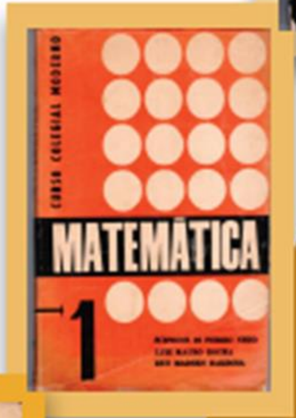
EQUAÇÃO/FUNÇÃO EXPONENCIAL EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1930 A 1980.

Apontamentos para formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins

Rogeria Teixeira Urzêdo Queiroz
Elenice de Souza Lodron Zuin



PUC - Minas 2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

EQUAÇÃO/FUNÇÃO EXPONENCIAL EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1930 A 1980: apontamentos para formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins

ROGERIA TEIXEIRA URZÊDO QUEIROZ
ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN

APRESENTAÇÃO

O material que ora apresentamos é parte integrante da pesquisa de dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais e denomina-se "*Equação/função exponencial em livros didáticos no Brasil (1930-1980)*".

É nosso desejo que esses apontamentos possam contribuir para a formação inicial e continuada dos professores de Matemática e áreas afins, de forma especial, na área de História da Educação Matemática. A nossa atenção foi direcionada ao conteúdo equação/função exponencial e o nosso intuito foi verificar a forma pela qual esse tópico foi abordado por alguns autores de livros didáticos, dentro de um período predeterminado que abarcou a reforma Francisco Campos, em 1931, até a lei 5692 de 1971, integrando o período a partir da década de 1960, quando o ensino brasileiro vivenciou o denominado Movimento da Matemática Moderna.

Como ponto de partida, faremos uma abordagem histórica das *funções*. Em seguida, as reformas educacionais que ocorreram entre 1930 e 1980. Em relação aos textos didáticos selecionados, analisamos o conteúdo proposto, da década de 1930 até a de 1970.

Foi realizado um recorte da análise dos livros didáticos, tomando cinco das quinze obras selecionadas – apresentadas na dissertação – as quais julgamos representativas, para dar um panorama dos conteúdos escolares *equação e função exponencial* a partir de um viés histórico.

É nossa expectativa que esses apontamentos possam trazer informações complementares, tanto para aqueles que estão em formação, a exemplo dos graduandos em cursos de licenciatura, como para educadores que já fazem do seu dia a dia o prazer de levar o conhecimento aos seus alunos.

As autoras

SUMÁRIO

1. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Como ponto de partida, realizamos um breve levantamento histórico sobre as funções e de forma especial sobre as funções exponenciais. Chervel (1990) considera importante a história de um conteúdo escolar quando se percebe a evolução do mesmo, as modificações que ocorreram em um determinado período e o estabelecimento de um elo entre o seu ensino e suas finalidades.

> A descrição de uma disciplina não deveria então se limitar à apresentação dos conteúdos de ensino, os quais são apenas meios utilizados para alcançar um fim. Permanece o fato de que o estudo dos ensinos efetivamente dispensados é a tarefa essencial do historiador das disciplinas. Cabe-lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução da didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício (CHERVEL, 1990, p.192).

Podemos dizer que a ideia de associar funções a algumas atividades do dia a dia não é recente. É bem provável que, antes mesmo da existência dos números, o homem tenha relacionado uma pedra para cada animal do seu rebanho e, assim, realizado uma correspondência que hoje denominamos de biunívoca entre pedra e animal.

Na Babilônia, foram encontrados mais de meio milhão de tábuas ou tabletes de argila, sendo 400 delas com conteúdos matemáticos, várias com problemas sobre relações entre variáveis ou sobre relações entre números As tábuas, contendo problemas tratavam, por um lado, de situações do cotidiano, envolvendo também conhecimentos em geometria (ALVARENGA *et al*, 2014, p. 163). Eves (2007, p.61), afirma que a marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico e, perto do ano de 2000 a.C., a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra mais desenvolvida. Esse mesmo autor ainda conclui que os babilônios eram calculistas extremamente hábeis e eram “infatigáveis construtores de tábuas” (EVES, 2007, p. 63), sendo a *Plimpton 322*[1] (figura 1) a mais notável delas, descoberta no sul do Iraque no início do século XX, pelo arqueólogo Edgar J. Banks, com dimensões de 12.7 cm x 8.8 cm (MANSFIELD, 2017).

Existe grande significado e importância histórica do tablete *Plimpton 322,* escrita em cuneiforme, no período Babilônico Antigo, entre 1900 e 1600 a. C., por termos a evidência que, muito antes dos pitagóricos, sabia-se que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Os registros eram realizados na base 60 utilizados pelos babilônios.

---

[1] O nome indica que se trata da tábua da coleção G. A. Plimpton, da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. (EVES, 2007, p.63).

Figura 1- ***Plimpton 322*** **(Universidade de Colúmbia)**

Fonte: https://terraeantiqvae.com/profiles/blogs/los-babilonios-se-adelantaron-en-mas-de-mil-anos-a-los-griegos-en.

A figura 2 representa três colunas de caracteres, sendo as duas primeiras, da esquerda para a direita, em notação sexagesimal.

Figura 2- Três colunas da ***Plimpton 322*** **reproduzida em notação sexagesimal e decimal, na terceira coluna da direita**

width	diagonal	
1:59	2:49	1
56:07	1:20:25	2
1:16:41	1:50:49	3
3:31:49	5:09:01	4
1:05	1:37	5
5:19	8:01	6
38:11	59:01	7
13:19	20:49	8
8:01	12:49	9
1:22:41	2:16:01	10
45	1:15	11
27:59	48:49	12
2:41	4:49	13
29:31	53:49	14
56	1:46	15

Fonte: https://terraeantiqvae.com/profiles/blogs/los-babilonios-se-adelantaron-en-mas-de-mil-anos-a-los-griegos-en.

A coluna da extrema direita serve para numerar as linhas e os números das colunas seguintes correspondem à hipotenusa e a um dos catetos de triângulos retângulos de lados inteiros. Esse tablete é, então, um exemplo de relação entre números.

Dos 400 tabletes de cunho matemático encontrados, cerca de metade envolvia tábuas de multiplicação, tábuas de quadrados e cubos e mesmo tábuas de **exponenciais**, sendo essas últimas provavelmente usadas, juntamente com a interpolação, com problemas de juros compostos (EVES, 2007, p. 60).

Boyer (1996, p. 20) afirma também que os babilônios construíram tabelas de argila nas quais constavam potências sucessivas de um dado número, aproximando-se muito das atuais tabelas logarítmicas. Tabelas exponenciais ou logarítmicas, em que são dadas as dez primeiras potências para diferentes bases 9, 16, 1, 40 e 3,45, foram encontradas.

Os egípcios construíram tabelas que, segundo Boyer, "apresentavam resultados de investigação empírica, ou na melhor das hipóteses, generalizações que eram resultado da indução incompleta de casos mais simples para casos mais complicados" (1996, p.7). Para Silva (2014, p.25), a ideia entre dependência de variáveis, ainda que de forma empírica, estava relacionada às necessidades diárias de cada povo. Sá *et al*. (2013, p.124) cita também o povo árabe em seu método de formação de intervalos musicais, que era baseado na relação algébrica do comprimento da corda no som fundamental.

Os antigos "matemáticos", ainda que desenvolvessem temas relacionados à funções, não utilizavam essa nomenclatura, até porque o termo só começou a ser utilizado no século XVII.

Ao que tudo indica, a representação gráfica das funções surgiu em meados de 1360, com Nicole Oresme (1323-1382), Bispo de Lisieux, que fez a seguinte indagação: "por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas?" (BOYER, 2008, p. 180). Oresme escreveu que tudo que é mensurável é imaginável na forma de quantidade contínua e, assim, traçou um gráfico velocidade – tempo para um corpo que se move com aceleração constante, marcando ao longo de uma reta horizontal pontos que representavam instantes de tempo (ou longitudes) e para cada um desses instantes ele traçou, perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (BOYER, 2008).

A representação algébrica das funções foi desenvolvida a partir de Fermat e Descartes e com o desenvolvimento da Álgebra, René Descartes apresentou um conceito de função. François Viète (1540-1603) introduziu a primeira notação algébrica, iniciando um processo de evolução da matemática através dos estudos embasados em parâmetros e variáveis (BRAGA, 2006, p. 18).

O termo "função" foi escrito em 1694 pelo filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) e chamou *função* aos segmentos de retas obtidas por construção de retas, correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada (OLIVEIRA, 1997, p. 19). A partir daí o conceito foi sendo desenvolvido por diversos outros matemáticos. A expressão $y = f(x)$ foi implantada por Leonhard Euler (1707-1783) no século XVII (EVES, 2007, p. 472). Euler foi um escritor magistral e, entre suas obras figuram com destaque: "*Introductio in Analysin Infinitorum*", "*Instituitiones Calculi Differentiales*" e "*Instituitiones Calculi Integralis*" (EVES, 2007, p. 474). Boyer (2008, p. 305) esclarece ainda que:

> Euler usava a letra *e* mais de uma dúzia de vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais. O conceito por trás desse número era bem conhecido desde a invenção dos logaritmos, mais de um século antes; no

> entanto nenhuma notação padronizada para ele se tornara comum. Numa carta a Goldbach em 1731, Euler novamente usou a letra *e* para “aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1”; apareceu impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler de 1736, livro em que a dinâmica de Newton é apresentada pela primeira vez em forma analítica. Essa notação, sugerida talvez pela primeira letra da palavra “exponencial” logo tornou-se padrão.

Há uma origem fictícia da função exponencial que é relatada da seguinte forma:

> Um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo passatempo, um jogo, que pudesse entreter. O melhor passatempo teria direito a realizar qualquer desejo. Assim, um dos súditos forneceu-lhe o jogo de xadrez. O rei ficou maravilhado, portanto cumpriu sua promessa. O súdito, autor do jogo, fez seu pedido: “cada uma das 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez devem ser preenchidas com moedas de ouro, seguindo as seguintes condições: na primeira casa será colocada uma moeda e nas casas seguintes o dobro da casa anterior.”. O total em ouro seria entregue a ele. E assim se fez. Porém, para surpresa do rei, quando o tesoureiro do reino lhe apresentou a conta final, pois apenas na última casa o total de moedas era 2^{63}, correspondente a aproximadamente 9.223.372.000.000.000.000. O valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. Esse conto retrata a função exponencial $y = 2^x$. (SILVA, 2014, p.28).

Há poucos registros sobre a origem da função exponencial, diferentemente da função logarítmica. No entanto, procuramos relatar os tópicos que resgatam alguns pontos importantes do seu surgimento.

2. REFORMAS DE ENSINO E PROPOSTAS EDUCACIONAIS ENTRE OS ANOS DE 1930 E 1980

Antes de dissertarmos sobre as principais reformas de ensino que ocorreram entre as décadas de 1930 e 1980 dos Novecentos, daremos ênfase ao método de ensino-aprendizagem denominado Método Intuitivo e sua relação com o movimento escolanovista, uma vez que foi a partir da segunda década do século XX que o movimento da Escola Nova passou a ser difundido no Brasil (ZUIN, 2016). Para Resende e Souza (2005), esse período representou uma época importante para a educação, pois era entendida como uma via importante de divulgação das ideias e propostas republicanas.

2.1 Método Intuitivo

Até o fim do século XIX, a escola ou pedagogia tradicional se fez presente de "modo hegemônico", segundo Silva (2012, p. 2). Nessa escola, a exposição de conteúdos era feita de forma verbal pelo professor, sendo ele a autoridade máxima e a memorização era feita pela repetição sem relação com o cotidiano. Silva destaca ainda como importantes características dessa escola:

> O aluno deve se empenhar para atingir êxito pelo próprio esforço. A educação é entendida como processo externo. Neste contexto, prevalece a transmissão de conhecimento, sendo a escola centrada numa formação moral e intelectual. Dessa forma, é hierarquizada com normas rígidas de disciplina. Em suma, se caracteriza pelo conteudismo, exercícios de fixação e memorização (SILVA, 2012, p. 2).

A escola tradicional passa a ser questionada e, nas últimas décadas do século XIX, muitos debates sobre o ensino apareceram (ZUIN, 2016). Nesse sentido, foram destaques as discussões pedagógicas voltadas para um ensino diferente do que era praticado na escola tradicional.

Já havia surgido, na Alemanha, no final do século XVIII, o denominado *método intuitivo* que se baseava nas ideias do suíço Pestalozzi[2], tendo também sua origem histórica associada ao empirismo clássico de Bacon (SILVA, 2012). No Brasil, os princípios do Método Intuitivo foram propagados, principalmente, através do manual *Primeiras Lições de Coisas*[3], figura 3, cujo autor era Norman Allison Calkins. A obra foi traduzida para o português por Rui Barbosa. As *Primeiras Lições de Coisas* constituiu-se em um texto que

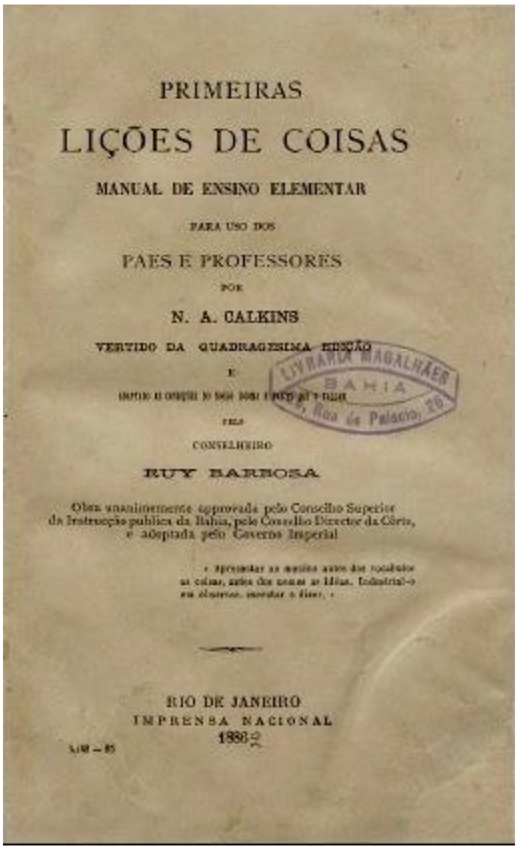
---

[2] Johann Heinrich Pestalozzi (1746 –1827) era natural da Suiça e pensou o método de ensino intuitivo, contando com os seus discípulos no trabalho de divulgação, tendo ganhado adeptos na Europa e Estados Unidos ao longo do século XIX (ZUIN, 2016, p. 2).

[3] Título original do livro: *"Primary Object Lessons: training the senses and developing the faculties of children; a manual of elementary instruction for parents and teachers"*.

colaborou para a difusão do método intuitivo no Brasil, assumindo importante função de orientação dos professores (REMER; STENTZLER, 2009, p. 6338).

Figura 3- Capa do Manual Primeiras Lições de Coisas[4]



PRIMEIRAS
LIÇÕES DE COISAS
MANUAL DE ENSINO ELEMENTAR
PARA USO DOS
PAES E PROFESSORES
POR
N. A. CALKINS
VERTIDO DA QUADRAGESIMA EDIÇÃO
E
PELO
CONSELHEIRO
RUY BARBOSA
Obra unanimemente approvada pelo Conselho Superior da Instrucção publica da Bahia, pelo Conselho Director da Côrte, e adoptada pelo Governo Imperial

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL

Fonte: http://www2.senado.leg.br/bdsf/item/id/227357.

Calkins afirma, logo no início da obra, que há uma sequência a ser seguida para a formação das ideias que resumimos no texto a seguir:

> 1. É pelos sentidos que nos advém o conhecimento do mundo material. Os primeiros objetos onde se exercem as nossas faculdades são as coisas e os fenômenos do mundo exterior. 2. A percepção é a primeira fase da Inteligência [...]. 3. A existência de uma noção no espírito nasce da percepção das semelhanças e diferenças entre os objetos. [...]. 4. Todas as faculdades medram, e robustecem a poder de exercício adequado: correndo o risco de se debilitarem, se as sobrecarregamos, ou se as aplicamos a matérias que não estejam ao seu alcance. 5. Algumas das energias mentais são tão ativas e quase tão vigorosas no menino, quanto no homem: tais a sensação, a percepção, a observação, a comparação, a simples retentiva e a imaginação. Outras não chegam ao seu desenvolvimento cabal, antes que a criança toque o período da madureza. Entre estas estão a razão, a memória filosófica e a generalização. 6. O mais natural e saudável incentivo para obter, entre as crianças a atenção e a aquisição de conhecimento, é associar a recreação ao

[4] Exemplar referente à 40ª edição americana (1884), disponível na biblioteca da Fundação Casa de Rui Barbosa, no endereço eletrônico < http://www2.senado.leg.br/bdsf/item/id/227357> Acessado em 30 de agosto de 2017.

> ensino. [...]. 7. É do bom ensino o inspirar contentamento à infância [...]. 8. Os hábitos de atenção firme são permanentes mananciais de educação intelectual [...]. Mas o grande segrêdo, para fixar a atenção das crianças, esta em aguçarlhes a curiosidade, e satisfazer-lhes o amor de atividade [...]. 9. O processo natural de ensinar parte do simples para o complexo; do que se sabe, para o que se ignora; dos fatos, para as causas; das coisas, para os nomes; das idéias, para as palavras; dos princípios para as regras (CALKINS, 1886/1950, p. 2-3).

De acordo com Rocha & Santos (2016, p. 6), podemos verificar que "os Princípios, mesmo servindo de base para a educação das crianças, devem seguir etapas significativas para que o conhecimento do mundo material seja adquirido a partir dos sentidos."

Para Zuin (2016), a implementação do método intuitivo exigiu novos materiais escolares e, sendo o Brasil um país de dimensões continentais, muitas escolas não seguiram os princípios do método. No entanto, "a grande exaltação das lições de coisas, o livro de Calkins, as Conferências pedagógicas de Professores na Corte, atingiram positivamente os docentes, trazendo para a instrução infantil, mudanças significativas e, em muitos locais, o ensino assentado nos princípios jesuíticos passaria a ser coisa do passado" (ZUIN, 2016, p.2).

Essa metodologia, alicerçada na educação dos sentidos, na intuição e na observação das coisas, passando, assim, a ser adotada por vários professores, despertou a reflexão sobre o ensino, ativando a busca por mudanças focadas em outras propostas de ensino/aprendizagem. Esse despertar por melhorias nos métodos de ensino, trouxe à tona, a partir do final do século XIX, "a busca pela superação da concepção tradicional" (SILVA, 2012, p. 3).

2.2 Movimento Escolanovista

A Escola Nova, na percepção de Zuin (2016), ganhou força a partir da segunda década do século XX quando, então, vários estados brasileiros incluem na legislação, reformas para a instrução. Esse modelo de *Escola* surge como proposta inovadora, contrária à Escola Tradicional, onde o professor é o mediador da aprendizagem, proporcionando ao aluno a oportunidade para a realização do seu desenvolvimento psicológico e de sua autorrealização, pois o que anteriormente realizava o simples papel de ouvinte passivo, sem expressão, sem luz (na própria etimologia da palavra *aluno*), agora seria um "agente ativo, criativo e participativo no ensino aprendizagem" (SILVA, 2012, p.3).

Dessa forma, essa "nova" escola, nos dizeres de Zuin (2016), também denominada *Escola Ativa* ou *Escola Progressiva*, trazia novos princípios que são descritos por Peres (2002, p. 11-12):

> Na autonomia dos educandos, na atividade espontânea, no auto-governo, na experiência pessoal da criança, na liberdade, na criatividade, na individualidade e nos métodos ativos. A escola Ativa seria, então, a escola da espontaneidade, da expressão criadora, da liberdade. (...) Todo o formalismo da escola e todas as práticas que estivessem à margem da vida deveriam ser banidas definitivamente dos meios educacionais (PERES, 2002, *apud* ZUIN 2016, p.3).

Figueira (2010, p.17) afirma que esse movimento, além de ser contrário ao reducionismo intelectual por meio da memorização, criticava o Método Intuitivo por basear suas atividades em práticas sensoriais rotineiras. Assim, "propunha uma escola mais livre e formativa, centrada no desenvolvimento da experiência do aluno" (FIGUEIRA, 2010, p. 17).

Um dos principais representantes da Escola Nova foi John Dewey[5]. Dewey influenciou educadores de todo o mundo, incluindo brasileiros, com o método de ensino, denominado por ele mesmo de experiência reflexiva, princípio unificador que auxiliaria os educadores no ensino (FIGUEIRA, 2010). As duas principais obras de Dewey foram publicadas no Brasil em 1930, com o título *Como pensamos* e, em 1936, *Democracia e Educação* (FIGUEIRA, 2010, p. 17). Nessas publicações, o autor mostra que o pensamento reflexivo se desenvolve através da curiosidade, isto é, através da possibilidade de estabelecer novos contatos, buscando novos objetos. Instalam-se as *situações-problemas* que são a apresentação de dificuldades que serão o incentivo para a busca de possíveis soluções a serem experimentadas. Figueira (2010, p.18) notifica, ainda, que:

> Nessas situações, a criança passa, por meio da observação direta dos sentidos (percepção) ou de lembranças passadas de observações previamente feitas por ela mesma ou por outra pessoa em outro momento (memória), a colher fatos, isto é, dados (material a ser interpretado, considerado e explicado). A posse destes dados lhe permite averiguar as condições nas quais se encontra para, posteriormente, levantar sugestões sobre os cursos possíveis de ações em busca de soluções. Para tanto, com os dados em mãos, passa, diante da diversidade e da possível contradição que poderá existir entre os fatos e sua relação com as sugestões, quando considerada a solução buscada, a escolher, eliminar, ou conservar aqueles que sejam importantes como prova daquilo que deseja alcançar, discernindo uns dos outros e atribuindo a eles valores e juízos (FIGUEIRA, 2010, p. 17).

Percebemos, a partir daí, que o professor passa a exercer o papel de guia para o aprendizado, oferecendo atividades que despertem o interesse do educando e, mais que isso, o educando deve retirar algum significado para sua vida.

No Brasil, educadores da Escola Nova, dentre eles Anísio Teixeira, Fernando de Azevedo e Lourenço Filho publicaram, em 1932, o *Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova*, motivados pela "esperança de democratizar e transformar a sociedade por meio da escola pública, laica e pautada em um novo modelo pedagógico" (FIGUEIRA, 2010, p. 19). Podemos extrair, logo das primeiras linhas desse manifesto, a preocupação dos educadores que o idealizaram com a devida valorização a ser dada à Educação pelos que governavam a nação:

> Na hierarquia dos problemas nacionais, nenhum sobreleva em importância e gravidade ao da educação. Nem mesmo os de caráter econômico lhe podem disputar a primazia nos planos de reconstrução nacional. Pois, se a evolução orgânica do sistema cultural de um país depende de suas condições econômicas, é impossível desenvolver as forças econômicas ou de produção,

[5] John Dewey (1859-1952) foi filósofo e pedagogo norte americano.

> sem o preparo intensivo das forças culturais e o desenvolvimento das aptidões à invenção e à iniciativa que são os fatores fundamentais do acréscimo de riqueza de uma sociedade. (AZEVEDO *et al*.., 1984, p. 407).

O manifesto demonstra, de forma veemente, a função e obrigação do Estado em oferecer uma Escola Pública de qualidade a todo cidadão quando relata:

> Assentado o princípio do direito biológico de cada indivíduo à sua educação integral, cabe evidentemente ao Estado a organização dos meios de o tornar efetivo, por um plano geral de educação, de estrutura orgânica, que torne a escola acessível, em todos os seus graus, aos cidadãos a quem a estrutura social do país mantém em condições de inferioridade econômica para obter o máximo de desenvolvimento de acordo com as suas aptidões vitais. (AZEVEDO *et al*., 1984, p. 413).

Chega-se, dessa forma, ao princípio da escola para todos, única, independente da condição social do cidadão.

O manifesto conclama também a favor de uma escola laica, gratuita e obrigatória:

> A laicidade, gratuidade, obrigatoriedade e coeducação são outros tantos princípios em que assenta a escola unificada e que decorrem tanto da subordinação à finalidade biológica da educação de todos os fins particulares e parciais (de classes, grupos ou crenças), como do reconhecimento do direito biológico que cada ser humano tem à educação. A laicidade,
> que coloca o ambiente escolar acima de crenças e disputas religiosas, alheio a todo o dogmatismo sectário, subtrai o educando, respeitando-lhe a integridade da personalidade em formação, à pressão perturbadora da escola quando utilizada como instrumento de propaganda de seitas e doutrinas. A gratuidade extensiva a todas as instituições oficiais de educação é um princípio igualitário que torna a educação, em qualquer de seus graus, acessível não a uma minoria, por um privilégio econômico, mas a todos os cidadãos que tenham vontade e estejam em condições de recebê-la. Aliás o Estado não pode tornar o ensino obrigatório, sem torná-lo gratuito. A obrigatoriedade que, por falta de escolas, ainda não passou do papel, nem em relação ao ensino primário, e se deve estender progressivamente até uma idade conciliável com o trabalho produtor, isto é, até aos 18 anos, é mais necessária ainda "na sociedade moderna em que o industrialismo e o desejo de exploração humana sacrificam e violentam a criança e o jovem", cuja educação é freqüentemente impedida ou mutilada pela ignorância dos pais ou responsáveis e pelas contingências econômicas. (AZEVEDO *et al*.., 1984, p. 413-414).

Realmente, na Escola Nova, o aluno passa a ser o centro de convergência das atenções dos gestores governamentais e dos professores. Consequentemente, os manuais de ensino baseados no Método Intuitivo são criticados como instrumentos de apoio, pois se pensava não ser aconselhável ter uma prática pedagógica padrão, frente às necessidades diferenciadas de aluno por aluno (FIGUEIRA, 2010).

Segundo Figueira (2010), a divulgação do movimento da Escola Nova e suas características se deu através do aparecimento de literatura especializada, de autores brasileiros e estrangeiros após a publicação das reformas educacionais.

Valdemarin (2008, p. 20) aponta que os princípios escolanovistas divulgados priorizaram "o estabelecimento das novas bases teóricas, descrevendo as iniciativas metodológicas delas decorrentes, não descrevendo modelos de como ensinar, mas asseverando a diversidade de possibilidades já implementadas". O cuidado com a leitura dos professores foi, dessa forma, o modo escolhido pelos escolanovistas para a divulgação dos novos princípios. Citamos, aqui, o grande educador brasileiro Lourenço Filho[6], que também organizou a *Biblioteca da Educação*[7] que foi fonte de publicação de:

> Eminentes catedráticos ligados aos problemas básicos da educação e do ensino estão presentes nesta Série que se destina, não só a professores e estudantes, mas também a quantos se interessam pelos problemas fundamentais da Educação (LOURENÇO FILHO, 1978, contracapa).

.

Este mesmo educador escreveu a obra *Introdução ao estudo da Escola Nova*, considerada uma das principais obras responsáveis pela divulgação de todas as correntes renovadoras da educação. Este livro contou com várias edições, pois foi muito difundido no período entre 1927 e 1979 e passou a ser uma referência acadêmica obrigatória, sobretudo nos cursos de formação do Magistério e nas Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras. (FIGUEIRA, 2010). Assim está escrito no *Prólogo da Editora:*

> Este livro do Prof. Lourenço Filho foi pela primeira vez publicado no ano de 1929, pela Seção Editora da Companhia Melhoramentos de São Paulo, cuja produção passou mais tarde a ser identificada com a rubrica "Edições Melhoramento". Embora constituísse volume de pequenas dimensões, estava destinado a ter repercussão singular. De fato, em nosso país foi a primeira obra pedagógica a despertar a atenção do grande público, como também a primeira no gênero, de autor nacional, a circular em mais de uma versão no estrangeiro (LOURENÇO FILHO, 1978, p. 9).

---

[6] Manoel Bergström Lourenço Filho nasceu em 1897 e faleceu em 1970. Normalista pelas escolas normais de Pirassununga e da Praça da República, formou-se também em Direito. Foi Diretor da Escola de Professores do Distrito Federal e Diretor do INEP que, então, era denominado Instituto Nacional de Pedagogia. Publicou o livro *Introdução ao Estudo da Escola Nova* que está entre as edições e tiragens de livros mais difundidos entre 1928 e 1979 (MONARCHA, 2010).

[7] A *Biblioteca da Educação* foi uma coleção organizada por Lourenço Filho no período compreendido entre 1927 e 1940. No acervo existente no Centro de Referência para Pesquisa Histórica em Educação (Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara – UNESP) e também no acervo presente na Escola Estadual Dr. Álvaro Guião (São Carlos – S.P.), podem ser encontradas vinte e nove obras publicadas por esta coleção. Foi um dispositivo estratégico para a formação de professores nas décadas compreendidas entre 1927 e 1940 (OLIVEIRA, 2015, p. 18-19).

2.3 A Reforma Francisco Campos

Na década de 1920, o Brasil vivia uma crise generalizada, fruto de uma recessão econômica que se desencadeou pelas baixas no preço do café, principalmente. Os investimentos estrangeiros no país, após a Primeira Guerra Mundial, foram reduzidos. Simultaneamente, havia uma grave crise mundial. Dessa forma, até mesmo as elites da época foram atingidas, vendo suas rendas reduzidas. Com essa insatisfação, instalou-se, em pouco tempo, um risco à ordem vigente, pois havia a possibilidade de uma ruptura política que se instaurou no momento em que o país se preparava para escolher o presidente no período de 1930 a 1934. Como candidatos, o paulista Júlio Prestes e o gaúcho Getúlio Vargas, pela Aliança Liberal, apoiada pelo movimento tenentista. Com a vitória de Júlio Prestes, houve denúncias de fraudes, desencadeando um processo revolucionário com o assassinato do vice de Vargas, João Dantas. Dessa forma, o então presidente, Washington Luis, foi deposto e assumiu, no dia 3 de fevereiro de 1930, Getúlio Vargas como chefe do Governo Provisório (BRAICK, MOTA, 2007).

O então Governo Provisório instituiu o Ministério da Educação e da Saúde Pública que já existira no início da República, porém, com curta duração. Na época, o primeiro Ministro da Educação e Saúde Pública, Francisco Campos, instituiu seis decretos, efetivando a chamada reforma que ficou conhecida como *Reforma Francisco Campos*:

- Decreto n.º 19.850, de 11 de abril de 1931, que instituía o Conselho Nacional de Educação.
- Decreto n.º 19.851, de 11 de abril de 1931, que dispunha sobre a organização do ensino superior no Brasil e abarca o regime universitário.
- Decreto n.º 19.852, de 11 de abril de 1931, que dispõe sobre a organização da Universidade do Rio de Janeiro.
- Decreto n.º 19.890, de 18 de abril de 1931, que regulamentava a organização do ensino secundário.
- Decreto n.º 20.158, de 30 de junho de 1931, que organizava o ensino comercial, fornece regulamentação à profissão de contador e fornece outras providências.
- Decreto n.º 21.241, de 14 de abril de 1932, que consolidava as disposições sobre a organização do Ensino secundário.

Na exposição de motivos que acompanhou o último decreto, Francisco Campos ressaltou o caráter inovador da proposta elaborada, deixando claro, no decreto número 21241, os objetivos que realmente deveriam nortear os rumos da educação no Brasil:

> A finalidade exclusiva do ensino secundário não há de ser a matrícula nos cursos superiores; o seu fim, pelo contrário, deve ser a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional, constituindo no seu espírito todo um sistema de hábitos, atitudes e comportamento que o habilitem a viver por si e tomar, em qualquer situação, as decisões mais convenientes e mais seguras (BRASIL, 1932).

Romanelli (1980) afirma que:

> a Reforma Francisco Campos teve o mérito de dar organicidade ao ensino secundário, estabelecendo definitivamente o currículo seriado, a frequência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior. Além disso, equiparou todos os colégios secundários oficiais ao Colégio Pedro II, mediante a inspeção federal e deu a mesma oportunidade às escolas particulares que se organizassem, segundo o decreto, e se submetessem à mesma inspeção (ROMANELLI, 1980, p. 135).

Através da Reforma Francisco Campos, o ensino secundário ficou dividido em dois ciclos, sendo um fundamental, de 5 anos, e o outro, complementar, de 2 anos. O ensino fundamental ficou obrigatório para o ingresso em qualquer escola superior e, o segundo, obrigatório em algumas escolas. Dessa forma, para esse ciclo complementar, foi efetuada uma subdivisão que compreendia “um certo grau de especialização, conforme se tratasse de curso preparatório para ingresso nas Faculdades de Direito, Ciências Médicas e Engenharia”. (ROMANELLI, 1980, p. 135).

Para o Curso Complementar, objetiva-se a preparação para as Faculdades de Direito, Faculdades de Medicina, Odontologia e Farmácia e Faculdades de Engenharia e Arquitetura. O artigo quarto estabelece:

> O curso complementar obrigatório para os candidatos à matrícula em determinados institutos de ensino superior, será feito em dois anos de estudo intensivo, com exercícios e trabalhos práticos individuais, e compreenderá as seguintes disciplinas: Alemão ou Inglês, Latim, Literatura, Geografia, Geofísica e Cosmografia, História da Civilização, Matemática, Física, Química, História Natural, Biologia Geral, Higiene, Psicologia e Lógica, Sociologia, Noções de Economia e Estatística, História da Filosofia e Desenho (BRASIL, 1932).

Pode-se observar que o ciclo fundamental procurou fornecer uma formação básica geral, enquanto, o complementar, buscou estruturar-se como um curso propedêutico (ROMANELLI, 1980).

Quanto aos programas de Matemática e suas instruções pedagógicas, a Reforma Campos, através de Euclides Roxo, implementa as inovações que vinham sendo realizadas de forma paulatina no Colégio Pedro II, a partir de 1929, por iniciativa do próprio Roxo. As instruções pedagógicas apresentavam como pontos-chave a aplicação do método heurístico, as junções entre os pontos de vista aritmético, algébrico e geométrico, a inter-relação da Matemática com outras disciplinas, tendo a noção de função como ideia central do ensino (ALVAREZ, 2004, p. 30).

As orientações metodológicas da Reforma Francisco Campos para a disciplina Matemática, segundo Alvarez (2004, p. 120):

> [..] frisavam o uso da intuição, principalmente nas séries iniciais, primeira e segunda. A exposição formal seria introduzida gradativamente. A princípio, os conhecimentos deveriam ser adquiridos pela experimentação e percepção sensorial. O estudo da geometria deveria ser precedido por um curso propedêutico de caráter intuitivo e experimental [...].

O método heurístico, também orientado pela reforma, destacava que o próprio aluno fosse capaz de enunciar as regras e propriedades dos conceitos em estudo e isso seria possível a partir da resolução de problemas pelo aluno. Esse método foi caracterizado na reforma da seguinte maneira:

> O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente à prática de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas. Ao invés disso, deve a matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio da resolução de problemas e de questionários intimamente coordenados. Assim os problemas não se devem limitar a exercícios dos assuntos ensinados, mas cumpre sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e de desenvolver a presteza na conclusão lógica. (BICUDO, 1942, p. 157 *apud* ALVAREZ, 2004, p. 17).

A reforma propõe, então, que o conteúdo deve ser ensinado de forma que o ponto de partida seja a intuição e o professor deveria conduzir as atividades de modo que o aluno conseguisse, se possível, descobrir, por si só, as verdades matemáticas, deixando de ser um mero receptor passivo de conhecimentos.

2.4 A Reforma Capanema

A 9 de abril de 1942, por iniciativa do então ministro de Getúlio Vargas, Gustavo Capanema, era promulgada a denominada Lei Orgânica do Ensino Secundário, mediante o Decreto-lei n. 4244. Na exposição de motivos, Gustavo Capanema assim se pronunciou:

> É que o ensino secundário se destina à preparação das individualidades condutoras, isto é, dos homens que deverão assumir as responsabilidades maiores dentro da sociedade e da nação, dos homens portadores das concepções e atitudes espirituais que é preciso infundir nas massas, que é preciso tornar habituais entre o povo. Ele deve ser, por isto, um ensino patriótico por excelência, e patriótico no sentido mais alto da palavra, isto é, um ensino capaz de dar aos adolescentes a compreensão da continuidade histórica da pátria, a compreensão dos problemas e das necessidades, da missão e dos ideais da nação, e bem assim dos perigos que a acompanhem, cerquem ou ameacem, um ensino capaz, além disto, de criar, no espírito das gerações novas, a consciência da responsabilidade diante dos valores maiores da pátria, a sua independência, a sua ordem, o seu destino. (BRASIL, 1942).

O artigo 2º do capítulo terceiro do decreto-lei afirmava que o ensino secundário passaria a ser ministrado em dois ciclos. O primeiro compreenderia um só curso: o curso ginasial, enquanto, o segundo, dois cursos paralelos: clássico e científico. Para Romanelli (1980), estes dois últimos cursos não apresentavam, pelo currículo, nenhum caráter de especialização. Na exposição de motivos do referido decreto, destacamos os seguintes dizeres:

> Quanto aos dois cursos do segundo ciclo, o clássico e o científico, é de notar que não constituem dois rumos diferentes da vida escolar, não são cursos especializados, cada qual com uma finalidade adequada a determinado setor dos estudos superiores. A diferença que há entre eles é que, no primeiro, a formação intelectual dos alunos é marcada por um acentuado estudo das letras antigas, ao passo que, no segundo, a maior acentuação cultural é proveniente do estudo das ciências. Entretanto a conclusão tanto de um quanto de outro dará direito ao ingresso em qualquer modalidade de curso do ensino superior (Exposição de Motivos). (BRASIL, 1942, p. 3).

Com relação à Reforma Capanema, era evidente o caráter de cultura geral e humanística dos currículos, mesmo no curso científico. Nos dizeres de Romanelli (1980, p. 158) "sobressaíam, nos dois níveis, uma preocupação excessivamente ideológica e ausência de distinção substancial entre os dois cursos: o clássico e o científico". Esta autora continua comentando que "esse ensino não diversificado só tinha, na verdade, um objetivo: preparar para o ingresso no ensino superior. Em função disso só podia existir como educação de classe." (ROMANELLI, 1980, p. 158).

Em abril de 1942, foi instituída uma comissão para a elaboração dos programas de Matemática do curso ginasial. Essa mesma comissão organizou também os programas de Matemática para os cursos clássico e científico (DASSIE, 2008).

2.5 Programa Mínimo

O denominado *Programa Mínimo* foi instituído através de duas portarias no ano de 1951. A primeira delas foi a Portaria n.º 966 de 2 de outubro de 1951 e a segunda, Portaria n.º 1.054 de 14 de dezembro de 1951. Essas portarias foram o resultado de uma revisão dos programas do Ensino Secundário feita por uma comissão, criada no início de 1951, mais precisamente em 27 de fevereiro, data esta da Portaria n.º 456 que forneceu legalidade a essa comissão, constituída por quatro membros: um professor da Faculdade Nacional de Filosofia, um professor do Colégio Pedro II, um professor do Instituto de Educação de Distrito Federal e um professor do Sindicato dos professores das escolas particulares (OLIVEIRA FILHO, 2013, p. 83). Foram publicados os Programas Mínimos de todas as disciplinas e as respectivas instruções metodológicas.

Nessa época, era Ministro da Saúde e Educação Simões Filho que na Portaria 966 faz referência à Portaria n.º 614, de 10 de maio de 1951, que dá a incumbência à Congregação do Colégio Pedro II de elaborar os programas das diversas disciplinas do curso secundário. Transcreve-se aqui os parágrafos 1.º e 2.º da Portaria n.º 966:

> Art. 1.º Ficam aprovados os programas que a esta acompanham, para o ensino de Português, Francês, Inglês, Latim, Grego, Espanhol, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Ciências Físicas e Naturais, Desenho, Física, Química, História Natural, Filosofia, História Geral e do Brasil, Economia Doméstica e Trabalhos Manuais no ensino secundário.
> Art. 2.º Os programas aprovados pela presente portaria serão adotados por todos os estabelecimentos de ensino secundário do país e entrarão em vigor progressivamente, a começar do ano vindouro, pela primeira série ginasial e colegial (BRASIL, 1951).

O Ministro da Educação e Saúde, Simões Filho, assim se pronunciou em uma entrevista coletiva à imprensa:

> A necessidade, por um lado, de aliviar os deveres escolares que congestionam os atuais programas do Ensino Secundário, e, de outro, atribuir maior elasticidade e rendimento à sua execução, tantas vezes reclamada, quer pelos educadores, quer por alunos e seus pais, levou o Ministério da Educação a estudar a conveniência de proceder a uma revisão da matéria neles contida, de modo a possibilitar o desenvolvimento racional de suas finalidades educativas (Ensino Secundário no Brasil. INEP, 1952, p. 515 *apud* MARQUES, 2005, p. 52).

Marques (2005), em seu trabalho, afirma que os anos 1950 foram marcados por um aumento do número de estudantes no ensino secundário. Os conteúdos das disciplinas eram demasiados, trazendo dificuldades no seu cumprimento. A simplificação dos programas seria uma tentativa de minimizar esse problema. Essa alternativa adotada foi justificada pelo próprio Ministro Simões Filho ao dizer:

> O objetivo fundamental deste trabalho consistiu, pois, em eliminar dos programas atualmente em vigor, os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação de diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. Ao mesmo tempo, verificava-se o flagrante desajustamento desses programas com o nível de assimilação da população escolar, cujas faculdades intelectuais, ainda mal desabrochadas, não a habilitavam a abranger a enorme soma de deveres e atividades de aprendizagem oferecidas ao seu conhecimento (Ensino Secundário no Brasil. INEP, 1952, p.515, *apud* MARQUES, 2005, p.52).

Pode-se dizer, após leitura da justificativa colocada, que houve uma preocupação em se reduzir os conteúdos até então ministrados. Dessa forma, o termo *Programa Mínimo* refere-se àquele que seria trabalhado por todas as instituições escolares e teriam, assim, condições de executá-lo. Por outro lado, o artigo 4º da Portaria 966 revela outro objetivo do programa mínimo:

> Os programas das diversas disciplinas do curso secundário serão cumpridos no Colégio Pedro II e nos demais estabelecimentos de ensino secundário do país com desenvolvimento adequado às diversas regiões, tendo-se sempre em vista as conveniências didáticas.

A interpretação que pode ser dada a esse artigo é que houve a possibilidade de serem elaborados planos de desenvolvimento desse programa mínimo de acordo com as especificidades de cada região.

Durante a vigência do programa mínimo, o 2º ciclo do ensino secundário continuou a ser chamado de Clássico e Científico, tendo perdurado no sistema educacional brasileiro até 1961, ano da LDB 4.024/61.

2.6 Lei n. 4024 e Lei n. 5692

A primeira lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira surgiu em 1961 e recebeu o número 4024. As principais mudanças decorrentes dessa lei foram a possibilidade de acesso ao nível superior para alunos egressos do ensino técnico e a criação do Conselho Federal de Educação e dos Conselhos Estaduais. Porém, a estrutura tradicional do ensino foi mantida e o sistema continuou a ser organizado segundo a legislação anterior e ficou da seguinte forma:

1. *Ensino pré-primário*, composto de escolas maternais e jardins de infância;
2. *Ensino primário* de 4 anos, com chance de ser acrescido de 2 anos mais, com programa de artes aplicadas;
3. *Ensino médio*, subdividido em dois ciclos: o ginasial de 4 anos e o colegial de 3 anos, ambos por sua vez compreendendo o ensino secundário e o ensino técnico;
4. *Ensino superior*.

A Lei 4024 apresentou como vantagem a não prescrição de um currículo fixo e rígido para todo o território nacional, em cada ramo e nível. Para a quebra de rigidez e a descentralização foi um progresso, pois houve a "possibilidade de os Estados e os estabelecimentos anexarem disciplinas optativas ao currículo mínimo estabelecido pelo Conselho Federal de Educação foi, sem dúvida, um progresso em matéria de legislação" (ROMANELLI, 1980, p. 181).

A lei 5692 é de 11 de agosto de 1971 e fixou o objetivo geral da educação no nível básico. Dentre as mudanças introduzidas pela lei, salienta-se a obrigatoriedade escolar para oito anos, isto é, faixa etária que vai dos 7 aos 14 anos. Fez-se a junção do curso primário e do curso ginasial em um só curso fundamental de oito anos. Houve a mudança da nomenclatura e da periodização dos graus de ensino, de 1ª a 8ª séries, primeiro grau e o ensino médio passou a se denominar 2º grau, cursado em três anos. Houve a eliminação do dualismo existente entre escola secundária e escola técnica, pela criação de uma escola única de 1º e 2º graus. Dessa forma, a estrutura passou a ser a seguinte:

- *Ensino de 1º grau:* com 8 anos de duração e uma carga horária de 720 horas anuais.
- *Ensino de 2 º grau:* com 3 ou 4 anos de duração e carga horária de 2200 horas, para os cursos de 3 anos e 2900 horas para os cursos de 4 anos.

2.7 O Movimento da Matemática Moderna

Em 1934, surgiu na França um grupo de matemáticos com o pseudônimo Nicolas Bourbaki[8] e acredita-se que, entre os membros originais, figuravam André Weil, Claude Chevalley, Jean Dieudonné e Jean Delsart (EVES, 2007, p. 690). Esse grupo lançou os

[8] Há algumas versões que ajudam a entender a origem do nome Bourbaki e uma dessas versões atribui o nome em homenagem ao general Charles Denis Sauter Bourbaki que ganhou fama na Guerra Franco-Prussiana. Em 1862, rejeitou o trono da Grécia e, depois de uma campanha desastrosa, em 1871, foi obrigado a recuar até a Suiça onde se exilou. Consta que há uma estátua em homenagem ao general em Nancy, França, onde se situa a Universidade de Nancy, com a qual vários membros do grupo tiveram vínculos. Porém, essa versão deixa em aberto a origem do nome "Nicolas" (EVES, 2007, p. 692).

Éléments de Bourbaki cujo primeiro volume foi editado em 1939 e o trigésimo primeiro, em 1965. O conjunto da obra institulou-se *Les structures fundamentales de l'analyse* que engloba Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia geral, funções de variável real, espaços vetoriais topológicos e integração (BOYER, 2008, p. 438). Para Boyer (2008, p. 438), a "apresentação do assunto por Bourbaki é caracterizada por uma adesão sem concessões ao tratamento axiomático e a uma forma secamente abstrata e geral que retrata claramente a estrutura lógica".

De acordo com Burigo (1988, p. 90), o grupo foi "responsável pela reconstrução do edifício matemático que substituíra a divisão tradicional do conhecimento matemático em ramos por categorias mais gerais". Na construção do grupo, há três tipos de "estruturas-mãe": algébricas, de ordem e topológicas. A autora ainda afirma que:

> Nas propostas para o secundário, a influência do trabalho de Bourbaki fazia-se sentir na ênfase na unidade entre os ramos da matemática, no uso dos conceitos unificadores, tais como os de conjunto e função e na introdução do estudo das estruturas algébricas como grupos e anéis e dos espaços vetoriais (BURIGO, 1988, p.90).

Eves (2007) salienta que:

> Duas das características principais da matemática do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes chamaram a atenção, em meados do século, dos interessados em ensino da matemática. Vários destes entenderam que seria oportuno adaptar tais características ao ensino e, não demorou, formaram-se grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e "modernizar" a matemática escolar. Nascia a *matemática moderna*. (EVES, 2007, p. 690).

É necessário acrescentar que "Na origem, a expressão 'matemática moderna' ou 'matemáticas modernas' referia-se à evolução interna da própria disciplina, nos últimos 100 anos e em especial a partir do trabalho do grupo Bourbaki". (BURIGO, 1988, p. 82). Este grupo exerce influência significativa no MMM internacionalmente e, em particular, no Brasil VALENTE *et al*, 2007, p.2).

Na década de 40, matemáticos pertencentes à liderança do grupo Bourbaki chegam ao Brasil e são contratados pela Universidade de São Paulo. Aqui, influenciam e orientam os responsáveis pelas cátedras, como também alguns jovens assistentes Dentre eles, destacam-se Osvaldo Sangiorgi, Jacy Monteiro, Omar Catunda, Benedito Castrucci, que na década de 60 iniciam e divulgam o MMM no Brasil (VALENTE *et al*, 2007, p. 2).

Dentre os matemáticos que aqui estiveram, podemos citar Jean Dieudonné[9], líder do grupo.

[9] Jean Dieudonné. Matemático europeu, líder do grupo Bourbaki, também exerceu muita influência sobre a educação matemática do Brasil. Na década de 1940, Dieudonné lecionou na Universidade de São Paulo. Mais tarde, na década de 50, apresentou uma série de palestras no Brasil, relacionadas com o trabalho do grupo Bourbaki. Uma vez que muitos matemáticos brasileiros haviam estudado com Dieudonné em suas visitas anteriores, suas opiniões eram muito respeitadas e seu interesse em educação matemática gerou interesse similar entre os seus ex-alunos. Isso sinalizou para os matemáticos da academia que era "respeitável" envolver-se com educação matemática (BEATRIZ D'AMBRÓSIO, 1987, p. 84).

No Brasil, na década de 50 do século XX, justamente na época em que o Ministério da Educação fazia valer o *Programa Mínimo*, havia, na comunidade acadêmica, uma grande insatisfação com o ensino de Matemática (SOARES, 2001). Dessa forma, houve a necessidade de realização de encontros entre professores para que fosse possível a discussão de temas relacionados ao ensino. No Brasil, foram realizados cinco congressos nacionais de Ensino de Matemática, sendo o primeiro realizado em 1955 e, o último, em 1966.

O primeiro desses Congressos ocorreu na cidade de Salvador e foram discutidos, de forma exclusiva, assuntos relacionados ao Ensino de Matemática, abordando temas tais como programas, livros didáticos e formação de professores (LAVORENTE, 2008).

Nesse Congresso, foi aprovado o aumento da carga horária semanal de matemática no curso secundário, para quatro horas, no curso ginasial e, para cinco horas, no colegial (SOARES, 2001). Ainda, baseado em reformas anteriores, foi aprovado o seguinte programa de ensino para o Curso Colegial (cinco horas semanais para o científico):

Quadro 1- Programa de ensino para o Curso Colegial

Primeira Série	Segunda Série	Terceira Série
Progressões Números irracionais Potências com expoentes fracionários Logaritmos (como operação) Equações exponenciais Trigonometria	Análise Combinatória Binômio de Newton Determinantes Sistemas lineares Geometria no espaço	Análise Matemática: (início) Conceitos elementares de variável e de função. Limite: primeiras noções sobre derivadas e aplicações ao estudo da variação de uma função. Estudo do trinômio do 2.º grau. Noções sobre números complexos Polinômios e equações algébricas em geral (pequena introdução) Geometria Analítica: (início) Estudo no plano até cônicas

Fonte Soares (2001).

Em 1957, na cidade de Porto Alegre, foi realizado o segundo Congresso que apresentou também palestras referentes ao ensino primário e à formação de professores, ou seja, se propôs a discutir a aprendizagem de Matemática nos diferentes níveis de ensino (LAVORENTE, 2008). O tema “Matemática Moderna” foi citado, segundo Soares (2001), de forma discreta por Ubiratan D`Ambrósio e por Osvaldo Sangiorgi. D’Ambrosio desenvolveu a temática *Considerações sobre o ensino atual de Matemática* e Osvaldo Sangiorgi, levou uma discussão sobre *Matemática clássica ou Matemática moderna, na elaboração dos programas do ensino secundário?*

O terceiro Congresso ocorreu na cidade do Rio de Janeiro, em 1959, e objetivou estudar os problemas relativos aos ensinos secundário e primário, comercial, industrial e normal e problemas gerais relativos ao ensino de Matemática (SOARES, 2001). Como decisões importantes desse congresso, podem-se citar:

- Proposta ao Ministério da Educação de não conceder o registro de professor de Matemática aos licenciados em outros cursos tais como pedagogia, Ciências Sociais, História Natural e Química.
- Criação de uma Revista de Matemática para o Ensino Médio.

- Solicitar aos Departamentos de Matemática das Faculdades de Filosofia de todo o país a criação de cursos de preparação à Matemática Moderna, tais como Teoria dos Números, Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos e Álgebra Moderna, para professores do Ensino Médio (SOARES, 2001, p. 85).

O quarto congresso foi realizado em 1962, em Belém do Pará, e tratou de forma mais objetiva a introdução da Matemática Moderna no ensino secundário. Nesse congresso, houve a participação de congressistas ligados ao GEEM - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática[10]. Nesse evento, os membros do GEEM realizaram sete aulas-demonstração, discorrendo sobre o tratamento moderno de certos tópicos de Matemática na escola secundária, duas apresentações do desenvolvimento moderno de assuntos de Matemática e três palestras que focaram a introdução da Matemática Moderna na escola secundária (SOARES, 2001).

O Congresso de 1966 foi realizado na cidade de São José dos Campos, em São Paulo, e contou com grande participação do GEEM, pois o grupo se encarregou de sua organização. O tema desse quinto congresso foi Matemática *Moderna na Escola Secundária*, articulações com o ensino primário e com o ensino universitário. Segundo Soares (2001), houve sessões de estudo que foram distribuídas em três momentos:

- Primeiro: problemas da Teoria dos Conjuntos e de Lógica Matemática aplicada ao ensino.
- Segundo: tópicos de Álgebra Moderna e Espaços Vetoriais.
- Terceiro: problemas de tratamento moderno de Geometria e Lógica Matemática.

Segundo Pinto (2008), houve a apresentação de trabalhos no V Congresso que mostraram que o Movimento da Matemática Moderna já estava difundido em escolas de diferentes estados brasileiros, pois, graças ao GEEM, acelerou-se a difusão do movimento. A convite do coordenador do grupo, Osvaldo Sangiorgi, foram a São Paulo, proferir palestras, ilustres representantes estrangeiros e essas palestras atraíam professores de Matemática de outras regiões do Brasil (PINTO, 2008). Em 1964, o GEEM expandiu sua ação para além do estado de São Paulo, ministrando cursos de Matemática Moderna e, em 1970, era líder do MMM no Brasil (SOARES, 2001).

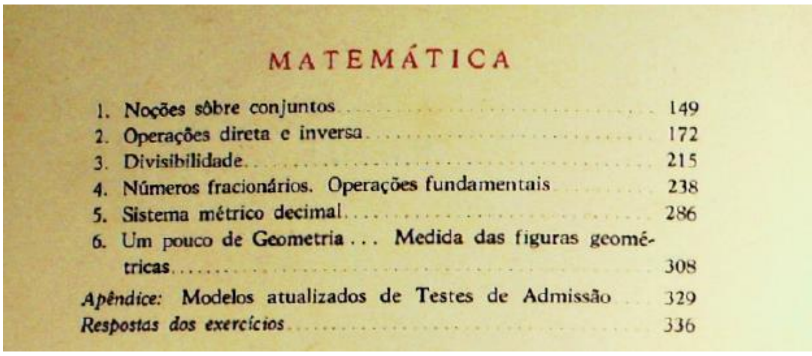
Evidencia-se a presença da Matemática Moderna nas provas de Exame de Admissão[11] de 1964, aplicada em São Paulo, especificamente no Colégio Santa Cruz. Nesse exame, o termo “prova” é substituído por “teste” e nesse teste há espaços para a resolução das questões e espaços para as respostas (PINTO, 2005). Pode-se constatar o uso do termo “sentença”, das opções F (falso) e V (verdadeiro) e alterações na forma de propor as questões com aspectos de uma nova linguagem matemática. Em 1965-66, nas Escolas Primárias de São Paulo, houve outro modelo de prova de Matemática Moderna com uma extensa questão sobre conjuntos o

[10] O GEEM foi fundado em 1961, na Universidade Mackenzie, sob a presidência do Professor Osvaldo Sangiorgi. A constituição e atuação deste grupo foram importantes para a implantação e divulgação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. O grupo tinha como objetivos escrever livros textos, realizar congressos, encontros, simpósios e cursos voltados à Matemática Moderna para professores (LIMA, 2006, p. 43).

[11] Os Exames de Admissão foram iniciados através do Decreto nº 4.468, de 1º de fevereiro de 1870, para os ingressantes no Colégio Pedro II e regulamentados pelo Decreto nº 981 de 8 de novembro de 1890. Posteriormente, como parte da Reforma Francisco Campos, tornaram-se obrigatórios nas escolas públicas de todo o país pelo Decreto n.º 19.890 de 18 de abril de 1931 (AKSENEN e MIGUEL, 2013, p.2).

que, para a autora, “evidencia o início, naquele momento, da adoção da Matemática Moderna na escola primária paulista” (PINTO, 2005, p. 8). Em 1968, nos livros que preparavam os alunos para os exames de admissão, o item 1, figura 4, é dedicado exclusivamente à noções sobre conjuntos.

Figura 4- Conteúdos de Matemática a serem tratados no Programa de Admissão



MATEMÁTICA

Fonte: Azevedo *et al.* (1968).

Para Soares (2001),

> No Brasil as propostas da Matemática Moderna encaixavam-se perfeitamente na política de modernização econômica do governo da década de 60. Vigorava no país a corrente pedagógica tecnicista que se consolidou sustentada pela ideologia desenvolvimentista que defendia a industrialização do país e privilegiava a formação técnica. Por conta desse interesse, o governo abriu as portas para os técnicos americanos nos conhecidos acordos MEC-USAID[12] (SOARES, 2001, p.137).

Para Beatriz D’Ambrósio (1987), a Matemática Moderna foi um projeto idealizado em países desenvolvidos e, posteriormente, aplicado em países do Terceiro Mundo. Soares (2001, p.137) ainda afirma que “os acordos assinados pelo Brasil (MEC – USAID) facilitaram a entrada das ideias da Matemática Moderna que eram veiculadas nos Estados Unidos”.

As mudanças propostas Movimento da Matemática Moderna também apresentavam como meta fazer com que o ensino da Matemática se tornasse mais “atraente” para o aluno, ou seja, mais prazeroso. Soares (2001, p. 148) afirma que “o Movimento defendia a inclusão de tópicos de Matemática estudados na Universidade no currículo do ensino secundário tais como: álgebra moderna, topologia, transformações lineares, etc”.

Pierro Neto *et al.* (1967) assim escreveram:

> Quando usamos a expressão “Moderna” para a Matemática atualmente ensinada, muitos são levados a pensar que se trata da substituição, pura e simples, dos assuntos tradicionais da aritmética, álgebra e geometria, por

[12] O Acordo MEC-USAID foi assim denominado pela série de convênios assinados, a partir de 1964, entre o MEC (Ministério da Educação) e a agência USAID (*United States Agency for International Development*). O Acordo objetivou uma reforma em todos os níveis de ensino brasileiros, adotando-se para tanto, o modelo norte americano, especialmente no ensino superior. Pelo papel estratégico deste nível, a reforma visava uma formação técnica mais ajustada ao plano desenvolvimentista e econômico brasileiro, em consonância com a política norte-americana para o país (FRANZON, 2015, p.3).

> uma matemática completamente diferente. Pelo contrário, o que se pretende estudar é a mesma coisa, e alguns novos tópicos de maior importância para as ciências modernas, através de uma linguagem mais fácil e precisa, capaz de penetrar todos os ramos da matemática (PIERRO NETO *et al.*., 1967, p.11).

Outra característica importante da Matemática Moderna foi a introdução dos fundamentos de conjuntos, relações e suas propriedades. A linguagem dos conjuntos foi muito enfatizada, valorizando muito a utilização de símbolos. A figura 5 mostra a simbologia, utilizada no capítulo inicial, destinado à Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática.

Figura 5- Simbologia utilizada na teoria dos conjuntos e na lógica

2. Símbolos da teoria dos conjuntos:

«pertence a»	$\in$
«não pertence a»	$\notin$
«contido em» (estritamente)	$\subset$
«contém» (estritamente)	$\supset$
«contido» (sentido amplo)	$\subseteq$
«contém» (sentido amplo)	$\supseteq$
«inter»	$\cap$
«união» (ou «reunião»)	$\cup$
«não está contido»	$\not\subset$
«não contém»	$\not\supset$

3. Símbolos da Lógica:

«não», «é falso que»	$\sim$
«e»	$\wedge$
«ou»	$\vee$
«se... então», «condicionado a»	$\rightarrow$
«se e sòmente se», «bicondicionado a»	$\longleftrightarrow$
«tal que»	$\mid$
«implica»	$\Rightarrow$
«equivale»	$\Leftrightarrow$
«existe»	$\exists$
«não existe (nenhum)»	$\nexists$
«existe um e um só»	$\exists\mid$
«qualquer que seja», «para todo», «para cada»	$\forall$

Fonte: Pierro Neto *et al.*. (1967, p. 12).

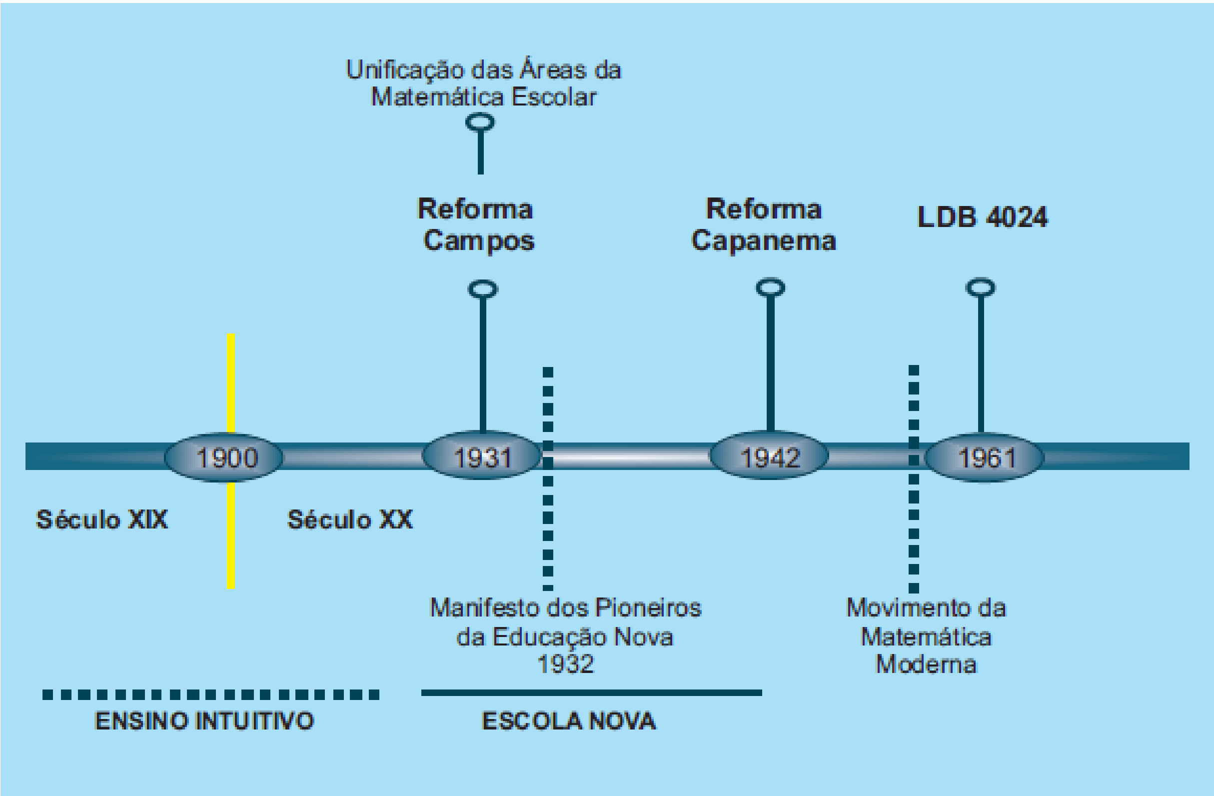
Para vários pesquisadores, a exemplo de Soares (2001), não houve tempo para que os professores se preparassem para o novo modelo de ensino da Matemática. Para Soares (2001, p. 149), "a Geometria foi abandonada, e os cálculos numéricos foram substituídos por formalismos excessivos desvinculados da realidade". Porém, Zuin (2001) aponta que as construções geométricas e, consequentemente, o ensino de geometria, continuou em algumas escolas nas aulas de Desenho Geométrico e mesmo, em determinadas situações, através da disciplina Educação Artística, implantada com a LDB 5692/71.

Evidentemente, as críticas à “moderna matemática” foram muitas, não só no Brasil, mas também nos Estados Unidos com a publicação da obra “O fracasso da Matemática Moderna” do matemático Morris Kline que não aprovava a grande quantidade de simbolismos e à excessiva valorização da Teoria dos Conjuntos. Soares (2001, p.149) ainda afirma que no Brasil “os exageros cometidos em nome da Matemática Moderna são devidos principalmente aos livros didáticos, publicados livremente e sem nenhuma fiscalização ou critério e também à falta de formação adequada dos professores secundários.”

Não se pode negar, no entanto, que o Movimento da Matemática Moderna alterou a estrutura do ensino da Matemática e, se não houve êxitos na sua implantação, é porque uma renovação na maneira de ensinar demanda tempo e não é fácil de ser realizada. Chervel (1990, p. 197) alerta que, de fato, “a instauração das disciplinas ou das reformas disciplinares é uma operação de longa duração. O sucesso ou o fracasso de um procedimento didático não se manifesta a não ser ao término da escolaridade do aluno”.

Para finalizar este capítulo, apresentamos a seguir uma linha do tempo (figura 6) na qual citamos as reformas e os acontecimentos que tiveram impacto na educação brasileira dentro no intervalo compreendido entre 1930 e 1980.

Figura 6- Esquema demonstrativo das datas das reformas de ensino e dos acontecimentos importantes no período estudado



Fonte: Elaborado pelas autoras.

O apêndice A mostra um quadro resumo As Reformas de Ensino e as propostas educacionais da década de 1930 a 1980

3. EQUAÇÃO/FUNÇÃO EXPONENCIAL: LIVROS ANALISADOS

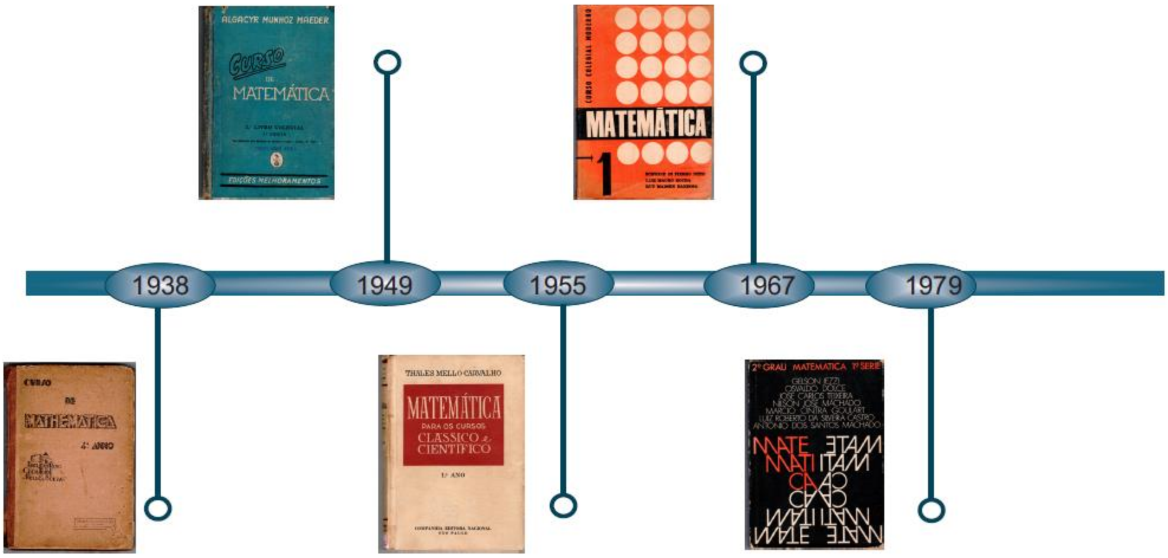
Neste capítulo, trazemos cinco livros didáticos utilizados, com uma breve biografia dos autores. Apresentamos alguns elementos da análise das obras, referente ao conteúdo equação/função exponencial, destacando as abordagens realizadas ao descrever o conteúdo citado, transpondo imagens das próprias obras.

Os livros selecionados para a análise foram os seguintes:

- Curso de Mathematica 4.º Anno, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza (1938);
- Curso de Matemática 2.º Livro Colegial, de Algacyr Munhoz Maeder (1949);
- Curso de Matemática 1.º ano para os Cursos Clássico e Científico, de Thales Mello Carvalho (1955);
- Matemática Curso Colegial Moderno, de Scipione Di Pierro Netto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa (1967);
- Matemática 2º Grau 1ª Série, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado (1978).

A figura 7 mostra de forma esquemática as datas das publicações com as respectivas capas destas obras.

Figura 7- Obras analisadas e as datas das publicações



Fonte: Elaborado pelas autoras.

O quadro 2, a seguir, mostra as características das obras analisadas.

Quadro 2- Estrutura interna e externa das obras

ESTRUTURA EXTERNA/INTERNA	ROXO *et al* (1938)	MAEDER (1949)	CARVALHO (1955)	DI PIERRO NETTO *et al* (1967)	IEZZI *et al.* (1978)
Tipo de capa	**Dura**	**Dura**	**Dura**	**Flexível de cor vermelha**	**Flexível, colorida**
Índice	**Sim, na última página e sem estar em ordem alfabética.**	**Sim, nas primeiras páginas do livro e sem estar em ordem alfabética.**	**Final da obra**	**Final da obra**	**Início da obra**
Prefácio	**X**	**-**	**-**	**X**	**X**
Bibliografia	**-**	**-**	**-**	**-**	**X**
Dimensões (cm)	**16 x 23**	**14 x 21**	**13 x 19**	**14,5 x 21**	**15 x 20,5**
Número de páginas	**409**	**415**	**316**	**267**	**325**
Apresentação de formulários	**X**	**-**	**-**	**-**	**-**
Referências históricas	**-**	**-**	**X**	**X**	**-**
Exercícios de exemplo	**X**	**X**	**X**	**-**	**X**
Exercícios propostos com resposta	**Sim e após o enunciado**	**Sim e após o enunciado**	**Sim e com respostas no final da proposição dos exercícios**	**Sim e com respostas no final do enunciado**	**Sim e com respostas no final do livro**
Notas de rodapé	**X**	**-**	**X**	**-**	**-**
Terminologia adotada	**Linguagem simples e direta.**	**Linguagem simples e direta.**	**Linguagem simples e clara com assuntos colocados em ordem crescente de dificuldade**	**Linguagem clara, o autor utiliza textos bem explicativos e ainda utiliza o *Vocabulário***	**Exposição teórica com utilização de simbologia**
Capítulo destinado à potenciação	**-**	**-**	**X**	**X**	**X**
Número de páginas destinadas a função exponencial	**9**	**10**	**5**	**4**	**15**
Número de páginas destinadas a equação exponencial	**1/2**	**6**	**4**	**5**	**3**
Porcentagem destinada à função exponencial	**2,2%**	**2,4%**	**1,5%**	**1,4%**	**4,6%**
Porcentagem destinada à equação exponencial	**0,12%**	**1,4 %**	**1,2%**	**1,8%**	**0,9%**
Aplicação da função exponencial a outras áreas	**–**	**–**	**–**	**–**	**X**
Aplicação da equação exponencial à outras áreas	**–**	**–**	**–**	**–**	**–**

Fonte: Dados da pesquisa

Para a análise do conteúdo equação/função exponencial, tomamos como base metodológica o trabalho desenvolvido por Picado y Rico (2011). Estes autores definiram cinco fases para a pesquisa que foram consideradas neste trabalho:

- Definição do problema, o campo e tipo de pesquisa e a definição de objetivos.

Nesta fase, incluem-se a seleção do tema, sua delimitação e o estabelecimento de um marco teórico que o fundamente. Na seleção do tema devem ser considerados aspectos como relevância, viabilidade, originalidade e interesse pessoal.

- Busca, localização e seleção de livros didáticos.

É nesta fase que se levam em conta a busca, localização e seleção das fontes documentais que possam proporcionar informações a respeito do tema da pesquisa. Localizadas as fontes, é necessário classificá-las e selecioná-las com o objetivo de se evitar repetição de informações. Nesta etapa, deve-se realizar a verificação da autenticidade das fontes.

- Análise dos livros didáticos.

Na fase de análise, consideramos três pontos importantes que são o autor, a estrutura do texto e o conteúdo. Quanto ao autor, foram destacadas as informações pessoais e profissionais, informando o nome, a profissão, o lugar de formação, vínculos com matemáticos e obras publicadas. Com relação à estrutura do texto, relacionamos o ano, a edição, a editora, finalidade e objetivos, organização do conteúdo, estilo de apresentação das informações e as referências no texto.

Na análise do conteúdo, procuramos verificar de que forma o autor inicia o capítulo, ou seja, se há ou não referências a conceitos fundamentais para o entendimento do que se propõe e também quais são as estratégias propostas pelo autor para o ensino e aprendizagem, identificando os sistemas de representação que, de modo geral, são em número de cinco: textual, numérica, simbólica, tabular e gráfica. Também foi importante verificar se houve referências históricas relativas ao conteúdo e se o autor aborda aplicações a outras áreas do conhecimento.

Com relação à fenomenologia, procuraremos identificar os fenômenos naturais (se no texto são apresentadas situações de natureza física, química, biológica ou de outras áreas, nas quais a função exponencial pode ser aplicada) e fenômenos matemáticos (se o conteúdo analisado se apresenta em um contexto de aplicação de uma ou várias operações aritméticas).

No caso da nossa pesquisa, faremos aqui, nesta fase, a análise do conteúdo que é tema deste trabalho, analisando as formas utilizadas pelos autores selecionados para apresentá-lo.

- Exposição dos resultados.

Nesta fase, serão mostrados todos os livros analisados, destacando as suas estruturas externa e interna e destacando o conteúdo que é tema dessa pesquisa.

- Interpretação dos dados.

Aqui nessa fase, procuraremos discutir, à luz da legislação vigente à época da publicação, a metodologia utilizada pelo autor.

Nosso trabalho corresponde a uma investigação qualitativa-descritiva cujo objetivo geral foi verificar, através de livros didáticos, as formas utilizadas por diversos autores para apresentar um conteúdo específico de Matemática entre os anos de 1930 e 1980.

Os marcos temporais, inicial e final, foram delimitados tendo em vista a Reforma Francisco Campos, que trouxe modificações para o ensino com demarcação da união da Álgebra, Geometria e Aritmética em uma só disciplina, denominada Matemática, e o período no qual os autores se voltaram para as prescrições do MMM.

A primeira obra, de Roxo *et al* (1938), foi publicada na vigência da reforma Francisco Campos. A segunda, de autoria de Algacyr Munhoz Maeder, editado em 1949, foi lançada durante a reforma Gustavo Capanema. Na vigência do *Programa Mínimo*, analisamos a obra de Thales Mello de Carvalho, de 1955. No período do Movimento da Matemática Moderna, a obra de Scipione *et al* (1967) foi objeto da nossa análise e o livro Matemática de Iezzi *et al* (1979). São 41 anos decorridos entre a primeira e a última obra analisada.

3.1. O Conteúdo Equação/Função Exponencial nos Livros Selecionados

3.1.1 Curso de Mathematica 4.º Anno, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza (1938)

Os autores

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo

Euclides Roxo nasceu em Aracaju, Sergipe, em 10 de dezembro de 1890 e faleceu no Rio de Janeiro no dia 21 de dezembro de 1950. Em 1909, bacharelou-se no Colégio Pedro II, tendo sido aprovado em 1915 em concurso para professor substituto de Matemática. Formou-se em Engenharia pela Escola Politécnica do Rio De Janeiro em 1916. Em 1919 foi nomeado catedrático do Colégio Pedro II e aí foi também examinador de Francês, Latim e Matemática. Posteriormente, foi aprovado em concurso para catedrático do Instituto de Educação. No Colégio Dom Pedro II foi diretor de 1925 a 1935, sendo diretor no externato de 1925 a 1930 e, no internato, de 1930 a 1935. No Ministério da Educação e Saúde, exerceu o cargo de Diretor do Ensino Secundário no ano de 1937. Foi, também, membro do Conselho Diretor da Associação Brasileira de Educação (ABE) de 1929 a 1931 e fez parte da comissão do ensino secundário da mesma associação, fundada na 2.ª Conferência da ABE, além de ter sido presidente da Comissão Nacional do Livro Didático (VALENTE, 2003, p. 86-87).

Entre suas obras podemos citar:

- Lições de Aritmética (1925).
- Curso de Mathemática Elementar, 2 volumes (1.º volume: 1929; 2.º volume:1930).
- Curso de Mathemática, com Cecil Thiré e J. C. De Mello e Souza (5 volumes).
- Matemática Ginasial – (4 volumes), publicado a partir de 1942, com outros autores (Cecil Thiré e Mello e Souza).
- Matemática Segundo Ciclo, com Roberto Peixoto, Haroldo Lisboa da Cunha e César Dacorso Neto (3 volumes).
- Matemática na Educação Secundária (1937).
- Unidades e Medidas (1941) (VALENTE, 2003, p. 87-88).

Júlio César de Mello e Souza

Mello e Souza, também conhecido pelo pseudônimo de Malba Tahan, nasceu em 06 de maio de 1895 na cidade do Rio de Janeiro e faleceu em Recife em 1974. Cursou o ensino fundamental no Colégio Militar do Rio de Janeiro e o ensino médio no Colégio Pedro II, sendo ambas essas instituições reconhecidas pela excelência de ensino. Em seguida, se formou como professor na Escola Normal e como engenheiro na Escola Nacional de Engenharia. Como professor, lecionou em várias escolas, inclusive no Colégio Pedro II e na Escola Normal. Foi ainda catedrático na Escola Nacional de Belas Artes, na Faculdade Nacional de Arquitetura e no Instituto de Educação do Rio de Janeiro. Publicou, em 1938, a famosa obra *O homem que calculava* (FARIA, 2004).

Outros títulos de sua autoria:

- Mathematica 1.º e 2.º anno, em coautoria com Cecil Thiré (1931)
- Curso de Mathemática, em coautoria com Cecil Thiré e Euclides Roxo (5 volumes).
- Mathemática Ginasial – (4 volumes), publicado a partir de 1942, com outros autores (Cecil Thiré e Euclides Roxo).
- Geometria Analítica, 1.ª e 2.ª partes
- Tudo é fácil
- Matemática fácil e atraente (ROXO; THIRÉ; MELLO e SOUZA, 1938).

Cecil Thiré

Cecil Thiré nasceu em Nova Lima, em maio de 1892 e faleceu no Rio de Janeiro em novembro de 1963. Formou-se em Engenharia pela Universidade Mackenzie. Foi catedrático em Matemática no Colégio Pedro II.

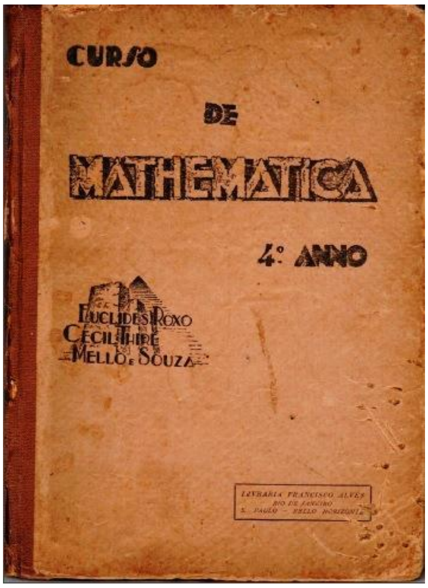
Destacamos algumas obras publicadas por este autor:

- Mathematica 1.º e 2.º anno, em coautoria com Mello e Souza (1931).
- Curso de Mathemática, em coautoria com Mello e Souza e Euclides Roxo (5 volumes).
- Mathemática Ginasial – (4 volumes), publicado a partir de 1942, em coautoria com outros autores (Mello e Souza e Euclides Roxo).
- Exercícios de Álgebra
- Exercícios de Arithmética
- Exercícios de Mathematica – 1.º e 2.º annos (ROXO; THIRÉ; MELLO e SOUZA, 1938).

Estrutura editorial

É possível observar no livro em pauta que a capa e a folha de rosto são locais exclusivos para a localização de elementos *paratextuais* (GENETTE, 2009). Na capa (figura 8), encontramos o título da obra *Curso de Mathemática* e o subtítulo *4º anno* e além desses, destacam-se os nomes dos autores e a livraria que o editou.

Figura 8– Capa do livro Roxo, Thiré & Mello e Souza



Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938).

Na primeira folha interna, visualizamos os nomes dos autores e, no verso, o destaque de algumas obras dos mesmos. Na contracapa, encontram-se dados bibliográficos, bem resumidos, dos autores, o número da edição (4ª Edição, 1938) e os endereços da livraria responsável pela edição (Livraria Francisco Alves).

No prefácio, os autores revelam que a obra segue o programa oficial vigente e que se preocuparam em ressaltar as aplicações práticas de Matemática:

> Destinando-se este livro especialmente aos estudantes da 4.ª serie do curso secundario, tivemos ao elaborá-lo, a preoccupação de seguir *pari passu* o programa official, distribuindo pelos diferentes capítulos toda a matéria exigida.
> Procurámos, sempre que foi possível, acompanhar os pontos estudados de questões simples e problemas numericos que fizessem resaltar as multiplas aplicações praticas da Mathematica (ROXO, THIRÉ & MELLO E SOUZA, 1938).

O prefácio da 4ª edição, de 1938, é o mesmo da 3ª edição, de 1936, ou seja, em ambas as edições o autor chama a atenção do leitor para a importante questão relativa às aplicações práticas de Matemática.

Em relação aos elementos textuais, a obra é organizada em *capítulos* e cada capítulo é apresentado em tópicos enumerados e essa indexação é interrompida entre os capítulos. Há tópicos que trazem exercícios resolvidos e denominados de *exemplo*. Há poucos casos onde os exercícios estão intercalados com o texto em um capítulo.

Outro elemento textual que se destaca é o denominado *formulário* que está localizado no final do livro, anterior ao *índice geral*, apresentado na última página. Os conteúdos abordados seguem o programa oficial de acordo com a Reforma Francisco Campos.

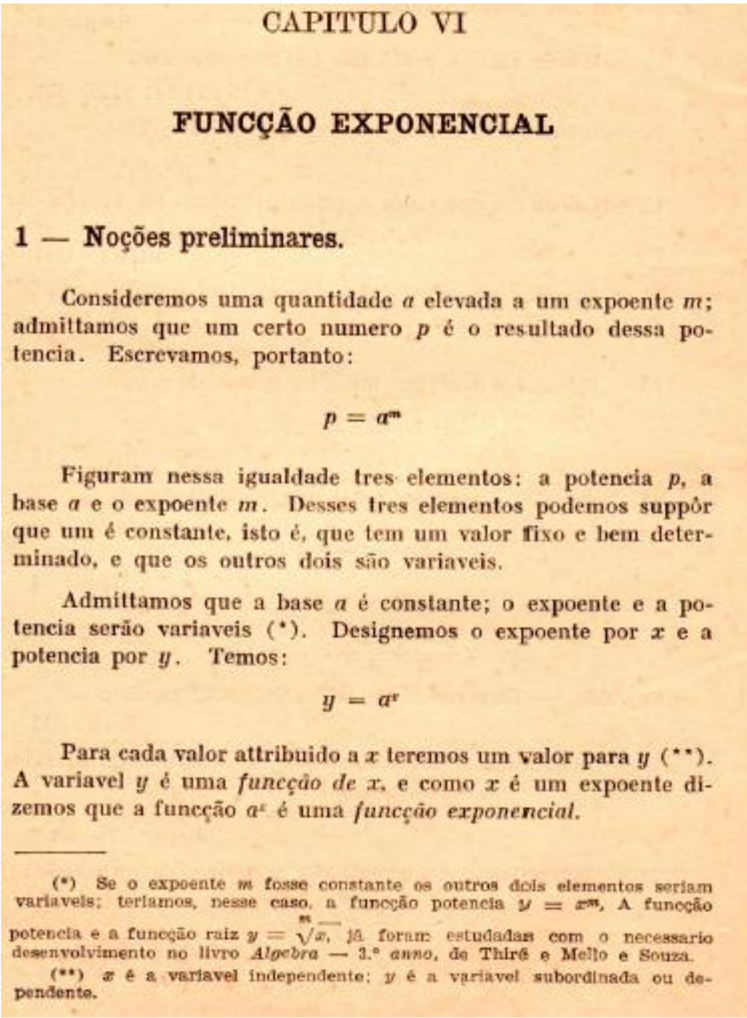
Análise do conteúdo equação/função exponencial

O conteúdo função exponencial se encontra no capítulo VI com o título *Funcção exponencial* logo após o capítulo correspondente às progressões geométricas que exige como pré-requisito o conhecimento das propriedades das potências. O capítulo se inicia na página 70 e finaliza na página 78. Os autores apresentam no tópico 1 as *Noções preliminares* (figura 9), onde apresentam a igualdade

$$p = a^m$$

como se o aluno desconhecesse a operação de potenciação, uma vez que coloca no parágrafo seguinte as denominações de p (potência), a (base) e m (expoente). A partir daí, supõe que a base a é constante e que a potência e o expoente são variáveis. Com uma mudança de nomenclatura, denominam o expoente por x e a potência por y e apresentam a igualdade $y = a^x$, conceituando a função exponencial. São apresentadas nesse tópico duas notas de rodapé, alertando para o caso do expoente permanecer constante e lembra que foi um assunto estudado no *3º anno* no livro *Algebra*.

Figura 9- Noções preliminares



CAPITULO VI

FUNCÇÃO EXPONENCIAL

1 — Noções preliminares.

Consideremos uma quantidade a elevada a um expoente m; admittamos que um certo numero p é o resultado dessa potencia. Escrevamos, portanto:

$$p = a^m$$

Figuram nessa igualdade tres elementos: a potencia p, a base a e o expoente m. Desses tres elementos podemos suppôr que um é constante, isto é, que tem um valor fixo e bem determinado, e que os outros dois são variaveis.

Admittamos que a base a é constante; o expoente e a potencia serão variaveis (*). Designemos o expoente por x e a potencia por y. Temos:

$$y = a^x$$

Para cada valor attribuido a x teremos um valor para y (**). A variavel y é uma *funcção de x*, e como x é um expoente dizemos que a funcção a^x é uma *funcção exponencial*.

(*) Se o expoente m fosse constante os outros dois elementos seriam variaveis; teriamos, nesse caso, a funcção potencia $y = x^m$. A funcção potencia e a funcção raiz $y = \sqrt[m]{x}$, já foram estudadas com o necessario desenvolvimento no livro *Algebra* — 3.º *anno*, de Thiré e Mello e Souza.

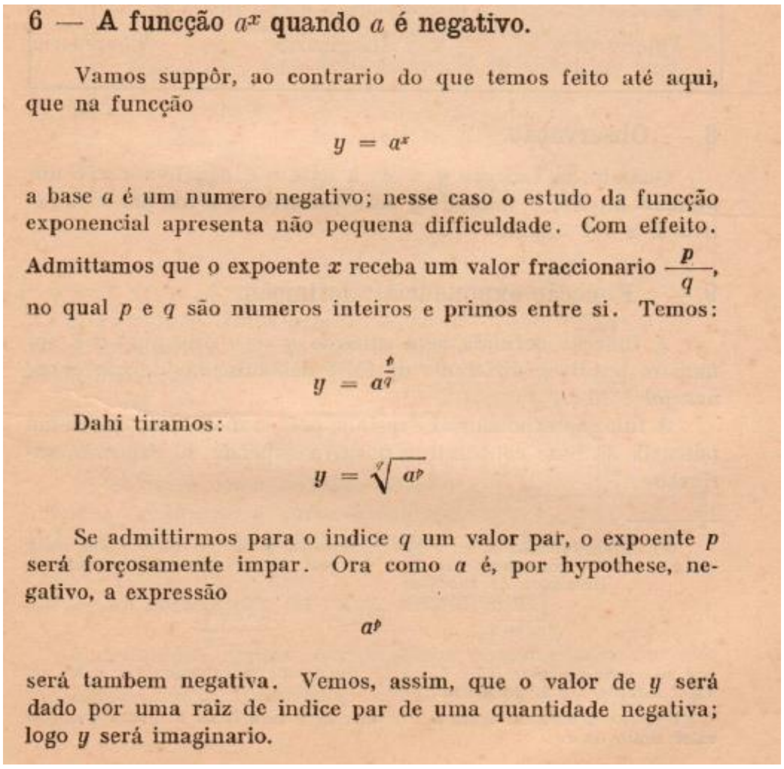
(**) x é a variavel independente; y é a variavel subordinada ou dependente.

Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938, p. 70)

No tópico 2, se apresenta o *Exemplo I*, trabalhando com a função $y = 5^x$, atribuindo valores a *x* e calculando *y.*

No tópico 3 tem-se o *caso de expoente commensuravel* e afirma, pelo exemplo I, que o expoente *x* pode receber um valor real qualquer nulo ou positivo. No *exemplo II*, é apresentado o caso de um expoente positivo e diferente de 1, enquanto que, no *exemplo III*, o caso do expoente positivo e menor que 1.A partir desses dois exemplos, os autores apresentam o tópico 6 *A funcção a^x quando a é negativo*. Neste ponto, os autores, evitando demonstração longa, mostram de forma objetiva o número imaginário (figura 10):

Figura 10- Apresentação da base negativa



6 — A funcção a^x quando a é negativo.

Vamos suppôr, ao contrario do que temos feito até aqui, que na funcção

$$y = a^x$$

a base a é um numero negativo; nesse caso o estudo da funcção exponencial apresenta não pequena difficuldade. Com effeito. Admittamos que o expoente x receba um valor fraccionario $\frac{p}{q}$, no qual p e q são numeros inteiros e primos entre si. Temos:

$$y = a^{\frac{p}{q}}$$

Dahi tiramos:

$$y = \sqrt[q]{a^p}$$

Se admittirmos para o indice q um valor par, o expoente p será forçosamente impar. Ora como a é, por hypothese, negativo, a expressão

$$a^p$$

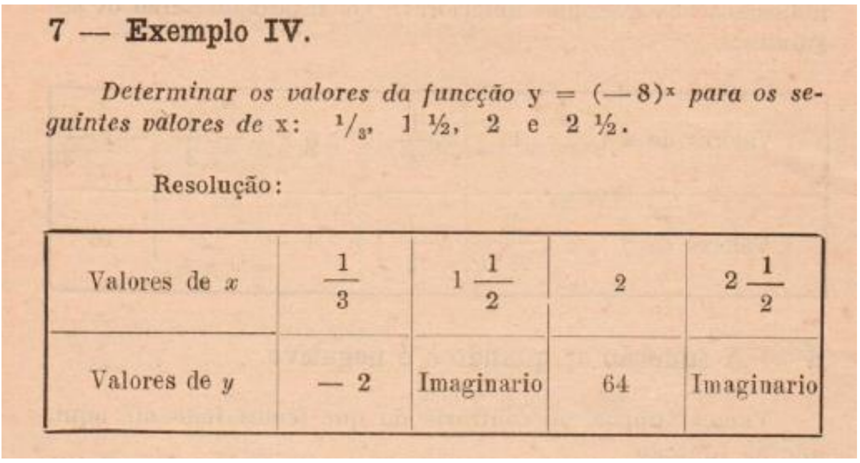
será tambem negativa. Vemos, assim, que o valor de y será dado por uma raiz de indice par de uma quantidade negativa; logo y será imaginario.

Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938, p. 73).

Na página 74, os autores apresentam a seguinte conclusão: “Quando a base *a* é negativa a funcção y = a^x não é definida para qualquer valor real de *x*” (ROXO; THIRÉ; MELLO e SOUZA, 1938, p.74).

O *Exemplo IV* (figura 11), mostra esse caso com os possíveis valores de y, quais sejam negativo, positivo ou imaginário.

Figura 11- Exemplo IV



7 — Exemplo IV.

Determinar os valores da funcção y = (— 8)ˣ *para os seguintes valores de* x: $^1/_3$, 1 ½, 2 e 2 ½.

Resolução:

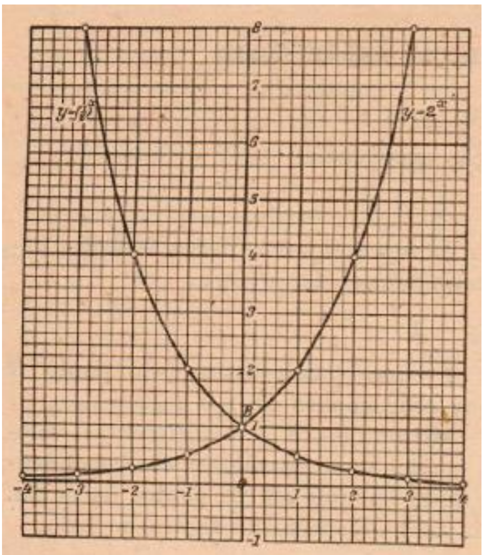
Valores de x	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$
Valores de y	— 2	Imaginario	64	Imaginario

Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938, p. 74).

A definição de função exponencial é apresentada no tópico 9 e, nesse momento, os autores consideram a base como sendo um número positivo e diferente de 1 uma vez que já demonstraram que, no caso da base negativa, a função não é definida para todo valor real de *x*. No tópico 10, são apresentados dois gráficos da função exponencial, considerando base maior que 1 e menor que 1.

A seguir, os autores ilustram as curvas obtidas no tópico 10 em uma única figura (figura 12) e enunciam as propriedades da curva exponencial:

Figura 12- Esboço dos gráficos de duas funções exponenciais de bases 2 e 1/2



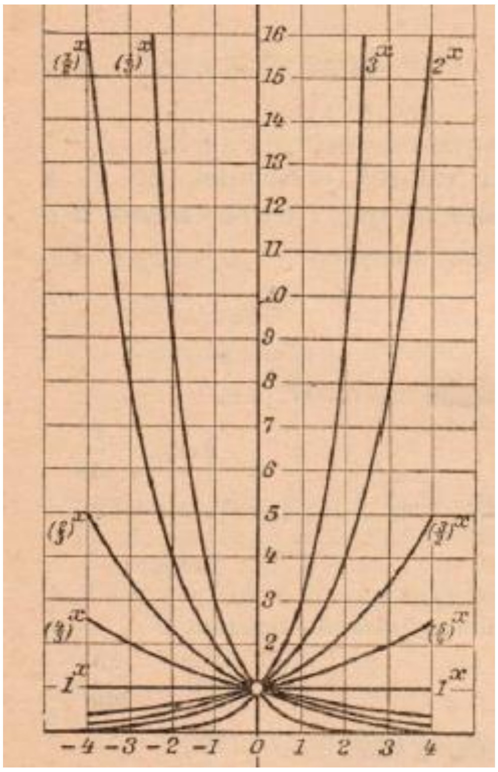
Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938, p. 76).

> 1º) A curva, em qualquer dos casos, fica situada toda acima do eixo dos *x*, pois a funcção a^x é positiva para qualquer valor de *x*
> 2º) A curva exponencial passa sempre pelo ponto B de coordenadas 0 e 1.
> 3º) A partir do ponto B, no 1º caso (a > 1), a curva sobe rapidamente acima do semi-eixo positivo dos *x* e desce lentamente sobre o semi-eixo negativo do qual se approxima indefinidamente, mas sem nunca attingil-o. O semi-

> eixo negativo dos *x* é uma *asymptota* da curva y = a^x (a > 1). No 2º caso (a < 1), dá-se o inverso: a curva, a partir do ponto B, afasta-se cada vez mais do semi-eixo negativo dos *x* e tem por *asymptota* o semi-eixo positivo das abscissas (ROXO; THIRÉ; MELLO e SOUZA, 1938, p.76).

O tópico 13 (figura 13) mostra um feixe de curvas exponenciais, mas não fazem referência a alterações do aspecto da curva quando se varia a base.

Figura 13- Feixe de curvas



Fonte: Roxo, Thiré e Mello e Souza (1938, p. 77).

Citam seis propriedades da função exponencial que enumeramos:

> I) Para qualquer valor de *x* a funcção a^x é positiva.
> II) Quando o valor de *x* se approxima de zero a^x se aproxima de 1.
> III) A funcção a^x é continua para qualquer valor de *x*, isto é, attribuindo-se a *x* um valor qualquer real e finito, a^x terá um valor real, finito e bem determinado.
> IV) Ha um valor real de *x* e um só para o qual a funcção a^x toma um valor particular *b* positivo.
> V) Si *x* crescer indefinidamente a funcção a^x crescerá indefinidamente quando *a* for maior que 1, e tenderá para zero quando *a* for menor que 1. (...).
> VI) Si *x* for negativo e crescer indefinidamente em valor absoluto, a funcção a^x tendera para zero quando *a for maior que 1, e* crescerá indefinidamente quando *a* for menor que 1. (...). (ROXO; THIRÉ; MELLO e SOUZA, 1938, p.77-78).

Ao final do capítulo, são dispostos oito exercícios (figura 14).

Figura 14- Exercícios propostos

Exercicios.

1 — Calcular o valor da expressão $2^x + 3^x$ para $x = -2$.

Resp.: $\frac{13}{36}$.

2 — Achar o valor da expressão: $4^x + 16^x$ para $x = -0{,}5$

Resp.: $\frac{3}{4}$.

3 — Sendo $y = 8^x + 5^{2x}$ calcular y quando fazemos $x = -1$.

Resp.: $\frac{33}{200}$.

4 — Sendo $y = 27^x + 8^x$ calcular y para $x = -\frac{1}{3}$.

Resp. $\frac{5}{6}$.

5 — Calcular $300 \times 1{,}5 \times 10^{-3}$.

Resp.: 0,45.

6 — Achar o valor da função:

$y = 4^x + 4^{-x}$ para $x = \frac{1}{2}$ Resp.: $\frac{5}{2}$.

7 — Construir a curva definida pela equação $y = 4^x$.

8 — Trace a curva definida por $y = 2^{-x^2}$ (curva do sino).

Fonte: Roxo; Thiré; Mello e Souza (1938, p. 78).

Os exercícios propostos ao aluno, apresentado pelos autores, mostram que houve uma tendência de explorar os conceitos apresentados no texto, antes da definição de função exponencial. São exercícios que se assemelham aos exemplos I, II e III. Não há nos *Exercícios*, caso em que a base é negativa. Relativamente à função exponencial propriamente dita, há apenas o exercício 7 que explora a parte gráfica, sem exigir conhecimentos das propriedades da função em questão. O exercício 8, apesar de referir-se a uma função que, por definição difere da exponencial, tem objetivo semelhante ao 7 que é o traçado de gráfico.

Os autores não fazem nenhuma referência histórica e, também, não observamos aplicações práticas do conteúdo, conforme anunciado no prefácio.

As equações exponenciais não são apresentadas dentro deste capítulo. Há, no capítulo IX, *Taboas de Logarithmos*, no tópico 17 (figura 15) a demonstração apenas da resolução da equação exponencial da forma $a^x = b$. Não há a apresentação de nenhuma outra forma de equação exponencial.

Figura 15- Equação exponencial

17 — Resolução da equação exponencial $a^x = b$

Seja a equação exponencial

$$a^x = b$$

na qual a e b são numeros positivos dados. Podemos escrever:

$$\log a^x = \log b$$

ou

$$x \log a = \log b$$

Tirando o valor de x (**), resulta:

$$x = \frac{\log b}{\log a}$$

Fonte: Roxo; Thiré; Mello e Souza (1938, p. 129).

Os exercícios são apresentados em número de 3, no final do capítulo e todos envolvem a utilização de logaritmos (figura 16).

Figura 16- exercícios propostos sobre equações exponenciais

34 — Resolver a equação: $(0,1055)^x = 0,6874$.

Resp.: 0,6.

35 — Resolver a equação: $10^x = 0,035$.

Resp.: — 1,45593.

36 — Resolver a equação: $10^x = 0,052$.

Resp.: — 1,284.

Fonte: Roxo, Thiré , Mello e Souza (1938, p. 132).

Sistemas de representação

No texto descrito, os autores lançam mão de formas de representação que poderemos dizer serem de forma textual, simbólica, tabular, por meio de quadros, e gráfica.

Há uma predominância da representação verbal que é reforçada pela pequena quantidade de exemplos, que são exercícios resolvidos, como complemento da teoria apresentada. Identificamos quatro exemplos.

A representação simbólica se faz presente em todo o capítulo, seja na forma simbólica de se apresentar a função exponencial, bem como na forma de discorrer sobre expoentes com valores fracionários ou não.

Na representação tabular, verificam-se os quadros, os quais são explorados para mostrar os resultados de exemplos (figura 11).

Os gráficos (figuras 12 e 13) complementam a visualização da variação da função exponencial, considerando base maior e menor que 1.

Fenomenologia

Fenômenos naturais: Não são apresentadas situações físicas da natureza nas quais a equação/função exponencial poderia ser verificada.

Fenômenos matemáticos: A resolução de uma equação exponencial ou a determinação da variável *y* para possíveis valores de *x* sempre exige a aplicação de operações aritméticas, tais como potenciação, radiciação e as operações fundamentais.

Análise da obra sob o ponto de vista da Reforma Francisco Campos

O livro em questão pode ser traduzido como um exemplo bem fiel das propostas inovadoras estabelecidas pela reforma. O que se percebe, é que, ao se iniciar o estudo das funções exponenciais através das noções preliminares e, logo em seguida, propondo um exemplo, adotando valores positivo, nulo e negativo para o expoente, inferimos que os autores pretendem provocar a reflexão para conduzir à percepção de que, ao se reduzir o valor do expoente, para a base positiva, colocada no exemplo, o valor da variável *y* decresce. Assim, os autores vão conduzindo a apresentação do texto até culminar com a definição de função exponencial. Nesse momento, de forma heurística, o aluno deverá ter concluído que a base deverá ser positiva e diferente de 1. Então, é visível o emprego do método heurístico, uma vez que o aluno é solicitado a participar, constantemente, do estudo proposto que, no nosso caso, é equação/função exponencial.

3.1.2 Curso de Matemática 2.º Livro Colegial, de Algacyr Munhoz Maeder (1949)

O autor

Algacyr Munhoz Maeder nasceu no dia 22 de abril de 1903, em Curitiba, Paraná, onde fez seus primeiros estudos escolares, seguindo, posteriormente, para São Paulo, capital, quando passou a estudar no Colégio São Bento. Retornando a Curitiba, graduou-se em Engenharia Civil pela Faculdade de Engenharia da Universidade Federal do Paraná. Maeder foi autor de livros didáticos de Matemática editados por duas editoras: Typographia João Haupt e Cia. e Edições Melhoramentos (LONGEN, 2007). Publicou dezenove livros entre 1928 e 1962. Durante a sua vida, exerceu diversas funções, entre as quais, diretor do Gymnasio Paranaense (atual Colégio Estadual do Paraná), de 1928 a 1930; prefeito de Curitiba, em 1946; reitor da Universidade Federal do Paraná de 1971 a 1972; presidente da Associação de Professores da Universidade Federal do Paraná e membro do Conselho Federal de Educação, da Sociedade Paranaense de Matemática e da Sociedade Brasileira de Física. Faleceu no dia 29 de dezembro de 1975 (LONGEN, 2007).

Entre outras obras publicadas por esse autor, podemos citar:

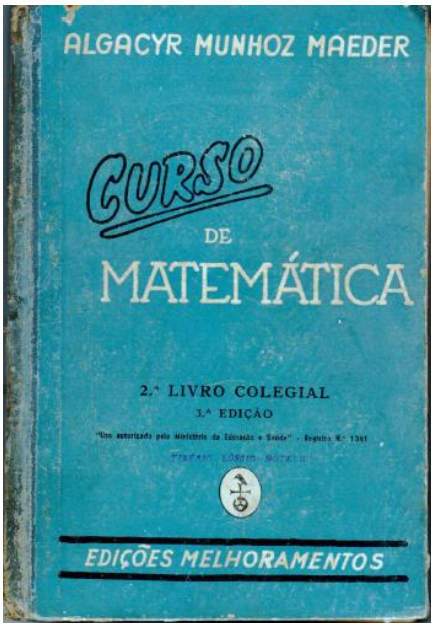
- O conceito de número (These, 1927) – Concurso para Lente cathedrático de Arithmetica e Algebra do Externato do Gymnasio Paranaense.
- Resolução e Discussão das Equações do Primeiro e Segundo Gráos a uma Incognita (These, 1927) - Concurso para Lente cathedrático de Arithmetica e Algebra do Externato do Gymnasio Paranaense.
- Algebra Elementar, 1.ª parte e 2.ª parte.
- Lições de Matemática, do 1.º ao 5.º ano.

- Curso de Matemática, Curso Ginasial, da 1.ª a 4.ª série
- Curso de Matemática, Ciclo Colegial, 1.º, 2.º e 3.º livros
- Matemática, Curso Comercial Básico, da 1.ª a 4.ª série (LONGEN, 2007).

Estrutura editorial

A obra a ser analisada, denominada "Curso de Matemática", destinou-se ao ciclo colegial e foi denominado de 2.º Livro. Trata-se da 3.ª edição, publicada em 1949, pela Edições Melhoramentos, tendo como público-alvo estudantes do curso secundário do segundo ciclo, conforme a Reforma Capanema. As características da obra, no que concerne a capa (figura 17) e folha de rosto são semelhantes ao livro de Roxo *et al.* (1945).

Figura 17- Capa do livro Curso de Matemática



Fonte: Maeder (1949).

A obra é apresentada em 25 capítulos, numerados em algarismos romanos. Não há nenhuma referência histórica na obra. Os conteúdos são apresentados em tópicos com numeração de 1 a 435, o que não traduz em uma característica desse autor, pois Roxo *et al.* (1945) também assim o fizeram. Nas primeiras páginas, anteriores ao índice, o autor apresenta os programas do ciclo colegial para os cursos científico e clássico, referentes à 2.ª série.

O programa oficial coloca, de forma bem definida, as partes de Matemática: Álgebra com quatro unidades; Geometria com uma unidade e Trigonometria com seis unidades. A unidade I é destinada à função exponencial e podemos observar a colocação da função inversa da exponencial, tratando-se da função logarítmica.

Quando fazemos a comparação entre esses dois programas, observamos algumas diferenças e também semelhanças. De modo geral, o programa destinado ao ensino clássico está presente naquele que corresponde ao ensino científico, porém, neste último, as abordagens são mais completas. Em relação à Álgebra, as diferenças são constatadas no aumento de conteúdos para o curso científico, com o acréscimo de duas unidades:

Determinantes e *fracções contínuas*. A função exponencial aparece no Curso Científico. A Geometria é contemplada com o mesmo programa e, a Trigonometria, ganha no Curso Científico as unidades de *Transformações trigonométricas* e *Equações trigonométricas*.

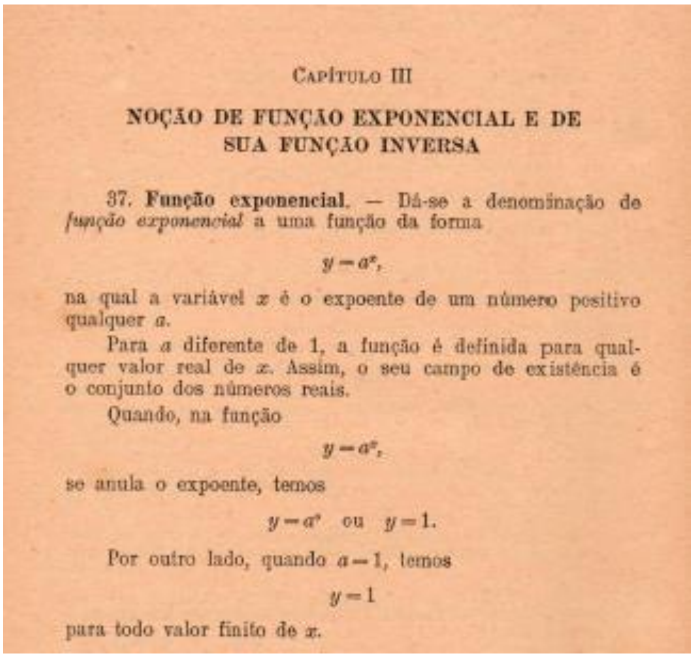
Análise do conteúdo equação/função exponencial

O autor apresenta a noção de função exponencial e de sua inversa no terceiro capítulo, iniciando na página 36 e, finalizando na página 45. Nesse mesmo capítulo, o autor apresenta a função logarítmica, considerando o conceito de função inversa. Quanto às equações exponenciais, o capítulo V as descreve, das páginas 69 a 74.

Não há, de forma inicial, nenhuma revisão ou referências a assuntos previamente estudados e que servirão de suporte para o bom entendimento do capítulo.

A função exponencial é apresentada a partir do tópico 37, com uma definição, sem referências a conceitos de domínio e imagem, relatando, apenas, que o "campo de existência" é o conjunto dos números reais (figura 18). Faz-se referência à base simplesmente como um número positivo qualquer, não excetuando a base igual a 1.

Figura 18- Definição de função exponencial apresentada



CAPÍTULO III

NOÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E DE SUA FUNÇÃO INVERSA

37. **Função exponencial.** — Dá-se a denominação de *função exponencial* a uma função da forma

$$y = a^x,$$

na qual a variável x é o expoente de um número positivo qualquer a.

Para a diferente de 1, a função é definida para qualquer valor real de x. Assim, o seu campo de existência é o conjunto dos números reais.

Quando, na função

$$y = a^x,$$

se anula o expoente, temos

$$y = a^0 \quad \text{ou} \quad y = 1.$$

Por outro lado, quando $a = 1$, temos

$$y = 1$$

para todo valor finito de x.

Fonte: Maeder (1949, p. 36).

O conteúdo é exposto, explorando os princípios e propriedades, sendo que, o tópico 38, apresenta o ***Princípio I***: "As potências de expoente inteiro e positivo de um número maior que 1 são maiores que 1 e crescem no mesmo sentido que o expoente, podendo tornar-se menores que qualquer número prefixado". (MAEDER, 1949, p. 36).

O autor faz uma demonstração detalhada desse princípio que envolve conceitos de teoria dos números e desigualdades. Da mesma forma, no tópico 40, é apresentado o ***Princípio II***: "As potências de expoente inteiro e positivo de um número menor que 1 são menores que 1 e variam em sentido contrário do expoente, podendo tornar-se menores que qualquer número prefixado.” (MAEDER, 1949, p. 38). Novamente, o autor apresenta a demonstração desse princípio com o mesmo rigor dado ao primeiro.

No tópico 42, são apresentadas quatro propriedades das funções exponenciais (figura 19). Na primeira, há a afirmação de que a função exponencial é sempre positiva, pois a base é sempre também o é. Novamente, não excetua a base igual a 1. Na segunda, o autor escreve que “para cada valor de x corresponde um valor determinado de y”, não fazendo referência ao conceito de função bijetora. Na terceira propriedade, estabelece a condição para que a função seja crescente ou decrescente. Na quarta propriedade, estabelece que “a função exponencial é contínua para qualquer valor de x”.

Figura 19- Propriedades da função exponencial

42. **Propriedades.** — Fundados nos princípios demonstrados nos parágrafos anteriores com as extensões correspondentes, podem ser estabelecidas, entre outras, as seguintes propriedades da função exponencial:

I. *A função*

$$y = a^x,$$

em que a>0, *é positiva para todo valor da variável* x.

II. *A cada valor de* x *corresponde um valor determinado para* y.

III. *Para valores crescentes de* x, *a função*

$$y = a^x$$

cresce indefinidamente quando a>1 *e tende para zero quando* a<1.

A função que vimos estudando apresenta, ainda, a notável propriedade de que trataremos a seguir.

IV. *A função exponencial é contínua para qualquer valor de* x.

Fonte: Maeder (1949, p. 39).

As variações da função exponencial são apresentadas no tópico 43, considerando os casos em que a base é maior que 1 e compreendida entre 0 e 1. Neste tópico, há, pela primeira vez, a observação de que $0 < a < 1$, sendo a, a base, ou seja, a deve ser diferente de 1. Essas variações são apresentadas em dois quadros. O primeiro (figura 20) é para base maior que 1:

Figura 20- Variação da função exponencial para base maior que 1

Resumamos, no quadro abaixo, as variações da função xponencial no caso considerado.

variações de x	$-\infty$	0	$+\infty$
variações de y	0	1	$+\infty$

Fonte: Maeder (1949, p. 42).

O segundo (figura 21) apresenta a variação para a base entre 0 e 1:

Figura 21- Variação da função exponencial para base entre 0 e 1

Resumamos, no quadro abaixo, as variações da função exponencial no caso considerado.

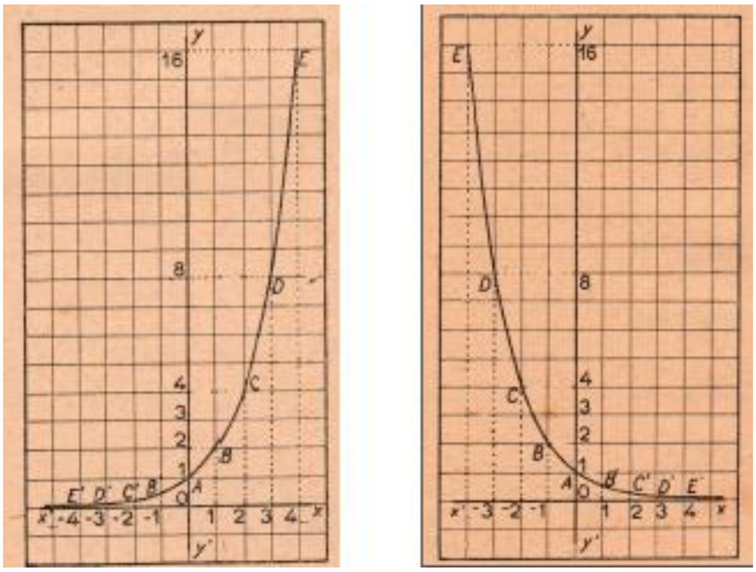
variações de x	$-\infty$	0	$+\infty$
variações de y	$+\infty$	1	0

Fonte: Maeder (1949, p. 43).

Na representação gráfica, há o exame de dois casos, considerando base maior que 1 e base menor que 1 e o autor escreve: "Servindo-nos do sistema ortogonal de eixos coordenados, vejamos o aspecto que adquire o gráfico no primeiro caso." (MAEDER, 1949, p. 42).

Para o primeiro caso, é representada a função $y = 2^x$ e, no segundo, $y = (1/2)^x$. São dados apenas esses dois exemplos (figura 22). Não há exercícios de fixação. Não há referências a nenhuma aplicação em outros ramos do conhecimento.

Figura 22- Gráficos da função exponencial: à esquerda, base maior que 1 e à direita, menor que 1

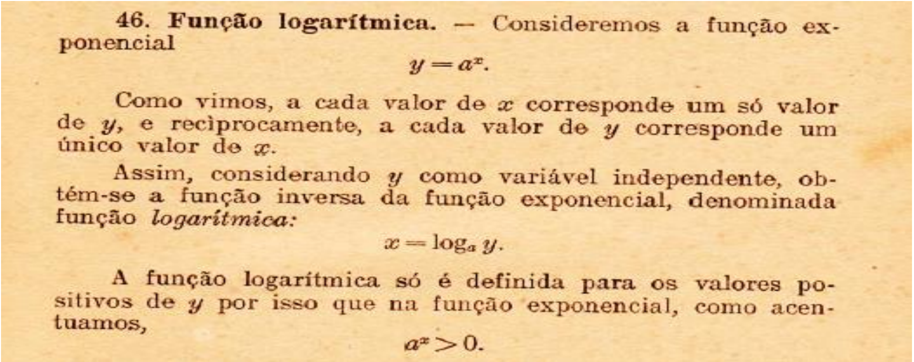


Fonte: Maeder (1949, p. 43-44).

Não há, no desenvolvimento do tema, exemplos de exercícios resolvidos e nem exercícios propostos sobre a função exponencial.

O conceito de função inversa comparece no tópico 46, como ponto de partida para a apresentação da função logarítmica (figura 23). O autor segue a mesma sequência apresentada por Roxo, Peixoto, Cunha e Netto (1945).

Figura 23- A definição de função logarítmica



46. Função logarítmica. — Consideremos a função exponencial

$$y = a^x.$$

Como vimos, a cada valor de x corresponde um só valor de y, e reciprocamente, a cada valor de y corresponde um único valor de x.

Assim, considerando y como variável independente, obtém-se a função inversa da função exponencial, denominada função *logarítmica:*

$$x = \log_a y.$$

A função logarítmica só é definida para os valores positivos de y por isso que na função exponencial, como acentuamos,

$$a^x > 0.$$

Fonte: Maeder (1949, p. 45).

.

As equações exponenciais são abordadas no capítulo V, logo após todo o estudo de logaritmos, intitulado *Resolução de Algumas Equações Exponenciais.* No tópico 72, é apresentada a definição de equação exponencial que é seguida de um exemplo literal no tópico 73. É apresentado um exercício resolvido, utilizando-se as propriedades dos logaritmos. Há mais dois exemplos literais nos tópicos 74 e 76. As equações do tipo

$$a^{b^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}} = m$$

são apresentadas como observação no tópico 75, sinalizando que são equações que poderão, em alguns casos, serem resolvidas sem auxílio dos logaritmos. É dado o exemplo $3^{2^x} = 6561$ que é resolvido.

No tópico 76, o autor mostra outro tipo de equação exponencial da forma:

$$a^{2x} + ba^x + c = 0$$

sugerindo a substituição de variáveis, considerando $a^x = y$

No tópico 77, há mais três exercícios resolvidos, seguidos dos propostos no tópico 78. Esses últimos são em número de vinte e com enunciado “resolver as equações seguintes”. Os exercícios de 1 a 7 são repetitivos, isto é, o autor muda apenas a base e o resultado da potenciação e pede o expoente. De 8 a 13, há soma no expoente e no primeiro membro da equação e são bem semelhantes. Os demais envolvem aplicações de logaritmos. Com os exemplos resolvidos, o aluno consegue resolver esses exercícios propostos.

Sistemas de representação

No texto descrito, há uma predominância da representação verbal, não havendo nenhum exemplo de exercício resolvido.

A representação simbólica se faz presente em todo o capítulo, seja na forma de se apresentar a função exponencial, bem como na forma de discorrer sobre expoentes com valores fracionários ou não.

Na representação tabular, verificam-se os quadros que evidenciam a variação da função (figuras 20 e 21).

Os gráficos são apresentados e complementam a visualização da variação da função exponencial, considerando base maior e menor que 1.

Fenomenologia

Fenômenos naturais: Não são apresentadas situações físicas da natureza nas quais a equação/função exponencial poderia ser verificada.

Fenômenos matemáticos: O autor utiliza operações aritméticas, tais como potenciação, radiciação e as operações fundamentais para a resolução de equações exponenciais.

3.1.3 Curso de Matemática 1.º ano para os Cursos Clássico e Científico, de Thales Mello Carvalho (1955)

O autor

Thales Mello de Carvalho nasceu em 1913 e faleceu em 1961 (GAERTNER; BARALDI, 2014, p.34). Engenheiro Civil e Geógrafo pela Escola Politécnica da Universidade Técnica Federal (atual Escola Politécnica da UFRJ). Foi professor de Matemática do Ensino Secundário do Distrito Federal; catedrático de Metodologia do Cálculo do Instituto de Educação do antigo Distrito Federal; Catedrático de Matemática Financeira da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas, professor de Matemática Geral e Financeira do Curso de Aperfeiçoamento da Caixa Econômica do Rio de Janeiro e do Curso de Extensão do Instituto de Resseguros do Brasil (CARVALHO, 1969, contra capa).

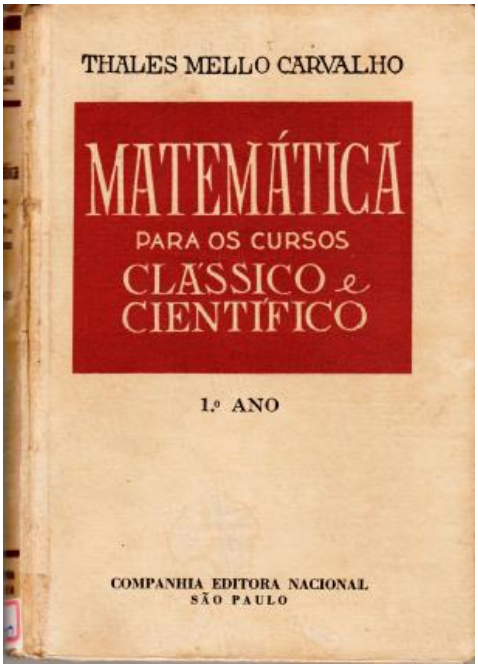
Outras obras publicadas por este autor:

- Curiosidades Matemáticas;
- Lições de Trigonometria Retilínea;
- Lições de Matemática;
- O número de ouro;
- Sobre Alguns Ábacos de Alinhamento e sua Aplicação ao Cálculo da Taxa de Anuidades (Tese);
- Elementos de Matemática Comercial e Financeira;
- Matemática para os Cursos Clássico e Científico (CARVALH0, 1969, contra capa).

Estrutura editorial

A obra corresponde à 9.ª edição, para o 1.º ano colegial, de 1955 e editada pela Companhia Editora Nacional (figura 24).

Figura 24- Capa do livro de autoria de Thales Mello de Carvalho (1955)



Fonte: Carvalho (1955).

Na folha de rosto, há o título da obra, o nome do autor, a informação de que está de acordo com os novos programas, conforme portarias n.º 966, de 2 de outubro de 1951 e 1045 de 14 de dezembro de 1951.

Em relação aos elementos textuais, a obra é organizada em sete capítulos: *Cálculo Numérico Aproximado*, *Progressões*, *Logaritmos*, *Geometria Espacial* e *Secções Cônicas*. Cada unidade é apresentada em tópicos enumerados cuja numeração é reiniciada nos tópicos seguintes.

Há exercícios com resolução e outros que são denominados *Exercícios para resolver*, cujas respostas são encontradas ao final de cada enunciado.

Análise do conteúdo equação/função exponencial

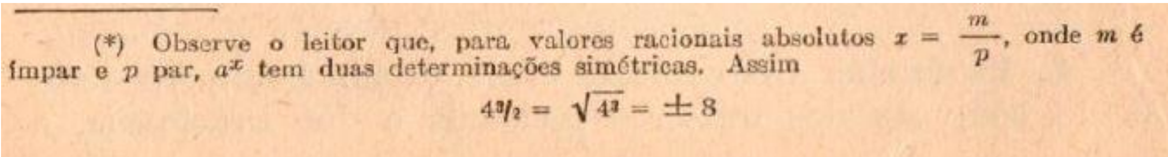
O livro em questão trata da função exponencial, dentro do capítulo de logaritmos (capítulo III) que é iniciado com uma abordagem sobre *potências*, evidenciando nos dois primeiros tópicos, as potências de expoente inteiro e de expoente racional com oito propriedades, demonstradas ao final do enunciado de cada uma. A exemplo de Dacorso Netto (1944), já introduz o termo limite com o seu símbolo. Citamos essas propriedades:

> I. Sendo a um número real absoluto e m um número natural, tem-se $a^m \gtrless 1$ ou $a^{-m} \lessgtr 1$ conforme $a \gtrless 1$.
> II. Sendo a e b números reais absolutos tais que $a > b$, e r um número racional positivo, tem-se $a^r > b^r$ e $a^{-r} < b^{-r}$.
> III. Sendo a um número real absoluto e r um número real positivo, tem-se $a^r \gtrless 1$ ou $a^{-r} \lessgtr 1$, conforme $a \gtrless 1$.

> IV. Sendo a um número real absoluto e r e r' números racionais tais que $r > r'$, tem-se $a^r \gtrless a^{r'}$ conforme seja $a \gtrless 1$.
> V. Sejam a um número real absoluto e r um número racional. Se $r > 1$, tem-se $a^r \gtrless a$, conforme seja $a \gtrless 1$; se $r < 1$, tem-se $a^r \lessgtr a$, conforme seja $a \gtrless 1$.
> VI. Sendo $a > 1$ e s um número absoluto arbitrário, é possível escolher um número racional absoluto r, tal que $a^r > s$.
> VII. Sendo $a < 1$ e s um número absoluto arbitrário, é possível escolher um número racional absoluto r, tal que $a^r < s$.
> VIII. Sendo $a > 1$ é possível escolher um número racional absoluto r tal que a diferença $a^r - 1$ seja inferior a um número racional positivo $\propto$, arbitrariamente escolhido (CARVALHO, 1955, p. 73-75).

São também apresentadas as potências de expoente real. A partir daí, é iniciada a explanação sobre a função exponencial, que é apresentada de uma maneira simples através da equação $y = a^x$, na qual considera a um número real positivo, diferente de 1. O autor chama a atenção do leitor, afirmando que o "símbolo a^x representa uma determinação positiva de a^x" (CARVALHO, 1955, p. 76). A nota de rodapé esclarece o caso (figura 25).

Figura 25- Nota de rodapé, mostrando duas determinações: a negativa e a positiva


(*) Observe o leitor que, para valores racionais absolutos $x = \frac{m}{p}$, onde m é ímpar e p par, a^x tem duas determinações simétricas. Assim

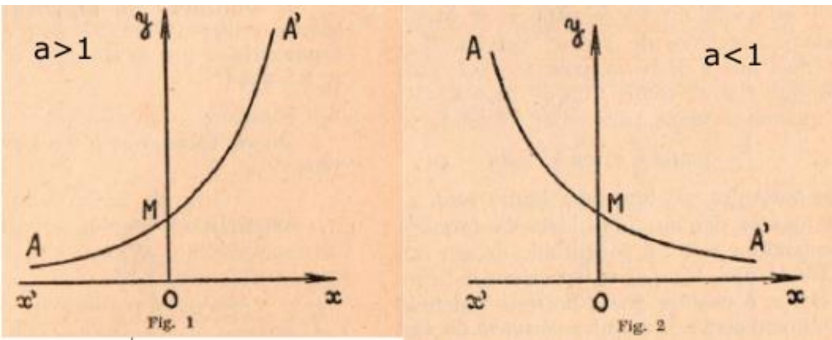
$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \pm 8$$

Fonte: Carvalho (1955, p. 76).

O autor aponta essa determinação positiva como sendo uma restrição, o que coloca a curva representativa da função no semiplano situado acima do eixo dos *x*.

As funções são colocadas no texto, utilizando-se a terminologia *Primeiro caso* para o caso da base maior que 1, expondo o gráfico e o *Segundo caso,* considerando a base menor que 1 (figura 26). Na definição o autor já se referiu à base como sendo um número real absoluto e diferente de 1.

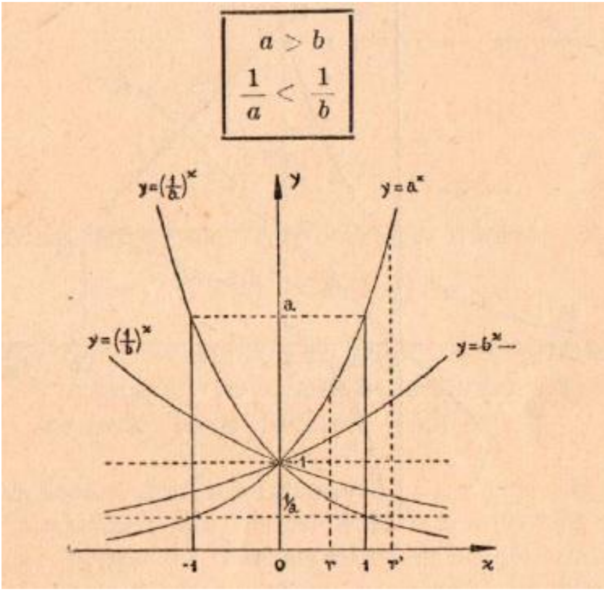
Figura 26- Representação gráfica da função exponencial para os dois casos de valores da base



Fonte: Carvalho (1955, p. 77-78).

Na observação do tópico 8, o autor leva até o leitor, um feixe de curvas exponenciais: considerou duas base a e b, sendo $a > b > 1$ e que, portanto, $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$. Assim, apresenta o gráfico e sugere que a utilização do feixe de curvas para um melhor entendimento das propriedades das potências que foram citadas (figura 27).

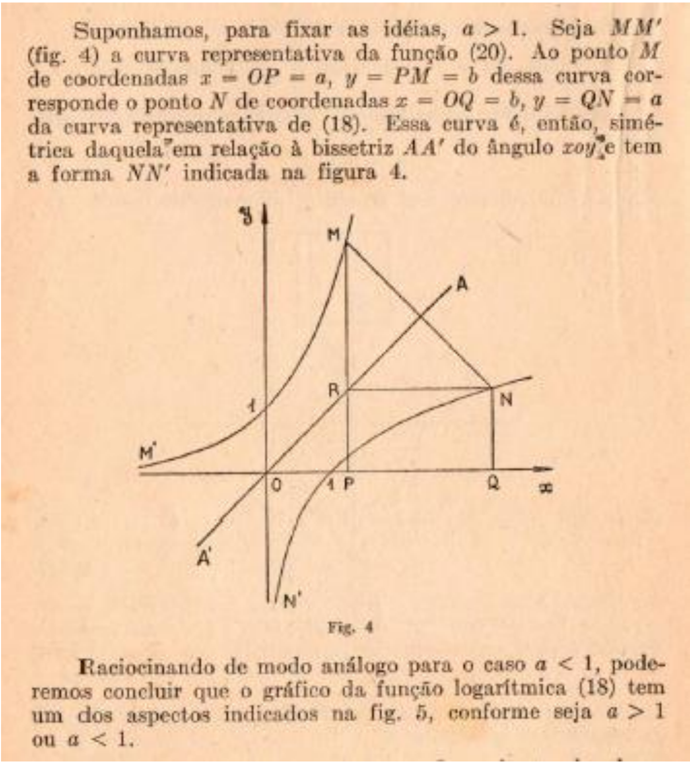
Figura 27- Feixe de curvas exponenciais para bases maiores e menores que 1



Fonte: Carvalho (1955, p. 79).

A *função logarítmica* é discutida pelo autor de uma forma clara quando mostra a função logarítmica pela equação $y = \log_a x$, sendo *a* um número real absoluto, diferente de 0 e de 1 e deduz a igualdade $x = a^y$ que define *x* como função exponencial de y. Observamos que o autor não utiliza o termo direto *função inversa*, mas constrói a curva da função logarítmica de uma forma distinta dos outros autores analisados (figura 28).

Figura 28- Construção do gráfico da função logarítmica



Suponhamos, para fixar as idéias, $a > 1$. Seja MM' (fig. 4) a curva representativa da função (20). Ao ponto M de coordenadas $x = OP = a$, $y = PM = b$ dessa curva corresponde o ponto N de coordenadas $x = OQ = b$, $y = QN = a$ da curva representativa de (18). Essa curva é, então, simétrica daquela em relação à bissetriz AA' do ângulo xoy e tem a forma NN' indicada na figura 4.

Fig. 4

Raciocinando de modo análogo para o caso $a < 1$, poderemos concluir que o gráfico da função logarítmica (18) tem um dos aspectos indicados na fig. 5, conforme seja $a > 1$ ou $a < 1$.

Fonte: Carvalho (1955, p. 80).

As equações exponenciais são descritas no mesmo capítulo III (logaritmos) e no tópico 40, *Preliminares*, o autor expõe que “Equação exponencial é aquela que contém incógnita em expoente” (CARVALHO, 1955, p. 101). Confirma que a mais simples é a da forma $a^x = b$ e propõe uma solução, utilizando, como recurso, os logaritmos. Nos tópicos de 31 a 45, emprega, como recurso pedagógico, exercícios com resolução, levando ao conhecimento do leitor não só a resolução, mas os tipos de equações exponenciais, normalmente apresentados por outros autores: equação na qual os membros não são potências de mesma base, solução por logaritmos; membros que são potências de mesma base e equações cujo primeiro membro é uma soma de exponenciais de mesma base. As atividades são colocadas como *exercícios para resolver*, no tópico 46, em um total de 15, e os demais com a proposição de *Resolver a equação*. As respostas são colocadas ao final de cada enunciado (figuras 29 e 30).

Figura 29- Exercícios para resolver de 1 a 9

1. Resolver a equação $5 \times 3^x = 405$.
Resp.: $x = 4$
2. Resolver a equação $2 \times 3^{2x} = 1458$.
Resp.: $x = 3$
3. Resolver a equação $(a^{x+1})^x = (a^x)^2$.
Resp.: $x' = 0,\ x'' = 1$
4. Resolver a equação $2{,}37^x = 3{,}754$.
Resp.: $x = 1{,}534$
5. Resolver a equação $2{,}634^{x-1} = 3{,}41$.
Resp.: 2,266
6. Resolver a equação $(a^{x+2})^x = a^{3x}$.
Resp.: $x' = 0,\ x'' = 1$
7. Resolver a equação $(5^{x-1})^{x-4} = 625$.
Resp.: $x' = 5,\ x'' = 0$
8. Resolver a equação $2^{(x-1)(x+3)} = 1$.
Resp.: $x' = 1,\ x'' = -3$
9. Resolver a equação $\sqrt[x]{a} = a^{4x}$.
Resp.: $x = \pm \frac{1}{2}$

Fonte: Carvalho (1955, p. 103).

Figura 30- Exercícios para resolver de 10 a 15

10. Resolver a equação $2^{x+3} + 4^x = 128$.
Resp.: $x = 3$
11. Resolver a equação $4^{x+2} - 2^{x+3} = 48$.
Resp.: $x = 1$
12. Resolver a equação $3^x + 9^x = 90$.
Resp.: $x = 2$
13. Resolver a equação $4^{\sqrt{x}} = 256$.
Resp.: $x = 16$
14. Resolver a equação $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 30$.
Resp.: $x = 4$
15. Resolver a equação $2^x + 2^{x+1} + \frac{8}{2^{x-1}} = 49$.
Resp.: $x = 4$

Fonte: Carvalho (1955, p. 103).

Todos os exercícios propostos são semelhantes aos exemplos resolvidos no texto, sendo que os de números 4 e 5 envolvem aplicação de logaritmos. Todos os demais, como sublinhado pelo autor “requer um pequeno artifício” (CARVALHO, 1955, p. 102). São resoluções diretas e de caráter repetitivo.

Sistemas de representação

O autor faz uso de parágrafos explicativos sobre propriedades de potências e demonstrações sem utilizar exemplos de exercícios resolvidos, ou seja, explorou bastante a representação textual.

A representação simbólica se faz presente em todo o capítulo, seja na forma de se apresentar a função exponencial, bem como na forma de discorrer sobre expoentes com valores fracionários ou não.

Não houve representação por meio de quadros ou tabelas. A representação gráfica é usada para as funções e, ao que parece, com o objetivo de fazer o aluno compreender intuitivamente as propriedades das potências que foram citadas: “Para uma compreensão mais intuitiva das propriedades do n.º 3[13], sugerimos ao leitor interpretá-las à luz do gráfico da fig. 3" (CARVALHO, 1955, p. 78). A figura indicada pelo autor corresponde à figura 27 desse trabalho.

Fenomenologia

Fenômenos naturais: Não são apresentadas situações físicas da natureza nas quais a equação/função exponencial poderia ser verificada.

Fenômenos matemáticos: O autor utiliza operações aritméticas, tais como potenciação, radiciação e as operações fundamentais para a determinação de potências e para a resolução de equações exponenciais.

3.1.4 Matemática Curso Colegial Moderno, de Scipione Di Pierro Netto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa (1967)

Os autores

Scipione Di Pierro Netto

Scipione Di Pierro Netto (1926-2005) era doutor em Educação pela Universidade de São Paulo – USP. No início de sua carreira, foi professor de Matemática na rede pública do Estado de São Paulo, ingressando posteriormente, por concurso público, no Colégio de Aplicação da USP. Lecionou em diversas instituições de Ensino Superior, entre elas a USP e a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Teve participação no G.E.E.M. – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, presidido por Osvaldo Sangiorgi. Scipione foi autor de inúmeros livros didáticos de Matemática e começou a ter destaque nesse ofício no final da década de 1960 (QUEIROZ; ZUIN, 2016, p. 8).

Algumas obras publicadas por este autor:

- Matemática Para a Escola Moderna 4 volumes: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries do Curso Ginasial.
- Matemática na Escola Renovada –1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries do Curso Ginasial.
- Matemática Passo a Passo – 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries do 1º grau.
- Matemática na Escola Renovada –1º, 2º e 3º anos do Curso Colegial (coautora: Célia Contin Goes).
- Matemática – 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do 1º grau (coautores: Magda Teresinha Angelo, Edson do Carmo e Lilia Maria Faccio) (BROLEZZI; PINHEIRO, 2008, p. 3).

Luiz Mauro Rocha

Foi professor de Cálculo Infinitesimal da FEI – Faculdade de Engenharia Industrial[14] e da FFCL da Fundação Santo André. Foi Instrutor de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica da USP e Ex-professor do Colégio Estadual de São Paulo (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967).

[13] As propriedades do n.º 3 estão descritas nas página 46.

[14] Criada pelo decreto n. 20.942 de 9/4/1946. No mesmo ano, em 22 de agosto, a FEI e outras faculdades constituiram a PUC de São Paulo. A partir do final de 1971, desligou-se da PUC, voltando à condição de instituição isolada de ensino superior (http://portal.fei.edu.br/pt-BR/fei/historia/Paginas/historia.aspx).

Ruy Madsen Barbosa

Doutor em Matemática pela Universidade Católica de Campinas. Livre docente de Matemática da FFCL de Araraquara. Foi professor do ensino secundário oficial do estado de São Paulo (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967).

Estrutura Editorial

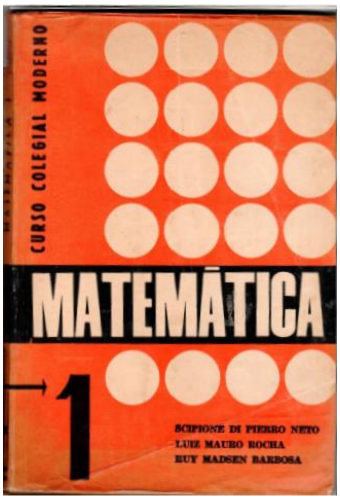
A obra corresponde ao volume 1, da 1.[a] edição, de 1967. Editada pelo Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.

O papel da capa (figura 31) é de papel flexível, semelhante a cartolina com *layout* moderno.

Na parte superior da folha de rosto, dispõem-se os nomes dos autores e o título é centralizado. Na parte inferior, o nome da editora, com endereço, telefones e caixa postal.

Quanto aos elementos textuais, os conteúdos estão dispostos em quatro partes, sendo a primeira denominada *FUNDAMENTOS*, com dois capítulos. A segunda parte compreende *FUNÇÕES ELEMENTARES* com três capítulos. A quarta parte, *TRIGONOMETRIA* com dois capítulos e a quarta e última parte, *GEOMETRIA* com um capítulo. São, portanto, oito capítulos, enumerados em algarismo romano.

Figura 31- Capa do livro Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967)



Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967).

Na apresentação, os autores justificam a publicação, afirmando:

> A idéia da publicação de uma série colegial de "Matemática Moderna", em prosseguimento à "Matemática para a Escola Moderna", do prof. Scipione Di Pierro Neto, tomou forma e se concretizou durante o transcurso do V Congresso de Ensino da Matemática, realizado em S. José dos Campos, no Centro Técnico de Aeronáutica, em 1966. Naqueles dias, em contato com professores de quase todos os Estados, sentimos bem de perto a angústia com que os nossos colegas se referiam à dificuldade que encontravam para a atualização do ensino da matemática no colégio, dada a inexistência, ao seu alcance, de obras nacionais e estrangeiras (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, apresentação).

Os autores também justificam a presença da primeira parte, adotando normas para a redação dos três volumes:

> 1. Apresentar, no início do primeiro volume, um capítulo de FUNDAMENTOS, destinado aos professôres ainda não iniciados na "Matemática Moderna", redigido em linguagem fácil e nível elementar – de modo a que possa ser aprendido e ao mesmo tempo ensinado, no todo ou em parte, aos alunos (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, apresentação).

Os textos são desenvolvidos em tópicos enumerados em ordem crescente de 1 a 198.

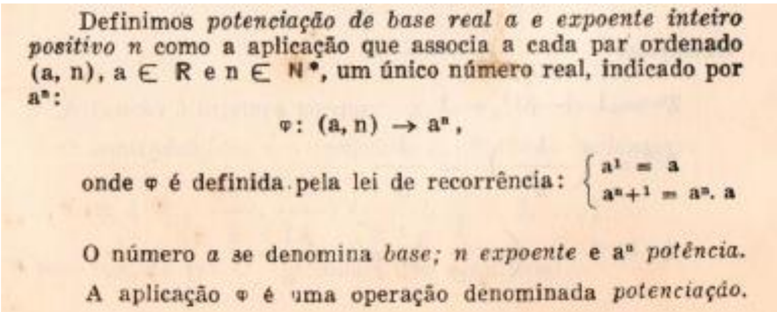
Análise do conteúdo equação/função exponencial

A função exponencial inicia-se no capítulo V, tópico 68 com o título *Potências com expoente real*.

Os autores fazem uso de textos bem explicativos e o fazem como se estivessem conversando com o leitor, ao anunciar que "Nos capítulos anteriores, temo-nos referido constantemente aos números reais, embora sem termos desenvolvido uma *Teoria dos Números Reais"* (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, p. 123). No parágrafo segundo, escrevem "Aceitamos que o leitor é possuidor de uma idéia intuitiva da natureza desses números e que sabe utilizar as propriedades essenciais da adição multiplicação e operações inversas: subtração e divisão" (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, p. 123).

Antes, então, do estudo da função exponencial, são feitos alguns comentários sobre a operação de potenciação e a definição de potenciação de base real *a* e expoente inteiro positivo *n* é feita, utilizando-se uma representação simbólica bem detalhada (figura 32).

Figura 32- Definição de potenciação e a definição de potenciação de base real a e expoente inteiro positivo



Definimos *potenciação de base real a e expoente inteiro positivo n* como a aplicação que associa a cada par ordenado (a, n), $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, um único número real, indicado por a^n:

$$\varphi : (a, n) \to a^n,$$

onde φ é definida pela lei de recorrência: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n . a \end{cases}$

O número *a* se denomina *base*; *n expoente* e a^n *potência*.

A aplicação φ é uma operação denominada *potenciação*.

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 123).

O autor define a aplicação φ como uma operação denominada potenciação. Esta é uma forma não encontrada em outros autores.

As propriedades das potências são colocadas em destaque por meio de uma representação por quadro (figura 33).

Figura 33- Propriedades das potências

1.) $a^{m+n} = a^m . a^n$

2.ª) $(a^m)^n = a^{m.n}$

3.ª) $a^{m-n} = a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n}$, $a \neq 0$, $m - n \geq 1$

4.ª) $(a.b)^n = a^n.b^n$

5.ª) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 124).

A extensão da definição da operação φ para expoentes zero e negativos é feita com a utilização do símbolo *para todo* (∀) (figura 34).

Figura 34- Extensão da definição de φ

II. $a^0 = 1$, $\forall$ a real $\neq 0$

III. $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a^n}\right)$ $\forall$ $a \neq 0$

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 124).

A função injetora de domínio Z é obtida, fixando a base a, no caso $a = 2$ e variando o expoente x no conjunto Z. Os autores utilizam o quadro de valores para $a = 2$. A função é apresentada com a simbologia $\varphi : x \to y = 2^x,\ x \in Z$ (figura 35).

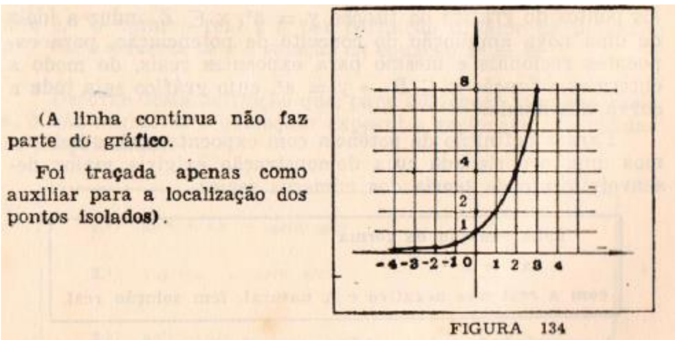
Figura 35- Valores de y para base igual a 2

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 125).

A representação gráfica dessa função é feita com uma linha contínua com a observação de que não faz parte do gráfico (figura 36).

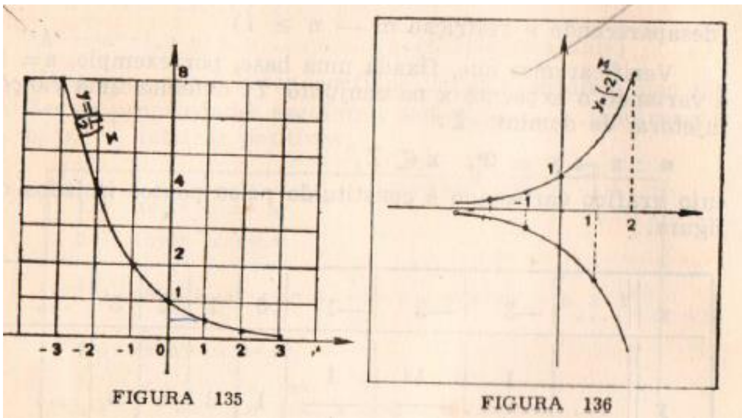
Figura 36- Representação gráfica da função injetora com domínio Z



Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 125).

As representações gráficas para a base compreendida entre 0 e 1 e para a base menor que 0 são também realizadas (figura 37).

Figura 37- Representações gráficas para base entre 0 e 1 e para base negativa



Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 126).

Para a potência com expoente real, os autores apresentam a propriedade “Tôda equação da forma $x^n = a$ com *a* real não negativo e *n* natural, tem solução real” (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, p. 126). As definições de potências com expoentes reais são feitas para bases não negativas. São apresentadas novamente cinco propriedades para quaisquer números reais *a*, *b* não negativos e quaisquer expoentes racionais (figura 38).

Figura 38- Propriedades das potências para quaisquer expoentes racionais

1.ª) $a^{p/n + q/r} = a^{p/n} . a^{q/r}$

2.ª) $(a^{p/n})^{q/r} = a^{p/n . q/r}$

3.ª) $a^{p/n - q/r} = \dfrac{\quad}{a^{q/r}}$, $a \neq 0$

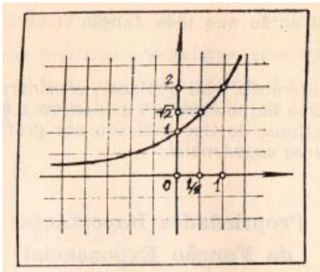
4.ª) $(a . b)^{p/n} = a^{p/n} . b^{p/n}$

5.ª) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p/n} = \dfrac{a^{p/n}}{a^{p/n}}$, $b \neq 0$

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 127).

A representação gráfica da função $y = 2^x$, para *x* racional é apresentada, considerando valores de *x* iguais a 0, 1/2 e 1 (figura 39).

Figura 39- Representação gráfica dos pontos (x, a^x) para valores de *x* iguais a 0, 1/2 e 1



Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 129).

As propriedades das potências com expoente real, em número de cinco, são apresentadas em um quadro (figura 40).

Figura 40- Propriedades das potências de expoente real

1.ª) $a^{x+y} = a^x . a^y$, $\forall a > 0$ real, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

2.ª) $(a^x)^y = a^{x . y}$, $\forall a > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

3.ª) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$, $\forall a > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

4.ª) $(ab)^x = a^x . b^x$, $\forall a, b > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

5.ª) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, $b \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 129).

Por último, no tópico 68, é apresentada a definição de função exponencial:

> Admitimos então que tôda função $y = a^x$ com a real positivo e x real qualquer, considerando para cada x o valor positivo da potência a^x, é

> *injetora* e tem por gráfico uma curva contínua, do tipo indicado nos gráficos anteriores, denominada *curva exponencial* (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, p.130).

Com relação às propriedades da função exponencial, são apresentadas dez propriedades, enumeradas em algarismos romanos, que tratam respectivamente, da intersecção com o eixo y, do ponto de abscissa 1, do sinal de $f(x)$, das abscissas positivas e negativas para base maior que 1, das abscissas positivas e negativas para base entre 0 e 1, da monotonicidade para base maior que 1, da monotonicidade para base entre 0 e 1, da aproximação do eixo horizontal para base maior que 1, da aproximação do eixo horizontal para base entre 0 e 1 e da exponencial $y = 1^x$.

É importante ressaltar aqui as duas propriedades também apresentadas como características da função exponencial:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1).f(x_2) \quad \text{ou} \quad a^{x_1+x_2} = a^{x_1}.a^{x_2}$$
$$[f(x_1)]^{x_2} = f(x_1.x_2) \quad \text{ou} \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$$

A definição de equação exponencial é formalizada de uma forma que difere dos autores já mencionados aqui, pois usam o termo *sentença numérica aberta*. Assim a definem: "Equação exponencial é uma sentença numérica aberta, na variável real x, onde x figura em expoentes" (DI PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA, 1967, p.133). Afirma que a equação exponencial mais simples é a da forma $a^x = b$, onde a e b são constantes positivas. São apresentados dois exemplos de resolução. Outros tipos de equação que se reduzem a essa forma são apresentadas em mais três exemplos.

A função logarítmica será apresentada no tópico 81 e, dessa forma, não foram apresentados os casos de equações com resolução por meio das propriedades operatórias dos logaritmos. Os exercícios para o aluno são encontrados no tópico 79 com a construção de gráficos, aplicação das propriedades das potências e equações exponenciais para resolver (36 equações) em ordem crescente de complexidade, sendo a número 1 a equação $3^x = 1/81$ e a de número 36, $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$. As respostas estão no tópico 80.

A função logarítmica é apresentada como inversa da função exponencial geral $y = f(x) = a^x$ no caso em que a base a é positiva e diferente de 1, utilizando a representação simbólica (figura 41).

Figura 41- Representação simbólica da função logarítmica

$$\boxed{x = \log_a y \iff y = a^x \text{ , } a > 0, \neq 1}$$

Fonte: Di Pierro Neto, Rocha e Barbosa (1967, p. 138).

Sistemas de representação

Os autores utilizam bastante à representação textual com conceitos, definições e demonstrações de propriedades das potências.

A representação simbólica é bastante explorada por já se tratar de uma obra que coloca para o leitor a linguagem da Matemática Moderna. Na representação tabular, verificam-se quadros que ressaltam as propriedades das potências e tabelas são também utilizados pelos autores e a apresentação de gráficos é feita com a utilização de linhas de grade o que já denota um diferencial de apresentação dessa obra.

Fenomenologia

Fenômenos naturais: Não são apresentadas situações físicas da natureza nas quais a equação/função exponencial poderia ser verificada.

Fenômenos matemáticos: A resolução de uma equação exponencial ou a determinação da variável y para possíveis valores de x sempre exige a aplicação de operações aritméticas, tais como potenciação, radiciação e as operações fundamentais.

3.1.5 Matemática 2º Grau 1ª Série, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antônio dos Santos Machado (1978).

Os autores

Não foram encontrados na bibliografia dados biográficos de alguns dos autores. Por essa razão, citamos apenas Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Nilson José Machado.

Gelson Iezzi

É formado em Engenharia Metalúrgica pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e Licenciatura em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IEZZI *et al.*, 2006).

Outros títulos de sua autoria:

- Matemática Ciência e Aplicações, volumes 1, 2 e 3 em coautoria com Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
- Matemática conecte, volume único.
- Matemática e realidade para o ensino fundamental em coautoria com Osvaldo Dolce e Antônio Machado[15].
  (disponível em < https://www.livrariacultura.com.br/e/gelson-iezzi).

Osvaldo Dolce

Engenheiro Civil pela Escola Politécnica da USP e licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IEZZI *et al.*, 2006).

Outros títulos de sua autoria:

- Matemática Ciência e Aplicações, volumes 1, 2 e 3 em co-autoria com Gelson Iezzi, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
- Matemática e realidade para o ensino fundamental em co-autoria com Gelson Iezzi e Antônio Machado (IEZZI *et al.*, 2006).

[15] Disponível em < https://www.livrariacultura.com.br/e/gelson-iezzi.

Nilson José Machado

Nasceu em Olinda, Pernambuco, em 1947. É licenciado em Matemática e doutor em Filosofia da Educação pela Universidade de São Paulo, onde é professor desde 1972, inicialmente no Instituto de Matemática e Estatística. Leciona na Faculdade de Educação desde 1984, sendo atualmente professor titular. Publicou diversos livros didáticos e paradidáticos para os três níveis de ensino (MACHADO, 2004, p.155).

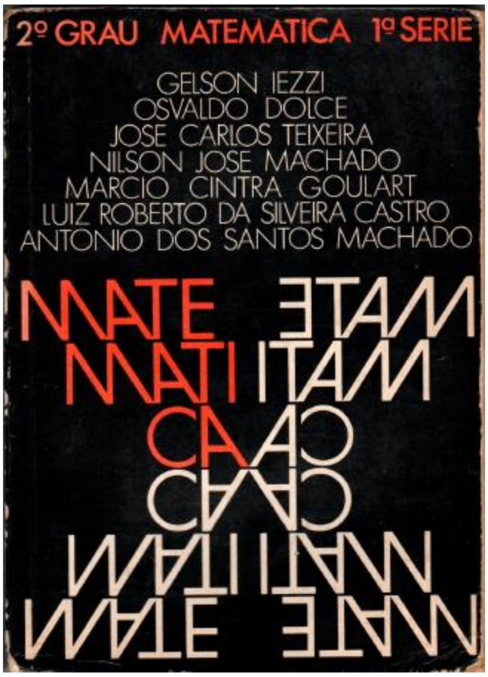
Outros títulos de sua autoria:

- Matemática e Realidade, 1987.
- Matemática e Língua Materna, 1999.
- Matemática e Educação, 2000.
- Epistemologia e didática, 2000.
- Educação: Projetos e Valores, 2004 (MACHADO, 2004, p.155).

Estrutura Editorial

A obra é destinada à primeira série do segundo grau e foi editado pela Atual Editora, em 1978, sendo esta a sexta edição revisada (figura 42). A primeira edição foi de 1973. A capa é de papel flexível com a palavra *matemática* escrita em vermelho e a imagem especular no semiplano direito e também no inferior. Os nomes dos autores foram dispostos de forma a produzir uma visualização piramidal.

Figura 42- Capa do livro



Fonte: Iezzi *et al.* (1978).

A folha de rosto tem como diferencial a informação do número de exemplos, de exercícios resolvidos e exercícios propostos ao todo na obra, além dos nomes dos autores, o público alvo que são alunos da 1.ª série do 2.º grau.

Os conteúdos abordados estão dispostos em 9 capítulos que são subdivididos em tópicos. A função exponencial se encontra no capítulo 7, sendo o capítulo 1 destinado aos conjuntos. No prefácio, os autores relatam sobre a metodologia utilizada na elaboração do livro:

> [...] procuramos chegar aos conceitos fundamentais através de exemplos, muitas vezes não matemáticos, tentando tornar as definições as mais naturais possíveis. Tivemos também a preocupação de apresentar sempre que possível, os vínculos da Matemática com outras ciências, notadamente a Física. A teoria apresenta-se em doses nunca muito grandes, seguidas de exercícios que devem ser considerados parte integrante do texto. Procuramos apresentar exercícios resolvidos e propostos compatíveis com a teoria dada e o objetivo visado (IEZZI *et al.*, 1978, prefácio).

Análise do conteúdo equação/função exponencial

O capítulo 7 traz como ponto de partida a operação de potenciação, apresentando em primeiro lugar a *potência com expoente inteiro*. É apresentado um quadro de definição e denominando a^n de potência de base *a* e expoente inteiro *n* (figura 43).

Figura 43- Definição de potência de expoente inteiro

$$\begin{array}{lll} \text{para } n > 1, & a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}; & \\ \text{para } n = 1, & a^1 = a; & \\ \text{para } n = 0, & a^0 = 1; & \\ \text{e ainda,} & a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} & \text{para } a \neq 0. \end{array}$$

Fonte: Iezzi *et al.* (1978, p.133).

Os exercícios para a aplicação da definição são propostos em seguida e em número de 7 com subitens, totalizando 47 potências a serem calculadas.

Outro quadro mostra as propriedades das potências com expoente inteiro (figura 44).

Figura 44- Propriedades das potências com expoente inteiro

$$\begin{array}{lll} P_1 & a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \\ P_2 & a^m : a^n = a^{m-n} & \text{para} \quad a \neq 0 \\ P_3 & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \\ P_4 & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} & \text{para} \quad b \neq 0 \\ P_5 & (a^m)^n = a^{m \cdot n} & \end{array}$$

Fonte: Iezzi *et al.* (1978, p.134).

Os exercícios propostos se apresentam como: *Classificar em V (verdadeiro) ou F (falso)* e *Simplificar as expressões*.

No tópico seguinte são apresentados os *radicais* com suas propriedades em outro quadro. Para o aluno, os exercícios são da forma: *calcular, simplificar, Classificar em V (verdadeiro) ou F (falso), resolver as equações em R.*

Continuando com o texto, mostram as potências com expoente racional, com expoente irracional e com expoente real para, assim, na página 139, mostrar as equações exponenciais.

Para as equações exponenciais, não há definição e tampouco a classificação das equações. São resolvidos alguns exemplos que foram denominados de R.114 (por se tratar do centésimo décimo quarto exercício resolvido), R.115 (dois exemplos) e R.116 (dois exemplos). Os exercícios propostos são similares aos resolvidos e os enunciados são do tipo *resolver as equações exponenciais*.

A comparação de potências, no tópico 7, é resumida em um quadro (figura 45).

Figura 45- Comparação de potências

Se a, b, c $\in \mathbb{R}$, então,

para $a > 1$ tem-se $a^b < a^c \iff b < c$

para $0 < a < 1$ tem-se $a^b < a^c \iff b > c$

Fonte: Iezzi *et al.* (1978, p.142).

No tópico 8, tem-se a definição de função exponencial como sendo a função, definida para todo *x* real, $f(x) = a^x$ cujo domínio é R e conjunto imagem, R_+^*.

Os gráficos da função exponencial são ilustrados através de dois exemplos, utilizando a base 2 e a base 1/2, acompanhados das tabelas de valores (x, y) (figura 46). O plano cartesiano apresenta linhas de grade a exemplo do que foi utilizado por Di Pierro Netto *et al.* (1967).

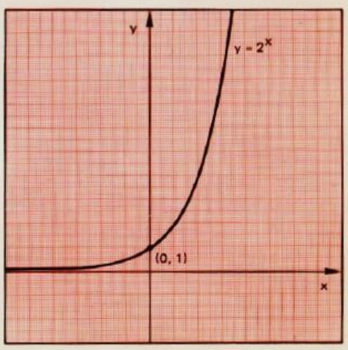
Figura 46- Exemplo de gráfico da função exponencial

1º exemplo: $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$.

Tabela

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Gráfico



Fonte: Iezzi *et al.* (1978, p.143).

A partir dos exemplos, concluem que a curva está acima do eixo dos *x*. A curva corta o eixo dos *y* no ponto de ordenada +1 e tem dois aspectos, conforma a base seja maior que 1 ou ser um número compreendido entre 0 e 1.

Os exercícios resolvidos têm como enunciado, classificar as funções em crescentes ou decrescentes. Trata-se do exercício R.117 com subitens de *a* a *e*.

O último tópico refere-se a inequações exponenciais e fornece mais dois exercícios resolvidos.

Nos exercícios propostos, o aluno deverá esboçar gráficos de algumas funções exponenciais, classificar as funções em crescente ou decrescente, resolver inequações exponenciais e determinar o domínio de funções.

Sistemas de representação

A representação textual é notada pelos textos elaborados, principalmente na parte teórica para a descrição das potências. No que tange à função exponencial propriamente dita, não se observa textos longos.

A representação simbólica foi destacada na utilização dos símbolos de menor que (<) e maior que (>). Há pouco uso da simbologia própria para conjuntos.

Na representação tabular, verificam-se os quadros, os quais são explorados para mostrar propriedades e comparações entre potências.

Os gráficos mostrados tiveram como finalidade a representação da variação das funções exponenciais e não foram muitos, apenas quatro.

Fenomenologia

Fenômenos naturais: Apesar de Gelson Iezzi colocar em seu prefácio que iria fazer "os vínculos da Matemática com outras ciências", algo que seria muito pertinente para as equações exponenciais, não são encontradas situações físicas ou químicas relacionadas ao tema, apesar da citação da aplicação da Matemática na Eletrônica através de uma figura (figura 107).

Fenômenos matemáticos: Verificado fenômenos matemáticos na aplicação de operações aritméticas, tais como potenciação, radiciação e as operações fundamentais.

Complementando as análises dos livros citados, montamos alguns quadros que permitem uma melhor visualização das abordagens feitas pelos autores analisados. O quadro 3 faz referência à função exponencial, mostrando a existência ou não de demonstrações de princípios ou propriedades, de exercícios resolvidos e de exercícios propostos para o aluno, enquanto o quadro 4 refere-se às equações exponenciais.

Quadro 3- Quadro para a função exponencial

Autores	Demonstrações de teoremas ou princípios/propriedades	Exercícios resolvidos ou exemplos/número	Exercícios propostos/número
Roxo *et al* (1938)	-	4 exemplos	8
Maeder (1949)	X	-	-
Carvalho (1955)	-	-	-
Di Pierro Netto *et al* (1967)	-	8 exemplos	16
Iezzi *et al* (1978)	-	10 exercícios resolvidos	51

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 4- Quadro para equações exponenciais

Autores	Demonstrações de teoremas ou princípios/propriedades	Exercícios resolvidos ou exemplos/número	Exercícios propostos/número
Roxo *et al* (1938)	-	-	3
Maeder (1949)	-	8 exemplos	20
Carvalho (1955)	-	5 exercícios resolvidos	15
Di Pierro Netto *et al* (1967)	-	6 exemplos	36
Iezzi *et al* (1978)	-	8 exercícios resolvidos	19

Fonte: Dados da pesquisa.

Outro ponto importante que deve ser evidenciado diz respeito à função logarítmica. Alguns autores a apresentam juntamente com a função exponencial e apresentam um capítulo separado, denominado de *Logaritmos*, apresentando as propriedades operatórias. O quadro 5 mostra essa disposição nas cinco obras analisadas.

Quadro 5- Quadro demonstrativo da apresentação da função logarítmica

Autores	Função logarítmica	Teoria dos logaritmos	Equações exponenciais	Aplicação
Roxo *et al* (1938)	_	Capítulo VII	No mesmo capítulo	Juros compostos
Maeder (1949)	Mesmo capítulo da função exponencial	Capítulo IV	Capítulo V	_
Carvalho (1955)	Funções exponencial e logarítmica apresentadas no mesmo capítulo.	Capítulo III, contendo funções exponencial e logarítmica.	Mesmo capítulo (III)	_
Di Pierro Netto *et al* (1967)	Apresentada após a função exponencial e em partes separadas do mesmo capítulo	_	Antes da função logarítmica e após a função exponencial	_
Iezzi *et al* (1978)	Capítulo separado (Capítulo 8)	_	No mesmo capítulo da função exponencial	Citação de aplicações na eletrônica

Fonte: Dados da pesquisa.

As duas últimas obras apresentam as equações exponenciais antes da função logarítmica. Com relação ao modo de apresentação da função logarítmica, elaboramos o quadro 6 que mostra a forma de abordagem do tema em cada uma das obras.

Quadro 6- Apresentação da definição de função logarítmica

Autores	Definição da função logarítmica a partir do conceito de função inversa	Definição da função logarítmica a partir do conceito de logaritmos
Roxo *et al* (1938)	X	-
Maeder (1949)	X	-
Carvalho (1955)	-	X
Di Pierro Netto *et al* (1967)	X	-
Iezzi *et al* (1978)	X	-

Fonte: Dados da pesquisa.

4. ÚLTIMAS PALAVRAS

Esse trabalho destaca um tópico curricular da Matemática, por cinco décadas, a partir do viés da História das Disciplinas Escolares, dentro da perspectiva de André Chervel (1990). Procuramos dar enfoque nas transformações experimentadas pelo ensino de Matemática, durante o período analisado relativamente às equações e funções exponenciais.

Os livros didáticos possibilitaram uma avaliação de como os referidos conteúdos foram apresentados e oferecidos aos professores e alunos, ainda que não fossem tomados no seu todo ou em parte nas salas de aula.

A Educação Matemática brasileira, dentro do marco temporal estabelecido, passou por importantes reformas educacionais e momentos, a exemplo do Movimento da Matemática Moderna, que marcaram de forma contundente o ensino de Matemática. Foi assim que a década de 1930 viveu a Reforma Francisco Campos e a década de 1940, a Reforma Capanema. Em 1951 foram implantadas as portarias do Programa Mínimo (966 e 1.054). A Reforma Capanema trouxe os Cursos Clássico e Científico, que se estenderam por três décadas, chegando até 1971, ano da promulgação da LDB n.º 5.692. Já o Movimento da Matemática Moderna teve como um dos objetivos uma maior proximidade da “Matemática do colégio” da “Matemática do ensino superior”. A escolha de cinco livros foi realizada de forma que cada um deles pertencesse a uma das décadas e a uma das reformas, selecionando autores que foram importantes na época.

Voltando agora o nosso olhar para o conteúdo equação/função exponencial, podemos evidenciar que, apesar da presença do mesmo em obras anteriores à reforma Francisco Campos, a sua obrigatoriedade nos programas se deu a partir da publicação dessa reforma. Avaliamos que, naquele momento, a apresentação da função exponencial se dava de uma forma elementar, pouco detalhada, assim como a equação exponencial.

A Reforma Capanema veio a seguir, propôs mudanças, criando os Colégios. Os programas sofreram modificações e o conteúdo função exponencial passaria a ser abordado no segundo ano colegial no Curso Científico, juntamente com as equações exponenciais. A partir desta reforma, esses tópicos deveriam ser apresentados de uma forma mais aprofundada com ênfase em propriedades e demonstrações.

O Programa Mínimo reduziu o currículo de Matemática dos Cursos Clássico e Científico, fazendo com que os programas fossem trabalhados pelos professores, a partir de uma limitação das informações, abrindo mão de demonstrações, que alguns consideravam como excessivas. A função exponencial não figurou mais nos programas oficiais, prevalecendo apenas a equação exponencial, com pouco suporte teórico e muitos exercícios, com o enunciado tendo apenas o termo “resolva”.

Na década de 1960, o ensino presenciou a agitação trazida pelo Movimento da Matemática Moderna – MMM, surgindo obras que exploravam as cores nas capas e nas figuras dos textos. Nessa década, a Teoria dos Conjuntos tomou lugar de destaque em muitos livros, chamando de volta a função exponencial, passando a ser discutida de forma abstrata pelo uso da simbologia que fazia parte do cotidiano dos adeptos do MMM. Para além de 1970 até 1980, a função/equação exponencial se fazem presentes nos livros, mantendo o mesmo modo de apresentação, explorando as definições, o campo de validade da função, os exercícios resolvidos.

Apesar de não ter sido realizada uma análise dos livros didáticos na íntegra e, sim, da forma de abordagem de tópicos específicos, através do índice dos mesmos, foi possível perceber que, no período de 1943 a 1951, houve uma estabilidade no rol de conteúdos. Na fase de 1952 a 1961, com o estabelecimento do Programa Mínimo, verificamos que os livros analisados apresentavam um padrão no que se refere à metodologia de exposição dos conteúdos: uma linguagem simples e direta, com a inserção de exercícios resolvidos e propostos.

Pode-se dizer que o MMM deu uma reviravolta na forma de apresentação dos temas e, de certa forma, trouxe mudanças significativas para o ensino de Matemática, principalmente na ênfase dada à teoria dos conjuntos.

Finalmente, julgamos importante ressaltar que a equação/função exponencial esteve presente em todos os livros analisados nesse presente trabalho, mesmo considerando todas as reformas de ensino ocorridas, citando as de Francisco Campos e Gustavo Capanema, todas as leis, decretos ou portarias, incluindo também o período em que o ensino vivenciou o Movimento da Matemática Moderna. Evidentemente, houve alterações na forma de apresentação, como já relatamos, sobretudo com a utilização de simbologismo no período do MMM e também na disposição dos exercícios propostos e naqueles denominados de exemplos ou exercícios resolvidos.

Foi possível perceber que as equações/funções exponenciais são abordadas nas obras sem relatar a sua história e, sendo o livro didático o objeto de trabalho dos professores, podemos inferir que, em muitos casos, o profissional do ensino também não julga ser importante referenciar esses dados de origem do assunto.

O educador e matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrósio, em seu artigo *História da Matemática e Educação,* chama a atenção de todos os professores da disciplina ao sublinhar a importância de se levar aos alunos alguma informação ou curiosidade histórica, pois isso aguça o gosto e o interesse pelas aulas (D'AMBRÓSIO, 1996, p.13). É com essa visão que reforçamos que os professores e também alunos dos cursos de Licenciatura procurem essa formação, conhecendo as reformas de ensino ocorridas no Brasil, ampliando sua visão ao se depararem com propostas de outros autores em outras décadas e, a partir daí, compreenderem o ensino de Matemática que temos hoje. Dessa forma, os docentes em exercício poderão constatar as diferentes abordagens do conteúdo equação/função exponencial, utilizadas por autores que publicaram seus trabalhos em diferentes décadas.

5. REFERÊNCIAS

ALVARENGA *et al*. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **Revista de Educação Matemática**, Florianópolis, v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A matemática da reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 2004. 257 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

AZEVEDO, Aroldo de. *et al*. **Programa de admissão**. 19 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.

AZEVEDO, Fernando. *et. al*. O manifesto dos pioneiros da Educação Nova. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasilia, v. 65, p. 407-425, 2º sem. 1984.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 2. ed. 8. reimpressão. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2008.

BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da Matemática**. São Paulo: Annablume, 2006.

BRAICK, Patrícia Ramos; MOTA, Myriam Becho. **História das Cavernas ao Terceiro Milênio.** 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2007.

BRASIL, Portaria nº 966 de 2 de outubro de 1951. Da elaboração dos programas das diversas disciplinas do curso secundário. **Diário Oficial do União,** Rio de Janeiro, 26 de nov. 1951. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2825451/pg-19-secao-1dou-de-26-11-1951/pdfView>. Acesso em: 15 março de 2017.

BRASIL. Decreto nº 21.241 de 4 de Abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Rio de Janeiro, 9 de abril de 1932.

BRASIL. Decreto nº 4.244, DE 9 de abril 1942. Lei Orgânica do Ensino Secundário. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 10 de ab. 1942. Disponível em <http://www.histedbr.fae.unicamp.br. Acesso em 9 de agosto de 2016.

BRASIL. Lei nº 4024 de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Rio de Janeiro, 27 de dezembro de 1961.

BRASIL. Lei nº 5692 de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, 12 de agosto de 1971.

BRASIL. Portaria ministerial s/n de 30 de junho de 1931. Dispõe sobre os programas do curso fundamental do ensino secundário e instruções metodológicas. **Diário Oficial da União**, Rio de Janeiro, ano LXX, n. 178, p. 12412, 30 de julho de 1931.

BROLEZZI, Viviane Lovatti Ferreira; PINHEIRO, Nara Vilma Lima. O arquivo Scipione Di Pierro Netto – ASCIP: Uma contribuição à história do movimento da matemática moderna no Brasil. In: Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação, 7, 2008, Porto. **Anais**... Porto: Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação, 2008.

BURIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 80. 1988. 152 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CALKINS, Norman Alisson. **Primeiras Lições de Coisas**. Tradução de Ruy Barbosa. Rio de janeiro: Imprensa Nacional, 1886.

CARVALHO, Thales Mello. **Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 1.º ano.** 9. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CARVALHO, Thales Mello. **Matemática 2.º Ciclo**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas / Instituto de Documentação, Serviço de Publicações, 1969.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, 1990.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva. Dinâmica e as consequências do Movimento da Matemática Moderna na educação matemática do Brasil. **Tradução de Denise Negrão Rossi Piva. Campinas: Mercado de Letras , 2017.**

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. **Caderno CEDES**, Campinas, n. 40, p. 7-17, 1996.

DASSIE, Bruno Alves. **Euclides Roxo e a constituição da educação matemática no Brasil.** 2008. 274 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação da PUC-Rio, 2008.

DI PIERRO NETTO, Scipione; ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen. **Matemática curso colegial moderno**. 1.ª Série Colegial. São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1967.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2. reimpressão. Campinas: Editora da UNICAMP, 2007.

FARIA, Juraci Conceição. **A prática educativa de Júlio César de Mello e Souza Malba Tahan**: um olhar a partir da concepção de Interdisciplinaridade de Ivani Fazenda. 2004. 286 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Metodista de São Paulo, Faculdade de Educação e Letras, 2004.

FIGUEIRA, Patrícia Ferreira Fernandes Figueira. **Lourenço Filho e a escola nova no Brasil:** estudo sobre o *guia dos mestres* da série graduada de leitura *Pedrinho*. 2010. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós- Graduação em Educação Escolar da Faculdade de Ciências e Letras, Universidade do Estado de São Paulo, São Paulo, 2010.

GAERTNER, Rosinéte; BARALDI, Ivete Maria. Formação de Professores (de Matemática): Textos e contextos de uma campanha. **Revista Dynamis**, FURB, Blumenau, v. 20, n. 1, p.28–38, 2014.

GENETTE, Gérard. **Paratextos editoriais**. São Paulo: Ateliêr Editorial, 2009.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática ciência e aplicações**. Ensino médio, vol. 1. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2006.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática**. 1.ª Série, 2.º Grau. 6. ed. São Paulo: Atual editora Ltda, 1978.

LAVORENTE, Carolina Riego. **A Matemática nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. 2008, 254 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós gradução em Educação Matemática da Universidade Católica de São Paulo, 2008.

LONGEN, Adilson. **Livros Didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da Educação Matemática**. 2007, 422 f. Tese (Doutorado) - Setor de Educação, linha de pesquisa em Educação Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

LOURENÇO FILHO, Manuel Bergströn. **Introdução ao estudo da Escola Nova.** 13. ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1978.

MACHADO, Nilson José. **Educação: projetos e valores**. 5. ed. São Paulo: Escrituras, 2004.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática, 2.º Livro Colegial**. 3.ª ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1949.

MANSFIELD, Daniel F. Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. **Historia Mathematica,** v. 44 (4), p. 395-419, nov. 2017.

MARQUES, Alex Sandro. **Tempos Pré-Modernos**: a matemática escolar dos anos 1950. 2005, 161 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

OLIVEIRA FILHO, Francisco (2013). **A Matemática do Colégio:** Livros Didáticos e História de uma Disciplina Escolar. 2013. 562 f. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, Nanci de. **O conceito de função: uma abordagem do processo de ensinoaprendizagem**. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Unversidade Católica de São Paulo, 1997.

PICADO, Miguel; RICO, Luis. Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. **PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Universid de Granada, v.6, n. 1, p. 11-27, 2011.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas e implicações da Matemática Moderna nas Práticas Escolares. **Revista Educação e Linguagem**, São Paulo, v.2, p. 1-15, 2008.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.5, n. 16, p. 25-38, 2005.

QUEIROZ, Rogeria Teixeira Urzêdo; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Equação/função exponencial em dois livros didáticos antes e durante o Movimento da Matemática Moderna. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 15, 2016, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: SBHC, 2016.

REMER, Maísa Milènne Zarur; STENTZLER, Márcia Marlene. Método Intuitivo: Rui Barbosa e a preparação para a vida completa por meio da educação integral. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCER, 9., 2009, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUC PR, 2009.

RESENDE, Fernanda Mendes; SOUZA, Rita de Cássia de. O Método Intuitivo e a Escola Nova: discussões educacionais em fins do século XIX e início do século XX. In: Congresso de Pesquisa e Ensino em História da Educação em Minas Gerais, 3., 2005, São João Del Rei. **Anais**... São João Del Rei, 2005.

ROCHA, Wilma Fernandes; SANTOS, Ivanete Batista. Um exame do Manual "Lições de Coisas" em busca de uma compreensão sobre o método intuitivo para ensinar saberes elementares aritméticos. In: SEMINÁRIO TEMÁTICO, 14., 2016, Natal. **Anais**...Natal: UFRN, 2016.

ROMANELLI, Otaiza de Oliveira. **História da Educação no Brasil (1930/1973)**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1980.

ROXO, Euclides; THIRE, Cecil; MELLO E SOUZA, Júlio Cesar. **Curso de Mathematica, 4.º Anno.** 3.ª ed. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1938.

SÁ, Pedro Franco; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A construção do conceito de função: alguns dados históricos. **Revista Traços**, Belém, v.6, n.11, p. 81-94, 2003.

SILVA, Sílvio Tadeu Teles da. **O ensino das funções exponencial e logarítmica por atividades**. 2014. 220 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Estado de Pará, Belém, 2014.

SOARES, Flávia dos Santos, Dassie, Bruno Alves & Rocha, José Lourenço. Ensino de Matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso? 2001, 254 f. Dissertação (Mestrado). Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

VALDEMARIN, Vera Teresa. O manual didático práticas escolares: um estudo sobre mudanças e permanências nas prescrições para a prática pedagógica. **Revista Brasileira de História da Educação**, v.17, p. 13-39, 2008.

VALENTE, W. R. *et al*. Práticas de ontem e de hoje: heranças do Movimento da Matemática Moderna na sala de aula do professor de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007. Belo Horizonte. **Anais**... Belo Horizonte: ENEM, 2007.
Disponível:
www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC26580527072T.doc. Acesso em: 30 de outubro de 2017.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.** São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológias. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2.2, p. 28-49, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930).** 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 206 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

ZUIN, Elenice de Souza Londron. Escola Nova e o ensino de Aritmética: direcionamento para a capacitação e formação docente em revistas pedagógicas brasileiras. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2016, São Mateus. **Anais**... São Mateus: UFES, 2016.

APÊNDICE A

QUADRO RESUMO

Alguns aspectos das Reformas de Ensino
e das propostas educacionais da década de 1930 a 1980

Método Intuitivo
- Metodologia, alicerçada na educação dos sentidos, na intuição e na observação das coisas. - Despertou a reflexão sobre o ensino, ativando a busca por mudanças focadas em outras propostas de ensino/aprendizagem. - A criança é observadora. - Trouxe à tona, a partir do final do século XIX, “a busca pela superação da concepção tradicional”.
Movimento Escolanovista
- Esse modelo de *Escola* surge como proposta inovadora, contrária à Escola Tradicional. - O professor como mediador da aprendizagem. - O aluno , como um “agente ativo, criativo e participativo no processo de ensino-aprendizagem - O ensino centrado nos fatos e na experiência.
Reforma Francisco Campos **(1931)**
- Organizou o ensino secundário em dois ciclos: um fundamental de 5 anos e outro complementar, de 2 anos. - Decretou frequência obrigatória. - Estabeleceu o currículo seriado. - *Instruções Pedagógicas* • Método Heurístico - O aluno é descobridor e não um receptor. • Renúncia à prática de memorização sem raciocínio - Criação da disciplina Matemática - Junção do ponto de vista aritmético, algébrico e geométrico. -Inter-relação da Matemática com outras disciplinas, tendo a noção de função como ideia central do ensino.

A Reforma Capanema (1942)
- O Ensino Secundário se destina à preparação das individualidades condutoras, isto é, dos homens que deverão assumir as responsabilidades maiores dentro da sociedade e da nação. - Ensino Secundário passaria a ser ministrado em dois ciclos: • O primeiro compreenderia um só curso: o curso ginasial - A formação intelectual dos alunos. • O segundo, dois cursos paralelos: clássico e científico. A maior acentuação cultural é proveniente do estudo das ciências.
Programa Mínimo (1951)
- **Objetivo**: Eliminar dos programas atualmente em vigor, os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação de diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. - O termo *Programa Mínimo* refere-se àquele que seria trabalhado por todas as instituições escolares e teriam, assim, condições de executá-lo. - Houve a possibilidade de serem elaborados planos de desenvolvimento desse programa mínimo de acordo com as especificidades de cada região. - Durante a vigência do programa mínimo, o 2º ciclo do ensino secundário continuou a ser chamado de Clássico e Científico, tendo perdurado no sistema educacional brasileiro até 1961, ano da LDB 4.024/61.
Lei n. 4024 (1961)
Deu possibilidade de acesso ao nível superior para alunos egressos do ensino técnico e a criação do Conselho Federal de Educação e dos Conselhos Estaduais. A estrutura tradicional do ensino foi mantida e o sistema continuou a ser organizado segundo a legislação anterior Deu a possibilidade de os Estados e os estabelecimentos anexarem disciplinas optativas ao currículo mínimo estabelecido pelo Conselho Federal de Educação foi, sem dúvida, um progresso em matéria de legislação **Estrutura do ensino** • *Ensino pré-primário*, composto de escolas maternais e jardins de infância. • *Ensino primário* de 4 anos, com possibilidade de serem acrescidos mais 2 anos, com programa de artes aplicadas. • *Ensino médio*, subdividido em dois ciclos: o ginasial, de 4 anos, e, o colegial, de 3 anos, ambos por sua vez compreendendo o ensino secundário e o ensino técnico. • *Ensino superior* .

Lei 5692 (1971)

- Fixou o objetivo geral da educação no nível básico.
- Obrigatoriedade escolar para oito anos (faixa etária que vai dos 7 aos 14 anos).
- Junção do curso primário e do curso ginasial em um só curso fundamental de oito anos.
- Mudança da nomenclatura e da periodização dos graus de ensino, de 1ª a 8ª séries - primeiro grau - e o ensino médio passou a se denominar 2º grau, ofertado em três anos.

- Obrigatoriedade da Educação Artística.
- O Desenho Geométrico se torna disciplina optativa da parte diversificada, no segundo grau

Estrutura do ensino

- *Ensino de 1º grau:* com 8 anos de duração. Passa a proporcionar a sondagem vocacional e a iniciação para o trabalho.
- *Ensino de 2 º grau:* com 3 ou 4 anos de duração. Passa a constituir-se de um nível de ensino cujo objetivo primordial é a habilitação profissional.

Movimento da Matemática Moderna

- Em meados do século XX, mais precisamente desde 1934, surgiu na França um grupo de matemáticos conhecido como Nicolas Bourbaki, responsável pela reconstrução do edifício matemático que substituíra a divisão tradicional do conhecimento matemático em ramos por categorias mais gerais. Deram ênfase ao uso de conceitos unificadores tais como o de conjunto e função.
- Aguns matemáticos pertencentes a esse grupo chegam ao Brasil na década de 40 e são contratados pela USP e influenciam e orientam alguns matemáticos tais como Osvaldo Sangiorgi e Benedito Castrucci que na década de 60 iniciam e divulgam o MMM no Brasil.
- O GEEM foi fundado em 1961, na Universidade Mackenzie, sob a presidência do Professor Osvaldo Sangiorgi. A constituição e atuação deste grupo foram importantes para a implantação e divulgação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. O grupo tinha como objetivos escrever livros textos, realizar congressos, encontros, simpósios e cursos voltados à Matemática Moderna para professores
- Os professores e alunos, por meio dos livros didáticos, se viram com conteúdos com muitos simbolismos e a presença da teoria dos conjuntos, noções de grupo e de estruturas.
- A Geometria foi abandonada, e os cálculos numéricos foram substituídos por formalismos excessivos desvinculados da realidade. Zuin (2001) aponta que as construções geométricas e, consequentemente, o ensino de geometria, continuou em algumas escolas nas aulas Desenho Geométrico e mesmo, em determinadas situações, através da disciplina Educação Artística, implantada com a LDB 5692/71.

- O Movimento da Matemática Moderna alterou a estrutura do ensino da Matemática.