APÊNDICE A CADERNO DE ATIVIDADES

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

COMPOSIÇÃO E/OU DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO:
VAN HIELE, UMA OPÇÃO

Renato Frade
Eliane Scheid Gazire

INTRODUÇÃO

O presente trabalho, resultado decorrente de um processo de pesquisa no Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da PUC-Minas, foi orientado e sugerido pela professora Eliane Scheid Gazire e tem como objetivo apresentar ao educador uma possibilidade de intervenção pedagógica no ensino da Matemática, mais especificamente na composição e/ou decomposição de figuras planas na resolução de problemas geométricos.

Neste módulo são apresentadas sugestões de vinte questões envolvendo o tema, com a sua resolução, orientações e comentários para o professor trabalhá-las em sala de aula. As atividades foram preparadas dentro de uma linha metodológica voltada para a resolução de problemas, definidas e testadas durante o processo da pesquisa. Após o contato com essas questões, muitas outras podem ser preparadas pelo próprio usuário que tenha interesse docente. Acompanha este módulo um CD com os problemas para serem aplicados na sala de aula.

A intenção é que este material, como modelo didático-metodológico, contribua para o desenvolvimento de habilidades e de conceitos geométricos, de raciocínio lógico e, em suma, de compreensão do processo de composição e/ou decomposição de figuras planas.

Neste Caderno de Atividades, apresentaremos sugestões de questões para que os professores de Matemática trabalhem com os alunos do Ensino Médio. Embora tenha sido feita uma tentativa de colocá-las em ordem crescente de dificuldade, o professor, conhecendo as potencialidades dos seus alunos, é que deverá decidir se apresentará esse ou aquele problema ao seu educando ou, ainda, a ordem a ser disponibilizada.

Acreditamos que, após a leitura deste trabalho, professores e estudantes de Matemática estarão mais bem preparados para desenvolver atividades que envolvam a composição e/ou decomposição de figuras planas.

Os autores.

PREFÁCIO

Prezado (a) leitor (a):

Um dos principais objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno a pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. (DANTE, 2002, p.11).

Sugerimos, como proposta de trabalho pedagógico, atividades pautadas no modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que sugere uma organização do trabalho de modo a propiciar uma aprendizagem significativa das habilidades geométricas, possibilitando ao aluno da 3ª série do Ensino Médio a competência necessária à resolução de problemas por meio da composição e/ou decomposição de figuras planas.

O modelo consiste em cinco níveis ascendentes de compreensão, descrevendo características do processo de pensamento. O progresso de um nível para o seguinte se dá acerca da vivência de atividades adequadas, não dependendo da idade ou maturação do aluno (LOPES; NASSER, 1997).

O modelo Van Hiele é fundamentado numa visão que valoriza a aprendizagem da Geometria ao longo de todos os anos de Ensino Básico, uma vez que se move sequencialmente a partir do nível inicial (visualização), até o nível mais elevado (rigor), sendo cada nível caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagens próprias. Por isso, durante o estudo, é necessário um acompanhamento sistemático por parte do educador, no sentido de garantir ao educando atividades por meio das quais ele possa vivenciar cada nível de raciocínio a partir do domínio dos níveis anteriores. Assim, deve-se estar atendo aos cinco níveis de compreensão, a saber:

- ***Visualização***: Apenas a forma de uma figura é percebida.
- ***Análise***: A figura é analisada e seus componentes e propriedades são descobertos.

- ***Dedução informal***: Percebe-se que uma figura pode ter mais do que um nome (inclusão de classes). Exemplo: um quadrado também é um retângulo (e um paralelogramo!).
- ***Dedução***: Constrói-se demonstrações e não apenas as memoriza; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; distingue uma afirmação e sua recíproca.
- ***Rigor***: A Geometria é vista no plano abstrato. Este nível recebe pouca atenção dos pesquisadores, por isso é menos desenvolvido. Até mesmo Van Hiele, fundamentador do modelo que leva seu nome, se dedicava mais aos quatro primeiros níveis do que a este.

Vale ressaltar, ainda, que, são os desafios propostos pelo professor que vão orientar o trabalho do discente, tornando-o capaz de realizar quaisquer atividades que envolvam as habilidades adquiridas. Essas considerações mostram que o professor interessado na evolução cognitiva de seus alunos não pode apenas restringir-se ao conhecimento do conteúdo a ser desenvolvido em sala de aula. É necessário buscar estratégias de ensino que favoreçam o interesse e a motivação dos alunos.

Por fim, este trabalho tem como objetivo auxiliar o docente no exercício de seu ofício, a desenvolver habilidades geométricas baseando-se no modelo Van Hiele.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

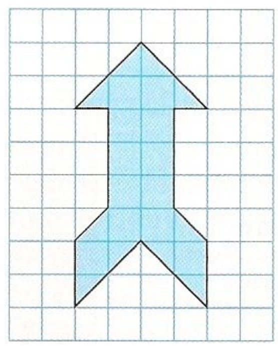
Considerando como unidade de medida o , a área destacada da figura corresponde a quantos quadrinhos?

A) 10

B) 12

C) 17

D) 22



Resolução

Alternativa C

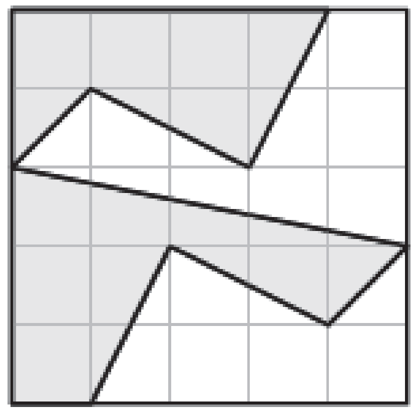
Pelo fato da figura estar sobre a malha quadriculada espera-se que os alunos optem por contarem quadradinho por quadradinho, uma vez que a referência dada  representa a área de um quadradinho. Logo, conta-se quantos quadradinhos a figura tem e obtém a resposta.

Portanto, alternativa C.

Nesse caso, sugere-se o emprego do modelo Van Hiele que explore a visualização e a analise da figura.

ATIVIDADE 2

Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

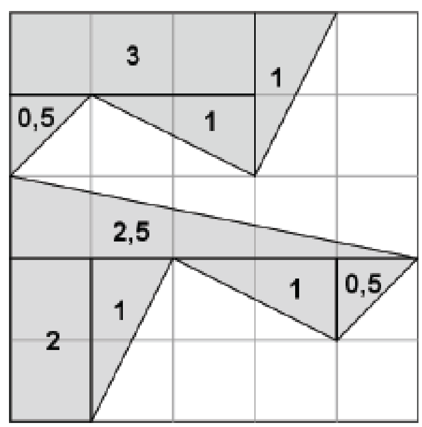


A) 10 cm^2
B) 12,5 cm^2
C) 14,5 cm^2
D) 16 cm^2

Resolução

Alternativa B

Uma solução é observar que é possível sobrepor a região branca do quadrado à região cinza, bastando para isso girá-la 180º ao redor do centro do quadrado. Logo elas têm a mesma área, que é igual á metade da área do quadrado, ou seja, $25 \div 2 = 12{,}5 cm^2$.

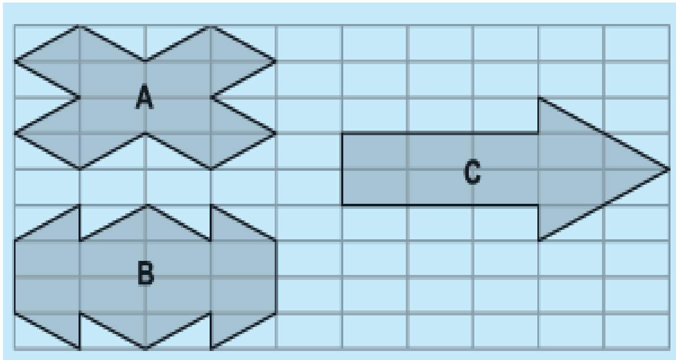


Outra solução é calcular a área da região cinza por partes, como na figura ao lado. Para isso, usamos repetidamente o fato de que a diagonal de um retângulo divide esse retângulo em dois triângulos de mesma área. Na figura, **decompomos** a região cinza em triângulos e retângulos, indicando em cada um sua área. Logo a área da região cinza é $1 + 1 + 3 + 0{,}5 + 2{,}5 + 2 + 1 + 0{,}5 = 12{,}5 cm^2$.

Nessa atividade sugere-se uma visualização cuidadosa das figuras inseridas na malha, seguida de uma análise criteriosa e da aplicação da dedução.

ATIVIDADE 3

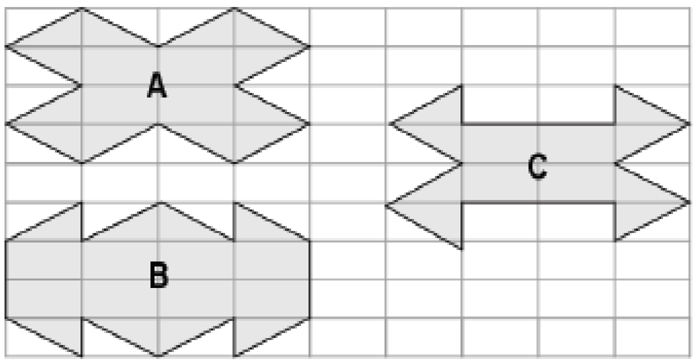
Na malha retangular ao lado, o perímetro da figura A é 156 cm e o da figura B é 144 cm. Qual é o perímetro da figura C?



A) 125 cm
B) 144 cm
C) 160 cm
D) 172 cm

Resolução

Alternativa B

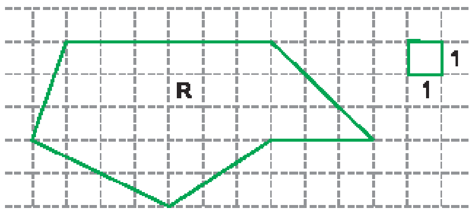


Sejam b, h e d, respectivamente, os comprimentos da base, altura e diagonal dos retângulos da malha. O perímetro da figura A é igual a $12d$, donde concluímos que $d = \dfrac{156}{12} = 13$. O perímetro da figura B é igual a $8h + 8d$, donde concluímos que $144 = 8h + 8d$ e $h = \dfrac{144 - 8d}{8} = 5$. O teorema de Pitágoras diz que $d^2 = b^2 + h^2$ e segue que $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Finalmente o perímetro da figura C é igual a $6b + 4h + 4d$, ou seja, $6 \times 12 + 4 \times 5 + 4 \times 13 = 144$ cm.

Já nessa atividade faz-se necessário o emprego do modelo de van Hiele presente na resolução de problemas que trabalhe com a visualização, a análise e a dedução informal.

ATIVIDADE 4

Uma região R a ser cultivada está representada na malha quadriculada seguinte.



Se a malha é quadriculada com quadrados de lados iguais a 1 km, então, a **área**, em km^2, da região a ser cultivada, é:

A) 29

B) 31

C) 34

D) 40

Resolução

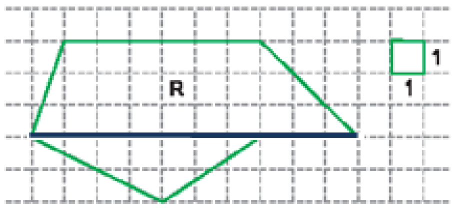
Alternativa B

Essa é uma questão que verifica a capacidade de os alunos **decomporem a figura** em polígonos triangulares e quadrangulares. Sendo assim, os pré requisitos são básicos (área do triângulo, área do retângulo, área do quadrado, área do trapézio etc). Para essa questão são apresentadas duas soluções, a seguir.

Observe que para resolver essa atividade é possível uma intervenção que trabalhe a visualização, a análise e a dedução informal, conforme o modelo Van Hiele.

Primeira solução

Mediante esses conhecimentos, uma possível solução é iniciar a resolução decompondo a figura em um trapézio e em um triângulo.



Considerando A_R, como a área da região a ser cultivada, tem-se:

$$A_R = Área_{Trapézio} + Área_{Triângulo}$$

$$A_R = \frac{(10+6)\cdot 3}{2} + \frac{7\cdot 2}{2}$$

$$A_R = 24 + 7$$

$$A_R = 31\ km^2$$

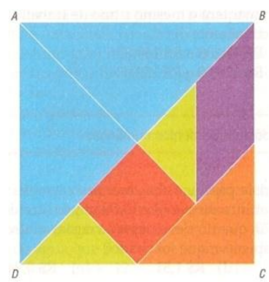
Utilizando essa estratégia de decomposição, têm-se outras maneiras de se chegar à resposta.

Segunda solução

Pelo fato de a figura estar sobre a malha quadriculada, esperava-se um alto índice de acerto, pois muitos alunos, ao se depararem com esse tipo de questão, optam por contarem quadradinho por quadradinho, uma vez que a referência dada (1x1) representa a sua área. Logo, conta-se quantos quadradinhos a figura tem e, por aproximações, obtém-se a resposta.

ATIVIDADE 5

O *tangram* é um conhecido quebra-cabeça que consiste em um quadrado composto por sete polígonos: cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo.



Com um *tangram*, em que AB = 10 cm, construímos este "martelo":

A **área** do "martelo" mede:

A) $100\ cm^2$

B) $50\sqrt{2}\ cm^2$

C) $100(\sqrt{2}-1)\ cm^2$

D) $50(\sqrt{2}+1)\ cm^2$

Resolução

Alternativa A

Ao construirmos qualquer figura com todas as peças do *tangram* as áreas serão iguais, portanto para descobrir a área do "martelo" basta saber a área do quadrado ($10 \cdot 10 = 100$). Portanto, alternativa A.

Na resolução do problema apresentado, deve-se seguir o modelo Van Hiele quanto à visualização, à analise, à dedução informal e à dedução.

ATIVIDADE 6

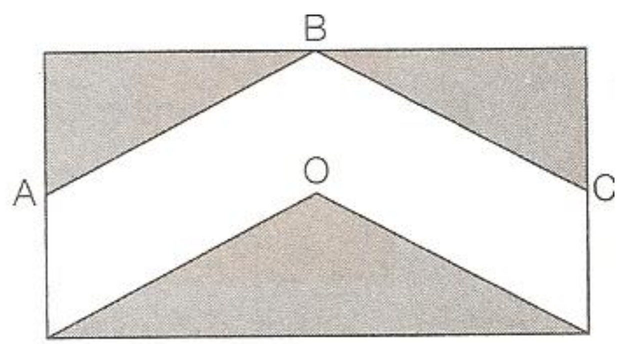
No retângulo a seguir, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. A área da região sombreada é:

A) $\frac{1}{4}$ da área do retângulo.

B) $\frac{1}{3}$ da área do retângulo.

C) $\frac{1}{2}$ da área do retângulo.

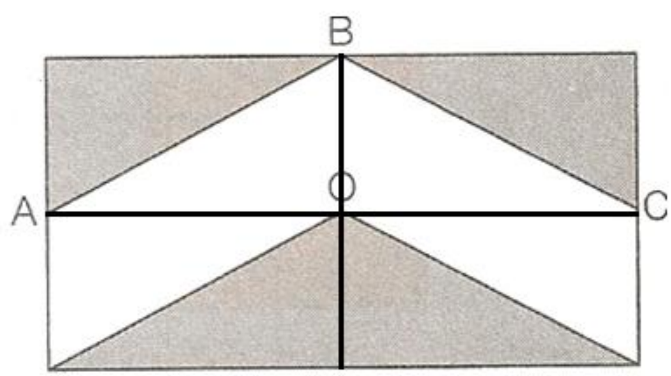
D) $\frac{3}{5}$ da área do retângulo.



Resolução

Alternativa C

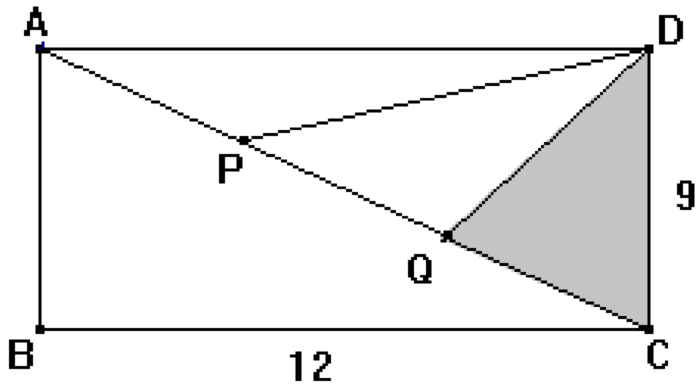
O aluno reconhece que a figura pode ser dividida em quatro partes, percebendo que a região sombreada possui área igual a da região branca, logo, a área sombreada é metade da área do retângulo.



Para a solução do problema pode-se utilizar os níveis de visualização e análise. do modelo Van Hiele.

ATIVIDADE 7

Na figura está representado o retângulo ABCD cuja diagonal AC foi dividida em três partes iguais pelos pontos P e Q:



Considerando-se que $\overline{BC} = 12$ e $\overline{CD} = 9$ é **CORRETO** afirmar que a **área** do triângulo CDQ é

A) 18.

B) 18,75.

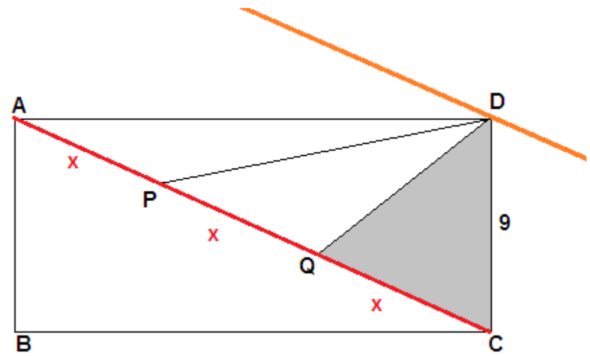
C) 22,50.

D) 45.

Resolução

Alternativa A

Considerem-se as seguintes construções na figura inicial:



Trata-se de um item de nível elevado, pois o aluno precisa ter uma abstração capaz de visualizar uma reta, passando por D, paralela ao segmento AC.

Entende-se, assim, que todo segmento perpendicular às duas retas é a altura. Inferir essa definição não é fácil. Além disso, o aluno deve ter o domínio de que a área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base. Finalmente, quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. A questão apresenta como habilidades cognitivas primordiais a compreensão, interpretação e extrapolação.

A **decomposição da figura** se faz presente, uma vez que, primeiramente, decompõe-se o retângulo em duas partes iguais, através da diagonal $\overline{AC}$ e, posteriormente, uma nova decomposição em três partes iguais, pois os triângulos ADP, PDQ e QDC possuem mesma base e mesma altura, logo, são congruentes e possuem área igual a 18, portanto alternativa correta é a A.

Portanto, nessa atividade, a visualização, a análise e a dedução informal é de suma importância para a solução da questão apresentada.

ATIVIDADE 8

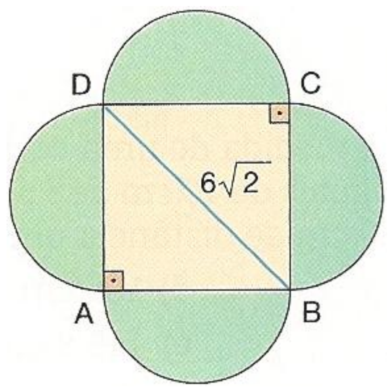
Observando a figura a seguir, na qual ABCD é um quadrado, determine a distância percorrida por uma pessoa que sai do vértice A e percorre os contornos das semicircunferências, retornando ao ponto A. (Observação: Considerar $\pi = 3{,}14$).

A) 36 unidades de comprimento.

B) 37 unidades de comprimento.

C) 37,68 unidades de comprimento.

D) 38,68 unidades de comprimento.



Resolução

Alternativa C

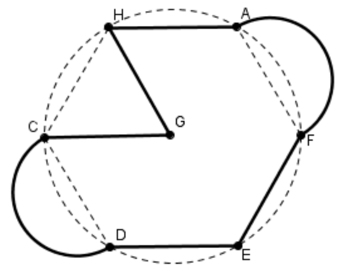
Devemos perceber que o que se pede é o perímetro de quatro semicircunferências. A seguir, reconhecermos que o lado do quadrado é 6, uma vez que a diagonal do quadrado é $6\sqrt{2}$. Logo, o raio r das circunferências é 3, metade do lado do quadrado. Esta questão exige primeiramente, visualização além do reconhecimento da fórmula do comprimento de uma circunferência, $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Sendo assim, calcula-se $C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \quad \Rightarrow C = 18{,}84$. Como são duas semicircunferências, a distância percorrida é $2 \cdot 18{,}84 = 37{,}68$. Portanto, alternativa C.

Nesta atividade, percebem-se os níveis visualização, análise, dedução informal e dedução do modelo Van Hiele.

ATIVIDADE 9

A circunferência circunscrita ao hexágono regular possui raio de 4 cm.



A partir dessa informação, é **CORRETO** afirmar que o **caminho** em negrito mede em cm:

A) $4\pi + 20$

B) $8\pi + 20$

C) 28π

D) 24π

Resolução

Alternativa A

Observa-se que o caminho em negrito da figura representa o seu perímetro.

Para a resolução da mesma, é necessário que o aluno visualize as cordas CD e AF sendo essas os diâmetros das semicircunferências, e tenha conhecimento da fórmula resolutiva do comprimento de uma circunferência e da propriedade de polígonos inscritíveis. Para tanto, o caminho em negrito é calculado da seguinte maneira:

$$Perímetro = 5 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot R$$

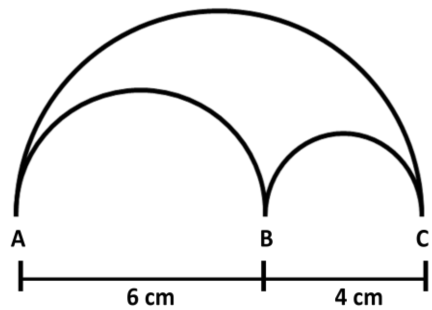
$$Perímetro = 20 + 2 \cdot \pi \cdot 2$$

$$Perímetro = 4\pi + 20$$

Nesta atividade percebem-se os níveis visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 10

Na figura, vê-se uma semicircunferência de diâmetro AC, no qual foram construídas as semicircunferências de diâmetro AB e BC, cujas medidas são 6 cm e 4 cm, respectivamente.



O **perímetro** da região destacada, em cm, é:

A) 5π.

B) 10π.

C) 19π.

D) 20π.

Resolução

Alternativa B

Para resolver essa questão, os alunos precisam ser capazes de visualizar e analisar as informações do texto com a figura, devendo perceber a **decomposição da figura**, reconhecendo que o que se pede é a somatória do perímetro de cada uma das três semicircunferências e não a área, apesar de a figura o induzir a pensar dessa forma.

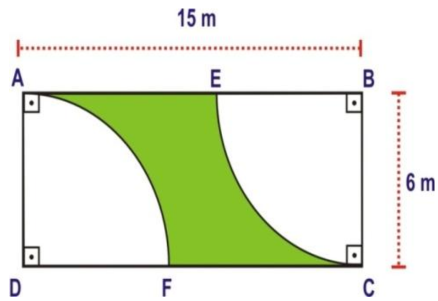
Uma vez memorizado que o comprimento C de uma circunferência é dado pela fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, o perímetro (P) da região sombreada é dado por:

$P = \pi \cdot 5 + \pi \cdot 3 + \pi \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{P = 10}\,\pi$

Nesta atividade percebem-se os níveis visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 11

Na figura, o retângulo ABCD tem dimensões 15m e 6m e os arcos CE e AF têm centros nos vértices B e D, respectivamente.



A **área** da região sombreada, em m², considerando $\pi = 3$, é igual a

A) 81

B) 63

C) 36

D) 18

Resolução

Alternativa C

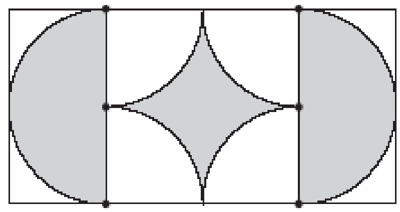
Nessa questão, espera-se que os alunos sejam capazes de visualizar e analisar as informações do texto com a figura. Eles devem, portanto, perceber a **decomposição e composição da figura**, reconhecendo que o que se pede é a área do retângulo menos a metade da área do círculo (composição de duas partes).

Uma vez que a área do retângulo é o produto da base pela altura e que a do círculo é $\pi \cdot .r^2$, a resolução da questão é imediata: 90-54 = 36.

Aconselha-se retomar as definições de círculo, circunferência, quadriláteros, paralelogramos e retângulos, aplicando o modelo Van Hiele quanto à visualização e à análise das figuras apresentadas.

ATIVIDADE 12

Considere que os ângulos de todos os cantos da figura abaixo são retos e que todos os arcos são arcos de circunferências de raio 2, com centros sobre os pontos em destaque:



Nesse caso, a **área** da região sombreada é igual a:

A) 4.

B) 4π.

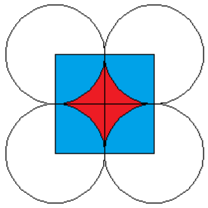
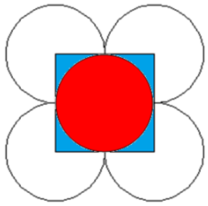
C) 16.

D) 16π.

Resolução

Alternativa C

Considerando as seguintes construções na figura inicial e indicando por A_S a área sombreada, tem-se duas opções de reagrupamento da região sombreada mencionada no texto, quer sejam:

a)  b) 

$$A_S = l^2$$

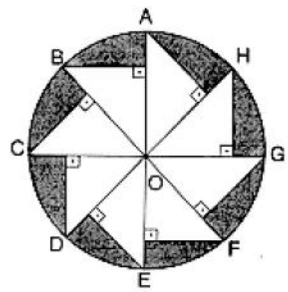
$$A_S = 4^2$$

$$A_S = 16$$

Nesta atividade, estão presentes os níveis Van Hiele, visualização, análise e dedução informal.

ATIVIDADE 13

Observe a figura:



Nela, a circunferência de centro O tem raio r e arcos AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH e HA congruentes. O valor da **área** sombreada, em função de r, é

A) $r^2(\pi - 2)$.

B) $2r^2(\pi - 1)$.

C) $2r^2$.

D) $r^2(\pi - 1)$.

Resolução

Alternativa A

Dado que os arcos são todos congruentes, então, podemos calcular os ângulos centrais:

A circunferência completa mede 360º, ou seja, 360º equivale a 8 arcos, logo, 1 arco equivale a 360º/8, que dá 45º.

Portanto, 45º é a medida de cada um dos ângulos de cada triângulo retângulo. Isso indica que cada triângulo retângulo é isósceles (tem catetos iguais). Então, para cada triângulo:

$$hipotenusa = r\ (raio\ do\ círculo)$$

$$cateto = a$$

$$r^2 = a^2 + a^2$$

$$r^2 = 2a^2$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Percebe-se que na composição de dois triângulos obtém-se um quadrado.

A área sombreada, por sua vez, é obtida pela diferença entre a área do círculo e quatro vezes a área do quadrado, logo:

$$Área\ Sombreada = Área\ do\ Círculo - 4 \cdot Área\ do\ Quadrado$$

Seja A_s a área sombreada.

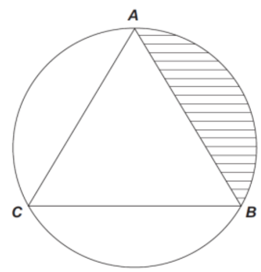
$$A_s = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \qquad A_s = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{r^2 \cdot 2}{4} \qquad A_s = \pi \cdot r^2 - 2r^2$$

$$A_s = r^2(\pi - 2)$$

Os níveis visualização, análise, dedução informal e dedução estão presentes nesta atividade.

ATIVIDADE 14

Nessa figura, o triângulo equilátero ABC está inscrito numa circunferência de raio 2:



Então, a **área** da região hachurada é:

A) $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$.

B) $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$.

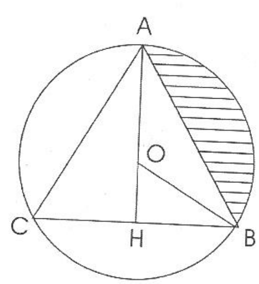
C) $\dfrac{3\pi - 4\sqrt{3}}{3}$.

D) $\dfrac{3\pi - 2\sqrt{3}}{3}$.

Resolução

Alternativa A

Considere as seguintes construções na figura inicial:



A área da região hachurada é igual a um terço da diferença entre a área do círculo e a área do triângulo ABC. Como a única medida fornecida é o valor do raio r, deve-se escrever o lado CB do triângulo, de medida igual a l, e sua altura AH, de medida igual a h, necessários para o cálculo de sua área, em função do raio da circunferência. A altura do triângulo é igual à soma de seu apótema, a = OH, com o raio, r = AO, da circunferência. Assim, deve-se escrever o apótema em função do raio.

O triângulo ABC é equilátero e está inscrito na circunferência. O segmento OH= a = 1, pois representa $\frac{1}{3}$ da altura. Como o segmento AO = $r = 2$, tem-se que $h = 3$.

Utilizando-se do Teorema de Pitágoras, chega-se a:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$2^2 = 1^2 + HB^2$$

$$4 - 1 = HB^2$$

$HB = \sqrt{3}$, logo, o lado do triângulo é $l = 2\sqrt{3}$

$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{1}{3} \cdot \left(\acute{A}rea\ do\ C\acute{\imath}rculo - \acute{A}rea\ do\ Tri\hat{a}ngulo\right)$$

$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot r^2 - \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{1}{3} \cdot \left(4\pi - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{1}{3} \cdot \left(4\pi - \frac{12\sqrt{3}}{4}\right)$$

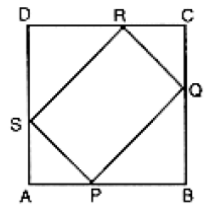
$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{1}{3} \cdot \left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$$

Os níveis de Van Hiele presentes na resolução são: visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 15

Observe a figura:



Nessa figura, ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. O **perímetro** do quadrilátero PQRS é

A) $11\sqrt{3}.$

B) $22\sqrt{3}.$

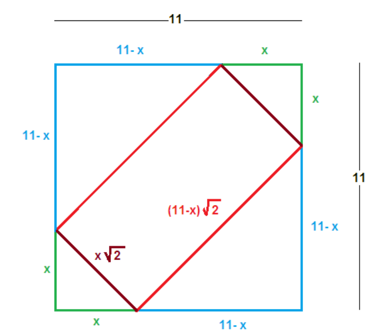
C) $11\sqrt{2}.$

D) $22\sqrt{2}.$

Resolução

Alternativa D

Considerando-se as seguintes construções na figura inicial e indicando por P o perímetro do quadrilátero PQRS, tem-se:



$$P = x\sqrt{2} + (11-x)\sqrt{2} + x\sqrt{2} + (11-x)\sqrt{2}$$

$$P = x\sqrt{2} + 11\sqrt{2} - x\sqrt{2} + x\sqrt{2} + 11\sqrt{2} - x\sqrt{2}$$

$$P = 22\sqrt{2}$$

Os níveis de Van Hiele presentes na resoluçã são: visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 16

Na figura abaixo, os círculos menores são tangentes entre si e aos círculos concêntricos de raio r e R.

A área da região sombreada é:

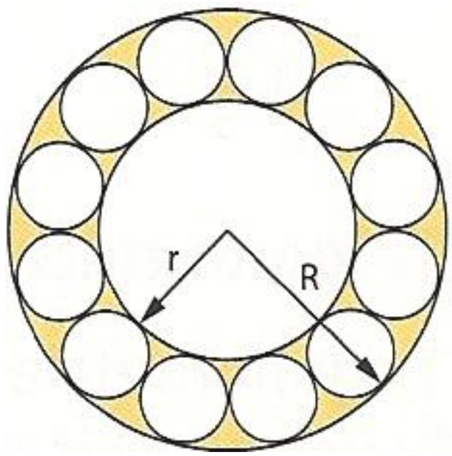
A) $2\pi \cdot (r^2 - R^2 + 3Rr)$.

B) $2\pi \cdot (-r^2 - R^2 + 3Rr)$.

C) $2\pi \cdot (-2r^2 - R^2 + 3Rr)$.

D) $\pi \cdot (r^2 - R^2 + 3Rr)$.

E) $\pi \cdot (-2r^2 - R^2 + 3Rr)$.



Resolução

Alternativa C

Para resolver a questão é necessário que o aluno perceba a área sombreada como sendo a diferença entre o Círculo maior e a somatória do círculo intermediário com os 12 menores:

$$A = \pi \cdot R^2 - \left[\pi \cdot r^2 + 12 \cdot \pi \cdot \left(\frac{R-r}{2}\right)^2\right] \Rightarrow A = \pi \cdot R^2 - \left[\pi \cdot r^2 + 12 \cdot \pi \cdot \left(\frac{R^2 - 2Rr + r^2}{4}\right)\right]$$

$$A = \pi R^2 - [\pi r^2 + 3\pi R^2 - 6\pi Rr + 3\pi r^2] \Rightarrow A = -4\pi r^2 - 2\pi R^2 + 6\pi Rr$$

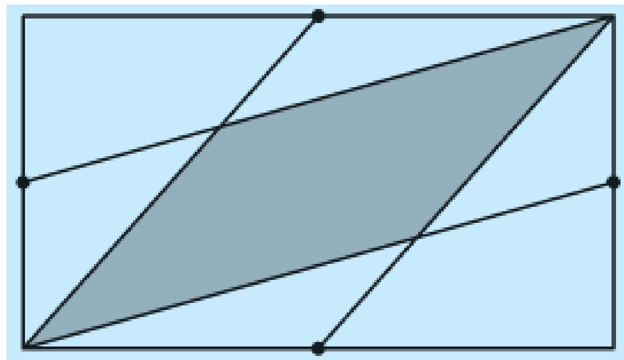
$A = 2\pi\left(-2r^2 - R^2 + 3Rr\right)$. Portanto, alternativa C.

É importante ressaltar que pelo fato de os dados da questão apresentada acima não serem numéricos, dificulta a resolução da questão. Como sugestão de atividades de intervenção pedagógica é interessante discutir questões que facilitem a passagem de dados aritméticos para algébricos.

Os níveis Van Hiele presentes na resolução são: visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 17

A figura mostra um retângulo de área 42 cm^2 com os pontos médios dos lados em destaque. Qual é a área, em cm^2, da região cinza?

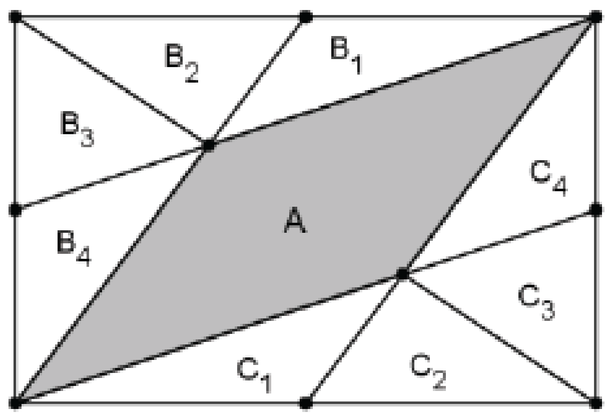


i. 8
ii. 10
iii. 12
iv. 14

Resolução

Alternativa D

Considere a **decomposição** do retângulo indicada na figura, e seja a a área do retângulo. As áreas B_1 e B_2 são iguais, pois correspondem a áreas de triângulos com mesma medida de base e altura; o mesmo ocorre com B_3 e B_4.

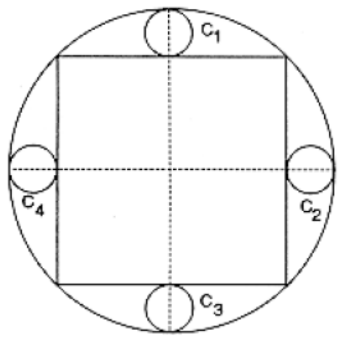


O triângulo retângulo formado por B_1, B_2 e B_3 tem como catetos um lado do retângulo e metade do outro lado; sua área é então $\frac{a}{4}$ e temos $B_1 + B_2 + B_3 = \frac{a}{4}$; o mesmo ocorre com $B_2 + B_3 + B_4$. Logo $B_1 + B_2 + B_3 = B_2 + B_3 + B_4$, o que implica em $B_1 = B_4$. Logo $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$ e segue que $B_1 + B_1 + B_1 = 3B_1 = \frac{a}{4}$, donde $B_1 = \frac{a}{12}$. Por simetria, todas essas conclusões se aplicam a C_1, C_2, C_3 e C_4. Logo $A = a - 8 \times \frac{a}{12} = \frac{a}{3} = \frac{42}{3} = 14\,cm^2$.

Os níveis Van Hiele presentes na resolução são: visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 18

Observe a figura:



Nela, a circunferência maior C tem raio 2, e cada uma das circunferências menores, C_1, C_2, C_3 e C_4, é tangente a C e a um lado do quadrado inscrito.

Os centros de C_1, C_2, C_3 e C_4 estão em diâmetros de C perpendiculares a lados do quadrado.

A soma das áreas limitadas por essas quatro circunferências menores é

A) $8\pi(3+2\sqrt{2})$.

B) $\pi(3+2\sqrt{2})$.

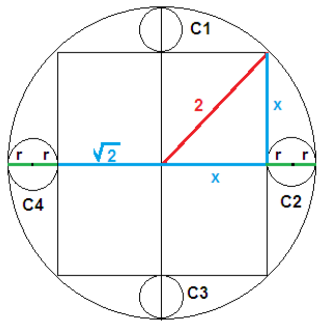
C) $\pi(3-2\sqrt{2})$.

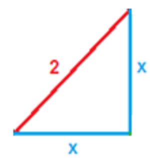
D) $2\pi(3-2\sqrt{2})$.

Resolução

Alternativa D

Considerando as seguintes construções na figura inicial e, posteriormente, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:





$$x^2 + x^2 = 2^2$$

$$2x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$2r + \sqrt{2} = 2$$

$$r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} \right)$$

$$A = \pi \cdot \left(6 - 4\sqrt{2}\right)$$

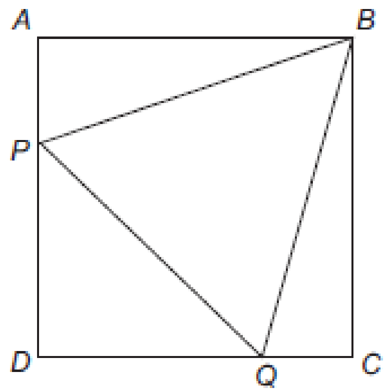
$$A = 6\pi - 4\sqrt{2}\pi$$

$$A = 2\pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Como sugestão, desenvolver atividades que envolvam figuras inscritíveis e circunscritíveis em diferentes níveis de dificuldade, conforme os níveis Van Hiele: visualização, análise e dedução informal e dedução.

ATIVIDADE 19

Observe esta figura:



Nessa figura, o quadrado ABCD tem área igual a 1; o triângulo BPQ é equilátero; e os pontos P e Q pertencem, respectivamente, aos lados AD e CD.

Assim sendo, a **área** do triângulo BCQ é:

A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

B) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

C) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

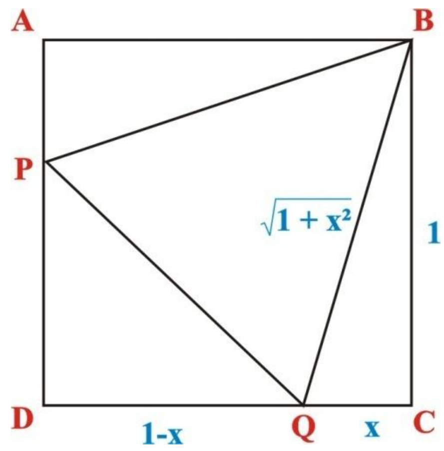
D) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

Alternativa C

Para a resolução desta questão, é necessário que o aluno tenha conhecimentos sobre os seguintes conteúdos: relações métricas no triângulo retângulo e área de triângulos e quadriláteros.

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 1 e BPQ é um triângulo eqüilátero, cujo lado é equivalente à hipotenusa do triângulo retângulo BCQ, de altura 1 e base x:



A partir do Teorema de Pitágoras, conclui-se que $BQ = \sqrt{1+x^2}$. Esse valor é equivalente a PB e PQ.

A partir do triângulo retângulo DPQ, tem-se que:

$$(1-x)^2 + (1-x)^2 = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

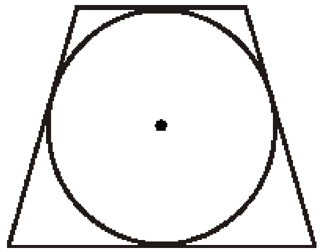
As raízes da equação acima são $2 \pm \sqrt{3}$

Para essa situação, tem-se como condição de existência x < 1. No entanto, a solução da equação é dada por x = $2-\sqrt{3}$, consequentemente, a área do triângulo BCQ é igual a $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Portanto, a alternativa correta é a letra C.

Sugerimos, como atividade de intervenção pedagógica, questões envolvendo a **decomposição de figuras planas**, enfatizando o Teorema de Pitágoras, a área de polígonos associadas à condição de existência de um dado problema, em que os níveis Van Hiele visualização, análise e dedução informal e dedução estejam presentes.

ATIVIDADE 20

O trapézio isósceles da figura tem um ângulo agudo de 60° e área $\frac{32\sqrt{3}}{3}$. A **área** do círculo inscrito nesse trapézio é:



A) π

B) 2π

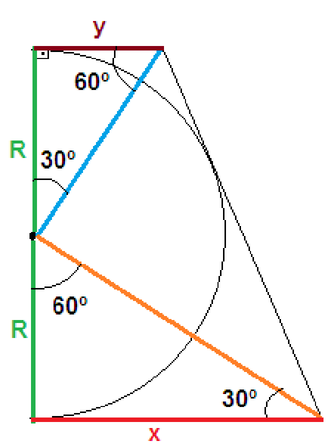
C) 3π

D) 4π

Resolução

Alternativa D

Considerando-se as seguintes construções na figura inicial, observa-se que, para se obter a área do círculo, é necessário determinar o raio do mesmo:



Sendo assim, utiliza-se a trigonometria básica para obter:

$$tg\,30^{\circ} = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \cdot R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = R\sqrt{3}$$

$$tg\,30^{\circ} = \frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

Dado que a área do trapézio é de $\frac{32\sqrt{3}}{3}$, e mediante a figura inicial (metade da figura, uma vez que a figura é simétrica), tem-se:

$$\frac{(Base\ \ Maior\ + \ Base\ \ menor) \cdot altura}{2} = \frac{32 \cdot \sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{\left(R \cdot \sqrt{3} + \dfrac{R \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \cdot 2R}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3\sqrt{3}R + R\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 2R \cdot 6 = 64\sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\sqrt{3}R}{3} \cdot 12R = 64\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = 2$$

Sabendo-se que a área do círculo é dada pela fórmula: $A = \pi \cdot R^2$, conclui-se que $A = 4 \cdot \pi$.

Sugerimos como atividade de intervenção pedagógica, questões envolvendo a **decomposição de figuras planas**, enfatizando o Teorema de Pitágoras, as áreas dos quadriláteros e do círculo e a trigonometria básica, focadas nos níveis Van Hiele: visualização, análise e dedução informal e dedução.