

## **ANEXOS**

### **ANEXO 1 MÓDULO DIDÁTICO**

Este material destina-se ao ensino de problemas de otimização em cursos de Administração de Empresas. Preferencialmente, os alunos devem ser organizados em equipes de dois ou três alunos. Os problemas são ambientados na Teoria dos Jogos.

#### **Justificativas**

Os alunos de Administração têm encontrado muitas dificuldades para aprender a otimização. A Teoria dos Jogos lida com situações muito ligadas à administração de empresas e, por isso pode motivar os alunos.

A Teoria dos Jogos apresenta várias situações nas quais a otimização está presente de maneiras diferentes dos problemas geralmente encontrados nos livros de Cálculo.

#### **Objetivos**

- Levar o aluno a desenvolver por si métodos de resolução dos problemas de otimização;
- Mostrar para o aluno a existência de situações, em sua área de interesse, em que a otimização é requerida;
- Motivar o aluno em relação ao estudo da otimização.

#### **Orientações**

A primeira aula deve ser utilizada para orientações metodológicas, uma introdução à Teoria dos Jogos e a definição de problemas de otimização, porém, não se deve passar orientações acerca da resolução daqueles problemas, ou seja, não se deve fornecer um “roteiro de resolução”.

O professor deve auxiliar os alunos principalmente por meio de perguntas que os orientem.

São necessários momentos de socialização, nos quais são organizadas as descobertas feitas pelos alunos. O professor, por meio de perguntas, solicita que os alunos socializem o que estão fazendo ou já fizeram, de forma que as descobertas das equipes se complementem.

Estes momentos de socialização podem ser necessários a qualquer instante, dependendo do andamento das atividades. Além disso, devem ser programados outros

momentos, normalmente no início de cada aula, para se fazer o retrospecto da aula anterior, corrigindo-se os trabalhos (sempre com a participação dos alunos).

Ao final das aulas, deve ser feita uma recapitulação geral para sanar alguma dúvida remanescente. Também é aconselhável que seja realizado um teste individual, o qual pode ser usado também para compensar a avaliação de algum aluno que tenha perdido uma das atividades (isso precisa ter sido previamente acertado com os alunos).

## **1ª AULA**

Esta aula deve ser utilizada para uma exposição sobre a metodologia que será aplicada no ensino do capítulo sobre problemas de otimização. Os alunos devem ser solicitados a se organizarem em equipes de dois (ou três) membros.

Nas atividades em que há confronto entre equipes, a pontuação obtida por cada uma delas corresponderá às recompensas no jogo. Nesse caso, será feita uma conversão, de acordo com o valor da atividade. Pode ser que uma equipe obtenha uma recompensa maior que aquela correspondente à solução correta do jogo e, nesse caso, a equipe obterá total na avaliação.

Caso os alunos não tenham tido ainda contato com a Teoria dos Jogos, essa aula pode ser utilizada para um pequeno relato histórico sobre a mesma e também para apresentação de alguns aspectos técnicos, como as maneiras de representação e de resolução dos jogos.

### **Dados históricos**

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática bastante recente. Apesar de existirem estudos esporádicos, o primeiro artigo sobre ela data de 1926, publicado pelo matemático húngaro (naturalizado norte americano) John von Neumann. Em 1944, em conjunto com o economista alemão Oskar Morgenstern, von Neumann publica o livro “Teoria dos Jogos e comportamento econômico” no qual o assunto é estudado de forma extensa e rigorosa, sendo considerado o marco inicial desta ciência. Um avanço importante aparece com o matemático americano John Nash, que criou o conceito de Equilíbrio de Nash, útil na análise de uma gama muito grande de jogos.

A Teoria dos Jogos é utilizada atualmente no estudo de áreas bastante diversas como: Economia, Política, Guerra, Jornalismo e Biologia.

O jogo é uma situação em que as pessoas envolvidas (jogadores) tomam decisões que interferem nas recompensas obtidas, não apenas por eles e sim por todos os participantes. Além disso, todos têm conhecimento desta interdependência das ações.

É dado como certo que todos os jogadores agem buscando atingir os melhores resultados possíveis e, para isso, utilizam todos os recursos disponíveis, de forma que se diz que eles agem racionalmente.

Exemplos.: 1º jogo (Quadro 1) (FIANI, 2006, p. 116)

A \ B	Descontar 20%	Manter o preço	Aumentar 10%	Aumentar 20%
Descontar 10%	3,0	1,1	5,4	0,2
Manter o preço	1,1	3,2	6,0	2,0
Aumentar 10%	0,2	4,4	7,2	3,0

**Quadro 1: 1º jogo**  
Fonte: FIANI, 2006, p.116

C \ D	Investe em propaganda	Reduz os preços	Não reage	Tenta acordo
Reduz os preços	3,2	3,2	0,3	0,4
Tenta acordo	2,0	0,1	3,0	1,1

**Quadro 2: 2º jogo**  
Fonte: FIANI, 2006, p. 237

Para a resolução de um jogo, existem várias maneiras entre as quais:

- Eliminação de estratégias estritamente dominadas:
- Uma estratégia é dita estritamente dominada quando existe uma outra na qual as recompensas correspondentes são sempre maiores. Nesse caso, pode-se eliminar a pior estratégia, de forma que o jogo fica reduzido a outro mais simples. Continuando com o processo, pode-se encontrar a solução do jogo.

Consideremos o primeiro exemplo dado pelo quadro 3:

A \ B	Descontar 20%	Manter o preço	Aumentar 10%	Aumentar 20%
	Descontar 10%	3,0	1,1	5,4
Manter o preço	1,1	3,2	6,0	2,0
Aumentar 10%	0,2	4,4	7,2	3,0

**Quadro 3: 1º jogo**  
**Fonte: FIANI, 2006, p.116**

A estratégia “Descontar 20%” de B pode ser eliminada, pois é sempre pior que “Manter o preço”, de maneira que o jogo fica reduzido ao quadro 4:

A \ B	Manter o preço	Aumentar 10%	Aumentar 20%
	Descontar 10%	1,1	5,4
Manter o preço	3,2	6,0	2,0
Aumentar 10%	4,4	7,2	3,0

**Quadro 4: 1º jogo (1ª eliminação)**  
**Fonte: FIANI, 2006, p.116**

Neste jogo simplificado, podem ser eliminadas as estratégias “Descontar 10%” e “Manter o preço”, ambas de A, pois são sempre piores que “Aumentar o preço” e o jogo se reduz ao quadro 5:

A \ B	Manter o preço	Aumentar 10%	Aumentar 20%
	Aumentar 10%	4,4	7,2

**Quadro 5: 1º jogo (2ª eliminação)**  
**Fonte: FIANI, 2006, p.116**

Agora podemos eliminar as estratégias “Aumentar 10%” e “Aumentar 20%”, ambas de B, de maneira que o jogo se reduz a uma única opção para cada jogador, o que constitui a sua solução pelo método de eliminação de estratégias estritamente dominadas (Quadro 6):

	B	Manter o preço
A		
	Aumentar 10%	4,4

**Quadro 6: 1º jogo (3ª eliminação)**  
**Fonte: FIANI, 2006, p.116**

Muitos jogos não podem ser resolvidos por este método devido a ausência de estratégias dominadas. Em outros, a presença dessas possibilita eliminá-las, simplificando os jogos, mesmo que não consigamos chegar à solução apenas por este caminho.

- **Encontrar equilíbrios de Nash**

Em um jogo simultâneo, há um equilíbrio de Nash quando em uma combinação de estratégias todos os jogadores estão na melhor situação possível, dadas as ações dos demais jogadores, ou seja, cada um está dando a melhor resposta possível para as ações esperadas dos demais.

Para se encontrar um possível equilíbrio de Nash, podemos marcar as entradas da matriz onde se encontram as melhores respostas para cada ação do oponente. Fazendo isto com os dois jogadores, o equilíbrio estará na opção que for, ao mesmo tempo, a melhor resposta para ambos.

Vamos considerar novamente o primeiro exemplo, no qual as melhores respostas de A estão marcadas com uma letra “a” e as melhores respostas de B com uma letra “b” (Quadro 7).

A \ B	Descontar 20%	Manter o preço	Aumentar 10%	Aumentar 20%
Descontar 10%	a 3,0	1,1	5,4 b	0,2
Manter o preço	1,1	3,2 b	6,0	2,0
Aumentar 10%	0,2	a 4,4 b	a 7,2	a 3,0

**Quadro 7: Jogo com equilíbrio de Nash**  
Fonte: FIANI, 2006, p.116

De forma que a solução do jogo é formada pelas estratégias “Aumentar 10%” para A e “Manter o preço” para B.

Esse método também não resolve qualquer jogo, pois é possível não existirem ou existirem mais do que um equilíbrio de Nash em um jogo.

- **Teorema do Minimax**

Consiste em considerar que um jogador tentará infligir o máximo dano ao concorrente, de forma que deve identificar as recompensas desejadas pelo outro jogador e jogar de maneira que ele só consiga o mínimo entre elas (mínimo dos máximos).

O concorrente, sabendo da atitude do adversário que lhe tenta impor a maior perda, procurará encontrar os mínimos de cada jogada do outro e escolherá o máximo destes (máximo dos mínimos).

Essa atitude é muito pessimista e apenas deve ser utilizada quando não houver nenhuma possibilidade de cooperação entre os jogadores, como é o caso dos jogos de soma zero.

Consideremos um exemplo de jogo de soma zero (Quadro 8):

Jogador A \ Jogador B	Estratégia 4	Estratégia 5	Estratégia 6
Estratégia 1	4	2	-4
Estratégia 2	0	-1	-1
Estratégia 3	2	3	1

**Quadro 8: Jogo de soma zero**  
Fonte: Dados da pesquisa

Como na matriz estão representadas as recompensas do jogador das linhas, este buscará atingir os maiores resultados, mas como sabe que o adversário deseja lhe infligir o maior dano possível, opta pela maior recompensa entre os mínimos, que o adversário tenta lhe impor.

O jogador das colunas, por seu lado, imagina que o jogador das linhas deseja obter os maiores resultados possíveis e então escolhe o menor destes.

Como fizemos para encontrar equilíbrios de Nash, vamos marcar as respostas de cada jogador (Quadro 9). A opção que represente as melhores respostas para ambos será a solução do jogo.

Jogador A \ Jogador B	Estratégia 4	Estratégia 5	Estratégia 6
Estratégia 1	a 4	2	-4 b
Estratégia 2	0	-1 b	-1 b
Estratégia 3	2	a 3	a 1 b

**Quadro 9: Resolução de jogo de soma zero**  
**Fonte: Dados da pesquisa**

Então, a solução do jogo é formada pelas estratégias 3 e 6.

## 2ª AULA

Nessa aula, os alunos resolverão dois jogos na forma estratégica.

Objetiva-se desenvolver habilidades de resolução de jogos e também fornecer um primeiro contato com a otimização, aqui significando a melhor situação que uma empresa pode atingir frente à concorrência.

## Atividade/aula 2

Sua empresa está diante de duas situações que precisam ser resolvidas. Façam uma reunião e tomem uma decisão conjunta que leve aos melhores resultados para a empresa de vocês.

Vocês representam a FIAT (ou FORD) no primeiro problema e a MONOPOLISTA (ou ENTRANTE) no segundo.

A decisão de vocês será confrontada com a de outra equipe por sorteio e a recompensa que obtiverem no jogo será convertida em pontos para todos os membros de sua equipe, da maneira acertada anteriormente.

### Situação-problema 1 (FIANI, 2006, p. 85):

Resolva o jogo dado a seguir na forma estratégica ou normal, no qual a FIAT está para decidir se lança uma nova versão de um modelo de carro popular ou, caso não lance, o novo modelo se mantém ou reduz o preço do modelo atual. Sua concorrente, a FORD, está entre lançar um modelo que concorra com o da FIAT ou importar da matriz nos EUA ou simplesmente não concorrer nesse seguimento do mercado (Quadro 10).

FIAT \ FORD	Lançar nova versão	Manter o preço	Reduzir o preço
Lançar modelo próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importar da matriz	2, 2	2, 1	2, 3
Não competir	1, 1	0, 5	1, 0

**Quadro 10: Fiat x Ford**  
Fiani, 2006, p.85

### Situação-problema 2 (FIANI, 2006, p.94)

Uma empresa (MONOPOLISTA) está diante da entrada iminente de uma concorrente (ENTRANTE). Resolva o jogo observando as maiores recompensas para cada decisão do concorrente (Quadro 11).

Entrante Monopolista	Não exporta	Exporta pouco	Exporta muito
Investe	2, 1	1, 0	1, 0
Não investe	1, 0	2, 1	0, 2

**Quadro 11: Monopolista x Entrante**  
Fonte: Fiani, 2006, p.94

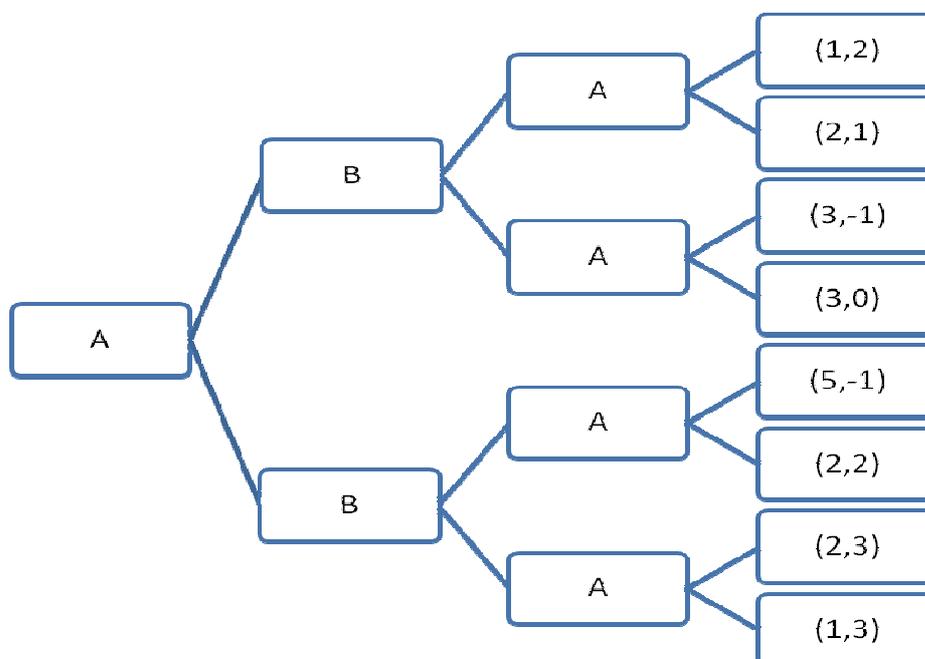
### 3ª AULA

As atividades dessa aula são dois jogos na forma estendida. Objetiva-se apresentar uma nova modalidade em que surja uma otimização, mostrando a importância que pode ter a ordem em que as decisões são tomadas.

#### Atividade/aula 3

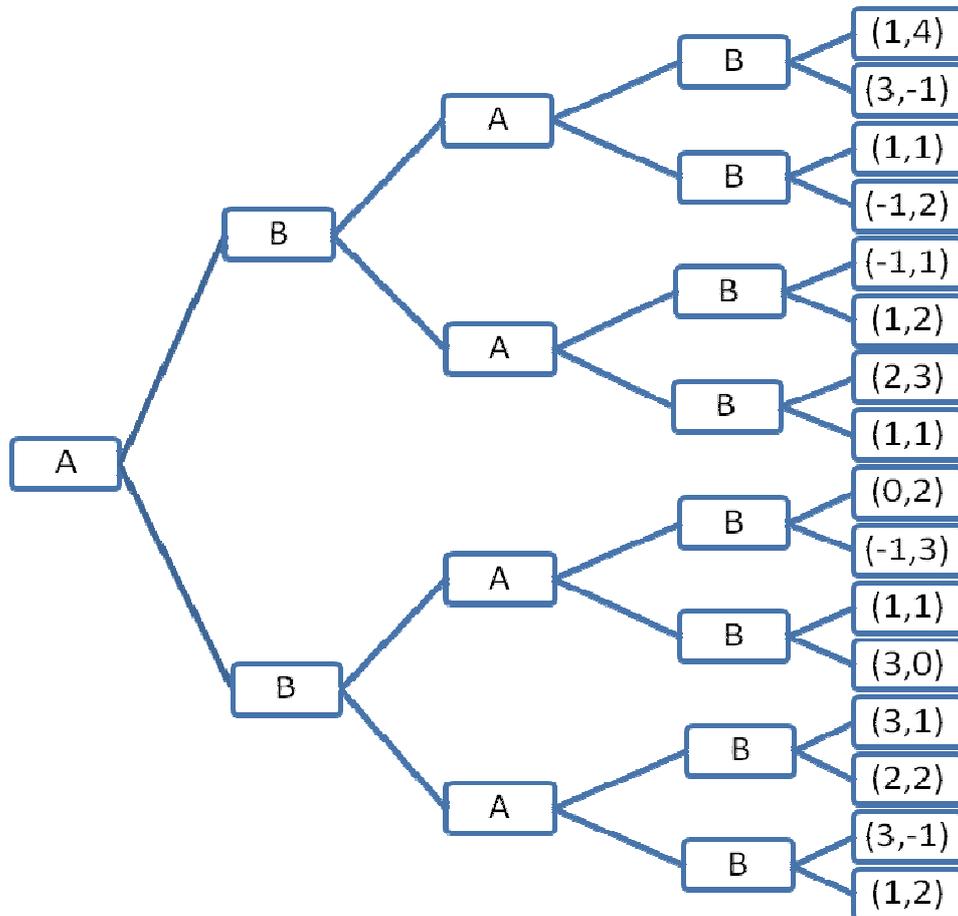
A seguir, estão apresentados dois jogos na forma sequencial. Encontre as soluções dos mesmos. Cada jogo será avaliado em 2 pontos.

##### Situação-problema 1:



**Figura 1: Jogo 1**

Fonte: Dados da pesquisa

**Situação-problema 2:****Figura 2: Jogo 2**

Fonte: Dados da pesquisa

**4ª AULA**

Nesta aula, os alunos resolverão um problema de otimização.

Objetiva-se que eles construam uma sequência de passos para a solução do problema.

O mais importante é que pensem no porquê de cada item.

**Atividade/aula 4**

O problema seguinte tem por objetivo entender como encontrar o melhor de determinada situação, que são chamados de Problemas de Otimização.

A empresa que vocês trabalham contratou um economista que modelou o comportamento do lucro mensal pela venda de um produto, em relação ao preço,

encontrando a função a seguir, em que  $L$  é o lucro e  $p$  o preço, ambos em reais.

$$L = -10p^3 + 1000p$$

Resolva os itens a seguir:

A) Calcule os lucros correspondentes aos seguintes preços:  $p = 1$  real,  $p = 2$  reais,  $p = 3$  reais,  $p = 4$  reais,  $p = 5$  reais,  $p = 6$  reais,  $p = 7$  reais,  $p = 8$  reais,  $p = 9$  reais e  $p = 10$  reais. Qual dos preços leva ao maior lucro?

B) Encontre a derivada da função lucro, em relação ao preço e calcule os seus valores para cada um dos preços do item A.

C) Encontre uma relação entre os valores da derivada e dos lucros.

Como se pode utilizar a derivada para encontrar o lucro máximo?

Será que o preço que forneceu o maior lucro no item A é realmente o preço equivalente ao máximo lucro?

Encontre o lucro máximo e o preço correspondente.

## 5ª AULA

Nesta aula, os alunos farão um problema de otimização complementado por um jogo, que objetiva mostrar a influência da concorrência, que não existe no problema. Com a concorrente, o lucro cai e, além disso, se a empresa não baixar seu preço, a concorrente pode se aproveitar e reduzir ainda mais seu lucro.

### Atividade/ aula 5

Esta atividade é composta por um problema de otimização (cuja resolução será avaliada em 2 pontos) e de um jogo (que será avaliado em outros 2 pontos). Para o jogo será realizado um sorteio para formar as duplas de empresas concorrentes e sua pontuação será obtida de acordo com a proporção entre a recompensa que vocês obtiverem e a recompensa da solução correta do jogo.

#### Parte A

A sua empresa vende um modelo simples de calculadora, que custa R\$2,00. Você

sabe que não deve colocar um preço superior a R\$8,00 devido às circunstâncias do mercado. Um economista contratado pelo dono da empresa concluiu que o lucro, em mil reais, originado pela venda desta calculadora, quando seu preço é  $p$  reais, é dado pela função:

$$L = -\frac{1}{3} \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 - 5 \cdot p + 10.$$

Encontre o maior lucro que é possível ser obtido e o preço correspondente.

### Parte B

Considere agora que uma outra empresa ( $B$ ) comece a concorrer com a sua ( $A$ ) na venda dessa calculadora, de forma a alterar a situação anterior. A situação está modelada pela matriz a seguir (Quadro 12), na qual as recompensas estão em mil reais. Decida que preço sua empresa vai adotar.

empresa B	R\$4,00	R\$5,00
empresa A	R\$4,00	R\$5,00
R\$4,00	10,10	17,8
R\$5,00	8,17	15,15

**Quadro 12: Lucros / Preços**  
Fonte: Dados da pesquisa

Resposta: Nós vamos adotar o preço de \_\_\_\_\_ reais.

## 6ª AULA

O problema desta aula não traz a função a ser otimizada e o trabalho para encontrá-la é a parte mais importante da atividade.

### Atividade/ aula 6

Esta atividade é composta de duas partes: a primeira é um problema de otimização e a segunda parte é um jogo relacionado com o problema.

A avaliação desta atividade está dividida da seguinte forma:

- a resolução da situação problema vale 2 pontos;
- o jogo vale outros 2 pontos.

**Situação-problema 1** (Baseado em Goldstein, 2000)

Você é gerente de uma da empresa aérea Beta (ou Alfa), que em determinada rota é monopolista e possui 6000 passageiros por mês ao preço de R\$200,00 a passagem de ida e volta. Você deseja aumentar o preço e é informado pela equipe de estudo de mercado que a empresa perde, em média, 200 clientes ao mês, para cada aumento de R\$10,00 no preço da passagem.

Encontre uma função que forneça o preço ( $p$ ) em função no número de aumentos de 10 reais ( $n$ ):

$$p(n)=$$

Encontre uma função que forneça o número de clientes ( $q$ ) em função do número de aumentos de 10 reais ( $n$ ):

$$q(n)=$$

Qual é então a função que fornece a receita ( $R$ ) em função do número de aumentos de 10 reais ( $n$ )?

$$R(n)=$$

Encontre o número de aumentos de 10 reais ( $n$ ) para o qual a receita é máxima. Não se esqueça do intervalo de valores que o preço pode assumir.

$$n=$$

Então, nessa situação, os valores são de:

$$p(n)=$$

$$q(n)=$$

$$R(n)=$$

Agora imagine que a empresa aérea Alfa (ou Beta) resolva concorrer com a sua pela mesma rota e agora você deve se preocupar com a possibilidade de perda de clientes para a concorrente. Nesse caso, o preço e o lucro tendem a cair, devido à concorrência.

Suponha que a matriz abaixo forneça as recompensas (em uma unidade de referência qualquer) para três opções de preços das passagens aéreas tanto de sua empresa quanto da concorrente.

Nessa nova situação (Quadro 13), qual será o preço que sua empresa (Beta) irá praticar?

Beta \ Alfa	R\$200,00	R\$210,00	R\$230,00
R\$200,00	2, 0	2, 2	3, 0
R\$210,00	3, 1	3, 2	4, 1
R\$230,00	0, 2	2, 3	5, 2

**Quadro 13: Alfa x Beta**  
**Fonte: Dados da pesquisa**

## 7ª AULA

Essa atividade apresenta uma situação na qual o ponto de máximo é encontrado de maneira diferente. Esta é mais uma oportunidade, apresentada pela Teoria dos Jogos, de se conhecer situações de otimização. Para se encontrar o ponto de lucro máximo, ao invés de igualarmos sua derivada a zero, devemos igualar as derivadas das funções custo e receita, significando que o lucro para de aumentar no instante em que o aumento do custo se iguala ao aumento da receita.

Por este aspecto e também por representar uma situação social importante eticamente, esta atividade é considerada de grande valor na formação do aluno.

### Atividade/aula 7

#### **TRAGÉDIA DOS COMUNS (FIANI, 2006)**

Se todas as pessoas da cidade forem educadas e não jogarem lixo na rua (papel de bala, toco de cigarro, papel de propaganda, lata de bebida etc), a cidade fica mais limpa e isso é bom para todos. Mas você está andando na rua e recebe um papel de propaganda de uma festa. Você lê e resolve jogá-lo fora na rua, afinal não está vendo nenhuma lixeira por perto. Este ato é bom para você, que não vai precisar atravessar a rua ou andar um pouco mais para achar uma lixeira, e para a cidade como um todo não vai fazer quase nenhuma diferença, pois é apenas um único pedaço de papel. O problema é que você não é o único “esperto” que existe na cidade e muitos acabam fazendo a mesma coisa...

Situações como essa são conhecidas como “tragédia dos comuns” e mostram que são necessárias ações que nos levem a agir para o bem comum. Como exemplos podem-se citar a sonegação de impostos, o famoso “levar vantagem”, o outro famoso “o mundo é dos espertos”, entre outros. O sistema capitalista gera muitas tragédias dos comuns devido à liberdade de ação que se tem.

Agora, considere o exemplo:

Suponha que em um município exista uma área de cerrado pertencente à prefeitura e na qual se pretende criar futuramente um parque municipal, para preservação da fauna e flora. Algumas pessoas perceberam que existe naquela área uma grande quantidade de pés de gabioba (fruta nativa do cerrado e muito apreciada). Então, essas pessoas começam a coletar as frutas e vender na cidade. Suponha que o preço do quilo de gabioba é de R\$2,00 e que a produção total diária dependa do número  $n$  de coletores, de acordo com a função:  $R(n) = 20n - n^2$ . Além disso, há um custo diário de R\$4,00 por coletor com transporte e alimentação, de forma que o custo total é dado por  $c = 4 \cdot n$ .

Existe uma lei da economia conhecida como “lei dos rendimentos marginais decrescentes”, que diz que a receita total  $R(n)$  aumenta quando se aumenta o número de coletores ( $n$ ), mas que, quanto maior for o número de coletores, mais lentamente cresce a produção, de forma que em algum instante o aumento de receita total devido ao aumento de um coletor será igual ao aumento no custo de produção ( $c'$ ):  $R'(n) = c'$ , onde a derivada  $R'(n)$  representa a receita marginal e  $c'$  representa o custo marginal, que, neste caso, é igual ao custo fixo de R\$4,00.

Para a comunidade dos coletores, não é conveniente que se aumente o número de coletores a partir desse ponto, pois senão o aumento na receita será menor que o aumento no custo. Então, temos nesse momento o lucro total máximo.

O problema é que cada pessoa analisa a situação apenas em relação ao seu resultado, ou seja, se ele conseguir colher uma quantidade que ao menos cubra seus custos, é conveniente ir para a coleta, pouco importando o que ocorre com a receita total do grupo. Dessa maneira, o número de coletores irá aumentar até que a receita média de cada um seja igual ao custo individual de produção, ou seja:  $\frac{R(n)}{n} = \frac{c}{n}$ .

Como consequência, o lucro médio se reduz a zero e o “mundo fica sendo dos espertos que coletarem mais”. Apesar de ser uma situação ineficiente para a coletividade, é um Equilíbrio de Nash, pois para cada um é melhor ir coletar, dado que os demais irão.

Observe que além da ineficiência financeira existe ainda o problema que depredação da área de coleta, mostrando a necessidade de alguma forma de controle.

**QUESTÕES:**

Para o exemplo anterior:

- A) Qual seria o número ótimo de coletores?
- B) Qual o número de coletores que realmente deve ocorrer?
- C) Qual é o lucro total e o lucro médio de cada coletor em cada uma das duas situações anteriores?
- D) Quantos quilogramas de gabioba cada coletor colhe em cada uma das duas situações anteriores?

## **8ª AULA**

Essa atividade apresenta mais uma novidade oriunda da Teoria dos Jogos, representada pelas funções de duas variáveis e, conseqüentemente, surgindo a necessidade do uso das derivadas parciais. Este aspecto representa uma nova modalidade em que a otimização pode aparecer.

### **Atividade/aula 8**

Esta atividade é composta de duas situações, cada uma com valor de 2 pontos. A primeira é um problema de otimização e a segunda é um jogo relacionado com o problema.

**1ª situação-problema** (FIANI, 2006)

O mercado de água mineral de uma cidade mineira é disputado por apenas duas empresas (1 e 2). Os consumidores não notam diferenças entre os produtos que são, portanto, preferidos apenas pelo preço e, por isso, as empresas praticam preços iguais (senão perdem o mercado) e passam a ter o lucro definido pelas quantidades vendidas (conhecido como modelo de Cournot).

Sendo:

$R_1$  e  $R_2$  as receitas das empresas 1 e 2.

$L_1$  e  $L_2$  os lucros das empresas 1 e 2.

$q_1$  e  $q_2$  as quantidades vendidas pelas empresas 1 e 2.

$C_1$  e  $C_2$  os custos das empresas 1 e 2.

Considere que:

$$R_1 = 100 \cdot q_1 - 2 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_1 \cdot q_2$$

$$R_2 = 100 \cdot q_2 - 2 \cdot q_2^2 - 2 \cdot q_1 \cdot q_2$$

$$C_1 = 4 \cdot q_1$$

$$C_2 = 4 \cdot q_2$$

Encontre as expressões que fornecem os lucros das empresas 1 e 2.

Calcule as derivadas de  $L_1$  e de  $L_2$ , lembrando-se que para o cálculo  $q_1$  deve ser considerada uma constante para a empresa 2 e  $q_2$  uma constante para a empresa 1.

Resolva o sistema formado pelas equações  $L_1' = 0$  e  $L_2' = 0$  para encontrar as quantidades que levam ao lucro máximo para as duas empresas.

### 2ª situação-problema

Ainda em relação às duas empresas da primeira situação-problema, complete a matriz a seguir (Quadro 14) com os lucros de cada empresa correspondente às quantidades vendidas. Em seguida, escolha a quantidade que sua empresa irá vender e marque na matriz.

		Empresa 2	
		14 unidades	16 unidades
Empresa 1	14 unidades	( , )	( , )
	16 unidades	( , )	( , )

**Quadro 14: Resultado do modelo de Cournot**  
Fonte: Dados da pesquisa

## RESPOSTAS E SUGESTÕES

### 2ª AULA

Situação-problema 1) Encontre o equilíbrio de Nash, que é dado pelo par ordenado (2,3).

Situação-problema 2) Encontre o equilíbrio de Nash, que é dado pelo par ordenado (2,1), correspondente ao par de estratégias (Investe, Não exporta).

### 3ª AULA

Situação-problema 1) Por indução reversa chega-se à primeira jogada do jogador A que são indiferentes para ele, visto que em ambas receberá uma recompensa igual a 2 unidades. Então caberá a ele agir de forma colaborativa permitindo que B receba 3 unidades ou de forma egoísta fazendo com que B receba apenas 1 unidade. Este jogo possui então duas soluções plausíveis: (2,1) e (2,3).

Situação-problema 2) Por indução reversa encontra-se a solução que é constituída pelo par ordenado (2,2).

### 4ª AULA

A)  $L(1) = 990$  reais;  $L(2) = 1920$  reais;  $L(3) = 2730$  reais;  $L(4) = 3360$  reais;  $L(5) = 3750$  reais;  $L(6) = 3840$  reais;  $L(7) = 3570$  reais;  $L(8) = 2880$  reais;  $L(9) = 1710$  reais;  $L(10) = 0$ .

B)  $L'(p) = -30p^2 + 1000$  e  $L'(1) = 970$  reais/real;  $L'(2) = 880$  reais/real;  $L'(3) = 730$  reais/real;  $L'(4) = 520$  reais/real;  $L'(5) = 250$  reais/real;  $L'(6) = -80$  reais/real;  $L'(7) = -470$  reais/real;  $L'(8) = -920$  reais/real;  $L'(9) = -1430$  reais/real;  $L'(10) = -2000$  reais/real

C) Quanto mais o valor da derivada aproxima-se de zero maior é o lucro correspondente.

Igualando-se a derivada a zero podemos encontrar o lucro máximo.

O preço de 6 reais, que forneceu o maior lucro do item A não corresponde ao lucro máximo possível visto que a derivada correspondente não é igual a zero.

O lucro máximo é dado por:  $L'(p) = 0$  que resulta em  $p = 5,77$  reais e  $L(5,77) = 3849$  reais.

## 5ª AULA

Parte A)  $L'(p) = -p^2 + 6p - 5$ ; igualando-se a derivada a zero obtemos  $p = 1$  real ou  $p = 5$  reais, sendo que 1 real está fora do intervalo válido, visto que o custo é de 2 reais. Então o lucro máximo ocorre em  $p = 5$  reais e vale  $L(5) = 18,33$  mil reais.

Parte B) O jogo pode ser resolvido eliminando-se estratégias dominadas ou encontrando-se equilíbrio de Nash. O resultado é dado pelo par ordenado (10,10).

## 6ª AULA

Situação-problema 1)  $p(n) = 200 + 10n$ ;  $q(n) = 6000 - 200n$ ;  $R(n) = (200 + 10n) \cdot (6000 - 200n)$ ;  $n = 5$ ;  $p(n) = 250$  reais;  $q(n) = 5000$  passageiros;  $R(n) = 1.250.000$  reais.

Situação-problema 2) O resultado do jogo pode ser encontrado eliminando as estratégias dominadas ou encontrando-se equilíbrio de Nash. O resultado é dado pelo par ordenado (3,2).

## 7ª AULA

A)  $n = 8$  coletores

B)  $n = 16$  coletores (observe que a solução  $n = 0$  não pertence ao intervalo válido)

C)  $L_T(8) = 64$  reais e  $L_M(8) = 8$  reais;  $L_T(16) = 0$  e  $L_M = 0$

D) Encontre a receita em cada caso, divida pelo preço de 2 reais para obter a quantidade de gabirola e então divida pelo número de coletores. Assim obtemos 6 kg para o caso de 8 coletores e 2kg para o caso de 16 coletores.

## 8ª AULA

1ª situação-problema)  $L_1 = 96 \cdot q_1 - 2 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_1 \cdot q_2$ ;  $L_2 = 96 \cdot q_2 - 2 \cdot q_2^2 - 2 \cdot q_1 \cdot q_2$ ;  $L_1' = 96 - 4 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2$ ;  $L_2' = 96 - 4 \cdot q_2 - 2 \cdot q_1$ ;  $q_1 = q_2 = 16$ .

2ª situação-problema) Os pares ordenados são: para 14 e 14 unidades (560, 560); para 14 e 16 unidades (504, 576); para 16 e 14 unidades (576, 504) e para 16 e 16 unidades (512, 512). A solução do jogo pode ser obtida eliminando-se estratégias dominadas ou encontrando equilíbrio de Nash e o resultado é o par ordenado (512, 512).

Obs.: Em relação a este resultado cabe uma observação interessante que pode ser feita. Os lucros correspondentes ao resultado do jogo não são os maiores possíveis, que são aqueles representados pelo par ordenado (560,560). Porque então que os cálculos relativos ao modelo de Cournot, realizados na 1ª situação-problema levaram ao equilíbrio de Nash e não aos lucros máximos. Acontece que a situação foi analisada considerando que as empresas sejam concorrentes e nesse caso o resultado máximo não é atingido por ser instável, visto que se uma das empresas mudar de estratégia ganha mais ainda, à custa da outra, correspondendo a um dos pares ordenados (507,576) ou (576,507). A situação de máximo só pode ser atingida se as empresas combinarem as estratégias o que faz a análise feita não ser válida. Esta situação representa a formação de um cartel.

## ANEXO 2 - QUESTIONÁRIO

Além da resolução da situação-problema executada na 8ª aula, foi solicitado aos alunos que respondessem ao questionário que está descrito a seguir, juntamente com as respostas obtidas (os erros de escrita cometidos foram preservados). As respostas que apresentam aspectos considerados mais relevantes estão em itálico (Grifos do autor).

### Questionário:

- 1) Você participou de trabalhos em equipe que tinham por objetivo estudar problemas de otimização. Você considera que foi possível aprender por este método? Explique.**

*(aluno 1) Sim, pois assim foi possível praticar mais as atividades e chamou mais nossa atenção em relação à aula.*

*(aluno 2) Sim, pois como 4 pessoas pensa mais que uma, e como todos interagiram bem, ficou mais fácil.*

*(aluno 3) Sim, assim você pode discutir suas dúvidas com mais de uma pessoa.*

*(aluno 4) Sim, com esse método tivemos a ajuda dos colegas para aprendermos juntos a matéria.*

*(aluno 5) Sim. Foi possível, pois foi um trabalho em grupo onde um ajudava o outro.*

*(aluno 6) Sim, porque em grupo podemos tirar dúvidas e com objetivo sendo um jogo o trabalho fica mais descontraído.*

*(aluno 7) Não. Acho que sim porque resolvemos os problemas tirando dúvidas e com certeza todas aprenderam um pouco mais.*

*(aluno 8) Não muito, devido eu ser um pouco lenta pra entender as coisas e assim eles ficam impaciente e fazem sem me questionarem pra que evolue mais rápido. Sou um tantinho lesada sabe? hehehehe...*

*(aluno 9) Sim, juntamente com colegas e professor.*

*(aluno 10) Sim. Os colegas sempre mostra o que ficou com alguma dúvida melhora o conhecimento.*

*(aluno 11) Sim, porque estimula o raciocínio.*

(aluno 12) *Sim. Foi possível, pois foi uma forma de entrosamento entre com todos do grupo onde ouve discussões sobre tal assunto e onde todos participam do entendimento dos exercícios, portanto todos estavam numa total interação.*

(aluno 13) *Sim. Porque você está acostumado com a mesma rotina de aprendizagem então quando você a muda um pouco como nós estamos trabalhando é muito bom com certeza só tem a sair resultados melhores que antes.*

(aluno 14) *Sim. No ato de juntos discutir o problema e chegamos a uma conclusão aprendemos na prática uma teoria.*

(aluno 15) *Sim, participei dos trabalhos de equipe. Achei que o trabalho em equipe possibilitou a integração e troca de idéias.*

(aluno 16) *Sim. Em equipe é mais fácil aprender, um ajudando o outro, quando um membro não sabe e o outro sabe, um ajuda o outro.*

(aluno 17) *Sim, eu tenho um pouco de dificuldade em matemática, e esse tipo de tarefa me ajudou bastante, me fez trabalhar em grupo, escutando as opiniões dos meus colegas.*

(aluno 18) *Sim, considero, trabalho em equipe é muito bom para aprender porque um tira a dúvida do outro.*

(aluno 19) *Sim, pois os colegas se discutiram entre si para poder chegar a uma conclusão e isso fez com que o colega que sabe mais explicasse com detalhes para aqueles colegas que sabiam menos. Foi um método dinâmico, mas para mim teve bons resultados.*

(aluno 20) *Sim, pois cada um tem uma dificuldade em algum ponto e trabalhando em equipe esta dificuldade se supera.*

(aluno 21) *Sim, pois é um meio de praticar fazendo os exercissios, tirar dúvidas com a equipe porém algumas veses alguns da equipe podem não estar interessados enquanto os outros realmente fazem.*

(aluno 22) *Sim, pois esses exercício estimulam o raciocínio, promovendo um excelente aprendizado.*

(aluno 23) *Sim, bom pois com os colegas do grupo podia tirar dúvidas, em conjunto o raciocínio era melhor, estávamos todos empenhados e interessados a fazer, um apoiava o outro.*

(aluno 24) *Sim. porque os trabalhos foram feitos em equipe, e, devido a isso um ajudava o outro em suas dificuldades.*

(aluno 25) *Sim. Sim. Mas precisa de mais tem e mais exercícios.*

(aluno 26) *Sim. Foi até mais fácil aprender, pois tinha ajuda de mais colegas. A gente ganhou tempo. Se estivéssemos copiando do quadro o aprendizado iria render menos.*

(aluno 27) *Sim, este método foi muito positivo para nossa aprendizagem.*

(aluno 28) *Sim. Pois é um método simples e eficaz.*

(aluno 29) *Sim. é um método bem interessante, onde cada um busca entender o exercício e compartilhar seu conhecimento com o grupo. Com esse método, somos estimulados a procurar resolver o exercício, sem esperar receber tudo pronto.*

(aluno 30) *Sim, eu participei e de todos os trabalhos. Foi possível aprender por este método pois, eu estava entre pessoas, assim que surgia alguma dúvida todos os membros se dispunha de tirar as dúvidas e resolver os problemas.*

(aluno 31) *Foi possível aprender, porque com esse método você é forçado a desenvolver o raciocínio.*

(aluno 32) *Sim, pois existe uma interação, e essa interação ajuda na aprendizagem.*

(aluno 33) *Sim. Pois através dos trabalhos discutíamos sempre a melhor forma para nossa empresa, visando o melhor para ela.*

(aluno 34) *Participei de todas as atividades aprendi e gostei do método aplicado.*

(aluno 35) *Sim, o método utilizado deixou bem claro, a técnica de resolver os exercícios.*

(aluno 36) *Foi possível, mas acho que por outros métodos teria sido melhor. Acho que deveria ter dado uma folha de exercícios para aprender primeiro, para treinar até realmente aprender para depois fazer essas atividades em equipe.*

(aluno 37) *Sim. Pois estudamos em grupo, assim, um pode tirar as dúvidas do outro.*

(aluno 38) *Sim. Porque esses trabalho foi como uma pegadinha, a gente teve que pensar e correr atrás, dessa maneira aprendi o que estava no trabalho e um pouco mais.*

(aluno 39) *Sim, porque assim você participa de debates com os integrantes do grupo.*

**2) Na sua opinião, quais foram os aspectos positivos e os negativos destes trabalhos?**

(aluno 1) *O aspecto positivo foi a questão do interesse, todos ficaram mais interessados em fazer os exercícios devido estar valendo ponto. O aspecto negativo é que foi muito difícil algumas atividades.*

(aluno 2) *Positivo: A interação com os colegas. Negativo: Alguns trabalhos bem complicados.*

**(aluno 3)** *Os positivos foram o trabalho em equipe, e divisão de trabalho. Os negativos é que pintam dúvidas.*

**(aluno 4)** *Os aspectos positivos foram que fomos levados a trabalhar nosso raciocínio e realmente tivemos que aprender a matéria; e os negativos foram que, como a atenção do professor foi bastante disputada e a matéria é muito difícil, foi complicado aprender tudo em pouco tempo.*

**(aluno 5)** *Aspectos positivos foram aprender e não teve prova. Negativos foram o barulho que as meninas do fundo fizeram, e que algumas estavam difíceis.*

**(aluno 6)** *Positivos: ajuda do professor, ajuda dos colegas, e avaliação dos pontos, e sendo mais fácil aprender. Negativos: algumas atividades difíceis, o professor muito disputado.*

**(aluno 7)** *Os pontos positivos foi buscar a opinião de todos para solucionar problemas. Os pontos negativos, quem tem mais habilidade não confia nos outros.*

**(aluno 8)** *Positivos: integração de amizades, motivação à participação. Negativos: discordância às vezes por parte dos membros.*

**(aluno 9)** *Analisar o equilíbrio de Nash.*

**(aluno 10)** *Interação entre colegas, buscar novos conhecimentos.*

**(aluno 11)** *Os positivos foram trabalho em equipe, os pontos negativos foi de ter jogado com outra equipe e às vezes perder pontos.*

**(aluno 12)** *Os pontos positivos que todos interagiram no grupo, foi facilitada a compreensão dos exercícios novos, por essa nova forma de aula aplicada na sala; e na minha opinião não tem ponto negativo.*

**(aluno 13)** *Positivos: que você vai sempre aprendendo com os outros do seu grupo um dando força para o outro é muito bom. Negativo: acho que não pude apontar bem a esse respeito.*

**(aluno 14)** *Positivos: trabalho em equipe, aprendizado junto com meus colegas. Negativos: como não tinha certeza daquilo que estava fazendo, muitas vezes discutimos até escolher a melhor opção.*

**(aluno 15)** *Os positivos é que a equipe juntos tiram dúvidas tendo facilidade para solucionar e chegar no resultado certo. O fato negativo foi a falta de orientação.*

**(aluno 16)** *Positivos: trabalho em equipe, motivação gerada pela concorrência entre grupos. Negativos: quando não se sabe como resolver, é mais difícil perguntar ao professor. Os grupos disputam o professor.*

(aluno 17) *Positivo: trabalho em grupo. Negativo: você poderia ter explicado mais, antes do início das atividades.*

(aluno 18) *O aspecto positivo foi o trabalho em grupo, acho que não teve negativo.*

(aluno 19) *Os positivos foi que exigiu a participação de todos na equipe e isso fez com que todos dessem sua opinião, uma oportunidade que não temos na sala no dia-dia. Os negativos foram os problemas mais difíceis pois exigiam uma concentração a mais e isso fez com que as pessoas do grupo não desse sua opinião.*

(aluno 20) *Só teve aspectos positivos pois em equipe você tira todas as dúvidas.*

(aluno 21) *Positivos: permite a prática dos exercícios nas aulas, debater diferentes idéias com o grupo, maior participação nas aulas. Negativos: muitas vezes parte do grupo trabalha mais e outros menos e sempre exerssicios fica um pouco cansativo.*

(aluno 22) *Os aspectos positivos são que os trabalhos em grupo, ajudam a todos a pensarem em conjunto; permite um grau de raciocínio mais que é fundamental para desenvolver a capacidade dos alunos. Não achei que teve pontos negativos.*

(aluno 23) *Positivos: fiz novas amizades, pude aprender mais e foi divertido também. Negativo: nenhum.*

(aluno 24) *Positivos: trabalho em grupo. Negativos: trabalhos complicados no final, e com valores não muito altos e sem muita ajuda do professor.*

(aluno 25) *Positivos: Troca de idéias. As dúvidas são esclarecidas. Você estuda nos horários para resolver problemas. Negativos: Nem todos participam. Grupos de no máximo 2 pessoas seria melhor.*

(aluno 26) *Positivos: Ganho de tempo. Maior aproveitamento das atividades. Atividade valer pontos. Negativos: Estava difícil algumas.*

(aluno 27) *Para mim só houve aspectos positivos.*

(aluno 28) *Um aspecto positivo foi a interação e dedicação de todos os integrantes do meu grupo, outro foi os pontos obtidos com a realização dos trabalhos.*

(aluno 29) *Positivos: união, empenho de todos na resolução e aprendizado do exercício, comunicação fluente entre os membros, busca de novos conhecimentos. Negativos: tinha grupos que conversavam muito alto, atrapalhando a concentração dos outros grupos.*

(aluno 30) *Positivos: houve um aprendizado muito bom, entre membros do grupo. Negativos: a questão de fazer regra de três em notas de dois grupos se um errasse o outro era punido através da nota.*

(aluno 31) *Os aspectos negativos é que as vezes uns acabam participando mais do que os outros. Os aspectos positivos é que encina a pensar e desenvolver o raciocínio.*

(aluno 32) (em branco)

(aluno 33) *Negativos: tiveram questões muito complicadas. Positivos: mais através delas conseguimos aprender.*

(aluno 34) *Positivas: descobrir pesquisar desafio. Negativo: alguns membros não participavam.*

(aluno 35) *Positivos: aprendemos várias técnicas de resolver problemas de otimização. Negativos: alguns participantes ficavam desatentos e talvez não aprenderão.*

(aluno 36) *Os aspectos positivos foi o trabalho em equipe. Os aspectos negativos foi a desorganização da sala.*

(aluno 37) *Obtive mais pontos positivos.*

(aluno 38) *Para mim teve mais positivo, onde todos participaram, uma maneira diferente de aprender. E a parte negativa é que muitas vezes, mesmo resolvendo os exercícios ficou algumas coisas não muito claras.*

(aluno 39) *Aspecto positivo é que tem a opinião de outras pessoas, e negativos não encontrei.*

### **3) O que você achou da inclusão dos jogos nas atividades?**

(aluno 1) *Foi muito interessante, pois aprendemos a matéria estudada na prática.*

(aluno 2) *Ótima, porque foi uma aula bem diferente.*

(aluno 3) *Interessante, pois todos tiveram a oportunidade de opinião.*

(aluno 4) *Foi proveitoso, porque nos ajudou a aprender a matéria estudada na prática.*

(aluno 5) *Foi bom conhecer o jogo e disputar com outro grupo.*

(aluno 6) *Foi muito interessante, pois é muito mais diferente para aplicar um exercício.*

(aluno 7) *Bom, um pouco injusto porque se a outra equipe erra acaba prejudicando o adversário.*

(aluno 8) *Seria bom, muito bom, porém, deveria permanecer no mesmo grau de quando iniciou. Você complicou demais.*

(aluno 9) *Show de bola.*

(aluno 10) *Uma nova maneira de buscar conhecimentos.*

(aluno 11) *Ótimo.*

(aluno 12) *Uma ótima idéia: era como uma forma de descontração, que aumentava o estímulo para com cada aula que surgia.*

(aluno 13) *Excelente mais uma maneira interessante de nós estarmos aprendendo toda colocando bom humor e mais interesse nos trabalhos.*

(aluno 14) *Interessante, desenvolveu o lado competitivo do trabalho.*

(aluno 15) *Achei interessante e inovador.*

(aluno 16) *Muito interessante; despertou a competitividade e fez pensar o que realmente acontece nas empresas em relação a tomada de decisão.*

(aluno 17) *Os jogos são interessantes, eles melhoram seus raciocínios, e faz raciocinar mais rápido.*

(aluno 18) *Foi muito boa.*

(aluno 19) *Os jogos foram bastante interessantes, uma distração para o grupo depois de tanta concentração e esforço.*

(aluno 20) *É um fator de motivação.*

(aluno 21) *Gostei da idéia, faz a sala toda participar de uma atividade.*

(aluno 22) *Eu achei muito interessante, pois assim você começa a ter uma noção de como se administrar uma empresa.*

(aluno 23) *Interessante e divertido também.*

(aluno 24) *Bom. Muito interessante.*

(aluno 25) *Interessante, para ver como os meus concorrentes pensam e agem.*

(aluno 26) *Foi bom, porque o jogo envolvia o restante da atividade.*

(aluno 27) *Achei muito legal, pois interagem.*

(aluno 28) *Achei legal, pois os jogos com certeza eram mais divertidos de resolver.*

(aluno 29) *Interessante. Estimula a mente, descontra, e estimula a competição. Apesar de que dava raiva quando o outro grupo errava e nos prejudicava, mas foi bem interessante.*

(aluno 30) *Eu achei muito bom e interessante pois, ajuda bastante as pessoas que não conseguem entender a matéria.*

(aluno 31) *Bom. Só não gostei de ter que competir com outra equipe, porque você acaba sendo prejudicado se o outro jogar errado.*

(aluno 32) *Uma boa opção.*

(aluno 33) *Foi o melhor, pois eram interessantes, bons para pensar e fáceis de resolver.*

(aluno 34) *Achei positivo.*

(aluno 35) *Muito boa, uma forma nova de resolver problemas.*

(aluno 36) *Não gostei pelo fato da competição, é injusto você quebrar a cabeça para tentar acertar e acabar perdendo ponto por erro de outras pessoas.*

(aluno 37) *Legal.*

(aluno 38) *Achei bom, uma maneira diferente e estimuladora para os alunos participar.*

(aluno 39) *Muito bom.*

**4) Você se sentiu mais ou menos motivado para participar dessas atividades em relação às aulas anteriores? Explique.**

(aluno 1) *Com certeza, devido ser uma aula entre amigos e com os exercícios sendo avaliado despertou mais interesse de fazer as atividades.*

(aluno 2) *Mais, pois saímos da rotina de uma sala de aula.*

(aluno 3) *Mais, porque o trabalho em grupo é bom para o aprendizado.*

(aluno 4) *Mais motivada. Porque como as atividades seriam avaliadas, nosso empenho foi maior.*

(aluno 5) *Mais. Pois o grupo conversa e resolve as questões juntos.*

(aluno 6) *Muito mais, porque nessas aulas teve mais participação dos alunos e mais motivação da cada um poder fazer um parte do jogo.*

(aluno 7) *Sim, foram mais dinâmicas.*

(aluno 8) *Eu amei. Anteriormente não assistia às aulas e hoje, não faltei nenhuma, me senti motivada a participar. Adorei a concorrência do equilíbrio.*

(aluno 9) *Sim, não é monótono.*

(aluno 10) *Mais, ajuda dos colegas é importante.*

(aluno 11) *Acho que fiquei motivada do mesmo jeito, pois essas duas só motivarão o trabalho em equipe.*

(aluno 12) *Sim. Porque os trabalhos em grupos é literalmente mais aproveitado.*

(aluno 13) *Mais motivado. Porque você saindo daquela rotina já é um grande começo e ainda dessa forma todos mudam a cara ficamos curiosos e etc... queremos aprender o novo jeito.*

(aluno 14) *Mais motivada, chegava sempre as aulas com vontade de resolver logo as atividades.*

(aluno 15) *Achei motivante sim, ainda mais com a participação do professor.*

(aluno 16) *Mais motivado, é melhor vir para a aula com mais interesse, vir com um propósito a estar comprometido com a equipe.*

(aluno 17) *Mais motivado, é melhor trabalhar em grupo, você ganha mais confiança porque passa a ver as dificuldades dos outros integrantes e perde o medo de arriscar e errar.*

(aluno 18) *Sim. Porque toda aula valia ponto.*

(aluno 19) *Mais motivado, sendo que sempre foi motivada nas aulas, pois é uma matéria que gosto.*

(aluno 20) *Mais motivado é bom discutir o trabalho com a equipe e tirar dúvidas.*

(aluno 21) *Praticando o exercício o aprendizado fica mais fassil, apesar que exercissios todas aulas as veses cansa um pouco, mas a idéia é boa.*

(aluno 22) *Mais motivado, pois a cada aula tinha um desafio diferente e quando conseguia supera-lo é uma vitória.*

(aluno 23) *Mais. Porque em grupo parecia ser mais legal, eu gosto de fazer trabalho em grupo, quando o outro colega não é egoísta e fechadão, e o nosso grupo havia coleguismo.*

(aluno 24) *Em relação a isso com certeza me senti mais motivado, pontualidade e participação nas atividades nunca ficou a desejar.*

(aluno 25) *Sim. Novo método de aprender.*

(aluno 26) *Mais, pois fica menos cansativo do que aula.*

(aluno 27) *Sim, pois a cada aula queira resolver mais exercícios.*

(aluno 28) *Mais motivado, pois as aulas às vezes são repetitivas, o que as tornam cansativas.*

(aluno 29) *Mais motivado. Eu gosto muito de matemática e da forma que foi colocada, nos estimula a pensar e buscar a melhor forma de resolver o exercício.*

(aluno 30) *Mais motivado. Por estar trabalhando em grupo quando eu não sabia alguma coisa as outras pessoas me ajudavam e também ocorreu o contrário quando alguém não sabia algo eu tentava ajudar.*

(aluno 31) *Igual. Mais gosto mais das aulas.*

(aluno 32) *Mais, pela interação.*

(aluno 33) *Mais. Pois são atividades mais prazerosas de fazer, que envolve mais nossa atenção.*

(aluno 34) *Eu mim senti mais motivado pelo desafio.*

(aluno 35) *Motivado, porque havia uma disputa entre as equipes e sempre tinha pontuação.*

(aluno 36) *Apesar do trabalho em equipe ser importante, quatro pessoas para fazer esse trabalho foi muito. Eu me motivaria mais se tivesse sido por exemplo de dupla porque teve gente que ficou sem fazer nada, e isso desmotiva.*

(aluno 37) *Mais motivados. Pois, estudamos em grupo.*

(aluno 38) *Sim, principalmente pela parte dos pontos.*

(aluno 39) *Me senti mais motivado porque participo mais dos trabalhos.*

**5) Você considera que este tipo de atividades poderia ser utilizado mais vezes? Por quê?**

(aluno 1) *Sim, pois a maioria gostou, apesar da atenção do professor ser muito disputada.*

(aluno 2) *Sim, para haver mais interação dos alunos, pois nossa sala é um pouco desunida.*

(aluno 3) *Sim, porque é uma forma interessante de trabalho, tendo a participação de todos e do professor.*

(aluno 4) *Com certeza. Porque não considero uma “prova” uma verdadeira amostra de aprendizado, porque o nervosismo e a pressão a ela implicados não conseguem transmitir o que realmente foi entendido ou não e com essas atividades realmente aprendemos e de uma maneira mais clara. Assim, considero a avaliação justa.*

(aluno 5) *Sim. Porque foi muito produtivo.*

(aluno 6) *Sim, porque este tipo de atividade teve mais participação de todos os alunos junto como professor.*

(aluno 7) *Com certeza. Porque é menos chato.*

(aluno 8) *Sim. Porque motiva os alunos a se integrar entre si e até com a matéria quanto ao professor.*

(aluno 9) *Sim, para se diferenciar, todos participam ninguém dorme.*

(aluno 10) *Sim. Para buscar uma competição saudável.*

(aluno 11) *Sim, porque não é um exercício cansativo.*

(aluno 12) *Sim. Porque a diversidade, faz com que aumente as expectativas de aproveitamento.*

(aluno 13) *Com certeza. Porque os resultados seriam cada vez melhores, como agora foi melhor que do jeito que estava sendo. E o mais importante todos participando das aulas.*

(aluno 14) *Sim, é uma maneira descontraída de aprender.*

(aluno 15) *Acredito que seja viável, desde que não prejudique a aula normal. (explicações)*

(aluno 16) *Sim. É uma situação nova nas aulas, que trouxe mais motivação.*

(aluno 17) *Sim porque incentiva o trabalho em grupo, cooperação.*

(aluno 18) *Concerteza, porque é bem melhor desse jeito.*

(aluno 19) *Sim, pois quebrou a rotina das aulas iguais, foi uma experiência muito boa na sala de aula.*

(aluno 20) *Sim, pois é uma maneira de motivação para o aprendiz.*

(aluno 21) *Sim, ao menos eu considero que intendi a matéria e nem estudei em casa. Problema é que assim não são muitos que vão estudar em casa, mas para mim foi bom, já que axo que intendi os exercícios.*

(aluno 22) *Sim. porque no meu ponto de vista essas atividades permite um maior aprendizado em relação à provas, além disso você se sente mais motivado.*

(aluno 23) *Sim. Eu acho que o nosso grupo realmente trabalhou em conjunto, todos deram sua contribuição.*

(aluno 24) *Sim. É uma forma mais fácil de aprender a matéria e de ganhar pontos.*

(aluno 25) *Sim, para melhorar as aulas com participação de todos os alunos.*

(aluno 26) *Sim. Assim a gente aprende mais.*

(aluno 27) *Sim, pois nos força a pensar.*

(aluno 28) *Sim, pois torna as aulas menos cansativas e mais produtivas.*

(aluno 29) *Sim. É uma forma de aproximar os colegas e compartilhar conhecimentos.*

(aluno 30) *Com toda certeza pois, motiva mais os alunos a participarem mais das aulas e não fica a mesmice de sempre.*

(aluno 31) *Não.*

(aluno 32) *Sim, porque eu gostei.*

(aluno 33) *Sim. Pois assim está estimulando a atividade em grupo o pensamento de cada um para entrar em um consenso e chegar a uma decisão.*

(aluno 34) *Sim deveria ser utilizada mais vezes, com algumas reformulações na quantidade de participantes somente 3.*

(aluno 35) *Depende do tipo da matéria.*

(aluno 36) *Se a matéria fosse explicada, estudada com exercícios em casa, na aula, depois que a matéria realmente tivesse sido praticada e entendida, essas atividades poderiam ser utilizadas até para fixar melhor a matéria.*

(aluno 37) *Sim. Pois obtive uma aprendizagem melhor.*

(aluno 38) *Sim, porque é uma maneira de fazer todos participar.*

(aluno 39) *Sim, pelo fato de ter outras pessoas pensando com você e assim participo mais.*

**6) Todas as atividades foram avaliadas (ou seja, valeram pontos). Você se sentiu melhor ou pior nestas atividades em relação às provas anteriores? Explique.**

(aluno 1) *Melhor pois praticamos mais e aprendemos mais, e as provas são mais chatas pois não podemos ter a opinião dos outros e com esse exercício aprendemos respeitar a opinião do próximo.*

(aluno 2) *Melhor, porque tinham uns exercícios quase impossível de fazer sem a ajuda do professor.*

(aluno 3) *Melhor, porque as provas às vezes aparecem questões difíceis enquanto os exercícios fáceis.*

(aluno 4) *Muito melhor. Porque as provas são muito mais complicadas por serem individuais e exigirem que “decorem” ( e não necessariamente aprendamos) a matéria discutida.*

(aluno 5) *Melhor. Algumas questões estavam difíceis mas a prova é mais e você não faz de grupo.*

(aluno 6) *Bem melhor, porque com esses exercícios (jogos) os alunos ficam mais descontraídos sem todo aquele nervosismo aquela pressão de prova.*

(aluno 7) *Melhor, um pouco menos de pressão.*

(aluno 8) *Não sei como me sinto, pois nos trabalhos não obtive tanto méritos por não resolve-los como meus companheiros e nas avaliações seja pouco ou muito eu resolvo tudo sozinha, ou seja, foi por mim.*

(aluno 9) *Bem melhor. Avaliação em grupo sem pressão.*

(aluno 10) *Melhor. Quando se ajudam fica mais fácil.*

(aluno 11) *Melhor, porque por trabalhar em grupo possibilita o raciocínio de várias pessoas e tem menos possibilidade de erro.*

(aluno 12) *Muito melhor. Tive um índice de aproveitamento muito mais alto.*

(aluno 13) *Bem melhor você inturma mais fica mais a vontade tenta fazer mais arriscar mais, pelo fato de seus colegas lhe ajudarem quando estiver errado etc...*

(aluno 14) *Melhor, pois meus resultados foram mais positivos.*

(aluno 15) *Sim, nas anteriores me sentia nervosa para definições e cometia erros por pressão do momento.*

(aluno 16) *Não sei, ao mesmo tempo que se ganha pontos todas as aulas, também pode-se perder todas as aulas. Mas é uma motivação. É bom.*

(aluno 17) *Muito melhor, foi um fiasco nas provas anteriores. Eu tenho mais facilidade na matemática que lhe da com números (dinheiro) tenho dificuldade com funções, equações, derivadas. Eu acabo dificultando as questões.*

(aluno 18) *Acho que melhor.*

(aluno 19) *Melhor, pois nem sempre tiro notas boas nas provas, mas essas atividades ajudaram bastante tanto na aprendizagem como na soma dos pontos.*

(aluno 20) *Melhor, pois conseguia tirar várias dúvidas e conseguir melhor desempenho.*

(aluno 21) *Valendo pontos, mesmo que poucos, todos levam o exercssicio mais a serio, gostei mais que uma prova, pois é uma forma de aprender mais eu axo...*

(aluno 22) *Melhor. Pois eu me senti bem mais motivado.*

(aluno 23) *Melhor. Porque 1º nossas notas foram boas, isso comprova que não fomos tão mau assim, me senti melhor.*

(aluno 24) *Muito melhor, se errar alguma coisa nos exercícios, não perdemos muitos pontos.*

(aluno 25) *Melhor. É mais correta a avaliação por exercícios dentro de aula.*

(aluno 26) *Melhor. É mais fácil quando se tem alguém para discutir a atividade.*

(aluno 27) *Melhor, pois nos permite mais chances.*

(aluno 28) *Bem melhor. Pois conseguimos boas notas nesses trabalhos.*

(aluno 29) *Melhor. Várias cabeças pensam melhor do que uma. Os conhecimentos são compartilhados e aprendemos cada vez mais.*

(aluno 30) *Melhor pois, se fosse uma prova iria surgir dúvidas e eu iria fazer pela metade, com isso, perderia pontos.*

(aluno 31) *Ainda não sei os resultados das atividades, mais acho que foi igual ou um pouco pior.*

(aluno 32) *Melhor.*

(aluno 33) *Melhor. Pois isso era uma motivação a mais para resolver os problemas corretamente, para tomar decisões certas nos joguinhos.*

(aluno 34) *Não fez diferença em relação a provas.*

(aluno 35) *Melhor, porque os pontos foram bem distribuídos.*

(aluno 36) *As minhas notas tanto nas atividades quanto nas provas foram boas, o que eu mais perdi ponto foi pelo jogo, com os concorrentes.*

(aluno 37) *Muito melhor. Pois obtemos o seu auxílio para tirar dúvidas.*

(aluno 38) *Melhor, porque nos trabalhos a gente contava com a ajuda do colega e do professor.*

(aluno 39) *Melhor, porque vale poucos pontos, assim é mais fácil.*

**7) Quando uma atividade era considerada difícil pela sua equipe, vocês se sentiam mais ou menos motivados a resolvê-la?**

(aluno 1) *Menos motivados por algumas atividades, porque era quase impossível de fazer aí ficava todo mundo nervoso e não dava conta por causa da tensão de ter que fazer e com medo de errar.*

(aluno 2) *Menos, porque demoramos demais a começar na linha certa.*

(aluno 3) *Mais, pois assim a gente tinha a participação mais efetiva de todos e do professor.*

(aluno 4) *Mais, por termos que nos empenhar mais para conseguir resolve-la e aprende-la.*

(aluno 5) *Mais. Pois aprendia mais e queria terminar rápido.*

(aluno 6) *Ah Arvelos, mais ou menos porque pois as que era mais difíceis a gente ficava nervoso de ter que fazer o exercício difícil e depois não conseguir acertar e obter os pontos.*

(aluno 7) *Mais motivadas porque o tempo era curto e os pontos estavam em jogo.*

(aluno 8) *Nem um e nem outro. Ficávamos nervosos/furiosos com você, e sem perceber resolvíamos tudo e com sua ajuda. No final deu tudo certo. Reclamamos mas gostamos. Só pra não perder o costume.*

(aluno 9) *Mais motivados.*

(aluno 10) *Mais o desafio é maior.*

(aluno 11) *Motivado, pois cada vez mais difícil necessitava mais do trabalho em equipe.*

(aluno 12) *Isso motivava até conseguirmos chegar ao seu resultado final.*

(aluno 13) *Muito mais era um objetivo a se cumprir de equipe e as vezes vou até saía um pouco da sala ia longe pensamento e todos se divertiam ao mesmo tempo desenvolvendo as atividades.*

(aluno 14) *Mais, pois ficávamos “loucos” para achar logo o resultado.*

**(aluno 15)** Bem mais motivados de acordo com o grau de dificuldade.

**(aluno 16)** Mais motivados. Sentíamos desafiados e queríamos mostrar o nosso melhor.

**(aluno 17)** Quanto maior o grau de dificuldade, maior o desafio. A meta era sempre de resolver todas as questões, como você mesmo disse o mercado de trabalho é muito rigoroso e cheio de desafios, temos que nos preparar conquistar nosso espaço no mercado de trabalho.

**(aluno 18)** Mais motivado.

**(aluno 19)** Quando víamos um problema difícil ficava menos motivados e assim que íamos conseguindo resolve-lo ficávamos mais motivados.

**(aluno 20)** Mais motivado, é um desafio legal para a equipe.

**(aluno 21)** Acho que nem era muito a dificuldade, mas algumas vezes toda equipe estava “com preguiça” mesmo que a atividade não fosse tão difísil. particularmente a atividade ser difísil não me deixa menos motivado, temos que aprender também, apesar que algumas vezes ficar meio chato, mas tá bom.

**(aluno 22)** Mais motivado, pois quando conseguíamos resolve-los, sentia uma grande satisfação, de ter vencido mais um obstáculo.

**(aluno 23)** Mais, se bem que de início não, mais depois de lermos várias vezes descobrimos ser legal desafiador, eu gosto de desafios.

**(aluno 24)** Muito mais, às vezes dava preguiça mais mesmo assim a motivação era maior.

**(aluno 25)** Mais motivado.

**(aluno 26)** Mais, para acabar rápido e ganhar os pontos.

**(aluno 27)** Não, apenas queria resolve-la.

**(aluno 28)** Muitas vezes batia um desânimo, mas sempre conseguíamos supera-lo e resolver o problema.

**(aluno 29)** Mais motivados. Dava um pouco de stress, mas todos procuravam pensar mais e encontrar uma forma de resolver o exercício.

**(aluno 30)** Mais motivados pois estávamos diante de um desafio e teria que ser resolvido.

**(aluno 31)** Mais motivados.

**(aluno 32)** Mais motivados, pois quanto mais difícil, melhor é.

**(aluno 33)** Mais. Pois tinha-mos cada vez mais vontade de entrar em um acordo e conseguir resolver corretamente os exercícios.

**(aluno 34)** *Eu senti mais motivado.*

**(aluno 35)** *Mais motivados pois, estava valendo pontos.*

**(aluno 36)** *Menos motivadas. Nós não sabíamos a matéria direito, adivinhar é meio complicado, então desanimava.*

**(aluno 37)** *Mais motivados, quando conseguimos resolver.*

**(aluno 38)** *Sim. Nós corríamos atrás, quebrava a cabeça até conseguir.*

**(aluno 39)** *Ficava mais motivado, e tentava resolve-la.*

Esta avaliação, feita pelos alunos, não pode ser considerada uma demonstração de qualquer suposição. Ela está sujeita a várias interferências, como, por exemplo, a vontade de agradar ao professor. Além disso, não se pode considerar que os alunos estejam em condições de avaliarem, de forma objetiva e imparcial, uma metodologia de ensino. As respostas obtidas devem ser tratadas apenas como opiniões subjetivas. E assim as considerando, podemos dizer que, na análise dos alunos, a seqüência didática aplicada, com a dinâmica já explicada, foi superior ao ensino transmissivo de informações.

É muito complicado se medir a aprendizagem, ou melhor, a atribuição de um conceito ou de um valor numérico para indicar o nível de aprendizagem é muito pouco precisa, sujeita a subjetividades, erros, incoerências. Temos que aceitar que os resultados destas medições não são indicadores precisos, devendo tratá-los apenas como sinalizadores, principalmente em relação ao trabalho docente. Ou seja, os resultados das avaliações são mais úteis para que o professor melhore sua prática do que como medida do conhecimento do aluno. Assim sendo, podemos considerar que as respostas que os alunos deram ao questionário fornecem pistas importantes para a análise do trabalho desenvolvido.

Podemos perceber que os alunos consideraram que os trabalhos foram, em geral, bastante positivos, sendo que os aspectos mais relevantes levantados por eles foram:

- A busca pelo conhecimento;
- O empenho em relação às atividades;
- O trabalho em equipe;
- A possibilidade de participação efetiva;
- Maior motivação;
- Aprendizagem significativa.

Todos estes aspectos são valorizados pelas didáticas nas quais o aluno é colocado numa posição ativa diante do conhecimento (POZO, 1998).