MATEMÁTICA

O Ensino de Equações Diofantinas Lineares na Formação Inicial de Professores

Nelson Victor Lousada Cade
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Nelson Victor Lousada Cade
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

O Ensino de Equações Diofantinas Lineares na Formação Inicial de Professores

VITÓRIA-ES
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Cade, Nelson Victor Lousada.
C122e O ensino de equações diofantinas lineares na formação inicial de professores [recurso eletrônico] / Nelson Victor Lousada Cade, Maria Auxiliadora Vilela Paiva. – Vitória, ES : Ifes, 2018.

9558Kb: il.; PDF
Publicação Eletrônica.
Modo de acesso: www.http://educimat.ifes.edu.br/index.php/produtos-educacionais

Inclui bibliografia
ISBN: 978-85-8263-385-4

1. Formação de Professores. 2. Equações Diofantinas. 3. Matemática – estudo e ensino. 4. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo. 5. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. I. Paiva, Maria Auxiliadora Vilela. II. Título.

CDD: 510.7
CDU: 510

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ESPÍRITO SANTO

VITÓRIA-ES
2018

EDITORA DO IFES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pró-Reitoria de Extensão e Produção
Av. Rio Branco, nº 50, Santa Lúcia Vitória – Espírito Santo - CEP 29056-255
Tel. (27) 3227-5564 E-mail: editoraifes@ifes.edu.br

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara
Sala do Programa Educimat
Vitória – Espírito Santo – CEP 29040-780

COMISSÃO CIENTÍFICA
Dr. Alex Jordane de Oliveira, D. Sc - Ifes
Dr. Oscar Luiz Teixeira de Rezende, D. Sc - Ifes
Dr. Victor Augusto Giraldo, UFRJ
Drª. Ligia Arantes Sad, D. Sc - Ifes

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Maria Auxiliadora Vilela Paiva.

REVISÃO
Nelson Victor Lousada Cade
Maria Auxiliadora Vilela Paiva

CAPA E EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Comunicação Impressa

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância (Cefor/Ifes)

PRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO PROGRAMA
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática Centro de Referência em Formação e Educação à Distância
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Referência em Formação e Educação à Distância- Cefor

Minicurrículo dos autores

NELSON VICTOR LOUSADA CADE

É mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo - IFES atuando na linha de pesquisa: Formação inicial e continuada de professores no contexto da educação em Ciências e Matemática. Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes/Vitória (2012). Especialista em Tecnologia Educacional e professor efetivo da Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo. Tem experiência como docente, atuando no Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4399559530134574

E-mail: **nvlcade@gmail.com**

MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA

Doutora em Matemática pela PUC-RJ. Aposentada da UFES. Professora do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática- EDUCIMAT/Cefor/Ifes e coordenadora da Pós-Graduação Lato Sensu Práticas Pedagógicas para Professores do Cefor/Ifes. Líder do Grupo de Pesquisa GEPEM-ES. Editora chefe da revista Sala de Aula em Foco do Educimat/Ifes. Pesquisa Saberes Docentes na Formação dos Professores e Ensino Aprendizagem da Matemática para o Ensino na Educação Básica e cursos de Licenciatura e Mestrado.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/2158519313210506

E-mail: **vilelapaiva@gmail.com**

Sumário

Apresentação

Prezado(a) Professor(a)

Este livro apresenta uma proposta para trabalharmos na Licenciatura, em Teoria dos Números, o conteúdo de Equações Diofantinas Lineares (EDL). Ele se baseia numa experiência vivenciada ao longo de uma formação inicial de professores e as atividades propostas são frutos de discussões coletivas nesta formação, relacionadas ao ensino e aprendizagem de EDL. Pretendemos retratar reflexões sobre as atividades trabalhadas numa perspectiva metodológica de Resolução de Problemas, fazendo uso, em alguns momentos, da tecnologia com a utilização do software Geogebra.

Essas sequências de atividades e a forma como as conduzimos tem a pretensão de propor e criar formas de articular, na graduação, o tema de Equações Diofantinas Lineares com conteúdos abordados no ensino fundamental ou médio.

Assim, propomos uma inversão na forma que este conteúdo é comumente tratado na formação inicial e traçamos um caminho com vistas ao desenvolvimento de conceitos, numa lógica de construção da Matemática para o ensino a partir de discussões coletivas. Nossa experiência em Formação de Professores nos leva a afirmar que o conhecimento pedagógico do conteúdo começa a se desenvolver na formação inicial. Assim, propomos, também, trabalhar uma das vertentes para o desenvolvimento deste conhecimento que diz respeito às articulações dos conhecimentos científicos com os escolares, no sentido de Klein (2009), de uma Matemática vista de forma elementar sem perder a cientificidade.

Esta obra é organizada da seguinte forma:

1. Os saberes da docência e a matemática para o ensino;
2. O que são Equações Diofantinas Lineares?
3. A sala de aula da Licenciatura e as EDL;
4. A construção de situações problema na formação inicial;
5. Demonstrações formais de EDL;
6. O uso do Geogebra no estudo de EDL;
7. Sugestões de atividades e Leituras;
8. Considerações finais;

Referências.

Esperamos que este livro contribua para que vocês docentes, formadores de professores, se sintam estimulados a desenvolverem novas propostas para o ensino da Teoria dos Números e da Álgebra na formação do professor, contribuindo desse modo para o desenvolvimento de práticas pedagógicas colaborativas com vistas à construção de uma Matemática para o ensino, na Formação Inicial do professor que ensina Matemática.

1

OS SABERES DA DOCÊNCIA: A MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA FORMAÇÃO INICIAL

1 Os saberes da Docência: a Matemática para o ensino na formação inicial

ESTUDOS APONTAM que existe uma lacuna na formação inicial de professores, entre o que se aprende na licenciatura, e o que se ensina. É preciso que a formação inicial promova a construção dos saberes docentes de modo a articular os saberes científicos com a perspectiva de ser professor, construindo assim uma aprendizagem para o ensino. Klein (2009) em 1908, já denunciava esta dicotomia e as consequências disto na formação do professor. Esses saberes influenciam a prática de sala de aula e são apontados em estudos em Educação Matemática, como de Nacarato e Paiva (2008); Davis e seus colaboradores (2006, 2009, 2012, 2014); Rangel, Maculan e Giraldo (2015); Pereira, Paiva e Freitas (2018).

Gatti (2010) ao tratar das características e problemas da formação de professores no Brasil aponta não terem ocorrido avanços significativos nesta área. A autora, ao analisar projetos pedagógicos de cursos de licenciatura de instituições públicas e privadas das cinco regiões do país, revela um panorama desolador quanto às condições dos cursos de formação de professores para a educação básica mostrando a necessidade urgente de uma revisão profunda nas estruturas dos cursos. Uma das causas apontadas pela autora para essa situação é a ausência de um eixo formativo para a docência que discuta as características do ambiente escolar, como a realidade do aluno e o contexto social em que se insere a escola. A autora aponta que alguns cursos de licenciatura ao focarem somente no conteúdo específico deixam de refletir sobre outros aspectos da docência necessários à atuação do professor.

> A forte tradição disciplinar que marca entre nós a identidade docente e orienta os futuros professores em sua formação a se afinarem mais com as demandas provenientes da sua área específica de conhecimento do que com as demandas gerais da escola básica, leva não só as entidades profissionais como até as científicas a oporem resistências às soluções de caráter interdisciplinar para o currículo [...] (GATTI, 2010, p. 1375).

Considerando que nas formações a ênfase é dada, de forma geral aos conteúdos específicos da área, enfatizamos que em especial em um curso de licenciatura em matemática, é preciso nos ater que, além dos conceitos científicos, o futuro professor deverá ser capaz de articular este saber matemático acadêmico com o saber matemático escolar. Mas fica a questão: De que forma fazer esta articulação requerida?

Já há alguns anos que estudiosos da linha de formação afirmam que "pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer" (NACARATO e PAIVA, 2008, p. 14).

Pensando nesta questão é que a pesquisa que desenvolvemos (CADE, 2018) aponta no sentido de que os cursos de licenciatura devem levar em consideração seu objetivo que é formar um profissional que aprenderá uma matemática na perspectiva do ensino. Resende (2007) aponta que a formação inicial precisa situar a contribuição das disciplinas consideradas de conteúdo específico na construção de uma matemática refletida nessa perspectiva.

Defendemos propostas de intervenção em cursos de licenciatura que visem a construção de uma matemática para o ensino por meio da articulação entre o saber científico e o escolar. Esta proposta de articular o saber científico com o saber escolar está imbricada ao "conhecimento pedagógico do conteúdo" proposto por Shulman (1986).

Shulman (1986; 2005) foi um dos precursores em destacar a importância de se pesquisar a prática docente e os conhecimentos necessários para a atuação profissional. Dentre os conhecimentos citados pelo autor, destacamos dois deles; o conhecimento do conteúdo, específico da disciplina a ser ensinada e o conhecimento pedagógico do conteúdo que diz respeito ao conhecimento próprio do professor ao ensinar.

O autor destaca a singularidade do conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC), denominado por ele de PCK ("Pedagogical Content Knowledge"), diante das outras categorias, ou seja, é o conhecimento especializado que o professor possui para ensinar determinado conteúdo, tornando-o mais compreensível ao aluno, sendo este conhecimento considerado típico do professor. Ou seja, é um conhecimento do conteúdo para o ensino.

Sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) diz que é o que incorpora os conteúdos mais importantes a serem estudados, englobando as representações mais úteis, as analogias mais eficazes, ilustrações, bem como exemplos e demonstrações.

Shulman (1986) considera que a partir da análise dessa categoria é possível diferenciar um especialista de um professor. Enquanto um especialista tem um conhecimento relevante sobre o conteúdo, um professor, além de saber o conteúdo, precisa encontrar os melhores meios de torná-lo compreensível para os outros e que esses possam dar significado ao que aprendem.

Acreditamos que as disciplinas de conteúdo específico de matemática na licenciatura, além de propiciar que os alunos se deparem com a epistemologia desses conceitos, os conduzam à reflexão sobre possíveis articulações deles com o saber escolar, contribuindo com a formação da identidade profissional do futuro docente. Outro fator importante relacionado ao tipo de formação foi destacado por Paiva (2006, p. 93),

> A formação preocupa-se com o que o professor não sabe, partindo de teorias e não avançando na maioria das vezes para outros aspectos enquanto que o desenvolvimento profissional procura desenvolver aspectos que ele já tenha, mas que pode aperfeiçoar, aliando teoria e prática.

Para nós a formação é na linha do desenvolvimento profissional, na construção de uma identidade do professor, visto como um profissional com saberes próprios. Aliar teoria e prática, como diz Paiva, faz parte de um dos saberes do conhecimento pedagógico do conteúdo que é articular o saber científico e o escolar, diminuindo desse modo a distância entre a matemática que se aprende na graduação e a que se ensina na escola e vice-versa. Essa distância a nosso ver, é evidenciada pela falta de relação entre os cursos de formação inicial e a efetiva prática dos professores em sala de aula.

Sobre essa falta de relação entre os conteúdos aprendidos na graduação e a prática do futuro docente Klein (2009), no início do século passado, apontava haver uma dupla descontinuidade como se fossem saberes distintos e separados. Para nós esses dois saberes, o da graduação e o da sala de aula precisam se articular. No entanto, temos também consciência que se esta articulação não for trabalhada na formação inicial, com vistas a uma matemática para o ensino, o professor por si só não dará conta, depois de formado, de promovê-la.

Um dos caminhos para que trabalhemos os conceitos com vistas ao ensino é nos pautarmos nos estudos de Davis e seus colaboradores. Propondo formas de desenvolver o saber profissional do professor de matemática Davis e seus colaboradores (2009) propõem uma metodologia de investigação chamada de Estudo do Conceito (tradução nossa para concept study) em que professores coletivamente (re) constroem seus entendimentos sobre um conceito matemático com vistas ao ensino.

Davis (2009) estrutura o Estudo do Conceito (EC) em quatro ênfases principais: realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas) (DAVIS; RENERT, 2012, 2014).

As realizações podem ser descritas como as diversas formas, por exemplo, definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos, entre outros, que o professor utiliza para comunicar um determinado conceito matemático (DAVIS, 2012; DAVIS; RENERT, 2014). Essas realizações não são entendidas como certas ou erradas, mas oriundas de um entendimento vindo da tarefa de ensinar.

A ênfase realizações é a única intencional, as outras emergem a partir da escolha de cada realização, conforme aponta Davis (2009): "as outras (ênfases) são emergentes – inesperadas, não planejadas, decorrentes da partilha de interesses, saberes divergentes, e encontros acidentais." (DAVIS; RENERT, 2009, p. 38, tradução nossa). Segundo Giraldo et. all (2017, p.5):

> Não há uma estrutura pré-determinada para as ênfases subsequentes, cuja determinação é emergente dos dados e procura destacar tendências proeminentes no debate sobre o conteúdo, que possam indicar reflexões ou reconstruções de significados nos saberes de matemática para o ensino dos participantes.

Os panoramas são obtidos a partir da lista de realizações (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Essas estruturas são entendidas aqui como as relações existentes entre as realizações que apresentam características semelhantes, já em relação à ênfase vinculações seu objetivo é refletir se estão presentes nas discussões do conceito estudado outros conceitos matemáticos. Em nossa pesquisa identificamos a ênfase vinculações no quarto encontro, dedicado às demonstrações formais de EDL, pois emergiram durante esse dia discussões sobre conteúdos como a parametrização da reta ensinada em Geometria Analítica e a resolução de uma EDL utilizando equação de congruência.

Davis (2012) salienta que as três ênfases descritas acima estão focadas principalmente em fazer distinções refinadas entre as realizações e suas implicações. Para o autor a ênfase mistura explora as conexões entre as realizações identificadas e/ou reúne essas realizações em uma interpretação mais abrangente que, naturalmente, pode introduzir possibilidades emergentes. Esta ênfase fica caracterizada, pela possibilidade de mudanças em concepções pré-estabelecidas, determinando a construção de novas concepções.

Davis e Renert (2014) destacam sua compreensão de que a estrutura de um Estudo do Conceito se funda na "compreensão do coletivo como um agente de cognição, em oposição a uma coleção de agentes de cognição" (Davis, Renert, 2014, p.53, apud Rangel, 2015, p. 107). Os autores confirmam a importância do coletivo no estudo de um conceito, permitindo que conhecimentos às vezes superficiais sobre determinado conteúdo sejam (re) construídos pela troca de ideias entre os pares. Além disso, Davis (2012) aponta que o estudo do conceito é guiado pelas seguintes suposições:

> No nível individual, os entendimentos de conceitos matemáticos e concepções de matemática são emergentes; no nível cultural, os professores são participantes vitais na criação da matemática, principalmente através da seleção e da ênfase preferencial dada a interpretações particulares em detrimento de outras; no nível social o conhecimento dos professores sobre a matemática é em grande parte tácito, mas os elementos críticos dele podem ser disponibilizados para o interrogatório em contextos de grupo e; o conhecimento individual e coletivo não pode ser dicotomizado; as possibilidades coletivas são envolvidas e desdobram entendimentos individuais. (Davis, 2012, p. 6, tradução nossa).

As suposições apontadas por Davis (2012) permitem ao futuro docente construir um saber para o ensino e ter o entendimento da importância da reflexão coletiva da prática para sua formação.

Em nossa pesquisa o papel da coletividade foi fundamental no aprofundamento do entendimento do conceito de uma EDL, visto que os licenciandos trabalhando em grupo e no coletivo maior, por meio de resolução de problemas, (re) construíram sua compreensão sobre esse conteúdo com vistas ao ensino. Buscamos assim, propiciar ao longo de cinco encontros com um grupo de licenciandos a construção da matemática para o ensino de Equações Diofantinas Lineares.

2

O QUE SÃO EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES?

2 O que são Equações Diofantinas Lineares?

EQUAÇÕES ONDE onde olhamos para suas soluções em uma classe restrita de números, como os números inteiros, inteiros positivos, inteiros negativos, são chamadas equações diofantinas, em homenagem a Diofanto de Alexandria (+/- 300 D.C.). De Diofanto, matemático grego, pouco se sabe, conforme Eves (1995) aponta em seu livro, *Introdução à história da matemática*, que a maioria dos historiadores tende a situá-lo no século III de nossa era, porém não há certeza sobre sua nacionalidade ou época em que viveu.

Sabe-se, porém que dentre os matemáticos que estudaram a Teoria dos Números, sem dúvida, Diofanto foi considerado como um dos mais importantes. Sua obra *"Arithmetica"*, escrita por volta de 250 d.C., trata principalmente da solução de equações indeterminadas com coeficientes inteiros, hoje chamadas Equações Diofantinas. Hygino (1991, p. 119) aponta que as EDL são,

> Todas as equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas), com coeficientes inteiros, sempre que se trata de procurar suas possíveis soluções também entre os inteiros. Isso embora Diofanto só tenha estudado algumas dessas equações, em casos particulares, e embora o universo que tenha usado para resolução de seus problemas fosse o conjunto dos números racionais positivos.

A obra de Diofanto contém uma maior proximidade com a álgebra babilônica, porém com uma diferença fundamental, como aponta Boyer (1991, p. 132),

> (...) enquanto os matemáticos babilônicos se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas de até terceiro grau, a Arithmetica de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução exata de equações, tanto determinadas quanto indeterminadas.

Segundo Zerhusen; Rakes; Meece (1999), muitos problemas tratados no livro *Arithmetica*, de Diofanto de Alexandria, são relacionados ao que atualmente denominamos de equações diofantinas. Porém, a obra não contém problemas envolvendo as equações indeterminadas de primeiro grau.

Em nossa pesquisa limitamo-nos ao estudo das Equações Diofantinas Lineares a duas incógnitas e determinadas. Por meio de discussões coletivas e resolução de situações problema em grupos investigamos como o licenciando constrói uma matemática para o ensino de EDL.

Para ilustrarmos nossas escolhas de possíveis problemas a serem trabalhados, trazemos a seguir uma situação descrita por uma Equação Diofantina Linear.

O valor da entrada de um cinema é R$8,00 e da meia entrada é R$5,00. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$500,00? (Em tempo; a capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas.) (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 52, exercício 36).

Esse problema pode ser descrito pela equação a duas incógnitas:
$8x + 5y = 500$.

Generalizando, essa equação é do tipo **$ax + by = c$**, onde **a**, **b** e **c** são números inteiros dados e as soluções **x** e **y** procuradas, também pertencem ao **conjunto $\mathbb{Z}$**.

Para a resolução desse tipo de equação há uma proposição que comumente, nas licenciaturas, é demonstrada logo ao início do desenvolvimento deste conteúdo. Como já dissemos propomos uma inversão, de forma que primeiro trabalhemos problemas que recaem nas equações deste tipo com estratégias diversas, oriundas das discussões dos grupos de alunos.

Abaixo trazemos a proposição que no momento propício será discutida e demonstrada. Lembramos ao leitor que as proposições e exemplos discutidos em nosso trabalho se referem ao estudo das Equações Diofantinas Lineares a duas incógnitas.

PROPOSIÇÃO: Uma Equação Diofantina Linear: $ax+ by = c$ tem solução se, e somente se, d divide c, onde $d = mdc(a, b)$. Posteriormente, ainda nesse livro, traremos ao leitor a demonstração da proposição acima.

3

A SALA DE AULA DA LICENCIATURA E AS EDL

3 A sala de aula da Licenciatura e as EDL

AS ATIVIDADES aqui comentadas foram desenvolvidas, com licenciandos, do quinto período do curso de Matemática, na disciplina de Teoria dos Números. O desenvolvimento das atividades se deu ao longo de cinco encontros que compõem uma das fases da pesquisa desenvolvida por Cade (2018) no mestrado profissional Educimat do Cefor/Ifes e que teve como objetivo retratar reflexões sobre o trabalho com o conteúdo de EDL na formação inicial.

Nesses encontros trabalhamos na linha da Resolução de Problemas como metodologia de investigação, de forma que os alunos tivessem oportunidade de criar estratégias para a resolução das situações problema propostas, trocar ideias, validar soluções e assim, coletivamente construírem uma Matemática para o ensino.

Ao propormos nosso trabalho trazemos Vila e Callejo (2006, p.29), teóricos da linha de Resolução de Problemas que definem o que é problema:

> Uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno [...] que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão.

Em nossa pesquisa consideramos que o aluno não tinha pronta a estratégia de resolução e que várias poderiam surgir. Valorizamos, assim, os diferentes caminhos de resolução encontrados pelos licenciandos, já que não iniciamos o trabalho com a formalização do conteúdo de EDL. Além disso, realizamos a socialização de algumas estratégias que surgiram, a fim de desmistificar o conceito de que o fazer matemático se resume em uma simples reprodução de modelos.

Buscamos por meio dessa socialização que o licenciando percebesse as diferentes estratégias de resolução que poderão contribuir para sua formação e futura atuação docente. Os problemas foram solucionados em pequenos grupos, e o fechamento com discussões coletivas, valorizando o trabalho colaborativo. Para o desenvolvimento dos encontros via resolução de problemas, buscamos uma abordagem investigativa sustentada pelas reflexões coletivas de futuros professores. Optamos então por uma metodologia colaborativa, em que o licenciando pudesse expor suas experiências e seus saberes individuais de modo a construir e elaborar no coletivo os saberes de matemática com vistas ao ensino.

Desse modo trabalhamos a formação por meio do Estudo do Conceito (Davis, 2008, 2010, 2012; Davis & Renert, 2009), que permite ampliar o conhecimento desses futuros professores sobre os conceitos matemáticos por meio das questões que caracterizam o estudo coletivo.

A seguir comentaremos alguns problemas trabalhados em nossa pesquisa e faremos uma rápida descrição com orientações para sua aplicação, bem como nossas experiências ao realizá-las. Esperamos que o formador de professor reflita sobre sua própria prática e visualize modos de seus alunos construírem uma Matemática para o ensino, de forma que o que se aprende na graduação tenha vínculo e se articule com o que se estuda na escola.

Vamos então às atividades!

Atividade 1

Um consumidor deseja pagar uma compra de supermercado, no valor de R$151,00 com tickets de R$3,00 e R$5,00. (SILVA, Valdir Vilmar Da. Números Construção e Propriedades. 1ª Edição. Goiânia: UFG, ano 2003).

Pergunta-se:

I) A equação tem solução?
II) Se tem solução, o número de soluções é finito ou infinito?
III) Se tem solução, quais são estas soluções?
IV) Qual é o menor número de tickets que pode ser usado? E o maior?

Essa atividade foi conduzida com o objetivo de permitir aos licenciandos construírem coletivamente conceitos importantes para o ensino de EDL. É importante salientarmos que esses alunos ainda não haviam aprendido formalmente o conteúdo, estando livres para produzirem matemática e solucionar o problema proposto. Assim valorizamos diferentes estratégias que poderiam ser suscitadas, e coletivamente as possibilidades de resolução iam se tornando verdadeiras aulas de EDL.

As tarefas se realizaram ordenadamente da seguinte maneira:

1º) Os alunos escolheram entre si, quais seriam os componentes de cada grupo;

2º) Receberam uma folha com o problema acima, e a partir daí procuraram formas de resolver o que foi proposto trabalhando em equipes;

3º) Comunicaram no quadro a forma como o problema foi solucionado.

Nesse dia, apenas dois dos grupos presentes apresentaram no quadro sua solução, sendo que os demais alunos puderam intervir tecendo questionamentos ou reflexões acerca da solução apresentada ao mesmo tempo em que socializavam experiências.

Conversando com o leitor

Prezado professor/formador,

Nesse encontro nosso objetivo foi analisar se aquele grupo de alunos seria capaz de mobilizar conhecimentos sobre o tema EDL, construindo uma matemática para o ensino desse conteúdo, porém o professor formador pode usar esse problema para propor reflexões aos licenciandos, sobre a forma como eles abordariam o problema em uma sala de aula, suscitando assim discussões sobre a profissão docente.

Então sugerimos a você que trabalhe com seus alunos em pequenos grupos de trabalho, e decorrido um tempo, um ou mais grupos comuniquem suas produções no coletivo e troquem ideias sobre as diversas resoluções e sobre suas próprias experiências com os colegas, no sentido de uma construção coletiva de saberes.

A seguir apresentamos a solução apresentada por um dos grupos de licenciandos.

FIGURA 1 – Resolução do problema do encontro 1 - Grupo “O Infinito”

a) sim.

b) infinitos.

c) $3x + 5y = 151$

Achamos um regularidade na varacão dos variaveis x e y. que se resume escatamente em relação aos coeficientes.

x	y
2	29
7	26
12	23
17	20
22	17
27	14
32	11
37	8
42	5
47	2

d) 31 tickets - menor
49 tickets - maior

Fonte, dados da pesquisa, 2018.

Refletindo e construindo saberes

Essas soluções e suas socializações promovem reflexões sobre como articular o saber aprendido na graduação com a futura atuação do licenciando em sala de aula. Algumas perguntas podem ser feitas por você como:

a) De que forma você trabalharia esse problema com os alunos da Educação Básica?

b) Qual a importância de se trabalhar com problemas que possam representar situações cotidianas nas aulas de matemática?

c) Aproveite e faça uma lista com todas as respostas obtidas para futuras comparações com outros problemas. Que tal chamar essa lista de Lista de Realizações?

Conversando com o leitor

Colega formador de professor,

Por meio dessa experiência foi possível analisar o conhecimento de alguns alunos em relação ao tema EDL e perceber que, embora eles representem o problema por meio de uma equação algébrica, acabam por solucionar o problema por tentativas e aproximações. Isso se justifica, pois nosso objetivo não foi formalizar o conteúdo já no primeiro encontro por meio de demonstrações de teoremas, pelo contrário, desejávamos ver emergir diferentes formas de comunicação matemática referente aos problemas propostos. A partir do momento que o licenciando avança e adquire confiança na resolução de problemas, vai surgindo a necessidade do aprofundamento no tema e a demonstração dos teoremas ganha maior sentido.

Tecendo comentários sobre a resolução do Grupo "O Infinito":

O grupo "Infinito" ao representar a equação na busca das soluções que satisfariam o problema, destaca: *"Achamos uma regularidade na variação das variáveis x e y que se resume exatamente em relação aos coeficientes"*. Essa frase apresentada pelo grupo juntamente com a tabela mostrada na Figura 1, mostrou que emergiu por meio das discussões coletivas uma matemática científica, pois aqueles alunos trabalhando juntos identificaram uma solução geral da equação via parametrização da equação da reta, por meio dos coeficientes da equação $3x + 5y = 151$. Essa parametrização se evidencia por meio da tabela ao somarem às soluções particulares da coluna X o valor do coeficiente $b = 5$ e diminuírem às soluções particulares da coluna Y o valor do coeficiente $a = 3$. Essa constatação percebida pelo grupo conduz à solução geral de uma EDL como apresenta Hygino (1991, p. 119),

> Seja (x_0, y_0) uma particular solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é:
>
> $S = \{(x_0 + \frac{b}{d} t, y_0 - \frac{a}{d} t) \mid t \in z\}$ onde $d = mdc\ (a,b)$.

No caso do problema em questão, como o mdc (3, 5) =1, podemos constatar que $x = x_0 + 5t$ e $y = y_0 - 3t$ que nos mostra a tabela apresentada pelo grupo.

Além disso, esse grupo ao ordenar as soluções particulares dessa EDL em uma tabela, apresentou um modo de articular o saber científico com o saber escolar, tornando o conteúdo compreensível aos demais colegas que estavam em sala. Essa solução nos mostrou que o saber do conteúdo estava sendo construído, pois, os conceitos de EDL eram refletidos e discutidos, a partir da necessidade de resolver a situação proposta. Corroboramos com Shulman (1986), pois entendemos que os conhecimentos específicos da disciplina ministrada pelo professor, englobam a compreensão e a organização de fatos de determinado conteúdo.

No segundo encontro, previsto na pesquisa, continuamos nossa metodologia de trabalho na perspectiva da Resolução de Problemas mantendo os grupos formados no encontro anterior.

Para cada grupo entregamos a **Atividade 2** e eles ficaram livres, para coletivamente, desenvolverem estratégias de resolução.

Atividade 2

Uma escola precisa comprar bolinhas de tênis para um torneio. As bolinhas são vendidas em embalagens com 8 e 14 unidades, com preços respectivamente, de 4 e 6 reais, cada embalagem. Qual a quantidade de cada tipo de embalagem que deve ser comprada para se obter um total de 100 bolinhas com o menor preço?

Sugerimos, ao professor da Licenciatura, que desenvolva esse trabalho ao longo de alguns encontros para que as discussões possam ser aprofundadas permitindo aos alunos boas reflexões sobre o estudo do conteúdo de EDL com vistas ao ensino.

Manter os grupos formados no primeiro encontro também é recomendado, pois assim será possível visualizar de que forma eles evoluíram tanto no saber do conteúdo como no saber pedagógico do conteúdo que irão emergir das discussões.

Tecendo reflexões sobre a prática docente

No momento das apresentações coletivas das soluções algumas perguntas podem ser direcionadas aos alunos para que discussões sejam suscitadas. Pergunte a eles:

I) A qual conjunto numérico pertence às soluções desse problema?

II) Se um aluno do oitavo ano escrever como solução da equação $8x + 14y = 100$ (EDL que representa o problema acima) o par ordenado $(-5, 10)$ como você abordaria com ele essa questão?

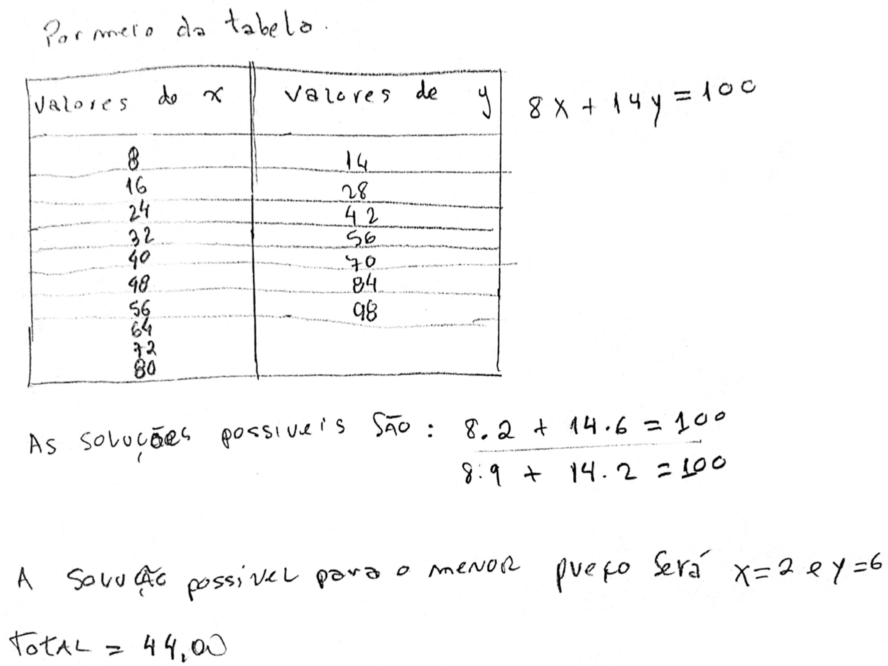
Conversando com o leitor

Caro colega formador de professor,

Lembre-se que seus alunos muitas vezes precisarão lidar com erros cometidos ao resolverem situações problema, e que o erro faz parte do processo de ensino e aprendizagem. Observe como o erro é tratado no coletivo, que aprendizagens surgem. Aproveite e discuta com os licenciandos modos de abordarem e problematização do erro. Este é um saber matemático para o ensino, necessário ao professor.

Vejamos a solução apresentada por um dos grupos:

FIGURA 2 – Resolução do Problema do encontro 2 – Grupo “Infinito”


Por meio da tabela.

Valores do x	Valores de y
8	14
16	28
24	42
32	56
40	70
48	84
56	98
64	
72	
80	

$8x + 14y = 100$

As soluções possiveis são: $8.2 + 14.6 = 100$

$8.9 + 14.2 = 100$

A solução possivel para o menor preço será $x = 2$ e $y = 6$

Total = 44,00

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Destacamos a solução do grupo “Infinito”, que confirma com o trabalho coletivo, no segundo encontro, o entendimento da variação dos coeficientes da EDL na representação de suas soluções particulares. Esse grupo, representado pelo licenciando Nilson, ao comunicar coletivamente no quadro, a solução do problema explica que:

> *Dividimos a equação pelo mdc entre os coeficientes 8 e 14 que é 2, daí chegamos a equação equivalente: $4x + 7y = 50$, só que aí nós observamos que quando a gente consegue achar uma solução, aí a gente consegue achar todas. Pra você achar uma, aí não tem jeito, é no braço mesmo, uma solução é o 2 e outra é*

o 6, mas quando soma o 2 ao 7 vai dar 9 e o 6 quando subtrai 4 dá 2, e isso também é uma solução. Se eu fizer esse processo contínuo aqui, eu vou obter todas as soluções que não se encaixam no contexto" (Licenciando Nilson, 20/06/2017).

A fala do aluno aponta que o grupo, mesmo sem conhecer formalmente as demonstrações de resolução de uma EDL, já é capaz de mobilizar diferentes tipos de conhecimentos no momento de explicitar uma solução para o problema. Notamos a presença de um saber escolar que leva a um saber científico do conteúdo, pois os licenciandos desse grupo descobriram que há um padrão entre os coeficientes de uma EDL, que servirá para a generalização das soluções desse tipo de equação, que conduz às equações paramétricas que fornece a solução geral de uma Equação Diofantina.

Outras soluções e comentários podem ser encontrados na pesquisa de Cade (2018).

Após eles terem vivenciado a experiência de discutir coletivamente situações problema de EDL, é importante que os licenciandos, ainda em grupo, criem o próprio problema retratando uma EDL. Peça a eles que além de criar um problema proponham uma metodologia de trabalho em sala de aula, definindo se gostariam de abordá-lo em uma turma de ensino fundamental ou médio. Em nossa próxima seção iremos sugerir uma organização para o desenvolvimento dessa atividade.

4

A CONSTRUÇÃO DE SITUAÇÕES PROBLEMA NA FORMAÇÃO INICIAL

4 A construção de situações problema na formação inicial

Agora é a vez de vocês proporem um problema a partir dos conhecimentos adquiridos com o conteúdo de Equações Diofantinas Lineares. Pensem na resolução desse problema por alunos da educação básica do Ensino Fundamental (EF) ou do Ensino Médio (EM). Para isso o grupo precisará criar um contexto real para o problema e verificar se há solução para o mesmo. Para a realização da tarefa algumas perguntas precisarão ser respondidas.

I) Em qual série do EF ou EM o problema será trabalhado?

II) Esse problema fará parte de um conteúdo específico? Se sim, qual?

III) Quais são os conhecimentos científicos necessários ao professor para trabalhar esse problema na educação básica?

IV) Quais são as potencialidades pedagógicas ao se trabalhar com esse problema no nível de ensino escolhido? Quais são os desafios?

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Essas questões disparadoras de aprendizagens são ricas para o desenvolvimento de saberes relacionados ao ensino de equações e permitem que experiências sejam trocadas e que saberes sejam (re) construídos, como percebemos na pesquisa desenvolvida por Cade (2018).

Trazemos agora alguns dos problemas que os licenciandos criaram, enfatizando a importância deste momento de socialização das elaborações dos grupos.

Grupo *Os papiros de Rhind*

Dois amigos resolveram fazer uma festa e ficou faltando linguiça para churrasco e salsicha para cachorro quente. No supermercado a salsicha estava no valor de R$8,00 reais/kg e a linguiça no valor de R$13,00/kg. Os dois possuem o valor de 100,00 reais para comprar os produtos. De quantas formas é possível comprar os itens (kg individual por produto) totalizando o valor disponível? Quantos kg foram comprados no total?

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Grupo Os pensantes

Problema: Um pessoa vai a sorveteria para comprar 150 reais em sorvete. A sorveteria possui 2 balcões de sor-vetes, 1 onde os sabores de sorvetes custam 15 reais o quilo e outro onde custam 12 reais o quilo.
Qual a melhor opção de comprar de forma a levar a maior quantidade de sorvete?

$15x + 12y = 150$

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Grupo Pancho

Problema) João e Carlos querem comprar balas e chicletes. Cada bala custa R$ 0,10 centavos e cada chiclete custa R$ 0,35 centavos. Eles possuem juntos R$ 5,0 reais. Expresse a quantidade que de balas e chicletes que João e Carlos podem comprar, sendo que deseja-se ter mais chicletes do que balas e a maior quantidade de doces possível.

Solução:

bala ⇒ x

chiclete ⇒ y

$$0{,}10x + 0{,}35y = 5$$

$$10x + 35y = 500$$

$$2x + 7y = 100$$

múltiplo de 7

28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 84, 98

múltiplo de 2

8, 12

Soluções

x	y	Doces x+y
8	12	20
15	10	15
1	14	

$20 > 15$

R: Deverão comprar 12 chicletes e 8 balas.

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Grupo Infinito

José está construindo a sua churrasqueira, o pedreiro solicitou que ele comprasse blocos e lajotas. Sendo que a quantidade mínima de lajotas deve ser 50 unidades. Ele foi ao material de construção do bairro onde mora e recebeu o seguinte orçamento.

	LAJOTA	BLOCO
Preço R$	3,00	5,00

Considerando que ele tenha 400,00. De quantas maneiras ele pode comprar blocos e lajotas utilizando todo o seu dinheiro.

Fonte – Dados da Pesquisa, 2018.

Conversando com o leitor

Caro colega formador de professor,

Sugerimos que este momento seja seguido de discussão coletiva, nada impedindo que ao ir aos grupos, você como mediador, fomente reflexões. Uma das questões disparadoras poderia ser como eles se sentem ao formular o próprio problema. A seguir sugerimos algumas perguntas que poderiam ser feitas.

I) Qual a opinião de vocês sobre formularem o próprio problema? O que devem levar em conta nesta elaboração?

II) Vocês têm clareza em qual momento do currículo do Ensino Fundamental e Médio essa discussão está relacionada?

III) Vocês consideram possível começar um conteúdo pela resolução de um problema?

IV) Na opinião de vocês o contexto do problema influencia no entendimento e compreensão dos alunos?

Essas reflexões permitem que, nas discussões, questões relacionadas ao conhecimento do currículo sejam tratadas, bem como as dificuldades e clareza que tenham sobre o que precisam levar em conta para formularem uma situação problema que conduza à aprendizagem.

Caso não surja na discussão a intencionalidade na proposição de um problema, comente com eles que um problema ao ser proposto a uma turma deve ter uma intenção de ensino (Vila & Callejo, 2006), que favoreça o processo de ensino-aprendizagem. E que trabalhar na perspectiva da Resolução de Problemas é um dos caminhos para que o aluno investigue, faça inferências, desenvolva sua criatividade e raciocínio.

Aproveite as respostas que surgirem para comentar sobre diferentes estratégias que possam ser abordadas em sala de aula. Que tal colocar num quadro as frases de impacto que surgirem para serem comentadas depois?

ATENÇÃO!

Comente com eles que conhecer os alunos favorece a proposição de um problema, pois será possível criar situações que façam sentido à turma e estimulem a busca por solução.

Após três encontros dedicados à construção de uma matemática para o ensino de Equações Diofantinas Lineares, por meio de resolução de problemas em grupos e proposição de problemas pelos próprios licenciandos, sugerimos que ocorra um momento para a demonstração formal das proposições que fundamentam cientificamente o conteúdo de EDL.

Acreditamos que o conhecimento pedagógico do conteúdo articula-se ao conhecimento do conteúdo de EDL, e as demonstrações formais são também uma das formas de refletir uma matemática para o ensino. Concordamos com Shulman (1986; 2005) que aponta o conhecimento do conteúdo, como imprescindível, englobando a compreensão dos fatos, conceitos e procedimentos da sua área específica.

5

DEMONSTRAÇÕES FORMAIS DE EDL

5 Demonstrações formais de EDL

EM NOSSA pesquisa, essa demonstração formal ocorreu no quarto encontro. Trazemos nesta seção as proposições que fundamentam esse conteúdo. Caso o leitor deseje mais detalhes sobre como ocorreram as discussões coletivas nesse encontro, é recomendado a leitura de CADE (2018).

Definição: Uma equação diofantina linear é uma expressão da forma $ax + by = c$, na qual a, b e c são inteiros com $ab \neq 0$ e cujas soluções estão restritas aos números inteiros. Uma solução dessa equação é um par de inteiros (x_0, y_0) tal que $ax_0 + by_0 = c$. A proposição seguinte apresenta condições para a existência de soluções.

Proposição 1: Sejam $a, b, c \in Z$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $d = mdc(a, b)$. A equação $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, $d|c$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam x e y soluções de inteiros para a equação $ax+by = c$. Como $d = mdc(a, b)$, então $d|a$ e $d|b$. Logo, $d|(ax + by) = c$.

($\Leftarrow$) Se $d|c$, então existe $e \in Z$ tal que $c = ed$. Como $d = mdc(a, b)$, pela Proposição 1.1 abaixo, existem r e s inteiros tais que $ra + sb = d$. Assim, $era + esb = ed = c$. Logo, $x = er$ e $y = es$ é solução da equação $ax + by = c$.

Proposição 1.1: Sejam $a, b \in Z$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Então o $mdc(a, b)$ é o menor inteiro positivo da forma $ra + sb$ para $r, s \in Z$.

Demonstração: Seja $M = \{ra + sb : r, s \in Z\}$. Então $a, -a, b, -b \in M$ (exemplo, $-a = -1 \cdot a + 0 \cdot b$). Como $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então o conjunto $M+ = \{m \in M : m > 0\} \neq \emptyset$. Logo, pelo princípio da boa ordem de N, $M+$ tem um menor elemento d. Desde que $d \in M$, então $d = ra + sb$. Mostraremos que $d = mdc(a, b)$.

(I) $d|a$ e $d|b$: Aplicando o algoritmo da divisão para a e d, segue que existem $q, r' \in Z$ tais que $a = qd + r'$ e $0 \leqslant r' < d$. Logo, $0 \leqslant r' = a-qd = a-q(ra+sb) = (1-qr)a + (-qs)b \in M$.

Como d é o menor elemento de M+ e $0 \leqslant r' < d$, então $r' = 0$ e, portanto, $a = qd$, ou seja, $d|a$. Analogamente, $d|b$.

(II) Se $c \in Z$ é tal que $c|a$ e $c|b$ então, $c|(ra + sb) = d$. Logo, $d = mdc(a, b)$.

Corolário 1: Sejam $a, b, c \in Z$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se $mdc(a, b) = 1$, então a equação $ax + by = c$ sempre tem solução.

Corolário 2: Sejam $a, b \in Z$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. A equação $ax + by = 1$ tem solução se, e somente se, $mdc(a, b) = 1$. O resultado a seguir apresenta o formato de todas as soluções de uma equação diofantina, caso elas existam.

Proposição 2: Seja $ax+by = c$ uma equação diofantina tal que $d = mdc(a, b)$ divida c. Se r e s são inteiros tais que $d = ra+sb$, então:

(I) o par $x_0 = r \cdot cd$, $y_0 = s \cdot cd$ é uma solução para $ax+by = c$;

(II) as soluções (x, y) são dadas por $x = x_0 + t \cdot bd$ e $y = y_0 - t \cdot ad$, $t \in Z$.

Demonstração: Vamos considerar $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois o caso em que um deles é zero é elementar.

(I) Substituindo x por $x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$ e y por $y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$ em $ax + by$, obtemos $a \cdot r \cdot \frac{c}{d} + b \cdot s \cdot \frac{c}{d} = (ar + bs) \cdot \frac{c}{d} = d \cdot \frac{c}{d} = c$. Assim, o par (x_0, y_0) é uma solução para $ax + by = c$.

(II) Sejam x, y inteiros tais que $ax + by = c$. Desde que $ax_0 + by_0 = c$, então $ax+by = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$. Logo, $a \cdot (x - x_0) = b \cdot (y_0 - y)$ (1). Como $d = mdc(a, b)$, então $d|a$ e $d|b$, ou seja, existem os inteiros a_1 e b_1 de maneira que $a = a_1 \cdot d$ e $b = b_1 \cdot d$ (2).

Pelo Corolário 1, $mdc(a_1, b_1) = 1$ (3). De (1) e (2) temos que $a_1 \cdot (x - x_0) = b_1 \cdot (y_0 - y)$. Assim, $a_1 | b_1 \cdot (y_0 - y)$ (4).

Por (3) e (4) e pela Proposição 2, $a_1 | (y_0 - y)$, ou seja, existe $t \in Z$ tal que $y_0 - y = t \cdot a_1$, isto é, $y = y_0 - t \cdot a1 = y_0 - t \cdot \frac{a}{d}$.

Substituindo $y_0 - y$ por $t \cdot a_1$ na igualdade $a_1 \cdot (x - x_0) = b_1 \cdot (y_0 - y)$, obtemos $a_1 \cdot (x - x_0) = b_1 \cdot t \cdot a_1$. Como $a1 \neq 0$ (pois estamos considerando a e b diferentes de 0), então $x - x_0 = b_1 \cdot t$, ou seja, $x = x_0 + t \cdot b_1 = x_0 + t \cdot \frac{b}{d}$.

Por outro lado, para $x = x_0 + t \cdot \frac{b}{d}$, $y = y_0 - t \cdot \frac{a}{d}$ e $t \in Z$ temos $ax + by = a(x_0 + t.\frac{b}{d}) + b(y_0 - t \cdot \frac{a}{d}) = ax_0 + by_0 = c$, ou seja, (x, y) é uma solução da equação.

Conversando com o leitor

Caro colega,

Sugerimos que, nesse dia dedicado às formalizações das proposições que permeiam o conteúdo de EDL, você reflita juntamente com os alunos vinculações que possam existir com as Equações Diofantinas Lineares e outros conteúdos matemáticos.

Algumas sugestões:

I) Relacionar a parametrização da reta de uma EDL com a disciplina de Geometria Analítica;

II) Abordar sobre a divisão euclidiana na busca de uma solução particular para a EDL;

III) Mostrar aos licenciandos que uma EDL pode ser resolvida como uma equação de congruência[1].

Sugerimos que você resolva com eles uma EDL, por exemplo: $3x + 5y = 7$, por equação de congruência, que pode ser solucionada em Z_3 ou Z_5.

Em Z3 teríamos a seguinte solução: $[3x + 5y]$[2] $= [7] \Rightarrow [3x] + [5y] = [7] \Rightarrow [3].[x] + [5].[y] = [7] \Rightarrow 0 + [5].[y] = [7] \Rightarrow [5].[y] = [7] \Rightarrow [2].[y] = [1]$. Nesse ponto da resolução, comente com a turma que ali existe uma equação de congruência que pode ser solucionada do seguinte modo:

---

[1] Uma congruência algébrica do tipo $ax \equiv b \pmod{m}$, onde $a, b, m \in Z$, $a \neq 0$ e $m > 0$, e x é uma variável em Z, recebe o nome de congruência linear ou congruência de primeiro grau. (Fundamentos de aritmética – Hygino H. Domingues, 1991 – p. 134).

[2] O símbolo [ ] representa uma classe modular de número inteiro, ou classe de congruência.

$2y \equiv 1 \bmod(3)$

$2.2y \equiv 2.1 \bmod(3)$

$y \equiv 2 \bmod(3)$

$y - 2 \equiv 0 \bmod(3)$

Logo: $y = 2 + 3k, k \in Z$. Assim temos todas as soluções para y em Z_3.

Após essa etapa de resolução, você poderá perguntar aos alunos, caso a pergunta não tenha sido feita por um dos licenciandos: “E agora como encontrar x?”.

Finalizando esse momento, é interessante fazer a substituição na EDL

$3x + 5y = 7$ da parametrização encontrada para a coordenada y; $y = 2 + 3k$.

$3x + 5(2 + 3k) = 7$

$3x + 10 + 15k = 7$

$3x = -3 - 15k$

$x = -1 - 5k, k \in Z$.

Questionar: Há relação entre as soluções gerais de x e y e os coeficientes da equação original?

O exemplo acima e outros nos mostram que as discussões científicas podem se dar por meio de vinculações entre outros saberes matemáticos, como os saberes de Geometria Analítica, Divisão Euclidiana e Congruência. Essas relações que são estabelecidas entre variados conteúdos matemáticos a nosso ver contribuem para a reflexão e construção de uma matemática para o ensino. Acreditamos que no momento em que o futuro professor reflete modos de relacionar saberes, ele se coloca em uma perspectiva de que aquilo que aprende é aprendido para ensinar.

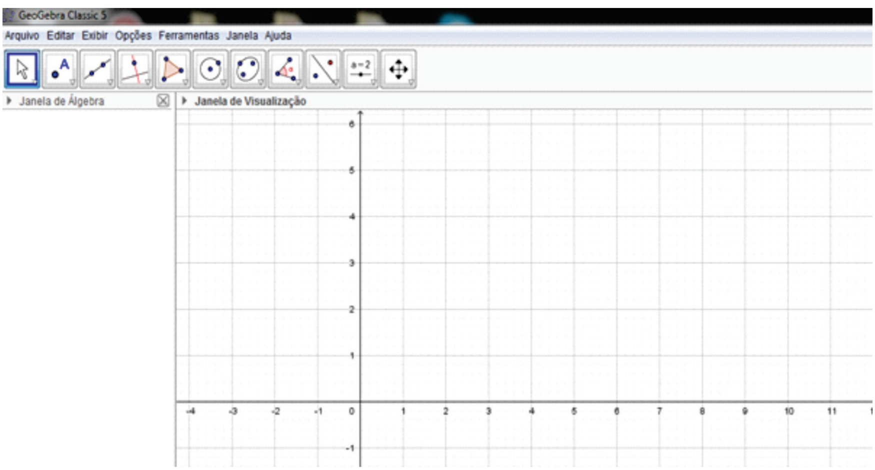
6

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE EDL

6 O uso do GEOGEBRA no estudo de EDL

CARO FORMADOR de professores,

Aqui nos preparamos para concluir essa sugestão de trabalho na formação inicial. Sugerimos que para fechamento ou durante todo o processo da construção de uma matemática para o ensino de EDL, os alunos façam atividades no Laboratório de Informática com a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra. Essas atividades terão por objetivo a construção de gráficos de EDLs, permitindo aos alunos observarem que os pontos de coordenadas inteiras do gráfico são soluções das equações propostas. São, portanto, pontos de coordenadas inteiras de retas, apresentadas em sua forma parametrizada. Apresentaremos a seguir o software GeoGebra e sugestões de atividades a serem desenvolvidas no processo de construção dos conceitos de EDL.



Fonte – Geogebra Classic 5.

Vamos agora apresentar as atividades trabalhadas com os licenciandos

Sejam as equações:

I) $2x + 3y = 10$;

II) $-3x + 5y = 0$;

III) $3x + 6y = 7$;

IV) $-5x + 10y = 0$;

V) $10x + 15y = 60$;

VI) $97x + 17y = 1$

a) Explique, utilizando os conhecimentos adquiridos nesses encontros a respeito das soluções das Equações Diofantinas Lineares, porque essas equações podem ou não ter soluções inteiras;

b) É possível escrever todas as soluções dessas equações?

c) É possível generalizar as soluções dessas equações? Se sim escreva a forma geral para determinar a solução de cada equação acima.

d) Escreva na linha de comando do Geogebra cada uma das equações descritas anteriormente. De que forma você relaciona as soluções inteiras encontradas em (d) com o gráfico formado?

A seguir apresentamos as respostas do aluno Calixto, às questões propostas.

FIGURA 3 – Soluções particulares das Equações Diofantinas – "Calixto"

Nome pelo qual gostaria de ser identificado: CALIXTO

Data: 4 / 7 / 17

1) Dadas as equações a seguir, faça o que se pede:

i) 2x + 3y = 10 (2, 2)

ii) -3x + 5y = 0 (0, 0)

iii) 3x + 6y = 7 não tem solução

iv) -5x + 10y = 0 (2, 1)

v) 10x + 15y = 60 (3, 2)

vi) 97x + 17y = 1 (−7, 40)

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

FIGURA 4 – Generalização das soluções das Equações Diofantinas – "Calixto"

a) Terá soluções inteiras sempre que o mdc dos coeficiênts de x e y dividir o resultado da equação.

b) Sim

c) Sim

d) $\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right)$

i) $2 + 3t, 2 - 2t \quad t \in \mathbb{Z}$

ii) $5t, 3t \quad t \in \mathbb{Z}$

iii) não tem solução inteira.

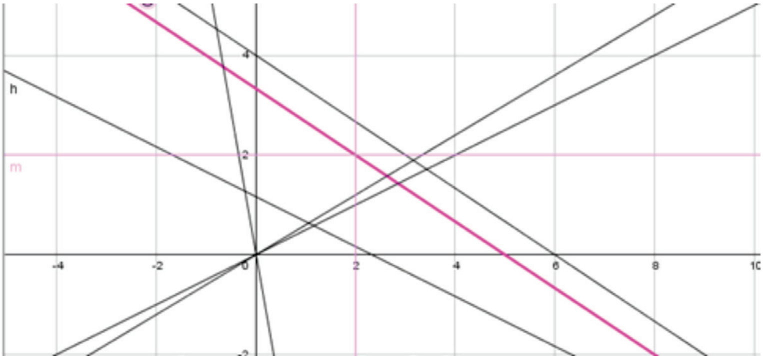
iv) $2 + 2t, 1 + 1t \quad t \in \mathbb{Z}$

v) $3 - 3t, 2 + 2t \quad t \in \mathbb{Z}$

vi) $-7 + 17t, 40 - 97t \quad t \in \mathbb{Z}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

FIGURA 5 – Gráficos das Equações Diofantinas – Licenciando "Calixto"



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Calixto mostra em suas respostas a construção de um saber científico, evidenciado por suas percepções e visualizações a respeito das peculiaridades de cada EDL. Destacamos a sua solução particular para a equação 97x + 17y = 1, dada pelo par ordenado (x0, y0) = (-7, 40) *(ver figura 3)*. Essa solução foi apresentada pelo aluno a partir da construção do gráfico no Geogebra; não tendo sido utilizado nenhum outro método, como tentativa e erro, divisão euclidiana, equação de congruência e/ou outros. Como aponta Bairral (2015), o uso de geometria dinâmica, possibilita as descobertas relacionadas a um determinado conceito, a dinamicidade na visualização e a verificação de propriedades. Essa solução particular que não é simples de ser determinada, tendo sido facilitada pelo uso do software Geogebra, nos mostra que de fato o uso da tecnologia favoreceu a compreensão do conteúdo de EDL, em sua forma gráfica, por esse licenciando.

Observamos também que essa tarefa favoreceu ao aluno modos de articular o saber científico com o saber escolar, pois as figuras 3 e 4, mostradas anteriormente, nos apontam que a solução particular de cada equação, observada com o auxílio do gráfico, é depois generalizada em sua forma geral. Mais uma vez destacando a equação 97x + 17y = 1, observamos a correta parametrização feita pelo licenciando, escrita como: -7 + 17t, 40 – 97t, t ∈ Z *(ver figura 4)*. Assim, a análise e interpretação dos gráficos por meio do software Geogebra, ganha destaque com o saber científico, evidenciado na correta generalização feita pelo aluno. Acreditamos que esse futuro docente, tornará mais rica suas discussões em sala de aula, com o uso de recursos que facilitem a compreensão de seus alunos sobre conteúdos matemáticos, do mesmo modo que ele experimentou em sua formação. Ao vivenciar uma variedade de experiências, pelas quais (re)construiu seus próprios saberes de EDL esse licenciando deram indícios de ter adquirido um saber próprio para o ensino, entendido como o saber pedagógico do conteúdo.

Conversando com o leitor

Caro colega,

Com essas atividades de EDL no laboratório desejamos mostrar que a formação inicial não deve se resumir apenas ao ensino do conteúdo matemático formalizado, mas precisa propiciar reflexões sobre os saberes científico e escolar, com vistas à construção de um saber de matemática para o ensino. Para nós pesquisadores, uma das formas de permitir essa construção é a partir das experiências com os saberes emergentes em discussões coletivas. Assim, essa atividade no Laboratório de Informática não deve se resumir somente à construção do gráfico de uma EDL, mas deve ser mais um momento para suscitar discussões coletivas para o ensino. Em nossa experiência percebemos que as reflexões feitas pelos licenciandos com o uso do Geogebra permitiram ao grupo a construção e reflexão de novos saberes desse conteúdo, ao se colocarem numa perspectiva de professores da educação básica.

Esses saberes posteriormente farão diferença em seu modo de ensinar, quando tornarão, por exemplo, o conteúdo de sistemas de equações compreensível a seus alunos, seja pelo uso das ferramentas escolhidas para seu trabalho ou pela intenção de ensino que terá em cada tarefa proposta.

Aproveite para dialogar com os licenciandos sobre importantes relações entre álgebra e geometria com vistas ao ensino. Perguntas como: **Todos os pontos da reta são soluções da equação?** propiciarão uma discussão e um retorno do que foi compreendido sobre essas equações, o que dará oportunidade retornar alguns pontos que não ficaram claros. Por exemplo, a partir do gráfico obtido no Geogebra, argumentar com eles que todos os pontos da reta são soluções da equação, mas nem todas as soluções são inteiras. Complete comentando que o conjunto solução da EDL é um subconjunto de Z e é discreto.

Esse encontro pode ser também um momento importante para verificar se os saberes científicos foram construídos, pois como sugerimos com a letra “a” dessa atividade, quando perguntamos se as equações podem ou não ter soluções inteiras, os licenciandos precisarão explicar se as equações têm ou não solução. Para responderem a esta questão recorrerão às demonstrações formais trabalhadas anteriormente.

Acreditamos que o saber escolar auxiliado pelo Geogebra, será articulado com o saber científico, evidenciado na generalização que o licenciando deverá fazer para responder a solução geral de cada EDL. Desse modo o futuro docente, poderá utilizar em sala de aula recursos que facilitem a compreensão de seus alunos sobre conteúdos matemáticos, do mesmo modo que ele experimentou em sua formação.

Seria aconselhável verificar a ideia que os licenciandos têm sobre o uso da tecnologia nas aulas de Matemática. Uma pergunta que auxiliaria nesta questão seria: **De que forma você avalia a utilização do software Geogebra para o ensino e aprendizagem de EDL?**

Peça a eles que enviem a resposta por e-mail. Sugerimos que essas respostas gerem uma lista que seja mostrada aos alunos em outro momento, para incentivar futuras discussões sobre a construção de uma matemática para o ensino. Isso lhes mostrará que a matemática que aprendem na formação inicial não é diferente da matemática que ensinam em sala de aula, mas que a diferença está em torna-la compreensível ou não aos alunos da educação básica.

7

SUGESTÕES DE OUTRAS ATIVIDADES E LEITURAS

7 Sugestões de outras atividades e leituras

SUGERIMOS QUE outras atividades possam ser desenvolvidas ao longo dos encontros, de acordo com a disponibilidade e o grupo a ser trabalhado. Logicamente, essas atividades são muitas e diversas, cabendo ao formador a escolha de acordo com os objetivos do ensino. Trazemos a seguir três possíveis atividades que poderiam servir de estudo e investigação pelos licenciandos na tarefa de refletirem e construírem uma matemática para o ensino de EDL.

Vamos às sugestões!

1) Expresse o número 100 como uma soma de inteiros positivos, de modo que:

a) um seja múltiplo de 7 e o outro seja múltiplo de 13;
b) um seja múltiplo de 7 e o outro seja múltiplo de 11.

2) Ao entrar num bosque, alguns viajantes avistam 37 montes de maçã. Após serem retiradas 17 frutas, o restante foi dividido igualmente entre 79 pessoas. (Problema de Mahaviracarya, matemático hindu). (Domíngues e Iezzi - 2003).

Pergunta-se:

a) Qual a equação que expressa o problema?
b) Qual a quantidade de maçãs que coube a cada pessoa?
c) A solução encontrada para a equação é única? Explique
d) É possível generalizar a solução da equação da letra (a)? Se sim, qual a forma geral que expressa a solução do problema?

3) Considere a equação: $5x + 13y = 323$.

a) Encontre todos os valores positivos de x e y que sejam soluções dessa equação.
b) Quais são os valores de x e y para que a soma $x + y$ seja a menor possível?

Indicações de Leituras para enriquecer o estudo das EDL

COSTA, E. S. **As equações diofantinas lineares e o professor de Matemática do ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2007.

OLIVEIRA, S. De A. **Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática.** 115f. : Il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), PUC/MG, 2010.

POMMER, W. M. **EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio.** 2008. 155f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, PUC/SP.

VANSAN, A. H. **Equações Diofantinas: Um projeto para a sala de aula e o uso do Geogebra.** Dissertação de mestrado profissional em Rede Nacional. Maringá, 2014.

8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

8 Considerações finais

A CONDUÇÃO deste trabalho, culminando nesse livro, procurou valorizar o trabalho coletivo na formação inicial ao desenvolver a teoria de EDL com vistas ao ensino. A interação entre os alunos, bem como entre pesquisadores e alunos, tinha como suporte o processo dialógico de aprendizagem e visava uma participação ativa dos licenciandos com intuito de que eles construíssem seus modos de produzir matemática. Além disso, durante o desenvolvimento do trabalho, conduzíamos nossa pesquisa de modo a refletir possibilidades de articular o saber científico com o saber escolar, com a certeza de que esse é um conhecimento essencial ao professor, para que ao trabalhar conceitos de forma elementar os tornem compreensíveis e significativos para os alunos.

Alguns princípios foram estabelecidos para caracterizar nossa formação, sendo eles:

I) ser professor exige saberes próprios;
II) a sala de aula como espaço de produção de conhecimento;
III) valorização da construção de saberes para o ensino na licenciatura articulados à prática profissional docente;
IV) discussões coletivas de conceitos como processo de formação;
V) valorização do licenciando como protagonista na construção de práticas matemáticas.

Esperamos com esse livro auxiliar o formador de professor no planejamento de suas aulas, apresentando um possível caminho para o ensino e aprendizagem de EDL que valorize as produções dos alunos, com o objetivo de construção de uma matemática para o ensino.

Acreditamos que nos cursos de licenciatura a matemática científica deva estar articulada à matemática escolar, o que pode ser favorecido por momentos de discussões coletivas sobre a matemática que advêm da experiência dos alunos como estudantes do ensino fundamental e médio, sobre a que aprendem na graduação e por suas reflexões sobre as possíveis formas de se ensinar matemática na educação básica.

Não trazemos aqui ideias prontas e acabadas sobre a construção da matemática para ensinar, desejamos apontar possíveis caminhos para a reflexão dessa matemática.

Nossos estudos apontam que a formação inicial é o espaço para o desenvolvimento dos saberes ligados à cultura da profissão professor, pelo fato de que é na licenciatura que o licenciando tem a oportunidade de trazer seus saberes de aluno do ensino fundamental e médio, aprofundar ou (re) construir esses saberes e os colocar numa perspectiva de ensino em sala de aula.

Assim desejamos que nas aulas da Licenciatura o formador tenha um olhar para o licenciando, de um sujeito em formação, único, que possui saberes e que está ali para aprender ou (re) aprender para ensinar.

Caro colega, esse trabalho não termina aqui. Suas percepções sobre o grupo que está trabalhando são fundamentais para que surjam outras opções de organização e desenvolvimento da tarefa de construir uma matemática para ensinar EDL e outros temas da Álgebra.

Sucesso no seu trabalho!

Referências

BAIRRAL, M. A. Pesquisas em Educação Matemática com Tecnologias Digitais: algumas faces da interação. **Revista Perspectivas da Educação Matemática** – UFMS, Campo Grande, v.8, p. 485-505, 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974, 488 p.

CADE, N. V. L. **Construção coletiva de uma matemática para o ensino de Equações Diofantinas Lineares na formação inicial de professores**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), IFES-ES, 2018.

COSTA, E. S. **As equações diofantinas lineares e o professor de Matemática do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2007.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

DAVIS, B.; RENERT, M. **Mathematics-for-Teaching as shared dynamic participation for the Learning of Mathematics**, v. 29, n.3, p. 37-43, 2009.

______________________. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n.2, p. 245- 265, Feb, 2012.

______________________. **The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics**. New York: Routledge, 2014.

DAVIS, B. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea. **Anais**... Seoul, Korea: ICME, 2012.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo. Atual, 1991.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**: volume único. São Paulo: Atual, 2003.

GATTI, B. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

GIRALDO, V.; RANGEL, L.; MENEZES, F.; QUINTANEIRO, W. (Re) construindo saberes para o ensino a partir da prática: investigação de conceito e outras ideias. In: VI Seminário Nacional de História e Investigações de/em aulas de matemática. SHIAM, 6., 2017, Campinas. **Anais** ... Campinas: 2017, p. 1-18.

KLEIN, F. (2009). **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior**. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (orgs). **A formação do professor que ensina Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 7 – 26.

OLIVEIRA, S. De A. **Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de**

duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática. Belo Horizonte, 2010. 115f. : Il.

PAIVA, M. A. V. O professor de Matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (ORG). **A Formação do professor que ensina Matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autentica 2006, p. 80-111.

PEREIRA, R.; PAIVA, M. A. e FREITAS, R. **A transposição didática na perspectiva do saber e da formação do professor de matemática**. Educação Matemática Pesquisa, v. 20, n. 1, p. 41-60, São Paulo, 2018.

POMMER, W. M. **Equações diofantinas lineares**: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. 2008. 155f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, PUC/SP.

RANGEL, L.; MACULAN FILHO, N.; GIRALDO V. Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 8(2), p. 42-70, Junho, 2015. ISSN 2176-5634. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/283/2918>. Acesso em: 04/10/2017.

RANGEL, G. L. (2015) **Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo:** estabelecendo relações em um estudo colaborativo. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) UFRJ/RJ.

RESENDE, M. R. (2007) **Re-significando a disciplina Teoria dos Números naformação do professor de Matemática na licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC/SP.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L.S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de La Nueva reforma. Profesorado: **Revista de currículum y formación del profesorado**, v. 9, n. 2 2005. Disponível em:< http://www.ugr.es/local/recfpro/Rev92ART1.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2017.

SILVA, V. V. Da. **Números Construção e Propriedades**. 1ª Edição. Goiânia: UFG, ano 2003.

VANSAN, A. H. **Equações Diofantinas**: Um projeto para a sala de aula e o uso do Geogebra. Dissertação de mestrado profissional em Rede Nacional. Maringá, 2014.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed. 2006.

ZERHURSEN, A.; RAKES, C.; MEECE, S. (1999). **Diophantine Equations**. Disponível em <http://math.as.uky.edu>/~carl/ma330/projects/diophanfin.html>. Acesso em: 19/02/2017.

Agência Brasileira do ISBN
9 788582 633854
ISBN nº 978-85-8263-385-4