultado pela espessura, o que nos dá uma quantidade de $640cm^2$ de madeira.

Exemplo 3:

Use diferencial total para encontrar um valor aproximado de $\dfrac{\sqrt{15,98}}{\sqrt[3]{27,05}}$.

Solução:

O valor que pretendemos encontrar é dependente de dois outros valores, por ser a razão de $\sqrt{15,98}$ por $\sqrt[3]{27,05}$, o que nos permite dizer que a razão $\dfrac{\sqrt{15,98}}{\sqrt[3]{27,05}}$ pode ser vista como o valor numérico da função f(x, y) = $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$ para x = 15,98 e y = 27,05.

Como não sabemos os valores de $\sqrt{15,98}$ e $\sqrt[3]{27,05}$, podemos calcular por aproximação, fazendo x = 16 e y = 27, o que acarretaria um dx = - 0,02 e um dy = 0,05.

O erro provocado por essa aproximação é dado por df = $\dfrac{\partial f}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}.dy$.

Mas $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt[3]{y}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\sqrt{x}}{3y\sqrt[3]{y}} \Rightarrow$

df = $\dfrac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt[3]{y}}$.dx - $\dfrac{\sqrt{x}}{3y\sqrt[3]{y}}$.dy.

Substituindo valores, temos que

df= $\dfrac{1}{2\sqrt{16}.\sqrt[3]{27}}$.(- 0,02) - $\dfrac{16}{3.27\sqrt[3]{27}}$. 0,05, ou seja,

df = - $\dfrac{0,02}{24}$ - $\dfrac{0,8}{243}$ $\Rightarrow$ df = - 0, 004125514.

Portanto, $\dfrac{\sqrt{15,98}}{\sqrt[3]{27,05}} \cong$ f(16 , 27) + df $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{15,98}}{\sqrt[3]{27,05}} \cong \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{27}}$ - 0,004125514

Ou, ainda, $\dfrac{\sqrt{15,98}}{\sqrt[3]{27,05}} \cong$ 1,329207819.

Você pode verificar esse resultado com o uso de uma máquina calculadora. Provavelmente, você não encontrará, exatamente, esse valor, pois esse resultado é, apenas, uma aproximação, decorrente dos erros de truncamento cometidos durante as operações.

Sabemos que, para a função de uma variável ser diferenciável em um ponto, é equivalente a ser derivável nesse ponto. Para funções com mais de uma variável, pode ocorrer a existência de todas as derivadas parciais em um ponto e essa função não ser diferenciável, nesse ponto.

Seja $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ uma função. Dizemos que z = f(x, y) é diferenciável em P_0, se, e somente se, $\Delta z \cong dz$.

Teorema

Se z = f(x , y) é diferenciável em $P_0(x_0, y_0)$, então ela é contínua nesse ponto.

Exemplo 1:

Considere a função f(x, y) = $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. No ponto P_0 (0, 0),

temos que $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{\Delta y}$ = 0, de onde

concluímos que as derivadas parciais da função existem em P_0 (0, 0).

Mas vimos em 1.4.2 da unidade anterior que essa função é descontínua nesse ponto, logo não é diferenciável.

Exemplo 2:

Dada f(x, y) = x^2y, ache um valor aproximado de f(1,002 ; 0,997).

Solução:

Tome $P_0(1, 1)$, e, assim, temos que

$x_0 + \Delta x = 1{,}002 \quad \Rightarrow \quad 1 + \Delta x = 1{,}002 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 0{,}002$

$y_0 + \Delta y = 0{,}997 \quad \Rightarrow \quad 1 + \Delta y = 0{,}997 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = -0{,}003$

Temos, também, que $\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 2$; $\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 1$ e f(1, 1) = 1.

Mas $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \cong$

df = $\dfrac{\partial f}{\partial x} . \Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y} . \Delta y$, ou seja, f(1 + 0,002 ; 1 – 0,003) - f(1, 1)

$\cong \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} \Delta x + \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} \Delta y$, donde f(1,002 ; 0,997) $\cong$ 1 + 2 . 0,002 + 1. (-0,003) = 1,001.

2.4. A regra da cadeia

A regra da cadeia para funções de uma variável foi definida para a derivação de funções compostas.

Se y é uma função diferenciável na variável u, onde u é também função diferenciável na variável x, então podemos dizer que a composta y = f(u(x)) é diferenciável e sua derivada, com relação a x, é $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$.

A generalização dessa regra da cadeia pode ser feita para qualquer função a n variáveis, desde que sejam contínuas e diferenciáveis as funções envolvidas na composta.

Tomemos, então, uma função a duas variáveis z = f(u, v), onde u(x, y) e v(x, y) sejam funções diferenciáveis nas variáveis x e y. Dessa forma, a função composta z = f(u(x, y), v(x , y)) será diferenciável nas variáveis x e y, e suas derivadas parciais, com relação a essas duas variáveis, serão:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial y} \quad .$$

A regra da cadeia pode ser usada para qualquer número de variáveis independentes e de variáveis intermediárias. Vejamos o caso de uma função w = f(u, v), onde temos u(x, y, z) e v(x, y, z), funções diferenciáveis a três variáveis. A função w é função composta de x, y e z, diferenciável nas três variáveis, de modo que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial z}$$

De todas as formas de composição de funções, em cuja derivação utilizamos a regra da cadeia, a mais utilizada é a forma onde se tem uma função com várias variáveis intermediárias, sendo, cada uma delas, uma função ordinária, ou seja, com apenas uma variável independente. Essa forma de regra da cadeia é a mais importante, porque ela nos permite trabalhar com taxas relacionadas de funções com mais de uma variável.

Tomemos, por exemplo, uma função qualquer W = f(x, y, z), de tal forma que as variáveis x, y e z sejam funções diferenciáveis do tempo. Assim, temos a função W = f(x(t), y(t), z(t)), composta na variável t, cuja derivada é:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

Observe a notação utilizada. Como W é função composta da variável t, então ela é função de uma só variável. Desse modo, usa-se a notação conveniente $\frac{dW}{dt}$, o mesmo acontecendo com as derivadas de x, y e z.

Exemplo 1:

Sabendo-se que $w = x + 2y + z^2$, com $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$ e $z = 2r$, encontre $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ em função de r e s.

Solução:

i) $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial r} =$

$1.(\frac{1}{s}) + 2.(2r) + (2z).2 = \frac{1}{s} + 4r + 4z$

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s} + 4r + 4.(2r) \quad \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s} + 12r.$

ii) $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial s} =$

$1.(-\frac{r}{s^2}) + 2.(\frac{1}{s}) + 2z.(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.$

Exemplo 2 :

A que taxa estará variando a área de um retângulo cujo comprimento mede 12m e cresce a uma taxa de 80cm/min e sua largura mede 8m e decresce a uma taxa de 40 cm/min?

Solução:

A área do retângulo é função do comprimento e da largura, ou seja , A = x.y, onde x representa o comprimento e y, a largura. Se o comprimento cresce a uma taxa de 80 cm/min e a largura decresce a 40 cm/min, isso quer dizer que $\frac{dx}{dt}$ = 80 cm/min e $\frac{dy}{dt}$ = - 40cm/min.

Sendo A função de x e de y com as duas sendo funções do tempo, então podemos dizer que $\frac{dA}{dt}$ = $\frac{\partial A}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$ = y.$\frac{dx}{dt}$ + x. $\frac{dy}{dt}$ = 8 . 0,80 + 12 .(- 0,40) donde $\frac{dA}{dt}$ = 1,6 m^2/min.

Esse resultado pode ser interpretado como: a área do retângulo está medindo nesse instante 12 .8 = 96 m^2 e cresce a uma taxa de 1,6 m^2/min.

Observe que taxa de variação crescente implica derivada positiva, e taxa decrescente implica derivada negativa.

Exemplo 3:

A lei do gás ideal diz que P.V = k.T, onde P é a pressão, V é o volume de gás confinado, k é a constante de proporcionalidade e T é a sua temperatura. Considerando-se k = 10, determine a razão de variação no volume de um gás confinado a uma temperatura de 16^{0}C, a uma pressão de 8 N/m^2, se a temperatura aumenta a uma taxa de 0,4^{0}C/min e a pressão diminui 0,1N/m^2 por minuto.

Solução:

Como queremos determinar a razão de variação do volume como consequência da variação da temperatura e da pressão, então devemos tomar V = k . $\frac{T}{P}$, onde teremos que $\frac{\partial V}{\partial T}=k.\frac{1}{P}$ e $\frac{\partial V}{\partial P}=-k\frac{T}{P^2}$.

Temos, também, que

k = 10 , T = 16^{0}C, $\frac{dT}{dt}$ = 0,4^{0}C/min, P = 8 N/m^2

e $\frac{dP}{dt}$= 0,1 N/m^2/min.

Portanto, $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial T}.\frac{dT}{dt}+\frac{\partial V}{\partial P}.\frac{dP}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt}$ = k . $\frac{1}{P}$. $\frac{dT}{dt}$ - k . $\frac{T}{P^2}$. $\frac{dP}{dt}$

$\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt}$ = 10. $\frac{1}{8}$. 0,4 - 10 . $\frac{16}{64}$. 0,1 $\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt}$ = 0,5 - 0,25 = 0,25.

Logo, o volume de gás estará aumentando à razão de 0,25 m^3/min.

Síntese do Capítulo

Neste segundo capítulo, estudamos a diferenciação de funções de várias variáveis, começando pela definição de derivadas parciais de funções com duas variáveis e estendendo o conceito para funções com três ou mais variáveis. Em seguida, estudamos aplicações das derivadas parciais, não só no cálculo do diferencial total de uma função, como também, na regra da cadeia e suas aplicações.

Atividades de avaliação

1. Use regras de derivação para encontrar as derivadas parciais das funções indicadas:

a) $f(x, y) = x^4y^3 - 5x^2y + x^3 + 6y - 13$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(5x + 4y)$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 6xy}$

e) $f(x, y, z) = x^2y^3\cos(5z)$

f) $f(x, y, z) = e^{3xy + 2yz}$

g) $f(x, y, z) = 3xyz + \ln(6xyz)$

h) $f(x, y, z) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$

2. Dada a função $f(x, y) = \sqrt{x + y}$, determine $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_x(1, 2)$ e $f_{xy}(3, 1)$.

3. Se $f(x, y) = x^3.\cos e^y$, determine $f_{121}(x, y)$ e $f_{211}(x, y)$.

4. A equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ é conhecida como equação de Laplace em R^2 de uma função $z = f(x, y)$. Mostre que as seguintes funções satisfazem à equação de Laplace:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = e^x.\text{sen } y + e^y.\cos x$.

5. Determine a inclinação da superfície $z = x.\sqrt{y + 3}$, no ponto $P_0(-2, 1)$, na direção do eixo y.

6. Dada a função $f(x, y) = \frac{2}{x+y}$, determine sua taxa de variação com relação x, no ponto $P_0(1, 1)$.

7. Encontre as equações paramétricas da reta tangente à superfície $z = x.y^2$, no ponto $P_0(1, -1, 1)$, na direção do eixo y.

8. A temperatura em qualquer ponto (x, y) de uma chapa plana é dada por $T(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy$, sendo as distâncias medidas em centímetros. Determine a taxa na qual a temperatura varia, se nos movimentarmos na direção do eixo x, a partir do ponto $P_0(2, 1)$.

9. Use diferencial total para encontrar o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, sabendo que seus catetos medem 12cm e 16cm, com possível erro de 5% em cada medida.

10. Para o triângulo do exercício anterior, determine um valor aproximado da medida de sua hipotenusa.

11. Qual a variação que sofrerá a área de um terreno retangular, se seu comprimento for aumentado de 60m para 60,5m e sua largura for diminuída de 35m para 34m?

12. A altura de um cone circular reto foi aumentada de 40cm para 40,3cm, enquanto que o seu raio da base foi aumentado de 20cm para 20,5cm. Use diferencial total para estimar a variação sofrida por seu volume.

13. De acordo com a lei dos gases, o volume, a pressão e a temperatura de um gás confinado estão relacionados por $P.V = k\,T$, onde k é a constante de proporcionalidade. Use diferencial total para avaliar a variação percentual no volume, se a pressão aumentar em 5% e a temperatura, em 3%.

14. Use diferencial total para encontrar um valor aproximado de $\sqrt{\frac{15,89}{9,02}}$.

15. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dz}{dt}$:

a) $z = 2x^2y$; $x = t^3 + 2$ e $y = 4t$.

b) $z = \ln(2x + y)$; $x = \sqrt{t}$ e $y = 1 + t$.

c) $z = 2xy$; $x = \cos t$ e $y = \text{sen}\, t$.

d) $z = \text{tg}\, xy$; $x = t^2 + 1$ e $y = 3t$.

16. Use a regra da cadeia para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em função de x e y:

a) $z = u^2 + v^2$; $u = 4x - 2y$ e $v = x + y$.

b) $z = \sqrt{u+v}$; $u = xy$ e $v = x + y$.

c) $z = e^{3u-2v}$; $u = x^2$ e $v = 3y$.

d) $z = 2\,\text{sen}\, v \,.\, \cos u$; $u = xy$ e $v = x - y$.

17. Dois carros passam, simultaneamente, pelo cruzamento de duas rodovias perpendiculares: um, no sentido sul-norte, a uma velocidade de 60 km/h; e o outro, no sentido oeste-leste, a uma velocidade de 80 km/h. Admitindo as duas rodovias retas, com que velocidade estará aumentando a distância, entre eles, duas horas depois?

18. A altura de um cilindro circular reto cresce a uma taxa de 0,3 cm/s, enquanto seu raio da base aumenta à taxa de 0,1 cm/s. Qual a taxa de variação de seu volume no instante em que sua altura for de 30cm e o raio da base medir 15cm?

19. Dois dos lados de um triângulo medem 8cm e 12cm, e o ângulo, por eles compreendido, mede $\frac{\pi}{3}$ rad. Se o menor lado cresce a uma taxa de 40mm/h e o maior decresce a uma taxa de 80 mm/h, com que razão estará variando o terceiro lado nesse instante?

20. Uma máquina despeja, em um armazém, sementes de soja que se acumulam na forma de um cone, de modo que sua altura cresce à taxa de 20 π cm/h e o raio da base cresce a 5π cm/h. Determine a razão com que o volume de soja aumenta, no instante em que a altura for de 8m e o raio da base medir 5m.

Referências

ANTON, Howard ; **Cálculo**: um novo Horizonte. 6ª Ed. Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman. 2000.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2002. Vol. II.

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2003. Vol. II.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3ª Ed. São Paulo: Harbra, 1995. Vol. II.

Capítulo 3

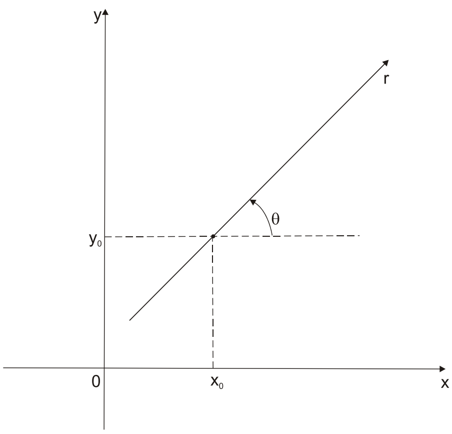
Aplicações de derivadas parciais

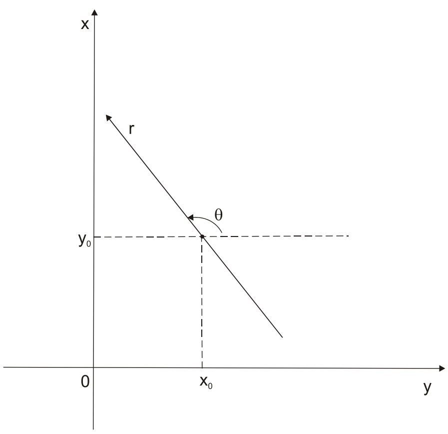
Objetivos

- Definir e aplicar a derivada direcional.
- Estudar máximos e mínimos relativos de funções a duas variáveis.
- Estudar o método dos multiplicadores de Lagrange para maximizar e minimizar funções com várias variáveis.

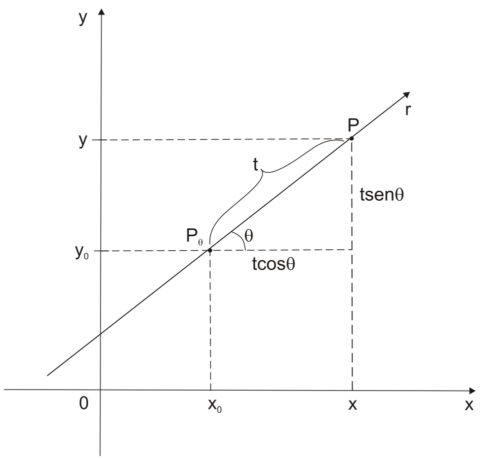
3.1. Derivada direcional com funções de duas variáveis

As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de uma função z = f(x, y) foram definidas e interpretadas como as taxas de variação ou as inclinações das retas tangentes à superfície z = f(x, y) nas direções dos eixos x e y, respectivamente. Nosso objetivo, agora, é descrever o comportamento de z = f(x, y) quando, a partir do ponto $P_0(x_0, y_0)$, caminharmos numa direção qualquer indicada pela reta orientada r que forma, com o eixo x, o ângulo orientado θ.





A taxa de variação de z = f(x, y), em relação à distância percorrida na direção de r, será chamada derivada direcional de z, no ponto P_0, na direção de θ, a qual denotaremos por $D_U f(P_0) = D_U f(x_0, y_0)$.



Mais explicitamente, se t é o parâmetro comprimento de arco de P_0 até P, então

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t.\cos\theta \\ y = y_0 + t.sen\theta \end{cases}$$

Para calcular $D_U f(P_0)$, basta derivar com relação a t a função z = f(x(t) , y(t)) ou

z(t) = f(x_0 + t.cos θ , y_0 + t.sen θ).

Usando a regra da cadeia, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$, e, sabendo-se que $\frac{dx}{dt}$ = cos θ, $\frac{dy}{dt}$ = sen θ, consequentemente, teremos que

$$D_U f(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial Y}.sen\theta \text{, ou}$$

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen\theta$$

Exemplo:

Encontre a derivada da função $z = x^3y^2$ no ponto A(1 , 2), na direção indicada pelo vetor V = 3i + 4j.

Solução:

Primeiramente, temos que encontrar as derivadas parciais da função e aplicá-las no ponto.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 12 \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

O vetor V, que indica a direção, não é unitário. Portanto, devemos encontrar o vetor unitário na direção de V, que é dado por

$$U_V = \frac{V}{|V|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Portanto, $D_U z(1, 2) = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) . \frac{3}{5} + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) . \frac{3}{5} =$

$$12 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{5}.$$

Vejamos o que acontece quando, na derivada direcional, tomamos vetores unitários na direção dos dois eixos coordenados:

- Na direção do eixo x, o ângulo do vetor unitário é $\theta = 0$. Logo,

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen\theta \quad \Rightarrow$$

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos 0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen 0 \quad \Rightarrow$$

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.1 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

- Na direção do eixo y, o ângulo é $\theta = \frac{\pi}{2}$. Então,

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen\theta \quad \Rightarrow$$

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Portanto, podemos concluir que as derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais.

3.1.1. Vetor gradiente

A derivada direcional de uma função, determinada pela fórmula

$D_U f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.sen\theta$, pode ser representada como o produto escalar de dois vetores, conforme indicamos abaixo:

$$D_U f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right).(\cos\theta, sen\theta).$$

O vetor $\left(\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ será chamado vetor gradiente de z = f(x, y) no ponto $P_0(x_0, y_0)$ e denotado por $\nabla f(P_0) = \left(\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$.

Por outro lado, sendo $U = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ o vetor unitário, podemos reescrever a derivada direcional na forma $D_U f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \,.\, U$.

É importante lembrar que $\nabla f(P_0)$ não é um produto de ∇ por $f(P_0)$, mas um símbolo de representação do vetor gradiente da função f no ponto indicado, o qual é chamado operador nabla.

> O vetor gradiente não é, apenas, um dispositivo para simplificar a notação da derivada direcional. A sua direção e o seu comprimento são de fundamental importância na análise do comportamento da função e da superfície z = f(x, y)

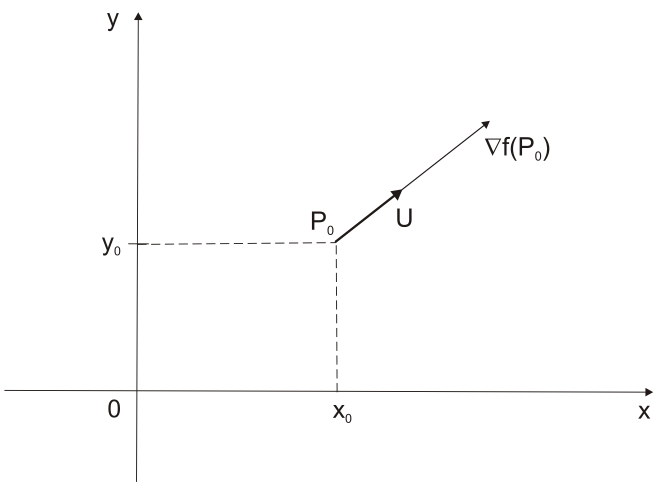
Vejamos, por exemplo, que se $D_U f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0 \,.\, U$, então

$D_U f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| . \|U\| . \cos\alpha$, onde α é o ângulo formado pelos dois vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e U.

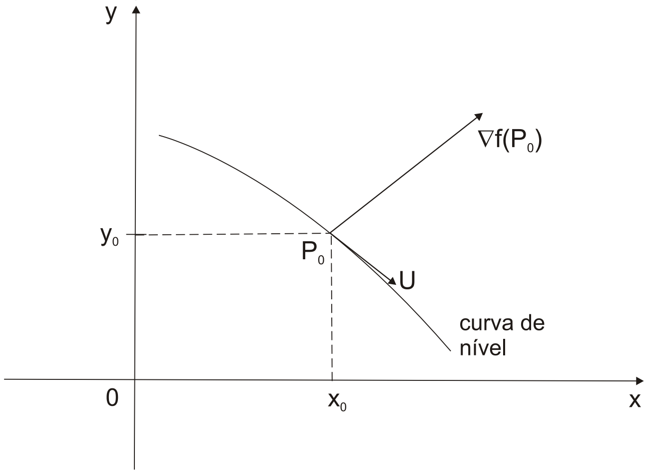
Mas, sendo o vetor U unitário, isso implica que $D_U f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| . \cos\alpha$.

Dessa nova expressão para a derivada direcional, podemos tirar algumas informações sobre a função:

1. Se $\alpha = 0$ então $\cos\alpha = 1$ e, assim, $D_U f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$, ou seja, a derivada direcional é máxima na direção e sentido do vetor gradiente, logo $U = \dfrac{\nabla f(x_0 y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$. Consequentemente, a derivada direcional será mínima no sentido contrário ao do vetor gradiente.



2. Se α = 90^0 então cos α = 0, logo $D_U f(x_0, y_0) = 0$, o que corresponde dizer que f(x, y) = k ao longo de U, o que determina as curvas de nível de f.



Exemplo:

A temperatura em uma chapa retangular é dada em ^{0}C por

$T(x, y) = x^2e^y$, para todo ponto (x, y) em um plano cartesiano nela estabelecido, com medidas em centímetros.

a) Encontre seu vetor gradiente no ponto $P_0(-2, 0)$.

Solução:

O vetor gradiente é constituído por suas derivadas parciais aplicadas no ponto, logo

$$T(x, y) = x^2e^y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 2xe^y \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = x^2e^y \end{cases} \Rightarrow \nabla T(-2,0) = (2.(-2).e^0, (-2)^2.e^0),$$

que resulta $\nabla T(-2,0)$ = (- 4, 4).

b) Determine a direção em que a temperatura aumenta, mais rapidamente, a partir do ponto $P_0(-2, 0)$, e a intensidade com que ela aumenta.

Solução:

Sabemos que uma função cresce, mais rapidamente, na direção do vetor gradiente e que deve ser indicada sempre por um vetor unitário. Portanto, a direção em que a temperatura cresce, mais acentuadamente, é na direção de U = $\dfrac{\nabla T(-2,0)}{|\nabla T(-2,0)|}$, onde

U = $\dfrac{(-4,4)}{\sqrt{(-4)^2+4^2}}$ $\Rightarrow$ U = $\dfrac{(-4,4)}{\sqrt{32}}$ $\Rightarrow$ U = (- $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

Assim, se $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, então concluímos que a temperatura cresce, mais rapidamente, na direção que forma um ângulo de $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos com o eixo x.

A intensidade de crescimento da temperatura é a derivada da função temperatura no ponto, na direção do vetor gradiente, e D_{∇} T(-2, 0) =

$\|\ \nabla T(-2,0)\ \| = \sqrt{32}$ $\Rightarrow$ D_{∇} T(-2, 0) = $4\sqrt{2}$ ^{0}C/cm .

c) A partir do ponto P_0, determine a direção que se deve seguir para se percorrer um caminho com temperatura constante.

Solução:

Para se percorrer um caminho de temperatura constante, devemos percorrer uma curva de nível T(x , y) = k , o que acarreta D_U T(-2 , 0) = 0.

Mas D_U T(-2 , 0) = 0 $\Rightarrow$ $\nabla T(-2,0)$. U = 0 $\Rightarrow$

(-4, 4) . ($\cos\theta$, $sen\theta$) = 0, logo - 4 $\cos\theta$ + 4 $sen\theta$ = 0 $\Rightarrow$

$\cos\theta$ = $sen\theta$ $\Rightarrow$ $\theta = 45^0$ ou $\theta = 225^0$.

Portanto, tomando uma direção e um sentido de 45^0 com eixo x, como também no sentido contrário, teremos um caminho de temperatura constante.

3.2. Derivada direcional de funções a três variáveis

Agora, vamos estender, para uma função a três variáveis, o conceito de derivada direcional. A única diferença é que, no R^3, a direção e o sentido de um vetor são indicados por seus ângulos diretores. Portanto, a direção e o sentido da derivada serão indicados pelo vetor unitário U = ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$), onde $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ são os cossenos diretores do vetor U.

Se w = f(x, y, z) é uma função diferenciável nas variáveis x, y e z, então

$$D_U f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}.\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}.\cos\beta + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}.\cos\gamma$$

é a derivada da função no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ na direção do vetor unitário U.

Da mesma forma que tivemos nas funções a duas variáveis, o vetor gradiente da função será:

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right).$$

Todas as propriedades observadas para o gradiente de funções a duas variáveis são, também, observadas para o gradiente de funções a três ou mais variáveis.

A maior dificuldade, para se trabalhar com funções de três ou mais variáveis, é geométrica, pois não há uma maneira de se fazer o gráfico de uma função da forma w = f(x, y, z), uma vez que necessitaríamos de quatro dimensões: uma para cada variável. Mas, assim como definimos as curvas de nível para as funções a duas variáveis por f(x, y) = k, podemos definir, para uma função w = f(x, y, z), as superfícies de nível como f(x, y, z) = k.

Para funções a três variáveis, o gradiente, em um de seus pontos, é normal à superfície de nível que contém esse ponto. Para verificar a veracidade dessa afirmação, suponhamos que f(x, y, z) = k é uma superfície de nível que contenha o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ da função e que U é um vetor unitário qualquer contido em um plano tangente à superfície de nível nesse ponto.

Se a superfície de nível é igual a uma constante, então a sua derivada é nula em qualquer direção, o que implica dizer que $D_U f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) . U = 0$.

Desse modo, podemos concluir que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular a U e, consequentemente, perpendicular à superfície.

3.2.1. Planos tangentes e retas normais a superfícies

Uma aplicação direta do resultado obtido na seção anterior é na determinação de equações de planos tangentes e de retas normais a uma superfície.

- Para a obtenção da equação cartesiana de um plano no espaço R^3, sabemos que é necessário e suficiente que se tenha um ponto por onde passe esse plano e um vetor que lhe seja normal. Como o gradiente de uma função em um ponto fixo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície, então ele será normal a um plano que tangencie a superfície nesse ponto. Portanto, a equação cartesiana desse plano tangente será:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

- Para obtenção da equação vetorial da reta normal à superfície no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, usamos o mesmo raciocínio. Dessa forma, teremos a equação: $P = P_0 + t \,.\, \nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

Exemplo:

Encontre a equação cartesiana do plano tangente e as equações paramétricas da reta normal à superfície $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 16$ no ponto (2, 1, - 2).

Solução:

Em primeiro lugar, temos de observar que a superfície dada é uma superfície de nível da função $f(x, y, x) = x^2 + 4y^2 + 2z^2$ e encontrar o seu vetor gradiente no ponto.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 4z$; que, aplicadas no ponto, resultam em: $\nabla f(2, 1, 2) = (4, 8, -8)$.

i) Substituindo na equação do plano, temos:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$4 \cdot (x - 2) + 8 \cdot (y - 1) + (-8) \cdot (z - (-2)) = 0$$

$$4x - 8 + 8y - 8 - 8z - 16 = 0 \Rightarrow 4x + 8y - 8z = 32 \text{ ou}$$

$x + 2y - 2z = 8$, que é a equação cartesiana do plano tangente.

ii) Para encontrarmos as equações paramétricas da reta normal, fazemos a substituição na equação:

$$P = P_0 + t \cdot \nabla f(2, 1, -2)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + t \cdot (4, 8, -8)$$

$$(x, y, z) = (2 + 4t, 1 + 8t, 2 - 8t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 8t \\ z = 2 - 8t \end{cases}.$$

3.3. Máximos e mínimos com funções de duas variáveis

Vimos que uma das mais importantes aplicações da derivada de funções de uma variável é o **estudo** da variação da função, do crescimento de funções , e do cálculo dos valores extremos da função com a determinação de seus pontos de máximo e de mínimo relativos. Para as funções de duas variáveis, podemos fazer uma análise semelhante, calculando os pontos onde a função alcança valores máximo e mínimo.

Sendo o gráfico de uma função a duas variáveis uma superfície no R^3, imagine o gráfico de uma função f como sendo uma cadeia de montanhas.

O relevo irregular nos permite visualizar não só alguns picos mais acentuados, como também algumas depressões mais profundas, que servem para nos dar uma idéia de pontos de máximo relativo e de mínimo relativo, que definimos a seguir.

Dizemos que um ponto no R^3 $(P_0, f(P_0))$ é um ponto de máximo relativo da função $z = f(x, y)$, se existe um disco aberto centrado em $P_0(x_0, y_0)$ e raio r, de modo que $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ para todo ponto $P(x, y)$ no domínio de f, localizado no interior do disco. Dizemos que esse ponto é de máximo absoluto, se $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ para todo ponto $P(x, y)$, no domínio da função.

Analogamente, dizemos que um ponto $(P_0, f(P_0))$ é um ponto de mínimo relativo da função $z = f(x, y)$, se $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, para todo ponto $P(x, y)$, no domínio de f, localizado no interior do disco. Da mesma forma, esse ponto será de mínimo absoluto, se $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ para todo ponto $P(x, y)$ no domínio de f.

Todo ponto de máximo, ou de mínimo relativo, é chamado extremo relativo, e todo ponto de máximo, ou de mínimo absoluto, é chamado extremo absoluto.

Uma função f(x, y) a duas variáveis tem um extremo relativo no ponto $P_0\ (x_0, y_0)$, se toda reta tangente à superfície nesse ponto (x_0, y_0) tem inclinação nula, o que acarreta dizer que sua derivada direcional em qualquer direção é sempre igual a zero.

Mas $D_U f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.\text{sen}\,\theta = 0$, ou seja, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. Portanto, essa é a condição necessária à existência de um extremo relativo da função f(x, y) em um ponto $P_0(x_0, y_0)$.

Nas funções a uma só variável, tínhamos o teste da derivada segunda, para se identificar se um extremo relativo é ponto de máximo ou de mínimo. Para funções a duas variáveis, temos um teorema semelhante ao teste da derivada segunda para identificar pontos de máximo e mínimo relativo, mas a sua prova só é possível com teorias de cálculo avançado.

Seja f(x , y) uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em um disco centrado em um ponto fixo $P_0(x_0, y_0)$.

Se $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$, então

1. D > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. > 0 \Rightarrow$ f(x, y) tem um mínimo relativo em $P_0(x_0, y_0)$.

2. D > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. < 0 \Rightarrow$ f(x, y) tem um máximo relativo em $P_0(x_0, y_0)$.

3. D < 0 $\Rightarrow$ f(x ,y) tem um ponto de sela, que definiremos a seguir.

4. D = 0, nada se pode afirmar sobre esse ponto.

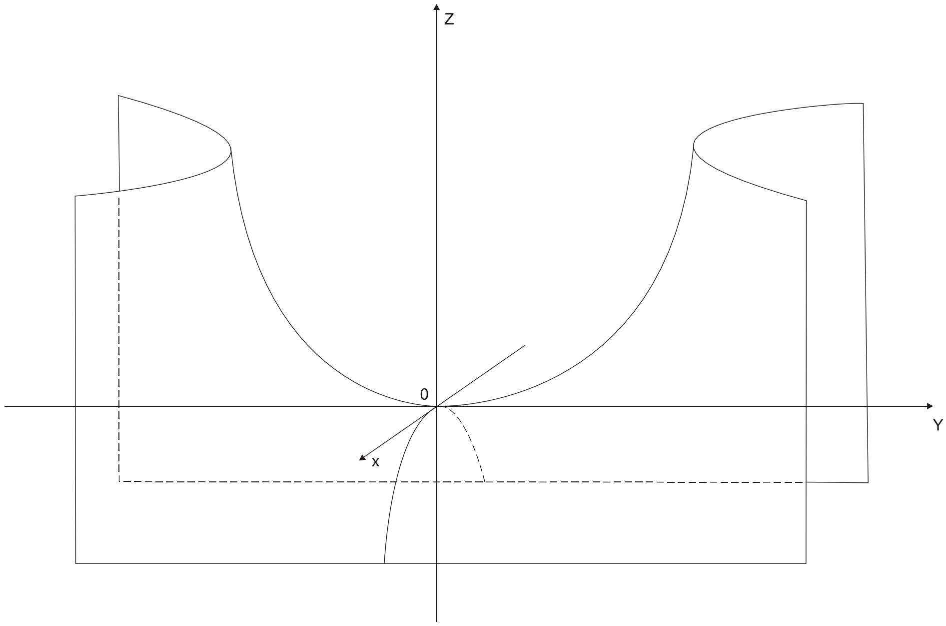
O ponto de sela que nos referimos é um ponto crítico de uma função a duas variáveis onde não ocorre nem máximo nem mínimo relativo. Um ponto $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto de sela de uma função f(x, y), se houver dois planos verticais distintos passando por esse ponto, de modo que a interseção da superfície com um dos planos seja uma curva que tem um máximo relativo no ponto e a interseção com o outro plano seja uma curva com um mínimo relativo no ponto.

A superfície onde melhor podemos ver caracterizado o ponto de sela, é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$. Nessa superfície, temos um ponto de sela na origem, pois

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \text{ logo } O(0, 0) \text{ é ponto crítico.}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. = -2\ ; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. = 2 \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -4 < 0$$



Exemplo 1:

Encontre todos os pontos críticos da função f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4, identificando cada um deles.

Solução:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases}.$$

Fazendo, na primeira equação y = x^3, e substituindo, na segunda, temos que:

$$x - (x^3)^3 = 0 \Rightarrow x - x^9 = 0 \Rightarrow x(1 - x^8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^8 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

x = 0 e y = 0 ou x = 1 e y = 1 ou x = - 1 e y = - 1 $\Rightarrow$ $P_0(0, 0)$,

$P_1(1, 1)$ e $P_2(-1, -1)$ são pontos críticos da função.

Agora, temos que aplicar o teste da derivada segunda, em cada ponto obtido, para identificá-los como máximo, mínimo ou de sela.

Temos que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. = - 12$x^2$. ; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. = - 12$y^2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ = 4.

No ponto $P_0(0, 0)$, temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.\,0 - 4^2 = -16 < 0 \Rightarrow P_0(0, 0) \text{ é ponto de sela.}$$

No ponto $P_2(-1, -1)$ temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. = -12$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. = -12$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (-12)\,.\,(-12) - 4^2 = 144 - 16\ 128 > 0.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. < 0$, então esse ponto é de máximo relativo.

No ponto $P_1(1, 1)$, temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. = -12$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. = -12$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (-12)\,.\,(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0.$$

Pelo mesmo motivo do ponto anterior, esse é também um ponto de máximo relativo.

Exemplo 2:

Encontre as dimensões de uma caixa retangular sem tampa, cujo volume deve ser $4m^3$, de modo que a quantidade de material usado em sua fabricação seja mínima.

Solução:

Tomemos x como medida do comprimento, y para a largura e z para a altura. Como a caixa não tem tampa, a quantidade de material é sua área lateral A = xy + 2xz + 2yz e o volume, sendo 4 m^3, implica que xyz = 4.

Nosso objetivo deve ser minimizar a área lateral A com a condição de xyz = 4.

Para isso, vamos isolar $z = \frac{4}{xy}$ e substituir em A, expressando a área como função de apenas duas variáveis, x e y. Assim, teremos $A(x, y) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.

Derivando, temos $\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2}$; $\frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2}$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3}\ ;\ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{16}{y^3} \text{ e } \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 1.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 8 \\ xy^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 y = xy^2 \Rightarrow x = y$$

Substituindo, em uma das equações anteriores, teremos $x^3 = y^3 = 8 \Rightarrow x = y = 2$. Portanto, a função tem apenas um ponto crítico em $P_0(2, 2)$.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{16}{2^3} \cdot \frac{16}{2^3} - 1^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0.$$

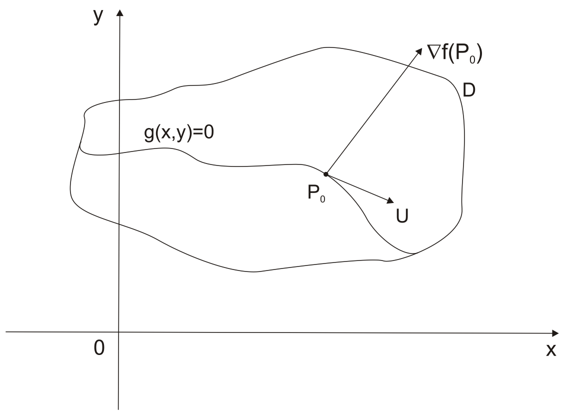
Para esses valores de x e de y, a função assume um mínimo relativo. Mas convém lembrar que x e y estão no intervalo $(0, +\infty)$. Por isso, esse ponto de mínimo relativo é, também, absoluto, de onde concluímos que $x = y = 2$ e $z = \frac{4}{4} = 1$ são os valores das medidas procuradas.

3.4. Multiplicadores de Lagrange

Esse é um método de maximização e minimização de funções em que poderemos trabalhar com funções de várias variáveis, não somente com funções a duas variáveis, como no método anterior. Ele é atribuído ao matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), por isso é conhecido como método dos multiplicadores de Lagrange.

A demonstração da técnica utilizada nesse método está fora de nosso alcance, pois necessita de teorias de cálculo avançado. Baseia-se em um resultado que já é por nós conhecido .

Seja $f : D \subset R^2 \to R$ uma função e queremos determinar os extremos relativos de $z = f(x, y)$, dentre os pontos de D que satisfazem à condição $g(x, y) = 0$. A equação $g(x, y) = 0$ determina uma curva contida em D.



Se $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto na curva $g(x, y) = 0$ e, nesse ponto, a função f tem um ponto extremo relativo, quando caminhamos ao longo da curva, então $\nabla f(P_0)$ é perpendicular ao vetor unitário U da tangente à curva $g(x, y) = 0$.

Por outro lado, sabemos que $\nabla g(P)$ é perpendicular ao vetor unitário U, em cada ponto, de onde podemos concluir que $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ são paralelos. Logo, existe $\lambda \in R$ tal que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

Esse número λ é chamado multiplicador de Lagrange, e o problema de se determinar extremos relativos de z = f(x, y), com a condição g(x, y) = 0, é solucionado através do sistema $\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \nabla f(P) = \lambda . \nabla g(P) \end{cases}$

No caso de uma função w = f(x, y, z) que tenha duas restrições g(x, y, z) = 0 e h(x, y, z), então

∇ F(P) = λ . ∇ g(P) + μ . h(P), onde λ e μ são os multiplicadores.

Exemplo 1:

Esse problema é o mesmo que foi resolvido pelo método estudado anteriormente

Encontre as dimensões de uma caixa retangular sem tampa, cujo volume deve ser 4 m^3, de modo que a quantidade de material usado em sua fabricação seja mínima.

Solução:

Usando, agora, o método de Lagrange, temos que observar qual é a função que queremos minimizar e qual é a condição que restringe a função.

Se queremos minimizar a quantidade de material, ou área lateral, então devemos tomar A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz como função principal, e a restrição será xyz = 4, ou, ainda, xyz - 4 = 0, resultando que g(x, y, z) = xyz - 4.

A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = y + 2z \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = x + 2z \\ \dfrac{\partial A}{\partial z} 2x + 2y \end{cases}$ o que implica em

∇ A(x, y, z) = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y)

g(x, y, z) = xyz - 4 $\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x} = yz$; $\dfrac{\partial g}{\partial y} = xz$ e $\dfrac{\partial g}{\partial z} = xy$, de onde tiramos que ∇ g(x, y, z) = (yz, xz, xy).

Fazendo ∇ A(x, y, z) = λ . ∇ g(x, y, z), temos:

(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = λ . (yz, xz, xy) $\Rightarrow \begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \end{cases}$.

Resolvendo esse sistema, isolando λ nas três equações e comparando dois a dois, encontraremos que x = y e z = $\frac{y}{2}$, que, substituindo na igualdade xyz - 4 = 0, obteremos os valores para x = y = 2 e z = 1.

Exemplo 2:

Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância da origem ao plano de equação 2x - y + z - 12 = 0.

Solução:

Esse problema consiste em encontrar a distância entre dois pontos, onde um deles é a origem do sistema e o outro é um ponto que pertence ao plano dado. Logo, a equação do plano é a condição que se impõe ao ponto (x, y, z), que queremos determinar e deve ser único .

A distância de um ponto (x, y, z) à origem é dada por W = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Como W será mínimo quando W^2 for mínimo, então, para facilitar o cálculo das derivadas, tomaremos f(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2$ como função principal, sujeita à condição imposta 2x - y + z - 12 = 0 ou g(x, y, z) = 2x - y + z - 12.

Devido à facilidade na derivação, podemos, de imediato, dizer que:

∇ f(x, y, z) = λ . ∇ g(x, y, z) $\Rightarrow$ (2x, 2y, 2z) = λ .(2, -1, 1). Logo,

$\begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 2y = -\lambda \\ 2z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ 2z = x \end{cases} \Rightarrow$ y = - $\frac{x}{2}$ e z = $\frac{x}{2}$, que, substituindo na equação do plano, teremos que 2x + $\frac{x}{2}$ + $\frac{x}{2}$ = 12, o que implica x = 4, y = -2 e z = 2. Portanto, o ponto P(4, - 2, 2) é o ponto do plano dado, cuja distância até a origem é mínima e essa distância é W = $\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}$ = $\sqrt{24}$ = 2$\sqrt{6}$.

Exemplo 3:

Encontre o ponto da reta de interseção dos planos y + 2z = 12 e x + y = 6 que está mais próximo da origem.

Solução:

Pelo que vimos no exemplo anterior, devemos minimizar a função f(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2$ sujeita a duas condições g : y + 2z - 12 = 0 e h : x + y - 6 = 0.

Então, devemos fazer $\begin{cases} \nabla f = \lambda . \nabla g + \mu . \nabla h \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(0,1,2) + \mu(1,1,0) \\ y + 2z - 12 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = \mu \\ 2y = \lambda + \mu \\ 2z = 2\lambda \\ y + 2z - 12 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = \lambda + 2x \\ z = \lambda \\ y + 2z - 12 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 2x + z \\ y + 2z = 12 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y = 4x + 2z \\ 2z = 12 - y \\ x = 6 - y \end{cases}$$

$4y = 4(6 - y) + 12 - y \Rightarrow 4y = 24 - 4y + 12 - y \Rightarrow$

$9y = 12 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}$.

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ 2z = 12 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - \dfrac{4}{3} \\ 2z = 12 - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} \\ z = \dfrac{16}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o ponto procurado é $P(\dfrac{14}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{16}{3})$.

Síntese do Capítulo

Neste capítulo, estudamos aplicações das derivadas parciais, dando ênfase, principalmente, às derivadas das funções de duas variáveis. Vimos como se calcula a derivada direcional de uma função, conhecemos o gradiente de uma função, aprendemos como deduzir equações de planos tangentes e retas normais a superfícies e concluímos a unidade, estudando dois métodos de cálculo de máximos e mínimos de funções.

Atividades de avaliação

1. Encontre o vetor gradiente da função, no ponto indicado:

a) $f(x, y) = x^3y - 4xy^2 + 5x$; $P_0(1, -2)$

b) $f(x, y) = 2x^2e^{3y}$; $P_0(3, 0)$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$; $P_0(1, -2, 3)$

d) $f(x, y) = \dfrac{4}{\sqrt{x + y}}$; $P_0(1, 3)$

e) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $P_0(-2, 2)$

f) $f(x, y, z) = x^2.\ln(y + 2z)$; $P_0(-3, 2, 1)$

2. Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor V:

a) $f(x, y) = x^2 - 4y$; P(2, - 1) ; V = 3i - 2j

b) $f(x, y) = (x + 2y)^3$; P(1, -1) ; V = i + 2j

c) $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$; P(1, -2) ; V = 2i + 3j

d) $f(x, y, z) = \dfrac{2xy}{z}$; P(2, -1, 3) ; V = 2i + j - 2k

e) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$; P(2, 1, 2) ; V = i - j + k

f) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x + y + z}}$; P(4, 1, 4) ; V = j - k

3. A densidade em qualquer ponto (x, y) de uma placa retangular no plano xy é $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$. Determine a taxa de variação da densidade no ponto (-1, 2), na direção que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$ rad com o eixo positivo dos x. Encontre, também, a direção o sentido e o valor da maior taxa de variação de ρ, a partir desse ponto.

4. A equação da superfície de uma montanha é $z = 2000 - 2x^2 - 4y^2$, as distâncias são medidas em metro, o eixo x aponta para leste e o eixo y para o norte. Um alpinista está no ponto correspondente a (-20, 5, 1100).

a) Se o alpinista se deslocar para a direção leste, ele estará subindo ou descendo? Com que intensidade?

b) Se ele se deslocar para noroeste, ele começará a subir ou descer? Com que intensidade?

5. Encontre a equação cartesiana do plano tangente e as equações paramétricas da reta normal à superfície dada no ponto indicado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$; P(2, -1, 3)

b) $5x^2 + 4y^2 - 2z = 15$; P(1 , 2, 3)

c) $z = e^{3x} \operatorname{sen} 3y$; P(0, $\dfrac{\pi}{6}$, 1)

6. Para as funções abaixo, determine todos os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de sela, se houver:

a) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

b) $f(x, y) = x^2 + xy - 2x - 2y + 1$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x$

d) $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$

e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$

f) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

7. Encontre três números reais positivos, cuja soma é 64, tais que seu produto seja máximo.

8. Determine os pontos da superfície $x^2 - yz = 5$ que estão mais próximos da origem.

9. Um paralelepípedo tem três de suas faces sobre os planos coordenados e um de seus vértices no plano $x + y + z = 8$. Determine as medidas de suas arestas para que seu volume seja máximo.

10. Uma caixa retangular fechada com volume de $16m^3$ deve ser confeccionada com dois tipos de material. Se a tampa e o fundo são feitos com um material que custa vinte centavos por metro quadrado e o material das laterais custa dez centavos por metro quadrado, determine as dimensões da caixa de modo que o custo do material usado seja mínimo.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo Horizonte. 6ª Ed. Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman, 2000. Vol. II.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2002 . Vol. II.

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Pearson,.2003. Vol. II.

Capítulo 4

Integrais duplas

Objetivos

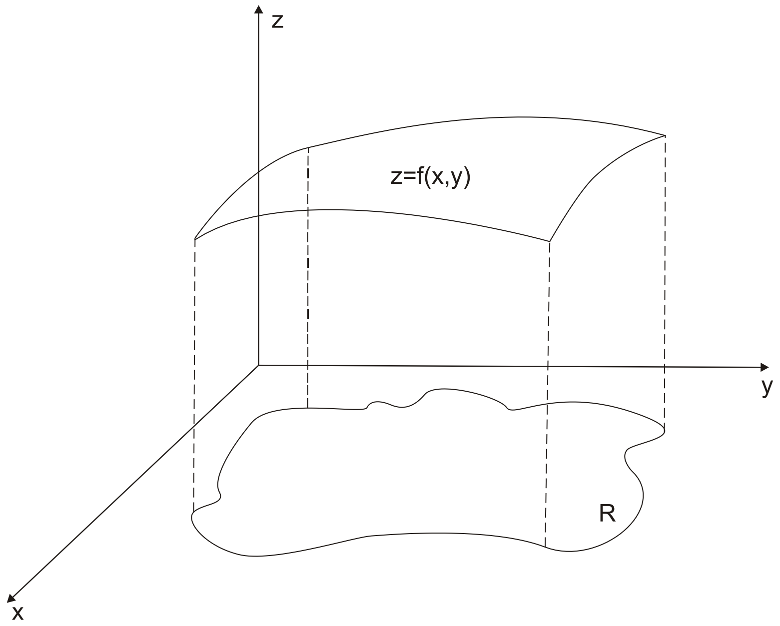
- Definir e estudar aplicações da integral dupla em coordenadas cartesianas.
- Definir a integral dupla em coordenadas polares com aplicações em cálculo de áreas e volumes.

4.1. Integrais duplas

A integral definida de uma função de uma variável originou-se do problema de se calcular a área sob uma curva no plano cartesiano, onde essa área sob a curva foi definida como a área da região limitada pela curva, o eixo x e duas outras retas que delimitavam lateralmente a área.

O problema que, agora, queremos resolver é como encontrar o volume de um sólido sob uma superfície delimitado por uma região *R* fechada e limitada do R^2.

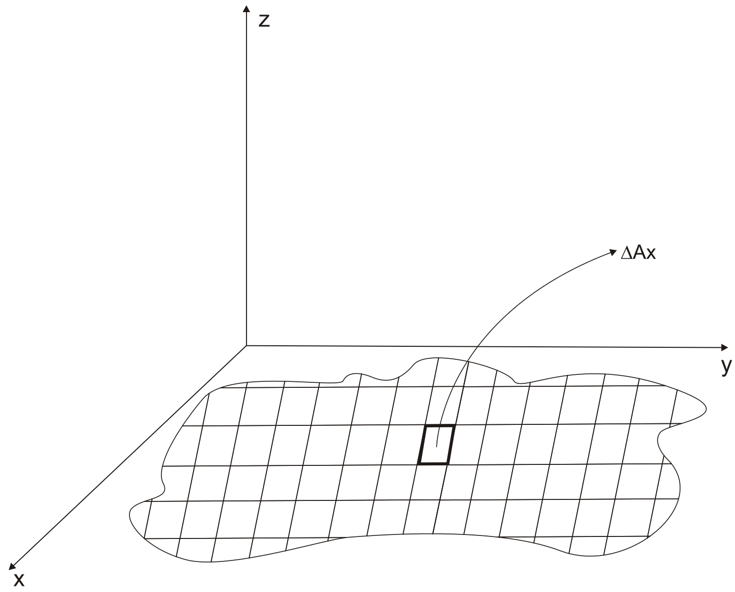
Seja z = f(x, y) uma função definida e contínua em uma região fechada *R* no plano cartesiano. Se f(x, y) é não-negativa para todo (x, y) pertencente a *R*, então seu gráfico é uma superfície acima do plano xy, de modo que existe um sólido delimitado, acima, por essa superfície e, abaixo, pela região *R*, como indica a figura abaixo.



- Uma região R é dita fechada, se ela contém todos os seus pontos de fronteira.
- Uma região R é dita limitada, se ela está contida no interior de sua fronteira.

Para determinar o volume desse sólido, usaremos raciocínio semelhante ao usado para se calcular a área sob uma curva no plano.

Tomando retas paralelas aos eixos, dividiremos a região R em sub-regiões, conforme vemos na figura. Suponhamos que existam n sub-regiões em R e que a área da k-ésima sub-região seja denotada por ΔA_k.



Tomando, em cada uma das sub-regiões, um ponto qualquer (x_k, y_k), podemos afirmar que $\Delta V_k = f(x_k, y_k) \,.\, \Delta A_k$ é o volume de uma partição do sólido, de modo que o somatório $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ nos dá uma aproximação do volume V do sólido inteiro.

Afirmar que esse produto $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ é igual ao volume do sólido, é uma inverdade, pois a superfície não é necessariamente plana. Mas, se o número de retas tomadas no processo de divisão de R tender para infinito, então ΔA_k tenderá para zero. Assim, podemos afirmar que

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k .$$

Observe que o limite que acabamos de definir como o volume do sólido sob a superfície, é o limite de uma soma de Riemann, que pode ser denotado por uma integral. Portanto,

$$V = \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \Rightarrow V = \iint_R f(x,y)\,dA .$$

Teorema

Se f é uma função definida e contínua em uma região fechada e limitada $R \subset \mathbb{R}^2$, então existe $\iint_R f(x,y)\,dA$.

Se f e g são funções definidas e contínuas em uma região fechada e limitada $R \subset \mathbb{R}^2$ e k é uma constante, então são válidas as propriedades:

P1. $\iint_R k.f(x,y)\,dA = k . \iint_R f(x,y)\,dA$

P2. $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$

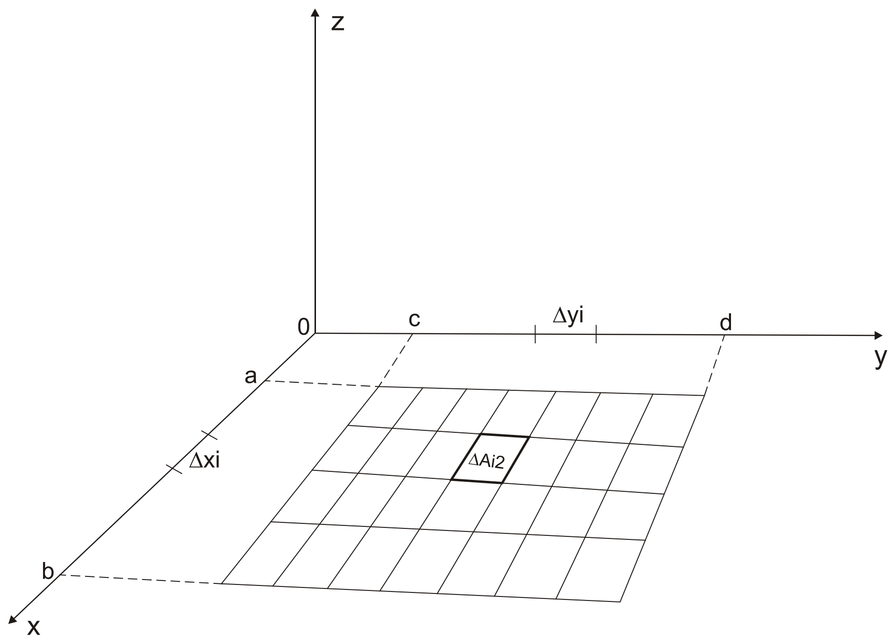
P3. Se $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2$ contém pontos da fronteira de R_1 e R_2, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA .$$

4.2. Integrais iteradas

Para as funções de uma só variável, o teorema fundamental do cálculo nos fornece um método de como calcular uma integral definida: encontrando-se uma antiderivada para a função dada. Existe um método correspondente para o cálculo de integrais duplas, que consiste em calcular duas integrais simples sucessivas, considerando-se que, assim como na derivação, a outra tem comportamento de constante ao se integrar com relação a uma das variáveis. Esse método é conhecido como método das integrais iteradas ou repetidas.

Para verificar como se desenvolve esse método, vamos, inicialmente, tomar uma função z = f(x, y) com valores não-negativos, em uma região retangular fechada, tal que R = [a, b] x [c, d], de modo que todas as sub-regiões de R sejam da forma $\Delta A_{i,j} = \Delta x_i . \Delta y_j$.



Dessa forma podemos dizer que

$$V = \lim_{(\Delta x_i, \Delta y_j) \to (0,0)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{m \\ n}} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

o que implica dizer que

$$V = \lim_{\Delta y_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{m} \left[\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i \right] \Delta y_j \right].$$

O limite mais interno dessa expressão depende, apenas, da variação de Δx_i, sendo, portanto, esse limite uma integral simples na variável x, e o limite externo em y é a integral simples do valor resultante na variável y. Portanto, podemos dizer: V = $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$.

Por estarmos em uma região retangular em que as variações de x e de y são em intervalos fechados com extremos fixos, a ordem da integração não interfere no resultado final, ou seja,

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

Exemplo 1:

Calcule $\int_R 1 + 4xy)dA$; onde R = {(x, y) $\in$ R ^{2}/ 1 $\leq$ x $\leq$ 2 e 0 $\leq$ y $\leq$ 1}.

Solução:

Pelo fato de os limites de variação de x e de y serem dentro de uma região retangular, daremos duas soluções para a questão:

i) Primeiramente, integrando com relação a y:

$$\int_R (1+4xy)dA = \int_1^2\int_0^1 (1+4xy)\,dydx = \int_1^2 \left[y+2xy^2\right]_0^1 dx = \int_1^2 [1+2x]dx =$$

$$\left[x+x^2\right]_1^2 = \left(2+2^2\right)-\left(1+1^2\right) = 2+4-1-1 = 4.$$

ii) Integrando, primeiramente, com relação a x:

$$\int_R (1+4xy)dA = \int_0^1\int_1^2 (1+4xy)\,dxdy = \int_0^1 \left[x+2x^2y\right]_1^2 dy =$$

$$\int_0^1 \left[\left(2+2.2^2y\right)-\left(1+2.1^2y\right)\right]dy = \int_0^1 (2+8y-1-2y)\,dy = \int_0^1 (1+6y)\,dy =$$

$$\left[y+3y^2\right]_0^1 = 1 + 3.1^2 = 4.$$

Exemplo 2:

Calcule $\int_0^\pi \int_{-1}^3 ysenxdydx$.

Solução:

Veja que, nessa integral, a primeira integração deve ser com relação à variável y, e senx é constante com relação a essa integração. Portanto, podemos fazer:

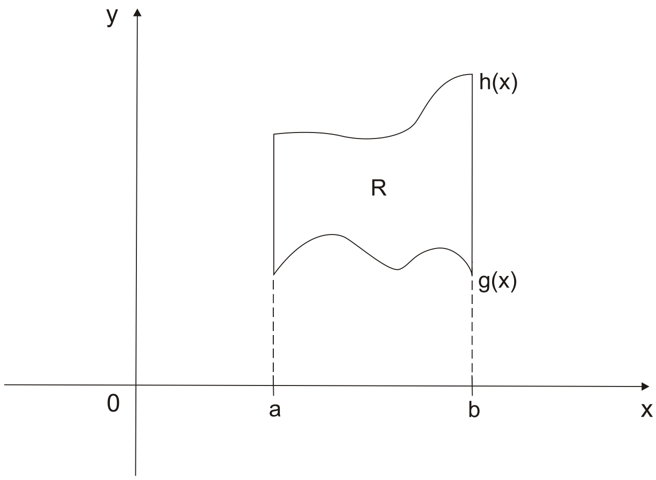
$$\int_0^\pi\int_{-1}^3 ysenxdydx = \int_0^\pi senx\int_{-1}^3 ydydx = \int_0^\pi senx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^3 dx =$$

$$\int_0^\pi senx\left[\frac{3^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]dx = \int\ senx\left[\frac{9}{2}\ \ \frac{1}{2}\right]dx = 4\int_0^\pi senxdx = 4.\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$= 4.\left[-\cos\pi+\cos 0\right]\ 4.[1 + 1] = 8.$$

4.3. Integrais iteradas com limites não-constantes

Tomemos, agora, uma função z = f(x, y), definida e contínua em uma região R no plano, de modo que $a \le x \le b$ e $g(x) \le y \le h(x)$, conforme a figura.



Sob essas condições, temos que : $\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$.

Exemplo 1:

Calcule $\iint_R (x+y)\,dA$, onde R é a região do plano limitada pelo eixo x e as retas x = y e x = 2.

Solução:

A região de integração R é o triângulo limitado, acima, pela reta x = y e, abaixo, pelo eixo x, conforme a figura.

Portanto, podemos dizer que, nesse triângulo, $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq x$.

Então,

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_0^2 \int_0^x (x+y)dydx$$

$$= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^2 \left[\frac{3x^2}{2}\right] dx =$$

$$\frac{3}{2}.\int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{2}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{2}.\frac{2^3}{3} = 4.$$

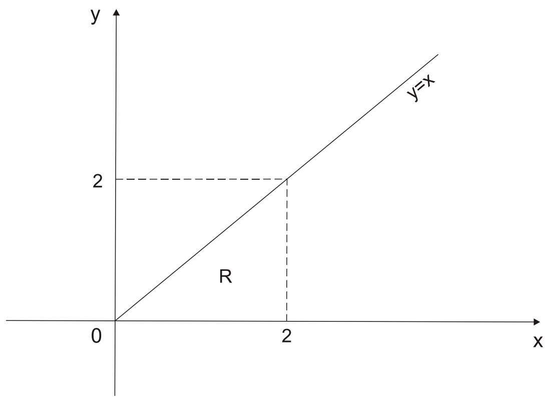
Exemplo 2:

Resolva a integral do exemplo anterior, invertendo a ordem de integração, ou seja, integrando primeiro com relação a x.

Solução:

A região R de integração é a mesma e, como a primeira integral deve ser com relação à variável x, então y deverá ter variação constante, e x deve variar em função de y. Na figura, observa-se que

$0 \leq y \leq 2$ e $y \leq x \leq 2$.



Assim,

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_0^2 \int_y^2 (x+y)\,dxdy =$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_y^2 dy = \int_0^2 \left[\frac{2^2}{2} + 2y - \left(\frac{y^2}{2} + y^2\right)\right] dy =$$

$$\int_0^2 \left[2 + 2y - \frac{3}{2}y^2\right] dy = \left[2y + y^2 - \frac{3}{2}.\frac{y^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$\left[2y + y^2 - \frac{y^3}{2}\right]_0^2 = 2.2 + 2^2 - \frac{2^3}{2} = 4 + 4 - 4 = 4.$$

Veja que não importa a ordem de integração, pois o resultado final será o mesmo.

4.4. A integral dupla no cálculo de áreas

A integral dupla de uma função z = f(x, y), sobre uma região *R* no plano, foi definida como o volume de um sólido cuja base é a região de integração e f(x, y) é a altura do sólido em cada ponto de *R*. A área da região *R* pode ser calculada fazendo-se a integração de uma função constante e igual a 1, sobre a região, de modo que teremos o volume obtido, numericamente, igual ao valor da área de *R*, ou seja,

$$A_R = \iint_R 1.dA = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dydx$$, onde A_R é a área da região *R*.

Exemplo 1:

Encontre a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução:

Primeiramente, teremos de encontrar as abscissas dos pontos de interseção das duas curvas, que serão os limites da integral. Fazendo $x^2 = \sqrt{x}$, encontraremos duas soluções: x = 0 e x = 1, para essa equação. Sabendo-se que $x^2 < \sqrt{x}$ para todo x no intervalo [0, 1] , então

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int \left[\sqrt{x} \quad x\right] dx = \int_0^1 \left[x^{1/2} - x^2\right] dx =$$

$$\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

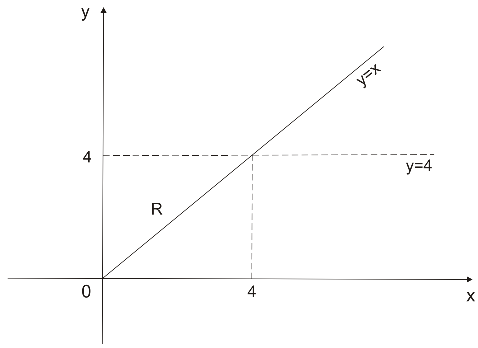
Verifique, geometricamente, a veracidade desse resultado.

Exemplo 2:

Encontre, usando integral dupla, a área do triângulo delimitado pelo eixo y e as retas y = 4 e y = x.

Solução:

Apresentaremos duas soluções para cálculo da área do triângulo, que mostramos na figura.



i) Tomando $0 \leq x \leq 4$ e $x \leq y \leq 4$.

$$A = \int_0^4 \int_x^4 dydx = \int_0^4 [y]_x^4 dx = \int_0^4 (4-x)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 16 - 8 = 8.$$

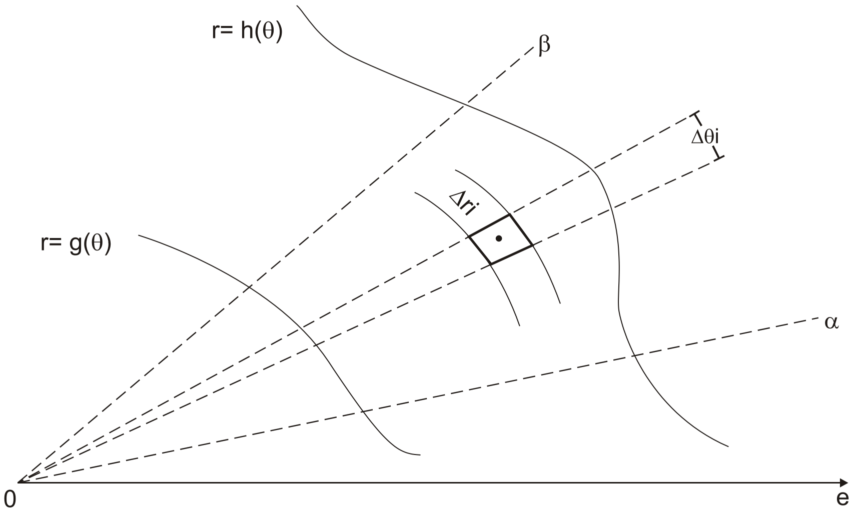
ii) Tomando $0 \leq y \leq 4$ e $0 \leq x \leq y$.

$$A = \int_0^4 \int_o^y dxdy = \int_0^4 [x]_0^y dy = \int_0^4 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = \frac{16}{2} = 8.$$

4.5. Integral dupla em coordenadas polares

Podemos calcular integrais duplas em coordenadas polares da mesma maneira que calculamos a integral dupla em coordenadas retangulares. Se $f(r, \theta)$ é uma função polar não-negativa definida e contínua em uma região fechada R, no plano polar, então podemos definir o volume sob essa superfície, da mesma forma como foi definido para as coordenadas retangulares, como sendo: $V = \iint_R f(r,\theta)dA$.

Para encontrar a forma iterada para essa integral, tomemos a região R no plano polar limitada de modo que $\alpha \leq \theta \leq \beta$ e $g(\theta) \leq r \leq h(\theta)$, conforme a figura.



A área de cada sub-retângulo no plano polar é, de fato, a diferença entre as áreas de dois setores circulares e pode ser escrita como

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} r_i^2 . \Delta\theta_i - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 . \Delta\theta_i \cdot$$

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}\left(r_i^2 . - r_{i-1}^2\right) \Delta\theta_i \;=\; \Delta A_i = \frac{1}{2}\left(r_i \; . + r_{i-1}\right)\left(r_i - r_{i-1}\right) . \Delta\theta_i \, .$$

Fazendo $\bar{r} = \frac{1}{2}\left(r_i + r_{i-1}\right)$ e $\Delta r = r_i - r_{i-1}$, temos que:

$\Delta A_i = \bar{r} \Delta r_i \Delta\theta_i$. Portanto, $\iint\limits_R f(r,\theta) dA = \lim\limits_{\Delta A_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(r,\theta) \Delta A_i =$

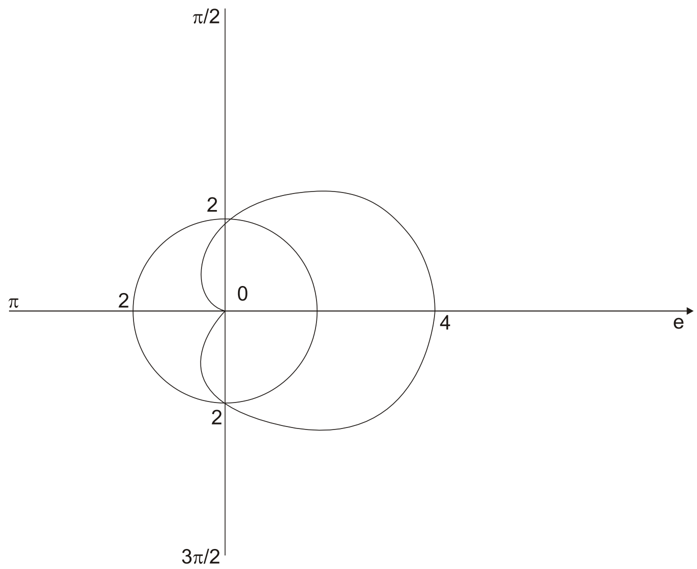
$$\lim_{\Delta\theta_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \left[\lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \theta_i)\, \bar{r} \Delta r_i \right] \Delta\theta_i \right] = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta \, .$$

Exemplo 1:

Calcule $\iint\limits_r sen\theta dA$, sabendo-se que R é a região do plano polar no primeiro quadrante, interior à cardióide r = 2 + 2cos θ e exterior à circunferência r = 2.

Solução:

Primeiramente, teremos que definir os limites de integração e, para isso, devemos fazer 2 + 2cos θ = 2 $\Rightarrow$ 2cos θ = 0 $\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$.



Como a região R está no primeiro quadrante, então $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, enquanto r varia de r = 2 a r = 2 + 2cos θ. Portanto, $\iint_r sen\theta dA = \int_0^{\pi/2}\int_2^{2+2\cos\theta} (sen\theta) r dr d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} sen\theta . \left[\dfrac{r^2}{2}\right]_2^{2+2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{2}\left[4(1+\cos\theta)^2 - 4\right] sen\theta d\theta =$

$2.\int_0^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^2 - 1\right] sen\theta d\theta$.

Fazendo u = 1 + cos θ, temos du = - sen θ dθ ou - du = sen θ dθ.

Então,

$$\iint_r sen\theta dA = 2.\int_2^1 \left[u^2 - 1\right](-du) = 2.\int_1^2 \left[u^2 - 1\right] du = 2.\left[\dfrac{u^3}{3} - u\right]_1^2 =$$

$$2 . \left(\dfrac{8}{3} - 2 - \dfrac{1}{3} + 1\right) = 2 . \left(\dfrac{7}{3} - 1\right) = \dfrac{8}{3}.$$

Exemplo 2:

Use integral dupla, em coordenadas polares, para mostrar que o volume de uma esfera de raio a é V = $\dfrac{4}{3}\pi . a^3$.

Solução:

A equação cartesiana da esfera é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Mas, se $r^2 = x^2 + y^2$, podemos dizer que $r^2 + z^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{a^2 - r^2}$.

Tomando z = $\sqrt{a^2 - r^2}$, que é o hemisfério superior da esfera, temos uma função polar definida na circunferência r = a e, assim, podemos dizer que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq a$.

Portanto, o volume da esfera será dado por:

$$V = 2\,.\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{a^2 - r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{a^2 - r^2}\,2rdrd\theta\,.$$

Fazendo u = $a^2 - r^2$, temos du = - 2r dr.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{a^2}^{0}\sqrt{u}\,(-du)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a^2} u^{1/2}dud\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2} d\theta =$$

$$\frac{2}{3}.\int_0^{2\pi} a^3 d\theta = \frac{2}{3}a^3.\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}a^3.\theta\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3}a^3.2\pi = \frac{4}{3}\pi.a^3.$$

Exemplo 3:

Use integral dupla para determinar a área total da rosácea r = sen 3θ.

Solução:

Para se calcular áreas em coordenadas polares com o uso de integral dupla, o comportamento é o mesmo do cálculo de áreas em coordenadas retangulares, sendo, portanto, A = $\iint_R dA = \int_\alpha^\beta\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} rdrd\theta$.

A rosácea apresentada tem três pétalas, pois n = 3 (ímpar), de tal forma que uma das pétalas está compreendida no intervalo de variação de θ = 0 a $\theta = \frac{\pi}{3}$, dois pontos consecutivos, onde temos r = 0. Portanto,

$$A = 3\,.\int_0^{\pi/3}\int_0^{sen3\theta} rdrd\theta = 3\,.\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{sen3\theta} d\theta = \frac{3}{2}.\int_0^{\pi/3} sen^2 3\theta d\theta =$$

$$\frac{3}{2}.\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\theta}{2}d\theta = \frac{3}{4}.\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\theta)d\theta = \frac{3}{4}.\left[\theta - \frac{sen6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{4}.$$

Síntese do Capítulo

Neste quarto capítulo, estudamos as integrais duplas, onde definimos a integral em coordenadas retangulares como o volume de um sólido, obtendo, através da integral iterada, uma forma de cálculo de volume de sólidos que ainda não sabíamos como determinar.

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

Aprendemos, também, a usar a integral dupla no cálculo de áreas de regiões planas, obtendo a forma de:

$$A_R = \iint_R 1.dA = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

Deduzimos, também, nessa unidade, fórmulas para se determinar volumes e áreas em coordenadas polares:

$$V = \iint_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r,\theta)rdrd\theta$$

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} rdrd\theta .$$

Atividades de avaliação

1. Calcule as integrais:

a) $\int_0^1 \int_0^3 (x+2)dydx$

b) $\int_0^3 \int_1^2 (x-2y)dxdy$

c) $\int_1^3 \int_0^2 xy\ dydx$

d) $\int_{-1}^2 \int_0^1 (x^2+y^2)dxdy$

e) $\int_0^{h\ 2} \int_0^{h\ 4} e^{x+y}dydx$

f) $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 y\cos xydxdy$

g) $\int_0^4 \int_0^y xdxdy$

h) $\int_0^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y}dydx$

i) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2dydx$

j) $\int_{-2}^2 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2-y)dydx$

l) $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}}dxdy$

m) $\int_1^2 \int_0^{x^2} e^{y/x^2}dydx$

2. Calcule a integral dupla na região indicada:

a) $\iint_R 4xy^3 dA$; R = {(x, y) : -1 ≤ x ≤ 1 , -2 ≤ y ≤ 2}

b) $\iint_R senx dA$; R = {(x, y) : 0 ≤ x ≤ π , 0 ≤ y ≤ 2x}

c) $\iint_R x^2 dA$; R é a região limitada por y = 16/x, y = x e x = 8

d) $\iint_R x\cos y dA$; R é a região limitada por y = x, y = 0 e x = π

e) $\iint_R xy dA$; R é a região limitada por y = $\sqrt{x}$, y = 6 – x e y = 0

f) $\iint_R x^2\sqrt{9-y^2}\, dA$;1 R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$

3. Use integral dupla para determinar a área da região limitada pelas curvas:

a) y = sen x e y = cos x, para 0 ≤ x ≤ π/4

b) $y = x^2$ e $u = x^3$

c) $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$

4. Encontre o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e os planos z = e z = 3 - x.

5. Encontre o volume do sólido localizado no primeiro octante, limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, e os três planos coordenados.

6. Use integral dupla para determinar o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelo plano 2x + 4y + 3z = 12 e os três planos coordenados.

7. As seguintes integrais não podem ser calculadas na ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração observando a região de definição e calcule:

a) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$ b) $\int_0^2 \int_x^1 \cos(y^2) dydx$

8. Calcule:

a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} sen\theta . r dr d\theta$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} .r^3 dr d\theta$

9. Encontre a área da região do plano polar limitada pela cardióide r = 2 - 2cos θ.

10. Encontre a área da região do plano polar interior ao círculo r = 4sen θ e exterior ao círculo r = 2.

11. Faça a conversão para coordenadas polares para determinar a área da região interior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à direita da reta x = 1.

12. Converta para coordenadas polares antes de calcular as integrais duplas:

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) dy dx$

b) $\iint\limits_R e^{x^2+y^2} dA$; onde R é a região limitada por $x^2 + y^2 = 1$.

c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right) dy dx$

d) $\iint\limits_R \frac{1}{1+x^2+y^2} dA$; R é a região do primeiro quadrante limitada por y = 0; y = x e $x^2 + y^2 = 4$.

13. Encontre o volume do sólido acima do plano polar limitado pelo cone z = 2r e pelo cilindro r = 1 - cos θ

14. Encontre o volume do sólido interior à esfera $r^2 + z^2 = 9$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: Um Novo Horizonte. 6ª Ed. Trad.Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman, 2000. Vol. II.

STEWART, James.**Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2002. Vol. II.

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2003. Vol. II.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3ª Ed. São Paulo: Harbra, 1995. Vol. II.

Capítulo 5

Integrais triplas

Objetivos

- Definir e calcular integrais triplas em coordenadas retangulares.
- Definir e calcular integrais triplas em coordenadas cilíndricas.
- Definir e calcular integrais triplas em coordenadas esféricas.

5.1. Integral tripla

Assim como a integral simples de funções de uma variável nos serviu como base para o estudo da integral dupla, iremos nos basear na integral dupla para definir e interpretar a integral tripla. Tomemos uma função w = f(x, y, z), definida e contínua em um sólido fechado S no espaço R^3. A integral tripla de f(x, y, z), sobre o sólido S, é dada por:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k \,.$$

O cálculo da integral tripla é feito através da iteração, da mesma maneira que o cálculo da integral dupla.

Primeiramente, suponhamos que o sólido S seja um paralelepípedo retangular, limitado, de forma que a ≤ x ≤ b ; c ≤ y ≤ d e m ≤ z ≤ n. Então,

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)dzdydx \,.$$

Exemplo:

Calcule $\iiint_S 6x^2 yzdV$, onde S = {(x, y, z) / 1 ≤ x ≤ 2 ; -1 ≤ y ≤ 0, 0 ≤ z ≤ 1}.

Solução:

$$\iiint_S 6x^2 yzdV = \int_1^2 \int_{-1}^0 \int_0^1 6x^2 yzdzdydx = \int_1^2 \int_{-1}^0 \left[6x^2 y \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 \right] dydx =$$

$$3.\int_1^2\int_{-1}^0\left[x^2y\right]dydx = 3.\int_1^2\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^0 dx = \frac{3}{2}.\int_1^2\left(-x^2\right)dx =$$

$$-\frac{3}{2}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{3}{2}.\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{2}.$$

Se S é um sólido limitado qualquer, de modo que $a \leq x \leq b$; $g(x) \leq y \leq h(x)$ e $m(x, y) \leq z \leq n(x, y)$, então

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{n(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

Do mesmo modo que usamos a integral dupla para cálculo da área de uma superfície plana, podemos usar a integral tripla para calcular volumes de um sólido S, pois

$$V = \iiint_S dV = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{n(x,y)} dzdydx$$

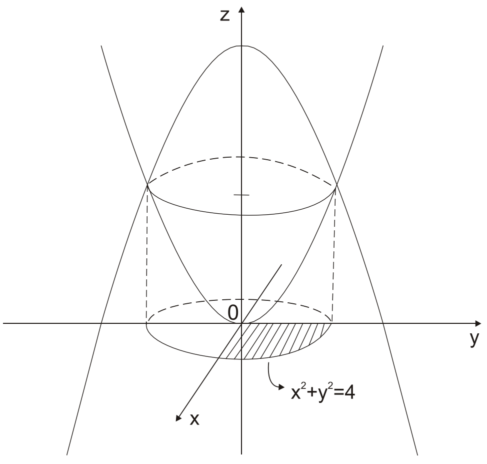
Exemplo:

Encontre, usando integral tripla, o volume do sólido S limitado pelos dois parabolóides $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

A ordem de integração pode ser alterada para que seja facilitado o processo de operação da integral.

Solução:

Primeiramente, temos que verificar como as duas superfícies se interceptam para determinar os limites de integração.



Fazendo $8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$,temos que $x^2 + y^2 = 4$, que é uma circunferência centrada na origem e em raio 2, onde podemos fazer $-2 \leq x \leq 2$ e $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.

Como $8 - x^2 - y^2 > x^2 + y^2$ para todo ponto no disco $x^2 + y^2 < 4$, então temos que $x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2$.

Com a finalidade de diminuir os cálculos, podemos observar as simetrias desse sólido e tomar as variações de x e de y somente no primeiro quadrante e multiplicar por 4 o resultado.

$$V = 4.\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dzdydx = 4.\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left[z\right]_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dydx =$$

$$4 . \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left[8 - x^2 - y^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right] dydx = 4 . \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left[8 - 2x^2 - 2y^2\right] dydx =$$

$$4 . \int_0^2 \left[8y - 2x^2 y - 2.\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 . \int_0^2 \left[8\sqrt{4-^2} - 2x^2\sqrt{4-x^2}\,\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}\right] dx =$$

$$4 . \int_0^2 \left[2\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}\right] dx = 4 . \int_0^2 \left[\frac{4}{3}\sqrt{4-x^2}^{\,3}\right] dx .$$

Fazendo x = 2sen θ; dx = 2cos θ d θ e $\sqrt{4-x^2}$ = 2cos θ, temos que:

$$V = \frac{16}{3} . \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta)^3\, 2\cos\theta d\theta = \frac{256}{3} . \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta =$$

$$\frac{256}{3} . \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{64}{3} . \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta =$$

$$\frac{64}{3} . \theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{32}{3} . \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta + \frac{64}{3} . \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$\frac{64}{3} . \frac{\pi}{2} + \frac{32}{3} . \frac{sen 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{32}{3} . \theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{32}{3} . \frac{sen 4\theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\frac{32}{3}\pi + \frac{32}{3} . \frac{\pi}{2} = 16\pi .$$

5.2. Integral tripla em coordenadas cilíndricas

O nome " coordenadas cilíndricas " vem do fato de que o gráfico de r = k é um cilindro circular reto, e essas coordenadas devem ser usadas sempre que existir um eixo de simetria.

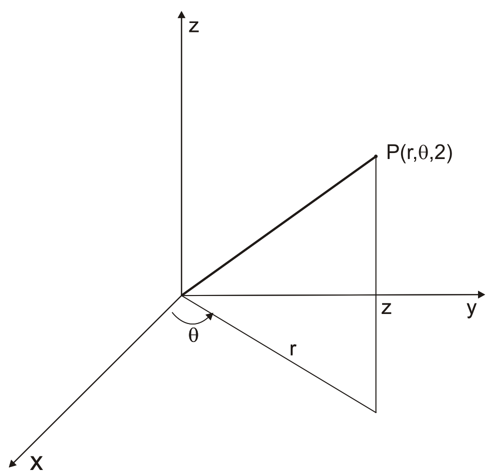
Primeiramente, temos que conhecer o sistema de coordenadas cilíndricas, que é tridimensional, composto pelo plano polar mais um terceiro eixo z, de modo que todo ponto nesse sistema é da forma P(r, θ, z).

Comparando as coordenadas cartesianas e cilíndricas de um mesmo ponto P, no espaço, devemos observar que:

a) x = r.cos θ, y = r.sen θ e z = z, de modo que uma equação da forma r = k, para todo k constante positiva é um cilindro circular reto de raio k;

b) uma equação da forma θ = k é um plano contendo o eixo z;

c) e uma equação da forma z = k é um plano paralelo ao plano polar, distando k unidades desse plano.



Para se trabalhar com a integral tripla em coordenadas cilíndricas, devemos observar essa relação existente entre os dois sistemas de coordenadas, de modo que, para se integrar uma função w = f(r, θ, z), sobre um sólido S, temos de verificar sempre que dV = dz . dA, com dA = r dr d θ, por estar no plano polar. Portanto, $\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(r,\theta,z)rdzdydx$, ou para a forma mais geral:

$$\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \int_{m(r,\theta)}^{n(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta \ .$$

Exemplo:

Encontre, usando integral tripla em coordenadas cilíndricas, o volume do sólido limitado pelas superfícies z = 8 - x^2 - y^2 e z = x^2 + y^2.

Solução:

Esse problema é o mesmo que resolvemos usando a integral tripla em coordenadas cartesianas. Em coordenadas cilíndricas, as equações das duas superfícies são z = 8 - r^2 e z = r^2, cuja interseção é a circunferência r = 2. Portanto, os limites de integração serão $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq 2$ e $r^2 \leq z \leq 8 - r^2$.

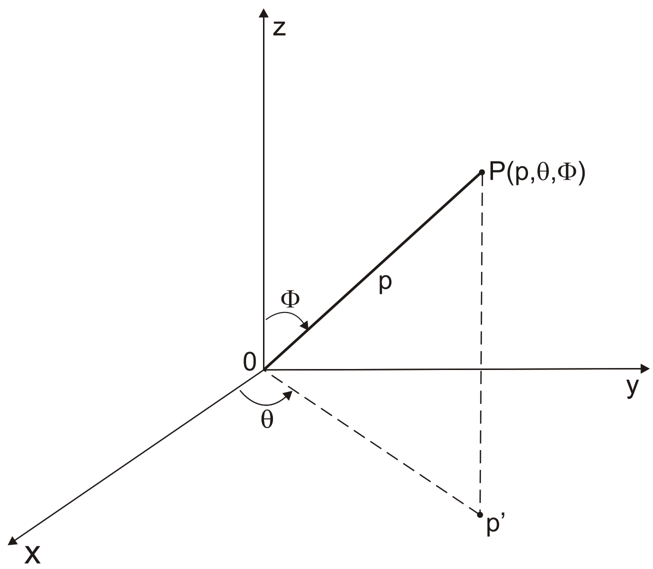
$$V = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{8-r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r.[z]_{r^2}^{8-r^2} drd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r.(8-2r^2)drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r-2r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[4r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^2 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}(16-8)d\theta = 8\ .\theta\Big|_0^{2\pi} = 16\pi \ .$$

5.3. Integral tripla em coordenadas esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é um sistema tridimensional em que cada ponto P distinto da origem é representado por uma tripla ordenada (ρ, θ, ϕ), onde ρ = |$\overline{OP}$|, θ é o ângulo polar associado à projeção P' de P sobre o plano xy e ϕ é o ângulo formado pelo eixo z positivo e o segmento de reta $\overline{OP}$. A origem desse sistema é representada por qualquer tripla (0 , θ , ϕ).



A expressão "coordenadas esféricas" decorre do fato de o gráfico da equação ρ = k, com k > 0 ser uma esfera de centro na origem e raio k. Da mesma forma que nas coordenadas cilíndricas, o gráfico de θ = k é um semi-plano contendo o eixo z. O gráfico de ϕ = k é, em geral, um meio cone com vértice na origem.

A relação entre as coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) e as coordenadas cartesianas retangulares (x, y, z), de um ponto qualquer P, podem ser obtidas verificando-se na figura, que:

$$x = |\overline{OP'}| \cdot \cos\theta$$

$$y = |\overline{OP'}| \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$|\overline{OP'}| = |\overline{QP}| = \rho \cdot \text{sen}\,\phi$$

$$|\overline{OQ}| = \rho \cdot \cos\phi$$

Assim, temos que x = $\rho \cdot \text{sen}\,\phi \cdot \cos\theta$; y = $\rho \cdot \text{sen}\,\phi \cdot \text{sen}\,\theta$ e z = $\rho \cdot \cos\phi$.

Fica, também, claro que, pela fórmula da distância entre dois pontos, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Para se definir a integral tripla em coordenadas esféricas, tomemos uma função contínua f(ρ , θ , ϕ), definida em um sólido S, em coordenadas esféricas, de modo que S = {(ρ , θ , ϕ) / a ≤ ρ ≤ b, c ≤ θ ≤ d e m ≤ ϕ ≤ n}.

$$\iiint_s f(\rho,\theta,\varphi)dV = \int_c^d \int_m^n \int_a^b f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta .$$

O volume do sólido S é dado por:

$$V = \iiint_s dV = \int_c^d \int_m^n \int_a^b \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta .$$

Exemplo:

Use integral tripla em coordenadas esféricas para determinar o volume da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com a constante positiva.

Solução:

Calcularemos o volume da esfera como sendo o dobro do volume de seu hemisfério superior, de forma que: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Então, $V = 2 . \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta = 2 . \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a sen\phi d\phi d\theta =$

$$\frac{2}{3}.a^3 . \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} sen\phi d\phi d\theta = \frac{2}{3}.a^3 . \int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$\frac{2}{3}.a^3 . \int_0^{2\pi} \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right] d\theta =$$

$$\frac{2}{3}.a^3 . \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}.a^3 . [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}.a^3 . 2\pi = \frac{4}{3}.\pi.a^3 .$$

Síntese do Capítulo

Neste quinto capítulo, estudamos a integral tripla, primeiramente trabalhando com funções de três variáveis no sistema de coordenadas retangulares, em que demos ênfase a suas aplicações no cálculo de volumes de sólidos. Depois, definimos a integral tripla em coordenadas cilíndricas e esféricas e mostramos como se determinam volumes de sólidos, usando integrais triplas, também nesses sistemas de coordenadas.

Atividades de avaliação

1. Calcule:

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{y^2+1} xdzdydx$

b) $\int_1^2 \int_0^x \int_1^{y+x} xydzdydx$

c) $\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} xdydzdx$

d) $\int_1^2 \int_0^{z^2} \int_{x+z}^{x-z} zdydxdz$

e) $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 \int_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta dzdrd\theta$

f) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos\theta} \int_0^{2\pi} \rho^2 sen\phi d\theta d\rho d\phi$

g) $\int_0^{\pi} \int_2^4 \int_0^1 re^z dzdrd\theta$

h) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^3 sen\phi d\rho d\phi d\theta$

2. Calcule $\iiint_S xdV$, onde S é o tetraedro limitado pelo plano x + 2y + 3z = 6 e os três planos coordenados.

3. Calcule, mudando coordenadas cilíndricas, a integral:

$$\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydxdz$$

4. Calcule, usando integral tripla, o volume do sólido limitado pelas superfícies:

a) $z + x^2 = 4$; $y + z = 4$; $y = 0$ e $z = 0$.

b) $z = x^2 + y^2$ e $z + y = 2$.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: Um Novo Horizonte. 6ª Ed. Trad. Cyro de Carvalho Parrara e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman, 2000. Vol. II.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2002, Vol. II .

THOMAS, George. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2003. Vol. II .

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª Ed. São Paulo: Harbra. 1995. Vol. II.

Sobre o autor

Luciano Moura Cavalcante: possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1975) e especialização em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1977). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará, foi Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática até setembro de 2008, hoje é Vice Diretor do Centro de Ciências e Tecnologia, atuando principalmente no seguinte tema: matemática.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

ISBN 978-85-78263-93-5

Universidade Estadual do Ceará

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CAPES