Universidade do Estado do Pará
Pró-Reitoria de Pesquisa de Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Leonardo da Silva Rosas

# Ensino de análise combinatória por atividades

Belém - PA

2018

Leonardo da Silva Rosas

# Ensino de análise combinatória por atividades

Dissertação apresentada como requisito para para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém - PA

2018

Leonardo da Silva Rosas

# Ensino de análise combinatória por atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da Avaliação:

Banca Examinadora

_________________________________________ - Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

_________________________________________ - Membro Externo
Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Pará

_________________________________________ - Membro Interno
Prof. PhD. Ducival Carvalho Pereira
Pós-doutor em Matemática
Universidade do Estado do Pará

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente **a Deus**, por ter me dado força de vontade, proteção, sabedoria, saúde e tantas outras coisas boas na minha vida.

A meus pais **José Maria Beltrão Rosas e Luzia da Silva Rosas** que sempre batalharam para que eu pudesse estudar e me tornar um cidadão de bem, ao meu irmão **Renato da Silva Rosas** pela torcida e apoio em tudo que faço para a minha melhora como ser humano, a todos os **meus familiares** que me acompanham nessa caminha de estudante, sempre me incentivando em todas as coisas boas e fraquezas e a todos os **meus amigos** que torcem pelo meu sucesso pessoal.

A minha esposa, **Aline Pantoja Malato**, que esteve do meu lado, sempre me incentivando a nunca desistir, a minha filha **Aimê Malato Rosas** por ser a razão maior do meu esforço de estar estudando e buscando melhora financeira e intelectual, **a família** de minha esposa que me acolheu da melhor maneira possível e cuida de mim.

Aos **meus colegas de turma**, que sempre foram muito companheiros, dispostos a ajudar a todo o momento, em especial **ao Marcos**, por ter disponibilizado sua turma, ter feito companhia e mostrado disposição em ajudar durante a aplicação das minhas atividades de ensino.

Aos membros da banca avaliadora, professores **Ducival Carvalho** e **Marcos Diniz** pelas observações no texto de qualificação que muito contribuiu para o fechamento da pesquisa e revisão do texto final.

A **Universidade do Estado do Pará (UEPA) e aos Professores** do curso que estão sempre se dedicando e não medem esforços em ajudar a adquirir e aperfeiçoar os conhecimentos necessários a um bom profissional, em especial ao **Professor Pedro Franco de Sá**, pela dedicação e paciência que teve conosco, pelas ótimas orientações durante todo esse período de convivência e por ter me oportunizado a honra de ser seu orientando.

“Eduquem as crianças, para que não seja necessário punir os adultos”.

**Pitágoras**

**RESUMO**

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de Análise Combinatória por Atividades.** 2018. 315f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória. E a partir dessa investigação, procuramos responder problematizações como: A sequência didática proposta propicia uma participação efetiva e um bom desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória? A sequência oferecida aos alunos desenvolve competências e habilidades para resolverem problemas de Análise Combinatória? O referencial teórico adotado em nossa pesquisa tem como base a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), o Ensino de Matemática por Atividades segundo Sá (2009) e o uso de jogos. Para se alcançar o objetivo do trabalho, optou-se pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, que foi dividida nas seguintes etapas: primeiro as Análises Prévias, onde consta a fundamentação teórica, composta das seguintes etapas: Teoria das situações didáticas, o ensino de matemática por atividade e o uso de jogos no ensino de matemática; depois se escreve sobre o ensino de Matemática; em seguida sobre os resultados de estudos sobre o ensino de Análise Combinatória buscando as contribuições de vários autores, que têm dedicado seus estudos de pesquisa nessa área da matemática; a fundamentação matemática e por fim, os resultados de um estudo de campo desenvolvido com alunos que estavam cursando o 2º ano do ensino médio de uma escola pública de Belém. A segunda parte da pesquisa, concepção e análise a *priori*, descreve os testes e uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória. Já na terceira etapa da pesquisa, a experimentação, revela a produção das informações que ocorreu no mês de Maio e Junho de 2017, com base nos resultados de uma consulta a 32 alunos, do 1º ano do ensino médio, de uma escola pública do município de Vigia de Nazaré. Finalizando a pesquisa, a análise a *posteriori* e validação, onde ocorreram as análises dos resultados, com comparações percentuais entre os resultados e análise dos erros ocorridos nos testes, aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese. Todas essas análises e comparações validaram a pesquisa, já que ouve um aumento significativo no desempenho dos alunos entre o teste inicial e final, foi provado que os fatores socioeconômicos, vivenciados pelos alunos não influenciaram na evolução que eles tiveram entre os testes, mostrando assim que a metodologia de ensino surtiu o efeito esperado.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática. Ensino de Matemática. Metodologia de Ensino. Ensino por atividade. Ensino de Análise Combinatória.

## ABSTRACT

ROSAS, Leonardo da Silva. **Teaching of Combinatorial Analysis through activities.** 2018. 315l. Dissertation (Professional Master Degree in Mathematics teaching) – University of the State of Pará, Belém, 2018.

This work states the outcomes of a research whose aim is to evaluate the effects of a different didactic sequence from the traditional one, on the participation and performance of the students in questions resolutions of Combinatorial Analysis. From this investigation, we tried to answer some problems such as: Does the proposed didactic sequence provide for effective participation and good student performance in resolving Combinatorial Analysis issues? Does the sequence offer to the students, develops competences and abilities to resolve Combinatorial Analysis questions? The theoretical reference took in our research is based on the Didactic Situations Theory from Brousseau (1996), the Mathematics teaching through activities according to Sá (2009) and the use of games. To achieve the aim of the work, the didactic engineering was chosen as a methodology of research, which was divided into the following phases: First, the previous Analysis, where there is the theoretical grounds , composed by the following phases : Didactic situations theory, the teaching of mathematics through activities and the use of game in the teaching of mathematics;after that it is written about the teaching of mathematics; and then about the results of studies of Combinatorial Analysis teaching aiming the various authors contributions, who have been dedicated in their studies to this area of mathematic; the mathematical grounds and finally, the outcomes of a field study developed with students who were taking the second year of High School from a public school in Belém. The research second part, conception and analysis in prior, describes the tests and a didactic sequence for the Combinatorial Analysis teaching. So in the third phase of the research, the experimentation, reveals the production of information that occurred on May and June 2017, based on the result of an inquiry with 32 students from the first year of High School of a public school in Vigia de Nazaré city. Ending the research, the Analysis a posteriori and validation, where occurred the analysis of results, percentage comparisons among the results and analysis of the mistakes occurred in the tests, application of the coefficient of linear correlation from Pearson and the hypothesis test. All of these analysis and comparisons validated the research, once there was a meaningful increase in the performance of the students between the starting and final tests. It was proved that social economics factors, experienced by the students did not influence in the evolution that they had between the tests, showing this way that the teaching methodology really worked as expected.

**Key-words**: Didactic Engineering. Mathematics Teaching. Teaching Methodology. Teaching through activity. Combinatorial Analysis Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE GRÁFICOS

## LISTA DE QUADROS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Dentre os conteúdos matemáticos lecionados na educação básica, a Análise Combinatória, assunto requisitado no Ensino Médio e em alguns colégios no Ensino Fundamental, é uma das vertentes que mais apresenta dificuldades de ensino-aprendizagem. Durante minha experiência profissional em sala de aula, pude perceber que o educando não desenvolve habilidade nos processos que dizem respeito à percepção, não mostram interesse por questões que não fazem parte do seu dia a dia e com isso não consegue compreender o processo de contagem em sua total plenitude, ou seja, não constrói um conhecimento significativo para desenvolver as atividades combinatórias. Outro motivo que me levou a investigar o ensino de Análise Combinatória, com mais intensidade, é o fato de muitos professores de Matemática relatar que têm antipatia pela disciplina. Muitas vezes ouvi a frase “Análise Combinatória não é minha área”. Considero que estudando o assunto com um pouco mais de intensidade, poderia entender tal angustia.

Atividades que estimulam o raciocínio devem acontecer desde as séries iniciais, com problemas atrativos que favoreçam a criatividade e elaboração de estratégias. Deste modo,

> Para que sejam amenizadas as dificuldades dos alunos e professores em relação ao processo de ensino aprendizagem é necessária que seja trabalhado com os alunos situação problema que fazem parte da sua realidade, além de projetos que envolvam o desenvolvimento de hábitos de estudos, e o uso da criatividade, fazendo com que os indivíduos se tornem cidadãos participativos e atuantes na sociedade e na resolução de problemas do cotidiano (ALMEIDA, 2006, p.10).

Assim,

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p.40).

Enquanto fui estudante do Ensino Médio, recordo me que estudei o assunto por três vezes. No 2º ano, como é de costume; no convênio, sendo bem exigido nas atividades de livros e apostilas, já que escolhi fazer o curso de C.E. (Ciências Exatas

– na época prestava-se o vestibular separado por áreas de conhecimentos afins) e no cursinho. Em todas as oportunidades, lembro-me que o assunto foi repassado da mesma maneira: começando pela definição, uso de fórmulas, seguidas de exemplos e exercícios.

Hoje, entendo que essa ligação entre produção e a faculdade de aprender por meio dos sentidos ou da mente, ligados a fatos de interesse do educando, em Análise Combinatória, sempre seja feita durante toda a educação do Ensino Fundamental e Médio, além de atividades de representações e construções, para assim o aluno ter uma visualização melhor de suas propriedades e de seus conceitos.

Com o intuito de construir melhorias a essa situação, esse projeto tem como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho na resolução de questões de Análise Combinatória, haja visto, que estudos (mostraremos mais adiante) têm mostrado que professores e alunos sentem dificuldades de interagir com o mesmo, tornando o ensino-aprendizagem pouco satisfatório. Então, buscando melhorar e/ou criar uma boa perspectiva para o ensino deste conteúdo, propusemos nos a fazer uma pesquisa investigatória baseada em quatro fases:

1. Análises prévias (Estudos preliminares sobre o assunto): escrevemos sobre nossa Fundamentação Teórica, o Ensino de Matemática, o Ensino de Análise Combinatória, Fundamentação Matemática e Consulta à Egressos.
2. Concepção e análise *a priori*: escrevemos sobre nossos processos metodológicos.
3. Aplicação de uma sequência didática (experimentação): explicamos como, onde e de que forma ocorreu nossa sequência didática.
4. Análise *a posteriori* e a validação: nessa fase analisamos, avaliamos e procuramos dar respostas as nossas perguntas centrais de pesquisa.

E a partir dessa metodologia de pesquisa, conhecida como metodologia da Engenharia Didática, responder: A sequência didática proposta propicia uma participação efetiva e um bom desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória? A sequência oferecida aos alunos desenvolve competências e habilidades para resolverem problemas de Análise Combinatória?

A metodologia da Engenharia Didática segue uma estrutura de aulas planejadas que nos auxiliou no processo de ensino-aprendizagem que pretendíamos alcançar. No primeiro momento, chamado de Análises Prévias, fizemos um estudo em literaturas envolvidas com o assunto, para que entendêssemos como tem sido o comportamento de alunos e professores com relação ao conteúdo, ou seja, de que maneira o processo de ensino vem se realizando e que atitudes poderíamos tomar ao ponto de modificá-lo para termos um melhor rendimento em nossas escolas. Após essa análise, procuramos elaborar uma sequência didática, baseada na resolução de problemas, que possa suprir as dificuldades de ensino conhecidas após os estudos das literaturas, com o objetivo de realizar uma aprendizagem significativa para os educandos, deixando-os munidos de competências e habilidades necessárias para desenvolver o raciocínio satisfatório em seus estudos. Neste momento, fizemos também uma análise das atividades da sequência, a ponto de estar controlando as situações pertinentes, que levaram os educandos à realização da proposta de ensino, baseado no construtivismo, onde fomos apenas o mediador nos encaminhamentos do processo, acreditando nas possibilidades que cada aluno traz a seu grupo, contribuindo para discussões, construção e organização do conhecimento em sala de aula, a partir de sua história de vida e dentro de um contexto social específico. Após esses dois primeiros momentos entramos na fase da experimentação, que é dedicada ao desenvolvimento das aulas (seções), onde foi aplicada a sequência, planejada com um objetivo didático e posteriormente fizemos as analises através dos registros feitos em sala. Nesse momento, nos preocupamos para que tudo saísse o mais próximo possível do planejado, seguindo os objetivos didáticos e que as seções fossem monitoradas a ponto de não escapar nenhum detalhe significativo para a conclusão dos resultados. Por fim, fizemos a descrição do ocorrido durante as seções, procurando analisar o processo da experimentação, verificando se ouve ou não um aprendizado significativo (favorável), relacionando os objetivos e os resultados apresentados pelos alunos através das informações recolhidas.

# 1 ANÁLISES PRÉVIAS

Primeiramente, nesta seção, escrevemos um pouco sobre nossa fundamentação teórica, composta das seguintes etapas: Teoria das Situações Didáticas, o Ensino de Matemática por atividade e o Uso de Jogos no Ensino de Matemática; depois escrevemos sobre o Ensino de Matemática; em seguida mostramos os resultados de estudos sobre o Ensino de Análise Combinatória no qual buscamos contribuições de vários autores, que têm dedicado seus estudos de pesquisa nessa área da Matemática; apresentamos também nossa Fundamentação Matemática e por fim os resultados de um estudo de campo desenvolvido com alunos que estavam cursando o 2º ano do ensino médio de uma escola pública de Belém, com o objetivo de apresentar informações sobre o processo de ensino e aprendizagem desses alunos em Análise Combinatória em uma escola da rede pública do Estado do Pará.

## 1.1 FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS

Com objetivo de fazer uma reflexão sobre o Ensino de Matemática, escrevemos nesta seção sobre o ensino desta disciplina, fundamentado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), no Ensino de Matemática por Atividades segundo Sá (2009) e no uso de Jogos.

### 1.1.1 Teoria das Situações Didáticas

Na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1996), temos o aluno como um pesquisador. Sujeito que constrói seu conhecimento sendo orientado a criar, discutir, fomentar ideias, conceitos, teorias e socializar os resultados tendo o professor o mediador das ações. Mais do que nunca um estudante, no exercício de sua cidadania, está envolvido com a compreensão e quantificação de dados numéricos que possibilitem uma atuação consciente e fundamentada. Para atingir esses objetivos, os estudos recentes da Educação Matemática recomendam que o educando passe de mero espectador nas aulas, para sujeito ativo, participativo e transformador do meio.

Em Pinheiro (2008), encontramos que

> Para Brousseau (1996), numa concepção formal de ensino, o professor propõe ao aluno uma questão a ser resolvida, esperando do mesmo uma boa resposta. No entanto, ao perceber que essa resposta não foi alcançada ou apresentou-se de forma inadequada, o professor fundamenta-se na crença de que o aluno necessita de mais informações para resolver o problema, ou melhor, de mais aulas (BROUSSEAU, 1986 apud PINHEIRO, 2008, p. 55).

Em sua teoria, Brousseau (1996) apresenta ainda a situação didática, que ocorre quando há a interação entre o aluno, o professor e o saber com o foco na aprendizagem. Existe também a situação a-didática, que é uma situação em que o aluno deve perceber as características e padrões que o ajudarão a compreender um novo saber, sem a presença do professor. Durante as situações a-didáticas, o professor deve agir como simples mediador e incentivador do processo.

Pinheiro (2008) considera que

> Uma situação a-didática se caracteriza essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem que o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor.
>
> Cabe ao professor elaborar situações-problema que permitam que os alunos se encontrem em situações a-didáticas. O processo é evolutivo e ocorre da seguinte maneira: primeiro, o professor propõe uma situação-problema, se abstendo ao máximo de informar o caminho para o aluno superar esse obstáculo, depois, ocorre a socialização das respostas dos alunos da turma, em geral, os mesmos estão em duplas ou grupo. Espera-se que os alunos já tenham enxergado algumas variantes do conceito que se pretende elaborar. Outra situação problema é proposta como uma evolução da primeira e o comportamento do professor se mantém.
>
> A noção de contrato didático passa pela compreensão de que, na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a-didática, e a aprendizagem é uma adaptação a essa situação. Dessa forma, o contrato didático é um conjunto de ações que o professor espera do aluno e um conjunto de ações que o aluno espera do professor (PINHEIRO, 2008, p. 56-57).

Para que isso ocorra, o professor deve se organizar quanto à escolha das atividades propostas, o número de alunos que participarão entre si e se programar quanto ao tempo do estudo. Isso é importantíssimo e o mínimo para que a sequência ocorra dentro dos padrões.

Brousseau categorizou situações didáticas e a-didáticas em quatro tipos: **situações de ação**, **de formulação**, **de validação** e **de institucionalização**. Procurou relacionar as atividades de ensino com as diversas possibilidades do saber matemático.

**Quadro 1 -** Tipos de situações didáticas segundo Brousseau (1996).

| SITUAÇÃO | DEFINIÇÃO |
|---|---|
| AÇÃO | É aquela quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na procura de uma solução de um determinado problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. |
| FORMULAÇÃO | O aluno já utiliza na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria |
| VALIDAÇÃO | É aquela em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade. Estas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. |
| INSTITUCIONALIZAÇÃO | Visam estabelecer o carácter de objetividade e universalidade do conhecimento. O saber tem assim uma função de referência cultural que extrapola o contexto pessoal e localizado... o professor seleciona questões essenciais para a apropriação de um saber formal a ser incorporado como património cultural. |

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_das_situa%C3%A7%C3%B5es_did%C3%A1ticas

**Quadro 2 -** Tipos de situações a-didáticas segundo Brousseau (1996).

| SITUAÇÕES | DEFINIÇÃO |
|---|---|
| AÇÃO | o aluno entra num primeiro contato com determinado tipo de problema. Nesta situação, o aluno procura recorrer a conhecimentos anteriores de forma a tentar resolver o problema. |
| FORMULAÇÃO | o aluno tenta formular conjecturas gerais sobre tipo de problema, é a fase em que o aluno começa a fazer generalizações, sejam elas verdadeiras ou não. |
| VALIDAÇÃO | o aluno tenta explicitar algum tipo de prova para as conjecturas formuladas por ele. |
| INSTITUCIONALIZAÇÃO | o professor expõe os conhecimentos relevantes levantados pelos alunos durante a validação e sua ligação com os outros conhecimentos e saberes já estabelecidos. |

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_das_situa%C3%A7%C3%B5es_did%C3%A1ticas

### 1.1.2 O Ensino de Matemática por Atividades

A sala de aula necessita ser a oficina do amanhã. Diante de tão grande responsabilidade precisamos realmente parar e ponderar sobre as ações que historicamente vêm sendo atribuídas ao professor no Ensino de Matemática. O perfil do professor atual é daquele que apresenta a atitude interdisciplinar caracterizada pela busca, pela ousadia, pela pesquisa, pois essas atitudes possibilitam o enriquecimento da integração dos elementos do conhecimento.

O processo pedagógico da alfabetização Matemática deve ser pensado como um desafio diário não só para o aluno, mas também para o professor. O mundo educativo passa dinamicamente por diversas linguagens e inovações tecnológicas, e nesse cenário, a aquisição de conhecimento matemático não deve se furtar de acompanhar e promover estratégias que se relacione com diversas teorias e práticas da aprendizagem. A ousadia interdisciplinar deve-se fazer valer através da pesquisa e dos estudos da Matemática. Isso significa incentivar e promover os conteúdos de uma forma construtiva, dando mais qualidade de recursos a seres humanos, que se capacitam na lógica da Matemática.

Um dos objetivos da educação é promover o conhecimento, levar o cidadão a se apropriar do mundo que o cerca, existindo uma relação direta entre o sujeito que conhece e algo a ser conhecido. Temos informações de todos os lados e não podemos esquecer os outros mediadores que a sociedade dispõe, vivemos cercados de mídias e o conhecimento é muito rápido e dinâmico. Dessa maneira, renovamos sistematicamente tudo que aprendemos, algumas coisas ganham importância e outras se tornam absolutamente obsoletas.

Em Sanchis e Mahfoud (2007), encontramos que

> Piaget, através desses conceitos, discutia as relações entre a possibilidade de conhecimento e o sujeito conhecedor. Um sujeito epistêmico, nas suas palavras, abstrato e universal, presente em todos os sujeitos reais, que se constitui na sua relação com o mundo. Essa relação não é uma relação qualquer, mas uma interação com o (s) objeto (s) do conhecimento mediada pela ação do próprio sujeito, que dessa forma assimila – não o objeto puro, mas o resultado da interação – e acomoda-se, construindo, assim, novas estruturas de compreensão da realidade. Através de um processo dialético, as estruturas são reconstruídas, assim como também as estruturas do mundo na medida em que este adquire significado para o sujeito (SANCHIS e MAHFOUD, 2007, p.173).

Com isso, acreditamos que cada professor pode ser um orientador do trabalho de seu grupo de alunos e autor de sua aula — um mediador do conhecimento. Acreditamos também nas possibilidades que cada aluno traz a seu grupo, contribuindo para a discussão, construção e organização do conhecimento em sala de aula, com base na sua história de vida e dentro de um contexto social específico. Partindo da premissa que o conhecimento é dinâmico, está em construção e resulta de interação social, históricas e temporais, consideramos fundamental que os alunos, sob sua orientação, passem por experiências que possibilitem a “reinvenção” dos conhecimentos. Eles devem elaborar novas hipóteses e propor novas configurações, com base em questionamentos originários de discussões realizadas em sala de aula. Desse modo, a história e o conhecimento não são reproduzidos, e sim redescobertos.

O Ensino de Matemática por Atividade tem uma proposta que faz com que o aluno seja o construtor de seu conhecimento, o ajudando a entender transformações que lhe ajudarão a construir sua autonomia de pensamento, muito valorizada nos dias atuais.

Em Sá (2009), temos que

> A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

Para que o processo de ensino seja bem elaborado, consideramos importante ressaltar três aspectos:

1º. Aprendizagem: Todo processo de aprendizagem envolve conhecimento. Esse processo se dá a partir do momento que começamos a nos desenvolver de forma física, biológica, mental e emocional. A vida passa a ser um permanente ensaio de acertos e erros. Nesse contexto, a caminhada educativa envolve momentos de desequilíbrios, haja vista que novas informações vão sendo checadas a nível mental pelo educando, ou seja, o que se aprendeu ontem interage com o que se aprende hoje.

O desiquilíbrio é salutar, e deve ser visto como algo necessário para a aprendizagem. Envolve maturidade mental, tão importante para construção do conhecimento humano.

2º. Sala de aula: O padrão de desenvolvimento normal em um indivíduo começa a partir de seu nascimento. É no convívio familiar que a aprendizagem surge. O contato social é importantíssimo, mas é no espaço escolar que o estudo da realidade do mundo vai lhe servir de grandes provocações de conflitos interiores. A leitura e a escrita fundamentam o alicerce no curriculum sociocultural educativo da aprendizagem.

A troca de experiências, somadas ao meio ambiente, dá o aporte tão necessário para que alunos e professores se integrem aos momentos em sala de aula.

3º. Conhecimento: O ser humano nasce com capacidade para aprender e externar esse conhecimento. Há uma necessidade muito grande de se adquirir conhecimento. O pensamento construtivo tem sede de se desenvolver e isso é muito dinâmico. As interações que se apresentam no dia a dia vão se juntando a outras experiências adquiridas em um processo permanente.

A partir dos três aspectos ressaltados anteriormente, segundo Sá (2009), temos cinco sugestões essenciais para elaboração das atividades de ensino, que servirão para a construção do conhecimento do aluno. Assim descritos:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda atividade deve procurar conduzir o aluno à construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
- De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (apud SÁ, 2009, p.18).

Hoje os alunos são bem diferentes dos de antigamente, e o bom professor também. Explicar bem, manter a disciplina, avaliar com correção, eram e continuam sendo importante, mas é mais importante que o professor permita que seus alunos construam, eles próprios, o seu saber. Na concepção atual, o professor orienta seus alunos em suas descobertas, estimulando-os em suas conclusões e sugerindo passos futuros. Nada de só explicar tudo bem direitinho ou dar tudo pronto e acabado.

### 1.1.3 O uso de Jogos no Ensino de Matemática

Hoje em dia, podemos dizer que têm sido feitos inúmeros esforços, por partes dos docentes, estudiosos e instituições de pesquisa, para acompanhar e mesmo estar à frente de todas essas mudanças que vêm ocorrendo na relação professor-aluno, em sala de aula. O Ensino da Matemática está sendo visto com outros olhos. Vivemos um momento de reformulação nos currículos, de alteração de estratégias e, sobretudo, de utilização de metodologias e técnicas educativas.

Para estimular discursões, respeitando as diferentes opiniões e a capacidade de sintetizar conclusões, devemos sugerir atividades abertas, que, apesar de balizadas por algum aspecto do conteúdo matemático, não impõem uma única direção a seguir nem uma única porta final. Os jogos podem ser o “pontapé” para esse tipo de atividade, e cabem a nós sua escolha e proposição, além de atenção e condução do processo.

Para Cabral (2006),

> A busca da compreensão de regras, a tentativa de aproximação das ações adultas vividas no jogo estão em acordo com pressupostos teóricos construtivistas, que asseguram ser necessário a promoção de situações de ensino que permitam colocar o aluno diante de atividades que lhe possibilitem a utilização de conhecimentos prévios para a construção de outros mais elaborados. Por tratar-se de ação educativa, ao professor cabe organiza-la de uma maneira que estimule a auto estruturação do aluno, desta maneira, é que a atividade possibilitará tanto a formação do aluno como a do professor, que deve estar atento aos “erros” e “acertos” dos alunos, poderá buscar o aprimoramento do seu trabalho pedagógico (CABRAL, 2006, p.18).

Os jogos e as atividades lúdicas precisam ter destaque especial em qualquer material didático de Matemática, uma vez que promovem a competição sadia e a socialização, além de recuperarem procedimentos de raciocínio que historicamente sempre tiveram associados ao saber matemático, como o prazer de resolver e de propor desafios.

A lógica dos problemas matemáticos é por si só, desafiadora e intrigante. Por isso, é importante considerar que o aprendizado dos conceitos pode passar pela utilização dos jogos e desafios que estimulam os alunos e que propiciem a aplicação de conceitos auxiliando-o a exercitarem não só o aprendizado do conteúdo, mas também a tomada, por ele mesmo, de decisões e de estabelecimento de regras internas para a fluência do trabalho. Nada mau para uma atividade lúdica! Melhor ainda é pensar que, enquanto jogamos, raciocinamos com alegria.

Cabral (2006) nos diz:

> Penso que através de jogos, é possível desenvolvermos no aluno, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a sua autoconfiança e a sua autoestima. Para tanto, o jogo passa a ser visto como um agente cognitivo que auxilia o aluno a agir livremente sobre suas ações e decisões fazendo com que ele desenvolva além do conhecimento matemático também a linguagem, pois em muitos momentos será instigado a posicionar-se criticamente frente a alguma situação. Além disso, na sociedade em que vivemos, designados por alguns como a sociedade da informação ou a sociedade do conhecimento, novas habilidades passam a ser exigidas não só no mercado de trabalho como, também, na vida social dos cidadãos (CABRAL, 2006, p.20).

No campo das estratégias de trabalho, temos hoje é que procurar maneiras mais motivadoras e, principalmente, mais desafiadoras sem enfatizar a memorização e a repetição de modelos preconcebidos, que na maioria das vezes, não eleva a capacidade de raciocínio do aluno e muito menos é sinônimo de aprendizagem. O saber matemático, em casos extremos apresentados como pronto e acabado, para ser efetivo deve ser construído pelo educando através do cumprimento de tarefas e atividades que sejam próprias e adequadas à sua faixa de capacidade cognitiva e de realidade social. E isso não se encaixa a repetição exaustiva e muito menos o excesso de formalismo.

Hoje em dia, devemos procurar novas metodologias de ensino, utilizar recursos como vídeos, calculadoras, computadores e jogos. Não fazê-los pode significar incorporar a educação clássica, valorizando a aula expositiva, centrada no professor. O papel do discente torna-se, dessa forma, muito mais dinâmico que outrora, e também mais importante, uma vez que cabe a nós selecionar, ditar e acompanhar o uso correto de toda essa produção. Através dos jogos, pretendemos fortalecer o conhecimento aprendido através das resoluções das atividades, criando um ambiente favorável e descontraído dentro da sala de aula.

Em Carvalho (2009), foi dito que:

> O uso de jogos como um recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemático e/ou para aprofundamentos destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a disciplina. (CARVALHO, 2009, p.31).

## 1.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA

De acordo com os princípios que constam no artigo 205 da constituição de 1988 e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação nacional, os conteúdos a serem ministrados para o Ensino Fundamental e Médio têm por finalidade formar os alunos para o exercício consciente da cidadania. A educação, portanto, escolar deve estar comprometida com a cidadania e, para isso, deve-se apoiar em quatro princípios básicos: dignidade do ser humano, igualdade de direitos, participação na vida coletiva e corresponsabilidade pela construção e destino da coletividade. Os conteúdos devem ser significativos para os alunos e estar adequados às diversas formas de aprender de cada um.

Muitos estudos realizados por pesquisadores da área de Educação Matemática vêm destacando a necessidade do educador de refletir sobre suas atividades, conteúdos e conceitos que, em muitos momentos, são repassados de forma vaga para os educandos, entre eles Cabral (2006), Carvalho (2009), Costa (2013), Duro (2012), Gonçalves (2014), Silva (2013), Souza (2013), Sturm (1999), Tataia (2012), Vazquez (2011), entre outros. A introdução de conteúdos por meio de situações voltadas à realidade dos alunos é uma importante ferramenta que se integra às novas metodologias exigidas pela educação, uma vez que a integração e a interação dos alunos com a Matemática permitem que os problemas possam ser um excelente atrativo para as aulas desta disciplina. O Ensino de Matemática por meio do método tradicional é um problema cultural, visto que já não está atendendo às necessidades de alunos e professores. Segundo Sturm, temos que

> [...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação (STURM, 1999, p.3).

Pela sua própria história, a Matemática mostra que foi construída em resposta a perguntas motivadas por problemas, seja de ordem prática (como contagem de animais, divisão de terras, cálculo de questões financeiras, etc.), sejam vinculadas a outras ciências (como a Física, a Química, etc.) ou ainda ligadas à própria Matemática. Dessa forma, a resolução de problemas é da própria essência da Matemática, funcionando como um grande organizador do processo de aprendizagem, muitas vezes como o seu detonador, articulador e construtor.

A respeito do uso da metodologia tradicional, Esteves (2001), em sua pesquisa, pontua:

> [...] queremos mostrar que a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrário, ela representa uma compressão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo Análise Combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore de possibilidade, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica (ESTEVES, 2001, p.3).

Hoje, ser um professor é muito mais do que ministrar aulas. É munir os alunos com o acesso ao saber historicamente produzido, levá-los ao despertar para o saber. É inseri-los no jogo das informações e ao mesmo tempo fornecer-lhes meios para que possam selecionar essas informações e realizar sua significação. Então, instrumentalizar o aluno a ter mais autonomia e prepará-lo para estar continuamente em busca de aprender como parte de seu desenvolvimento, torna a aprendizagem mais significativa. Assim, o saber escolar, cumpre seu papel na formação de seres humanos preparados para atuar de maneira efetiva na transformação da sociedade. O processo educativo remete a um esforço sistemático e contínuo para mudar as condições de aprendizagem, com a finalidade única de alcançar as metas educativas de forma mais eficaz.

O objetivo é não estimular excessivamente o formalismo matemático além do que é necessário para a formação de alguns modelos básicos, e, quando ele se fizer importante, que seja obtido através do consenso de discussão e síntese por parte dos próprios educandos. Não se devem apresentar regras claras e diretas de como fazer tal coisa nem de como escrever tal propriedade. Preferir problemas e desafios em detrimento de exercícios repetitivos. Agora é preciso cuidado na apresentação dos problemas porque muitas vezes o que para alguns alunos é realmente desafiador (um problema) pode não ser para outros. Um problema verdadeiro deve exigir uma série de ações e operações que levem a um resultado que não está disponível de imediato, mas é possível se obtido com construções adequadas.

Com isso, para prática de resolução de problemas como ponto de partida, seguiremos em nossos estudos e aplicaremos em nossa sequência de ensino, recomendações dadas por SÁ (2005), listadas assim:

> **1.** Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
> **2.** Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
> **3.** Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
> **4.** Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
> **5.** Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
> **6.** Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
> **7.** Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
> **8.** Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
> **9.** Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
> **10.** Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
> **11.** Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado (SÁ, 2005, p.75).

## 1.3 ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A fim de proporcionar melhorias no processo de educação, é relevante que se entenda o quanto é importante ascender com novas metodologias, visto que os componentes e as ferramentas ao se incorporarem a essas novas técnicas proporcionam motivação aos alunos. Nesta revisão de literatura, apresentamos dissertações, monografias e artigos relacionados ao uso de jogos e principalmente em Educação Matemática, sobre o assunto Análise Combinatória. Foram analisados 13 trabalhos, o mais antigo foi desenvolvido em 1999 e o mais recente em 2014.

Os trabalhos foram estudados e analisados, tendo em vista questões norteadoras/motivação, objetivos, metodologia, resultados e/ou conclusão. Abaixo estão os resumos dos trabalhos analisados, os quais dividimos em categorias para facilitar a compreensão dos mesmos. Utilizamos as categorias mencionadas por Silva (2013), que as dividiu em estudos diagnósticos, estudos experimentais e estudos teóricos.

Dentro de um estudo diagnóstico, é bom frisar que não é raro, encontrar algo que se aproxime de um estudo experimental ou teórico e vice-versa. Veremos mais adiante o que significa os estudos experimentais bem como os teóricos. Na fase de análises prévias, buscamos examinar trabalhos relacionados ao tema de estudo, o ensino de Análise Combinatória. As pesquisas analisadas estão disponíveis para consulta em bancos de dados on-line, em suas respectivas instituições.

### 1.3.1 Estudos Diagnósticos

Os estudos diagnósticos são aqueles que analisam e identificam algumas dificuldades dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem. Tais estudos nos serviram para identificar as dificuldades relacionadas ao ensino de Análise Combinatória.

No trabalho de Sturm (1999), encontramos a questão norteadora: “Quais as possibilidades pedagógicas de um ensino de Análise Combinatória sobre uma abordagem alternativa?”. O autor considera três objetivos a serem alcançados:

**1º.** Analisar uma proposta de ensino de análise combinatória e sua experimentação em sala de aula;

**2º.** Identificar suas possibilidades e limites com relação ao ensino-aprendizagem da proposta, no sentido de colaborar em futuras investigações de Análise Combinatória;

**3º.** Contribuir para o trabalho de professores de matemática do ensino médio que busquem aprimorar sua formação em relação ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Em sua metodologia o autor, fez uma investigação qualitativa com uso de diário, aplicação de provas e questionários, durante aproximadamente 8 meses, com 33 alunos de uma escola particular de Itu, onde dispunha de 3 aulas por semana de 40 minutos, no período noturno. Com alunos da 2ª série do ensino médio, trabalhando os assuntos arranjo, permutação e combinação.

O autor conclui que foi dificultoso analisar a própria prática e que deveria ter feito entrevistas com os alunos. Também destaca que o princípio multiplicativo foi bem utilizado e que os alunos sentiram dificuldades nos problemas de ordem e repetição. Sturm revela também que durante sua pesquisa, não encontrou texto no Brasil sobre o assunto, o que deixou algumas lacunas sobre que norte seguir durante a pesquisa.

Ainda encontramos outros estudos diagnósticos, em Nepomuceno e Souza Júnior (2014, p.71 a 78) apud Lima Júnior (2014, p. 35 a 42), expostos no quadro a seguir.

**Quadro 3 -** Revisão de estudos diagnósticos dos seguintes autores:

(Continua)

| Autor | Trabalho | Ano | Objetivo | Principais Resultados |
|---|---|---|---|---|
| Antunes e Do vale | Análise Combinatória na Escola Pública. | 2005 | Identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos acerca dos tópicos estudados na Análise Combinatória e analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória. | Em relação às dificuldades de aprendizagem durante as aulas de Análise Combinatória, 52% dos alunos das escolas públicas indicaram a falta de compreensão dos textos dos problemas, em segundo lugar, eles indicaram o uso da fórmula correta nos problemas de Combinatória. |
| Batanero | Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário. | 1996 | Analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem | Dificuldade nas resoluções dos problemas e só conseguiram desenvolver atividades onde o número de elementos eram pequenos. |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ser consideradas essas variáveis no aprendizado. | |
| Pacheco | Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não verbais no campo da Análise Combinatória. | 2001 | Confrontar as abordagens dos estudantes em diferentes tipos de problemas e buscar algumas explicações para possíveis performances nos diferentes casos e para os possíveis erros apresentados. | A pesquisadora aponta que existe uma relação direta entre o uso da fórmula e a inversão da natureza combinatória, isto é, todos os alunos que apresentaram essa inversão adotaram estratégia com o uso de fórmulas. |
| Pinheiro e Roza | Dá análise combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio? | 2006 | Identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos acerca dos tópicos estudados na Análise Combinatória e analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória. | Enquanto que 60% os alunos das escolas particulares indicaram que a maior dificuldade era diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação e, em segundo lugar, 58% dos alunos indicaram a falta de compreensão dos textos. |

Fonte: apud Lima Júnior (2014)

### 1.3.2 Estudos Experimentais

Categoria composta por trabalhos que compõe e realizam atividades voltadas para o Ensino de Análise Combinatória, objetivando superar uma dificuldade e/ou aumentar a eficácia do processo ensino aprendizagem.

O trabalho de Carvalho (2009) possui como questão norteadora: “O uso de jogos pode favorecer melhor compreensão de problemas de contagem para alunos de uma turma do 8º ano do ensino fundamental do CMPA (Colégio Militar de Porto Alegre)?”. O autor apresenta 3 objetivos:

**1)** Propor uma sequência que amplie o campo conceitual multiplicativo nos problemas de contagem;

**2)** Desenvolver nos alunos habilidades de estratégias e organização na resolução de problemas;

**3)** Promover a socialização entre os estudantes.

Também é um objetivo a ser alcançado, fazer com que os alunos se motivem a pensar de forma organizada, através de estratégias elaboradas por eles mesmos, em situações problemas que fogem às do livro didático.

Carvalho usou em seu estudo a seguinte metodologia: aplicou os jogos durantes as aulas, para uma turma do 8º ano do ensino fundamental, com 33 alunos de um colégio militar de Porto Alegre. Nas aulas houve registro de fotos e entrevistas aos alunos, que se organizaram principalmente em duplas e após terem jogado os 4 jogos e conhecido as regras, passaram por várias questões de contagem, que estavam relacionadas com cada um dos jogos. O estudo se deu entre os meses de agosto e dezembro, sendo tudo anotado em um caderno pelo professor.

O trabalho apresenta uma proposta de Estudo de Caso, utilizando uma sequência didática com problemas de contagem associados ao uso de jogos. O autor defende a diversidade de situações problemas que possam ser relacionados com os jogos propostos, fundamentado nas ideias principalmente de Vergnaud (1993) e Vigotsky (1991). Ele considera que o uso de jogos torna o assunto atraente, interessante e propicia a integração entre os estudantes, acreditando que juntamente com os problemas ampliará os conceitos no campo multiplicativo.

Os resultados da pesquisa foram verificados por meio de análise jogo a jogo e situações-problemas, que indicaram um aumento do aproveitamento da turma quando apresentada novas situações propostas, além de uma grande diversidade de resoluções e esquemas até já empregadas em outras atividades, que acabavam sendo adaptadas.

O autor concluiu que foi um sucesso a aplicação da metodologia, já que alcançou seu objetivo e acredita também que os alunos poderão ter uma melhor compreensão do assunto Análise Combinatória ao chegarem no 2º ano do ensino médio, se comparados com estudantes que não tiveram tal oportunidade.

O trabalho de Almeida (2010) possuía a questão norteadora: “Que contribuições uma proposta de ensino que enfatiza a Comunicação Matemática pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola de pública de Itabirito (MG)?”. E tem como objetivo investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio. O autor considera também alguns objetivos específicos a serem alcançados como:

**1)** Avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta;

**2)** Identificar as principais estratégias utilizadas;

**3)** Analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo;

**4)** Investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos;

**5)** Identificar como os estudantes avaliam a proposta de ensino.

Inicialmente a autora fez um estudo em literaturas sobre Análise Combinatória com o intuito de identificar as principais dificuldades e formas de enfrentá-las. Considera esse assunto como um importante instrumento de desenvolvimento da formação do aluno e que evidencia mecanismos que acha facilitadores no ensino e aprendizado desse conteúdo. Afirma que seu diferencial com os alunos é a interação (comunicação) que estimula a argumentação, expressão e aprofunda a compreensão sobre Análise Combinatória.

A metodologia de pesquisa da autora se constituiu em um teste diagnóstico inicial, um teste intermediário e o pós-teste, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG). Após o teste inicial foram feitas seis atividades em que os alunos deveriam discutir em grupo e apresentar suas estratégias de resolução à turma, tendo como intermediador o professor, o teste intermediário serviu para mostrar os pontos fracos e fortes e redirecionar o trabalho, em seguida Almeida fez o pós-teste. A coleta de dados se deu por meio de anotações da pesquisadora, gravações em áudio e vídeo de todas as aulas, registros produzidos pelos alunos ao longo das atividades, questionários e os testes diagnósticos.

Os resultados da pesquisa foram satisfatórios, já que os resultados obtidos no pós-teste mostraram resoluções mais bem elaboradas que a da primeira atividade, evidenciando o desenvolvimento dos educandos, uma melhora na fixação de conteúdos e que os alunos estavam mais desinibidos, questionadores e com uma compreensão mais profunda do que lhes foi ensinado. Entretanto, ainda ficou evidente a dificuldade em agrupamentos não ordenados.

**Quadro 4 -** Apresenta alguns indícios que levaram o autor a concluir que a proposta foi capaz de contribuir para o processo de ensino aprendizagem.

| Antes da aplicação da proposta | Ao final da aplicação da proposta |
|---|---|
| *Os alunos não estavam acostumados a questionar, a participar de diálogos envolvendo conceitos matemáticos.* | *Alguns alunos perguntavam "por que". Questionavam a resolução dos colegas e da pesquisadora.* |
| *Resolviam os exercícios a partir do modelo estabelecido pela professora.* | *Criavam suas próprias estratégias. Resolviam o mesmo problema de formas diferentes para avaliar a resposta encontrada.* |
| *Acreditavam que todo exercício tinha uma maneira única de ser resolvido: aquela ensinada pelo professor.* | *Aceitavam que um mesmo problema pode ser resolvido por mais de uma estratégia.* |
| *Dificilmente se expressavam verbalmente sobre um conteúdo matemático.* | *Apresentavam suas estratégias e defendiam suas ideias perante a pesquisadora e seus colegas.* |
| *Trabalhavam em grupo de forma que um aluno resolvia a questão enquanto os demais copiavam sua resolução.* | *Todos participavam das discussões dentro dos pequenos grupos quase que de forma igualitária. O trabalho tornou-se mais colaborativo.* |
| *Não estavam familiarizados com alguns aspectos próprios da linguagem matemática, como por exemplo, a dificuldade apresentada para resolver problemas envolvendo a noção de numerais.* | *Reconheciam alguns verbetes próprios da linguagem matemática, como, por exemplo, "enumeração de possibilidades".* |
| *Eram completamente dependentes do professor para validar suas respostas.* | *Criavam estratégias para validar suas conjecturas.* |

Fonte: Almeida (2010, p. 142)

O autor concluiu que a aplicação da metodologia foi adequada e capaz de gerar contribuições para o processo de aprendizagem, visto a evolução na aprendizagem e aspectos relacionados no quadro acima. Apesar dos problemas enfrentados como, baixa frequência dos alunos no período das aulas, a dificuldade deles em se expor por falta de confiança, interrupções por problemas administrativos da escola, entre outros.

Em Bastos (2013), encontramos algumas questões norteadoras como: "Qual a importância de saber contar? Sempre foi assim? Ou Sempre foi importante saber contar? Quando os números foram criados? O que isso tem a ver com aula de análise combinatória? ", voltadas a uma introdução histórica do assunto. O objetivo foi estimular o ensino e a aprendizagem da análise combinatória, sistematizando-se com base numa abordagem histórica do desenvolvimento da matemática, utilizando o uso do princípio multiplicativo e a resolvendo situações-problemas.

Bastos visou à criação de um produto educacional, no qual foi dada uma visão geral sob uma abordagem histórica da Análise Combinatória, na escola de Ensino Médio, e também contribuir com situações-problema, tornando o aprendizado prazeroso e estimulante, com clareza e objetividade. Tomando por base teórica os estudos de Eves (1995) e Souza (2010). Visando ainda compreender o desenvolvimento da história da análise combinatória, como sendo um instrumento motivador ao processo de aprendizagem e a importância na busca de sua compreensão no processo de transformação social e melhoria cientifica no decorrer dos tempos; a compreensão do processo multiplicativo; domínio do conceito combinatório e compreensão das fórmulas utilizadas para a resolução dos problemas e resolver problemas de contagem por meio do princípio multiplicativo ou por formulas.

Como metodologia, o autor organizou o trabalho em três etapas:

1) Levantamento histórico sobre à Análise Combinatória - revisão bibliográfica.

2) Elaboração de problemas contextualizados, o qual serão feitos embasado em contextos, reais, que possam levar facilmente, os alunos perceberem o princípio multiplicativo.

3) Conclusão o produto educacional, logo a estruturação das informações concebidas em meio ao processo de estudo e pesquisa.

O autor conclui que é possível garantir que a História da Matemática não se trata de uma moda transitória no ensino, mas sim permanente, assim como os conceitos de Análise Combinatória em Matemática. Acredita que sempre que possível devem ser expostos como situações problemas contextualizados ou interdisciplinares. Aponta que a sala de aula deve ser um lugar atraente para seus alunos, visando conseguir seus objetivos, de modo a otimizar o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, de forma mais prazerosa, mantendo o rigor matemático, desenvolvendo no educando um espirito reflexivo, crítico, participativo, responsável que também contribua para o professor ou futuro professor combater o analfabetismo do raciocínio combinatório.

Em Cabral (2006), o objetivo do autor foi mostrar que o uso de jogos é um método que tem grande valia dentro da sala de aula, identificando também sua eficácia e o modo como ele nos auxilia, não só no processo de ensino e aprendizagem da matemática, mas como participante no desenvolvimento de um sentimento de autonomia, prazer e contentamento.

O trabalho buscou apresentar como o uso de jogos dentro da sala de aula poder ser eficaz e prazeroso para o aluno. Mostrando que o conhecimento é algo pessoal, subjetivo e não apenas linguístico, sendo resultante da experiência pessoal do indivíduo com a informação que lhe é dada. Para fundamentar esse pensamento o autor toma por embasamento teórico o trabalho de Moura (1991); Kishimoto (1994); Grando (2004); entre outros que referencia em seu texto. Apresenta que no ensino de matemática, já existe muitas possibilidades de trabalhar os conceitos desta disciplina, não utilizando apenas o ensino tradicional, mas, levando em consideração outras propostas metodológicas, como a Resolução de Problemas, a abordagem Etnomatemática, o uso de Computadores, a Modelagem Matemática e o uso de Jogos Matemáticos, procurando fazer com que o aluno deixe de ser um simples receptor de conteúdo, passando a interagir e participando do próprio processo de construção do conhecimento.

A metodologia de Cabral foi:

1) Comentou sobre o ensino tradicional e defendeu a importância da aplicação de novas metodologias, inclusive a utilização de Jogos, seus benefícios e como utilizá-los.

2) Apresentou uma Coletânea de Jogos Matemáticos que ele considera que podem ser aplicados em sala, sendo facilitadores na aprendizagem.

O autor conclui afirmando que acredita que o ensino de matemática não deve apenas ser feito na sua forma tradicional, uma vez que socialmente o aluno não faz o usufruto daquilo que lhe é explicado em sala de aula, pensando-se assim a utilização de Jogos poderia facilitar a percepção de algumas situações-problema que poderiam surgir em sua vida cotidiana. Aponta que ao utilizar os Jogos no ambiente escolar, de maneira consciente e compromissada, pode ser motivador para o ensino-aprendizagem de matemática. Afirmou também, que não devemos tornar o uso do Jogo algo obrigatório na sala de aula, mas sim que metodologicamente ele possa servir para o aluno apreender os conteúdos de maneira alegre e prazerosa, assim auxiliando nesse processo de transformação educacional que se almeja. E segundo ele, o trabalho com Jogos Matemáticos em sala de aula nos traz alguns benefícios, mas devem ser escolhidos com cuidado.

**Quadro 5 -** Benefícios e cuidados ao se trabalhar com jogos.

| Benefícios | Cuidados |
|---|---|
| • Conseguimos detectar os alunos que realmente estão com dificuldades de aprendizagem. | • Não tornar o jogo algo obrigatório. |
| • O aluno demonstra para seus colegas e para o professor se o conteúdo foi bem assimilado. | • Escolher jogos em que o fator sorte não interfira no resultado do jogo, permitindo que vença aquele que descobrir as melhores estratégias. |
| • Pode existir uma competição entre os alunos, pois almejam vencer e por isso aperfeiçoam-se e buscam alcançar seus limites. | • Utilizar atividades que envolvam dois ou mais alunos, para proporcionar a interação social. |
| • Durante o desenrolar de um jogo, observamos que os alunos se tornam mais críticos, alertas e confiantes, expressando o que pensam, elaborando perguntas e tirando conclusões sem necessidade da interferência ou aprovação do professor. | • Estabelecer regras, que podem ou não serem modificadas no decorrer de um jogo.<br>• Trabalhar a frustração pela derrota na criança, no sentido de minimizá-la. |
| • Não existe o medo de errar, pois o erro é considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta. | • Estudar o jogo antes de aplicá-lo aos alunos (o que só é possível jogando). |
| • Os alunos se empolgam com o clima de uma aula diferente, o que faz com que apreendam sem perceber. | |

Fonte: Cabral (2006, p.31 e 32).

No trabalho de Costa (2013) o objetivo principal foi desenvolver no aluno do Ensino Médio um raciocínio combinatório conciso, não privilegiando assim o uso de fórmulas.

Para tal finalidade trabalhou com alunos das três séries do Ensino Médio, seguindo orientações contidas na Proposta Curricular para as Escolas Públicas do Estado de Minas Gerais (CBC-MG), de uma forma que leve o aluno a obter uma facilidade de compreensão de conceitos complexos a partir de outros de grau mais simples, dando significado aos conceitos que devem ser adquiridos, sem a necessidade inicial de memorização de fórmulas e sim após as discussões das situações-problemas elas podem ser formalizadas. Este trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos que abordam variadas temáticas, tais como:

definição, os aspectos históricos, importância e o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória; A Proposta Curricular e Avaliações Externas da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais; A metodologia, ensino aprendizagem, propostas de trabalho de Resoluções de Problemas; A abordagem do assunto em alguns livros didáticos: forma de introdução e inclusão de fatos históricos, conceitos, a inserção de fórmulas, problemas, representação.

A metodologia usada para a elaboração das atividades foi a Resolução de Problemas. O roteiro elaborado por Onuchic (1999) foi utilizado no desenvolvimento deste trabalho, pois contém uma sequência de atividades que abrange uma sequência: formar grupos, o papel do professor, resultados na lousa, plenária, análise dos resultados, consenso e formalização. O principal material de apoio guia é o livro “Análise Combinatória e Probabilidade” da Coleção do Professor de Matemática da SBM.

Finalmente, conclui que este aspecto interativo proposto nas atividades, seja capaz de colaborar para que os alunos adquiram um conhecimento com significado. Por outro lado, esse modelo pode gerar indisciplina e aí a postura do professor se torna fundamental. Torna-se consenso entre os docentes de matemática, que conseguir uma educação de qualidade através de um conhecimento concreto não é tarefa fácil, pois dependem de estudo, pesquisa e aprimoramento constante.

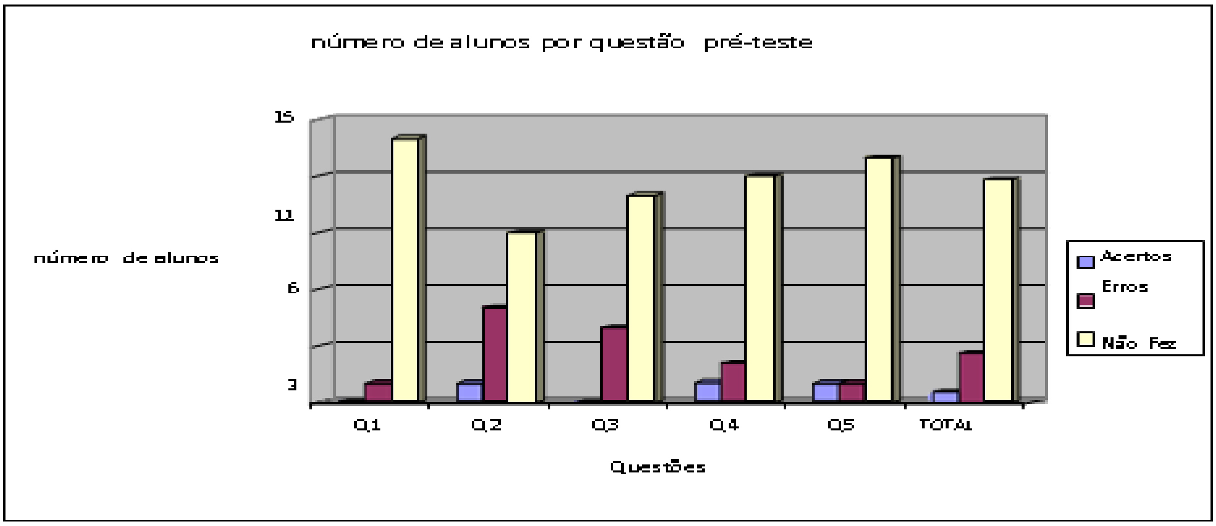
Em Pinheiro (2008), encontramos a questão norteadora: “Uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória?” e como questão derivada da primeira, “É possível, a partir do ensino oferecido, que os alunos tenham desenvolvido habilidades básicas para resolverem os problemas de Análise Combinatória?”. O autor teve como objetivo investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas.

Teoricamente, debruça-se em estudos extraídos de Sá (2005) para a abordagem sobre Resolução de Problema. Brousseau (1986) é utilizado nas contribuições sobre Teoria das Situações Didáticas. Já Lara (2003), complementa a questão do Uso de Jogos no Ensino da Matemática.

Como metodologia, aplicou uma sequência didática com ênfase na resolução de problemas como ponto de partida junto aos alunos da segunda série do ensino médio. Participaram da pesquisa 15 alunos, da 2ª série do Ensino Médio, de uma escola pública em Belém do Pará. Os Instrumentos para análise dos dados foram: registros dos alunos referentes a cada aula, pré-testes (objetivando saber se os alunos conseguiriam resolver problemas que envolvessem as habilidades básicas do ensino de Análise Combinatória.), pós-testes (para avaliar o desenvolvimento das habilidades básicas da Combinatória) e filmagens (Pinheiro fez uso de uma câmera de vídeo para analisar as aulas). O autor ficou impossibilitado de realizar a fixação do conteúdo através de jogos devido a uma greve na rede pública de ensino, que fez com que as aulas planejadas se reduzissem a metade.

O resultado do pré-teste aplicado com a sequência didática revela que a maioria dos sujeitos da pesquisa não fizeram as questões.

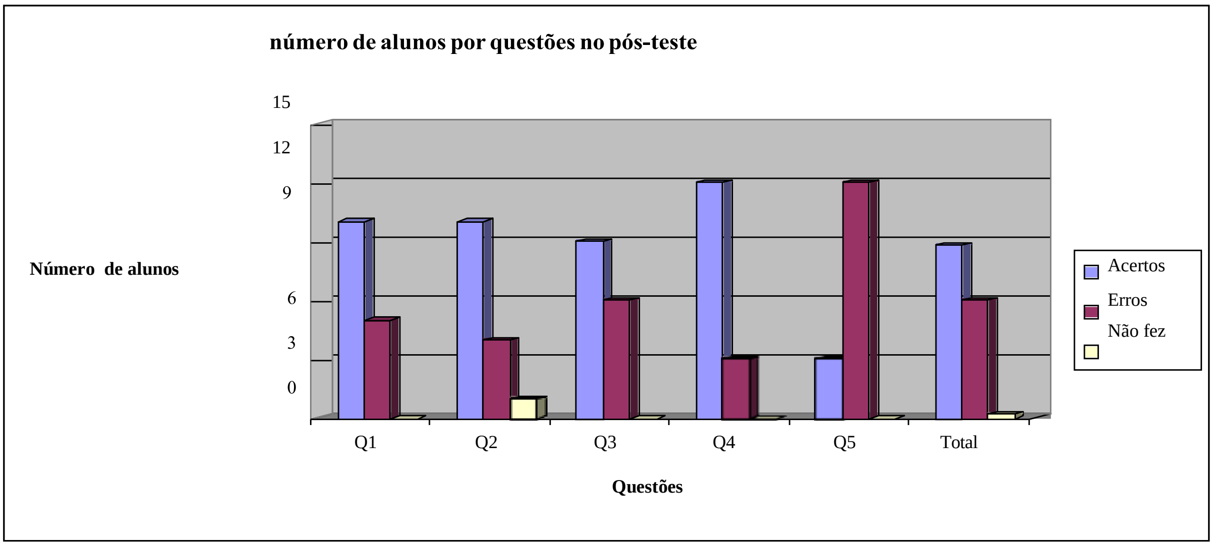
**Gráfico 1 -** Número de alunos por questões no pré-teste.




Fonte: Pinheiro (2008, p. 133).

Já no pós-teste, houve mais intenção de realizar a atividade e o número de acertos das questões por parte dos alunos foi bem maior, conforme veremos a seguir.

**Gráfico 2 -** Número de alunos por questões no pós-teste.




Fonte: Pinheiro (2008, p. 134).

De forma geral, concluiu que a sequência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem com o intuito dos alunos desenvolverem as habilidades básicas da Análise Combinatória. Assim como, revela a necessidade de novas pesquisas no campo da Análise Combinatória com a intenção de potencializar o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia básica para a resolução dos problemas.

No trabalho de Silva (2013), encontramos as questões norteadoras que motivaram a pesquisa: Que práticas metodológicas são mais comuns no processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória? Quais as contribuições da Metodologia da Resolução de Problemas para o ensino dessa disciplina? Que considerações e reflexões, quanto ao processo de ensino-aprendizagem, podem ser extraídas, a partir de uma abordagem que foque a resolução de problemas e o pensar combinatório? O autor teve por objetivo traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula.

Silva, por sua vez, desenvolveu uma pesquisa pedagógica referente ao ensino de Análise Combinatória através da resolução de problemas, o autor procurou entender o ensino – aprendizagem de análise combinatória através de observações durante sua prática em sala de aula. Iniciou suas atividades com a resolução de problemas e observações, com o objetivo de mapear o processo. Fruto de um olhar reflexivo para a nossa própria prática como professor-pesquisador.

Como metodologia, realizou uma pesquisa em uma turma de 2ª série do Ensino Médio, de uma escola pública da rede estadual de ensino em Pernambuco, foram ministradas um total de vinte e duas aulas (onze encontros de duas aulas cada) de 50 minutos cada. A pesquisa foi elaborada com uma sequência de problemas que puderam introduzir os conceitos de Análise Combinatória, sendo mediados pelo professor e o fazendo avançar nos níveis: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo, Combinação e Fatorial, de um número natural.

O autor conclui que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo. Contudo considera que estudos mais relevantes devem ser feitos na área que se dedica a ensinar como ponto de partida através de situações problemas.

No trabalho de Vazquez (2011), encontramos a questão norteadora: “O ensino de Análise Combinatória, sem o uso abusivo de fórmulas, através de atividades orientadoras e da utilização do princípio multiplicativo, pode melhorar o ensino e a compreensão desse conteúdo?”. A pesquisa teve por objetivo descrever a elaboração, desenvolvimento e aplicação de três atividades orientadoras de Análise Combinatória.

A metodologia foi aplicada a quatro turmas de estudantes da 2ª série do ensino médio, de uma escola pública do interior de São Paulo, com aproximadamente 40 alunos em cada. Considera que as atividades propostas fogem do tradicional, busca o interesse, a curiosidade dos alunos e devem ser realizadas sem o uso de fórmulas, sendo o professor apenas o orientador entre o conhecimento e a aprendizagem. Essas atividades resolvidas pelos alunos foram analisadas através de filmagens, observações e anotações feitas pelo pesquisador durante e ao final do processo. Nos grupos formados houve colaboração, mobilização de conhecimento e à medida que se desenvolvia as atividades a professora os orientava na tentativa de identificar um padrão. Após as discursões e realizações de todas as atividades, foram apresentadas as fórmulas com ajuda dos alunos, a partir de exemplos simples, acreditando que se faz necessário o conhecimento das mesmas.

No trabalho a autora faz um resgate histórico sobre o assunto, incluindo também o uso da Combinatória no uso da Probabilidade, além de falar e definir as principais técnicas de contagem (Princípio Fundamental da Contagem, Permutações, Arranjos e Combinações).

Ao final, os resultados da pesquisa mostram que os 141 alunos que foram avaliados através de seis questões dissertativas, apresentaram um bom índice de acertos.

**Quadro 6 -** Sintetiza os resultados obtidos com a avaliação.

**Tabela 3:** Resultados obtidos na avaliação formal de Análise Combinatória

| Questões | respostas corretas | | respostas erradas | | outras situações* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | nº de alunos | % | nº de alunos | % | nº de alunos | % |
| 1ª | 120 | 85,1 | 12 | 8,5 | 9 | 7,4 |
| 2ª | 78 | 55,3 | 53 | 37,6 | 10 | 7,1 |
| 3ª | 40 | 28,4 | 59 | 41,8 | 42 | 29,8 |
| 4ª | 60 | 42,5 | 41 | 29,1 | 40 | 28,4 |
| 5ª | 97 | 68,8 | 16 | 11,3 | 28 | 19,9 |
| 6ª | 119 | 84,4 | 15 | 10,6 | 7 | 5,0 |

*Respostas incompletas ou ausência de respostas.

Fonte: Vazquez (2011, p. 75).

Vazquez conclui que no início a maioria dos educandos procurava montar as possibilidades, acreditando que esse fato se dá devido não terem contato com o assunto Análise Combinatória no ensino fundamental. Considerou a avaliação do trabalho satisfatória, já que os alunos construíram o processo, participaram, colaboraram e se mostraram mais confiantes na busca da solução dos problemas.

### 1.3.3 Estudos Teóricos

Esta categoria é composta por trabalhos que apresentam aspectos conceituais acerca do Ensino de Análise Combinatória.

No trabalho de Duro (2012), encontramos a questão norteadora: Como se dá a construção do pensamento combinatório em alunos do ensino médio? Objetivou-se investigar as estratégias (gênese da construção do raciocínio combinatório) utilizadas pelos estudantes durante a realização de experimentos, levando em conta a estruturação do seu raciocínio e os esquemas previamente construídos que possibilitam ou limitam a construção da combinatória.

A escolha deste tema se deve ao fato de a Análise Combinatória embasar muitas outras teorias matemáticas, sendo a sua compreensão necessária para o cálculo de probabilidades. O foco, portanto, não é o Ensino de Análise Combinatória, mas como o sujeito aprende Matemática. Dialogaram com autores como Dornelas (2004); Sabo, (2010); Piaget, (1973) que abordam a questão do desenvolvimento cognitivo, da construção do raciocínio formal e do pensamento combinatório numa perspectiva da adolescência. Adentraram aos conhecimentos de Análise Combinatória (Princípio Fundamental da Contagem – P.F.C, Arranjo, Permutação e Combinação).

Como Metodologia, a coleta de dados se deu através da aplicação (filmagem) individual de quatro experimentos inspirados no método clínico piagetiano a 18 sujeitos, 8 alunos de EJA e 10 alunos do ensino médio regular de uma escola da rede pública. Gradualmente, foram aplicados conhecimentos de P.F.C (Nível I), Arranjo e Permutação (Nível II e III) e Combinação (Nível IV). Na análise dos dados (categorizados) reuniram distintas características, sendo elas:

**Quadro 7 -** Síntese dos níveis, quanto à construção da combinatória.

| | |
|---|---|
| **Nível I** | **CARACTERÍSTICAS:**<br>- Combinações aleatórias e não sistemáticas;<br>- Foco no resultado, e não no processo;<br>- Indiferença frente às contradições;<br>- Ausência de tomada de consciência sobre as ações.<br>- Pensamento opera sobre a materialidade (as possibilidades se esgotam em algum momento);<br>- Necessidade do concreto. |
| **Nível II** | **CARACTERÍSTICAS:**<br>- Explicação presa ao concreto, podendo estender-se a um virtual vinculado ao concreto; |
| **Nível III** | **CARACTERÍSTICAS:**<br>- Pensamento hipotético-dedutivo, não mais preso ao real;<br>- Foco no processo e não no resultado;<br>- Teste de hipóteses em nível mental ou para simples verificação; |

Fonte: Duro (2012, p. 94).

Como resultado, constatou-se que pensamento combinatório é construído, passando por diferentes níveis de equilíbrio até a sua formalização. Os sujeitos mais jovens demonstraram maior quantidade e qualidade nas tomadas de consciência. O uso do conflito e da contra argumentação na educação pode ajudar a desenvolver no sujeito a capacidade de assumir perspectivas diferentes frente a uma mesma situação

O autor conclui questionam-se finalmente: Será que obteríamos os mesmos resultados caso o instrumento fosse outro? E, quando aplicado a diferentes conteúdos, o mesmo raciocínio pode variar sua forma? Afirma também que considera necessária a introdução do assunto no Ensino Fundamental, por ser importante no preparo da aquisição de estruturas formais ao pensamento. E que a ação durante o projeto, fez com que ele vivenciasse um aprendizado, para si, que foi o melhor resultado de toda pesquisa.

No trabalho de Mendes (2014), sua motivação se deu pela dificuldade enfrentada por professores e alunos no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e também foi determinante para a escolha do tema, o fato do assunto desenvolver e aprimorar o raciocínio lógico. Com objetivo o autor procurou:

• Desenvolver material teórico compacto para consulta e estudo por parte de professores e alunos, que desejam se aperfeiçoar no estudo da Análise Combinatória, com ênfase nas Permutações.

• Oferecer ao professor de Matemática uma proposta didática alternativa e complementar, a fim de proporcionar uma maior segurança no lidar com a Análise Combinatória.

• Oferecer ao professor de Matemática uma atividade pedagógica a fim de tornar as aulas mais construtivas, interessantes e produtivas.

• Munir o estudante de ferramentas e habilidades para atuar de forma ativa e eficiente na resolução de problemas de contagem.

• Mostrar que a maioria das questões relativas ao tema é referente às permutações ou que podem ser resolvidas por técnicas envolvendo permutações.

• Não tem este trabalho o objetivo de trabalhar a Análise Combinatória sem o uso de fórmulas, pois em certos casos elas são fundamentais e convenientes.

O autor buscou inspiração nas obras de alguns autores, em especial na obra do Professor Augusto Cezar de Oliveira Morgado (Morgado) e revela que a escolha do tema se deu devido perceber a dificuldade que alunos e professores enfrentam diante de problemas de Análise Combinatória e por este motivo, resolveu passar um pouco de sua experiência com a intenção de contribuir para o aprofundamento e melhor entendimento do assunto.

A metodologia do trabalho desenvolvido por ele foi: fazer um estudo acerca das principais técnicas de contagem (Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Permutação com Repetição, Permutação Circular, Arranjo Simples, Arranjo com Repetição, Combinação Simples, e Combinação com Repetição), além de equações lineares com coeficientes unitários, o princípio da reflexão e permutação caótica, confirmando que todas as técnicas poderiam ser substituídas por uma única, a técnica das Permutações. Por fim, após serem apresentadas as técnicas combinatórias, propôs uma atividade em sala, contendo 10 questões que foram sorteadas e desenvolvidas pelos alunos, sendo estes motivados a resolverem por princípios ou fórmulas e por técnicas envolvendo permutação. Todos os alunos poderiam ser agraciados com pontuação até um ponto (um ponto), que dependia da quantidade de acertos nos exercícios. As atividades escolhidas para cada estudante se deram em por sorteio e após certo tempo foram apresentadas, pelos mesmos e debatida em sala, sendo o professor o mediador.

O autor conclui que dessa forma a aula se torna mais dinâmica, interessante e a aprendizagem mais eficiente. E espera que a atividade pedagógica contribua para o aprendizado de forma abrangente, descontraída e que as ações desenvolvidas sejam conforme as necessidades de cada professor e/ou estrutura educacional que ele estiver inserido.

No trabalho de Tataia (2012), a motivação pelo estudo foi o fato de que boa parte dos professores consideram o assunto Análise Combinatória complicado de se ensinar e que os alunos sentem dificuldades em entender a proposta, sendo induzimos ao uso de fórmulas. Este estudo teve o objetivo de propor o desenvolvimento de atividades que desafiem e motivem tanto professores como alunos a estudarem, aprenderem e entenderem o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio; como um instrumento que facilite a relação entre o ensino do docente e a aprendizagem do discente.

Em sua Metodologia de trabalho, buscou-se através de atividades, apresentar aos docentes estratégias eficientes que podem ser utilizadas para o ensino de combinatória e ajudar aos discentes a compreenderem melhor os problemas de contagem utilizando o raciocínio combinatório. Apresentou em seu corpo teórico conhecimentos básicos que abordam questões referentes a: Conjuntos, Relações, Operações e Análise Combinatória (PFC, Fatorial, Permutação Simples, Combinação simples e Teorema das quatro cores). Da mesma forma como há a exposição das atividades propostas que tratam de problemas de contagem. Neste caso, destacamos que as atividades propostas não seguiram necessariamente uma ordem crescente de dificuldades. Buscou-se apresentar as atividades de acordo com a ordem em que geralmente os problemas de Análise Combinatória são trabalhados no Ensino Médio.

Então, conclui que com a prática da resolução de problemas nas aulas de Matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Tal desenvolvimento é completado quando o professor resolve adotar atitudes positivas junto aos alunos, tais como: dar oportunidade para que todos possam expressar as próprias estratégias de resolução; valorizar todas as resoluções apresentadas pelos alunos, trabalhando o erro como instrumento pedagógico; e ao desenvolver nos alunos a persistência na elaboração de estratégias para a resolução dos problemas.

## 1.4 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, falaremos um pouco sobre os principais tópicos estudados em Análise Combinatória, no ensino médio (Princípio Fundamental da Contagem – P.F.C., Permutação Simples, Fatorial, Arranjo Simples, Combinação Simples, Equações Lineares com Coeficientes Unitários, Combinação com Repetição, Permutação com Repetição, Arranjo com Repetição e Permutação Circular), citando exemplos, fazendo demonstrações e deduções de fórmulas.

A análise Combinatória tem como objetivo principal definir de quantos modos uma decisão pode ser tomada ou qual é o número de elementos de um conjunto, sendo que esses elementos possuem pelo menos uma característica em comum. Muitos estudiosos como o matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), se dedicaram ao estudo de Análise Combinatória, que passou a fazer parte, também, do interesse das pessoas que praticavam jogos de azar, querendo saber as chances de vitória nas partidas que disputavam. O assunto propiciou o desenvolvimento dos estudos em Probabilidade, Binômio de Newton e Estatística. Além disso, problemas de contagem fazem parte do nosso cotidiano.

A necessidade do homem de contar surgiu antes mesmo dos números. Há evidências de que a contagem pode ter iniciado 9000 anos a.C. Desde o início, o homem vem tentando encontrar meios eficientes para contar, primeiro com objetos, depois números, algoritmos, fórmulas, teoremas e principalmente com a lógica aplicada. Aprendendo-se boas técnicas, podemos realizar contagens com métodos eficientes, mais velocidade e precisão, principalmente nos casos em que o número de elementos que queremos contar for demasiadamente grande. Por exemplo, através da Análise Combinatória, podemos determinar quantas partidas de futebol irão ser disputadas no campeonato brasileiro da Série A, conhecendo-se a quantidade de times e sabendo-se que eles jogam entre si duas vezes durante o campeonato. Uma boa técnica de contagem rápida, utilizada para esse exemplo, chama-se Combinação Simples, que estudaremos mais adiante.

A Análise Combinatória surgiu com o desenvolvimento das potências do Binômio, depois passou pelos números binomiais e pelo triângulo de Pascal. Somente no século XIX, com o formalismo da Análise Combinatória, surgiram os termos Arranjo, Combinação e Permutação.

Importante notar, ao resolver questões desse assunto, que apesar de haver uma infinidade de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhanças em vários pontos. Dessa forma para que possa obter sucesso nesse assunto, devem-se resolver muitas questões, buscando sempre semelhanças entre eles.

### 1.4.1 Estratégias que Facilitam na Resolução dos Problemas de Contagem

Muitos pesquisadores, entre eles Morgado (falecido em 2007), Lima, Carvalho, Wagner, entre outros, fizeram estudos acerca de métodos que facilitam o ensino de problemas de contagem.

No livro Temas e Problemas Elementares, escrito por eles, é listado uma sequência de estratégia para resolver problemas de combinatória. Acreditamos que são excelentes dicas. Veja:

1ª - **POSTURA**: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões deveram tomar.

2ª – **DIVISÃO**: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes a diversas etapas do processo de decisão.

3ª - **NÃO ADIAR DIFICULDADES**: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. (MORGADO, LIMA, CARVALHO, WAGNER, 2012, p. 145)

Ou seja,

**1º -** *Colocar-se no papel ativo de quem vai realizar a tarefa.*

**2º -** *Planejar a tarefa dividindo em etapas.*

**3º -** *Atacar inicialmente as etapas mais complicadas (restritivas).* Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

### 1.4.2 Princípios Fundamentais da Contagem

Por meio dos Princípios Fundamentais da Contagem (P.F.C.), desenvolvemos técnicas de contagem na resolução direta de problemas. Essas técnicas de contagem são baseadas em dois princípios:

- Princípio da adição.
- Princípio da multiplicação.

#### 1.4.2.1 Princípio da adição (aditivo)

Se existem cinemas, e teatros em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz três filmes e duas peças de teatro, diferentes, para passarem no próximo sábado, e que você tenha dinheiro para assistir a apenas um evento entre peças e filmes que foram descritos anteriormente. Quantas são as possibilidades de programas que você poderá fazer neste sábado?

Caso você escolha ver um filme, terá três opções **ou** caso você escolha ver uma peça de teatro, terá duas opções. Ou seja, 3 + 2 = 5 opções.

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, (A ∩ B = ø ) com respectivamente , f e t elementos, então A U B (lê-se: A união com B) possui f + t elementos.

A = { f **|** f é um filme} = {F1, F2, F3}, e

B = { t **|** t é uma peça de teatro} = {T1, T2}

Logo A U B = { F1, F2, F3, T1, T2}

Em símbolos:

$$\mathbf{n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing}$$

(Leitura: número de elementos de A união com B é igual a número de elementos de A mais o número de elementos de B, se e somente se, a interseção entre A e B for vazia).

A partir do resultado acima, é possível provar, que é válido um teorema mais geral, ensinando quando se **soma** (ao juntar objetos) e quando se **subtrai** (havendo elementos comuns, para corrigir a adição em excesso). Para quaisquer conjuntos A e B:

$$\boxed{\mathbf{n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B)}}$$

**EXEMPLO 1:**

O conjunto dos algarismos primos do sistema decimal, P, possui quatro elementos, enquanto o conjunto dos algarismos ímpares, I, possui cinco elementos. Quantos elementos tem $P \cup I$, ou seja, quantos algarismos são primos ou ímpares?

A resposta não é simplesmente 4 + 5 = 9, pois existem algarismos primos que também são ímpares: $P \cap I = \{3, 5, 7\}$. Logo, os algarismos primos ou ímpares são em número de 4 + 5 – 3 = 6: {1, 2, 3, 5, 7, 9}.

1.4.2.2 Princípio da multiplicação (multiplicativo)

Princípio que tem como característica mostrar a ideia de multiplicação. Base do raciocínio combinatório.

**EXEMPLO 1:**

Suponha-se que um rapaz tem três calças diferentes e quatro camisas distintas. De quantos modos diferentes ele pode arrumar-se para uma festa, usando exatamente uma calça e uma camisa, sem repetir o mesmo conjunto?

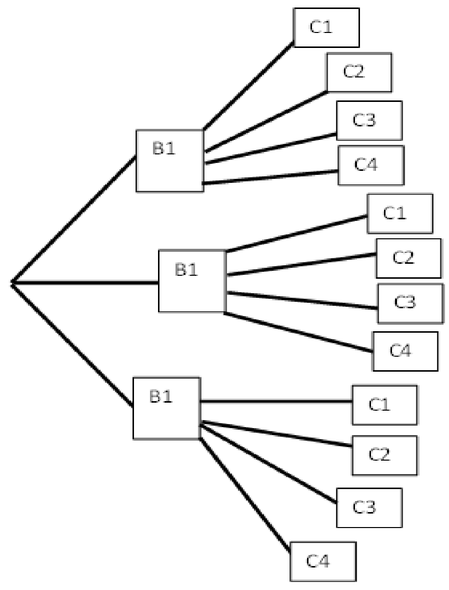
Um método muito útil de enxergar os elementos de um conjunto formado por pares ordenados ou mesmo de um conjunto formado por sequências (não necessariamente de mesmo tamanho) consiste num esquema conhecido como **diagrama de árvore:** cada elemento da sequência cria um novo ramo (galho) da árvore **ou listagem organizada**: listando-se todas as possibilidades. Veja:

Um jovem dispõe de quatro camisas do seu time favorito, todas diferentes e três bermudas (preta, branca e azul). De quantos modos distintos ele poderá se vestir para ir a uma partida de futebol, utilizando uma das bermudas e uma das camisas?

**Listagem Organizada:** Chamemos as Bermudas de B1, B2, B3, e as Camisas de C1, C2, C3 e C4.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | $(B_1, C_1)$ | $(B_1, C_2)$ | $(B_1, C_3)$ | $(B_1, C_4)$ |
| $B_2$ | $(B_2, C_1)$ | $(B_2, C_2)$ | $(B_2, C_3)$ | $(B_2, C_4)$ |
| $B_3$ | $(B_3, C_1)$ | $(B_3, C_2)$ | $(B_3, C_3)$ | $(B_3, C_4)$ |

**Diagrama de Árvore:** No diagrama de árvore a seguir, cada ramo representa um par ordenado (CAMISA, BERMUDA), o qual por sua vez corresponde a uma determinada maneira de o rapaz arrumar-se.



Pela listagem organizada ou diagrama de árvore podemos verificar que o jovem tem 12 possibilidades de se vestir.

Uma vez que de cada bermuda parte á mesma quantidade de ramos (quatro), o total de maneiras pedidas pode ser obtida através de:

$$\boxed{4 + 4 + 4 = \mathbf{3 \cdot 4} = \mathbf{12}.}$$

Naturalmente, é possível que o rapaz escolha inicialmente a camisa, para em seguida escolher a calça á utilizar, o que muda o aspecto da árvore, mas não sua quantidade de ramos. De fato, o total de arrumações possíveis continua sendo:

$$\boxed{\mathbf{3 + 3 + 3 + 3 = 4.3 = 12.}}$$

Agora, **ao Princípio Multiplicativo**: “Se um evento A ocorre de **x** maneiras diferentes, se para cada uma dessas **x** maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de **y** maneiras diferentes e, se para cada uma dessas **y** maneiras possíveis de B ocorrer, um outro evento C pode ocorrer de **z** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido dos eventos B e C é **x.y.z**.”

Ainda destacamos, que para cada uma das **x** maneiras de tomar a decisão 1 há **y** modos de ocorrer a decisão 2. Isso significa que as ramificações devem ser simétricas (com mesma quantidade) em cada novo “nó”.

Assim, na situação anterior, pode-se entender cada arrumação do rapaz como uma tarefa dividida em duas tomadas de decisão consecutivas:

**Decisão 1**: escolha de uma bermuda $\rightarrow$ 3 modos.

**Decisão 2**: escolha de uma camisa $\rightarrow$ 4 modos.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de o rapaz tomar a decisão 1 seguida da decisão 2 (e, consequentemente, fazer o que quer: arrumar-se) é igual a $3 \cdot 4 = 12$.

Assim, formalmente falando, o Princípio Multiplicativo afirma que, se a abscissa de um par ordenado pode ser qualquer um entre **x** valores e a ordenada qualquer dentre **y** possibilidades, então a quantidade de pares ordenados possíveis é igual a **x.y**.

O princípio multiplicativo pode ser estendido para um número qualquer de decisões. A diferença, em termos de diagrama de árvore, está apenas na quantidade de termos que compõem cada ramo. Rigorosamente, é a **passagem** de pares ordenados para n-uplas ordenadas, isto é, sequências com ***n*** termos.

No enunciado, reparem que no princípio multiplicativo está embutida a ordem como às decisões devem ser tomadas, sendo inicialmente tomada a decisão **x** para somente depois ser tomada a decisão **y**. Logo quando aplicamos o princípio multiplicativo, a ordem das decisões é levada em consideração.

O princípio fundamental da contagem pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos.

Em Hazzan (1993), temos:

- **PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM**

**Lema 1**:

Considere os conjuntos $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$. Podemos formar m.n pares ordenados $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})$ em que $\boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b_j} \in \boldsymbol{B}$.

**Demonstração**

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Teremos:

$$m\ linhas \begin{cases} (a_1, \mathrm{b}_1), (a_1, \mathrm{b}_2), \dots, (a_1, \mathrm{b}_\mathrm{n}) \to n\ pares \\ (a_2, \mathrm{b}_1), (a_2, \mathrm{b}_2), \dots, (a_2, \mathrm{b}_\mathrm{n}) \to n\ pares \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (a_m, \mathrm{b}_1), (a_\mathrm{m}, \mathrm{b}_2), \dots, (a_\mathrm{m}, \mathrm{b}_\mathrm{n}) \to n\ pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + \cdots + n = m.n}_{m\ vezes}$.

**Lema 2**:

O número de pares ordenados $(a_{i,}, a_j)$ tais que $a_i \in A = \{a_1, a_2, ..., a_m)$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, ..., a_m)$ e $a_i \neq a_j$ (para i $\neq j$) é m.(m – 1).

**Demonstração**

Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$m\ linhas \begin{cases} (a_1, \mathrm{a}_2), (a_1, \mathrm{a}_3), \dots, (a_1, \mathrm{a_m}) \to (m-1)\ pares \\ (a_2, \mathrm{a}_1), (a_2, \mathrm{a}_3), \dots, (a_2, \mathrm{a_m}) \to (m-1)\ pares \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a_m, \mathrm{a}_1), (a_\mathrm{m}, \mathrm{a}_2), \dots, (a_\mathrm{m}, \mathrm{a_{m-1}}) \to (m-1)\ pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \cdots + (m-1)}_{m\ vezes} = m.(m-1)$$

(HAZZAN, 1993, p.2 a 5).

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM – (PARTE A)**

Consideremos **r** conjuntos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_1}\} \qquad \# A = n_1$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n_2}\} \qquad \# B = n_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n_r}\} \qquad \# Z = n_r$$

Então, o número de r-uplas ordenadas (sequência de **r** elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \dots, z_p)$$

em que $a_i \in A, b_j \in B \dots z_p \in z$ é

$$n_1 . n_2 . \dots . n_r .$$

**Demonstração** (Princípio da indução finita)

Se r = 2, é imediato, pois caímos no lema 1 já visto.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro (r – 1) e provemos que ela também é válida para o inteiro r.

Para (r – 1), tomemos as sequencias de (r – 1) elementos $(a_i, b_j, \dots, w_k)$. Por hipótese de indução, existem $n_1 . n_2 . \dots . n_{r-1}$ sequências $n_r$ e elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada sequencia $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ consiste em uma sequencia $(a_1, b_j, \dots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema 1, o número de sequencias do tipo $(a_i, b_j, \dots, w\ \ , z_p)$ é $(n_1.n_2 \dots n_{r-1}).n_r = n_1.n_2.\dots.n_{r-1}.n_r$.

Decorre então que o teorema é válido $\forall r \in \aleph\ e\ r \geq 2$.

(HAZZAN, 1993, p.5-6).

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM – (PARTE B)**

Consideremos um conjunto A com $m$ $(m \geq 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (sequencias com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2).\dots.[m-(r-1)]}_{r\ fatores}$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, o número de sequência do tipo

$$(\underbrace{a_j, a_l, \dots, a_i, \dots, a_k}_{r\ elementos})$$

Com $\begin{cases} a_i \in A\ \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\ e \\ \quad a_i \neq a_p\ para\ i \neq p \end{cases}$

$$\underbrace{m.(m-1).\dots.[m-(r-1)]}_{r\ fatores}$$

(HAZZAN, 1993, p.7).

O P.F.C. nos fornece os mecanismos essenciais para a Análise Combinatória; porém, sua aplicação em algumas situações, pode ser trabalhosa. Portanto, iremos definir outras formas de determinar os números de agrupamentos, usando símbolos e fórmulas em cada caso a ser estudado a seguir.

### 1.4.3 Permutação Simples

**INTRODUÇÃO**

Como será visto a seguir, as Permutações Simples e os Arranjos Simples nada mais são do que meras aplicações imediatas do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), não havendo, por conseguinte, necessidade alguma de decorá-los. Com poderemos aplicar o princípio multiplicativo nas resoluções, os elementos formarão agrupamentos que se diferenciarão somente pela ordem, ou seja, a diferença entre um agrupamento e outro se dá apenas pela mudança de posição entre seus elementos.

Na permutação com elementos distintos, de modo geral, os elementos em questão trocam de posição, montando agrupamentos diferentes.

**EXEMPLO 1:**

Os alunos **M**aria, **C**reuza e **T**eobaldo estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?

**RESOLUÇÃO:**

Fazendo uma listagem organizada, teremos as seguintes possíveis formações de filas (agrupamentos):

MCT CTM TCM

MTC CMT TMC

**Lembre-se:** as filas mudaram de configuração apenas pela troca dos elementos de posição, uma característica das permutações e arranjos.

Pelo P.F.C., teremos:

| 1º da fila | 2º da fila | 3º da fila |
|---|---|---|
| 3 possibilidades | 2 possibilidades (já foi utilizada uma pessoa) | 1 possibilidades (já foram utilizadas duas pessoas) |

**Portanto: 3.2.1 = 6**

Uma forma simplificada de se escrever o produto $3 \cdot 2 \cdot 1$ é $\mathbf{P_3}$ **ou 3!**, onde lemos, permutação de três elementos ou três fatorial.

**EXEMPLO 2:**

Um colégio resolve fazer uma programação de Cinema, de Segunda a Sexta. Para isso, os organizadores escolhem cinco filmes, sendo: um de **aventura**, um de **comédia**, um de **ficção**, um de **romance** e um de **terror**, que serão exibidos um por dia, sem repetição.

- Nesse caso, qual é o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação nesses dias?

Na resolução, aplicando o P.F.C., teremos: $5.4.3.2.1 = 120 = P_5 = 5! \rightarrow$ número de permutações de 5 objetos distintos.

Tem-se o seguinte resultado geral para obter a **quantidade** de permutações de n objetos distintos, ditas **permutações simples**:

$$P_n = n!$$

Permutação Simples de **n** elementos ($P_n$) é uma técnica combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de uma fila ou sequência, sem que haja repetição de elementos e todos os elementos são utilizados no problema.

Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m\}}$ e identificamos por $\mathrm{P_m}$ o número de permutações dos m elementos de M.

Temos:

$$P_m = m.(m-1).(m-2).\ldots.[m-(m-1)]$$

Logo:

$$P_m = m.(m-1).(m-2).\ldots.3.2.1$$

Em particular, se m = 1, teremos que $P_1 = 1$.

(HAZZAN, 1993, p.18).

Deixando um pouco de lado a definição formal, permutar n objetos é algo como embaralhá-los ou misturá-los, metáforas que eventualmente podem ser úteis. É oportuno, porém, destacar que cada permutação é uma “foto” de uma dessas filas. Tais ideias, dinâmica e estática, podem ser úteis na resolução de problemas.

### 1.4.4 Fatorial

Os fatoriais são importantes em Análise Combinatória e em outros assuntos do nível médio como Probabilidade e Binômio de Newton. A matemática é abarrotada de símbolos e cada um deles possui seus significados e funções. O interessante disso tudo é saber que cada símbolo que é utilizado na matemática possui a sua história, ou seja, cada um possui um motivo para ter surgido e estar sendo usado até hoje. A notação n! (**n** fatorial ou fatorial de **n**) foi introduzida no início do século XIX, e serve para facilitar a escrita de cálculos demasiadamente grandes e/ou escreverem valores de forma simplificada, como veremos a seguir. Em Eves (2004), temos que

> O símbolo n!, chamado fatorial de n, foi introduzido em 1808 por Chisthian Kramp (1760 – 1820) de Strasburgo, que escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com símbolo previamente usado. Por conveniência definiu-se 0! =1 (EVES, 2004, p. 365).

Seja m um número *inteiro não negativo* $(m \in \aleph)$. Definimos fatorial de *m* (e indicamos por m!), por meio da relação:

$$m! = m.(m-1).(m-2).\dots.3.2.1 \; para\, m \; \geq 2$$

(HAZZAN, 1993, p.19).

A notação 1! = 1 e 0! = 1, podendo ser mostrada através da relação $m! = m.(m-1)!$.

1º) Para m = 2, teremos em $m! = m.(m-1)!$:

$$2! = 2.(2-1)!$$
$$2! = 2.1!$$
$$2.1 = 2.1!$$
$$1 = 1! \; \rightarrow (I)$$

2º) Para m = 1, teremos em $m! = m.(m-1)!$:

$$1! = 1.(1-1)!$$
$$1! = 1.0!$$
$$1! = 0! \; \rightarrow (II)$$

De $(I)$ e $(II)$, concluímos que 0! = 1.

Desta forma:

**0!** = **1**;

**1!** = 1·0! = **1**;

**2!** = 2·1! = 2·1 = **2**;

**3!** = 3·2! = 3·2·1 = **6**;

**4!** = 4·3! = 4·3·2·1 = **24**;

**5!** = 5·4! = 5·4·3·2·1 = **120**;

**6!** = 6·5! = 6·5·4·3·2·1 = **720**; ...

O cálculo de m!, diretamente, torna-se trabalhoso à medida que aumenta (10! = 3.628.800).

Entretanto, muitos cálculos podem ser simplificados se notarmos que:

$$\mathbf{(m + 1)! = (m + 1).m. (m – 1). … .3.2.1 = (m + 1).m!}$$

### 1.4.5 Arranjos Simples

O assunto será introduzido através de exemplos. Como já foi dito, poderemos fazer uso do P.F.C., nas resoluções. Portanto, os elementos formarão agrupamentos que se diferenciarão somente pela ordem, ou seja, a diferença entre um agrupamento e outro se dá apenas pela mudança de posição entre seus elementos.

**EXEMPLO 1:**

Em uma sala de aula, 3 alunos (**E**lder, **F**ábio e **G**eraldo) se candidataram a representante de turma. Sabendo-se que os dois mais votados, serão eleitos **representante e vice-representante**, respectivamente. Quantas são as possibilidades de eleição na turma? (considere que todos os alunos envolvidos têm as mesmas chances na eleição)

**RESOLUÇÃO:**

Usando um listagem organizada, teremos:

| | | |
|---|---|---|
| EF | FG | GE |
| EG | FE | GF |

Pelo princípio multiplicativo: existem três maneiras de escolher o 1º lugar e 2 de escolher o 2º. Assim sendo, existem 3.2 = 6 possibilidades possíveis. Cada uma das composições possíveis com *apenas* 2 dos 3 candidatos é denominada um **arranjo simples de classe 2 dos 3 objetos**.

Assim, o número de arranjos desse tipo é simbolizado por:

$$\mathbf{A_{3,2} = 3.2 = 6}.$$

(A simbologia $A_{3,2}$ é lida: Arranjo de 3 elementos tomados 2 a 2. Ou seja, com os 3 elementos serão formadas várias composições com 2 elementos). Completando fatoriais, esta quantidade poderia ser calculada pela expressão:

$$A_{3,2} = 3.2 = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

Que pode ser entendida como: fatorial do número de elementos, dividido pelo fatorial da subtração do número de elementos com o número de escolhas possíveis.

**EXEMPLOS 2:**

Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo : 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Argentina ; 3º lugar, Colômbia). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

Existem 24 maneiras de escolher o 1º lugar, 23 maneiras de escolher o 2º lugar e 22 de escolher o 3º. Assim sendo, existem 24.23.22 = 12.144 possibilidades possíveis. Cada uma das composições possíveis com *apenas* 3 dos 24 candidatos é denominada um **arranjo simples de classe 3 dos 24 objetos**.

Assim, o número de arranjos desse tipo é

$$\mathbf{24.23.22 = 12.144 = A_{24,3}}$$

(A simbologia $A_{24,3}$ é lida: Arranjo de 24 elementos tomados 3 a 3. Ou seja, com os 24 elementos serão formadas várias composições com 3 elementos)

Completando fatoriais, esta quantidade poderia ser calculada pela expressão:

$$A_{24,3} = 24.23.22 = \frac{24!}{21!} = \frac{24!}{(24-3)!}$$

Que pode ser entendida como: fatorial do número de elementos, dividido pelo fatorial da subtração do número de elementos com o número de escolhas possíveis.

A ferramenta **ARRANJO SIMPLES** é utilizada quando desejamos formar filas com p elementos escolhidos a partir de um grupo de n elementos, com $p \leq n$.

**EXEMPLO 3:**

A senha de um celular é configurada por um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.

**TECLADO NUMÉRICO**

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** |
| **7** | **8** | **9** |
| | **0** | |

- Um professor deseja criar uma senha com apenas seis algarismos distintos (diferentes). Quantas senhas o professor poderia criar a sua disposição?

Existem 10 maneiras de escolher o **1º algarismo**, 9 maneiras de escolher o **2º algarismo**, 8 maneiras de escolher o **3º algarismo**, 7 de escolher o **4º algarismo**, 6 de escolher o **5º algarismo** e 5 maneiras de escolher o **6º algarismo**. Assim sendo, existem 10.9.8.7.6.5 = 151.200 possibilidades possíveis. Cada uma das composições possíveis com *apenas* 6 dos 10 algarismos é denominada um **arranjo simples de classe 6 dos 10 objetos**.

Assim, o número de arranjos desse tipo é:

$$\mathbf{A_{10,6} = 10.9.8.7.6.5 = 151.200}.$$

Completando fatoriais, esta quantidade poderia ser calculada pela expressão:

$$A_{10,6} = 10.9.8.7.6.5 = \frac{10!}{4!} = \frac{10!}{(10-6)!}$$

Que pode ser entendida como: fatorial do número de elementos, dividido pelo fatorial da subtração do número de elementos menos o número de escolhas possíveis.

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

**Definição:** Dado um conjunto com *n* elementos, chama-se **arranjo simples** dos *n* elementos, tomados *p* a *p*, onde n ≥ 1 e *p* um número positivo tal que 1 ≤ *p* ≤ *n*, são todos os grupos de *p* elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos *p* elementos que compõem cada grupo. Notação $A_{n,p}$.

A expressão matemática que define arranjo simples pode ser encontrada através do seguinte raciocínio:

Em Hazzan (1993), temos:

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados ***r*** a ***r***.

Cada arranjo é uma sequência de r elementos, em que cada elemento pertence a M, e são todos distintos.

$$\underbrace{(-,-,\ldots,-)}_{r\ elementos}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (**parte B**), o número de arranjos $A_{m,r}$ será:

$$A_{m,r} = m.(m-1).\ldots.[m-(r-1)]$$

Em particular, se r = 1, é fácil perceber que $A_{m,1} = m$.

Notemos ainda que, de acordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente $1 \leq r \leq m$.

(HAZZAN, 1993, p.16-17).

podendo ser reescrita para $A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}$.

### 1.4.6 Combinações Simples

Neste tópico da Análise Combinatória, a ordem de escolha dos elementos não é importante para a formação dos agrupamentos. Introduziremos o assunto através de exemplos.

**EXEMPLO 1:**

Quatro amigos (**A**imê, **B**arbara, **C**arlos e **D**anilo) marcaram de se encontrar às 15 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?

A resposta, a princípio, parece simples de obter-se. Há 4 modos de escolher o 1º amigo e 3 maneiras de escolher o 2º para se realizar o aperto de mão, fornecendo 4.3 = 12 possibilidades. Contudo, caso sejam escolhidos, por exemplo, Aimê (A) e Barbara (B) para apertar as mãos, contaram-se as seleções a seguir como se fossem distintas.

| AB; BA |
|---|

No entanto, essas 2 = 2! "*filas*" correspondem à mesma representação. Em verdade, ocorreu que um amigo escolhido foi chamado de 1º e outro de 2º, ou seja, ocorreu uma **ordenação** dos amigos. Sucede que o Princípio Fundamental da Contagem apresenta uma *ordem intrínseca*, uma vez que as tomadas de decisão são feitas em sequência. Por conseguinte, 4.3 conta cada escolha de 2 amigos exatamente 2! vezes a mais do que deveria. Para corrigir esta multiplicação excessiva, basta dividi-la pelo fatorial do número de termos em cada grupo, isto é, 2!. Assim, há um total de $\frac{4.3}{2!} = 6$ maneiras de selecionar 2 amigos para um aperto de mão, de um total de 4 possíveis. O cálculo acima denomina-se **número de combinações simples de 4 objetos distintos, tomados 2 a 2**, também denominado **número de combinações simples** (sem repetições) **de classe 2 de 4 objetos**. É usual também utilizar os símbolos $C_{4,2}$ ou $\binom{4}{2}$ para indicar essa quantidade.

Completando fatoriais na expressão, teremos:

$$C_{4,2} = \frac{4.3}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2!.2.1} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4!}{2!.(4-2)!}.$$

Que pode ser entendida como: fatorial do número de elementos, dividido pelo produto entre o fatorial do número de escolhas possíveis com o fatorial da subtração do número de elementos com o número de escolhas possíveis.

**EXEMPLO 2:**

Maria tinha cinco palpites (bichos) para fazer vários ternos (3 bichos) no jogo do bicho. Quantos jogos ela conseguirá formar?

A resposta, a princípio, parece simplória de obter-se. Há 5 modos de escolher o 1º bicho, 4 modos de escolher o 2º bicho e 3 modos de escolher o 3º bicho, fornecendo 5.4.3 = 120 jogos possíveis. Contudo, caso sejam escolhidos, por exemplo, os bichos Jacaré (J), Cobra (C) e Borboleta (B) para se fazer um jogo, contaram-se as seleções a seguir como se fossem distintas.

$$\boxed{\text{JCB; JBC; CBJ; CJB; BJC; BCJ}}$$

No entanto, essas 6 = 3! "*filas"* correspondem ao mesmo jogo. Em verdade, ocorreu que um bicho escolhido foi chamado de 1º, outro de 2º e um último de 3º, ou seja, ocorreu uma **ordenação** dos bichos. Sucede que o Teorema Fundamental da Contagem apresenta uma *ordem intrínseca*, uma vez que as tomadas de decisão são feitas em sequência. Por conseguinte, 6·5·4 conta cada escolha de 3 bichos exatamente 3! vezes a mais do que deveria. Para corrigir esta multiplicação excessiva, basta dividi-la pelo número de termos em cada grupo, isto é, 3!. Assim, há um total de $C_{6,3} = \frac{6.5.4}{3!} = 20$ maneiras de selecionar 3 amigos para uma viagem, de um total de 6 possíveis. O valor $C_6^3$ denomina-se **número de combinações simples de 6 objetos distintos, tomados 3 a 3**, também denominado **número de combinações simples** (sem repetições) **de classe 3 de 6 objetos**. É usual também utilizar os símbolos $C_{6,\,3}$ ou $\binom{6}{3}$ para indicar essa quantia.

Completando fatoriais na expressão, teremos

$$C_{5,3} = \frac{5.4.3}{3!} = \frac{5.4.3.2.1}{3!\,.2.1} = \frac{5!}{3!\,.2!} = \frac{5!}{3!.\,(5-3)!}$$

Que pode ser entendida como: fatorial do número de elementos, dividido pelo produto entre o fatorial do número escolhas possível com o fatorial da subtração do número de elementos com o número de escolhas possíveis.

É crucial nessa altura notar que quando formamos um subconjunto a partir de um conjunto dado, não estamos formando filas. Dessa maneira, quando se ver diante de um problema desse tipo, não devemos utilizar qualquer ferramenta que forme ordem entre os elementos em questão. Se por ventura não forem formar filas e sim grupos (conjuntos) haverá uma contagem excessiva.

Combinação simples é uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um **subconjunto** de elementos a partir de um conjunto dado.

Em Hazzan (1993), foi demonstrado o cálculo do número de combinações, do seguinte modo:

Seja $M = \{a_1, a_{2,} \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos *m* elementos tomados *r* a r.

Tomemos uma combinação, digamos esta: $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$ . Se permutarmos os elementos de $E_1$, obteremos r! arranjos.

Se tomarmos outra combinação, digamos $E_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}\}$, com a permutação dos elementos de $E_2$, obteremos outro r! arranjos.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, x = $C_{m,r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos *m* elementos tomados *r* a *r.* São elas:

$$E_{1,} E_2, E_{3,} \ldots, E_x\,.$$

Cada combinação $E_i$ dá origem a r! arranjos. Chamemos de $F_i$ o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de $E_i$.

Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{cases} E_1 \to F_1 \\ E_2 \to F_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ E_x \to F_x. \end{cases}$$

Verifiquemos que:

**I –** $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$

**II –** $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos m elementos de M tomados *r* a *r*.

Temos:

**I –** Se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ (para $i \neq j$), então existiria um arranjo que pertenceria a $F_i$ e $F_j$ simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com $E_i$ e $E_j$ e, portanto, $E_i$ = $E_j$. Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações: $E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

Logo, $F_i \cap F_j \neq \emptyset$.

**II –** Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F$, provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x \subset F \;\; e \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x. \end{cases}$$

a) Seja *a* um arranjo tal que

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x,$$

então $a \in F_i$ (para algum i $\in$ {1, 2, …, x} e, evidentemente, $a \in F$; logo:

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x \subset F.$$

b) Seja agora *a* o arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo *a*, obteremos uma das combinações, digamos $E_1$. Ora como $E_1$ gera o conjunto dos arranjos $F_1$, então $a \in F_i$ e, portanto

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_i \cup \ldots \cup F_{x.}$$

Então:

$$F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x.$$

De (a) e (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = \; F.$$

Sabemos ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um.

Isto é, $\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x) = \#F \rightarrow \#F_1 + \#F_2 + \cdots + \#F_x = \#F$

$$r! + r! + \cdots r! = \frac{m!}{(m-r)!} \rightarrow x.r! = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

Logo:

$$x = \frac{m!}{(m-r)!\,r!}$$

Como x indica $C_{m,p}(ou\ \binom{m}{p})$, temos a fórmula do número de combinações:

$$C_{m,p} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!} \qquad \forall m, r \in N^* \quad r < m$$

**CASOS PARTICULARES**

1º caso: $m, r \in N^* \quad e\ r = m$

$$\begin{cases} C_{m,m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!\,(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

2º caso: $m \in N^*\ e\ r = 0$

$$\begin{cases} C_{m,0} = 1\ (o\ \text{único}\ subconjunto\ com\ 0\ elementos\ \text{é}\ o\ vazio) \\ \dfrac{m!}{0!\,(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

3º caso: m = 0 e r = 0

$$\begin{cases} C_{0,0} = 1\ (o\ \text{único}\ subconjunto\ com\ 0\ elementos\ \text{é}\ o\ vazio) \\ \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

Em virtude da análise dos casos particulares, concluímos que a fórmula

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

é válida $\forall\ m, r \in N\ com\ r \leq m$.

(HAZZAN, 1993, p.33 a 35).

**EXEMPLO 3:**

Sete pessoas devem ser divididas em dois grupos: um com 3 e outro com as 4 restantes. De quantas maneiras isso pode ser feito?

O 1º grupo (com 3 pessoas, por exemplo) pode ser formado de $C_{7,3}$ maneiras, uma vez que a ordem das pessoas num mesmo grupo é irrelevante. Em seguida, o 2º grupo (com 4 pessoas) pode ser formado de $C_{4,4}$ maneiras, pois não é mais permitido usar as 3 pessoas já escolhidas para o 1º grupo. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de grupos é dada por:

$$C_{7,3} \cdot C_{4,4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 1 = 35 .$$

Muito interessante notar que o 1º grupo a ser formado poderia ser o de 4 pessoas. Nestas condições, a resposta seria:

$$C_{7,4} \cdot C_{3,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \cdot 1 = 35 ,$$

naturalmente o mesmo resultado. Com efeito, escolher 3 dentre 7 pessoas para participar de um grupo dá no mesmo que deixar 4 pessoas de fora desse grupo. Diz-se que as combinações iguais:

$$\mathbf{C_{7,3} = C_{7,4}}$$

são **combinações complementares**. De um modo mais geral:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Em Santos, Melo e Murari (1995), temos que:

> Consideremos n objetos distintos. O número de maneiras de escolhermos p objetos é idêntico ao número de maneiras de escolhermos (n – p) objetos pois, se dos n objetos tirarmos p sobram (n – p) e, consequentemente, se de n objetos tirarmos (n – p), sobram p. Logo $C_n^p = C_n^{n-p}$, onde $C_n^{n-p}$ é chamada combinação complementar de $C_n^p$ (SANTOS ET AL., 1995, p. 47).

### 1.4.7 Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Agora calcularemos o número de soluções inteiras positivas $(x_1, x_2, \ldots, x_x)$ de um sistema linear da forma $x_1 + x_2 + \ldots + x_x = m$. Começaremos enumerando as soluções inteiras positivas de x + y = 7: (x, y) = {(1,6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3 )}. Chegamos à conclusão que existem 6 soluções inteiras positivas para a equação x + y = 7. Porém, quando aumentamos a quantidade de variáveis ou o valor da soma teremos uma quantidade de soluções, que para enumerar, dará muito trabalho. Vamos montar um raciocínio para o cálculo do número de soluções.

Para encontrar soluções de uma equação com mais de uma variável precisamos resolver sistemas, mas para encontrar o número de soluções inteiras positivas de uma equação podemos apelar para um dispositivo prático que envolve combinações, veja:

**EXEMPLO 1:**

Qual o número de soluções inteiras e positivas da equação x + y + z = 8? Podemos perceber algumas soluções, tais como: (1, 3, 4) ou (2, 3, 3), contudo a enumeração pode levar muito tempo. Então observe o esquema a seguir:

x + y + z

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Se selecionarmos 2 dos sinais de + na soma acima e no lugar deles colocarmos uma barra, obteremos uma solução inteira positiva para o sistema. Por exemplos:

1 + 1 **|** 1 + 1 + 1 **|** 1 + 1 + 1

1 **|** 1 + 1 + 1 **|** 1 + 1 + 1 + 1

1 + 1 + 1 + 1 **|** 1 + 1 **|** 1 + 1

Se entendermos que a soma até a 1ª barra é o valor de **x**, que a soma da 1ª até a 2ª barra é o valor de **y** e que a soma da 2ª a 3ª barra é o valor de **z**, na primeira, segunda e terceira situação acima, teremos respectivamente como soluções: (2, 3, 3), (1, 3, 4), (4, 2, 2). Deste modo, cada vez que escolhermos 2 dos 7 sinais de adição e colocarmos no seu lugar uma barra, obteremos uma solução inteira positiva distinta do sistema linear, x + y + z = 8. Portanto, podemos afirmar que o número de soluções inteiras positivas do sistema x + y + z = 8 é igual ao número de maneiras de escolher 2 dentre os 7 sinais de adição. Assim, temos $C_{7,2}$ ou $\binom{7}{2}$ soluções inteiras positivas para o sistema x + y + z = 8.

Carneiro e Oliveira (2009), mostraram que:

Para generalizar podemos analisar um esquema semelhante ao anterior. Considere que estamos interessados em calcular o número de soluções inteiras positivas $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ do sistema linear $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n,\ n \in N,\ n \geq p$. Separemos o número *n* como sendo a soma *n* 1’s:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p$$

1 + 1 + 1 + 1 +...+ 1 + 1 + 1

Se escolhermos p – 1 sinais dos n – 1 sinais de adição (+) e colocarmos no seu lugar barras (|), podemos então separar os números 1’s em *p* somas intermediárias, cada uma associada (de acordo com sua ordem) a uma das variáveis. Portanto, podemos afirmar que o número de soluções inteiras positivas do sistema $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ é igual ao número de maneiras de escolher *p – 1* dentre n – *1* sinais de adição. Assim, temos $\binom{n-1}{p-1}$ soluções inteiras positivas para o sistema $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

Mas se estivermos interessados em determinar o número de soluções inteiras positivas de um sistema da forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$? Nada que uma troca de variáveis não resolva. Se $x_1, x_2, \ldots, x_p$ são números naturais, então $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_p \geq 0$. Definimos as variáveis $y_1$, $y_2$, ... , $y_p$ da seguinte forma:

$$y_1 = x_1 + 1 \geq 1, y_2 = x_2 + 1 \geq 1, \ldots, y_p = x_p + 1 \geq 1$$

Substituindo de volta na equação, teremos:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n \rightarrow y_1 - 1 + y_2 - 1 + \cdots + y_p - 1 = n \rightarrow y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p$$

Note agora que para cada solução natural da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ temos exatamente uma solução inteira positiva da equação $y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p$ e vice-versa. Assim, podemos afirmar que o número de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação$y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p$. Desta maneira, pela teoria desenvolvida anteriormente, temos que o número de soluções naturais do sistema $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ é igual a $\binom{n+p-1}{p-1}$.

(OLIVEIRA e CARNEIRO, 2009, p.97).

**EXEMPLO 2:**

Qual o número de soluções inteiras e positivas da equação x + y + z = 32.

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{32-1}{3-1} = \binom{31}{2} = \frac{31.30}{2} = 465$$

### 1.4.8 Combinação Com Repetição

Em Combinação com repetição, a ordem de escolha dos elementos não importa para de formar os agrupamentos e acontecerá de existir elementos repetidos.

**EXEMPLO 1**:

De quantas maneiras, uma oficina pode pintar cinco automóveis iguais, recebendo cada um, tinta de uma única cor, se a oficina dispõe apenas de três cores e não quer mistura-las?

**RESOLUÇÃO:**

Temos 5 carros e 3 cores de tinta. Sendo assim, necessariamente haverá cores que se repetirão ao pintar os carros. Algumas possibilidades de pintar os carros, considerando as cores (**P**reto, **V**ermelho e **C**inza)

1ºcarro ... 2ºcarro ... 3ºcarro... 4ºcarro... 5ºcarro

P, V, C, P, V

P, V, C, P, C

P, V, C, P, P

P, V, C, P, V

P, V, C, V, P

**...**

Observe que ocorre a repetição de cores a ser aplicados nos carros. Como não importa a ordem de pintura dos carros, logo, trata-se de problema de combinação. Como ocorrerá repetição na aplicação de um dos elementos, trata-se combinação com repetição.

Nesse exemplo estamos interessados em contar o total de elementos do tipo acima. Para sabermos quais foram as cores, basta que a oficina nos diga quantas cores de cada tipo ela usou. Se chamarmos de $x_1$ o número de cores para o carro a, de $x_2$ os números de cores para o carro b e de $x_3$ o número de cores para o carro c, o que estamos procurando é, nada mais nada menos, do que o número de soluções inteiras não-negativas para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

Que como sabemos, é igual a $C_{7,5}$

Então, temos 3 tintas (n = 3) que serão aplicados (tomados) para 5 carros (p = 5), ou seja, temos 3 elementos que serão tomados de 5 em 5.

$$\mathbf{CR_{3,\,5}} = C_{3+5-1,\,5} \mathbf{= C_{7,\,5}} = \frac{7.6}{2} = 21$$

Portanto, $CR_{n,p}$ é o número de maneiras de selecionarmos *p* objetos dentre *n* objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes. Como vimos, este número é igual ao número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$$

Que, como já vimos, é igual a

$$C_{(n+p-1,\ n-1)} = C_{(n+p-1,\ p)}$$

Para calcular o número de combinações com repetição basta aplicar a fórmula:

$$\mathbf{CR_{n,p} = C_{n+p-1,\ p}}$$

CR: combinação com repetição

n: nº elementos que se repetem

p: classe (nº de elementos tomados)

### 1.4.9 Número de Permutações com Elementos Repetidos

Na permutação com elementos distintos, de modo geral, os elementos em questão trocam de posição, montando agrupamentos diferentes. Só que como temos elementos repetidos, fazer a troca desses elementos torna-se desnecessário.

**EXEMPLO 1:**

Tomemos como exemplo os possíveis anagramas com a palavra ANA. Vamos, a título de ilustração diferenciar os A,s que aparecem na palavra ANA. O primeiro será destacado. Então fica: **A**NA. Desse modo os dois A,s se tornaram diferentes. Assim não temos mais uma palavra com elementos repetidos. Podemos, com essa nova palavra, formar 3 x 2 x 1 = 3! = 6 anagramas diferentes, são eles:

$$\underbrace{\boldsymbol{A}NA,\ \boldsymbol{A}AN,\ AN\boldsymbol{A},\ N\boldsymbol{A}A,\ NA\boldsymbol{A},\ A\boldsymbol{A}N}_{Seis\ anagramas\ com\ os\ dois\ A's\ diferentes}$$

Para corrigir a multiplicação que foi feita de forma excessiva, devemos reparar o erro realizando a divisão do resultado encontrado, pelo mesmo valor multiplicado em excesso. Quando permutamos as letras A’s, entre si, indevidamente, multiplicamos o resultado por 2.1 = 2!, então, devemos tomar o resultado dividido por 2!. Com isso, o número de anagramas de ANA é igual a $\frac{3!}{2!} = 3$.

É comum indicar o número de permutações de 3 objetos, sendo 2 deles repetidos, por $P_3^2$. Logo:

$$P_3{}^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Para corrigir uma adição em excesso, utiliza-se a operação inversa: a subtração (ver Princípio Aditivo). A fim de corrigir uma multiplicação (Teorema Fundamental da Contagem) que fornece resultados em demasia, usa-se a divisão. É por isso que:

- ▶ A rotação redundante, na permutação circular, é retificada com a divisão pelo número de modos distintos de efetuar *giros*, sem alterar a disposição na roda;
- ▶ A repetição de objetos que, *permutados*, não altera tal fila é corrigido através da divisão pela quantidade de formas de permutar os objetos repetidos, o que não modifica a permutação.
- ▶ Sem dúvidas, aprender a dividir, em Combinatória, é uma tarefa um tanto árdua, mas fundamental para efetuar *correções no Princípio Multiplicativo*. Essa técnica aparece nas permutações com objetos repetidos (ditas **completas**), nas permutações circulares e nas combinações, como será visto a seguir.

**PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO**, como o nome indica, diferentemente das permutações simples, lida com elementos que se repetem. Isto é, busca formar filas ou sequências com elementos repedidos. Vale a ressalva: todos os elementos em questão devem ser utilizados.

**EXEMPLO 2:**

Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra ERRAR.

Seriam $P_5$ = 5! se todas as letras fossem distintas entre si. Porém, permutando apenas as letras R, não se altera o anagrama, o que exige uma correção.

Para corrigir a multiplicação que foi feita de forma excessiva, devemos reparar o erro realizando a divisão do resultado encontrado, pelo mesmo valor multiplicado em excesso. Quando permutamos as letras R's, entre si, indevidamente, multiplicamos o resultado por 3.2.1 = 3!, então, devemos tomar o resultado dividido por 3!. Com isso, o número de anagramas de ERRAR é igual a 5!/3! = 20. Veja:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AERRR | EARRR | RAERR | RERRA | RREAR |
| ARERR | ERARR | RARRE | RERAR | RRRAE |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ARRER | ERRAR | RARER | RRAER | RRARE |
| ARRRE | ERRRA | REARR | RRERA | RRREA |

Ou seja, o resultado da permutação das 5 letras com 3 repetidas, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{P_5}{P_3} = 20$$

**EXEMPLO 3:**

Considere os anagramas palavra MATEMATICA.

Seriam $P_{10}$ = 10! se todas as letras fossem distintas entre si. Porém, permutando as letras M, A e T, entre si, não se altera o anagrama, o que exige uma correção

Para corrigir a multiplicação que foi feita de forma excessiva, devemos reparar o erro realizando a divisão do resultado encontrado, pelo mesmo valor multiplicado em excesso. Quando permutamos as letras M's, entre si, indevidamente, multiplicamos o resultado por 2.1 = 2!; quando permutamos as letras A's, entre si, indevidamente, multiplicamos o resultado por 3.2.1 = 3! e quando permutamos as letras T's, entre si, indevidamente, multiplicamos o resultado por 2.1 = 3!, então, devemos tomar o resultado dividido por 2!.3!.2!. Com isso, número de anagramas de MATEMÁTICA é igual a $\frac{10!}{2!.3!.2!} = 151.200$.

Ou seja, o resultado da permutação das 10 letras com 2, 3 e 2 repetidas, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P_{10}{}^{2,2,3} = \frac{P_{10}}{P_2.P_2.P_3} = \frac{10!}{2!.2!.3!} = 151.200$$

**PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO** é o número de permutações com n elementos em que um deles aparece repetidamente **"a"** vezes, outro **"b"** vezes, outro **"c"** vezes e assim sucessivamente.

Generalizando, em Hazzan (1993):

1º CASO:

Considere que n elementos, dos quais $n_1$ são iguais a $a_1$ e o restante são todos distintos entre si e distintos de $a_1$.

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calcular esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada de elementos em que devem figurar $n_1$ elementos iguais a $a_1$ e os restantes n - $n_1$ elementos distintos.

$$\underbrace{(-,-,-,\dots,-)}_{n\ elementos}.$$

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem , vamos escolher n - $\alpha_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de $a_1$.

Existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $n - n_1$ posições, que exitem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo, existem ao todo $\binom{n}{n-n_1}.(n-n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$ formas de dispormos os elementos distintos de $a_1$, na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos $a_1$ fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com $n_1$ elementos iguais $a_1$. Isto é,

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

(HAZZAN, 1993, p.45).

### 1.4.10 Arranjo com Elementos Repetidos

Veja, no exemplo abaixo, que para na escolha das letras e algarismos, pode haver repetição dos mesmos. O que observamos em cada uma dessas situações é uma característica do arranjo com repetição.

**EXEMPLO 1:**

O número de placas de veículos que poderão ser fabricadas utilizando-se das 26 letras do alfabeto latino e dos 10 algarismos arábicos, cada placa contendo três letras e quatro algarismos, é:

a) 67 600 000 b) 78 624 000 c) 15 765 700

d) 1 757 600 e) 5 760 000

**RESOLUÇÃO:**

Nesse caso há sete espaços ocupados. As escolhas entre letras e números são simultâneas. Como não foi falado que os elementos devem ser distintos, teremos:

| 1ª letra | 2ª letra | 3ª letra | 1ª algarismo | 2ª algarismo | 3ª algarismo | 4ª algarismo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 possib. | 26 possib. | 26 possib. | 10 possib. | 10 possib. | 10 possib. | 10 possib. |

**Logo, há $26^3$ x $10^4$ = 175.760.000 possibilidades.**

Por Hazzan (1993), temos que:

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de *n* elementos tomados *r* a r.

Cada arranjo com repetição é uma sequência de p elementos, em que cada elemento pertence a M.

$$\underbrace{(-,-,-,\ldots,-)}_{r\ elementos}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será:

$$(AR)_{m,r} = \underbrace{m.m.\ldots.m}_{r\ veezs} = m^r$$

Observe que, se r = 1, $(AR)_{m,1} = m$ e a fórmula acima continua válida $\forall\ r \in N^*$.

(HAZZAN, 1993, p.16).

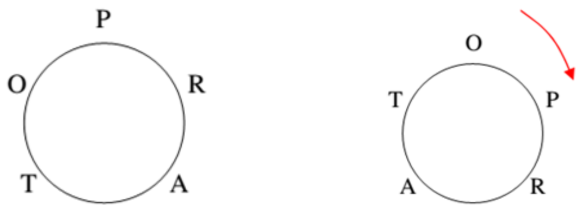
### 1.4.11 Permutações Circulares

Os elementos ficam dispostos como numa roda de ciranda. Em uma ordem circular.

**EXEMPLO 1:**

De quantos modos podemos dispor 5 amigo (**A**imê , **O**tavio, **P**aulo, **R**enato e **T**eobaldo) num círculo em lugares equiespaçados? (a mesma distância entre eles).

A resposta não é 5! = 120. Quando se colocam n objetos distintos de maneira igualmente espaçada num círculo, não importa exatamente a ordem entre eles, mas sim a *posição relativa* entre eles. Portanto, diferentemente da permutação dita *linear*, na **permutação circular** o que realmente interessa é que duas configurações não coincidam por rotação.




Para calcular o número de permutações circulares de n objetos distintos, indicado por $(PC)_n$, sem necessariamente visualizar cada uma delas, vários procedimentos podem ser utilizados. Um deles é notar que cada permutação circular consegue gerar exatamente n permutações lineares distintas, por rotação (girando a roda).

Portanto: $P_n = n \cdot (PC)_n \Leftrightarrow (PC)_n = \frac{P_n}{n}$ , isto é:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)\ !$$

Outra maneira, é fixar um dos elementos e a partir daí, colocar os outros

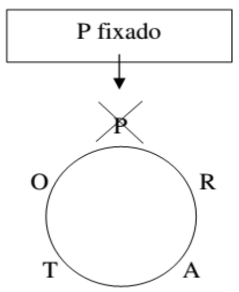



*FIGURA 3*

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = (5-1)! = 4! = 24$$

Portanto: $P_{n-1} = (PC)_n \Leftrightarrow$ isto é:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Para generalizar se possuímos n elementos distintos para dispormos em uma fila circular e de forma equidistante podemos realizar esse processo de (n – 1)! maneiras distintas. Simbolizamos por

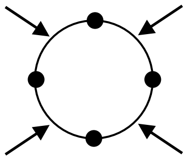
$$(PC)_n = (n-1)!$$

Permutação circular é uma ferramenta ligada à permutações simples. Difere dessa pelo fato de os elementos em questão estarem dispostos em fila circular, isto é, através de um círculo.

**EXEMPLO 2:**

De quantas maneiras 6 crianças podem brincar de roda, se Paulo e João não puderem ficar juntos?

Existem $(PC)_4$ = 3! = 6 maneiras de permutar as outras 4 crianças na roda. Uma vez permutadas estas, há 4 “espaços” onde Paulo pode ficar, indicados pelas setas a seguir.



Finalmente, sobram apenas 3”espaços onde João pode ficar, a fim de não estar junto de Pedro. Portanto, a quantidade pedida é igual a $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$.

**EXEMPLO 3:**

De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa circular?

**RESOLUÇÃO:**

Temos que dispor 5 pessoas em círculos. Permutação circular dos 5 elementos indicados por

$$PC_5 = P_{(5-1)} = P_4 = 4.3.2.1 = 24$$

## 1.5 CONSULTA A EGRESSOS

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino-aprendizagem como um todo, tanto no sentido de que o professor e a equipe escolar se conheçam e analisem os resultados de seu trabalho como para que cada aluno verifique seu desempenho. Assim, a avaliação não deve simplesmente focar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdo para classificá-lo. Além disso, ela deve ser essencialmente formativa, na medida em que cabe à avaliação subsidiar o trabalho pedagógico, redirecionando o processo de ensino-aprendizagem para sanar dificuldades, aperfeiçoando-o constantemente. Segundo Luckesi (2011, p. 296), “para realizarmos uma prática avaliativa, necessitamos de dados da realidade e, para obtê-los, necessitamos de instrumentos que ampliem nossa capacidade de observação da realidade”.

Com o repertório de erros cometidos mais frequentemente pelos alunos à disposição, servindo para interpretar os fatos, o professor, ao trabalhar determinados assuntos, saberá chamar a atenção para os pontos mais críticos e, com isso, diminuir a possibilidades de erros. Por isso vale a pena termos um diagnóstico de como o processo de ensino-aprendizado tem se realizado, assim como quais são as principais dificuldades vivenciadas pelos educandos e metodologias que estão sendo empregadas nos dias atuais. Almeida revela que:

> Atualmente o tema dificuldade no aprendizado em Matemática tem sido objeto de pesquisas, palestras, encontros, com o objetivo de descobrir as origens de tantos problemas no ensino. Algumas questões são recorrentes nestes debates e pesquisas, tais como: A deficiência está no próprio sistema de ensino? Os professores não estão conseguindo lidar com o processo? Os alunos não estariam desmotivados? O que leva o aluno a não conseguir aprender Matemática e/ou outras disciplinas? Além dessas, muitas outras questões vêm sendo levantadas a fim de buscar uma resposta e possíveis soluções para os problemas enfrentados atualmente na educação (ALMEIDA, 2006, p.2).

Os problemas de Análise Combinatória são considerados por professores e alunos como difíceis, no ensino médio. Os tópicos associados ao ensino deste assunto, no ensino médio, estão recomendados nos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), sendo o conteúdo uma importante ferramenta para o desenvolvimento do pensamento cognitivo do aluno e, por este motivo, em nossa opinião entende-se que é um assunto que deve ser bem trabalhado desde as séries iniciais, com técnicas que buscassem as quatro operações, introduzindo problemas que possam ser resolvidos com raciocínios simples sem o uso de fórmulas. Hoje em dia, a Análise Combinatória é estudada no 2º ano do ensino médio e, às vezes, no ensino fundamental. Assim,

> [...] a escola tem um papel insubstituível quando se trata da formação das novas gerações para o enfrentamento das exigências postas pela sociedade contemporânea; o compromisso de reduzir a distância cada vez maior entre o formalismo da sala de aula e a cultura de base produzida no cotidiano deve ajudar os alunos a tornarem-se sujeitos pensantes, capazes de construir os elementos categoriais de compreensão e apropriação crítica da realidade (PINHEIRO, 2008, p. 12).

Outros estudos realizados, acerca de Análise Combinatória, vêm destacando a questão do ensino-aprendizagem, novas metodologias e procedimentos usuais ou desejados deste conteúdo. Entre eles temos Almeida (2010), Esteves (2000), Gonçalves (2014), Lopes (2000), Pinheiro (2008), onde encontramos os resultados de um estudo sobre o Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema, com o objetivo de investigar se uma metodologia de ensino que teve como ponto de partida resoluções de problema facilitaria a introdução de conceitos básicos. O autor mostrou que a sequência didática empregada favoreceu ao desenvolvimento e a aprendizagem das técnicas básicas de contagem. Silva (2013), que desenvolveu uma pesquisa pedagógica referente ao ensino de Análise Combinatória por intermédio de resoluções de problemas; o autor procurou entender o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória por meio de observações durante sua prática em sala de aula.  Para o autor, a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo. Contudo considera que estudos mais relevantes devem ser feitos na área que se dedica a ensinar tendo como ponto de partida situações-problema. A maioria dos autores destaca que o ensino de Análise Combinatória não deve se dar pelo método tradicional (começando pela definição, seguido de exemplos e exercícios), que é um problema cultural de ensino, visto que já não está atendendo às necessidades de alunos e professores. Mas o que veremos na pesquisa é que esse processo ainda é bastante utilizado segundo os discentes. Sturm comenta que:

> [...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação (STURM, 1999, p.3).

Assim, fica evidente que o processo educativo remete um esforço sistemático e contínuo para mudar as condições de aprendizagem, com a finalidade única de alcançar as metas educativas de forma mais eficaz. Para Lopes,

> Um dos fatores responsáveis pela má qualidade de ensino é, sem dúvida alguma, a formação do professor. É possível dizer que a maioria dos profissionais que se formaram, ou estão se formando, não tem claro o papel da escola, os objetivos da aprendizagem, a razão dos conteúdos a serem

> trabalhados, enfim, não tem claro o seu próprio papel de educador. Como em muitas situações da vida, não tendo consciência do lugar onde se encontra e do que se deve fazer, segue-se o caminho que lhe é apresentado. No caso do professor, na maioria das vezes, este caminho é o livro didático (LOPES, 2000, p.12).

Então, traçamos o objetivo de diagnosticar o desempenho de estudantes na resolução de questões envolvendo Análise Combinatória e verificar o grau de dificuldade que eles tiveram ao estudar o referido assunto numa escola pública de Belém localizado no bairro do Telégrafo. A fim de conhecer a realidade de aprendizagem e o pensamento dos discentes nas questões centrais do trabalho que foram as seguintes:

- Como está o desempenho de estudantes da 2ª série do ensino médio na resolução de questões envolvendo conceitos de Análise Combinatória?
- Como está o grau de dificuldade dos estudantes da 2ª série do ensino médio nos tópicos estudados Análise Combinatória?

### 1.5.1 Metodologia

A consulta foi realizada por meio das seguintes etapas: elaboração do instrumento de consulta, avaliação do instrumento, produção das informações, sistematização dos resultados e análise dos resultados.

#### 1.5.1.1 Elaboração do instrumento de consulta

Num primeiro momento, foi elaborado um formulário, no mês de janeiro de 2016, contendo questões acerca dos dados pessoais dos alunos, sobre a metodologia utilizada em sala de aula e questões envolvendo o assunto Análise Combinatória, onde procuramos selecionar os exercícios de modo que abrangessem a maior parte possível do conteúdo.

#### 1.5.1.2 As questões propostas aos alunos foram:

1. No restaurante do colégio, são servidos 3 pratos principais e 4 sobremesas. Um cliente pode fazer uma refeição escolhendo um prato principal e uma

sobremesa. Quantas refeições, formadas por um prato principal e uma sobremesa, o cliente pode formar?

2 . Alguns celulares dispõem de uma senha de acesso aos dados do aparelho. Cada senha é uma sequência formada por 4 algarismos, escolhidos entre os 10 algarismos de 0 a 9. Com essas informações, qual é o maior número possível de senhas distintas que se pode criar em um desses aparelhos?

3 . As permutações das letras da palavra **REMO** foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de quatro letras em um dicionário. Que palavra nessa lista é 6ª?

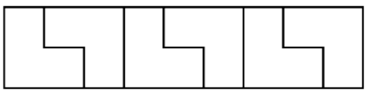
4 . Para aumentar as chances de ganhar no sorteio da mega-sena da virada, um grupo de dez amigos se juntou e fez todos os jogos possíveis de seis “dezenas” diferentes, escolhidas dentre quinze “dezenas” distintas previamente escolhidas. Qual o total de jogos que foram realizados por este grupo de amigos?

5 . Uma adolescente possui cinco cores diferentes de esmalte (verde, amarelo, azul, branco e vermelho) e quer escolher duas cores diferentes para pintar as unhas de suas mãos. Sabendo que essa adolescente não usa as cores vermelho e azul juntas, de quantas maneiras distintas ela pode escolher as duas cores?

6 . Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra **PAPAO**?

7 . Segundo a Revista VEJA (11/01/2012), cinco habilidades fundamentais compõem a nova teoria da inteligência social: Comunicação; Empatia; Assertividade; Feedback e Auto apresentação. Dentre as habilidades que compõem a nova teoria da inteligência social, qual o número de possibilidades distintas em que o setor de Recursos Humanos de uma empresa pode eleger três dessas habilidades?

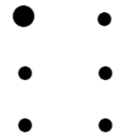
8 . A figura seguinte, composta pela justaposição de seis hexágonos não convexos, deve ser colorida com as cores **azul, vermelha, verde e amarela**.



Qual é o número de maneiras distintas de executar essa pintura, de modo que dois hexágonos consecutivos não sejam coloridos com a mesma cor?

9 . A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo

menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



- O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

10 . No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.


O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é…

1.5.1.3 Avaliação do instrumento

A avaliação do instrumento foi realizada por meio de uma análise do próprio instrumento, no mês de janeiro de 2016, por uma turma de estudantes do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, juntamente com a professora da disciplina currículo e avaliação da aprendizagem em matemática, que sugeriram modificações para aperfeiçoamento do questionário.

1.5.1.4 Produção das informações

A produção das informações ocorreu no mês de janeiro de 2016 e contou com a colaboração de 90 alunos do 2º ano do ensino médio, com uma turma do turno matutino e três turmas do turno vespertino, de uma escola estadual do município de Belém, localizada no bairro do Telegrafo. Por meio de um colega de profissão, entrou-se em contato com a direção da escola pedindo autorização para realizar a pesquisa e, no mesmo dia, aplicaram-se os questionários nas três turmas do período da tarde em que o colega ministrava aula. Como não se conseguiu um número significativo de alunos, precisou-se entrar em contato com o professor que ministrava aula no período da manhã, que nos cedeu uma turma para a pesquisa dois dias depois da nossa primeira visita à escola. Na aplicação dos questionários, houve a colaboração dos professores das turmas na organização e disciplina em classe, e a maioria dos alunos do período da tarde se mostraram interessados em participar da atividade investigativa; já os alunos do período da manhã fizeram uma prova nos primeiros horários no dia da aplicação dos questionários e se monstraram um pouco sem paciência em respondê-los.

#### 1.5.1.5 Resultados e Análise de dados

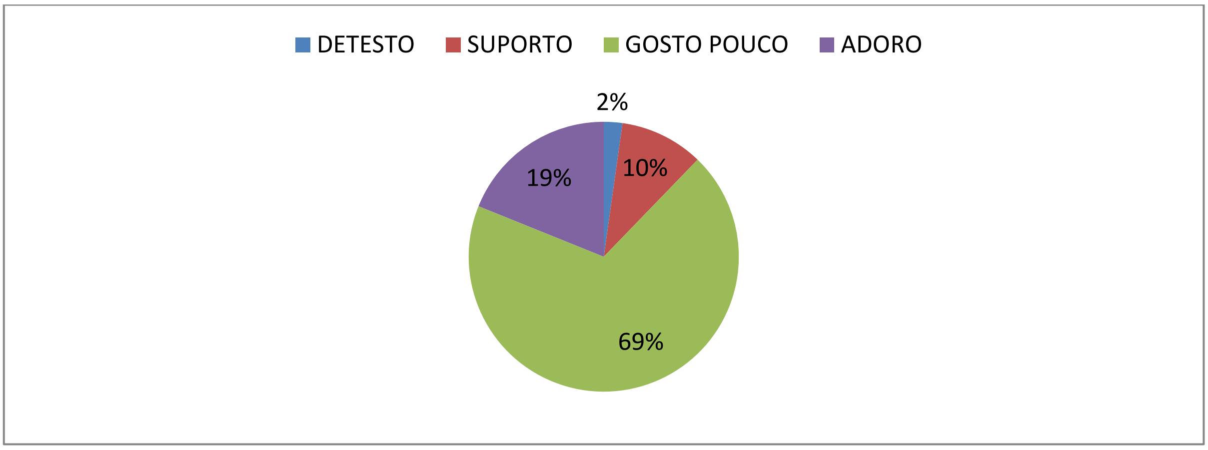
A sistematização dos resultados foi realizada por meio do tratamento das informações fornecidas pelos discentes consultados, que geraram quadros e gráficos, apresentados a seguir.

A análise dos resultados mostrou que, dos 90 alunos pesquisados, a maioria é do gênero masculino (72%), com idade de 14 a 27 anos e que um considerável grupo (37%) faz dependência em alguma disciplina.

Uma grande quantidade (69%) deles “gosta um pouco de estudar”, sendo que menos da metade dos 90 alunos recebem algum tipo de ajuda nos estudos. Quanto à frequência nos estudos, 1% afirmou que nunca estuda, enquanto 6% estuda todos os dias e a maioria (43%) estuda só no período de prova. Um dado interessante foi que um considerável número de estudantes sempre entende as explicações dadas pelos professores (28%), 58% quase sempre entendem, 14% entendem às vezes e nenhum aluno disse que fica sem entender em todos os momentos. Apesar de os alunos afirmarem ter um bom entendimento durante as aulas e de a maioria gostar de matemática, verificamos que eles encontraram dificuldades em resolver as atividades de Análise Combinatória. Hoje em dia, o conteúdo é pré-requisito para outros ramos da matemática como probabilidade, teoria dos números, topologia e etc., mas é intitulada por discentes como uma matéria difícil de ser trabalhada frente aos docentes. Mas,

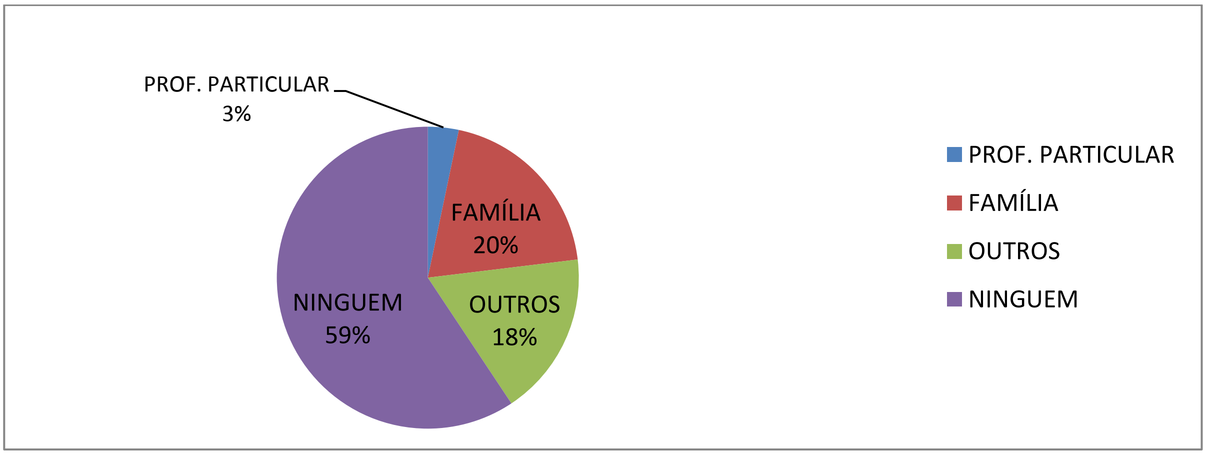
> Falar de dificuldade em Matemática é simples quando dizem que se trata de uma disciplina complexa e que muitos não se identificam com ela. Mas essas dificuldades podem ocorrer não pelo nível de complexidade ou pelo fato de não gostar, mas por fatores mentais, psicológicos e pedagógicos que envolvem uma série de conceitos e trabalhos que precisam ser desenvolvidos ao se tratar de dificuldades em qualquer âmbito, como também em Matemática (ALMEIDA, 2006, p.1)

**Gráfico 3 -** Gosto pela matemática.



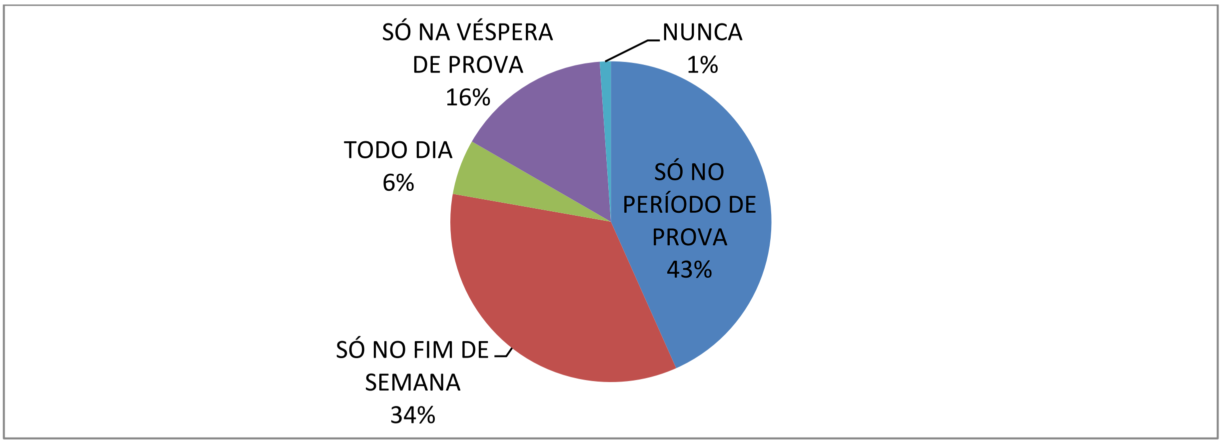

Fonte: Pesquisa de campo 2016

**Gráfico 4 -** Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática.



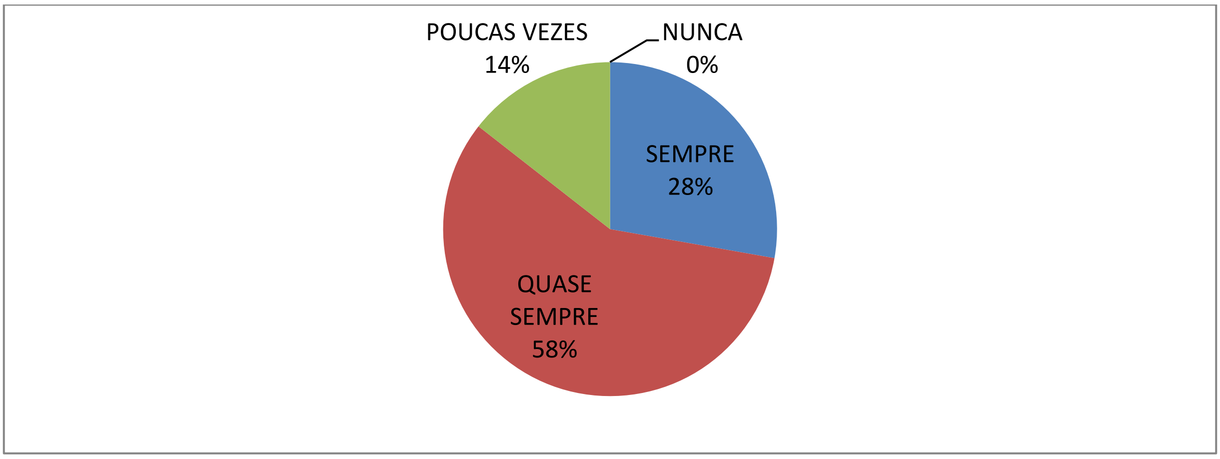

Fonte: Pesquisa de campo 2016.

**Gráfico 5 -** Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola?




Fonte: Pesquisa de campo 2016.

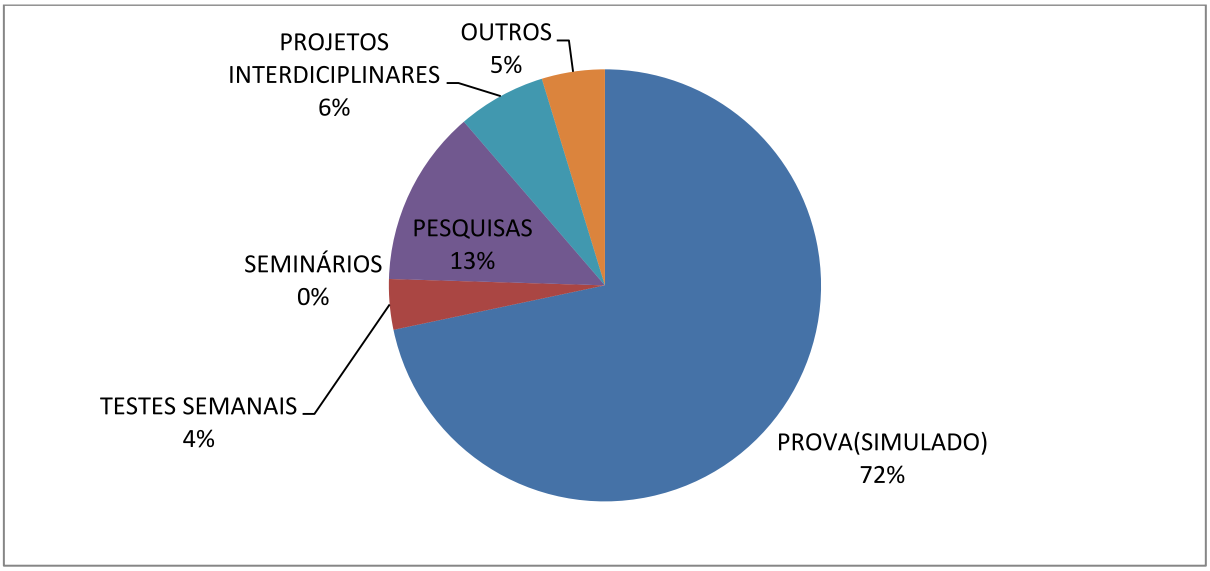
**Gráfico 6 -** Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?




Fonte: Pesquisa de campo 2016

Sobre a pergunta que tratava de que maneira eles são avaliados em matemática, houve alunos que marcaram mais de uma alternativa e entendemos que algumas avaliações, por exemplo, são organizadas com provas e testes semanais. Por este motivo, os percentuais foram feitos em relação à quantidade de respostas dadas e revelou que a maioria (72%) é avaliada por provas, enquanto que seminários não fazem parte do seu processo avaliativo.

**Gráfico 7 -** De que maneira você costuma ser avaliado em matemática? Através de

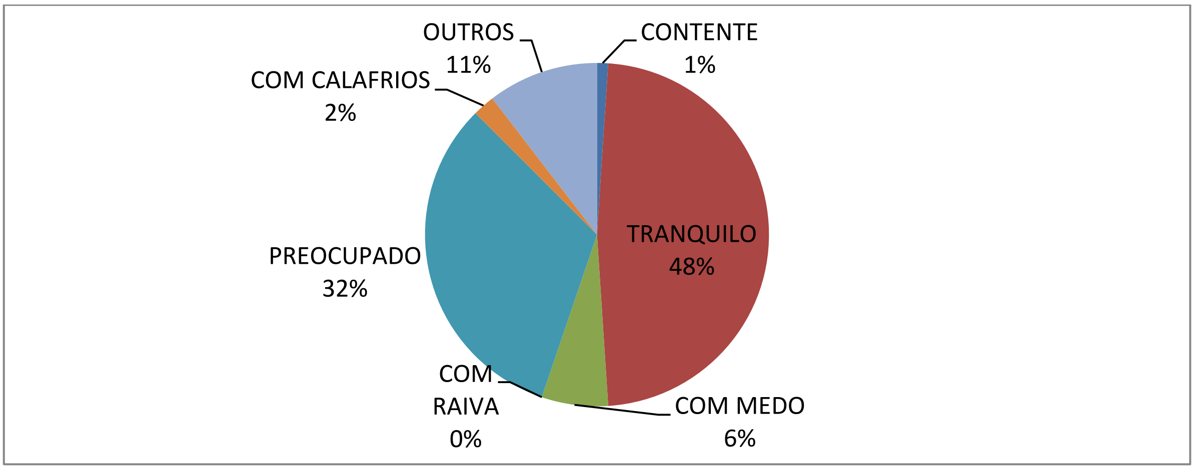



Fonte: Pesquisa de campo 2016

Quanto ao sentimento que eles têm diante de uma prova de matemática, aproximadamente a metade disse que se sente tranquilo, 1% se sente contente; já os outros sentimentos que mostram insegurança (calafrios, preocupação, raiva e medo), totalizaram 48% dos alunos, e 11% disseram que apresentam outros sentimentos. Os dados também revelaram que bem mais da metade dos estudantes tem a oportunidade de esclarecer as dúvidas (69%) e o restante disse que quase nunca ou pouco tem a mesma oportunidade. 90% dos discentes, confirmaram que o assunto Análise Combinatória foi visto no ensino médio e a grande maioria (82%) revelou que a metodologia de ensino mais empregada é a Tradicional (começando pela definição seguida de exemplos e exercícios) e apenas 8% disseram que o professor começa com situações problemas para depois introduzir os assuntos, sendo esta última a metodologia mais indicada pelos últimos estudos nessa área. Segundo Esteves,

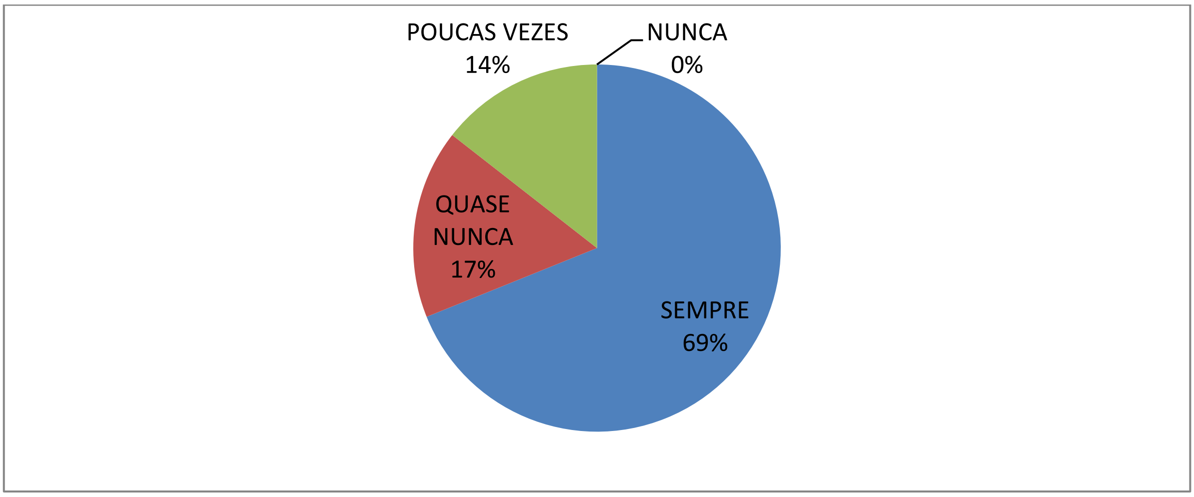
> [...] queremos mostrar que a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrário, ela representa uma compressão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo Análise Combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore de possibilidade, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica (ESTEVES, 2001, p.3).

**Gráfico 8 -** Como você se sente quando está diante de uma avaliação de matemática.



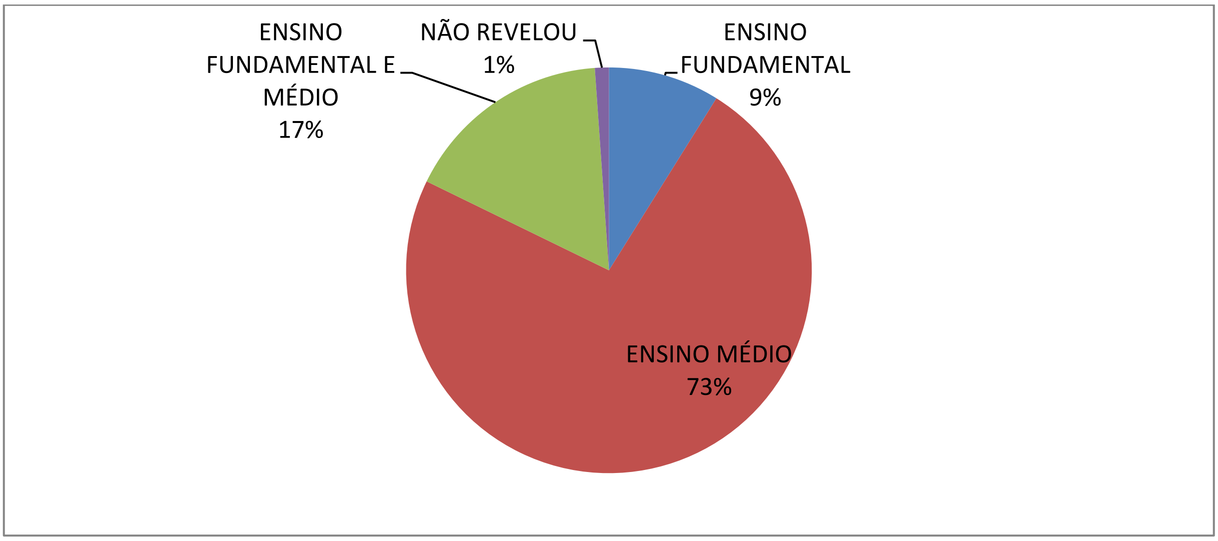

Fonte: Pesquisa de campo 2016.

**Gráfico 9 -** Em geral, nas aulas, os estudantes têm oportunidade de esclarecer dúvidas, verificando se aprenderam o conteúdo previsto na disciplina?



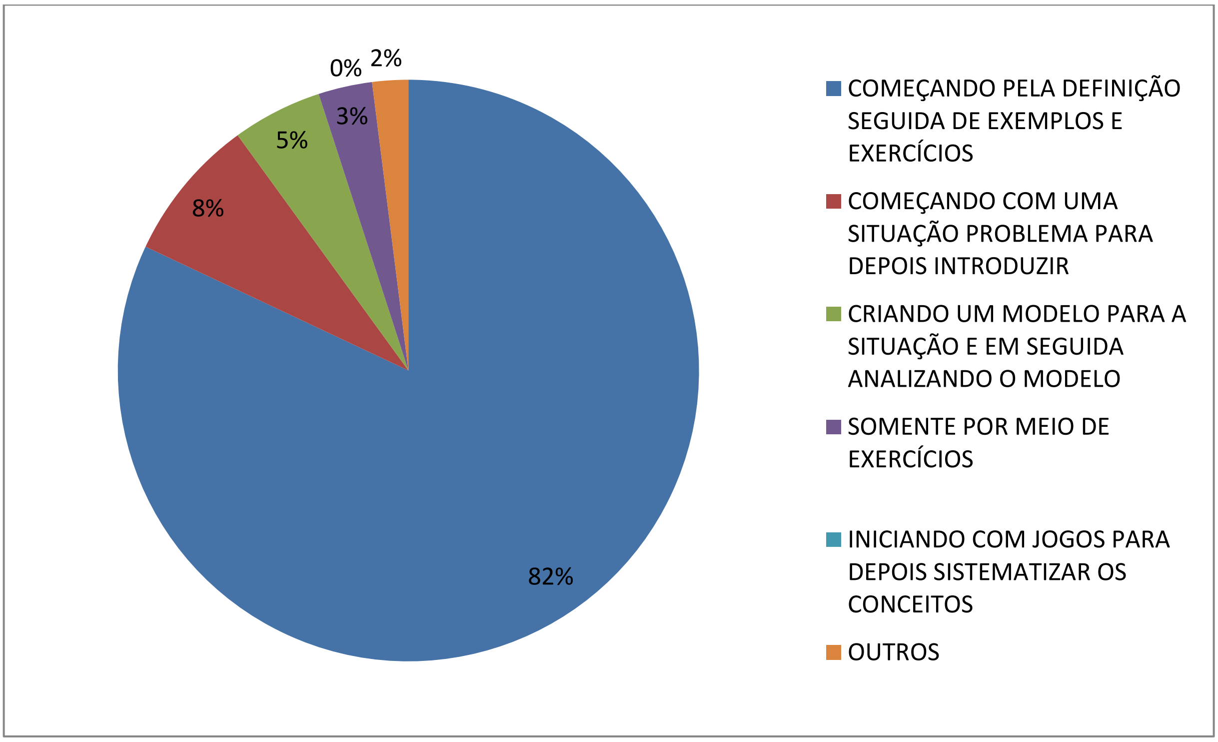

Fonte: Pesquisa de campo 2016.

**Gráfico 10 -** Nível que você estudou Análise Combinatória.




Fonte: Pesquisa de campo 2016.

**Gráfico 11 -** Quando você estudou o assunto Análise Combinatória a maioria das aulas foi




Fonte: Pesquisa de campo 2016

**Quadro 8 -** Em Vale e Antunes (2005), temos o seguinte quadro comparativo.

(continua)

| **A maioria das aulas de Análise Combinatória foi** | Frequência | Frequência(%) |
|---|---|---|
| Partindo da definição, seguido de exemplos, propriedades e exercícios. | 40 | 67 |

(conclusão)

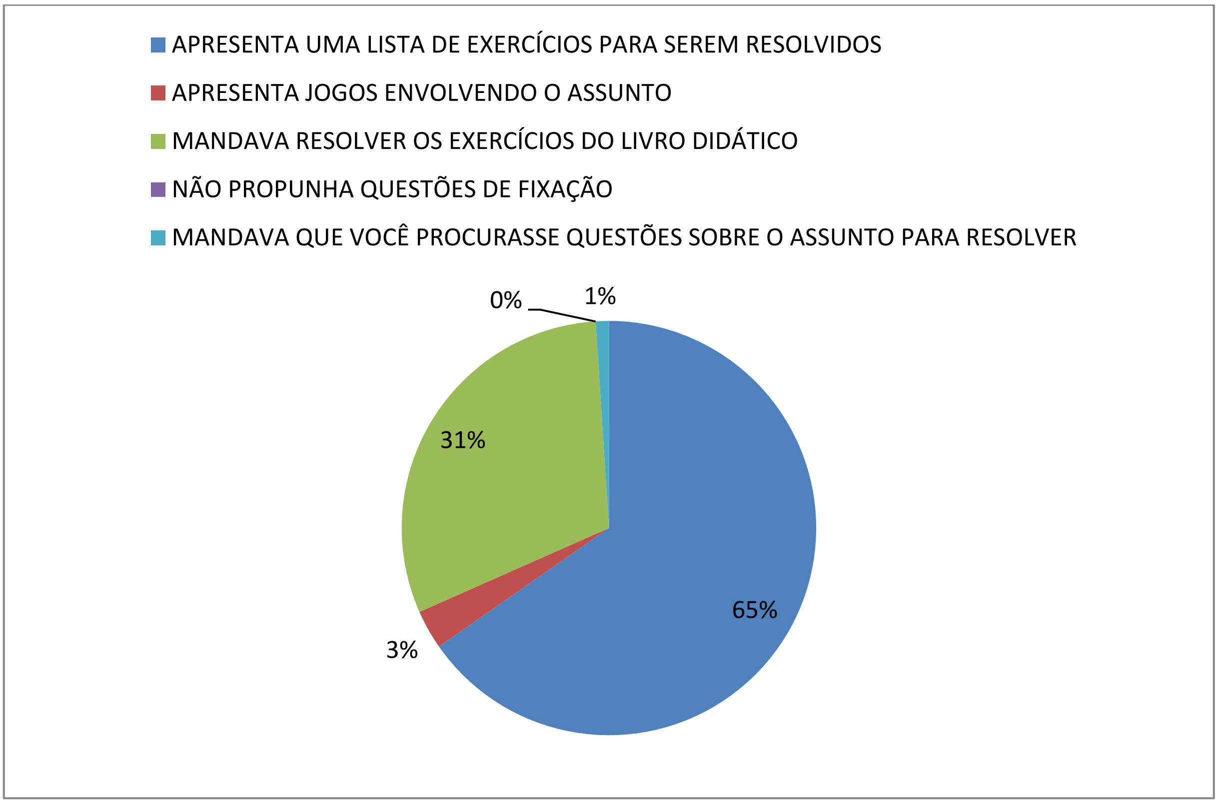
| | | |
|---|---|---|
| Partindo de uma situação-problema para em seguida formalizar | 11 | 18 |
| Modelando situações reais para aplicação dos conteúdos sobre Análise Combinatória | 09 | 15 |

Fonte: VALE E ANTUNES (2005, p.69)

Confirmando que a metodologia tradicional, é uma cultura que perdura ao longo dos anos.

Para fixar os conteúdos, geralmente se usa listas de exercícios e o segundo procedimento mais utilizado e o de resolver exercícios dos livros didáticos.

**Gráfico 12 -** Para fixar o conteúdo, Análise Combinatória, o seu professor.




Fonte: Pesquisa de campo 2016.

O quadro a seguir revela o desempenho dos estudantes na resolução dos exercícios propostos na pesquisa. Que foram corrigidas levando em consideração a seguinte categorização:

**Acertou totalmente:** quando houve uma resolução totalmente correta;

**Acertou parcialmente:** quando o aluno respondeu corretamente alguma coisa relacionada à resolução;

**Errou:** quando houve uma resolução totalmente incorreta;

**Em branco:** quando a questão não foi resolvida.

As categorias foram elaboradas pelos alunos da turma de estudantes do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, juntamente com a professora orientadora.

O quadro seguinte mostra que, com exceção da 1ª questão (na maioria dos casos foi resolvida pela árvore de possibilidades ou listagem organizada), em todas as outras houve grandes dificuldades em se conseguir êxito nas resoluções ou pelo menos buscar um raciocínio combinatório (questões em branco). Visamos também observar estratégias de resolução usadas pelos alunos e identificar os erros cometidos, verificando as correções, pudemos perceber que as questões que apresentavam resoluções erradas ou parcialmente certas, aconteceram dessa forma devido: interpretação errada quanto a que técnica utilizar (por exemplo: utilizaram arranjo simples, enquanto era combinação simples), não fizeram diferença quando os elementos eram para ser distintos ou não em suas escolhas, alguns tentaram fazer uso de fórmulas e se perderam entre elas, nas questões que poderiam ser revolvidas pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), sentiram dificuldades em escolher o número de elementos em cada etapa, não fizeram diferença quando os elementos eram repetidos, entre outras.

Então, fazer uma análise quanto aos erros dos estudantes, nos possibilita entender que lacuna deve estar sendo preenchida ao ensinarmos o assunto Análise Combinatória, verificando, assim, as possíveis causas dos erros e acertos.

**Quadro 9 -** Desempenho dos alunos nas questões propostas no teste.

(continua)

| Questões | Totalmente certa | Parcialmente certa | Errada | Em branco |
|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | 60% | 0% | 22% | 18% |
| Questão 2 | 6% | 0% | 67% | 27% |
| Questão 3 | 10% | 5% | 34% | 51% |
| Questão 4 | 6% | 1% | 30% | 63% |
| Questão 5 | 0% | 10% | 44% | 46% |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Questão 6 | 2% | 2% | 48% | 48% |
| Questão 7 | 2% | 1% | 47% | 50% |
| Questão 8 | 3% | 1% | 44% | 53% |
| Questão 9 | 0% | 0% | 47% | 53% |
| Questão 10 | 3% | 0% | 36% | 61% |

Fonte: Pesquisa de campo 2016

No quadro comparativo feito por Vale e Antunes (2005), foi verificado que a questão que os alunos mais acertaram foi a que poderia ser resolvida pelo P.F.C., assim como em nossa pesquisa. **1ª questão**: "Numa lanchonete há 5 tipos de salgados, 4 tipos de suco e 3 tipos de sorvetes. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto por 1 salgado, 1 suco e 1 sorvete?"

**Quadro 10 -** Desempenho dos alunos nas questões propostas no teste.

| Questão | Acertos (%) | Erros (%) | Não fez (%) |
|---|---|---|---|
| 01 | 26,6 | 45 | 28,4 |
| 02 | 18,3 | 56,7 | 25 |
| 03 | 13,3 | 46,6 | 40 |
| 04 | 6,6 | 65 | 28,4 |
| 05 | 11,6 | 15 | 73,4 |
| 06 | 5 | 26,7 | 68,3 |
| 07 | 5 | 21,6 | 73,4 |
| 08 | 3,3 | 26,7 | 70 |
| 09 | 3,3 | 21,7 | 75 |
| 10 | 5 | 15 | 80 |

Fonte: VALE E ANTUNES (2005, p.76)

Mesmo não colocando todas as questões trabalhadas pelos autores, podemos perceber que o rendimento dos alunos foi baixo, assim como em nossa pesquisa.

O quadro a seguir revela que tópicos os alunos lembravam-se de ter estudado do conteúdo Análise combinatória e qual foi o grau de dificuldade em cada tópico. Vale ressaltar que 6% dos alunos investigados deixaram a tabela toda em branco e houve alguns que se lembraram de ter estudados alguns tópicos, mas não marcaram o grau de dificuldade (não opinaram sobre a dificuldade).

**Quadro 11 -** Tópico Estudado e Nível de Dificuldade em Análise Combinatória.

(continua)

| | Que conteúdos você lembra ter estudado? | | Muito Fácil | Fácil | Mode-rado | Difícil | Muito difícil | Não opinaram sobre a dificul-dade | Deixa-ram a tabela em branco |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | | | | | | | |
| Princípio Aditivo | 54% | 40% | 8% | 11% | 30% | 2% | 1% | 2% | 6% |
| Princípio Fundamental da Contagem | 68% | 22% | 7% | 26% | 33% | 1% | 1% | 4% | 6% |
| Definição de Fatorial | 68% | 24% | 3% | 21% | 35% | 6% | 2% | 3% | 6% |
| Propriedade fundamental dos fatoriais | 60% | 34% | 3% | 12% | 37% | 6% | 1% | 1% | 6% |
| Definição de Permutação Simples | 70% | 24% | 7% | 23% | 33% | 5% | 1% | 1% | 6% |
| Cálculo de permutação simples | 66% | 28% | 5% | 18% | 32% | 7% | 1% | 3% | 6% |
| Definição de Permutação com repetição | 54% | 40% | 3% | 14% | 23% | 10% | 0% | 4% | 6% |
| Cálculo de permutação com repetição | 52% | 42% | 1% | 8% | 27% | 14% | 0% | 2% | 6% |
| Definição de Permutação Circular | 35% | 59% | 0% | 7% | 19% | 4% | 3% | 2% | 6% |
| Cálculo de permutação Circular | 36% | 58% | 0% | 9% | 18% | 4% | 3% | 2% | 6% |
| Definição de Arranjo Simples | 76% | 18% | 12% | 23% | 31% | 6% | 2% | 2% | 6% |
| Cálculo de Arranjo simples | 75% | 19% | 9% | 27% | 30% | 5% | 1% | 3% | 6% |
| Definição de Combinação Simples | 70% | 24% | 11% | 20% | 23% | 6% | 4% | 6% | 6% |
| Cálculo de combinação simples | 72% | 22% | 7% | 21% | 33% | 7% | 2% | 2% | 6% |
| Distinção entre arranjo e | 67% | 27% | 11% | 20% | 23% | 6% | 4% | 3% | 6% |

(conclusão)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| combinação | | | | | | | | | |
| Situações-problemas sobre o Princípio Aditivo | 47% | 47% | 1% | 9% | 22% | 10% | 5% | 6% | 6% |
| Situações-problemas sobre o Princípio Fundamental da Contagem | 64% | 30% | 3% | 17% | 27% | 8% | 3% | 6% | 6% |
| Situações-problemas sobre Permutação Simples | 58% | 36% | 2% | 13% | 30% | 5% | 4% | 4% | 6% |
| Situações-problemas sobre Permutação com repetição | 45% | 49% | 2% | 9% | 20% | 4% | 7% | 3% | 6% |
| Situações-problemas sobre Permutação Circular | 41% | 53% | 2% | 5% | 17% | 8% | 6% | 3% | 6% |
| Situações-problemas sobre Arranjo Simples | 64% | 30% | 2% | 17% | 32% | 8% | 2% | 3% | 6% |
| Situações-problemas sobre Combinação Simples | 69% | 25% | 5% | 16% | 34% | 8% | 3% | 3% | 6% |

Fonte: Pesquisa de campo 2016.

O tópico que os estudantes menos se lembram de ter estudado foi permutação circular e, os outros tópicos, a maioria lembra-se de ter estudado. O nível de dificuldade que mais se destaca é o moderado, onde em todos os tópicos sempre esteve com maior relevância, na maioria das vezes com aproximadamente 30% dos educandos considerando esse nível de dificuldade. O que chama atenção é que pouco alunos consideram, de modo geral, os estudos em Análise Combinatória com difícil ou muito difícil. Por exemplo, no Cálculo de permutação simples, apenas 2% acham muito difícil; no Cálculo de Arranjo simples, apenas 3% acham muito difícil e no Cálculo de combinação simples apenas 2% acham muito difícil. O que poderia indicar que eles teriam um melhor aproveitamento nas resoluções das 10 questões propostas o que não aconteceu. Os problemas de combinação simples, Arranjo simples e princípio Fundamental da contagem são os que eles mais se lembram de ter estudos respectivamente. Quanto às situações-problemas, de modo geral, entre 10% e 15% consideram as atividades como difícil ou muito difícil. O que não se refletiu no teste diagnóstico mostrado na QUADRO 9.

De modo geral aqui nesta seção, identificamos os principais obstáculos enfrentados por alunos de matemática em Combinatória, estes fatos observados são de extrema importância para o bom andamento de nossa pesquisa, pois servirão como parâmetro de observação no momento da experimentação de nossa sequência didática assim como no momento de validação da mesma.

Nossa pretensão é propor uma metodologia para o ensino de Análise Combinatória, através de um conjunto de atividades que estimule nos alunos a vontade e o desejo de aprender os conceitos matemáticos, para em seguida transformá-los em significado para sua vida, e assim contribuir para a melhora da prática docente e o desenvolvimento intelectual desse aluno. Nesse sentido, respondemos o seguinte questionamento: Como está o desempenho de estudantes da 2ª série do ensino médio na resolução de questões envolvendo conceitos de Análise Combinatória? Como está o grau de dificuldade dos estudantes da 2ª série do ensino médio nos tópicos estudados Análise Combinatória?

A seguir apresentaremos na Seção 2, o conjunto das atividades para o ensino de Análise Combinatória.

## 2 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI/ SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Três processos metodológicos melhor traduzem nossa concepção: **aula operatória, resolução de problemas e desenvolvimento da competência leitora e escrita**. Antes e depois dos processos metodológicos realizaremos as etapas de sondagem.

Sobre a sondagem, na primeira etapa identificada como pré-teste, verificaremos as ideias que os alunos trazem sobre o tema que será trabalhado; depois da aplicação da sequência didática, procuraremos diagnosticar se realmente houve um aprendizado significativo verificando o desempenho dos estudantes em um pós-teste. Neste, faremos a comparação com o pré-teste, observando as ideias, o pensamento combinatório aprendido e concepções dos investigados.

A aula operatória é o momento de reconstrução do que o aluno traz e de construção de novos conhecimentos a partir das discussões realizadas em grupo. Partindo do conhecimento prévio dos alunos, iremos problematizar, desestabilizar, organizar e operacionalizar ações em sala de aula. Será nosso papel propiciar ao aluno situações de aprendizagem de modo que ele se sinta capaz de modificar o que já existe em sua estrutura cognitiva. A aula atingirá seu objetivo quando o pensar crítico se fundir com o conhecimento acumulado pelo indivíduo . Nela também acontece a problematização, onde teremos a etapa de aulas em grupos, que provocaremos o "desiquilíbrio" cognitivo do aluno, despertando sua curiosidade, desafiando-os, fazendo com que eles queiram saber mais sobre o assunto. Para sua realização é importante que a dinâmica seja variada com debates em grupos, jogos, pesquisas e muita curiosidade em aprender. Durante as aulas faremos também a sistematização, momento em que auxiliaremos os alunos a comparar, relacionar e organizar as informações que tinham com as novas informações obtidas nos estudos, as reflexões descritas e discussões realizadas sobre o tema. Nesta fase, as atividades serão escritas em quadros coletivos, resumos, montagem de exposição, de análise comparativa, etc. Finalmente acontecerá a generalização e aplicação, momento em que os alunos poderão relacionar os conhecimentos produzidos e vividos. Esta fase em questão de interesse coletivo será aprofundada, em que propriedades e leis referentes ao tema desenvolvido serão discutidas. A comunicação dos resultados dessas etapas será feita de forma oral e escrita com os grupos.

As resoluções de problemas são caracterizadas pelo conflito entre a concepção do sujeito sobre um fato da realidade e a própria realidade. É importante definir aqui o que se entende como problema. Problema, do ponto de vista didático, pode ser considerado como uma questão importante a ser resolvida ou enunciada que aparece em um contexto que apresenta necessidade de aplicação de determinadas habilidades e competências. Pode ser definido também como tarefa, pergunta ou mesmo como uma contradição. Vale chamar atenção sobre o caráter motivador da situação-problema, que está sempre relacionado a uma questão de interesse, estratégia que deve ser estimulada no processo ensino aprendizagem.

Trabalhar com algumas características variáveis dos fenômenos e dos fatos pode ser uma boa oportunidade para romper com a estrutura das questões com resposta padrão, considerada como verdades únicas, um grande obstáculo na construção do conhecimento. Entretanto, deve-se reconhecer que a existência de uma situação-problema, por si só, não garante a mobilização do sujeito, não o leva necessariamente a superar a ideia inicial ou à solução do conflito cognitivo, pois o aluno pode não a reconhecer como tal, permanecendo com a sua ideia inicial sobre o conhecimento que se discute.

A situação-problema deve levar em conta:

- A reflexão dos alunos sobre a importância do sentido da relação conhecimento/sociedade e, dessa forma, propor estudos contextualizados;
- A relação do conhecimento com o cotidiano;
- A possibilidade de questionar as ideias prévias dos alunos, para construir outras ideias, sem o objetivo único de substituir ideias anteriores, mas possibilitando o grau de generalização de um conceito ou procedimento.

O desenvolvimento da competência leitora e escrita pretende proporcionar ao aluno o contato com algumas linguagens matemáticas e a utilização destas como meio de organização da realidade. Possibilitando a ele analisar, interpretar e utilizar os recursos expressivos relacionando textos com o seu contexto, confrontando e respeitando as diferentes manifestações da linguagem, opiniões e ponto de vistas. Pretende-se que o aluno faça uso da linguagem e saiba colocar-se como protagonista do processo de produção/recepção.

## 2.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES

Este material pedagógico, destinado a turmas do ensino médio, foi elaborado com a preocupação de garantir não apenas a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, mas também o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem onde haja a parceria de alunos e professores, estes como sujeitos mais experientes. Assim, objetivou-se nessa sequência de ensino desenvolver um material por meio de situações didáticas, que enfatizam a resolução de problemas como ponto de partida, para firmar conceitos combinatórios.

Teoricamente, o trabalho segue as ideias de Pinheiro (2008), com algumas adaptações. Por sua vez, o autor debruça-se em estudos extraídos de Sá (2005), Brousseau (1986) e Lara (2003).

Com isso, entendemos que nossa proposta contribui com situações que provocam certo grau de incerteza e a procura pela solução de um problema proposto. Nessa perspectiva, procuramos organizar as atividades dos alunos para a busca do conhecimento, a partir do conhecido, contribuindo como mediador na preparação de planos para descoberta ou investigação de fatos.

As atividades propostas, em geral, podem ser feitas por diferentes caminhos. Espera-se que a exposição de opiniões e a apresentação de justificativas sejam parte integrante desse processo, além de instigar alunos e professores sobre os resultados alcançados.

As estratégias de atividades possibilitam:

- Um diagnóstico da situação dos alunos com relação aos diversos conhecimentos trabalhados;
- O confronto de ideias de todos aqueles que participam da aula;
- A pesquisa como objeto de estudo;
- A relação com o conhecimento socialmente construído;

Sendo o professor:

- Mediador do processo ensino-aprendizagem;
- Aquele que desiquilibra, desafia, orienta, traz novas informações;
- O parceiro mais experiente em cada experiência educativa;
- Autor de seus planos de trabalho, de forma a preservar a excelência acadêmica das atividades desenvolvidas;

Neste sentido, elaboramos um plano de ação para as aulas, conforme o quadro a seguir. Mas antes de aplicarmos nossa metodologia, iremos aplicar um pré-teste, a fim de conhecer o perfil dos estudantes e visualizar seu conhecimento prévio sobre o conteúdo de Análise Combinatória.

**Quadro 12 -** Síntese dos níveis, quanto à construção da combinatória.

| Tema da aula | Formação dos alunos na sala | Número de situações-problema | Tempo estimado para aula | Objetivos | Jogo utilizado |
|---|---|---|---|---|---|
| Principio fundamental da contagem (p.f.c.) | Grupos | 7 | 90 Minutos | Introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem | |
| Exercícios | Grupos | 20 | 90 Minutos | Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo o P.F.C. | |
| Fatorial | Grupos | 6 | 90 minutos | Introduzir o conceito de fatorial | Pif-paf da Análise Combinatória |
| Cálculo da Permutação simples | Grupos | 5 | 90 Minutos | Introduzir o conceito de permutação e a noção de fatorial | Cartas da combinatória |
| Exercícios | Grupos | 16 | 90 Minutos | Desenvolver as habilidades de resolver problemas envolvendo a permutação simples | |
| Introduzir a Diferença entre arranjo e combinação | Grupos | 6 | 90 Minutos | Introduzir o conceito de arranjo e combinação; fazer o aluno perceber a diferença entre arranjo e combinação e apresentar a representação $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$ | Dominö Combinatório |
| Cálculo de arranjo simples | Grupos | 5 | 90 Minutos | Fazer o aluno perceber que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ | |
| Exercícios | Grupos | 20 | 90 Minutos | Desenvolver as habilidades de resolver problemas de Arranjo simples | |
| Cálculo de Combinação simples | Grupos | 6 | 90 Minutos | Fazer o aluno perceber que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$ | Dominö Combinatório |
| Exercícios | Grupos | 20 | 90 Minutos | Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a Combinação simples | |
| Cálculo da Permutação com repetição | Grupos | 6 | 90 minutos | Fazer o aluno perceber que $P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!.b!.c!}$ | |
| Exercícios | Grupos | 10 | 90 minutos | Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a permutação com repetição. | |

Fonte: Autor (2017)

### 2.1.1 Pré-Teste e Pós-Teste

O Pré-teste foi um diagnóstico inicial desenvolvido com os sujeitos da pesquisa, logo na primeira sessão de ensino. O objetivo da tarefa é verificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao assunto Análise Combinatória e produzir informações que nos permita comparar o desempenho dos alunos na resolução dos problemas antes da realização das atividades, com o pós-teste, que foi aplicado na última sessão, onde, a partir daí, poderemos verificar se houve um desenvolvimento combinatório satisfatório ou não ao longo do processo de ensino. Os questionários seguem no apêndice.

**Análise a *priori* das questões do pré-teste:**

Nossa hipótese para essas questões, era de que, pela falta de conhecimento do assunto, alguns alunos tentariam resolvê-las montando as possibilidades (árvore de possibilidades). Acreditávamos que a maioria delas não iriam ser resolvidas por meio de fórmulas ou pelo princípio multiplicativo e os alunos apresentariam muita dificuldade. As seis primeiras poderiam ser resolvidas pelo P.F.C.; a 7ª questão envolve o conhecimento de Permutação com Repetição e as três últimas envolve o conhecimento em Combinação Simples.

**Análise a *priori* das questões do pós-teste:**

Nossa hipótese para essas questões era que, após o desenvolvimento de nossa sequência de ensino, os alunos teriam uma maior facilidade em resolvê-las, principalmente as que poderiam ser resolvidas pelo o P.F.C., como as sete primeiras questões. As três últimas necessitariam do uso de fórmulas ou um melhor entendimento das operações (multiplicação e divisão) para resolvê-las. Com isso, acreditávamos que nessas questões eles terão um pouco mais de dificuldades, mas esperávamos que os resultados fossem melhores que o do pré-teste.

A seguir apresentaremos as atividades que usaremos em nossa sequência didática.

### 2.1.2 Atividades e Análises a Priori

#### 2.1.2.1 Atividade 1 de ensino

**ATIVIDADE 1**

**Título:** Princípio Fundamental da contagem

**Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de resolver questões de contagem.

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

**Procedimento:**

• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Um estudante possui 2 blusas diferentes da escola (Branca e Preta) e 2 calças distintas (Jeans e Preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?

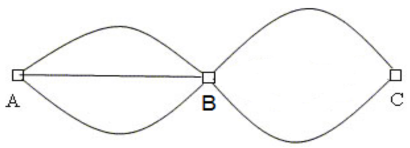
**RESOLUÇÃO:**

**02.** Para montar seu sanduiche na cantina da escola, Creuza precisa escolher somente um pão e somente um recheio, entre dois tipos de pães (careca ou de forma) e quatro tipos de recheios (queijo, carne, presunto ou salsicha). Quantos tipos de sanduíches Creuza pode montar?

**RESOLUÇÃO:**

**03.** Três cidades A, B e C são ligadas por estradas e rios. Uma estrada e dois rios ligam A e B. Dois rios ligam as cidades B e C. Não há estradas ou rios ligando A e C diretamente. De quantos modos diferentes pode-se viajar de A até C, passando por B?

**RESOLUÇÃO:**



**04.** No lançamento de duas moedas idênticas, quantos são os resultados possíveis? Lembre-se que os resultados em uma moeda podem ser Cara (C) ou Coroa (K).
**RESOLUÇÃO:**

**05.** Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será servido em três etapas: **entrada, prato principal e sobremesa**. De quantas maneiras distintas ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais e 2 sobremesa?
**RESOLUÇÃO:**

**06.** Uma das parte de um teste psicotécnico é constituído por 3 questões do tipo "verdadeiro ou falso". Qual é o número total de gabaritos que podem ser marcados, nessas três questões?
**RESOLUÇÃO:**

**07.** Uma senha eletrônica é constituída de uma vogal (**a, e, i, o** ou **u**) no primeiro dígito e um algarismo ímpar (**1, 2, 3, 4** ou **5**) no segundo dígito. Qual o número total de senhas que podem ser formadas?
**RESOLUÇÃO:**

**Quadro 1**

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas independentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibilidades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | | | | | | |
| 2ª | | | | | | |
| 3ª | | | | | | |
| 4ª | | | | | | |
| 5ª | | | | | | |
| 6ª | | | | | | |
| 7ª | | | | | | |

Descubra uma maneira prática para obter os resultados.

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Após a leitura das sete atividades esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, talvez até de maneira empírica através da árvore de possibilidades, contagem direta ou ainda pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Não descartando a hipótese de que alguns grupos tenham dificuldades em calcular o total de possibilidades. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização do Princípio multiplicativo (P.F.C.). Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 1. Esperamos que os alunos terão alguma dificuldade no preenchimento do quadro 1 por desconhecerem algumas palavras a qual teremos que nos posicionar a respeito.

**QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O P.F.C.**

**01.** Em um concurso realizado numa universidade, apresentaram-se 4 candidatos para disputar a única vaga existente. A banca examinadora é constituída de 3 membros, devendo cada examinador escolher um candidato. De quantas maneiras diferentes podem ser dados os votos desses examinadores?

**RESOLUÇÃO:**

**02.** Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?

**RESOLUÇÃO:**

**03.** Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é

a) 64
b) 24
c) 12
d) 4

**04.** O grupo de estudantes Ana, Beto, Caio, Deise, Ester, Fábio e Gabriela foi assistir a uma palestra no auditório da Fatec-São Paulo e ocupou os lugares de uma fileira com exatamente sete cadeiras, de modo que cada um dos rapazes sentou-se entre duas moças do grupo.

- Na situação descrita, o número de modos distintos que esse grupo poderia ocupar esses sete lugares é

a) 144.
b) 360.
c) 720.
d) 1 240.
e) 2 520.

**05.** O setor de terapia intensiva de um hospital conta com 12 enfermeiros, 20 técnicos em enfermagem e 6 médicos, que se revezam em turnos de trabalho. Em cada turno devem trabalhar 5 enfermeiros, 10 técnicos em enfermagem e 3 médicos. A tabela a seguir indica alguns dos funcionários que deverão trabalhar no turno da terapia intensiva desse hospital no sábado.

| | |
|---|---|
| Enfermeiros | Paulo, Rita, Marina, Cláudia. |
| Técnicos em enfermagem | Maria, Celina, Alberto, Luís, Laura, Moisés, Telma, Cristina, Caio. |
| Médicos | Eunice, Sérgio |

- O número de possibilidades distintas para completar a equipe de trabalho desse turno de sábado é igual a

**RESOLUÇÃO:**

**06. pa.lin.dro.mo***: adj+sm* (*pálin+dromo*) Diz-se de verso ou frase que tem o mesmo sentido da esquerda para a direita ou ao contrario.

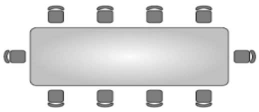
Disponível em: http://michaelis.uol.com.br. Acesso em: 13 nov. 2013 (adaptado).

Naturalmente, o conceito pode ser estendido para números inteiros: um número inteiro é palíndromo se ele é o mesmo lido da esquerda para a direita ou ao contrário. Por exemplo, 212 353 212 é palíndromo.

- Quantos são os números palíndromos de cinco algarismos que possuem três algarismos distintos?

a) 648
b) 720
c) 900
d) 27 216
e) 52 488

**07.** Na sala de reuniões de certa empresa há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura abaixo.



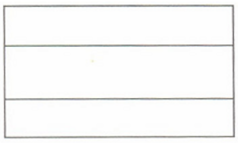
Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice-presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que:

- o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa;
- o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.

- Considerando que tais poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?

a) 3360
b) 2480
c) 1680
d) 1240
e) 840

**08.** Observe a figura. Nessa figura está representada uma bandeira que deve ser pintada com duas cores diferentes, de modo que a faixa do meio tenha cor diferente das outras duas faixas. O número de maneiras distintas de pintar a bandeira desse modo, utilizando as cores azul, preta, vermelha, amarela, verde e branca é:



a) 15
b) 30
c) 45
d) 60

**09.** Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

**RESOLUÇÃO:**

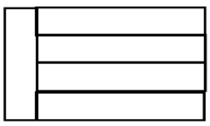
**10.** Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma “quentinha executiva” que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, o número de possiblidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, uma entrada, um prato principal e uma sobremesa é

**RESOLUÇÃO:**

**11.** Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:

a) 24
b) 30
c) 120
d) 360
e) 400

**12.** A figura abaixo mostra uma bandeira com cinco faixas. A proposta é pintar cada faixa dessa bandeira com uma cor, de modo que duas faixas com uma linha fronteira comum não poderão ter a mesma cor. Se dispusermos de 4 cores diferentes, o número de modos distintos de que essa bandeira poderá ser pintada será

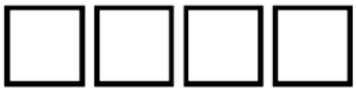


a) 24.
b) 36.
c) 96.
d) 72.

**13.** O código de abertura de um cofre é formado por seis dígitos (que podem se repetir, e o código pode começar com o dígito 0). Quantos são os códigos de abertura com pelo menos um dígito 7?

a) 468.559
b) 468.595
c) 486.595
d) 645.985
e) 855.964

**14.** Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração abaixo, é

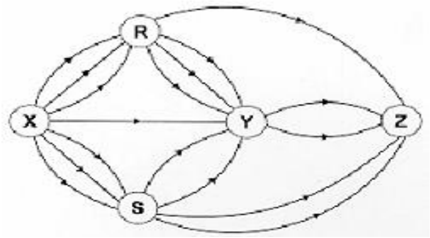


a) $24 \times 120^4$
b) $120^4$
c) $24 \times 120$
d) $4 \times 120$
e) 120

**15.** Se os produtos de uma empresa, para fins de informatização, são codificados com números de três algarismos, inclusive começando com zero, então o número de produtos, que poderão ser codificados, será calculado por

A) $9^3$
B) 9.8.7
C) 10.9.8
D) 10.4.3
E) $10^3$

**16.** Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:




a) 39

b) 41

c) 35

d) 45

**17.** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

- O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

**RESOLUÇÃO:**

**18.** O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho), Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br.
Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado)

- De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14

b) 18

c) 20

d) 21

e) 23

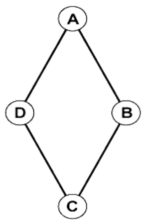
**19.** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram

gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.
- Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é
a) 24.
b) 31.
c) 32.
d) 88.
e) 89.

**20.** Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.




- Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?
a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

2.1.2.2 Atividade 2 de ensino

**ATIVIDADE 2**

**Titulo:** Fatorial

**Objetivo:** Conceituar fatorial

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

**Procedimento:**

•Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola cinco alunos. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?

**02.** Utilizando-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantas senhas podemos formar com seis dígitos distintos?

**03.** Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos são os anagramas da palavra **FUTEBOL**?

**04.** Uma competição de natação é realizada com oito atletas. De quantas maneiras diferentes podemos obter os oito primeiros colocados?

**05.** Nove amigos resolveram se posicionar, para bater uma foto e postar nas redes sociais. De quantas maneiras diferentes, esses jovens poderão se posicionar, um ao lado do outro, para a foto?

**06.** De quantas maneiras podemos organizar Dez dvd’s diferentes em uma prateleira?

**QUADRO 2**

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário para se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | 8ª etapa? | 9ª etapa? | 10ª etapa? | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | |

No estudo de problemas de análise combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos e positivos. Para facilitar a representação de alguns desses produtos, foi criada a notação fatorial.

**O produto 5.4.3.2.1 é denominado de fatorial de 5.**

**A expressão fatorial de 5 é representada por 5!**

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência da atividade anterior. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou P.F.C.. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização do conceito de fatorial. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 2.

**Questões**

**1)** Represente cada produto a seguir na forma de fatorial .

a) 6.5.4.3.2.1=

b) 8.7.6.5.4.3.2.1=

c) 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=

d) 1.2.3.4.5.6.7 =

**2)** Escreva na forma de produto (multiplicação) os seguintes fatoriais

a) 2! =

b) 3! =

c) 4! =

d) 5! =

**3)** Calcule o que se pede a seguir.

a) $\frac{5!}{3!} =$

b) $\frac{9!}{8!} =$

c) $\frac{10!}{(12-4)!} =$

d) $\frac{12!}{8!.(12-8)!} =$

e) 2! + 3! =

f) 2! x 3! =

g) 4! – 3! =

h) $(3!)^2$ =

**4)** Represente cada produto na forma de quociente (divisão) entre fatoriais.

a) 5.4.3 =

b) 6.5.4 =

c) 7.6 =

d) 7.6.5.4.3 =

e) 8.7.6 =

f) 10.9.8 =

g) 12.11 =

h) 3.2 =

**5)** Colocando os símbolos de **(  )**, **+** e/ou **!**, transforme a sentença em verdadeira.

a) 1  1  1 = 6

b) 2  2 = 24

### 2.1.2.3 Atividade 3 de ensino

**ATIVIDADE 3**

**Título:** Permutação Simples

**Objetivo:** conceituar permutação simples

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

**Procedimento:**

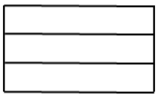
• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Deseja-se confeccionar uma bandeira, com 3 faixas horizontais, dispondo de 3 cores (Azul, Branca e Vermelha), sem que haja repetição de cor. De quantas maneiras isto é possível?



**02.** Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Um torcedor fanático, ao homenagear o filho, deu o nome do garoto de OMER, fazendo apenas a inversão das letras da palavra REMO. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?

**03.** Um colégio resolve fazer uma programação de Cinema, de Segunda a Sexta. Para isso, os organizadores escolhem cinco filmes (Aventura, Comédia, Ficção, Romance e Terror), que serão exibidos um por dia, sem repetição.
- Nesse caso, qual é o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação nesses dias?

**04.** Seis amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) resolveram passear pela orla de Belém, alugando uma bicicleta de 6 lugares.

- De quantas maneiras diferentes, os 6 amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) podem se sentar, na bicicleta, para dar uma passeio?

**05.** Quantas senhas são possíveis formar, de sete dígitos, com as letras da palavra ENIGMAS?

**Quadro 3**

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas **"n"** (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "**p"** de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo necessário para se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | |

Observação

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência da atividade anterior. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou P.F.C. Contamos com algumas dificuldades nas interpretações das questões para determinar o total de possibilidades. O objetivo delas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da definição de Permutação Simples. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura da tabela 3.

**QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA PERMUTAÇÃO SIMPLES**

**01.** A partir da palavra NÚMEROS (o acento sempre acompanhará a letra u), responda:
a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?
b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?
c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?
d) Quantos anagramas começam com n?
e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?
f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?
g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m junta-se nessa ordem?
h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas?

**02.** O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 b) 48
c) 96 d)120
e)144

**03.** Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores, durante toda a viagem, é:
a) 4 b) 8
c) 12 d) 24
e) 162

**04.** Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:
a) 4h b) 2h
c) 3h d) 5h
e) 6h

**05.** De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
a) 6 b) 12
c) 48 d) 18
e) 36

**06.** Arranjam-se os dígitos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de 4 dígitos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados.
- Nessa lista, o número 3.241 ocupa a
a) $14^a$ posição. b) $13^a$ posição.
c) $16^a$ posição. d) $15^a$ posição.

**07.** Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é
a) 9.(9!) b) 8.(9!)
c) 8.(8!) d) $\frac{10!}{2}$
e) $\frac{10!}{4}$

**08.** Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes.

Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras.

- Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

a) $3(5!)^3$ b) $(5!)^3$
c) $(5!)^3(3!)$ d) $\frac{15!}{3!5!}$

**09.** O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é

a) 24 b) 48
c) 96 d) 240
e) 720

**10.** Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais, Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é

a) 288 b) 296
c) 864 d) 1728

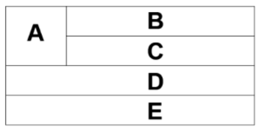
**11.** Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar uma tirar a foto?

a) 24 b) 96
c) 720 d) 48
e) 120

**12.** Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:

a) 24 b) 30
c) 120 d) 360
e) 400

**13.** A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.




Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

a) $2! \times 2!$ b) $3! \times 2!$
c) $3! \times 3$ d) $3! \times 2^2$
e) $3 \times 2^4$

**14.** Um cliente de uma vídeo-locadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a vídeo-locadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de

drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$ b) $8! \times 5! \times 3!$

c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$ d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$

e) $\frac{16!}{2^8}$

**15.** Ao permutarmos, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, obtemos números de seis dígitos diferentes. Ordenando estes números, em ordem crescente, o número que ocupa a 239ª posição é

a) 265431. b) 265413.

c) 265314. d) 264531.

**16.** As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

a) PROVA. b) VAPOR.

c) RAPOV. d) ROVAP.

e) RAOPV

2.1.2.4 Atividade 4 de ensino

**ATIVIDADE 4**

**Título:** Diferença entre Arranjo e Combinação

**Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de diferenciar arranjo simples de combinação simples.

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

**Procedimento:**

Leia atentamente cada questão da lista de questões;

Resolva cada questão de lista;

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Três amigos marcaram de se encontrar às 17 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?
**RESOLUÇÃO:**

**02.** Em um colégio, 4 alunas se candidataram a “miss” dos jogos. Sabendo-se que a 1ª e 2ª colocada mais votadas, receberão os títulos de **Rainha e princesa dos jogos**, respectivamente. Quantas são as possibilidades de escolha dessas duas garotas?
**RESOLUÇÃO:**

**03.** Quatro funcionários de uma empresa devem ser divididos em duplas, para a realização de algumas tarefas. De quantas maneiras isso poderá ser feito?
**RESOLUÇÃO:**

**04.** Creuza deseja pintar as unhas e para isso possui 5 cores distintas de esmalte, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher dois esmaltes, entre os que possui?
**RESOLUÇÃO:**

**05.** Uma escola tem sete professores de matemática. Três deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de três professores são possíveis formar?
**RESOLUÇÃO:**

**06.** Em um torneio internacional de natação participaram oito atletas. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas uma medalhas de ouro, uma de prata e outro de bronze entre os atletas?
**RESOLUÇÃO:**

De acordo com o que você realizou em cada uma das oito situações-problemas acima, preencha **quadro 4** e tire suas conclusões.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | | | | |
| 2ª | | | | |
| 3ª | | | | |
| 4ª | | | | |
| 5ª | | | | |
| 6ª | | | | |

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento não altera o agrupamento a questão é um exemplo de **combinação dos elementos**.

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento altera o agrupamento a questão é um exemplo de **arranjo dos elementos.**

Quais das questões apresentadas são de arranjo?

Quais das questões apresentadas são de combinação?

Simbolicamente a combinação de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por: $C_{5,2}$ *ou* $C_5^2$

Simbolicamente o Arranjo de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por : $A_{5,2}$ *ou* $A_5^2$

Represente as seis questões na forma simbólica.

**ANÁLISE A PRIORI:**

Após a leitura das seis atividades é esperado que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência das atividades 1 e 2. O que deve ocasionar erros nas atividades em que a ordem da escolha dos elementos não importa na hora de se formar o agrupamento. Esperamos que esta dificuldade seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 4. Talvez as resoluções ainda ocorram de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou ainda pelas fórmulas de Arranjo e Combinação. Esperamos dificuldades nas interpretações das questões propostas para determinar o total de possibilidades. O objetivo das questões é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a introdução do conceito de Arranjo e Combinação, bem como fazer os alunos perceberem a diferença entre os dois tipos de técnicas.

2.1.2.5 Atividade 5 de ensino

**ATIVIDADE 5**

**TÍtulo:** Arranjo Simples

**Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de determinar o total de Arranjos.

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

**Procedimento:**

• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro 3.

**QUESTÕES**:

**01.** Uma escola tem quatro professores de matemática. Para participar de um projeto, devem ser indicados um professor chefe e um professor assistente.
- Com base nessa informação, de quantas maneiras distintas esses dois professores podem ser escolhidos?
**RESOLUÇÃO:**

**02.** Um torneio de futsal será disputado pelas seguintes seleções: **B**rasil, **I**tália, **E**spanha, **P**araguai e **A**rgentina. De quantas maneiras distintas o pódio (três primeiros colocados) poderá ser formado?
**RESOLUÇÃO:**

**03.** As finalistas do concurso Miss Universo, são Miss Brasil, Miss Japão, Miss Venezuela, Miss Itália e Miss França. De quantas formas os juízes poderão escolher a primeira e a segunda colocada neste concurso?
**RESOLUÇÃO:**

**04.** A senha de um celular é configurada por um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.

**TECLADO NUMÉRICO**

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** |
| **7** | **8** | **9** |
| | **0** | |

- Um professor que nasceu em **03/1978**, deseja criar uma senha com apenas três algarismos distintos (diferentes), dentre os que compõem o mês e ano de seu nascimento. Quantas senhas o professor poderia criar a sua disposição?
**RESOLUÇÃO:**

**05.** Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em duas paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede?
**RESOLUÇÃO:**

**06.** Maria deve criar uma senha de apenas 4 dígitos (algarismos) para sua conta bancária, somente com os algarismos 2, 4, 1, 9, 8 e 7 por representarem o dia e o ano de seu nascimento na ordem que aparecem e um mesmo algarismo não pode aparecer mais de uma vez (não pode haver repetição). De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?
**RESOLUÇÃO:**

**Quadro 5**

| Ques-tão | Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | |

Observação

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência das atividades anteriores. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta, P.F.C. ou Fórmula de Arranjo. O objetivo das questões propostas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula de Arranjo. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 5.

**QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O ARRANJO SIMPLES**

**01.** Visando obter mais informações sobre a denúncia de que uma tribo da região Amazônica estava sendo dizimada, um repórter recorreu a seu computador para acessar a Internet, entretanto não lembrou a senha de acesso, que era composta por três algarismos. Lembrava apenas que a senha era composta por três dos cinco algarismos: 1, 3, 5, 6 e 9. Para encontrar a senha, o repórter escreveu num papel todos os possíveis agrupamentos com esses algarismos. O número de agrupamentos escritos por esse repórter, na tentativa de encontrar a senha de acesso à Internet, é:
a) 120 b) 108 c) 84
d) 60 e) 56

**02.** Dez pontos são marcados num plano de modo que não existem 3 pontos colineares. O número máximo de quadriláteros que podemos construir utilizando esses pontos é:
a) 120 b) 210 c) 720
d) 2.100 e) 5.040

**03.** Pode-se permutar **m** objetos de 24 maneiras diferentes. Suponha que se pretenda arranjar esses **m** objetos dois a dois. Nesse caso, de quantas maneiras diferentes esses **m** objetos poderão ser arranjados?
a) 10 b) 12
c) 14 d) 16

**04.** Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contém os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é:
a) 2 160 b) 1 320
c) 1 440 d) 2 280

**05.** Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países , as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo : 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Argentina ; 3º lugar, Colômbia). Se , em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?
a) 69 b) 2.024 c) 9562
d) 12.144 e) 13.824

**06.** Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

ABC 1234 ABCD 123

- Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria
a) inferior ao dobro.
b) superior ao dobro e inferior ao triplo.
c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
d) superior ao quádruplo e inferior ao quíntuplo.
e) mais que o quíntuplo.

**07.** Uma loja de um shopping Center na cidade de Manaus divulga inscrições para um torneio de Games. Para realizar essas inscrições, a loja gerou um código de inscrição com uma sequência de quatro dígitos distintos, sendo o primeiro elemento da sequência diferente de zero. A quantidade de códigos de inscrição que podem ser gerados utilizando os elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} é

a) 4.500 b) 4.536 c) 4.684
d) 4.693 e) 5.000

**08.** Os clientes de um banco, ao utilizarem seus cartões nos caixas eletrônicos, digitavam uma senha numérica composta por cinco algarismos. Com o intuito de melhorar a segurança da utilização desses cartões, o banco solicitou a seus clientes que cadastrassem senhas numéricas com seis algarismos.

- Se a segurança for definida pela quantidade de possíveis senhas, em quanto aumentou percentualmente a segurança na utilização dos cartões?

a) 10% b) 90% c) 100%
d) 900% e) 1900%

**09.** Usando-se apenas as letras A, B, C e D e os algarismos do sistema decimal de numeração, o número de placas de automóveis usadas no Brasil (exemplo: BBA 0557) possíveis de serem formadas é no máximo igual a

a) 120000 b) 240000 c) 360000
d) 480000 e) 640000

**10.** A Série Arte e Matemática na escola, que será apresentada pela TV ESCOLA, no Programa Salto para o Futuro, é constituída por cinco programas que pretendem oferecer um espaço de reflexão, interação e discussão sobre as múltiplas relações matemáticas existentes nas diversas linguagens.

(Fonte:www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2002/ame/ameimp.htm

Considere que os programas acima sejam exibidos em três turnos: o primeiro pela manhã, o segundo pela tarde, e o terceiro pela noite. Então, o número de maneiras distintas que a sequência de programas pode ser exibida é:

a) 10 b) 30 c) 60
d) 80 e) 120

**11 -** Para se cadastrar em um site de compras, cada cliente digitava uma senha com quatro algarismos. Com o objetivo de aumentar a segurança, todos os clientes foram solicitados a adotar novas senhas com cinco algarismos. Se definirmos o nível de segurança com a quantidade possível de senhas, então a segurança nesse site aumentou em

a) 10% b) 25% c) 125%
d) 900% e) 1.100%

**12 -** Duas amigas foram a uma loja comprar guarda-chuvas. Na loja, havia apenas 5 guarda-chuvas do modelo desejado, cada um de uma cor diferente. Considerando que cada uma comprará apenas um guarda-chuva, o número de maneiras diferentes de elas escolherem seus guarda-chuvas é

a) 16. b) 18. c) 20.
d) 22. e) 24.

**13 -** Uma determinada agência bancária adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de 7 (sete) dígitos, em que os três primeiros dígitos são 3 (três) letras distintas e os quatro últimos dígitos são 4 (quatro) números distintos.

- Considerando o alfabeto de 26 (vinte e seis) letras e o conjunto de números de 0 (zero) a 9 (nove), o número possível de senhas distintas que podem ser criadas é:

a) $26! \times 10!$ b) $C_{26,3} \times C_{10,4}$

c) $A_{26,3} \times A_{10,4}$ d) $A_{36,7}$

e) $C_{36,7}$

**14 -** Supondo-se que do campeonato ilustrado na tirinha, apenas Mônica, Cebolinha, Magali, Cascão e Chico Bento tenham participado e que tenha ocorrido premiação apenas para os três primeiros colocados, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que essa premiação poderia ser distribuída é



01. 60 02. 68 03. 72
04. 84 05. 120

**15 -** Diante do caixa eletrônico de um banco, Mariana não conseguia lembrar-se da sua senha de seis dígitos. Lembrava-se , apenas dos dois primeiros (mês do seu nascimento ) e dos dois últimos ( sua idade atual). Supondo que levou cerca de um minuto em cada tentativa de completar a senha e que esgotou todas as alternativas distintas possíveis , somente acertando na última, Mariana retirou os reais desejados após cerca de ...

a) 1h 40min b) 1h 30min.

c) 1h 21min. d) 1h.

e) 45min

**16 -** A Série A do campeonato brasileiro de futebol é disputada por vinte equipes. De quantas formas, classificando o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, poderá ser concluído o campeonato? Observe que a classificação após o terceiro lugar não importa.

a) 60. b) 1140.

c) 2280. d) 6840.

**17 -** Nas Olimpíadas PUCRS 2009, foram inscritas 12 equipes de futsal feminino. O número de resultados diferentes para os dois primeiros colocados é:

a) 6 b) 12 c) 66

d) 132 e) 264

**18 -** De quantas maneiras diferentes é possível escolher o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, em uma competição artística da qual participam 15 pessoas, todos com a mesma chance de ganhar?

a) 45 b) 225

c) 455 d) 2730

**19 -** Se um alfabeto contém 6 vogais e 20 consoantes, qual o número máximo de palavras com 4 caracteres que se pode formar, contendo pelo menos uma consoante e pelo menos uma vogal?

a) 295678 b) 295680

c) 295682 d) 295684

e) 295686

**20 -** Em uma tribo indígena o pajé conversava com seu totem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra era formada por três batidas, sendo cada uma em um tambor diferente, pode-se afirmar que esse alfabeto possuía:

a) 10 letras. b) 20 letras.

c) 26 letras. d) 49 letras.

e) 60 letras.

2.1.2.6 Atividade 6 de ensino

**ATIVIDADE 6**

**Titulo:** Combinação Simples

**Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de determinar o total de Combinações Simples.

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

**Procedimento:**

Leia atentamente cada questão da lista de questões;

Resolva cada questão de lista;

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Nos jogos estudantis de uma escola, apenas quatro competidores se escreveram para disputar um campeonato de xadrez, em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?

**02.** Um teste consta de 5 questões, das quais o aluno deve escolher apenas duas para resolver. De quantas formas diferentes ele poderá escolher as duas questões?

**03.** Desejamos formar um trio de alunos entre os cinco melhores de um colégio, para representar a escola em uma gincana de matemática, na cidade. Quantos trios diferentes poderiam ser formados?

**04.** Seis amigos marcaram de se encontrar às 15 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada amigo cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?

**05.** Dos seis funcionários de uma empresa, quatro devem ser escolhidos para uma viajem. De quantas maneiras diferentes isso poderá ser feito?

**06.** Creuza deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em sua sapateira 7 pares, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher os pares de sapatos para a viagem?

**Quadro 6**

| Questão | Qual o número **n** de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos **p** devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial **(p!).** | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Observação:

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Após a leitura das seis questões é esperado que os alunos montem estratégias de resoluções e contamos com a lembrança/valorização das atividades anteriores. Talvez as resoluções ainda ocorram de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou ainda pela fórmula de Combinação. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula de Combinação. Esperamos dificuldades nas interpretações dos problemas para determinar o total de possibilidades e para institucionalização da fórmula. Acreditamos que a maioria dos alunos não irá perceber que a ordem dos elementos não importa no momento de configurar os agrupamentos. Fazendo a contagem dos grupos de forma excessiva.

**QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O COMBINAÇÃO SIMPLES**

**01.** Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.
**RESOLUÇÃO:**

**02.** Se existem 11 pessoas em uma sala e cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez, o número de apertos de mão dados será igual a
a) 55 b) 65
c) 110 d) 121

**03.** Formam-se comissões de três professores entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formados é:
A) 35 B) 45 C) 210
D) $7^3$ E) 7!

**04.** Numa congregação de 30 professores, 14 lecionam matemática, O número de comissões com 14 professores que podem ser formadas de modo que, em cada uma, tenha apenas um professor de matemática é
a) 7540 b) 7840
c) 8040 d) 8340

**05.** Um técnico de futebol de salão tem à disposição 8 jogadores de linha e 2 goleiros. Um time deve ter quatro jogadores de linha e um goleiro. O número de times distintos que o técnico pode escalar é:
a) 60 b) 70 c) 80
d) 120 e) 140

**06.** Por ocasião dos festejos da Semana da Pátria, uma escola decidiu exibir seus melhores atletas e as respectivas medalhas. Desses atletas, em número de oito e designados por $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_8$, serão escolhidos cinco para, no momento do desfile, fazerem honra à Bandeira Nacional. Do total de grupos que podem ser formados, em quantos o atleta $a_2$ estará presente?
**RESOLUÇÃO:**

**07.** Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.
A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de
a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.
**RESOLUÇÃO:**

**08.** Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

| Museus Nacionais | Museus Internacionais |
|---|---|
| **Masp** – São Paulo | **Louvre** – Paris |
| **MAM** – São Paulo | **Prado** – Madri |
| **Ipiranga** – São Paulo | **British Museum** – Londres |
| **Imperial** – Petrópolis | **Metropolitan** – Nova York |

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?
**RESOLUÇÃO:**

**09.** Durante uma viagem, foram sorteados, entre os 300 passageiros do navio, três brindes, que eram viagens para 3 diferentes lugares. Pelo critério da empresa, a pessoa que ganhasse um brinde era eliminada para o outro sorteio Dessa forma, o número de maneiras distintas de realização do sorteio é dado por:
a) $A_{300}^{3}$ b) $C_{300,3}$ c) $300^3$
d) 300! e) $C_{300}^{3}.C_{299}^{2}.C_{298}^{3}$

**10.** Maria tinha 6 palpites de números para jogar no concurso da MEGASENA (6 números) da Caixa econômica Federal. Quantas cartelas (jogos) ela conseguirá formar?
**RESOLUÇÃO:**

**11.** Uma empresa realizou um concurso para preencher 2 vagas de agente administrativo, 3 para técnico em informática, e 1 para serviços gerais. Dos candidatos inscritos, 8 concorreram ao cargo de agente administrativo, 10 ao de técnico em informática e 7 ao de serviços gerais. Qual das alternativas abaixo, indica o número de maneiras distintas que estas vagas podem ser preenchidas pelos candidatos?
**RESOLUÇÃO:**

**12.** A graviola é uma fruta que possui diversos nutrientes, como as Vitaminas C, B1 e B2 e os Sais Minerais: Cálcio, Fósforo, Ferro, Potássio e Sódio. Uma indústria química deseja fabricar um produto a partir da combinação de 4 daqueles nutrientes, entre vitaminas ou sais minerais, encontrados na graviola. A quantidade de produtos que poderá ser fabricada, se forem utilizados no máximo 2 tipos de vitaminas, será de
a) 26 b) 30 c) 32
d) 60 e) 65

**13.** Um fisioterapeuta recomendou a um paciente que fizesse, todos os dias, três tipos diferentes de exercícios e lhe forneceu uma lista contendo sete tipos diferentes de exercícios adequados a esse tratamento. Ao começar o tratamento, o paciente resolve que, a cada dia, sua escolha dos três exercícios será distinta das escolhas feitas anteriormente. O número máximo de dias que o paciente poderá manter esse procedimento é
A) 35 B) 38 C) 40
D) 42 E) 60

**14.** Na agenda de um médico, há dez horários diferentes disponíveis para agendamento de consultas, mas ele irá disponibilizar dois desses horários para o atendimento de representantes de laboratórios. O número de maneiras diferentes que esse médico poderá escolher os dois horários para atender os representantes é
a) 40. b) 43. c) 45.
d) 38. e) 35.

**15.** Maria foi a uma lanchonete que oferece seis frutas diferentes para o preparo de sucos (laranja, maracujá, morango, abacaxi, acerola e goiaba) e permite que o cliente escolha duas frutas diferentes para o preparo de cada suco. Sabendo que Maria não mistura goiaba com outras frutas e não gosta de morango com acerola, o número de maneiras diferentes de Maria escolher as duas frutas para o seu suco é

a) 6. b) 7. c) 8.
d) 9. e) 10.

**16.** Em uma sala estão presentes n pessoas, com n>3. Pelo menos uma pessoa da sala não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala, e os demais presentes trocaram apertos de mão entre si, e um único aperto por dupla de pessoas. Nessas condições, o número máximo de apertos trocados pelas n pessoas é igual a

a) $\frac{n^2+3n-2}{2}$ b) $\frac{n^2-n+2}{2}$ c) $\frac{n^2+2n-2}{2}$

d) $\frac{n^2-3n+2}{2}$ e) $\frac{n^2-n-2}{2}$

**17.** Um farmacêutico dispõe de 3 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais. Deseja combinar 3 desses nutrientes para obter compostos químicos.

- O número de compostos químicos distintos que poderá ser preparado usando, no máximo, duas vitaminas é igual a

a) 9 b) 10 c) 18
d) 19 e) 20

**18.** Para aumentar as chances de ganhar no sorteio da mega-sena da virada, um grupo de dez amigos se juntou e fez todos os jogos possíveis de seis “dezenas” diferentes, escolhidas dentre quinze “dezenas” distintas previamente escolhidas. Qual o total de jogos que foram realizados por este grupo de amigos?

a) 5.000 b) 5.005 c) 5.010
d) 5.015 e) 5.020

**19.** Os sintomas mais comuns do vírus ebola são febre, diarreia, dores de cabeça, fraqueza, dor de garganta, dores nas articulações e calafrios. Em um hospital, depois que alguns pacientes foram examinados, constatou-se que cada um deles tinha exatamente três dos sete sintomas desse vírus, mas quaisquer dois deles não apresentavam os mesmos três sintomas.

- A partir dessas informações, infere-se que o número máximo de pacientes examinados foi

a) superior a 30 e inferior a 40.
b) superior a 40.
c) inferior a 20.
d) superior a 20 e inferior a 30.

**20.** Geralmente os alunos que terminam o Ensino Médio fazem uma festa de formatura, e durante o ano esses alunos realizam bingos, festas, etc para arrecadar fundos para a festa. Em uma escola há somente uma turma com 20 alunos, que se reuniram para formar uma comissão com 3 membros.

- Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que a líder da classe terá de fazer parte do grupo?

### 2.1.2.7 Atividade 7 de ensino

**ATIVIDADE 7**

**Titulo:** Permutação com Repetição

**Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de determinar o total de Permutações com repetição.

**Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

**Procedimento:**

• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

**QUESTÕES**

**01.** Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ANA?

**02.** Um aluno, que nasceu em 1999, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

**03.** Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?

**04.** Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra ERRAR?

**05.** De quantas maneiras distintas podem-se alinhar duas estacas azuis idênticas e duas branca também idênticas?

**06.** De quantas formas três sinais de + (mais) e dois sinais de – (menos), podem ser colocados **entre** os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ficando cada um entre dois algarismos (Exemplo: 1 + 2 + 3 + 4 – 5 – 6)?

**Quadro 7**.

| Situa-ção | Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual o número de etapas **p** (escolhas para realizar o evento) indepen-dentes no evento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Quantos elementos repetidos aparecem em cada situação? | Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatorial. | Qual o número de possibilidades da | | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | |

Observação:

Conclusão:

**ANÁLISE A PRIORI:**

Ao lerem as oito atividades esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência das atividades anteriores. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta, P.F.C ou permutação dos elementos. Esperamos dificuldades nas interpretações dos problemas para determinar o total de possibilidades, devido eles não perceberem que a permutação entre os elementos repetidos não importa e se o fizerem montarão agrupamentos repetidos, em excesso. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da Permutação com repetição. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 7.

**QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA A PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO E PERMUTAÇÃO CIRCULAR**

01. Quantos números de cinco algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?

02. Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, o total de anagramas que poderiam ser formados é de:

a) 36 b) 24 c) 18

d) 12 e) 6

03. Quantos anagramas distintos com as letras da palavra PINDAMOIANGABA podemos formar?

04. Quantos anagramas com a palavra ARARA?

05. É do grande poeta português Fernando Pessoa a belíssima frase

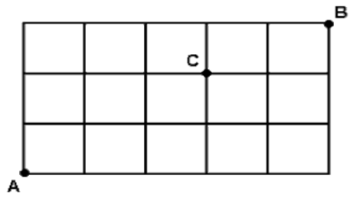
"Tudo vale a pena se a alma não é pequena"

Tomados pelo espírito dessa frase, queremos formar novas sequências de palavras, permutando-se as palavras do verso, indiferentemente de constituir ou não frases, Por exemplo: "A pena não vale tudo se pequena é a alma" ou "A a é pena não se vale pequena tudo alma". É correto afirmar que o número de sequências distintas de palavras que se pode construir, utilizando-se todas as dez palavras, é igual a

a) 453.600 b) 907.200 c) 1.814.400

d) 3.628.800 e) 7.257.600

06. No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões.

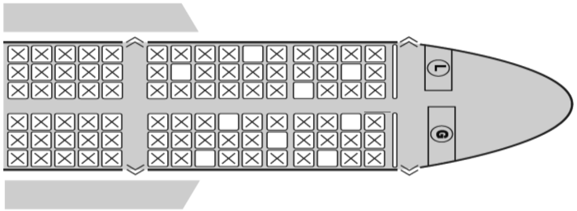



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é:

a) 12 c)15 e) 30

b) 13 d)24

07. Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net.

Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

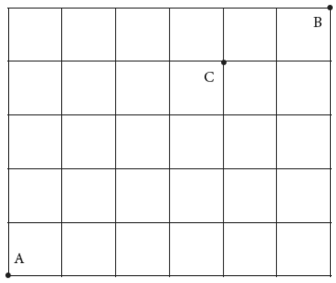
a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\times 2!}$ c) 7!

d) $\frac{5!}{2!}\times 4!$ e) $\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}$

08. Durante a aula de matemática, o professor colocou as 30 cadeiras em círculos e pediu para que os 30 alunos se sentassem. De quantos modos diferentes eles podem fazer esse círculo?

09. Uma roda Gigante é constituída de 15 acentos duplos. Assim sendo de quantos modos podemos dispor 15 casais nesse Brinquedo de modo que sempre cada casal permaneça junto?

10. A figura a seguir supostamente representa o mapa da cidade onde se encontra Paulo, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção Leste-Oeste. Se na praça localizada no ponto B ocorre uma manifestação pacífica, organizada por estudantes, e Paulo encontra-se no ponto A, quantos são os trajetos de comprimento mínimo que Paulo pode escolher, a fim de participar dessa manifestação, se ele deseja passar antes na casa do seu tio, que se encontra localizada no ponto C? Assinale a alternativa que contenha a resposta correta:




a) 13 possibilidades

b) 462 possibilidades

c) 70 possibilidades

d) 210 possibilidades

## 3 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção nosso objetivo é descrever os encontros que tivemos com uma turma, da 1ª série do Ensino Médio, turno matutino, situado no município de Vigia de Nazaré, localizado no Nordeste Paraense, na região do Salgado. As atividades e os testes mostrados anteriormente foram trabalhados entre os meses de Maio e Junho de 2017, em uma turma com 40 alunos matriculados, mas contamos com a participação de 32 alunos (os outros oito não participaram do pós-teste). Apesar de estarem no 1º ano do ensino médio, o conteúdo Análise Combinatória é abordado logo nesta série, o que contraria a maioria das escolas, que ensinam o conteúdo apenas no 2º ano do ensino médio.

Durante a aplicação da sequência tivemos problema com alguns horários. Primeiramente tínhamos planejado fazê-los as sextas e sábados, mas logo na primeira sexta-feira que nos encontramos, resolvemos esperar os alunos trazerem os termos de consentimentos que foram preenchidos pelos pais e deixamos de lado o primeiro sábado. Na outra semana, não houve aula na sexta-feira, devido uma reunião entre os professores da escola, o que nos pegou de surpresa, então, resolvemos dispensar o sábado, dia seguinte. Conseguimos passar a primeira atividade no dia nove de Junho (sexta feira), já no dia dez de Junho (sábado), ficamos impossibilitados de passar a segunda atividade, devida a uma programação de festa junina na escola. No dia 15 de Junho (quinta-feira) foi feriado e a escola não funcionou também na sexta-feira, ainda tentamos marcar aula no sábado da mesma semana, só que apareceram apenas cinco alunos, fazendo com que a segunda atividade fosse adiada mais uma vez. Com isso, resolvemos mudar de estratégia e o professor Marcos foi verificar junto aos outros doscentes qual deles poderia disponibilizar suas aulas para aplicação do projeto. Alguns não cederam devidos estarem em atividades avaliativas, mas felizmente conseguimos algumas aulas sendo possível realizar o pré-teste, seis atividades e finalizar com o pós-teste, suprimindo a sétima atividade que seria sobre Permutação com Elementos Repetidos.

Para registro das atividades utilizamos um caderno de anotações, câmera de vídeo e o gravador do celular, que serviu para socializar, em alguns momentos, os questionamentos dos alunos durante as atividades. A sequência foi desenvolvida na sala de aula, quase sempre nos últimos horários da manhã, o que causava a inquietação por partes de alguns alunos que viam outras turmas saindo. Apesar deste fato, considero que a maioria dos estudantes se dedicou, agiu de forma respeitosa durante as aulas e se sentiram a vontade em participar do estudo.

O quadro a seguir apresenta os dias e horários que as atividades foram desenvolvidas.

**Quadro 13 -** Roteiro das Atividades.

| Data | Sessão | Atividade desenvolvida | Horário |
|---|---|---|---|
| 26.05.2017 | 1ª | Pré-teste | 10:20 às 12:00 |
| 09.06.2017 | 2ª | P.F.C. | 10:20 às 12:00 |
| 21.06.2017 | 3ª | Fatorial | 10:20 às 12:15 |
| 22.06.2017 | 4ª | Permutação simples | 08:20 às 10:00 |
| 22.06.2017 | 5ª | Diferença entre arranjo e combinação | 10:20 às 12:00 |
| 23.06.2017 | 6ª | Arranjo simples | 10:20 às 12:00 |
| 26.06.2017 | 7ª | Combinação simples | 10:20 às 12:00 |
| 28.06.2017 | 8ª | Pós-teste | 08:00 às 09:30 |

Fonte: Pesquisa de campo (Maio e Junho de 2017)

A seguir apresentamos a descrição de cada encontro que tivemos com a turma.

## 3.1 PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro ocorreu no dia 26 de Maio de 2017 (sexta-feira) às 10h20min, com o professor Marcos nos apresentando à turma e explicando que faríamos uma pesquisa de campo, em nível de mestrado, relacionada com o assunto Análise Combinatória, conteúdo que faz parte da grade curricular do 1º ano do ensino médio, na escola. O professor deixou claro também, que a participação dos estudantes durantes as atividades, pré-teste e pós-teste, serviria para avaliá-los, contando ponto para a disciplina MATEMÁTICA 2. Após esse momento assumimos a turma, agradeci a participação de todos e expliquei que neste dia faríamos a aplicação de um questionário seguido de dez questões, que serviriam para verificar os conhecimentos dos discentes sobre o assunto abordado e que estratégias eles usariam para resolvê-las, ou seja, se eles apresentavam algum raciocínio combinatório. Pedi que ficassem bem à vontade para fazer perguntas, caso houvesse alguma dúvida e que tentassem fazer o possível para resolver as dez questões buscando o caminho que achasse mais conveniente. E que ao final, assim que fossem me entregando o pré-teste, entregaríamos o termo de livre consentimento que deveria ser preenchido pelos pais, liberando-os a participar da pesquisa e consentindo o direito de filmá-los e gravá-los.

Com a ajuda do professor Marcos, organizamos os alunos em filas verticais, demos início ao pré-teste que começou às 10h40min e terminou ás 12h, quando o último aluno entregou. Contamos com a participação de todos os 38 alunos que estavam em sala sem objeção e neste primeiro encontro, não usamos gravador, mas queríamos destacar uma pergunta feita, relacionada às dez questões sobre Análise Combinatória, que depois se repetiu (de forma parecida) por parte de uma minoria. A pergunta foi: “Professor, posso fazer montando?”. A seguir identificaremos o perfil dos alunos pesquisados.

### 3.1.1 Perfil dos Alunos

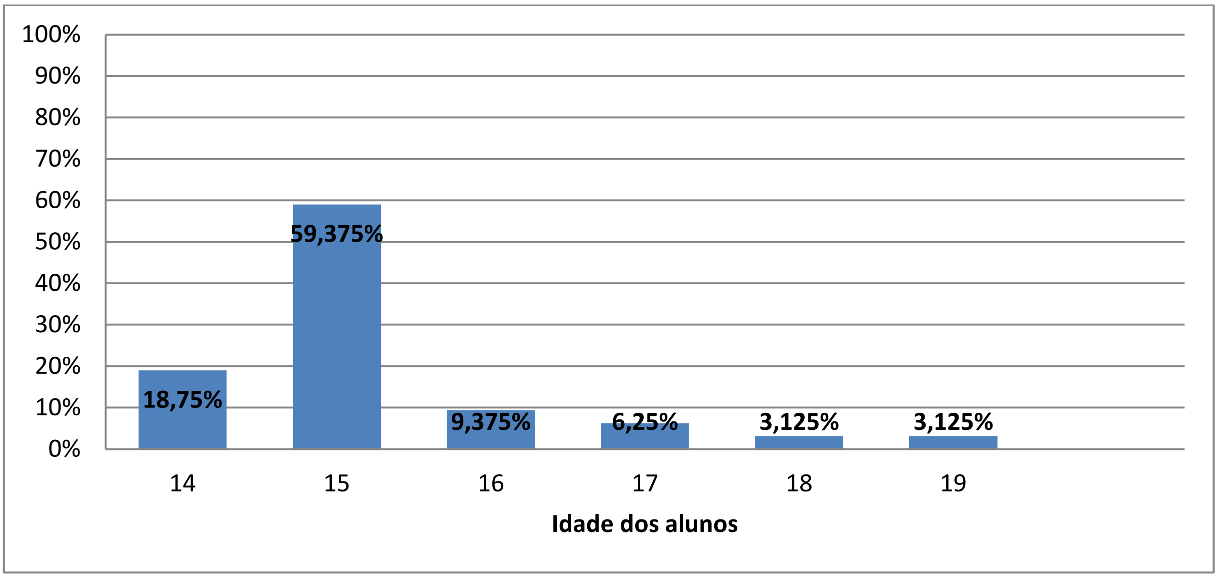
No questionário, buscamos identificar aspectos econômicos, sociais, familiares e estudantis, este último focando na relação do aluno com a disciplina Matemática. A seguir, apresentaremos o perfil socioeconômico sobre os 32 alunos investigados, que participaram do pré-teste ao pós-teste e faremos comparações com os perfis encontrados nas pesquisas de Santos (2013) e Silva (2014), que também investigaram alunos do 1º ano do ensino médio.

**Gráfico 13 -** Distribuição dos alunos por idade.

| Idade | Frequência | % |
|---|---|---|
| **14** | 6 | 18,75% |
| **15** | 19 | 59,375% |
| **16** | 3 | 9,375% |
| **17** | 2 | 6,25% |
| **18** | 1 | 3,125% |
| **19** | 1 | 3,125% |
| **Total** | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Quadro 14 -** Distribuição dos alunos por idade.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

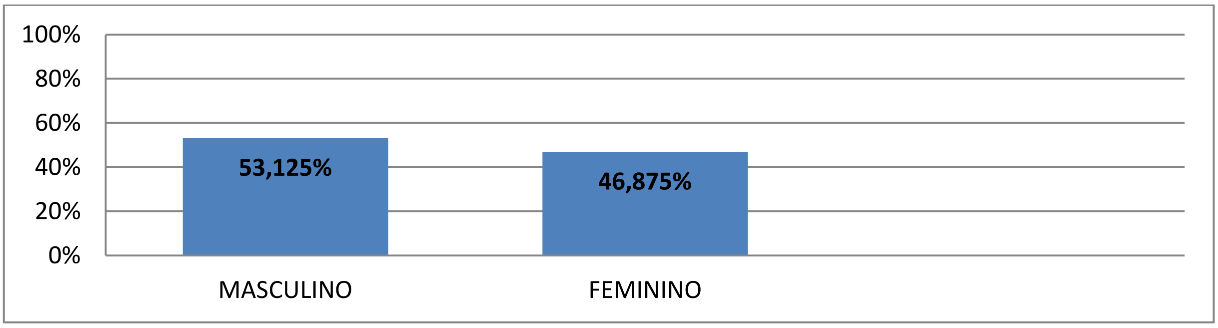
Nos dados acima, podemos verificar que a maioria dos alunos, aproximadamente, 60% possui 15 anos e que pouco mais de 21% estão com a idade acima da prevista para a série, já que pela lei 9.394/1996, o jovem deve estar com 15 anos, no 1º ano do ensino médio. E 12,5 % dos alunos estão com distorção idade-série, haja vista que, a diferença entre a idade prevista para a série e a atual dos alunos é de dois ou mais anos.

**Quadro 15 -** Distribuição dos alunos por gênero.

| Gênero | Frequência | % |
|---|---|---|
| **Masculino** | 17 | 53,125% |
| **Feminino** | 15 | 46,875% |
| **Total** | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 14 -** Distribuição dos alunos por gênero.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

Quanto ao gênero dos alunos, podemos perceber que a turma está praticamente dividida ao meio, com uma pequena vantagem para o público masculino com 53,125%, dois alunos a mais que o público feminino.

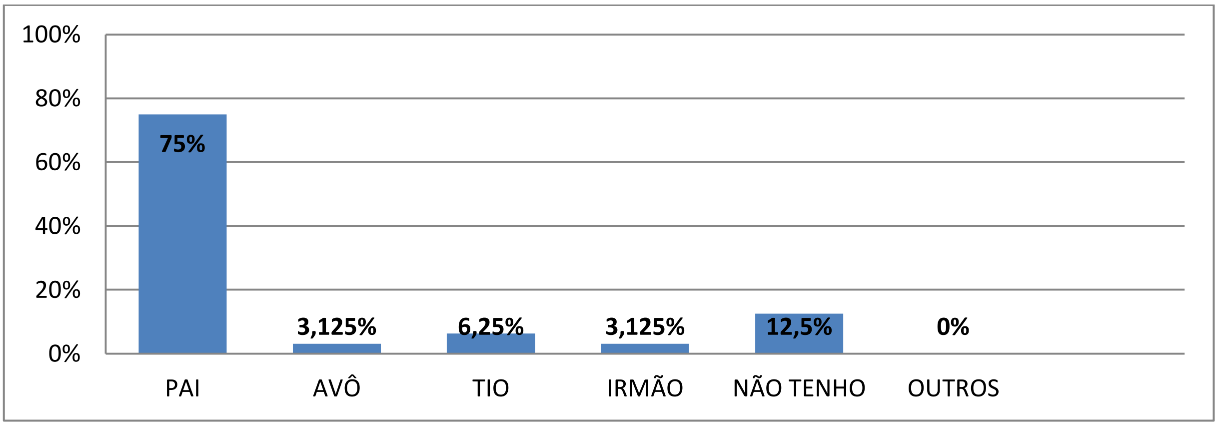
Em nossa pesquisa, na de Santos (2013) e em Silva (2014), temos certo equilíbrio entre a quantidade de alunos do sexo masculino e feminino, com uma pequena diferença de 13,4% a mais para as mulheres em Santos (2013, p. 181), em Silva (2014, p. 126) essa diferença é de 10% a mais também para as mulheres, enquanto que em nossa pesquisa a quantidade de alunos do sexo masculino foi superior, com uma diferença 6,25% em relação ao sexo feminino. Um fato curioso é que em nossa amostra apenas 21,875% estão com idade acima da prevista para a série, na pesquisa de Santos (2013, p. 181) esses números são maiores tendo 50% dos alunos com idade acima da prevista para a série, ou seja, metade dos alunos e em Silva (2014, p. 125) 75% dos alunos estão com a idade acima da prevista para a série, um valor bastante significativo.

**Quadro 16 -** Distribuição dos responsáveis masculinos.

| Responsável masculino | Frequência | % |
|---|---|---|
| Pai | 24 | 75% |
| Avô | 1 | 3,125% |
| Tio | 2 | 6,25% |
| Irmão | 1 | 3,125% |
| Não tenho | 4 | 12,50% |
| Outros | 0 | 0% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 15 -** Distribuição dos alunos por responsável masculino.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

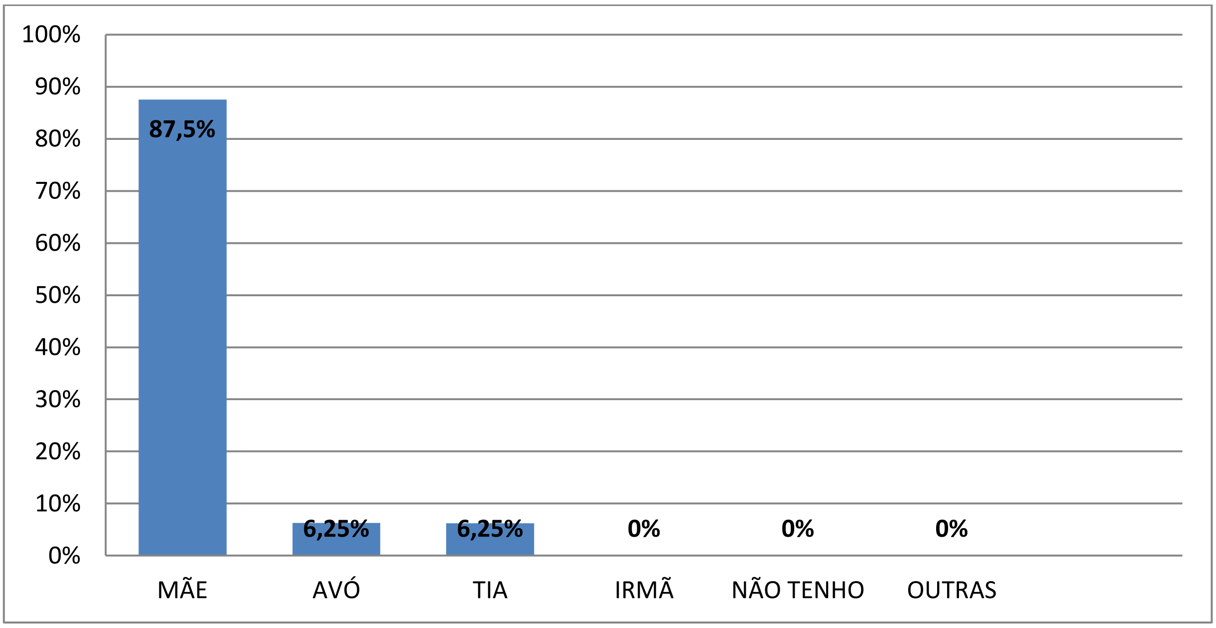
Sobre o responsável masculino, verificamos que, a grande maioria (75%) tem como responsável o pai, a quantidade dos outros responsáveis juntos não chegam a 15% e que alguns alunos não possuem a figura do responsável masculino (12,5%).

**Quadro 17 -** Distribuição dos alunos por responsável feminino.

| **Responsável feminino** | **Frequência** | **%** |
|---|---|---|
| Mãe | 28 | 87,50% |
| Avó | 2 | 6,25% |
| Tia | 2 | 6,25% |
| Irmã | 0 | 0% |
| Não tenho | 0 | 0% |
| Outras | 0 | 0% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 16 -** Distribuição dos alunos por responsável feminino.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

Quanto ao responsável feminino, 87,5% deles tem a mãe como responsável, o restante possui a tia ou a avó sobre seus cuidados.

De modo geral, em relação aos responsáveis dos alunos, podemos verificar que predomina a responsabilidade dos pais em cuidá-los e que todos os alunos têm uma figura feminina assumindo a responsabilidade por eles.

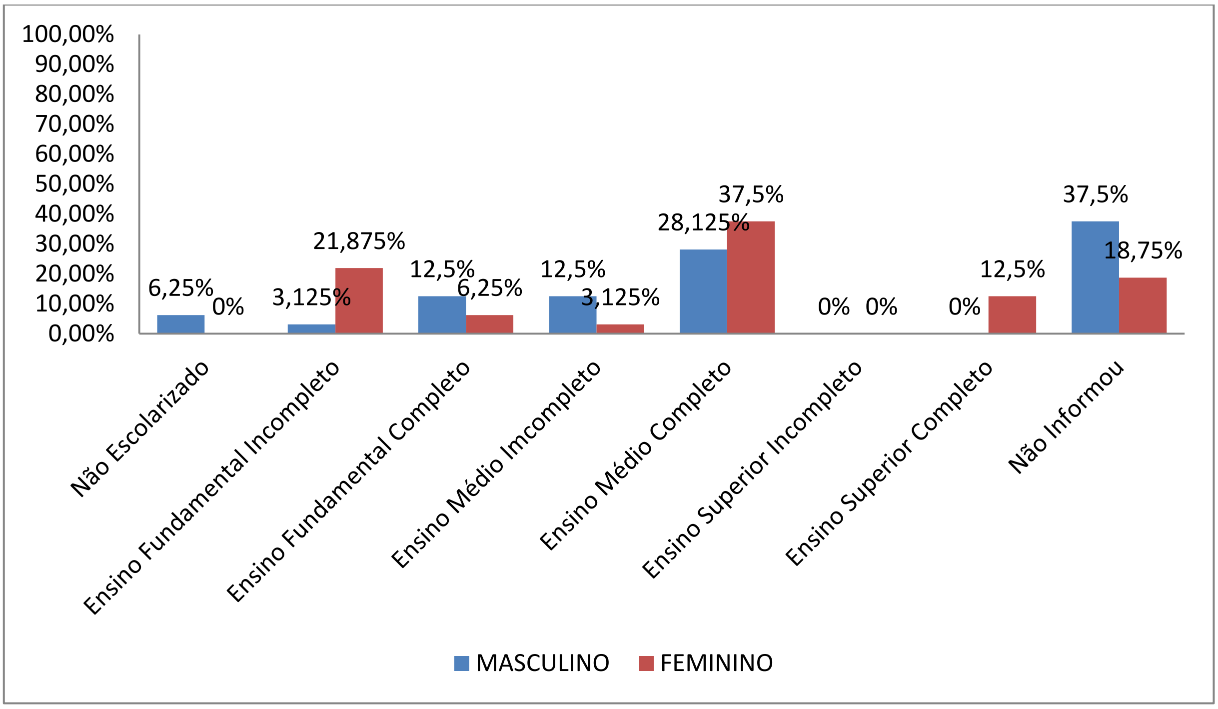
Na pesquisa de Santos (2013, p. 182 e 183), podemos observar que poucos alunos tem a presença do responsável masculino, aproximadamente 34% deles e que 70% ainda estão sobre a responsabilidade da mãe. Já em Silva (2014 p. 126 e 127) os alunos não tiveram a opção de marcar pai e mãe como responsável, ou seja, se escolhia um ou outro e foi verificado que 10% indicaram a mãe como responsável e um grande percentual (75%) revelou que tem o pai como responsável. Nas três pesquisas poucos ficam sobre a responsabilidade de outras pessoas.

**Quadro 18 -** Até que série estudou seu responsável?

| Série | MASCULINO | % | FEMININO | % |
|---|---|---|---|---|
| Não escolarizado | 2 | 6,25% | 0 | 0% |
| Ensino Fundamental Incompleto | 1 | 3,125% | 7 | 21,875% |
| Ensino Fundamental Completo | 4 | 12,50% | 2 | 6,25% |
| Ensino Médio Incompleto | 4 | 12,50% | 1 | 3,125% |
| Ensino Médio Completo | 9 | 28,125% | 12 | 37,50% |
| Ensino Superior Incompleto | 0 | 0% | 0 | 0% |
| Ensino Superior Completo | 0 | 0% | 4 | 12,50% |
| Não Informou | 12 | 37,50% | 6 | 18,75% |
| Total | 32 | 100% | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 17 -** Até que série estudou seu responsável.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

Sobre a escolaridade dos responsáveis, temos que 34,375% dos responsáveis masculinos não chegaram a completar o ensino médio, nenhum deles chegou a cursar o nível superior e muitos alunos (37,5%) não sabem até que série seus responsáveis estudaram. Além disso, temos dois responsáveis masculinos que foram indicados pelos alunos como analfabetos. Quanto ao responsável feminino, verificamos que 50% concluíram o ensino médio e que aproximadamente 20% não sabe a escolaridade desse responsável. De modo geral, sobre a escolaridade dos 64 responsáveis, podemos constatar que menos de 10% conseguiram estudar no nível superior e que apenas, cerca de 39% conseguiram concluir o ensino médio.

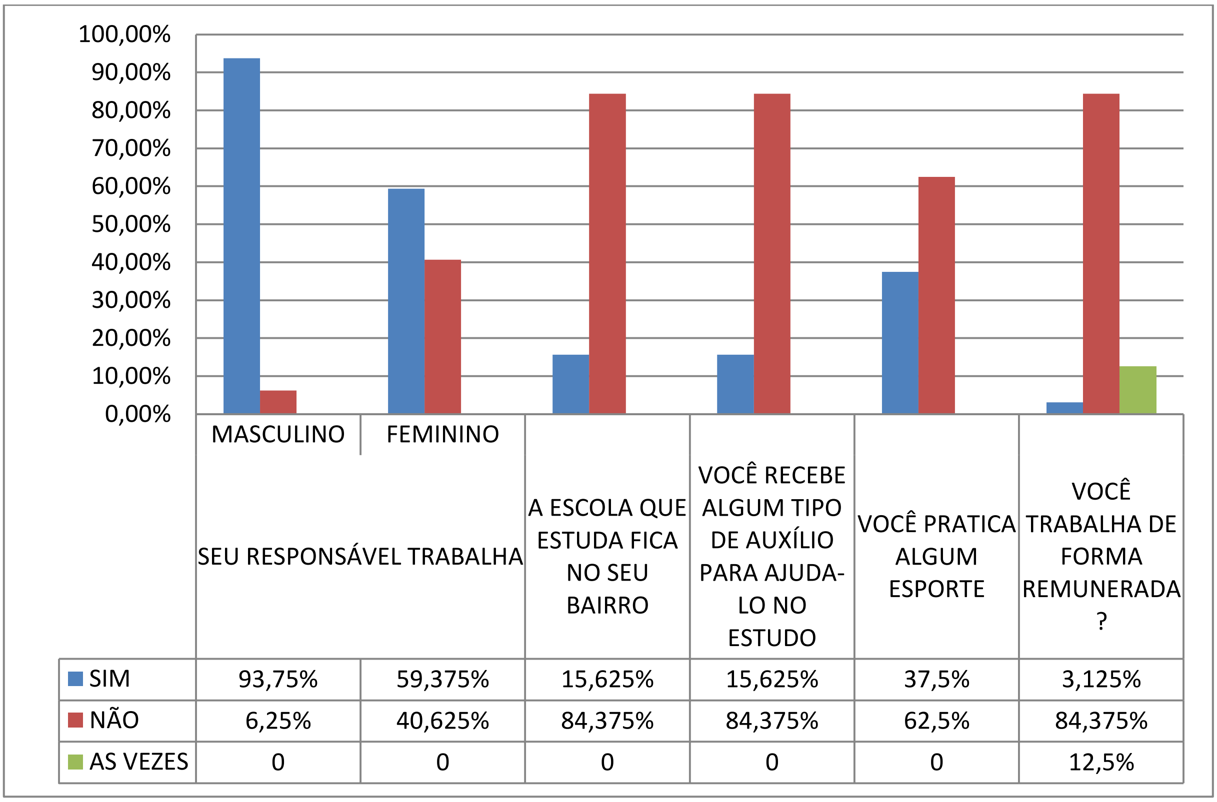
De modo geral, se compararmos nossa pesquisa com a de Santos (2013, p. 183), sobre a escolaridade dos responsáveis, podemos verificar nas duas pesquisas que aproximadamente um terço deles completou o ensino médio, pouquíssimos não são escolarizados e outra pequena parcela chega ao nível superior. Já Silva (2014, p. 127) se limitou a perguntar se o responsável possuía ou não o ensino médio completo e apenas 35% deles assinalaram que completaram o ensino médio, um responsável do sexo feminino e seis do sexo masculino.

**Quadro 19 -** Seu responsável trabalha, a escola que estuda é no bairro em que mora, recebe algum tipo de auxílio para ajudar nos estudos, pratica algum esporte e trabalha de forma remunerada.

| | Seu responsável trabalha? | | A escola que você estuda, fica no seu bairro? | Você recebe algum tipo de auxílio para ajuda-lo nos estudos | Você pratica algum esporte? | Você trabalha de forma remune-rada? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Masculino | Feminino | | | | |
| Sim | 30 | 19 | 5 | 5 | 12 | 1 |
| Não | 2 | 13 | 27 | 27 | 20 | 27 |
| Às Vezes | - | - | - | - | - | 4 |
| Total | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 18 -** Seu responsável trabalha, a escola que estuda é no bairro em que mora, recebe algum tipo de auxílio para ajudar nos estudos, pratica esporte e trabalha de forma remunerada.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Os alunos informaram que quase todos os responsáveis masculinos trabalham, com apenas 6,25% estando desempregados; já o responsável feminino podemos verificar que muitas não estão empregadas, mais de 40%.

A maioria dos alunos não estudam no mesmo bairro da escola (talvez isso seja até uma justificativa para as faltas durante as aulas), não recebe algum tipo de auxílio para ajudá-los nos estudos e não trabalham de forma remunerada, todos esses dados com 84,375% dos alunos. E que a prática de esporte também é pouco corriqueira, a maioria (62,5%) não se exercita.

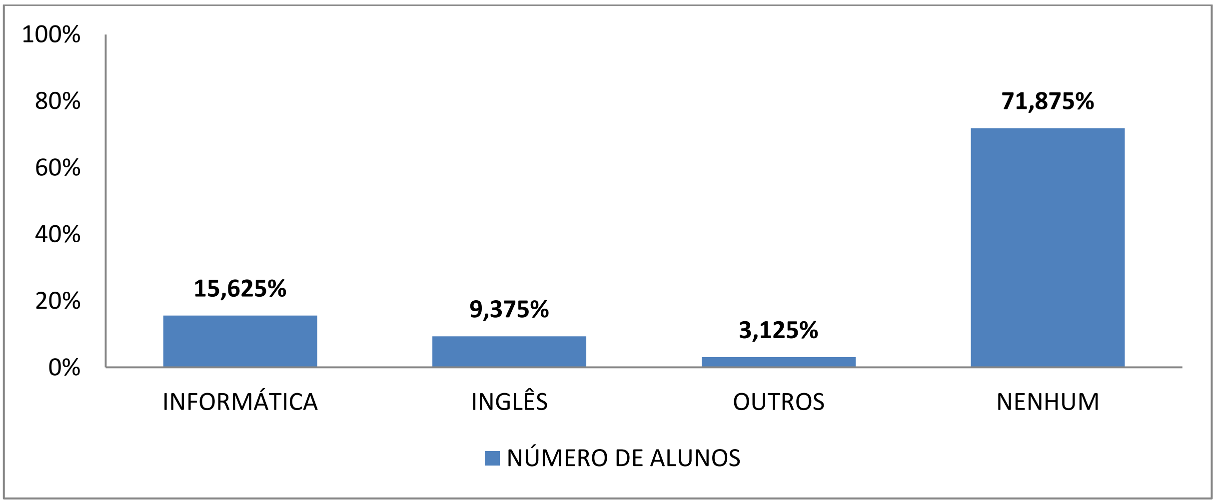
Em Santos (2013, p. 184), podemos verificar que a maioria dos responsáveis estão trabalhando 83,3%, em Silva (2014, p. 128) foi mostrado que apenas metade dos responsáveis estão exercendo atividade remunerada, enquanto que em nossa amostra, em média, temos cerca de 77% dos responsáveis trabalhando. Observando se os alunos estudam perto da escola, podemos constatar um fato curioso, em Santos (2013, p. 186) 90% dos educandos estudam em uma escola no bairro onde moram e em nossa amostra aproximadamente 90% não moram no mesmo bairro da escola que estudam. Na pesquisa de Santos (2013, p. 187), metade dos alunos praticam esporte, enquanto que nossa amostra se mostrou mais sedentária, apenas 37,5% faz alguma atividade esportiva. Em nossa pesquisa e na de Santos (2013, p. 184 e 185), aproximadamente, 84% dos alunos não trabalham de forma remunerada, nos resultados de Silva (2014, p. 129), esses números chegam a 60%.

**Quadro 20 -** Você faz algum curso.

| Curso | Frequência | % |
|---|---|---|
| Informática | 5 | 15,625% |
| Inglês | 3 | 9,375% |
| Outros | 1 | 3,125% |
| Nenhum | 23 | 71,875% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 19 -** Você faz algum curso.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

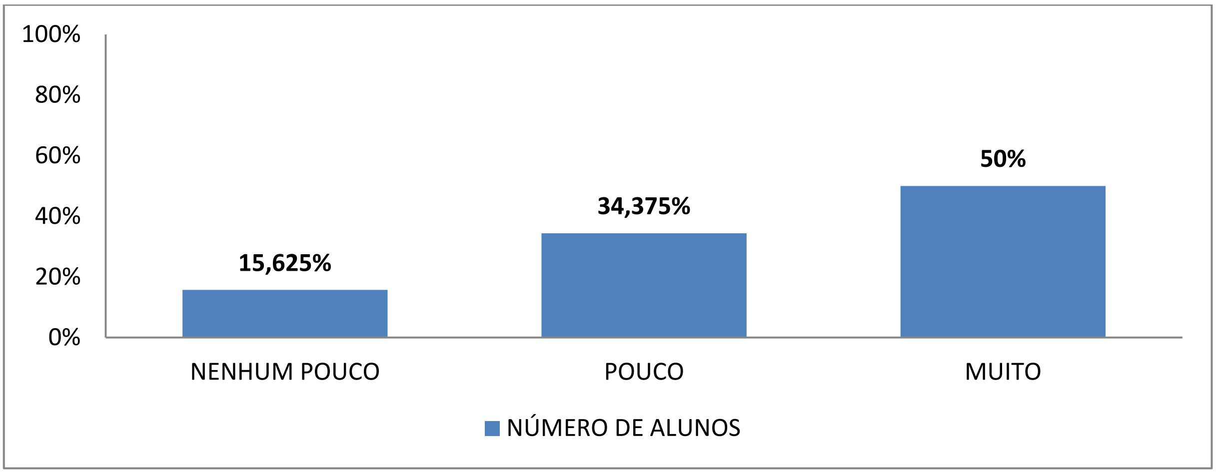
O gráfico 19 acima, que representa nossa amostra, revela que poucos alunos se envolvem em atividades extracurriculares de estudo, apenas pouco mais de 28%, sendo a informática procurada por 15,625% deles. E que 71,875% não fazem nenhum curso. Em Santos (2013, p. 187), aproximadamente 44% dos alunos fazem algum curso fora da escola. Nas duas pesquisas, a maioria dos estudantes não fazem cursos extracurriculares. Já em Silva (2014, p. 131), mais da metade fazem algum curso externo, chegando a 55% dos alunos.

**Quadro 21 -** Gosto pela matemática.

| Você gosta de matemática? | Frequência | % |
|---|---|---|
| Nenhum pouco | 05 | 15,625% |
| Pouco | 11 | 34,375% |
| Muito | 16 | 50% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 20 -** Você gosta de matemática.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

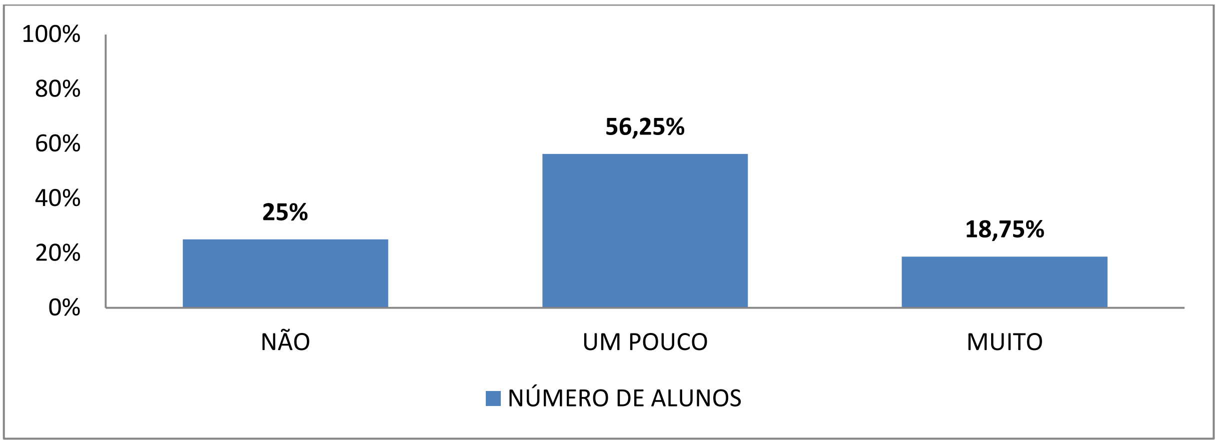
Os dados anteriores mostram, em nossa pesquisa, um número expressivo de alunos que gostam no mínimo um pouco de matemática (84,375%) e apenas 15,625% não gosta da disciplina. Essas informações foram confirmadas durante as aulas, pelo retorno e participação que a turma nos deu durante os encontros. Na pesquisa de Santos (2013, p. 189), a quantidade de aluno que gosta pelo menos um pouco de matemática é superior ao da nossa pesquisa, com 96,7% deles fazendo essa afirmação. Em Silva (2014, p. 132), 25% dos discentes não gostam da disciplina e o restante gosta pelo menos um pouco.

**Quadro 22 -** Dificuldade para aprender matemática.

| Dificuldade para aprender matemática? | Frequência | % |
|---|---|---|
| Não | 8 | 25% |
| Um pouco | 18 | 56,25% |
| Muito | 6 | 18,75% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 21 -** Você tem dificuldade para aprender matemática.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

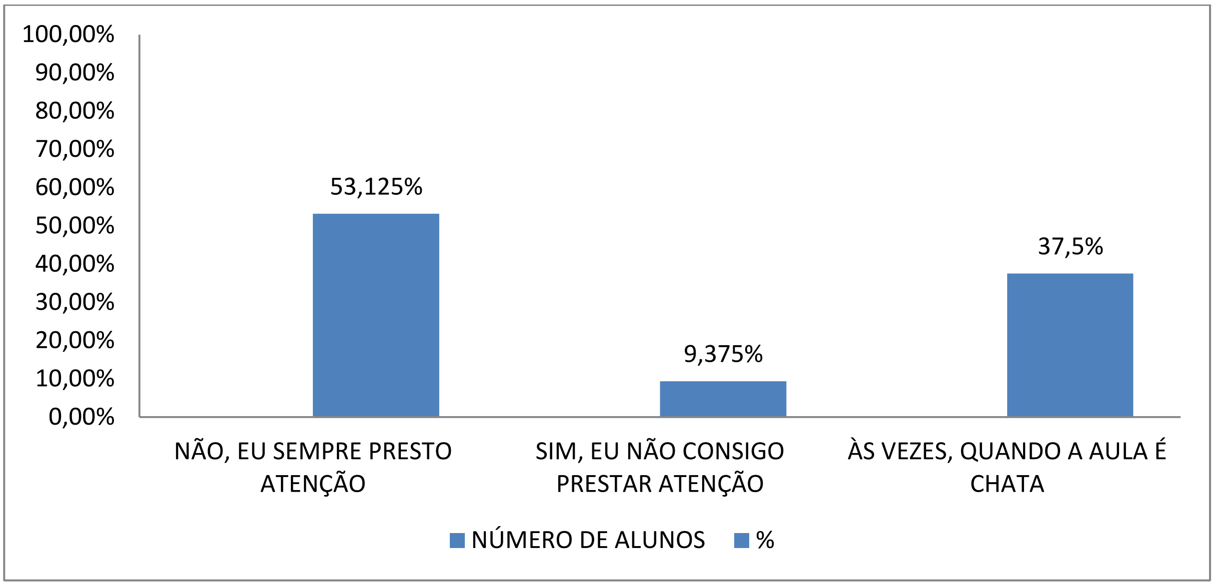
Neste caso, a minoria dos alunos, de nossa pesquisa, tem muita dificuldade em aprender matemática, menos de 20% e a maioria tem pouca ou nenhuma dificuldade, aproximadamente 81% dos alunos. Os resultados da pesquisa mostraram tal realidade nessa turma. Assim como em nossa pesquisa, em Santos (2013, p. 190), a minoria dos estudantes também tem muita dificuldade em matemática, apenas 10% deles, uma diferença percentual de cerca de 10% se as compararmos. Em Silva (2014, p. 133), também a quantidade de alunos com dificuldade na disciplina é pequena, próxima da nossa realidade, 20% deles.

**Quadro 23 -** Distração nas aulas de matemática.

| Você se distrai nas aulas de matemática? | Frequência | % |
|---|---|---|
| Não, eu sempre presto atenção. | 17 | 53,125% |
| Sim, eu não consigo prestar atenção. | 3 | 9,375% |
| Às vezes, quando a aula é chata. | 12 | 37,50% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 22 -** Você se distrai nas aulas de matemática.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

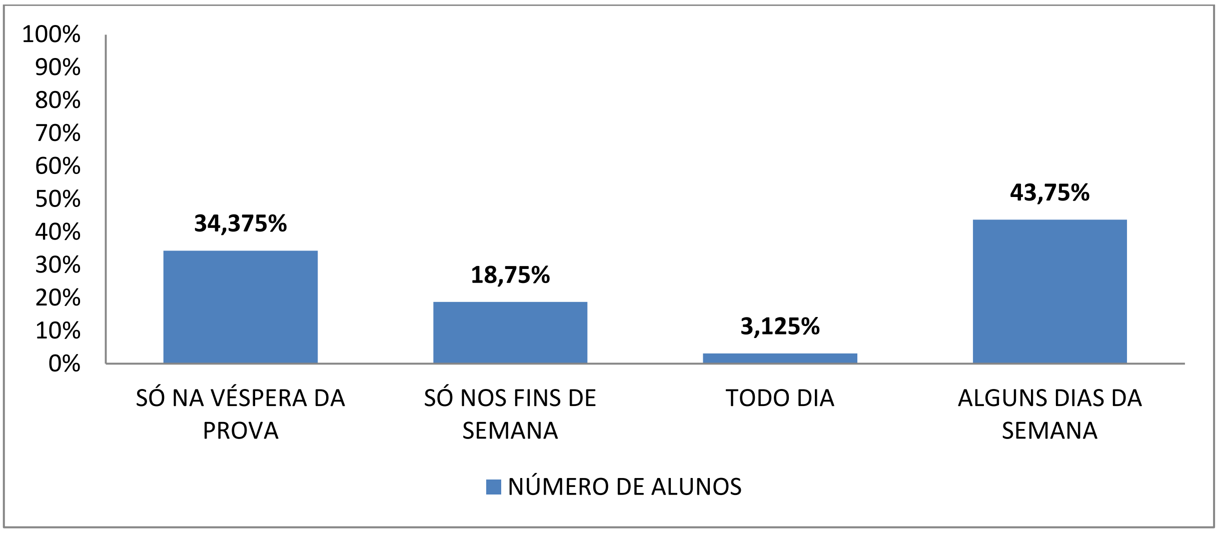
Os dados revelam, em nossa amostra, que se a aula não estiver chata, aproximadamente 90% dos alunos provavelmente prestariam atenção na aula de matemática e apenas 9,375% não consegue prestar atenção. Em Santos (2013, p. 190 e 191), também temos um número elevado de alunos que prestariam atenção às aulas se ela não estivesse chata, 96,7% deles e na amostra de Silva (2014, p. 133), se a aula não estivesse chata, 75% dos discentes prestariam atenção na aula e apenas 15% não consegue prestar atenção de jeito algum. Nas três pesquisas a quantidade de alunos que não conseguem prestar atenção durante às aulas é bem pequeno.

**Quadro 24 -** Costume de estudar matemática.

| Você costuma estudar matemática | Frequência | % |
|---|---|---|
| Só na véspera da prova | 11 | 34,375% |
| Só nos fins de semana | 6 | 18,75% |
| Todo dia | 1 | 3,125% |
| Alguns dias da semana | 14 | 43,75% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 23 -** Você costuma estudar matemática.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

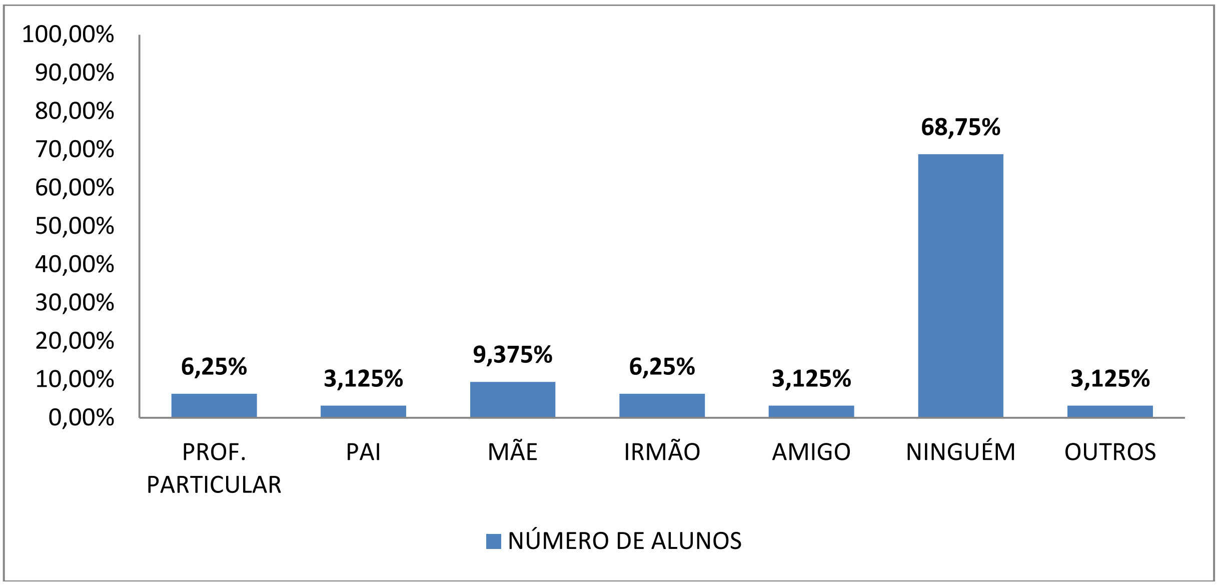
Em nossa pesquisa, apesar dos alunos terem mostrado bastante interesse pela disciplina matemática e a maioria estarem atentos durante as aulas, pouco se dedicam a estudar todos os dias, apenas um aluno. A maioria estuda esporadicamente, alguns dias da semana (43,75%). Já em Santos (2013, p. 191) mais da metade dos alunos só estudam em véspera de prova, 60% deles e apenas um aluno estuda todos os dias, assim como em nossa pesquisa. Na amostra de Silva (2014, p. 134), temos um número maior de alunos que estudam todos os dias, mesmo assim pequeno, apenas 25%, a maioria estuda só no período de prova, 55% deles.

**Quadro 25 -** Você recebe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.

| Quem ajuda nas tarefas de matemática | Frequência | % |
|---|---|---|
| Professor particular | 2 | 6,25% |
| Pai | 1 | 3,125% |
| Mãe | 3 | 9,375% |
| Irmão | 2 | 6,25% |
| Amigo | 1 | 3,125% |
| Ninguém | 22 | 68,75% |
| Outros | 1 | 3,125% |
| Total | 32 | 100% |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 24 -** Você recebe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática.




Fonte: pesquisa de campo (2017)

Os dados, de nossa pesquisa, apontam que a maioria dos alunos não tem ajuda em suas tarefas extraclasses de matemática, ou seja, realizam suas atividades sozinhos e apenas 31,25% deles tem alguém para lhe dar auxílio. Temos ainda que 100% dos alunos estudam pela manhã, não estão em dependência e não estão repetindo a série. Na pesquisa de Santos (2013, p. 192), menos da metade dos alunos não tem ajuda em suas tarefas extraclasse e muitos alunos já ficaram em dependência em alguma série do fundamental, quase 50% deles. Em Silva (2014, p. 134), um número expressivo de alunos, 80%, não recebem nenhum tipo de ajuda nas atividades de matemática extraclasse, um aluno tem professor particular e outros três responderam que recebem ajuda do irmão.

De modo geral, nosso questionário nos mostrou que os alunos têm certa afinidade com a disciplina matemática, já que poucos não conseguem prestar atenção às aulas, a maioria gosta pelo menos um pouco da matéria, todos assinalaram que estudam em algum momento (apesar de não termos colocado a opção deles nunca estudarem) e esse clima favorável nos ajudaram em nossa pesquisa, significativamente.

A seguir, descreveremos o segundo encontro, que teve como objetivo introduzir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). A partir desse encontro até o sexto, utilizamos a câmera de vídeo, contando com a colaboração do professor Marcos, o gravador de áudio e o caderno de anotações. As questões propostas em cada encontro seguiram as orientações de Sá (2005), já citadas anteriormente, sobre a prática de resolução de problemas como ponto de partida. A seguir apresentamos a descrição do nosso segundo encontro (primeira atividade de ensino).

## 3.2 SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro ocorreu no dia 09 de Junho de 2017 (sexta-feira), no horário das 10h20min às 12h00min. Neste dia, aplicamos nossa primeira atividade relacionada com o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.).

Com a ajuda do professor Marcos, organizamos a turma em oito grupos, cinco grupos com quatro alunos e três grupos com cinco alunos (neste dia faltaram cinco alunos, de acordo com a listagem dos discentes matriculados na classe), os grupos identificados como sete e oito foram formados com os alunos que chegaram após o horário marcado com a turma (às 10h20min - após o intervalo) o que interrompeu por alguns instantes a conversa que já estávamos tendo. Falamos, primeiramente, sobre a responsabilidade de se realizar as atividades com seriedade, fazendo o possível para completá-las e buscar os resultados esperados, que seria definir o P.F.C. encontrando um método prático para as resoluções das questões sobre o assunto. Distribuímos a cada equipe um envelope com duas copias do roteiro da Atividade 1, composta de sete questões, mais o Quadro 1, explicamos que os alunos deveriam primeiramente resolver as sete questões, da maneira que achassem mais conveniente (poderiam montar as possibilidades, listá-las, etc.), sempre discutindo as soluções em grupo, que preenchessem a tabela conforme o que estava sendo proposto na atividade, utilizando-se das resoluções encontradas nas sete questões e que analisando o Quadro 1, descobrisse uma maneira prática de obter os resultados, gerando uma conclusão geral de como se resolver os problemas que ali estavam e que envolviam uma parte do conteúdo de Análise Combinatória chamado de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Essa conversa demorou, aproximadamente, 20 minutos. A seguir, quadro da Atividade 1 a ser preenchido pelos grupos.

**Figura 1 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 1.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas independen-tes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | | | | | | |
| 2ª | | | | | | |
| 3ª | | | | | | |
| 4ª | | | | | | |
| 5ª | | | | | | |
| 6ª | | | | | | |
| 7ª | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nossa intenção era fazer com que os grupos preenchessem o Quadro 1, representado na Figura 1, e nele percebessem uma relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades de se realizar o evento, chegando a uma conclusão geral de como se resolver os problemas de uma maneira prática, sem ter que montá-los.

Neste dia, nossa manhã foi bem intensa, com a realização da Atividade 1, como tudo era novidade para os alunos, levamos todo o tempo necessário para acabá-la e não foi possível realizar os exercícios de fixação. Houve muitas dúvidas, quanto:

1º) A resolução das questões: como resolver as questões? Orientamos, de modo geral e nos grupos, que uma das maneiras de resolução era montar as possibilidades.

2º) Ao preenchimento do quadro da atividade: os alunos queriam saber o que significava as palavras evento, etapa e a expressão “evento independente”. Explicamos cada uma delas e isso era de fundamental importância para o desenvolvimento de todas as atividades.

3º) A elaboração da conclusão: os alunos solicitaram informações de como elaborar a conclusão. Pedimos que escrevessem o que eles tinham percebido que era necessário para resolver as questões apresentadas na atividade e que nas perguntas deixadas no quadro da sala, encontrassem expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas foram colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões e serviram de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. As perguntas foram:

1ª – O evento feito em cada questão é dividido em etapas?

2ª – As etapas são sucessivas e independentes?

Agora, apresentamos o preenchimento dos quadros realizados pelos oito grupos na Atividade 1.

**Figura 2 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 1.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | Vestiu-se para a escola | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 2ª | Montar o sanduiche | 2 | 2 | 4 | - | 8 |
| 3ª | Saiu da cidade A p/ a C passando pela B | 2 | 3 | 2 | - | 6 |
| 4ª | Resultado de duas moedas | 2 | 2 | 2 | - | 3 |
| 5ª | Maneiras de montar seu preto | 3 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 6ª | Gabarito do teste | 3 | 2 | 2 | 2 | 8 |
| 7ª | Número total de senha | 2 | 5 | 3 | - | 15 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 2 podemos identificar que o Grupo 1 se equivocou no total de possibilidades da questão 4 (o correto seria 4) e na quantidade de elementos a disposição na 2ª etapa na questão 7 (o correto seria 5), consequentemente errando o total de possibilidades.

**Figura 3 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 2.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | Se vestir pra escola | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 2ª | Montar um lanche | 2 | 2 | 4 | | 8 |
| 3ª | Viajar de um lugar para outro | 2 | 3 | 2 | | 6 |
| 4ª | Resultado das moedas | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 5ª | Compor o jantar | 3 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 6ª | Gabarito das questões | 2 | 3 | 2 | | 8 |
| 7ª | Total de senhas | 2 | 5 | 3 | | 15 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 3, pode-se observar que o Grupo 2 não colocou de forma correta o valor correspondente na 2ª etapa, da 7ª questão (o correto seria 5), errando consequentemente o total de possibilidades (o correto seria 25).

**Figura 4 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 3.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | Se vestir para a escola | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 2ª | Fazer um lanche | 2 | 2 | 4 | - | 8 |
| 3ª | Viajar até C | 3 | 3 | 1 | 2 | 6 |
| 4ª | Lançar moedas | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 5ª | Opções de jantar | 3 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 6ª | Gabarito de um teste | 3 | 1 | 3 | 2 | 6 |
| 7ª | Uma senha eletrônica | 3 | 1 | 5 | 3 | 15 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 4, verificamos que o Grupo 3 se equivocou ao colocar o valor correspondente na 2ª e 3ª etapa da terceira questão (o correto seria 2 na 2ª etapa e nenhum valor na 3ª) e nos valores numéricos da 1ª etapa e 3ª etapa na 7ª questão (o correto seria 5 na 1ª etapa e nenhum valor na 3ª).

**Figura 5 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 4.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | Vestir para ir p/ escola | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 2ª | Fazer um sanduiche | 2 | 4 | 4 | | 8 |
| 3ª | Viajar p/ outra cidade | 2 | 3 | 2 | | 6 |
| 4ª | Lançamento de moeda | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 5ª | Tipos de jantar | 3 | 3 | 2 | | 6 |
| 6ª | O nº total de Gabarito | 3 | | | | 8 |
| 7ª | Nº de senha formadas | | | | | 15 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 5, o Grupo 4 deixou de completar no quadro a 3ª etapa da 5ª questão (o correto seria 2 nesta etapa), errando consequentemente o total de possibilidades e as questões seis (o correto seria 2; 2; 2 em cada etapa respectivamente)  e sete (o correto seria 2 etapas independentes e 5 na 1ª etapa; 5 na 2ª etapa).

**Figura 6 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 5.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª | Vestiu-se para escola | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 2ª | Montar um sanduiche | 2 | 2 | 4 | | 8 |
| 3ª | Estradas e rios | 2 | 3 | 2 | | 6 |
| 4ª | Lançamento de moedas moedas | 2 | 2 | 2 | | 3 |
| 5ª | Um aniversário | 3 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 6ª | Um teste psicotécnico | 3 | 2 | 2 | 2 | 8 |
| 7ª | Senha eletrônica | 2 | 5 | 3 | | 15 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 6, o Grupo 5 se equivocou ao colocar o total de possibilidades na 4ª questão (o correto seria 4) e completou indevidamente o número de possibilidades da 2ª etapa na 7ª questão (o correto seria 5), errando consequentemente o total de possibilidades.

**Figura 7 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 6.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª | De quantas maneiras ela poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 2ª | Quantos tipos de sanduiches Creuza pode montar | 2 | | 2 | 4 | 8 |
| 3ª | De quantos modos diferentes pode-se viajar de A até C passando por B | 2 | 3 | 2 | | 6 |
| 4ª | De quantas maneiras ela poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola | 2 | 2 | 2 | | 4 |
| 5ª | Quantos são os resultados possíveis | 3 | 3 | 2 | 2 | 7 |
| 6ª | Qual é o número total de gabaritos que podem ser marcados nessas três questões | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 |
| 7ª | Qual o número total de senhas que podem ser formadas | 2 | 5 | 5 | | 25 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 7, o Grupo 6 preencheu equivocamente o total de possibilidade da questão 5 (o certo seria 12) e não preencheu de forma correta o número de possibilidades nas etapas da sexta questão (o certo seria 2; 2; 2 em cada uma delas), errando consequentemente o total de possibilidades.

**Figura 8 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 7.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | Pedia para ele escolher uma calça e uma blusa para ir p/ a escola | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 2ª | Quantos tipos de sanduiches Creuza podia montar | 2 | 2 | 4 | - | 8 |
| 3ª | Os modos diferentes para poder viajar de A até C passando por B | 2 | 3 | 2 | - | 6 |
| 4ª | Quantos eram os resultados de duas moedas idênticas | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 5ª | De quantas maneiras distintas ela poderá compor seu jantar | 3 | 3 | 2 | 2 | 12 |
| 6ª | Qual é o número total de gabaritos que podem ser marcados nessas 3 questões | 2 | 3 | 2 | - | 6 |
| 7ª | Qual é o número total de senhas que podem ser formadas | 2 | 5 | 5 | - | 25 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Na Figura 8, verificamos que o Grupo 7 completou todo o quadro corretamente, nas sete questões pedidas.

**Figura 9 -** Quadro preenchido da Atividade 1 pelo Grupo 8.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas indepen-dentes? | Qual é o número de possibilidades da | | | Qual o total de possibili-dades? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | |
| 1ª | De quantas maneiras ele poderá escolher blusa e calça | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 2ª | Quantos sanduiche ele pode montar | 2 | 2 | 4 | - | 8 |
| 3ª | Pode se viajar até o C | 2 | 3 | 2 | - | 6 |
| 4ª | Resultado dos lados de duas moedas | 2 | 2 | 2 | - | 4 |
| 5ª | Pratos para o buffet | 3 | 3 | 3 | 3 | 9 |
| 6ª | Gabarito marcados | 3 | 3 | 3 | 3 | 9 |
| 7ª | Total de senha | 2 | 5 | 3 | - | 15 |

Fonte: pesquisa de campo (2017)

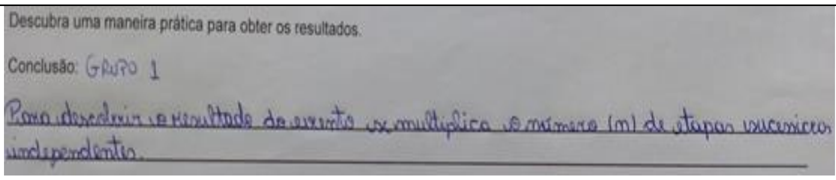
Na Figura 9, o Grupo 8 preencheu indevidamente a 2ª e 3ª etapa da questão 5 (o correto seria 2 e 2, respectivamente em cada etapa), nas três etapas da questão 6 (o correto seria 2; 2; 2, respectivamente em cada etapa) e a 2ª etapa da sétima questão (o correto seria 5), errando o total de possibilidades.

A seguir, mostraremos as análises das conclusões dos alunos e o percentual de conclusões válidas ou não, baseado no que esperávamos de conclusão, em cada atividade de ensino.

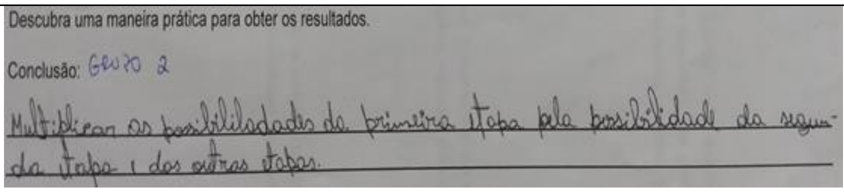
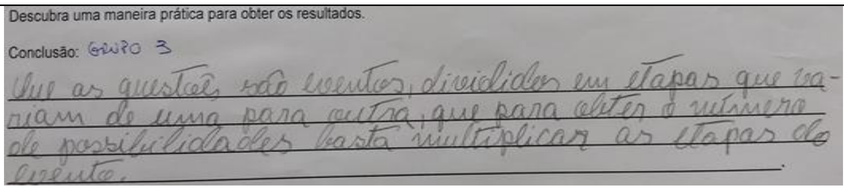
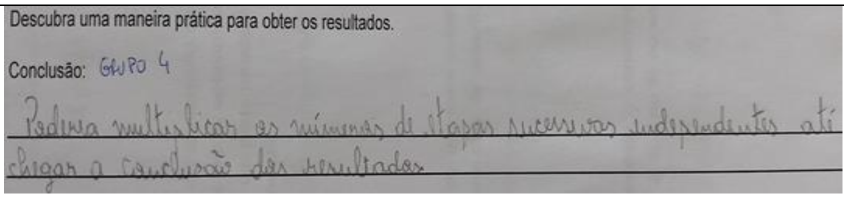
Na primeira atividade, esperávamos que os alunos percebessem a ideia principal do P.F.C., ou seja, que para se obter o resultado, basta multiplicar o valor numérico presente em cada etapa.

**Quadro 26 -** Análise das conclusões dos grupos a respeito de como se resolve uma questão envolvendo o P.F.C. (Atividade 1)

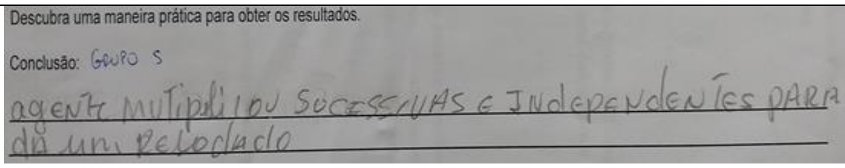
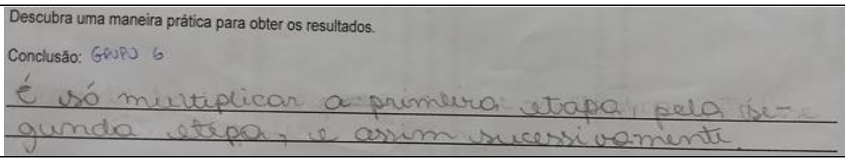
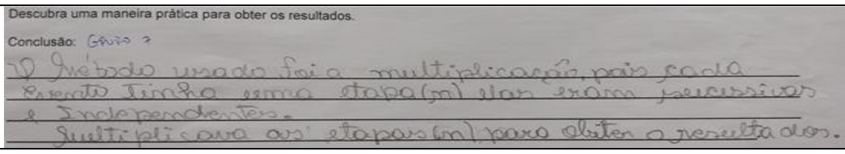
(Continua)

<table>
<tr><th>Alunos</th><th>CONCLUSÕES</th><th>Análise</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_3$, $A_8$, $A_{10}$ e $A_{37}$</td><td>
Descubra uma maneira prática para obter os resultados.
Conclusão: GRUPO 1
Para descobrir o resultado do evento se multiplica o número (m) de etapas sucessivas independentes.</td><td rowspan="2">Conclusão parcialmente válida para o calculo do</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 1:</td></tr>
</table>

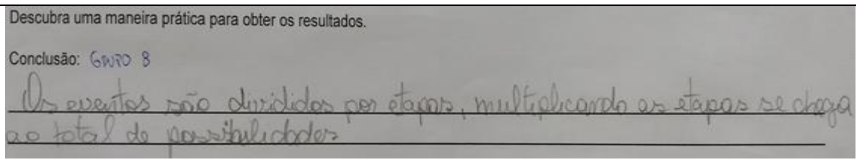
(continuação)

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Para descobrir o resultado do evento se multiplica o número (n) de etapas sucessivas independentes.</td><td rowspan="2">P.F.C.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 1 se equivocou nas palavras e invés de dizer que deveriam ser multiplicados, entre si, os valores em cada etapa, disse que deveria ser multiplicar o número n de etapas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_2$, $A_5$, $A_9$, $A_{24}$ e $A_{31}$</td><td><br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 2<br>Multiplicar as possibilidades da primeira etapa pela possibilidade da segun-da etapa e das outras etapas.</td><td rowspan="3">Conclusão válida para o calculo do P.F.C.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 2:<br>Multiplicar as possibilidades da primeira etapa pela possibilidade da segunda etapa e das outras etapas.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 2 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre os valores em cada etapa.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{18}$, $A_{22}$ $A_{23}$ e $A_{27}$</td><td><br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 3<br>Que as questões são eventos, divididos em etapas que va-riam de uma para outra, que para obter o número de possibilidades basta multiplicar as etapas do evento.</td><td rowspan="3">Conclusão válida para o calculo do P.F.C.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 3:<br>Que as questões são eventos, divididos em etapas que variam de uma para outra, que para obter o número de possibilidades basta multiplicar as etapas do evento.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 3 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre as etapa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_4$, $A_{11}$, $A_{21}$ e $A_{28}$</td><td><br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 4<br>Poderia multiplicar os números de etapas sucessivas independentes até chegar a conclusão dos resultados</td><td rowspan="2">Conclusão válida para o calculo do P.F.C.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 4:<br>Poderia multiplicar o número de etapas sucessivas e independentes até chegar a conclusão do resultado.</td></tr>
</table>

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| | **Análise da conclusão:** O grupo 4 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre os valores em cada etapa. | |
| $A_{16}$, $A_{19}$, $A_{26}$ e $A_{32}$ | <br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 5<br>agente multiplicou sucessivas e independentes para dá um resultado<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 5:**<br>Agente multiplicou sucessivas e independentes para dá um resultado.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 5 citou a principal característica que é o produto. Só esqueceu de dizer que a multiplicação era entre os valores em cada etapas. | Conclusão parcialmente válida para o calculo do P.F.C. |
| $A_1$, $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ | <br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 6<br>É só multiplicar a primeira etapa, pela segunda etapa, e assim sucessivamente.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 6:**<br>É só multiplicar a primeira etapa, pela segunda etapa, e assim sucessivamente.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 6 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre os valores em cada etapa. | Conclusão válida para o calculo do P.F.C. |
| $A_{15}$, $A_{25}$, $A_{34}$, $A_{35}$ e $A_{39}$ | <br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: GRUPO 7<br>O método usado foi a multiplicação, pois cada evento tinha uma etapa(n) elas eram sucessivas e Independentes. Multiplicava as etapas(n) para obter o resultados.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 7:**<br>O método usado foi o da multiplicação, pois cada evento tinha uma etapa (n), elas eram sucessivas e independentes. Multiplicava as etapas (n) pra obter o resultado.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 7 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre os valores em cada | Conclusão válida para o calculo do P.F.C. |

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| | etapa. | |
| $A_6$, $A_{13}$, $A_{17}$, $A_{29}$ e $A_{36}$ | <br>Descubra uma maneira prática para obter os resultados.<br>Conclusão: Grupo 8<br>Os eventos são divididos por etapas, multiplicando as etapas se chega ao total de possibilidades<br><br>**CONCLUSÃO DO GRUPO 8:** os eventos são divididos por etapas, multiplicando as etapas se chega ao total de possibilidades.<br><br>**Análise da conclusão:** O grupo 8 entendeu o processo e elaborou uma boa conclusão, citando a principal característica que é o produto entre os valores em cada etapa. | Conclusão válida para o calculo do P.F.C. |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: P.F.C.**

Estudantes participantes: 35

**Quadro 27 -** Validade das conclusões da Atividade 1.

| Conclusões | Valor absoluto | % |
|---|---|---|
| Válidas | 6 | 75 |
| Parcialmente válidas | 2 | 25 |
| Inválidas | 0 | 0 |
| Não apresentou | 0 | 0 |
| Total | 8 | 100 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Após observar as conclusões, podemos perceber que 75% dos grupos escreveram conclusões relacionadas com que queríamos. Verificamos que esses grupos, entenderam que para se chegar ao resultado, deveriam multiplicar os valores de cada etapa e elaboraram boas conclusões, 25% das conclusões tiveram pequenos equívocos entre as palavras.

Essas conclusões foram lidas perante a turma e discutidas sobre seus posicionamentos e equívocos, logo depois, construímos no quadro o conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

“Se um evento A ocorre de **x** maneiras diferentes, se para cada uma dessas **x** maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de **y** maneiras diferentes e, se para cada uma dessas **y** maneiras possíveis de B ocorrer, um outro evento C pode ocorrer de **z** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido dos eventos B e C é **x.y.z**”.

O preenchimento da tabela foi bastante produtivo, todos os grupos perceberam a regularidade ao se multiplicar o número de possibilidades em cada etapa, para se chegar ao resultado. Os alunos foram bastante participativos, com poucos distraídos, em algum momento da atividade. O tempo de espera, até que a 1ª equipe acabasse a atividade foi de cerca de 40 minutos, a partir daí as outras equipes foram acabando, sendo que a última levou aproximadamente 52 minutos para terminar. O tempo restante foi para discutir o preenchimento do quadro, as conclusões feitas pelos grupos e formalizar a nossa conclusão, o que levou cerca de 30 minutos.

Neste dia, percebi que os grupos se empenharam bastante e apesar da dificuldade resolveram as questões, preencheram a tabela, fizeram a conclusão e assimilaram o que foi proposto. A seguir, descreveremos a segunda atividade de ensino (terceiro encontro), que foi realizada em um tempo muito menor por todas as equipes.

## 3.3 TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro ocorreu no dia 21 de Junho de 2017 (quarta-feira), 12 dias após o nosso segundo encontro, no horário das 10h20min às 12h15min. Neste dia, aplicamos nossa segunda atividade relacionada com o fatorial de um número natural “n”.

Ao iniciarmos o encontro, agradecendo a participação de todos na última atividade, pedimos que eles procurassem os grupos que foram formados no último encontro e se organizassem da mesma maneira (os alunos que tinham faltado na atividade anterior foram distribuídos entre os grupos já determinados). Dissemos a eles que iniciaríamos à aula distribuímos uma lista de exercícios com as questões de aprofundamento, relacionadas ao conteúdo P.F.C. da aula anterior e que resolveríamos quatro questões (questões dois, três, quatro e cinco), as outras eles exercitariam em casa podendo tirar dúvidas nas próximas aulas. Nosso objetivo, além de aprofundar o conteúdo, era relembrar o que foi aprendido, principalmente por conta do tempo que não nos víamos desde a primeira atividade. Fizemos isso em aproximadamente 20 minutos e às 10h40min demos início à segunda atividade.

O roteiro da Atividade 2 foi entregue com as seis questões propostas, mais o Quadro 2 e orientamos que os grupos procedessem de acordo com as instruções contidas no roteiro. A seguir, quadro da Atividade 2 a ser preenchido pelos grupos.

**Figura 10 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 2.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nossa intenção foi fazer com que os grupos preenchessem o Quadro 2, reparassem na característica dos cálculos necessários para se obter o resultado e com as informações dadas, após o quadro 2, chegassem a uma conclusão geral do que seria o fatorial de um número natural n.

Para nossa surpresa a primeira equipe acabou as seis questões, o preenchimento da tabela e a conclusão em, aproximadamente, 30 minutos e última equipe, que acabou a atividade, demorou 43 minutos. Percebemos que os alunos resolveram as questões de maneira mais rápida, utilizando o P.F.C., preencheram a tabela com maior agilidade e na elaboração da conclusão, não tiveram o mesmo ganho de tempo, ou seja, ainda pensaram bastante na hora da escrita. Mesmo assim, todas essas etapas foram feitas de maneira mais rápidas, se comparadas à atividade anterior. E nos 50 minutos restantes da aula, nos programamos para realizar a discussão sobre as conclusões elaboradas pelos grupos e apresentar a nossa conclusão, além de resolvermos a lista de exercícios, sobre fatorial, dando um tempo para eles fazerem as questões dois, três (letras a, b, c, d) e quatro (letras a, b, c, d), para fazermos a correção posteriormente. Às fizemos e lembramos que principalmente a quarta questão, não deveria ser esquecida, pois seria muito utilizada em algumas atividades posteriores (Arranjo Simples e Combinação Simples). Neste dia, a aula foi até às 12h15min, mas contamos com a compreensão dos alunos e não houve maiores reclamações quanto ao horário de saída.

Algumas perguntas foram colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões e serviram de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. O que colocamos no quadro foi o seguinte:

"Nos exemplos anteriores, os termos (fatores) das multiplicações são":

- Números naturais?
- Consecutivos?
- Positivos?

Agora, apresentamos o preenchimento dos quadros realizadas pelos oito grupos na Atividade 2.

**Figura 11 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 1.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | - | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 11, verificamos que o Grupo 1 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 12 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 2.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 12, verificamos que o Grupo 2 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 13 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 3.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 5.4.3.2.1 = 120 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 6.5.4.3.2.1 = 720 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 = 5040 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 4082400 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 13, verificamos que o Grupo 3 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 14 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 4.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 14, verificamos que o Grupo 4 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 15 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 5.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | - | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 15, verificamos que o Grupo 5 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 16 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 6.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 16, verificamos que o Grupo 6 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 17 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 7.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | 5.4.3.2.1 = 120 |
| 2ª | 6 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | 6.5.4.3.2.1 = 720 |
| 3ª | 7 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 = 5.040 |
| 4ª | 8 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40.320 |
| 5ª | 9 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362.880 |
| 6ª | 10 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3.628.800 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 17, verificamos que o grupo 7 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 18 -** Quadro preenchido da Atividade 2 pelo Grupo 8.

| Questão | Qual o número de etapas indepen-dentes do evento? | Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação? | Qual é o número de possibilidades da | | | | | | | | | | Cálculo necessário p/ se obter o resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | 8ª etapa ? | 9ª etapa ? | 10ª etapa ? | |
| 1ª | 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | 5.4.3.2.1 |
| 2ª | 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 6.5.4.3.2.1 |
| 3ª | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 7.6.5.4.3.2.1 |
| 4ª | 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 9.8.7.6.5.4.3.2.1 |
| 6ª | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

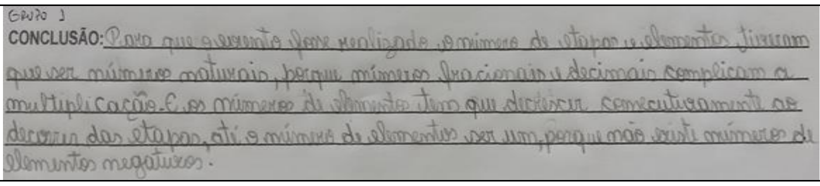
Na Figura 18, verificamos que o Grupo 8 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões na Atividade 2.

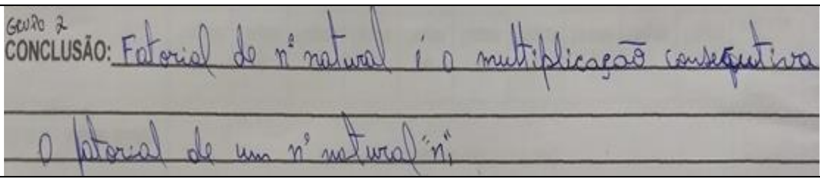
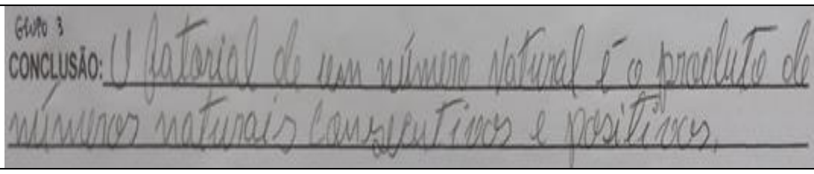
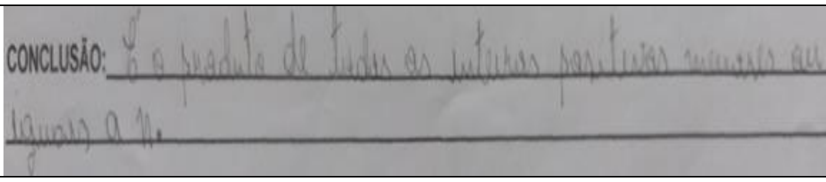
Na segunda atividade, nossa pretensão era que os alunos percebessem que o fatorial de um número "n" é o produto desse número "n" por todos os seus antecessores naturais positivos.

**Quadro 28 -** Análise das conclusões dos grupos a respeito do que seria o fatorial de um número natural "n" (Atividade 2).

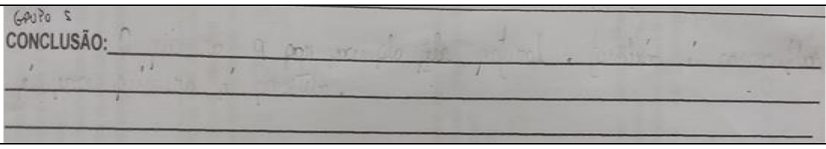
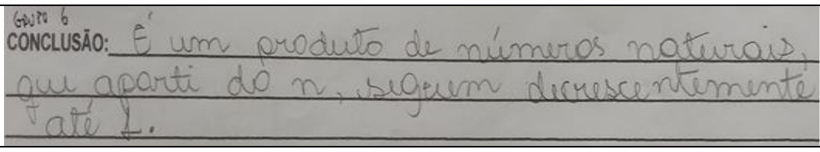
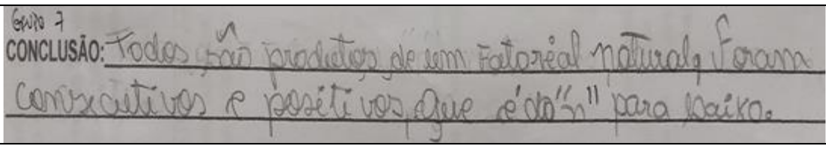
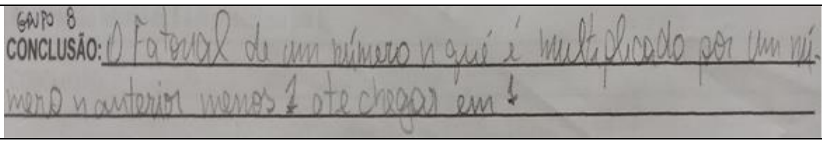
(continua)

| Alunos | CONCLUSÕES | Análise |
|---|---|---|
| $A_3$, $A_8$, $A_{10}$ e $A_{37}$ |  GRUPO 1 CONCLUSÃO: Para que o evento fosse realizado o número de etapas e elementos tiveram que ser números naturais, porque números fracionários e decimais complicam a multiplicação. E os números de elementos tem que decrescer consecutivamente ao decorrer das etapas, até o número de elementos ser um, porque não existe números de elementos negativos.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 1:**<br>Para que o evento fosse realizado, o número de etapas e elementos tiveram que ser números naturais, porque números fracionários e decimais complicam a multiplicação. E os números de elementos tem que decrescer consecutivamente ao decorrer das etapas, até o número de elementos ser um, porque não existe | Conclusão válida para o fatorial de um número. |

(continuação)

<table>
<tr><td></td><td>número de elementos negativos.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>Análise da conclusão: O grupo 1 citou a multiplicação e que os números são decrescentes até o um.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_2$, $A_9$, $A_{24}$ e $A_{31}$</td><td>
GRUPO 2
CONCLUSÃO: Fatorial de nº natural é a multiplicação consecutiva
o fatorial de um nº natural "n".</td><td rowspan="3">Conclusão parcialmente válida para o fatorial de um número.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 2:<br>Fatorial de um nº natural é a multiplicação consecutiva. O fatorial de um nº natural “n”.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 2 citou a característica que é da multiplicação consecutiva, mas faltou descrever como seriam os fatores da multiplicação.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{18}$, $A_{22}$ $A_{23}$ e $A_{27}$</td><td>
GRUPO 3
CONCLUSÃO: O fatorial de um número natural é o produto de
números naturais consecutivos e positivos.</td><td rowspan="3">Conclusão válida para o fatorial de um número.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 3:<br>O fatorial de um número natural é o produto de números naturais consecutivos e positivos.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 3 elaborou um razoável conclusão, citando a característica da multiplicação de números naturais e consecutivos. Faltou dizer que esses números consecutivos são do número que está em fatorial até o um.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_4$, $A_{11}$, $A_{21}$ e $A_{28}$</td><td>
CONCLUSÃO: É o produto de todos os inteiros positivos menores ou
iguais a n.</td><td rowspan="3">Conclusão válida para o fatorial de um número.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 4:<br>É o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 4 elaborou uma boa conclusão citando as principais características do cálculo fatorial.</td></tr>
</table>

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| $A_{16}$, $A_{19}$, $A_{26}$ e $A_{32}$ |  GRUPO 5 CONCLUSÃO:<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 5:**<br>O grupo 5 não presentou conclusão. | Não apresentou conclusão. |
| $A_1$, $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ |  GRUPO 6 CONCLUSÃO: É um produto de números naturais, que aparti do n, seguem decrescentemente até 1.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 6:**<br>É o produto de números naturais, que a partir do n, seguem decrescente até 1.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 6 elaborou uma boa conclusão citando as principais características do cálculo fatorial. | Conclusão válida para o fatorial de um número. |
| $A_{15}$, $A_{25}$, $A_3$ e $A_{38}$ |  GRUPO 7 CONCLUSÃO: Todos são produtos de um Fatoréal natural, Foram consecutivos e positivos, que é do "n" para baixo.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 7:**<br>Todos são produtos de um fatorial natural. Foram consecutivos e positivos, que é do "n" para baixo.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 7 citou algumas características do cálculo fatorial dizendo que os números são consecutivos, positivos, que é do **n** para baixo, mas faltou se expressar melhor com relação a multiplicação dos valores envolvidos no cálculo. | Conclusão parcialmente válida para o fatorial de um número. |
| $A_6$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{29}$ e $A_{36}$ |  GRUPO 8 CONCLUSÃO: O Fatorial de um número n que é multiplicado por um número n anterior menos 1 ate chegar em 1<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 8:**<br>O fatorial de um número n que é multiplicado por um número n anterior menos 1 até chegar em 1.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 8 elaborou uma conclusão razoável revelando que é uma multiplicação que vai do número n até o um. Deixando um pouco confuso a citação "n anterior menos 1". | Conclusão válida para o fatorial de um número. |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: Fatorial de um número natural n**

Estudantes participantes: 33

**Quadro 29 -** Validade das conclusões da Atividade 2.

| Conclusões | Valor absoluto | **%** |
|---|---|---|
| Válidas | 5 | 62,5 |
| Parcialmente válidas | 2 | 25 |
| Inválidas | 0 | 0 |
| Não apresentou | 1 | 12,5 |
| Total | 8 | 100 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Em todas as cinco conclusões validadas (62,5%) ouve um entendimento sobre como se desenvolve o fatorial de um número natural “n”, já os 25% que tiveram a conclusão parcialmente válidas, que a meu ver, o grupo dois elaborou uma conclusão razoável, deixando de citar a característica, que é o produto de números naturais decrescentes e o grupo sete se atrapalhou com as palavras e sua conclusão foi parcialmente confusa. Apenas o grupo cinco não concluiu a atividade.

Ao encerrarmos a Atividade 2, tínhamos verificados que todos os grupos tinham elaborado suas conclusões, para nossa surpresa o grupo cinco achou que a sua conclusão estava mal elaborada e resolveu apagá-la. Então, lemos e discutimos as outras sete conclusões, verificando os pontos positivos e negativos de cada uma, tentando organizá-las para encontrarmos uma conclusão comum. Logo em seguida, elaboramos a seguinte conclusão:

“O fatorial de um número natural $n \geq 2$, representado por n!, é dado pelo produto de todos os números naturais consecutivos e positivos, menores ou iguais a n. Representados por: **n! = n.(n – 1).(n – 2).(n – 3). ... .4.3.2.1**

Neste dia, houve poucas dúvidas nas resoluções e construção da tabela. Na resolução da lista de exercício sobre fatorial, a questão quatro causou dúvidas, que foram trabalhadas com calma. Nosso objetivo, em resolver essas questões, era de vivenciar os cálculos necessários para desenvolver as fórmulas de Arranjo Simples e Combinação Simples.

A seguir, descreveremos a terceira atividade de ensino (quarto encontro), que foi realizada em um tempo menor que a atividade 2.

## 3.4 QUARTO ENCONTRO

O quarto encontro ocorreu no dia 22 de junho de 2017 (quinta-feira), no horário das 08h20min às 10h00min. Neste dia, aplicamos nossa terceira atividade relacionada com Permutação Simples.

De imediato pedimos que os estudantes procurassem os seus grupos e se organizassem da mesma maneira em sala. Às 08h30min, aproximadamente, começamos a entregar a Atividade 3, com duas copias a cada grupo, contendo seis questões e o quadro 3, lembramos que o procedimento de preenchimento seria o mesmo já realizado nas aulas anteriores. Primeiro responder as questões, preencher o Quadro 3 e em seguida elaborar a conclusão sobre o que seria a Permutação Simples de “n” elementos.

A cada encontro, percebíamos que os alunos já estavam ficando habituado com as atividades e as dúvidas com relação à resolução das questões, preenchimento da tabela e elaboração da conclusão já eram poucas. Todos os grupos terminaram a atividade em aproximadamente 35 minutos. Acredito que como o processo de resolução das questões e preenchimento da tabela, era muito parecida com as das atividades anteriores, eles estavam adaptados, com isso o tempo para realizar cada atividade diminuía. A seguir, quadro da Atividade 3 a ser preenchido pelos grupos.

**Figura 19 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 3.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nossa intenção era fazer com que os grupos preenchessem o Quadro 3, reparassem que o cálculos necessários para se obter o resultado poderiam ser escritos na forma de fatorial e com as informações geradas no Quadro , chegassem a uma conclusão geral do que seria a Permutação Simples de "n" elementos.

Algumas perguntas foram colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões e serviram de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. O que colocamos no quadro foi o seguinte:

"Nos exemplos anteriores":

- Formamos agrupamentos? (conjunto de elementos organizados em sequência)
- Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?
- O nº de etapas (n) é igual ao número de elementos (p) a disposição do evento?

Agora apresentamos o preenchimento dos quadros realizados pelos oito grupos na Atividade 3.

**Figura 20 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 1.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | | |
| 1ª | Confeccionar uma bandeira sem repetir | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | 6 | 3! |
| 2ª | Anagramas da palavra remo | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | 24 | 4! |
| 3ª | Programa de cinema | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | 120 | 5! |
| 4ª | Maneiras de sentar na bicicleta | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | 720 | 6! |
| 5ª | Quantas senhas da palavra enigma | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 20, verificamos que o Grupo 1 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 21 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 2.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | | |
| 1ª | Confecções de bandeira | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | 6 | 3.2.1 |
| 2ª | Anagramas do nome | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | 24 | 4! |
| 3ª | Ordem dos filmes | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | 120 | 5! |
| 4ª | Passeio de bicicleta de seis lugares | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | 720 | 6! |
| 5ª | senhas com enigma | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 21, verificamos que o Grupo 2 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 22 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 3.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | | |
| 1ª | Confeccionar uma bandeira | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | | | | | 6 | 3! |
| 2ª | Total de anagramas | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 24 | 4! |
| 3ª | Exibir filmes diferentes | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 120 | 5! |
| 4ª | Definir lugares em uma bicicleta | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 720 | 6! |
| 5ª | Total de senhas | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 22, verificamos que o Grupo 3 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 23 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 4.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | | |
| 1ª | 3 cores distintas p/ pintar uma bandeira | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | | | | | 6 | 3! |
| 2ª | Total de anagramas que poderia ser formados | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 24 | 4! |
| 3ª | 5 filmes de maneiras diferentes | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 120 | 5! |
| 4ª | De quantas maneiras eles podem sentar na bicibleta | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 720 | 6! |
| 5ª | Quantas senhas são possíveis de formar | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 23, verificamos que o Grupo 4 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 24 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 5.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | | |
| 1ª | Maneiras possíveis | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | - | - | - | - | 6 | 3.2.1 |
| 2ª | Total de anagramas | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | - | 24 | 4.3.2.1 |
| 3ª | maneiras diferentes | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | - | 120 | 5.4.3.2.1 |
| 4ª | quantas maneiras podem se sentar | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | - | 720 | 6.5.4.3.2.1 |
| 5ª | quantas são possíveis | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7.6.5.4.3.2.1 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 24, verificamos que o Ggrupo 5 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 25 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 6.

| Ques-tão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | 5ª etapa? | 6ª etapa? | 7ª etapa? | | |
| 1ª | Pintar a bandeira | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | | | | | 6 | 3! |
| 2ª | Formar palavras | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 24 | 4! |
| 3ª | Quantos filmes podem formar por dia | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 120 | 5! |
| 4ª | De quantas maneiras podem se sentar | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 720 | 6! |
| 5ª | quantas senhas são possíveis formar | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 25, verificamos que o Grupo 6 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 26 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 7.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | | |
| 1ª | Pintar a bandeira de varias cores sem repetições | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | | | | | 6 | 3! |
| 2ª | Fazer inversões da palavra remo | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 24 | 4! |
| 3ª | Maneiras diferentes de passar os filmes sem repetições | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 120 | 5! |
| 4ª | De quantas maneiras eles poderiam sentar na bicicleta | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 720 | 6! |
| 5ª | Quais as senhas possiveis formar com a palavra enigma | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 26, verificamos que o Grupo 7 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

**Figura 27 -** Quadro preenchido da Atividade 3 pelo Grupo 8.

| Questão | O que a questão pedia? | Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento? | Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Qual o número de possibilidades da | | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | SIM | NÃO | 1ª etapa ? | 2ª etapa ? | 3ª etapa ? | 4ª etapa ? | 5ª etapa ? | 6ª etapa ? | 7ª etapa ? | | |
| 1ª | Sem repetição de cores | 3 | 3 | x | | 3 | 2 | 1 | | | | | 6 | 3! |
| 2ª | Total de anagramas | 4 | 4 | x | | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 24 | 4! |
| 3ª | Maneiras de programação | 5 | 5 | x | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | 120 | 5! |
| 4ª | Maneiras de sentar | 6 | 6 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 720 | 6! |
| 5ª | Total de senhas | 7 | 7 | x | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5040 | 7! |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

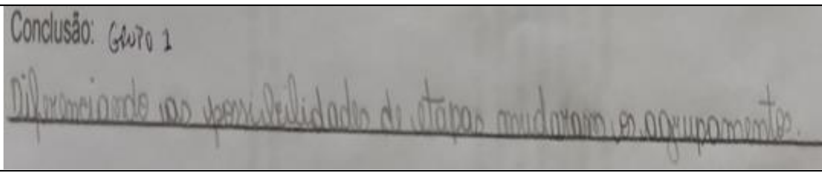
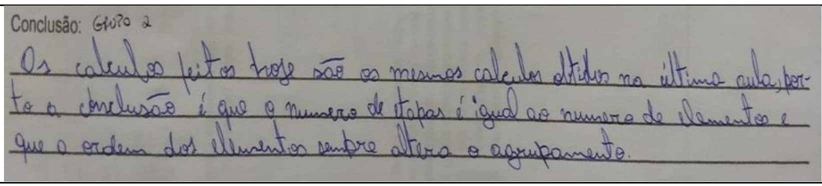
Na Figura 27, verificamos que o Grupo 8 completou todo o quadro corretamente, nas cinco questões propostas.

Como podemos verificar, na Atividade 3 os grupos não tiveram problema para preenchimentos dos quadros, todos foram preenchidos de forma correta. A seguir, mostraremos a análise das conclusões da Atividade 3.

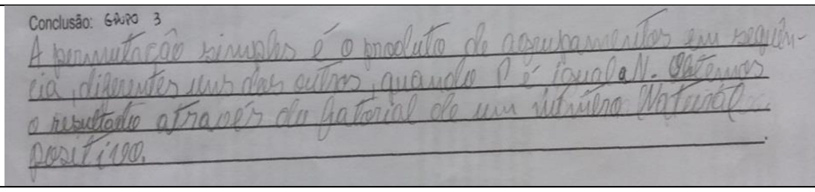
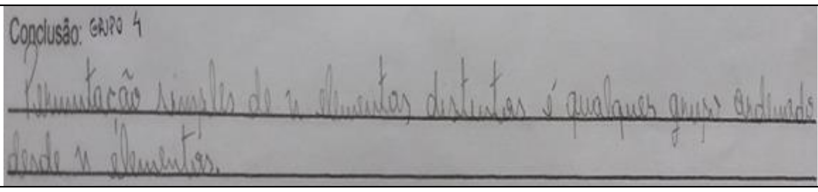
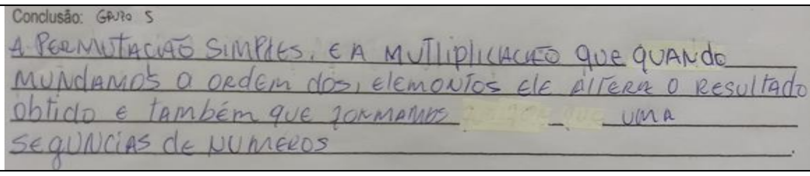
Na Aatividade 3, queríamos que os alunos chegassem a conclusão que a Permutação Simples de “n” elementos é o próprio fatorial desse número “n”, ou seja, o produto desse número “n” por todos os seus antecessores naturais positivos e que a ordem de escolha dos elementos altera o evento (agrupamento).

**Quadro 30 -** Análise das conclusões dos grupos a respeito do que seria a Permutação Simples de “n” elementos (Atividade 3).

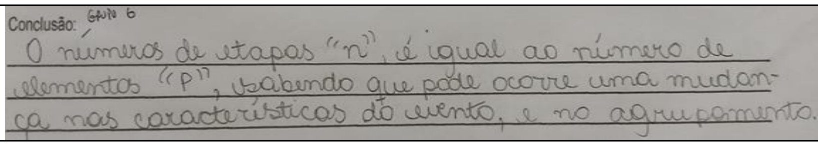
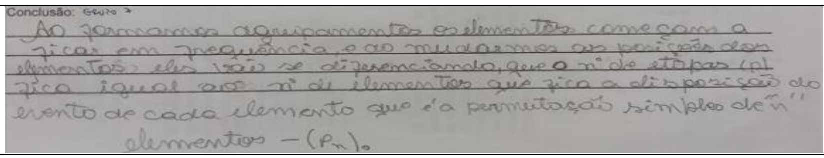
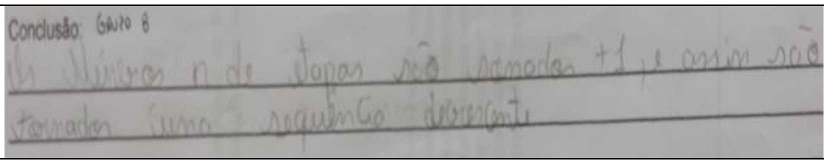
(Continua)

| Alunos | CONCLUSÕES | Análise |
|---|---|---|
| $A_3$, $A_8$, $A_{10}$ e $A_{37}$ | <br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 1:**<br>Diferenciando as possibilidades de etapas mudaram os agrupamentos.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 1 não citou a característica do cálculo e nem lembrou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento. | Conclusão inválida para Permutação Simples. |
| $A_2$, $A_9$, $A_{24}$ e $A_{31}$ | <br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 2:**<br>Os cálculos feitos hoje são os mesmos cálculos dos obtidos na última aula, portanto a conclusão é que o número de etapas é igual ao número de elementos e que a ordem dos elementos sempre altera o agrupamento. | Conclusão válida para Permutação Simples. |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 2 lembrou que o cálculo é o mesmo da aula passada, ou seja, do fatorial e que a ordem dos elementos altera o agrupamento. Citando as principais características. | |

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| $A_{18}$, $A_{22}$ $A_{23}$ e $A_{27}$ | <br>Conclusão: GRUPO 3<br>A permutação simples é o produto de agrupamentos em sequência diferentes uns dos outros quando P é igual a N. Obtemos o resultado através do fatorial de um número Natural positivo.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 3:**<br>A Permutação Simples é o produto de agrupamentos em sequência, diferentes uns dos outros, quando P é igual a N. Obtemos o resultado através do fatorial de um número natural positivo.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 3 citou como se acha o resultado corretamente. Só se atrapalhou com a palavra agrupamento que poderia ser trocado pela palavra “números”. | Conclusão válida para Permutação Simples. |
| $A_4$, $A_{11}$, $A_{21}$ e $A_{28}$ | <br>Conclusão: GRUPO 4<br>Permutação simples de n elementos distintos é qualquer grupo ordenado desde n elementos.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 4:**<br>Permutação Simples de n elementos distintos é qualquer grupo ordenado desde n elementos.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 4 se referiu a permutação como um grupo ordenado, mas não citou a característica do cálculo. | Conclusão parcialmente válida para Permutação Simples. |
| $A_{16}$, $A_{19}$, $A_{26}$ e $A_{32}$ | <br>Conclusão: GRUPO 5<br>A PERMUTACÃO SIMPLES, E A MULTIPLICACÃO QUE QUANDO MUNDAMOS O ORDEM DOS ELEMONTOS ELE ALTERA O RESULTADO OBTIDO E TAMBÉM QUE FORMAMOS UMA SEQUNCIAS DE NUMEROS.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 5:**<br>A permutação simples é a multiplicação que quando mudamos a ordem dos elementos ele altera o resultado obtido e também que formamos uma sequência de números.<br>**Análise da conclusão:** O grupo 5 comentou que a ordem dos elementos altera o evento e apesar de mencionar a multiplicação não especificou a característica do cálculo. | Conclusão parcialmente válida para Permutação Simples. |

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ |  Conclusão: Grupo 6 O números de etapas "n", é igual ao número de elementos "p", sabendo que pode ocorre uma mudança nas características do evento, e no agrupamento. | Conclusão parcialmente válida para Permutação Simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 6:** O número de etapas "n", é igual ao número de elementos "p", sabendo que pode ocorrer uma mudança nas características do evento, e no agrupamento. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 6 comentou que a ordem dos elementos altera o evento, mencionou que o número de elementos é igual ao número de etapas, mas não especificou a característica do cálculo. | |
| $A_{25}$, $A_{30}$, $A_{34}$ e $A_{38}$ |  Conclusão: Grupo 7 Ao formarmos agrupamentos os elementos começam a ficar em sequência, e ao mudarmos as posições dos elementos, eles vão se diferenciando, que o nº de etapas (p) fica igual ao nº de elementos que fica a disposição do evento de cada elemento que é a permutação simples de "n" elementos – ($P_n$). | Conclusão parcialmente válida para Permutação Simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 7:** Ao formarmos agrupamentos os elementos começam a ficar em sequencia, e ao mudarmos as posições dos elementos, eles vão se diferenciando, que o nº de etapas (p) fica igual ao nº de elementos que fica a disposição do evento de cada elemento que é a permutação simples de "n" elementos – ($P_n$). | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 7 comentou que a posição dos elementos altera o evento, mencionou que o número de elementos é igual ao número de etapas, mas não especificou a característica do cálculo. | |
| $A_6$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{29}$ e $A_{36}$ |  Conclusão: Grupo 8 Os números n de etapas são somados +1, e assim são tornados uma sequência decrescente | Conclusão parcialmente válida para Permutação Simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 8:** Os números n de etapas são somados +1, e assim são tornados uma sequência decrescente. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 8 falou na característica da sequência, mas não falou em multiplicação e nem que a ordem de escolha dos elementos altera o evento. | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: Permutação Simples**

Estudantes participantes: 32

**Quadro 31 -** Validade das conclusões da Atividade 3.

| Conclusões | Valor absoluto | **%** |
|---|---|---|
| Válidas | 2 | 25 |
| Parcialmente válidas | 5 | 62,5 |
| Inválidas | 1 | 12,5 |
| Não apresentou | 0 | 0 |
| Total | 8 | 100 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Duas conclusões tiveram elementos que caracterizassem a conclusão que esperávamos. A maioria, 87,5%, entendeu que a ordem que os elementos são escolhidos pode alterar o evento, mas em 62,5% delas, faltou colocarem a maneira de se efetuar os cálculos para se resolver as questões. Com exceção das equipes dois e três que fizeram um comentário relacionando com o cálculo do fatorial.

Neste dia, o preenchimento da atividade, começou as 08h25min e terminou as 09h00min. Após a leitura das conclusões, preenchimento da tabela (no quadro) e análise dos pontos positivos e negativos, elaboramos nossa conclusão a respeito do que seria Permutação Simples de “n” elementos, o que levou cerca de 20 minutos.

“Permutação Simples de “n” elementos ($P_n$), são agrupamentos que podemos formar com “n” elementos distintos, tal que a diferença entre um agrupamento e outro se dê apenas pela mudança de posição entre seus “n” elementos nas “p” etapas, sendo p = n. Onde: $\mathbf{P_n = n!}$”

Após a conclusão, expliquei que o número de elementos e o número de etapas, podem ser representados por qualquer letra, mas que era comum o número de elementos serem representados pela letra “n” e o número de etapas pela letra “p” e que na tabela isso estava invertido. Mas que eles lembrassem que a permutação é dos elementos.

Neste dia, a dúvida maior era na coluna que perguntava se a ordem dos elementos altera o agrupamento. Os alunos não sabiam o que seria a palavra “agrupamento”. Neste momento, resolvi logo colocar as perguntas motivadoras para a conclusão e entre elas estava a explicação do que era agrupamento, como já foi visto acima. Mesmo assim a pergunta, sobre agrupamento, foi feita pelos grupos no decorrer da atividade.

Como nos concluímos toda a nossa atividade às 9h25min, deu tempo de resolvermos as questões 1 e 14 da lista de fixação de Permutação Simples e aplicamos o jogo Cartas da Combinatória, adaptado de Pinheiro (2008), com cerca de 20 minutos restante da aula. Explicamos as regras do jogo e que, basicamente, funcionava como o jogo de baralho, que eles teriam que formar trincas (colocamos exemplos de trincas no Datashow) e quem conseguisse formar a primeira trica (três cartas que representavam o mesmo resultado) ganharia o jogo. Percebemos que os alunos se divertiram bastante, apesar de encontrar dificuldades em fazer algumas trinas para ganhar o jogo. Algumas vezes eramos acionados para tirarmos dúvidas sobre as trincas, tivemos um momento de bastante intensidade percorrendo os grupos e nos divertimos junto com os alunos. Logo após o intervalo, também houve a aplicação da Atividade 4. Deixamos os grupos cientes que nos dois últimos horários estudaríamos mais um ponto fundamental para o entendimento das interpretações e resoluções dos problemas em Análise Combinatória. A seguir descreveremos o nosso quinto encontro (quarta atividade de ensino).

## 3.5 QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro ocorreu no dia 22 de Junho de 2017 (quinta-feira), no horário das 10h20min às 12h00min. Neste dia, aplicamos nossa 4ª atividade relacionada com a Diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples.

Assim que os alunos voltaram do intervalo, a sala já estava preparada para iniciarmos a Atividade 4. Distribuímos duas copias da atividade para cada grupo, contendo seis questões e o quadro 4, pedimos que eles iniciassem as resoluções e preenchimento de tudo que fosse solicitado, se esforçando ao máximo para completar as justificativas contidas na tabela e as 10h30min demos inícios a atividade. Como nós já esperávamos que alguns ainda não perceberiam os casos de Combinação Simples e resolveriam as questões como Arranjo Simples, fomos nos antecipando, passando pelos grupos e dando orientações, geralmente, para que montassem as possibilidades, verificassem se alguns agrupamentos se diferenciavam de outros baseados no que a questão pedia e se o resultado se confirmava com o cálculo encontrado anteriormente. Neste dia, após essas orientações fui bastante solicitado pelos grupos para verificar se o que eles estavam fazendo estava correto, principalmente nas justificativas. Durante todo o tempo mantemos a postura de pedir para que eles montassem, comparassem e fizessem geralmente a pergunta "Quando você mudou a ordem de escolha dos elementos, mudou o evento?". O que era explicado neste momento, já tinha sido feito na atividade anterior, com uma diferença. Não tínhamos problemas de Combinação Simples para comparar e isso ainda os confundia. A seguir, quadro da Atividade 4 e a ser preenchido pelos grupos.

**Figura 28 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 4.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | | | | |
| 2ª | | | | |
| 3ª | | | | |
| 4ª | | | | |
| 5ª | | | | |
| 6ª | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A seguir, Instruções e perguntas após o quadro da Atividade 4, que serão respondidas pelos grupos.

**Figura 29 -** Instruções e perguntas após o quadro da Atividade 4.

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento não altera o agrupamento a questão é um exemplo de **combinação dos elementos**.

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento altera o agrupamento a questão é um exemplo de **arranjo dos elementos.**

---

Quais das questões apresentadas são de arranjo? Quais das questões apresentadas são de combinação?

Simbolicamente a combinação de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por:

$$C_{5,2} \quad ou \quad C_5^2$$

Simbolicamente o Arranjo de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por :

$$A_{5,2} \quad ou \quad A_5^2$$

Represente as seis questões na forma simbólica.

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nossa intenção era fazer com que os grupos respondessem as seis questões propostas na atividade, identificassem em quais delas a ordem de escolha dos elementos não alterava o agrupamento e preenchessem o quadro 4 dando suas justificativas sobre porque alterava ou não os agrupamentos. E após o preenchimento da tabela, identificassem as questões que seriam de Arranjo Simples ou Combinação Simples através de suas simbologias, como na imagem. Agora apresentamos o preenchimento dos quadros realizados pelos oito grupos na Atividade 4.

**Figura 30 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 1.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Formar apertos de mão | | x | Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma |
| 2ª | Escolher rainha e princesa | x | | Se trocar alguém de posição, ela não será mais a rainha |
| 3ª | Formar duplas | | x | Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma |
| 4ª | Escolher dois esmaltes | | x | Esmalte amarelo e vermelho ou vermelho e amarelo a escolha não mudou. |
| 5ª | Formar grupos | | x | Se o trio for ABC ou CBA continua o mesmo |
| 6ª | Distribuir ouro, prata e bronze | x | | Se você falar que João foi o 1° e vier outra pessoa falar que ele é o 3°, não é a mesma coisa. |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 30, verificamos que o Grupo 1 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 31 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 2.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Realização do trabalho de matemática | | x | Porque são as mesmas duplas |
| 2ª | Possibilidades de escolha das garotas | x | | Depende das escolhas das candidatas |
| 3ª | Duplas de funcionários | | x | Se mudar os mesmo de posição, se for A e B ou B e A continua o mesmo. |
| 4ª | Escolher esmaltes | | x | Se for escolhido esmalte A e B ou B e A continua o mesmo |
| 5ª | Grupo de professores | | x | Se for escolhido grupos A, B e C ou A, C, B continua o mesmo |
| 6ª | medalhas | x | | Depende da escolha dos primeiros lugares |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 31, verificamos que o grupo 2 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 32 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 3.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Apertar mãos | | x | A dupla xy ou yx é a mesma |
| 2ª | Escolher rainha e princesa | x | | Rainha x e princesa y é diferente de rainha y e princesa x |
| 3ª | Escolher uma duplas | | x | A dupla xy ou yx é a mesma. |
| 4ª | Escolher dois esmaltes | | x | Se pegar os esmaltes xy ou yx não muda. |
| 5ª | Escolher um trio de professores | | x | O trio xyz ou zyx é o mesmo |
| 6ª | Escolher os 3 primeiros | x | | Ou: x Pr: y Bronze: z é diferente de Ou: z Pr: y Br: x |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 32, verificamos que o Grupo 3 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 33 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 4.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Formar duplas | | X | Amigos AB ou BA, a dupla permanece a mesma |
| 2ª | Escolher rainha e princesa | X | | Se a rainha for A e a princesa B se fizermos o contrário o evento mudou |
| 3ª | Escolher duplas | | X | Se funcionário AB ou BA a dupla permanecerá a mesma |
| 4ª | Escolher 2 esmaltes | | X | Se ela escolher os esmaltes AB ou BA a escolha foi a mesma. |
| 5ª | Escolher trios | | X | Se formar o trio ABC ou CBA o trio é o mesmo |
| 6ª | Escolher 1º, 2º e 3º colocados | X | | Se o 1º for A, o 2º B e o 3º C se trocar algum deles de posição o evento não é mais o mesmo |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 33, verificamos que o grupo 4 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 34 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 5.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Formar duplas | | X | porque a dupla será a mesma |
| 2ª | | X | | Se trocar não será a mesma |
| 3ª | | | X | Se trocar será a mesma |
| 4ª | | | X | Se trocar será a mesma |
| 5ª | | | X | Se trocar será a mesma |
| 6ª | | X | | Se trocar não será a mesma |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na figura 34, verificamos que o Grupo 5 não completou todo o quadro , deixando de responder “o que a questão pedia”, nas 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª questão. Os outros dados solicitados foram preenchidos corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 35 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 6.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Quantos apertos de mão foram dados | | x | As duplas permanecem a mesma |
| 2ª | As possibilidades de escolha das garotas | x | | Se mudar a rainha ela não poderá se repetir |
| 3ª | As maneiras que puderam ser divididos os funcionários | | x | |
| 4ª | De quantas maneiras poderá escolher os esmaltes que possui | | x | Se mudar a ordem não mudará o agrupamento |
| 5ª | Quantos grupos de professores são possíveis formar | | x | Se mudar o evento o agrupamento continua o mesmo |
| 6ª | De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas | x | | Se mudar o primeiro de posição ele deixa de ser o primeiro |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 35, verificamos que o Grupo 6 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 36 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 7.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | Número de apertos de mão | | x | Não muda nada os amigos continuam os mesmos |
| 2ª | Escolha de duas garotas | x | | Porque o resultado altera a dupla |
| 3ª | Dupla de funcionários | x | | Porque o resultado altera a dupla |
| 4ª | Escolher dois esmaltes | x | | O resultado altera as cores |
| 5ª | Grupos de 3 professores | x | | Porque o resultado altera a dupla |
| 6ª | Distribuição de medalhas | x | | As medalhas podem ser alteradas de posição |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 36, verificamos que o Grupo 7 se equivocou no preenchimento do quadro nas questões três, quatro e cinco, dizendo que a ordem de escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento nessas questões.

**Figura 37 -** Quadro preenchido da Atividade 4 pelo Grupo 8.

| Questão | O que a questão pedia? | A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? | | Justificativa |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| 1ª | quantos apertos de mão | | X | Pois do mesmo jeito os três apertariam |
| 2ª | Possibilidades de escolha | X | | Pois mudaria a posição da ganhadora |
| 3ª | Dupla de funcionários | | X | Pois as duplas são as mesmas |
| 4ª | Escolha de esmaltes | | X | Pois não altera os esmaltes |
| 5ª | Grupos de professores | | X | O evento continua o mesmo |
| 6ª | Distribuição de medalhas | X | | Pois alterará as posições certas |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 37, verificamos que o grupo 8 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

Após o término da atividade pelos alunos, às 11h10min demos início a discussão da tabela e justificativas de cada grupo, apontando o que concordamos ou não.

Neste dia, a primeira equipe acabou a atividade em cerca de 30 minutos e logo depois, as outras equipes foram terminando, com o último grupo fechando a atividade em, aproximadamente, 38 minutos. Concluímos toda a atividade 4 às 11h30min, em seguida aplicamos o jogo Dominó Combinatório, retirado de Pinheiro (2008). Explicamos as regras do jogo e que, basicamente, funcionava como o jogo de dominó, (colocamos exemplos no Datashow) e quem conseguisse ficar primeiro sem nenhuma peça na mão ganharia o jogo. Entre os jogos, apresentados naquela manhã, foi o que eles mais gostaram. Alguns ainda pediram, logo no começo, se poderiam continuar jogando o jogo Cartas da Combinatória, mas assim que jogavam o dominó foram unanimes em dizer que ele era mais divertido, acredito por terem tido mais facilidade em comparar as peças desse jogo.

A seguir, mostraremos a análise das justificativas na Atividade 4.

Na Atividade 4 pedimos para que os alunos justificassem se a ordem de escolhas dos elementos influencia na formação dos agrupamentos, ou seja, se a ordem de escolhas desses elementos importa ou não para se realizar o evento. A fim de diferenciar Arranjo Simples de Combinação Simples.

**Quadro 32 -** Análise das justificativas dos grupos para as questões em que a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento (Atividade 4).

(Continua)

| Alunos | GRUPO 1 | Análise |
|---|---|---|
| $A_3$, $A_8$, $A_{10}$ e $A_{37}$ | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Formar apertos de mão. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Escolher rainha e princesa. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se trocar alguém de posição ela não será mais rainha. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Formar duplas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Escolher dois esmaltes. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Formar grupos. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se o trio for ABC ou CBA continua o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Distribuir ouro, prata e bronze. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se você falar que João foi 1º e vim outra pessoa e falar que ele foi o 3º, não é a mesma coisa. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 2** | |
| | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Porque são as mesmas duplas. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Possibilidades das escolhas das garotas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Depende das escolhas das candidatas. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Dupla de funcionários. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de |

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| $A_2$, $A_9$, $A_{24}$ e $A_{31}$ | mudar os mesmos de posição, se for A e B ou B e A continua o mesmo. | Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Escolher esmaltes. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se for escolhido esmalte A e B ou B e A continua o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Grupo de professores. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se for escolhido grupo A, B e C ou A, C, B continua o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Medalhas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Depende da escolha dos primeiros lugares. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 3** | |
| $A_{18}$, $A_{22}$ $A_{23}$ e $A_{27}$ | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Aperto de mão. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** A dupla xy ou yx é a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Escolher a rainha e a princesa. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Rainha x e princesa y é diferente de rainha y e princesa x. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Escolher uma dupla. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** A dupla xy ou yx é a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Escolher dois esmaltes. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se pegar os esmaltes xy ou yx não muda. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Escolher um trio de prof. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** O trio xyz ou zyx é o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Escolher os 3 primeiros. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Ou x, Pr y, Bronze z é diferente de Ou z, Pr y, Br x. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 4** | |
| $A_4$, $A_{11}$, | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Formar duplas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Amigas AB ou BA, a dupla permanece a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Escolher rainha e princesa. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se a rainha for A e a princesa for B, se fizermos o contrário, o evento mudou. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| $A_{21}$ e $A_{28}$ | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Formar duplas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se funcionar AB ou BA a dupla permanecerá a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Escolher dois esmaltes. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se ela escolher os esmaltes AB ou BA a escolha foi a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Formar trios. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** SE formar o trio ABC ou CBA o trio é o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Escolher 1º, 2º e 3º colocados. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se o 1º for A, o 2º B e o 3º C se trocar algum deles de posição o evento não é mais o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 5** | |
| $A_{16}$, $A_{19}$, $A_{26}$ e $A_{32}$ | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Formar duplas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Porque a dupla será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** (Não respondeu). **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se trocar não será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** (Não respondeu). **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se trocar será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** (Não respondeu). **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** (Não respondeu). | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** (Não respondeu). **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** (Não respondeu). | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** (Não respondeu). **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se trocar não será a mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 6** | |
| | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Quantos apertos de mãos foram dados. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** As duplas permanecem às mesma. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** As possibilidades de escolha das duplas. **A ordem** | Justificativa válida para diferenciar |

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ | **de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se mudar a rainha ela não poderá se repetir. | Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** As maneiras que poderam ser divididos os funcionários. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** (Não respondeu). | Não apresentou justificativa |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** De quantas maneiras poderá escolher os esmaltes que possui. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se mudar a ordem, não mudará o agrupamento. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Quantos grupos de professores são possíveis formar. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Se mudar o evento o agrupamento continua o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** De quantas maneiras poderão ser distribuídas as medalhas. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Se mudar o primeiro de posição, ele deixa de ser o primeiro. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **GRUPO 7** | |
| $A_{25}$, $A_{30}$, $A_{34}$ e $A_{38}$ | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Não muda nada os amigos permanecem os mesmos. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Porque o resultado altera duplas. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** Porque o resultado altera a dupla. | Justificativa não válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** O resultado altera as cores. | Justificativa não válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** O resultado altera as cores. | Justificativa não válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Sim. **Justificativa:** as medalhas podem alterar a posição. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |

(conclusão)

| | GRUPO 8 | |
|---|---|---|
| $A_6$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{29}$ e $A_{36}$ | **QUESTÃO 1 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** pois do mesmo jeito os dois apertariam. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 2 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** pois mudaria a posição da ganhadora. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 3 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Pois as duplas são as mesmas. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 4 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Pois não altera os esmaltes. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 5 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** O evento continua o mesmo. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |
| | **QUESTÃO 6 - O que a questão pedia?** Realização do trabalho de matemática. **A ordem de escolha dos elementos importa?** Não. **Justificativa:** Pois alteraria a posição certa. | Justificativa válida para diferenciar Arranjo de Combinação. |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: Diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples**

Estudantes participantes: 32

**Quadro 33 -** Validade das justificativas da Atividade 4.

| Justificativas | Valor absoluto | % |
|---|---|---|
| Válidas | 44 | 91,67 |
| Parcialmente válidas | 0 | 0 |
| Inválidas | 3 | 6,25 |
| Não apresentou | 1 | 2,08 |
| Total | 0 | 100 |

Fonte: Autor (2017)

De modo geral, podemos verificar que, apenas o grupo sete se equivocou na hora de analisar se a ordem de escolhas dos elementos acabava influenciando na mudança ou não do agrupamento. Errando a metade das questões e consequentemente suas justificativas. Quase todas as justificativas foram validadas, 91,67%, inválidas 6,25%, e uma justificativa ficou em branco, deixada pelo grupo 6.

A seguir, descreveremos o sexto encontro (quinta atividade de ensino).

## 3.6 SEXTO ENCONTRO

O sexto encontro ocorreu no dia 23 de Junho de 2017 (sexta-feira), no horário das 10h20min às 12h00min. Neste dia, aplicamos nossa quinta atividade relacionada com Arranjo Simples. Os alunos voltaram do intervalo, organizamos a sala novamente com os mesmo grupos das atividades anteriores, distribuímos os envelopes com as atividades que continha duas copias com seis questões e o Quadro 5, cada uma e demos início a atividade as 10h30min. Neste dia, os grupos encontraram facilidade para resolver as questões propostas na atividade 5, o que gerou maiores discursões e dúvidas nos grupos, foi o preenchimento da tabela, principalmente nas duas últimas colunas. Pedimos, a todo o momento, que tentassem lembrar a resolução da questão quatro sobre completar fatoriais.

**Figura 38 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 5.

| **Ques-tão** | **Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?** | **Qual o número p de elementos de cada agrupamen-to ?** | **A ordem dos elementos altera o agrupamento ?** | | **Qual o número de possibilidades da** | | | | **Qual o total de possibili-dades?** | **Cálculo realizado para obter o resultado** | **Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.** | **Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| **1ª** | | | | | | | | | | | | |
| **2ª** | | | | | | | | | | | | |
| **3ª** | | | | | | | | | | | | |
| **4ª** | | | | | | | | | | | | |
| **5ª** | | | | | | | | | | | | |
| **6ª** | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Nossa pretensão era fazer com que os grupos preenchessem o Quadro 5 e a partir da última coluna percebessem o padrão, gerando, assim, uma fórmula geral para se resolver problemas de Arranjo Simples, além de formalizar uma conclusão, sobre Arranjo Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”.

Neste dia, apesar dos grupos terem terminado de responder as questões em um espaço de tempo curto, considero que, a dúvida maior era no preenchimento das duas últimas colunas do Quadro 5 e percebemos que eles ainda não estavam tão a vontade para expor suas conclusões. Nossa postura para orientá-los a preencher a penúltima coluna era:

1º - Perguntar o que faltava para o resultado na antepenúltima coluna virar um número fatorial;

2º - Após completarem o resultado da antepenúltima coluna, transformando-o em um número fatorial, perguntavamos o que eles fariam para corrigir aquela multiplicação que eles tinham feito em excesso, alterando o resultado. (Isso já tinha sido feito no exercício quatro na lista de fatorial)

Nossa postura para orientá-los a preencher a última coluna era,

1º - Pedir para que eles identificassem quem era o “n” e o “p” em cada questão;

2º - Solicitar que eles identificassem se no resultado, já estavam aparecendo os valores de “n” e/ou “p”. (Neste momento tivemos um problema com a questão 1, pois o resultado na penúltima coluna, já estava em função de “n” e “p” e assim não precisariam alterar nada para completar a última coluna e não enchergariam o padrão para gerar a fórmula, começando por essa questão, ou seja, essa questão deve ser altera de lugar, podendo ser a última em uma outra oportunidade. Então, os orientei que fizessem a partir da questão 2. Começamos nossa análise daí em diante para depois voltar a questão 1);

3º - Pedi que eles verificassem, aonde o resultado não estivesse em função de “n” e/ou “p”, o que eles poderia fazer para colocá-los, sem alterá-los.

Algumas perguntas foram colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões e serviram de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. O que colocamos no quadro foi o seguinte:

“Nos exemplos anteriores”:

• Formamos agrupamentos (conjunto de elementos organizados em sequencia)?

• Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?

• Para se montar cada agrupamento, escolhemos **p** elementos dos **n** a disposição do evento?

• O que é o arranjo simples de “n” elementos tomados p a p?

• Que fórmula (padrão) matemática serviria para resolver qualquer problema de arranjo simples ($A_{n,p}$)?

A seguir apresentamos o preenchimento dos quadros realizados pelos oito grupos na Atividade 5.

**Figura 39 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 1.

| Ques-tão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamen-to ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | - | - | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | - | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | - | - | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | - | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | - | - | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | $\frac{6!}{(6-2)!}$ |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | $\frac{6!}{(6-4)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 39, verificamos que o Grupo 1 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 40 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 2.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | $\frac{6!}{(6-2)!}$ |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | $\frac{6!}{(6-4)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 40, verificamos que o Grupo 2 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 41 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 3.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | $\frac{6!}{(6-2)!}$ |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | $\frac{6!}{(6-4)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 41, verificamos que o Grupo 3 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas. Uma observação é que o valor numérico da 4ª etapa na questão 6 foi esquecida, visto que o total de possibilidade está correto.

**Figura 42 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 4.

| Ques-tão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamen-to ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 42, verificamos que o Grupo 4 completou quase todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas. Só deixou de completar os resultados em função de **n** e **p** nas questões cinco e seis.

**Figura 43 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 5.

| Ques-tão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamen-to ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibili-dades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 43, verificamos que o Grupo 5 completou corretamente o quadro até a quarta questão, deixando as demais em branco.

**Figura 44 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 6.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | $\frac{6!}{(6-2)!}$ |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | $\frac{6!}{(6-4)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 44, verificamos que o Grupo 6 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 45 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 7.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 4! | 4.3 | | |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 5! | 5.4.3 | | |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 5! | 5.4 | | |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 6! | 6.5.4 | | |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 6! | 6.5 | | |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 6! | 6.5.4.3 | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 45, verificamos que o Grupo 7 não finalizou a atividade deixando de completar o quadro nas duas últimas colunas. O restante que foi feito está correto.

**Figura 46 -** Quadro preenchido da Atividade 5 pelo Grupo 8.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Qual o número p de elementos de cada agrupamento ? | A ordem dos elementos altera o agrupamento ? | | Qual o número de possibilidades da | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | 1ª etapa? | 2ª etapa? | 3ª etapa? | 4ª etapa? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | x | | 4 | 3 | | | 12 | 4.3 | $4!/2!$ | $\frac{4!}{(4-2)!}$ |
| 2ª | 5 | 3 | x | | 5 | 4 | 3 | | 60 | 5.4.3 | $5!/2!$ | $\frac{5!}{(5-3)!}$ |
| 3ª | 5 | 2 | x | | 5 | 4 | | | 20 | 5.4 | $5!/3!$ | $\frac{5!}{(5-2)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | x | | 6 | 5 | 4 | | 120 | 6.5.4 | $6!/3!$ | $\frac{6!}{(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 2 | x | | 6 | 5 | | | 30 | 6.5 | $6!/4!$ | $\frac{6!}{(6-2)!}$ |
| 6ª | 6 | 4 | x | | 6 | 5 | 4 | 3 | 360 | 6.5.4.3 | $6!/2!$ | $\frac{6!}{(6-4)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Na Figura 46, verificamos que o Grupo 8 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões na Atividade 5.

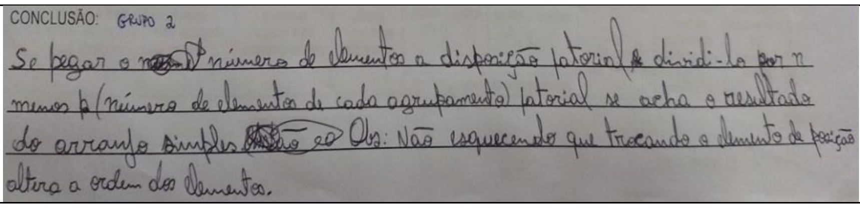
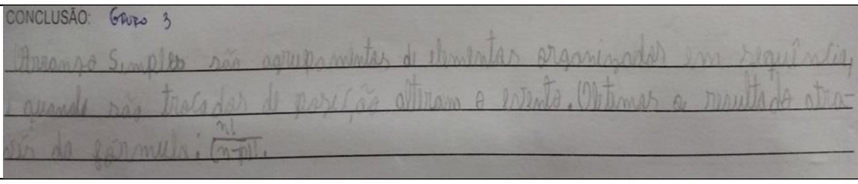
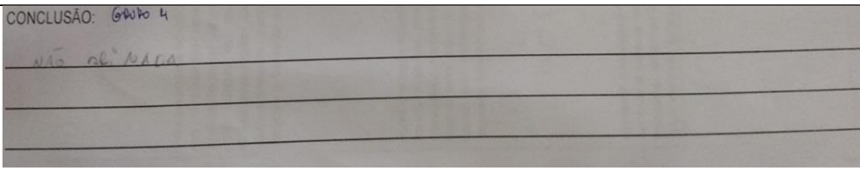
Na quinta atividade, queríamos que os alunos chegassem à fórmula geral do Arranjo Simples e lembrassem que a ordem de escolhas dos elementos é importante na formação dos agrupamentos.

**Quadro 34 -** Análise das conclusões dos grupos a respeito do que seria Arranjo Simples de "n" elementos tomados "p" a "p" (Atividade 5).

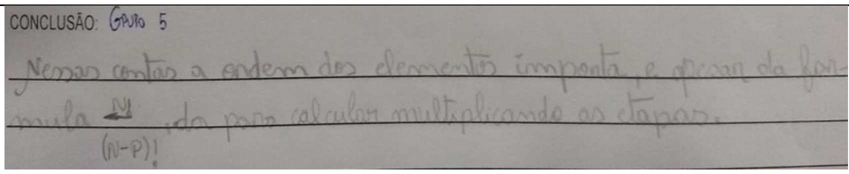
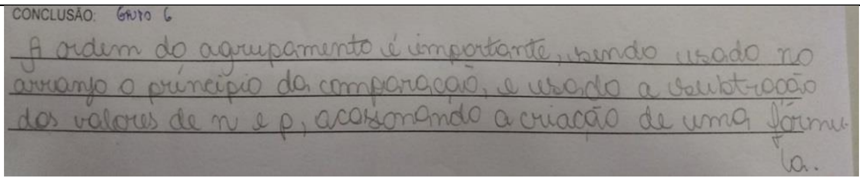
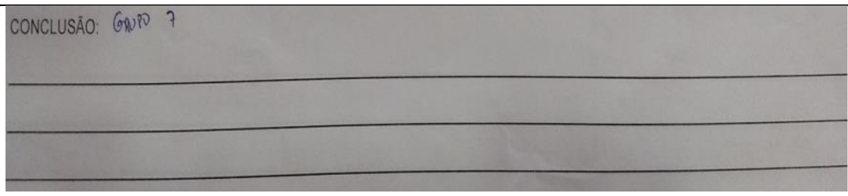
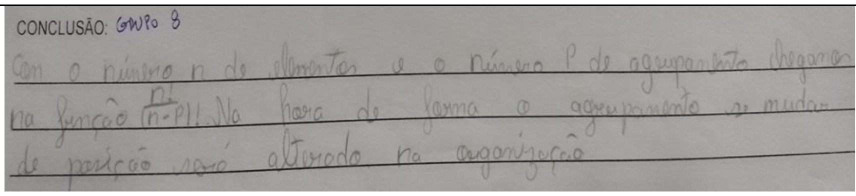
(continua)

<table>
<tr><th>Alunos</th><th>CONCLUSÕES</th><th>Análise</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_3$, $A_8$, $A_{10}$ e $A_{37}$</td><td>CONCLUSÃO: GRUPO 1<br>Concluimos que se mudarmos um elemento de posição alterará o agrupamento, que aprendemos na aula passada, o Arranjo simples pode ser resumido em uma formula geral, n! dividido por n menos p entre parentese fatorial ou $\frac{n!}{(n-p)!}$</td><td rowspan="2">Conclusão válida para Arranjo simples.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 1:<br>Concluímos que se mudarmos um elemento de posição altera o agrupamento, que aprendemos na aula passada, o Arranjo simples pode ser resumido em uma fórmula geral, n!</td></tr>
</table>

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| | dividido por n menos p entre parêntese fatorial ou $\frac{n!}{(n-p)!}$. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 1 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_2$, $A_5$, $A_9$, $A_{24}$ e $A_{31}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 2<br>Se pegar o ~~n~~ número de elementos a disposição fatorial ~~e~~ dividi-lo por n menos p (número de elementos de cada agrupamento) fatorial se acha o resultado do arranjo simples ~~...~~ Obs: Não esquecendo que trocando o elemento de posição altera a ordem dos elementos.<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 2:**<br>Se pegar o número de elementos a disposição fatorial e dividi-lo por n menos p (número de elementos de cada agrupamento) fatorial se acha o resultado do arranjo simples. Obs: Não esquecendo que trocando o elemento de posição altera a ordem dos elementos. | Conclusão válida para Arranjo simples. |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 2 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_{18}$, $A_{22}$ $A_{23}$ e $A_{27}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 3<br>Arranjo Simples são agrupamentos de elementos organizados em sequência, quando são trocados de posição alteram o evento. Obtemos o resultado através da fórmula: $\frac{n!}{(n-p)!}$<br>**Transcrição da conclusão do GRUPO 3:**<br>Arranjo Simples são agrupamentos de elementos em sequência, quando são trocados de posição alteram o evento. Obtemos o resultado através da fórmula $\frac{n!}{(n-p)!}$. | Conclusão válida para Arranjo simples. |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 3 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_4$, $A_{11}$, $A_{21}$ e | <br>CONCLUSÃO: Grupo 4 | Não apresentou |

(continuação)

| | | |
|---|---|---|
| $A_{28}$ | **Transcrição da conclusão do GRUPO 4:**<br>O grupo 4 não apresentou conclusão. | conclusão |
| $A_{16}$, $A_{26}$ e $A_{32}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 5<br>Nessas contas a ordem dos elementos importa, e apesar da fór-<br>mula $\frac{n!}{(n-p)!}$ da para calcular multiplicando as etapas. | Conclusão válida para Arranjo simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 5:**<br>Nessas contas a ordem dos elementos importa, e apesar da fórmula $\frac{n!}{(n-p)!}$, da para calcular multiplicando as etapas. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 5 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 6<br>A ordem do agrupamento é importante, sendo usado no<br>arranjo o princípio da comparação, e usado a subtração<br>dos valores de n e p, acasionando a criação de uma fórmu-<br>la. | Conclusão parcialmente válida para Arranjo simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 6:**<br>A ordem do agrupamento é importante, sendo usado no arranjo o princípio da comparação, e usado a subtração dos valores de n e p, ocasionando a criação de uma fórmula. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 6 comentou sobre a ordem no agrupamento, mas não transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_{15}$, $A_{25}$, $A_{30}$, $A_{34}$, $A_{35}$, $A_{38}$ e $A_{39}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 7 | Não apresentou conclusão |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 7:**<br>O grupo 7 não apresentou conclusão. | |
| $A_6$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{17}$ e $A_{36}$ | <br>CONCLUSÃO: Grupo 8<br>Com o número n de elementos e o número P de agrupamento chegamos<br>na função $\frac{n!}{(n-P)!}$ No hora de forma o agrupamento se mudar<br>de posição será alterado na organização | Conclusão válida para Arranjo |

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 8:** Com o número n de elementos e o número p de agrupamento chegamos na função $\frac{n!}{(n-p)!}$. Na hora de formar o agrupamento se mudar de posição será alterado na organização. | simples. |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 8 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: Arranjo Simples**

Estudantes participantes: 35

**Quadro 35 -** Validade das conclusões da Atividade 5.

| Conclusões | Valor absoluto | % |
|---|---|---|
| Válidas | 5 | 62,5 |
| Parcialmente válidas | 1 | 12,5 |
| Inválidas | 0 | 0 |
| Não apresentou | 2 | 25 |
| Total | 8 | 100 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Das oito conclusões esperadas, vimos que 25% dos grupos não conseguiram elaborá-las, grupos quatro e sete. Neste dia, os dois grupos foram os últimos a acabarem as resoluções das questões e sentiram maiores dificuldades no preenchimento da tabela. De modo geral, obtivemos boas conclusões, visto que todas as outras seis equipes, 75%, citaram sobre a importância da ordem de escolha dos elementos; 62,5% expôs a fórmula encontrada para se realizar o cálculo e tivemos um destaque especial do grupo cinco que lembrou: “...apesar da fórmula, da para calcular multiplicando as etapas”. Verificamos também que todos os grupos que concluíram a atividade levaram um tempo maior, em relação à última atividade. Considero que o grupo 6 elaborou uma conclusão bastante equivocada, apesar de ter citado que “a ordem do agrupamento é importante”.

Neste dia, quase todas as equipes acabaram em aproximadamente 40 minutos a atividade e após a leitura das conclusões, preenchimento do quadro e análise dos pontos positivos e negativos, elaboramos nossa conclusão a respeito do que seria Arranjo Simples “n” elementos. Isso tudo levou cerca de 20 minutos.

“Arranjo Simples de “n” elementos ($A_{n,p}$), são agrupamentos formados com **p** dos **n** elementos dados, sendo p ≤ n, diferentes um do outro pela ordem ou natureza dos seus elementos onde:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A seguir apresentamos a descrição do nosso sétimo encontro (sexta sessão de ensino).

## 3.7 SÉTIMO ENCONTRO

O sétimo encontro ocorreu no dia 25 de Junho de 2017 (segunda-feira), no horário das 10h20min às 12h00min. Neste dia, aplicamos nossa sexta atividade relacionada com Combinação Simples. De modo geral, neste dia, os grupos encontraram dificuldade para resolver a atividade 6. Alguns grupos ainda estavam confusos quando as questões eram de Arranjo Simples ou Combinação Simples; já prevendo tal dificuldade, ficamos em alerta incentivando a turma para eles não se esquecerem de verificar se os agrupamentos mudam quando os elementos são escolhidos em ordem diferentes e que tentassem montar as possibilidades, para comparar com as respostas encontradas.

**Figura 47 -** Quadro a ser preenchido na Atividade 6.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nosso objetivo era fazer com que os grupos preenchessem o quadro 6 e a partir da última coluna percebessem o padrão e gerasse uma fórmula geral para se resolver questões de Combinação Simples, além de formalizar uma conclusão, sobre o Assunto.

Na sexta atividade, apesar de termos trabalhado a diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples e termos pedido, no início da aula, que prestassem atenção nesse detalhe, os grupo, neste dia, resolveram algumas das questões propostas com se fossem de Arranjo. Ou porque não perceberam a diferença entre as duas técnicas ou porque não sabiam, ainda, resolver questões desse tipo. Neste dia, aproveitamos as resoluções feitas como Arranjo e pedimos para que eles montassem o total de possibilidades, verificando se correspondia com o resultado encontrado, com isso já íamos trabalhando se a ordem de escolha dos elementos importava na hora de formar os agrupamentos e começavamos a contruir nossa fórmula de Combinação. Nossa postura para orientá-los a responder as questões foi:

1º - Pedir para que verificassem, se o resultado feito por Arranjo, batia com o número de agrupamentos que foram montados;

2º - Questioná-los se a resolução por meio de Arranjo Simples, estava fazendo com que criassem agrupamentos a mais;

3º - Perguntar para eles, se era necessário ter feito a permutação dos elementos dentro de cada arupamento, ou seja, a troca de elementos alterava o agrupamento;

4º - Perguntar o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estava em excesso;

Essas perguntas fizeram com que eles completassem a tabela até a antepenúltima coluna, que neste dia, foi a mais dificultosa, pois expressava o cálculo necessário para de obter o resultado. A partir daí, as dúvidas foram diminuindo, devido as duas últimas colunas terem a ideia da atividade anterior, de completar fatorial e escrever em função de “n” e “p”, respectivamente. Um detalhe em todo esse processo, foi que na questão número um, a penúltima coluna, já estava em função de “n” e “p”,com isso não precisariam mudar nada para preencher a última coluna, descaracterizando o padrão para gerarmos a fórmula, ou seja, esta questão deve ser altera de lugar, podendo passar para a última questão em uma próxima oportunidade. E então, orientamos os alunos que tentassem identificar o padrão a partir da 2º coluna.

Após o preenchimento do quadro 6, algumas perguntas foram colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões e serviram de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões.

As perguntas foram:

- Formamos agrupamentos?
- Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?
- Para se montar cada agrupamento, escolhemos **p** elementos dos **n** a disposição do evento?
- O que é a combinação simples de “n” elementos tomados p a p?
- Que fórmula (padrão) matemática serviria para resolver qualquer problema de combinação simples ($C_{n,p}$)?

A seguir apresentamos o preenchimento dos quadros realizados pelos oito grupos na Atividade 6.

**Figura 48 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 1.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! = 2 | 4 | 3 | - | - | - | - | 6 | $\frac{12}{2!}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! = 2 | 5 | 4 | - | - | - | - | 10 | $\frac{20}{2!}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! = 6 | 5 | 4 | 3 | - | - | - | 10 | $\frac{60}{3!}$ | $\frac{5!}{3!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.3!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | | x | 2! = 2 | 6 | 5 | 4 | - | - | - | 15 | $\frac{30}{2!}$ | $\frac{6!}{4!.2!}$ | $\frac{6!}{(6-4)!.2!}$ |
| 5ª | 6 | 4 | | x | 4! = 24 | 6 | 5 | 4 | 3 | - | - | 15 | $\frac{360}{4!}$ | $\frac{6!}{2!.4!}$ | $\frac{6!}{(6-4)!.4!}$ |
| 6ª | 7 | 5 | | x | 5! = 120 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | - | 21 | $\frac{2520}{5!}$ | $\frac{7!}{2!.5!}$ | $\frac{7!}{(7-2)!.5!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 48, verificamos que o Grupo 1 completou todo o quadro corretamente, nas seis questões propostas.

**Figura 49 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 2.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 10 | $\frac{5.4}{2}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | | 5 | 4 | 3 | | | | 10 | $\frac{5.4.3}{6}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-3)!.3!}$ |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 49, verificamos que o Grupo 2 completou corretamente o quadro até a terceira questão, deixando de finalizar as questões quatro, cinco e seis.

**Figura 50 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 3.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2!}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 10 | $\frac{5.4}{2!}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 20 | $\frac{5.4.3}{3!}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-3)!.3!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | | x | 2! | 6 | 5 | 4 | | | | 15 | $\frac{6.5}{2!}$ | $\frac{6!}{4!.2!}$ | $\frac{6!}{(6-4)!.2!}$ |
| 5ª | 6 | 4 | | x | 4! | 6 | 5 | 4 | 3 | | | 15 | $\frac{6.5.4.3}{4!}$ | $\frac{6!}{2!.4!}$ | $\frac{6!}{(6-4)!.4!}$ |
| 6ª | 7 | 5 | | x | 5! | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | | 42 | $\frac{7.6.5.4.3}{5!}$ | $\frac{7!}{2!.5!}$ | $\frac{7!}{(7-5)!.5!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 50, verificamos que o Grupo 3 completou quase todo o quadro corretamente, se equivocando apenas no total de possibilidades da terceira (o correto seria 10) e na sexta questão (o correto seria 21).

**Figura 51 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 4.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 10 | $\frac{5.4}{2}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 10 | $\frac{5.4.3}{6}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-3)!.3!}$ |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 51, verificamos que o Grupo 4 completou corretamente o quadro até a terceira questão, deixando de finalizar as questões quatro, cinco e seis.

**Figura 52 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 5.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 10 | $\frac{5.4}{2}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 10 | $\frac{5.4.3}{6}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-3)!.3!}$ |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 52, verificamos que o Grupo 5 completou corretamente o quadro até a terceira questão, deixando de finalizar as questões quatro, cinco e seis.

**Figura 53 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 6.

| Questão | Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | | | |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 20 | $\frac{5.4}{2!}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{2!.(5-2)!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 60 | | | |
| 4ª | 6 | 3 | | x | 3! | 6 | 5 | 4 | | | | 120 | 6.5 | | |
| 5ª | 6 | 4 | | x | 4! | 6 | 5 | 4 | 3 | | | 360 | 6.5.4.3 | | |
| 6ª | 7 | 5 | | x | 5! | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | | 2540 | $\frac{7.6.5.4.3}{5!}$ | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 53, verificamos que o Grupo 6 não completou todo o quadro, fazendo-o de forma correta até o preenchimento das etapas. Na coluna referente ao total de possibilidades errou na 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questão (o correto seria 10, 10, 15 e

15, respectivamente); na antepenúltima coluna preencheu corretamente as questões 2 e 6; nas duas últimas colunas só completou corretamente a 2ª questão e nas demais deixou em branco.

**Figura 54 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 7.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 10 | $\frac{5.4}{2}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{(5-2)!.2!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 10 | $\frac{5.4.3}{6}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{(5-3)!.2!}$ |
| 4ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Na Figura 54, verificamos que o Grupo 5 completou corretamente o quadro até a terceira questão, deixando de finalizar as questões quatro, cinco e seis.

**Figura 55 -** Quadro preenchido da Atividade 6 pelo Grupo 8.

| Questão | Qual o número n de elementos à disposição do evento, da situação? | Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento? | A ordem dos elementos altera o agrupamento? | | Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!). | Qual o número de possibilidades da | | | | | | Qual o total de possibilidades? | Cálculo realizado para obter o resultado | Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial. | Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | SIM | NÃO | | 1ª escolha para o agrupamento? | 2ª escolha para o agrupamento? | 3ª escolha para o agrupamento? | 4ª escolha para o agrupamento? | 5ª escolha para o agrupamento? | 6ª escolha para o agrupamento? | | | | |
| 1ª | 4 | 2 | | x | 2! | 4 | 3 | | | | | 6 | $\frac{4.3}{2!}$ | $\frac{4!}{2!.2!}$ | $\frac{4!}{(4-2)!.2!}$ |
| 2ª | 5 | 2 | | x | 2! | 5 | 4 | | | | | 20 | $\frac{5.4}{2!}$ | $\frac{5!}{2!.3!}$ | $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ |
| 3ª | 5 | 3 | | x | 3! | 5 | 4 | 3 | | | | 60 | $\frac{5.4.3}{3!}$ | $\frac{5!}{3!.2!}$ | $\frac{5!}{3!(5-3)!}$ |
| 4ª | 6 | 3 | | x | 2! | 6 | 5 | 4 | | | | 120 | $\frac{6.5.4}{6!}$ | $\frac{6!}{3!3!}$ | $\frac{6!}{3!(6-3)!}$ |
| 5ª | 6 | 4 | | x | 4! | 6 | 5 | 4 | 3 | | | 360 | $\frac{6.5.4.3}{4!}$ | $\frac{6!}{4!2!}$ | $\frac{6!}{4!(6-4)!}$ |
| 6ª | 7 | 5 | | x | 5! | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | | 2520 | $\frac{7.6.5.4.3}{5!}$ | $\frac{7!}{5!2!}$ | $\frac{7!}{5!(7-5)!}$ |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

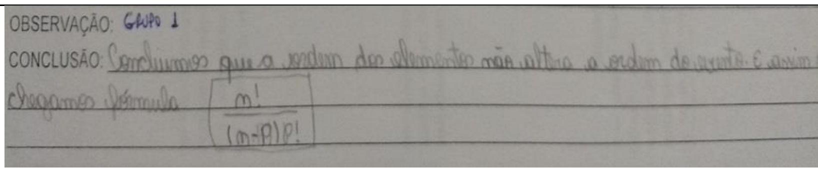
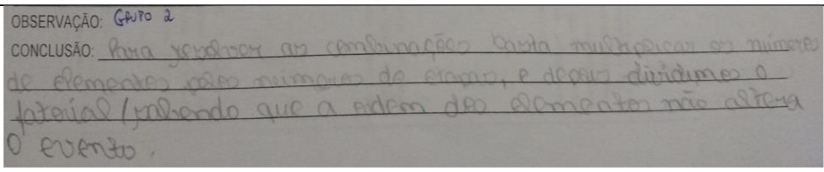
Na Figura 55, verificamos que o Grupo 8 completou todo o quadro se equivocando no preenchimento da coluna que representa o total de possibilidades, nas questões 2, 3, 4, 5 e 6. E nas últimas colunas errou no preenchimento da questão 4.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões da Atividade 6.

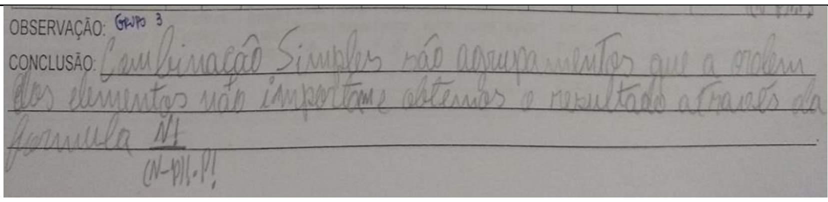
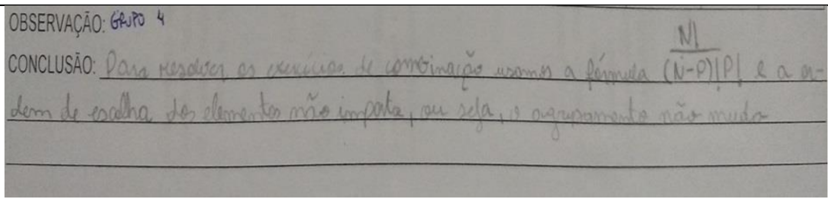
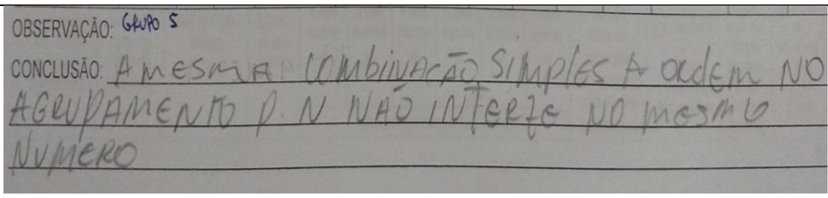
Na sexta atividade, queríamos que os alunos chegassem à fórmula geral da Combinação Simples e lembrassem que a ordem de escolhas dos elementos não é importante na formação dos agrupamentos.

**Quadro 36 -** Análise das conclusões dos grupos a respeito do que seria Combinação Simples de "n" elementos tomados "p" a "p" (Atividade 6).

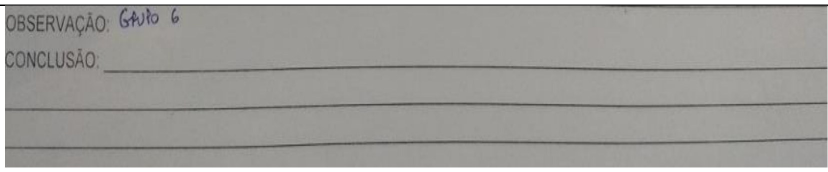
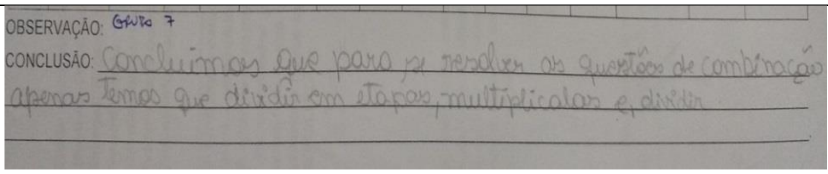
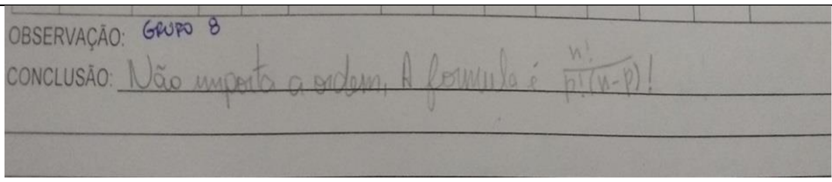
(Continua)

<table>
<tr><th>Alunos</th><th>CONCLUSÕES</th><th>Análises</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_3$, $A_{8}$, $A_{10}$ e $A_{37}$</td><td>
OBSERVAÇÃO: Grupo 1<br>CONCLUSÃO: Concluimos que a ordem dos elementos não altera a ordem do evento. E assim chagamos a fórmula $\frac{n!}{(n-p)!p!}$</td><td rowspan="3">Conclusão válida para Combinação simples.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 1:<br>Concluímos que a ordem dos elementos não altera a ordem do evento. E assim chagamos a fórmula $\frac{n!}{(n-p)!.p!}$.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 1 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Combinação Simples.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{31}$ e $A_9$</td><td>
OBSERVAÇÃO: Grupo 2<br>CONCLUSÃO: Para resolver as combinações basta multiplicar os números de elementos pelos numeros de etapas, e depois dividimos o fatorial (sabendo que a ordem dos elementos não altera o evento.</td><td rowspan="3">Conclusão parcialmente válida para Combinação simples.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 2:<br>Para resolver as combinações basta multiplicar os números de elementos pelos números de etapas, e depois dividimos o fatorial (sabendo que a ordem dos elementos não altera o evento).</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 2 comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento, só</td></tr>
</table>

(continuação)

<table>
<tr><td></td><td>que se atrapalhou na hora de descrever a fórmula. Creio que quis se referir ao cálculo realizado na penúltima coluna da atividade, que já serve como resolução, que seria: o Arranjo dos n elementos p a p dividido por p!.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{18}$, $A_{22}$ e $A_{27}$</td><td><br>OBSERVAÇÃO: Grupo 3<br>CONCLUSÃO: Combinação Simples são agrupamentos que a ordem dos elementos não importam e obtemos o resultado através da formula $\frac{N!}{(N-P)!.P!}$</td><td rowspan="3">Conclusão válida para Combinação simples.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 3:<br>Combinação Simples são agrupamentos que a ordem dos elementos não importa e obtemos o resultado através da fórmula $\frac{n!}{(n-p)!.p!}$.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 3 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Combinação Simples.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_4$, $A_{11}$, $A_{21}$ e $A_{28}$</td><td><br>OBSERVAÇÃO: Grupo 4<br>CONCLUSÃO: Para resolver os exercícios de combinação usamos a fórmula $\frac{N!}{(N-P)!P!}$ e a ordem de escolha dos elementos não importa, ou seja, o agrupamento não muda</td><td rowspan="3">Conclusão válida para Combinação simples.</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 4:<br>Para resolver os exercícios de combinação usamos a fórmula $\frac{n!}{(n-p)!.p!}$ e a ordem de escolha dos elementos não importa, ou seja, o agrupamento não muda.</td></tr>
<tr><td>Análise da conclusão: O grupo 4 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Combinação Simples.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_{16}$, $A_{26}$ e $A_{32}$</td><td><br>OBSERVAÇÃO: Grupo 5<br>CONCLUSÃO: A MESMA COMBINAÇÃO SIMPLES A ORDEM NO AGRUPAMENTO P. N NÃO INTERFE NO MESMO NUMERO</td><td rowspan="2">Conclusão inválida para Combinação</td></tr>
<tr><td>Transcrição da conclusão do GRUPO 5:</td></tr>
</table>

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| | A mesma combinação simples a ordem no agrupamento p n não interfere no mesmo número. | simples. |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 5 não fez uma boa conclusão, pois não comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento e não transcreveu a fórmula correta de Combinação Simples. | |
| $A_1$, $A_7$, $A_{14}$ e $A_{20}$ |  | Não apresentou conclusão |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 6:**<br>O grupo 6 não apresentou conclusão. | |
| $A_{15}$, $A_{25}$, $A_{30}$, $A_{38}$ e $A_{39}$ |  | Conclusão inválida para Combinação simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 7:**<br>Concluímos que para se resolver as questões de combinação apenas temos que dividir em etapas, multiplicá-las e dividir. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 7 não comentou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento e não transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |
| $A_6$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{17}$ e $A_{36}$ |  | Conclusão válida para Combinação simples. |
| | **Transcrição da conclusão do GRUPO 8:**<br>Não importa a ordem, A fórmula é $\frac{n!}{p!.(n-p)!}$. | |
| | **Análise da conclusão:** O grupo 8 fez uma boa conclusão, pois comentou que a ordem de escolha dos elementos altera o agrupamento e transcreveu a fórmula correta de Arranjo Simples. | |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Tema/assunto: Combinação Simples**

Estudantes participantes: 30

**Quadro 37 -** Validade das conclusões da Atividade 6.

| Conclusões | Valor absoluto | % |
|---|---|---|
| Válidas | 4 | 50 |
| Parcialmente válidas | 1 | 12,5 |
| Inválidas | 2 | 25 |
| Não apresentou | 1 | 12,5 |
| Total | 8 | 100 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao observar as conclusões, vimos que o grupo seis não apresentou conclusão e de modo geral, obtivemos boas conclusões, visto que 75% dos grupos citou que a ordem de escolha dos elementos não altera o agrupamento, os grupos um, três, quatro e oito expôs a fórmula encontrada para se realizar o cálculo e tivemos o grupo dois que tentou resumir o cálculo necessário, baseado pela penúltima coluna da atividade, sem o uso da fórmula desenvolvida. Verificamos também que todos os grupos que concluíram a atividade levaram um tempo maior, em relação à atividade anterior. A meu ver o grupo cinco elaborou uma conclusão bastante confusa, onde nada podemos aproveitar.

Após a leitura das conclusões, preenchimento do quadro e análise dos pontos positivos e negativos, verificando seus equívocos, acertos e o que ficou faltando para torná-las mais consistente, elaboramos nossa conclusão a respeito do que seria Combinação Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”, o que levou cerca de 20 minutos. Neste dia, o último grupo a terminar a atividade levou 50 minutos para completá-la. Logo após expusemos a turma nossa conclusão que foi:

“Combinação Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”, onde $n \geq 1$ ($C_{n,p}$), e p um número natural tal que $1 \leq p \leq n$, são todas as escolhas onde a ordem dos elementos no agrupamento não altera o agrupamento. Eles diferenciam-se somente pela natureza de seus elementos. Dada pela seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

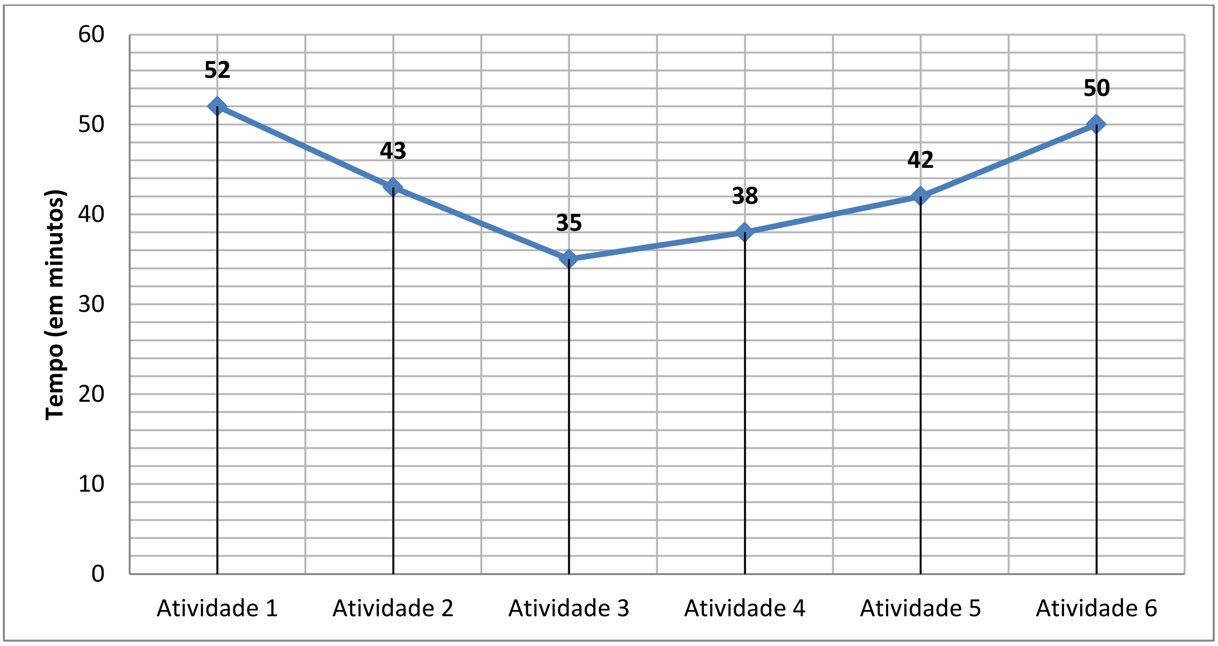
Nos minutos finais da aula resolvemos as questões um, dois e oito de nossa lista de exercícios sobre Combinação Simples. A seguir faremos a descrição do nosso oitavo e último encontro.

## 3.8 OITAVO ENCONTRO

Nosso último encontro ocorreu no dia 28 de maio de 2017 (Quarta-feira) às 08h00mim. Nesse momento agradecemos à turma todo o envolvimento que tiveram com o projeto, lembramos que durantes as aulas, a participação de cada um foi avaliada e que passaríamos um pequeno teste com dez questões, para podermos verificar se houve uma melhora nos seus desempenhos na resolução de questões de Análise Combinatória, comparando com o momento antes das atividades (pré-teste).

O pós-teste iniciou-se às 08h20min e pedi que à medida em que eles fossem acabando as dez questões, fossem logo entregando o teste. O clima dentro da sala foi de bastante serenidade. O primeiro aluno acabou a atividade 30 minutos após o início e o último levou 01h08min para entregá-la. Neste dia, oito alunos faltaram, segundo a lista de frequência. O objetivo do pós-teste foi avaliar os conhecimentos adquiridos pelos discentes após a aplicação das atividades do experimento. Como forma de agradecimento, o professor Marcos ficou com a incumbência de levá-los a uma pizzaria, para fechar nossos encontros confraternizando. Infelizmente não pude participar, por tinha que ministrar aula no período da tarde em Belém. A seguir, mostraremos o tempo máximo (em minutos) utilizado pelos grupos, no preenchimento de cada atividade de ensino.

**Gráfico 24 -** Tempo máximo utilizado pelos alunos no preenchimento das atividades.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

O gráfico mostra o tempo máximo que tivemos de esperar, até o último grupo terminar o preenchimento de toda a atividade e a partir de aí darmos início as discussões sobre o preenchimento da tabela e conclusões por eles elaboradas. As três primeiras atividades tinham características de resoluções bastante parecidas e a partir do momento que os alunos iam tendo contato com a atividade seguinte, o processo se tornava menos dificultoso. As três primeiras atividades, P.F.C., Fatorial e Permutação Simples, respectivamente, nesta ordem, poderiam ser resolvidas pelo P.F.C.. Como os alunos entenderam esse processo logo na primeira atividade, isso facilitou o desenvolvimento das demais. Segundo Sá (1999, p.81), “a experiência tem mostrado que o educando fica mais rápido à medida que as atividades são vencidas e deste modo o maior tempo gasto no início é recompensado posteriormente”.

Já a quarta atividade, apareceu com outras novidades. Ela exigiu muitas vezes que eles montassem os agrupamentos, para perceber se o que eles estavam fazendo modificaria o evento e levaram também um pouco mais de tempo, para preencher as justificativas. Na quinta e sexta atividade, já esperávamos um pouco mais de demora. Os alunos tiveram dúvidas nas últimas duas colunas do Quadro 5, no momento de escrever em forma de fatorial e em função de “n” e “p” e na resolução das questões da atividade 6. Mas, sempre o tinha sido assimilado na atividade anterior, facilitava em muito o preenchimento da atividade seguinte.

Mesmo os alunos tendo elaborado boas conclusões, na maioria das vezes, ela era feita com medo ou receio de se escrever. Talvez, isso se dê ao fato deles não terem o hábito de escrever respostas mais elaboradas, no seu dia a dia, em sala de aula. Nós enquanto professores, geralmente ficarmos satisfeitos com o valor numérico dos resultados. Hoje em dia, praticamente não temos exames, no ensino fundamental e médio, que cobrem questões discursivas e cada vez mais os alunos são treinados para não fazê-las.

## 3.9 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA EXPERIMENTAÇÃO

Com isso, considero que a experimentação foi uma experiência inesquecível, para mim, como professor. Percebi que proporcionou aos alunos uma intensa interação durante as aulas, uma participação efetiva, na hora de arquitetar como desenvolver as atividades, um avanço significativo na resolução de problemas de Análise Combinatória e caracterizou-se pela autonomia que os discentes tiveram em chegar aos resultados, expondo suas ideias, concluindo seus raciocínios matemáticos e de modo geral, fechando conclusões com responsabilidade. O estilo de construção das atividades proporcionou aos alunos liberdade de se expressar, tornando-os sujeitos pensantes, fazendo com que as aulas saíssem da rotina do tradicionalismo, onde na maioria das vezes os alunos são meros espectadores. Desde o início de nossa sequência de ensino, organizamos nossos encontros para, trabalharmos algumas tendências para o ensino de matemática, como a resolução de problemas, o ensino por atividades e o uso de jogos educativos, que deram uma maior movimentação na turma, visto que as aulas se tornaram mais interativas, dinâmicas e divertidas.

Outra atitude importante que vejo, é a resolução de mais exercícios de fixação, mostrando questões que exijam atenção nas tomadas de decisão, na hora de realizar os eventos combinatórios, entendo que despertaria ainda mais o cognitivo dos alunos, fazendo com que seu conhecimento matemático, com relação ao assunto, se elevasse e desenvolvesse, mais ainda, o seu intelecto. O que considero uma das virtudes deste assunto visto por muitos como complexo e ao mesmo tempo desafiador. Nossa experimentação demorou pouco mais de um mês, distribuídas em oito encontros contando com o pré-teste, seis atividades e o pós-teste, tendo o total apoio do professor Marcos, que facilitou, junto a coordenação, nossa liberdade de atuar com a turma durante esse período.

Na próxima seção, apresentamos a análise a *posteriori* e validação do experimento, assim como os resultados, análises dos resultados produzidos na pesquisa e o confronto das análises a *priori* e a *posteriori*.

## 4 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Nesta seção, nosso objetivo visa apresentar os resultados obtidos através da análise posteriori e validação, onde nos apoiaremos na produção dos alunos, tendo como base os registros produzidos por eles em cada aula da nossa sequência de ensino, os resultados do pré-teste, pós-testes, diário de campo e por fim, realizar o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Com o intuito de validar nossa sequência didática e esclarecer nossa experimentação, tendo em foco nosso objetivo que é avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, verificando a participação e o desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória.

Com base em nossa experiência de sala de aula e nossa análise prévia, tínhamos imaginado que os alunos não saberiam resolver as atividades de Análise Combinatória, a não ser que fossem montando (listando) todas as possibilidades e que outra dificuldade seria na hora de interpretar os problemas. Geralmente, eles não identificam se a ordem de escolha dos elementos pode ou não modificar o evento que está sendo realizado. Com base nessas informações, tentamos criar uma sequência didática que, sanasse tais dificuldades. Além de mostrar para o estudante a construção de conceitos e fórmulas através de situações-problemas e tabelas por eles mesmos respondidos e preenchidos, respectivamente.

Neste momento, verificaremos se poderemos validar nosso conjunto de atividades, além disso, analisaremos que procedimentos foram tomados pelos alunos nas resoluções das questões comparando pré-teste e pós-teste, quais foram seus principais erros e dificuldades e o que ficou de positivo após nossos encontros.

A partir dos dados coletados, acredito que podemos concluir nossas informações, fazendo as devidas comparações e observações. Mostrando os resultados através de gráficos e tabelas, avaliando o desempenho dos alunos, identificando as atitudes e processos, tomados pelos discentes desde o início de nosso estudo. Além disso, utilizaremos o teste de hipótese e correlação linear de Pearson, mostrando outro olhar estatístico para as análises dos resultados, verificando se houve uma relação entre o desempenho dos alunos nos testes e situações socioeconômicas apresentadas pelos participantes da pesquisa.

A seguir, apresentaremos os resultados dos testes através de tabelas, quadros e gráficos produzidos pelas informações dos 32 alunos que participaram efetivamente de nossa pesquisa nas questões socioeconômicas e nas questões do pré-teste e pós-teste.

## 4.1 RESULTADOS E ANÁLISES

Nossa análise começa pelas questões envolvidas no pré-teste e pós-teste. Identificando que tópico de Análise Combinatória foi trabalhado em cada questão, a porcentagem de acertos, erros e questões deixadas em branco. Resolvemos classificar, o que o aluno fez em cada resolução das dez questões, conforme o quadro abaixo.

**Quadro 38 -** Classificação das respostas do pós-teste.

| **Classificação** | **Descrição** |
|---|---|
| **Acertou** | Quando o aluno apresentou uma resolução totalmente correta. |
| **Errou** | Quando o aluno apresentou uma resolução incorreta. |
| **Em branco** | Quando o aluno não apresentou nenhuma resolução. |

Fonte: Pesquisa de campo (2017).

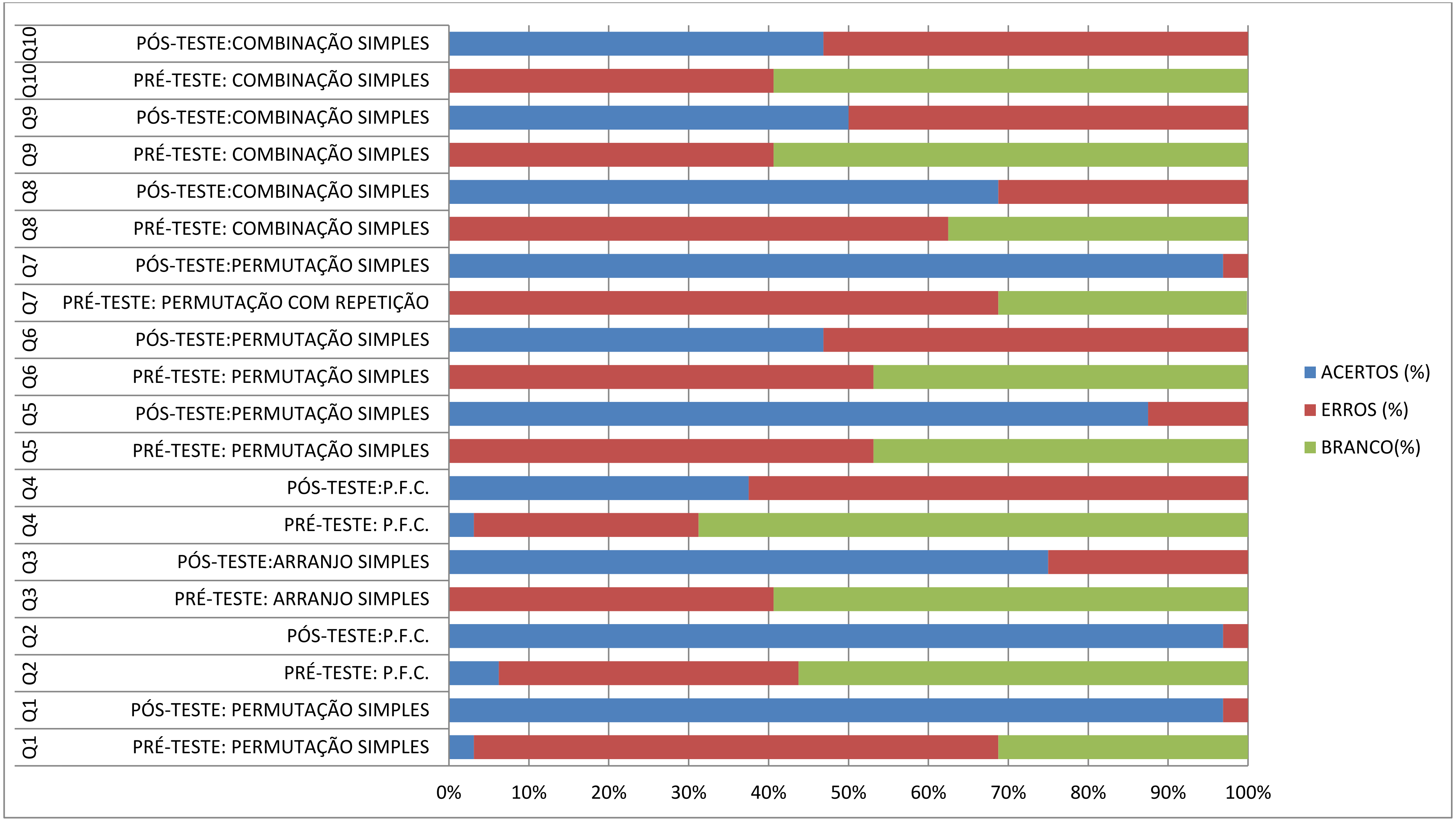
A questão sete no pré-teste envolvia o tópico Permutação com repetição. Como não conseguimos aplicar a nossa sétima atividade, que envolvia este assunto, trocamos essa questão para o pós-teste por uma de Permutação Simples, com isso não faremos a análise comparativa entre os resultados dessas questões.

**Quadro 39 -** Desempenho por questão no pré-teste e pós-teste.

| Ques - Tões | Tipo | Acerto (%) | | Erro(%) | | Branco(%) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Pré-teste | Pos-teste | Pré-teste | Pos-teste | Pré-teste | Pos-teste |
| $Q_1$ | Permutação simples | 3,125% | 96,875% | 65,62% | 3,125% | 31,25% | 0% |
| $Q_2$ | P.f.c. | 6,25% | 96,875% | 37,5% | 3,125% | 56,25% | 0% |
| $Q_3$ | Arranjo simples | 0% | 75% | 40,625% | 25% | 59,375% | 0% |
| $Q_4$ | P.f.c. | 3,125% | 37,5% | 28,125% | 62,5% | 68,75% | 0% |
| $Q_5$ | Permutação simples | 0% | 87,5% | 53,125% | 12,5% | 46,875% | 0% |
| $Q_6$ | Permutação simples | 0% | 46,875% | 53,125% | 53,125% | 46,875% | 0% |
| $Q_7$ | Permutação com repetição/simples | 0% | 96,875% | 68,75% | 3,125% | 31,125% | 0% |
| $Q_8$ | Combinação simples | 0% | 68,75% | 62,5% | 31,25% | 37,5% | 0% |
| $Q_9$ | Combinação simples | 0% | 50% | 40,625% | 50% | 59,375% | 0% |
| $Q_{10}$ | Combinação simples | 0% | 46,875% | 21,875% | 53,125% | 78,125% | 0% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 25 -** Desempenho por questão no pré-teste e pós-teste.




Fonte: Pesquisa de campo (2017).

Como podemos verificar, o percentual médio de acertos no pré-teste foi cerca de 1,25%, enquanto que o percentual médio de erros chega a aproximadamente 46,875% e as questões em branco apresentação um percentual médio de 51,55%, ou seja, menos de 2% das questões foram resolvidas corretamente. Já no pós-teste, o desempenho foi diferente. O percentual médio de acertos foi acima de 70%, o percentual médio de erros foi próximo de 30% e não houveram questões deixadas em branco. As questões que mais erraram foram $Q_4$, $Q_6$ e $Q_{10.}$ Todas essas ficaram abaixo de 50% de acertos, mas acredito que eram as mais difíceis e envolviam algumas restrições que exigiam a atenção dos alunos na hora da tomada de decisão para resolvê-las. Considero muito bom o desempenho nas questões sobre Combinação Simples, por exemplo, na $Q_8$, aproximadamente, 70% dos alunos acertaram a questão no pós-teste e geralmente essas questões são as mais erradas devido os alunos tentarem fazê-las como se a ordem de escolha dos elementos para se realizar o evento mudasse o agrupamento, as questões $Q_9$ e $Q_{10}$ tiveram um número de acertos razoável, com 50% e 46,875%, respectivamente. Outro fato importante que aconteceu é que nenhum aluno deixou questão em branco no pós-teste, todos tentaram fazer todas as questões e mesmo nas erradas, chegaram muito próximo da resolução correta. O que nos revela uma melhora de desempenho satisfatório, após a aplicação de nossas atividades, no pós-teste se compararmos com o pós-teste.

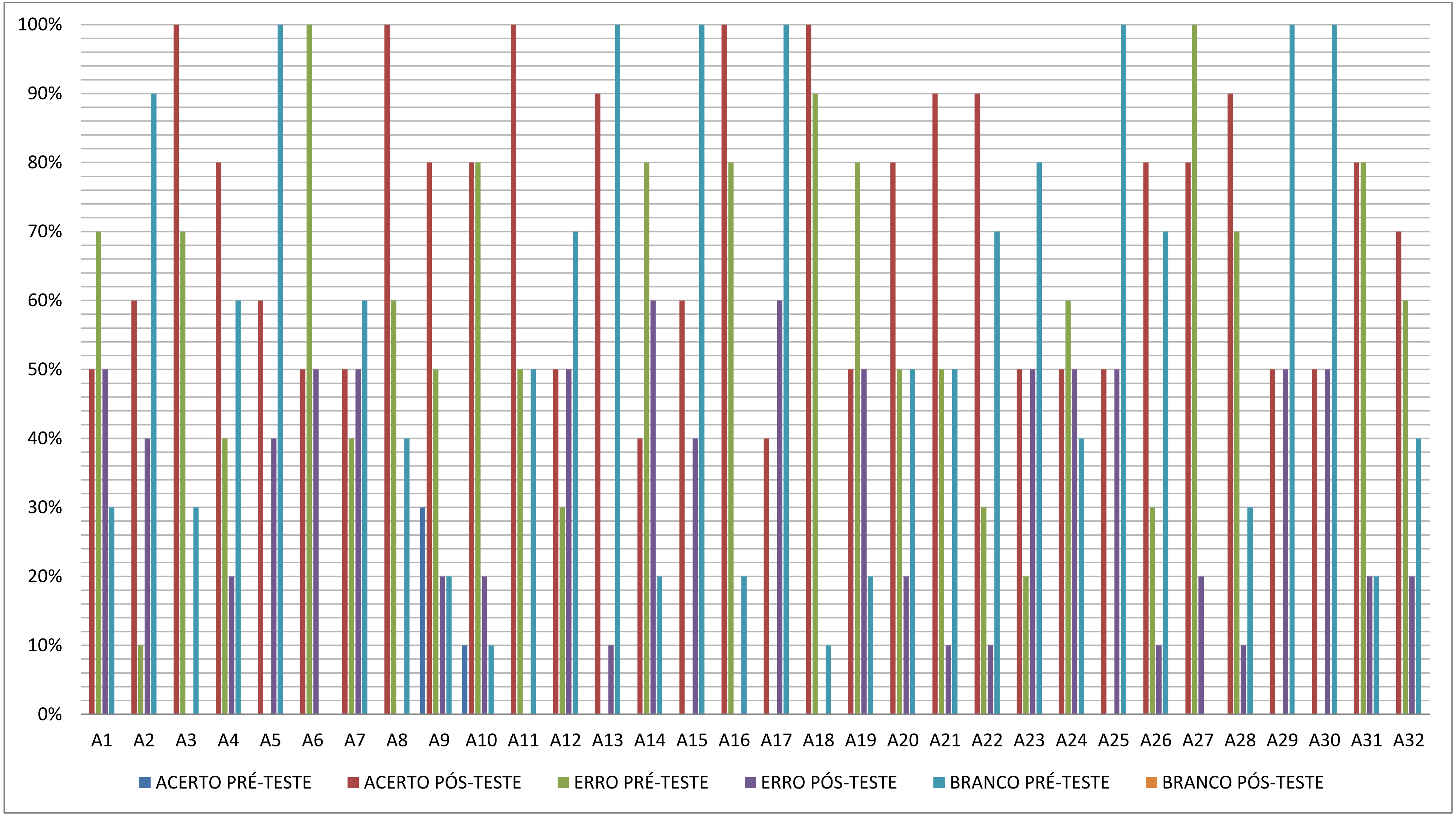
A maioria das questões foi resolvida sem o uso de fórmulas, geralmente sendo usado o P.F.C.. Como eles passaram pelo processo de construção das fórmulas, até nas questões de Combinação Simples, quase não se fez uso dela. Um fato importante que considero quanto ao desempenho no pós-teste, é o número de falta na última atividade. O aluno que perdesse essa aula, dificilmente conseguiria resolver as três últimas questões do teste e neste dia houve seis faltas, considerando os 32 alunos que realmente participaram da pesquisa. Verificaremos isso na análise do desempenho por aluno. Neste dia, a escola liberou os alunos mais cedo e após perguntar o porquê de tantas ausências, acredito que alguns deles resolveram ir embora junto com as outras turmas dispensadas. A seguir apresentamos os resultados dos testes de acordo com o desempenho por aluno.

**Quadro 40 -** Desempenho por aluno no pré-teste e pós-teste.

| Aluno | Acertou | | Errou | | Em branco | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pré-teste | Pós-teste | Pré-teste | Pós-teste | Pré-teste | Pós-teste |
| $A_1$ | 0% | 50% | 70% | 50% | 30% | 0% |
| $A_2$ | 0% | 60% | 10% | 40% | 90% | 0% |
| $A_3$ | 0% | 100% | 70% | 0% | 30% | 0% |
| $A_4$ | 0% | 80% | 40% | 20% | 60% | 0% |
| $A_5$ | 0% | 60% | 0% | 40% | 100% | 0% |
| $A_6$ | 0% | 50% | 100% | 50% | 0% | 0% |
| $A_7$ | 0% | 50% | 40% | 50% | 60% | 0% |
| $A_8$ | 0% | 100% | 60% | 0% | 40% | 0% |
| $A_9$ | 30% | 80% | 50% | 20% | 20% | 0% |
| $A_{10}$ | 10% | 80% | 80% | 20% | 10% | 0% |
| $A_{11}$ | 0% | 100% | 50% | 0% | 50% | 0% |
| $A_{12}$ | 0% | 50% | 30% | 50% | 70% | 0% |
| $A_{13}$ | 0% | 90% | 0% | 10% | 100% | 0% |
| $A_{14}$ | 0% | **40%** | 80% | 60% | 20% | 0% |
| $A_{15}$ | 0% | 60% | 0% | 40% | 100% | 0% |
| $A_{16}$ | 0% | 100% | 80% | 0% | 20% | 0% |
| $A_{17}$ | 0% | **40%** | 0% | 60% | 100% | 0% |
| $A_{18}$ | 0% | 100% | 90% | 0% | 10% | 0% |
| $A_{19}$ | 0% | 50% | 80% | 50% | 20% | 0% |
| $A_{20}$ | 0% | 80% | 50% | 20% | 50% | 0% |
| $A_{21}$ | 0% | 90% | 50% | 10% | 50% | 0% |
| $A_{22}$ | 0% | 90% | 30% | 10% | 70% | 0% |
| $A_{23}$ | 0% | 50% | 20% | 50% | 80% | 0% |
| $A_{24}$ | 0% | 50% | 60% | 50% | 40% | 0% |
| $A_{25}$ | 0% | 50% | 0% | 50% | 100% | 0% |
| $A_{26}$ | 0% | 80% | 30% | 10% | 70% | 0% |
| $A_{27}$ | 0% | 80% | 100% | 20% | 0% | 0% |
| $A_{28}$ | 0% | 90% | 70% | 10% | 30% | 0% |
| $A_{29}$ | 0% | 50% | 0% | 50% | 100% | 0% |
| $A_{30}$ | 0% | 50% | 0% | 50% | 100% | 0% |
| $A_{31}$ | 0% | 80% | 80% | 20% | 20% | 0% |
| $A_{32}$ | 0% | 70% | 60% | 20% | 40% | 0% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 26 -** Desempenho por aluno no pré-teste e pós-teste.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

No pré-teste apenas os alunos $A_9$ e $A_{10}$ conseguiram acertar três e uma questão, respectivamente, todas as outras questões foram feitas erradas ou deixadas em branco. Já após a aplicação de nossas atividades, todos os alunos resolveram todas as questões e apenas os alunos $A_{14}$ e $A_{17}$ acertaram menos da metade do pós-teste (40% ambos). Mesmo assim, se compararmos seus resultados com o primeiro teste houve melhora, pois o $A_{14}$ tinha errado 80% das questões e deixado em branco 20% delas e o $A_{17}$ tinha deixado todas as questões em branco. Podemos verificar ainda, que 62,5% dos alunos tiveram resultados que considero de bom a excelente, com um percentual de acerto maior ou igual a 60% das questões ($A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ $A_8$, $A_9$, $A_{10}$, $A_{11}$, $A_{13}$, $A_{15}$, $A_{16}$, $A_{18}$, $A_{20}$, $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{27}$, $A_{27}$, $A_{28}$, $A_{31}$ e $A_{32}$), vale a pena destacar os alunos $A_3$, $A_8$, $A_{11}$, $A_{16}$ e $A_{18}$ que acertaram todas as questões no último teste e tinham errado todas no primeiro teste. De maneira geral, todos os alunos aumentaram seu percentual de acertos no segundo teste em relação ao primeiro. A seguir, apresentaremos o quadro com a frequência dos alunos durante o experimento, que poderá dar algumas justificativas, baseado nas faltas (**F**) ou presença (**P**) dos alunos durante as seções.

**Quadro 41 -** Frequência dos alunos durante a experimentação.

(continua)

| Aluno | Data: 09.06 | Data: 21.06 | Data: 22.06 | Data: 22.06 | Data: 23.06 | Data: 26.06 | Notas do pré-teste (% de ) | Notas do pós-teste (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ativ. 1 | Ativ. 2 | Ativ. 3 | Ativ. 4 | Ativ. 5 | Ativ. 6 | | |
| $A_1$ | P | P | **F** | **F** | **F** | P | 0% | 50% |
| $A_2$ | P | P | P | P | P | **F** | 0% | 60% |
| $A_3$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 100% |
| $A_4$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 80% |
| $A_5$ | P | **F** | **F** | **F** | P | **F** | 0% | 60% |
| $A_6$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 50% |
| $A_7$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 50% |
| $A_8$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 100% |
| $A_9$ | P | P | P | P | P | P | 30% | 80% |
| $A_{10}$ | P | P | P | P | P | P | 10% | 80% |
| $A_{11}$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 50% |
| $A_{12}$ | **F** | P | P | P | P | P | 0% | 100% |
| $A_{13}$ | P | P | P | P | P | P | 0% | 90% |
| $A_{14}$ | P | P | P | P | P | P | 0% | **40%** |
| $A_{15}$ | P | P | **F** | **F** | P | P | 0% | 60% |

(conclusão)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$A_{16}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 100% |
| **$A_{17}$** | P | **F** | **F** | **F** | P | P | 0% | **40%** |
| **$A_{18}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 100% |
| **$A_{19}$** | P | P | P | P | **F** | **F** | 0% | 50% |
| **$A_{20}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 80% |
| **$A_{21}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 90% |
| **$A_{22}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 90% |
| **$A_{23}$** | P | P | P | P | P | **F** | 0% | 50% |
| **$A_{24}$** | P | P | P | P | P | **F** | 0% | 50% |
| **$A_{25}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 50% |
| **$A_{26}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 80% |
| **$A_{27}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 80% |
| **$A_{28}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 90% |
| **$A_{29}$** | P | P | P | P | **F** | **F** | 0% | 50% |
| **$A_{30}$** | **F** | **F** | P | P | P | P | 0% | 50% |
| **$A_{31}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 80% |
| **$A_{32}$** | P | P | P | P | P | P | 0% | 70% |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Entre os 32 alunos que participaram da pesquisa, podemos verificar que, 21 deles tiveram 100% de participação nas atividades ($A_3$, $A_4$, $A_6$, $A_7$, $A_8$, $A_9$, $A_{10}$, $A_{11}$, $A_{13}$, $A_{14}$, $A_{16}$, $A_{18}$, $A_{20}$, $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{25}$, $A_{26}$, $A_{27}$, $A_{28}$, $A_{31}$ e $A_{32}$) e desses, 17 conseguiram acertar 60% ou mais das questões, outros três acertaram 50% delas ($A_6$, $A_7$ e $A_{25}$) e o $A_{14}$, como já foi dito acertou apenas 40% das questões. Este aluno descreveu em seu perfil que gosta muito de matemática, não tem dificuldade em aprender a disciplina, só não presta atenção na aula se estiver chata, estuda apenas dois dias na semana e ninguém o ajuda nas tarefas extraclasse de matemática. Apesar de algumas boas características que poderiam facilitar seu aprendizado, seu resultado não foi bom. Observando suas resoluções no pós-teste, o aluno conseguiu realizar todas as questões, mas se atrapalhou em restrições que as questões traziam e em todas as três questões de Combinação Simples. Quatro alunos ($A_2$, $A_{12}$, $A_{23}$ e $A_{24}$) participaram em 83,33% delas (uma falta), quatro ($A_{15}$, $A_{19}$, $A_{29}$ e $A_{30}$) participaram em 66,66% das atividades (duas falta), dois alunos ($A_1$ e $A_{17}$) participaram em 50% delas (três falta) e um aluno participou em apenas 33,33% das atividades, acumulando quatro faltas.

Outro fato importante de observamos, é que os alunos $A_2$, $A_5$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{24}$ e $A_{29}$ faltaram no dia da atividade sobre Combinação Simples, todos erraram todas as questões que envolviam essa parte do conteúdo, de todos os 11 alunos ($A_1$, $A_2$, $A_5$, $A_{12}$, $A_{15}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{24}$, $A_{29}$ e $A_{30}$) que faltaram em algum dia, apenas $A_2$, $A_5$

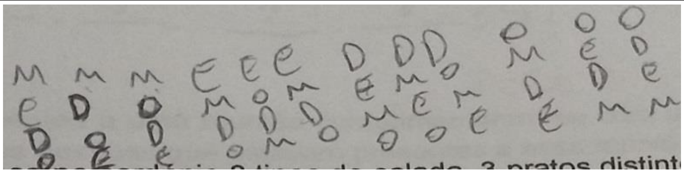
e $A_{15}$ conseguiram acertar mais da metade do último teste. Os alunos que mais faltaram $A_1$, $A_5$ e $A_{17}$, tiveram 50%, 60% e 40% de acertos, respectivamente. Essas faltas podem ser um dos fatores determinantes para que seus rendimentos não fossem melhores, principalmente nas questões de Combinação Simples. Este último além de todas as três faltas (atividades 2, 3 e 4), descreveu em seu perfil que não gosta nenhum um pouco de matemática, tem um pouco de dificuldade na disciplina, ás vezes não presta atenção quando a aula esta chata, estuda alguns dias da semana e quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse é sua mãe. Ao meu ver o aluno apresentou um perfil de pouco interesse pela matemática e assim como o outro aluno que acertou apenas 40% do pós-teste, ele conseguiu realizar todas as questões, mas se atrapalhou em restrições que as questões traziam e em todas as três questões de Combinação Simples. A seguir mostraremos os tipos de erros em cada questão do nosso pós-teste.

**Quadro 42 -** Tipos de erros cometidos pelos alunos nas resoluções das questões do pós-teste.

| **Erro** | **Tipos de erros** |
|---|---|
| **$E_1$** | • Colocar a resposta, mas não efetuar o cálculo. |
| **$E_2$** | • Não perceber a restrição e escolher o número indevido de elementos para a etapa. |
| **$E_3$** | • Perceber a restrição dada a etapa e escolher o número indevido de elementos para a etapa. |
| **$E_4$** | • Escolher o número equivocado de etapas. |
| **$E_5$** | • Escolher o cálculo indevido (trocar Arranjo Simples por Combinação Simples ou vice versa). |
| **$E_6$** | • Usar a fórmula indevida. |
| **$E_7$** | • Listar o número de possibilidades de forma indevida. |

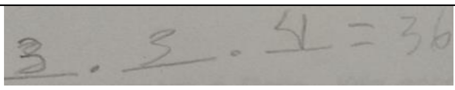
Fonte: Autor (2017)

**Quadro 43 -** Exemplo de erro na Q1 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">Q<sub></sub>$\mathbf{Q_1}$ – Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra MEDO?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução Correta: 4.3.2.1 = 24 anagramas</td></tr>
<tr><td>Resolução do Aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td></td><td>$A_{24}$ – $\mathbf{E_7}$ (Listar o número de possibilidades de forma indevida)</td></tr>
</table>

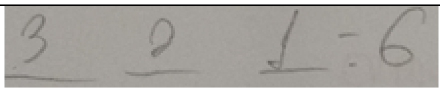
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 44 -** Exemplo de erro na Q2 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{Q_2}$ – Um restaurante oferece no cardápio 3 tipos de salada, 3 pratos distintos de carne, 4 variedades de bebida e 2 sobremesas diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode se servir para comer uma salada, um prato de carne, uma sobremesa e tomar uma bebida?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução Correta: 3.3.4.2 = 72 maneiras</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td><br>3. 3. 4 = 36</td><td>$A_{21}$ – $\mathbf{E_4}$ (Escolher o número equivocado de etapas)</td></tr>
</table>

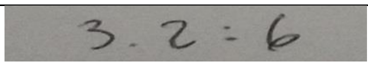
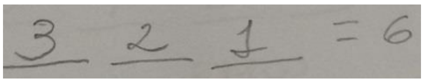
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 45 -** Exemplo de erro na Q3 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{Q_3}$ – Qual é o total de números ímpares positivos de três algarismos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetir algarismos?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução correta: 4.3.3 = 36 números</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td><br>3. 2. 1 = 6</td><td>$A_6$, $A_7$, $A_{10}$, $A_{12}$, $A_{14}$, $A_{17}$, $A_{29}$, $A_{31}$ – $\mathbf{E_2}$ (Não perceber a restrição e escolher o número indevido de elementos para a etapa)</td></tr>
</table>

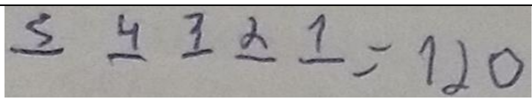
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 46 -** Exemplos de erros na Q4 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">Q<sub></sub>$Q_4$ – Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução correta: 3.2.2.1 = 12 maneiras</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td><br>5 2 = 6<br><br>3. 2. 1 = 6</td><td>$A_1$, $A_2$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{14}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{20}$, $A_{23}$, $A_{24}$, $A_{25}$, $A_{26}$, $A_{27}$, $A_{29}$, $A_{30}$, $A_{31}$ – $E_2$ e $E_4$ (Não perceber a restrição e escolher o número indevido de elementos para a etapa e Escolher o número equivocado de etapas)</td></tr>
</table>

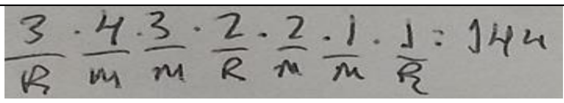
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

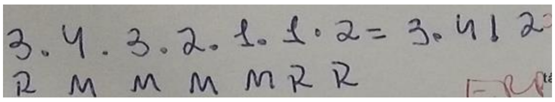
**Quadro 47 -** Exemplos de erros na Q5 do pós-teste.

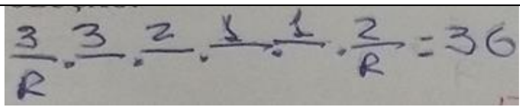
<table>
<tr><td colspan="2">$Q_5$ – Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, qual é o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução correta: 2.4.3.2.1 = 48 maneiras</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td><br>2. 3. 2. 1 = 12</td><td>$A_9$, $A_{28}$, $A_{30}$ – $E_3$ e $E_4$ (Perceber a restrição dada a etapa e escolher o número indevido de elementos para a etapa e Escolher o número equivocado de etapas)</td></tr>
<tr><td><br>5. 4. 3. 2. 1 = 120</td><td>$A_9$ – $E_2$ (Não perceber a restrição e escolher o número indevido de elementos para a etapa)</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 48 -** Exemplos de erros na Q6 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">$Q_6$ – Três rapazes e quatro moças formam uma fila para serem fotografados. Se deve ficar um rapaz em cada extremo da fila, quantas disposições diferentes essa fila pode ter?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução correta: 3.5.4.3.2.1.2 = 720 disposições diferentes</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td>

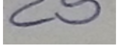
3. 4. 3. 2. 2. 1 = 144


3. 4. 3. 2. 1. 1. 2 = 3. 4!. 2</td><td>$A_1$, $A_4$, $A_9$, $A_{14}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{20}$, $A_{23}$, $A_{24}$, $A_{25}$, $A_{26}$, $A_{27}$, $A_{32}$ – $E_3$ (Perceber a restrição dada a etapa e escolher o número indevido de elementos para a etapa)</td></tr>
<tr><td>

3. 3. 2. 1. 1. 2 = 36</td><td>$A_2$, $A_5$, $A_{15}$, $A_{30}$ – $E_3$ e $E_4$ (Perceber a restrição dada a etapa e escolher o número indevido de elementos para a etapa e Escolher o número equivocado de etapas)</td></tr>
</table>

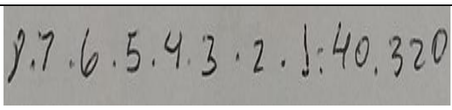
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 49 -** Exemplo de erro na Q7 do pós-teste.

<table>
<tr><td colspan="2">$Q_7$ – A fila do caixa de uma padaria está vazia e estão indo para lá cinco pessoas. De quantas maneiras elas podem se posicionar nesta fila?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolução correta: 5.4.3.2.1 = 120 maneiras</td></tr>
<tr><td>Resolução do aluno:</td><td>Aluno – Erro</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A_{15}$ – $E_1$ (Colocar a resposta, mas não efetuar o cálculo)</td></tr>
</table>

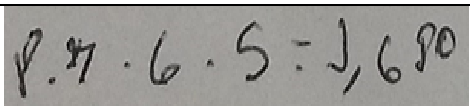
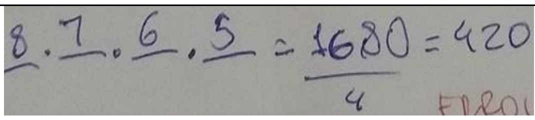
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 50 -** Exemplo de erro na Q8 do pós-teste.

| | |
|---|---|
| $Q_8$ - As oito pessoas presentes a uma reunião cumprimentaram-se com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados pelas pessoas que estavam presentes a essa reunião? | |
| **Resolução correta:** $C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$ *ou* $\frac{8.7}{2!}$ | |
| **Resolução do aluno:** | Aluno – **Erro** |
|  **8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40.320** | $A_1$, $A_6$, $A_7$, $A_{12}$, $A_{14}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{25}$, $A_{29}$ – $\mathbf{E_5}$ (Escolher o cálculo indevido (trocar Arranjo Simples por Combinação Simples ou vice versa)) |

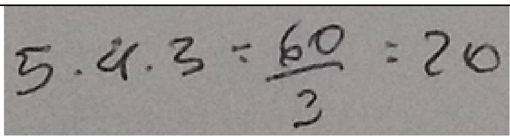
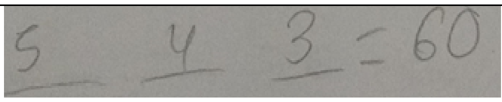
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 51 -** Exemplos de erros na Q9 do pós-teste.

| | |
|---|---|
| $Q_9$ - Em uma viagem a Paris, Júlia encontrou 8 diferentes perfumes que estavam em oferta em uma loja especializada. Resolveu comprar 4 deles para presentear suas amigas. De quantas maneiras diferentes Júlia pode escolher os quatro presentes? | |
| **Resolução correta:** $C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!}$ *ou* $\frac{8.7.6.5}{4!}$ | |
| **Resolução do aluno:** | Aluno – **Erro** |
|  **8. 7. 6. 5 = 1680** | $A_1$, $A_6$, $A_7$, $A_{12}$, $A_{14}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{25}$, $A_{29}$ – $\mathbf{E_5}$ (Escolher o cálculo indevido (trocar Arranjo Simples por Combinação Simples ou vice versa)) |
|  **8.7.6.5 = $\frac{1680}{4}$ = 420** | $A_2$, $A_5$, $A_{15}$, $A_{24}$, $A_{30}$, $A_{32}$ – $\mathbf{E_6}$ (Usar a fórmula indevida) |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 52 -** Exemplos de erros na Q10 do pós-teste.

| | |
|---|---|
| $Q_{10}$ - Segundo a Revista VEJA (11/01/2012), cinco habilidades fundamentais compõem a nova teoria da inteligência social: Comunicação; Empatia; Assertividade; Feedback e Auto-apresentação. Dentre as habilidades que compõem a nova teoria da inteligência social, qual é o número de possibilidades distintas em que o setor de Recursos Humanos de uma empresa pode eleger três dessas habilidades? | |
| **Resolução correta com o uso da fórmula:** $C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$ *ou* $\frac{5.4.3}{3!}$ | |
| **Resolução do aluno:** | Aluno – **Erro** |
|   **5. 4. 3 = $\frac{60}{3}$ = 20** | $A_1$, $A_2$, $A_5$, $A_{14}$, $A_{15}$, $A_{17}$, $A_{19}$, $A_{23}$, $A_{24}$, $A_{25}$, $A_{30}$ – $\mathbf{E_6}$ (Usar a fórmula indevida) |
|   **5. 4. 3 = 60** | $A_6$, $A_7$, $A_{12}$, $A_{22}$, $A_{29}$, $A_{32}$ – $\mathbf{E_5}$ (Escolher o cálculo indevido (trocar Arranjo Simples por Combinação Simples ou vice versa)) |

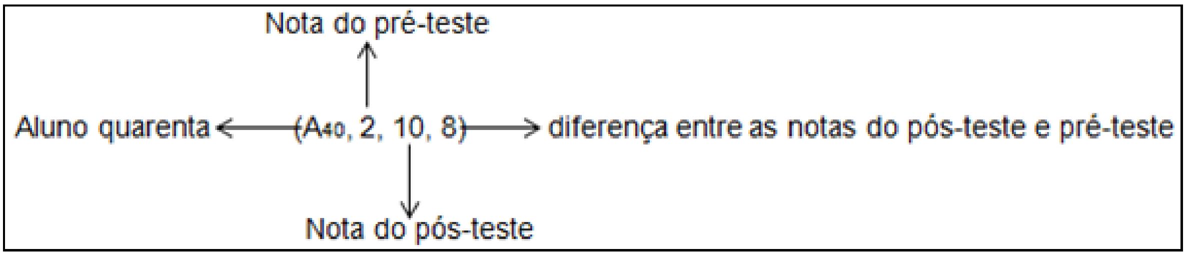
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

De modo geral, na maioria das questões erradas que não eram de Combinação Simples, os alunos se perderam nas restrições das questões, pois algumas etapas devem ser resolvidas primeiras para se evitar problemas futuros e nos problemas que eram de Combinação Simples, os erros foram por que não perceberam a diferença entre Arranjo e Combinação ou por que tentaram resolver conforme o cálculo da penúltima coluna da atividade 6 e esqueceram que a divisão era pelo fatorial do número de etapas. A seguir, mostraremos a relação entre os fatores socioeconômicos, a matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

## 4.2 A RELAÇÃO ENTRE FATORES SOCIOECONÔMICOS, A MATEMÁTICA E O DESEMPENHO NOS TESTES.

Neste momento, faremos um cruzamento entre as informações do questionário socioeconômico, utilizado na experimentação, com os resultados dos alunos nos testes, a fim de verificar se há alguma relação pertinente, que influencie nas resoluções das questões relacionadas às atividades matemáticas. Os dados compreendidos a seguir referem-se ao número de acertos (nota de zero a 10) e a diferença entre esses valores, nos testes desenvolvidos pelos discentes, formando assim uma quadra (aluno, nota do pré-teste, nota do pós-teste e diferença entre as notas do pré-teste e pós-teste).

**Figura 56 -** Aluno, notas do aluno no pré-teste, no pós-teste e diferença entre as notas.




Os dados apresentados a seguir, relacionam a afinidade com a matemática, com dificuldade em aprender matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 53 -** Afinidade e dificuldade em matemática e desempenho nos testes.

(Continua)

| | | DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Não | Um pouco | Muito |
| **AFINIDADE COM A MATEMÁTICA** | Nenhum pouco | ($A_{13}$,0,9,9) | ($A_{12}$,0,5,5)<br>$A_{15}$,0,6,6)<br>($A_{24}$,0,5,5) | ($A_{30}$,0,5,5) |
| | Pouco | ($A_{22}$,0,9,9) | ($A_{7}$,0,5,5)<br>($A_{8}$,0,10,10)<br>($A_{9}$,3,8,5)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{25}$,0,5,5)<br>($A_{26}$,0,8,8)<br>($A_{29}$,0,5,5)<br>($A_{32}$,0,6,6) | ($A_{4}$,0,8,8)<br>($A_{5}$,0,6,6) |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Muito | ($A_6$,0,5,5)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{14}$,0,4,4)<br>($A_{16}$,0,10,10)<br>($A_{23}$,0,5,5)<br>($A_{27}$,0,8,8)<br>($A_{28}$,0,9,9) | ($A_1$,0,5,5)<br>($A_3$,0,10,10)<br>($A_{17}$,0,4,4)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{19}$,0,5,5)<br>($A_{20}$,0,8,8)<br>($A_{21}$,0,9,9)<br>($A_{31}$,0,8,8) | ($A_2$,0,6,6) |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

O quadro 53 mostra que dos os alunos que afirmaram não ter nenhum pouco de afinidade com a matemática apenas o aluno $A_{13}$, não tem dificuldade em aprendê-la e isso foi confirmado, no pré-teste ele não havia acertado nenhuma questão e depois da aplicação de nossa atividade ele obteve um excelente desempenho no pós-teste, aumentando em 90% seu número de acertos. Os outros alunos ($A_{12}$, $A_{15}$, $A_{24}$, $A_{30}$) que tem pelo menos um pouco de dificuldade em aprender matemática, não conseguiram acertar nenhuma questão no pré-teste e foram regulares no pós-teste acertando entre cinco e seis questões.

Dos alunos que tem um pouco de afinidade com a matemática, o aluno $A_{22}$ informou não ter dificuldade na matéria e teve um excelente desempenho nas questões do pós-teste melhorando sua nota em relação ao pré-teste em 90%. Os discentes que têm um pouco dificuldade e pouca afinidade com a matéria conseguiram melhorar suas notas no pós-teste em relação ao pré-teste, destacando os alunos $A_3$ e $A_{18}$ que melhoraram suas notas em 100%. Dois alunos indicaram ter muita dificuldade e um pouco de afinidade com a matemática, mas tiveram bom desempenho nas suas notas do pós-teste, foram eles os alunos $A_4$ e $A_5$, melhorando seus resultados em 80% e 60%, respectivamente, se compararmos com o pré-teste, sendo que o aluno $A_5$ talvez pudesse melhorar ainda mais seu desempenho se não tivesse faltado às atividades 2, 3 e 4. Dentre os sete alunos ($A_6$, $A_{10}$, $A_{14}$, $A_{16}$, $A_{23}$, $A_{27}$ e $A_{28}$) que afirmaram ter muita afinidade com a matemática e não ter dificuldade na disciplina o aluno $A_{14}$ não teve um bom desempenho elevando sua nota do pós-teste em relação ao pré-teste em apenas 40% e os alunos $A_6$ e $A_{23}$ tiveram um desempenho regular com melhora em 50% das questões, os outros alunos melhoraram seus percentuais de acertos em 70% ou mais. No grupo de alunos que disseram ter muito afinidade e um pouco de dificuldade com a matéria destacam-se cinco alunos que melhoraram bastante suas notas se compararmos o pré-teste com o pós-teste, são eles o $A_3$ e $A_{18}$ (melhoraram 100%), $A_{21}$ (melhorou 90%), $A_{20}$ e $A_{31}$ (melhoraram 80%). Já os alunos $A_1$ e $A_{19}$ foram regulares, conseguiram melhorar as notas em 50% e o aluno $A_{17}$ só conseguiu uma melhora na nota em 40%. Lembrando que este último aluno foi um dos que mais faltou, deixando de vir nas atividades 2, 3 e 4. Apenas o aluno $A_2$ tem muita afinidade e muita dificuldade com a disciplina e melhorou sua nota em 60% de um teste a outro.

A seguir, apresentaremos, os dados que relacionam a afinidade com a matemática, com distração durante as aulas de matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 54 -** Afinidade e distração em matemática e desempenho nos testes.

| | | **Distração durante as aulas de matemática** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Não, eu sempre presto atenção. | Sim, eu não consigo prestar atenção. | Às vezes, quando a aula está chata. |
| **AFINIDADE COM A MATEMÁTICA** | Nenhum pouco | | ($A_{15}$,0,6,6)<br>($A_{30}$,0,5,5) | ($A_{12}$,0,5,5)<br>($A_{13}$,0,9,9)<br>($A_{24}$,0,5,5) |
| | Pouco | ($A_8$,0,10,10)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{22}$,0,9,9)<br>($A_{26}$,0,8,8) | ($A_5$,0,6,6) | ($A_4$,0,8,8)<br>($A_7$,0,5,5)<br>($A_9$,3,8,5)<br>($A_{25}$,0,5,5)<br>($A_{29}$,0,5,5)<br>($A_{32}$,0,7,7) |
| | Muito | ($A_2$,0,6,6)<br>($A_3$,0,10,10)<br>($A_6$,0,5,5)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{16}$,0,10,10)<br>($A_{17}$,0,4,4)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{19}$,0,5,5)<br>($A_{21}$,0,9,9)<br>($A_{23}$,0,5,5)<br>($A_{27}$,0,8,8)<br>($A_{28}$,0,9,9)<br>($A_{31}$,0,8,8) | | ($A_1$,0,5,5)<br>($A_{14}$,0,4,4)<br>($A_{20}$,0,8,8) |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Os dados do quadro 54 mostram que dos cinco alunos que não tem afinidade com a matemática $A_{15}$ e $A_{30}$ não conseguem prestar atenção nas aulas, mas conseguiram aumentar suas notas em 60% e 50%, respectivamente, comparando os testes e os alunos $A_{12}$, $A_{13}$ e $A_{30}$ revelaram que só deixam de prestar atenção quando a aula está chata, sendo que o aluno $A_{13}$ teve um excelente desempenho após a aplicação de nossas aulas aumentando sua nota em 90%, os outros dois melhoraram as notas em 50%.

Os alunos que tem um pouco de afinidade com a matemática e afirmaram que sempre prestam atenção durante as aulas, tiveram um desempenho excelente no pós-teste, são eles os alunos $A_8$ e $A_{11}$ (aumentaram suas notas em 100%), $A_{22}$ (aumentou sua nota em 90%) e $A_{26}$ (aumentou sua nota em 80%). Apenas o aluno $A_5$ disse não conseguir prestar atenção nas aulas e ter um pouco de afinidade com a disciplina, no pré-teste ele não tinha conseguido acertar nenhuma questão e no pós-teste conseguiu acertas seis questões elevando sua nota em 60%. Seis alunos ($A_4$, $A_7$, $A_9$, $A_{25}$, $A_{29}$ e $A_{32}$) revelaram que não prestam atenção nas aulas quando ela está chata e tem um pouco de afinidade com a matemática, destaque para o aluno $A_4$ que aumentou sua nota em 80% se compararmos o pré-teste com o pós-teste. Desse grupo, o aluno $A_9$ foi o único que tinha conseguido acertar alguma questão no pré-teste (três questões) e para o pós-teste melhorou conseguindo acertar oito questões.

Um grande número de alunos (40,625% dos discentes pesquisados) afirmou que possuem muita afinidade com a matemática e sempre prestam atenção às aulas, destaque para os alunos $A_3$, $A_{16}$ e $A_{18}$, que elevaram suas notas em 100%, os alunos $A_{21}$ e $A_{28}$ melhoraram suas notas em 90%, $A_{27}$ e $A_{31}$ melhoraram suas notas em 80%. O aluno $A_{10}$, desse grupo, foi o único que tinha acertado uma questão no pré-teste e depois das nossas aulas conseguiu fechar o pós-teste com oito acertos. $A_2$ melhorou sua nota em 60%, os alunos $A_6$, $A_{19}$, $A_{23}$ não tinham acertado nenhuma questão no pré-teste, já no pós-teste acertaram cinco questões e o $A_{17}$ conseguiu melhorar seu desempenho em apenas 40%. Nenhum aluno indicou ter muita afinidade com a matemática e não prestar atenção nas aulas e os alunos $A_1$, $A_{14}$ e $A_{20}$ apesar de revelarem ter muita afinidade com a disciplina, afirmaram que não prestam atenção nas aulas quando ela está chata e tiram as respectivas notas no pós-teste, cinco, quatro e 8, no pré-teste não tinham conseguido acertar nenhuma questão.

A seguir, apresentaremos, os dados que relacionam a afinidade com a matemática, com costumo estudar matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 55 -** Afinidade e costuma estudar matemática e desempenho nos testes.

| | | **COSTUMA ESTUDAR MATEMÁTICA** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Só na véspera da prova. | Só nos fins de semana. | Todo dia. | Alguns dias da semana. |
| **AFINIDADE COM A MATEMÁTICA** | Nenhum pouco | ($A_{12}$,0,5,5)<br>($A_{15}$,0,6,6)<br>($A_{24}$,0,5,5)<br>($A_{30}$,0,5,5) | ($A_{13}$,0,9,9) | | |
| | Pouco | ($A_{9}$,3,8,5)<br>($A_{29}$,0,5,5) | ($A_{32}$,0,7,7) | | ($A_{4}$,0,8,8)<br>($A_{5}$,0,6,6)<br>($A_{7}$,0,5,5)<br>($A_{8}$,0,10,10)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{22}$,0,9,9)<br>($A_{25}$,0,5,5)<br>($A_{26}$,0,8,8) |
| | Muito | ($A_{2}$,0,6,6)<br>($A_{3}$,0,10,10)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{21}$,0,9,9)<br>($A_{23}$,0,5,5) | ($A_{16}$,0,10,10)<br>($A_{19}$,0,5,5)<br>($A_{28}$,0,9,9) | ($A_{6}$,0,5,5) | ($A_{1}$,0,5,5)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{14}$,0,4,4)<br>($A_{17}$,0,4,4)<br>($A_{20}$,0,8,8)<br>($A_{27}$,0,8,8)<br>($A_{31}$,0,8,8) |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Os dados acima mostram que dos quatro alunos que não possuem afinidade com a matemática e só estudam em véspera de prova $A_{12}$, $A_{24}$ e $A_{30}$ aumentaram sua nota entre os testes em 50% e o aluno $A_{15}$ teve um desempenho um pouco melhor acertando seis questões no pós-teste, no pré-teste ele não havia acertado nenhuma questão. Apenas o aluno $A_{13}$ não tem afinidade com a disciplina e estuda só aos fins de semana, este aluno teve uma excelente evolução conseguindo aumentar sua nota em 90% entre os testes. Nenhum aluno afirmou ter afinidade com a matemática e estudar todos os dias ou alguns dias da semana.

Os alunos $A_9$ e $A_{29}$ revelaram ter um pouco de afinidade com a disciplina e procuram estudar só na véspera da prova o 1º saiu de três acertos no pré-teste para oito no pós-teste, já o $A_{29}$ apresentou uma melhora razoável subindo sua nota em 50%. Apenas o aluno $A_{32}$ revelou estudar aos fins de semana e ter um pouco de afinidade com a matéria, no pré-teste ele não tinha acertado nenhuma questão e no pós-teste foi muito bem acertando 70% das questões. Dos alunos ($A_4$, $A_5$, $A_7$, $A_8$, $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{25}$ e $A_{26}$) que estudam alguns dias da semana e tem um pouco de afinidade com a matemática 62,5% deles tiveram um excelente desempenho no pós-teste, os alunos $A_4$ e $A_{26}$ acertaram 80% das questões, o aluno $A_{22}$ acertou 90% das questões, os alunos $A_8$ e $A_{11}$ acertaram 100% das questões, o aluno $A_5$ teve um bom desenvolvimento acertando 60% das questões e os alunos $A_7$ e $A_{25}$ foram regular acertando 50% das questões, todos esses oito alunos não tinham acertado nenhuma questão no pré-teste.

Um grupo de 16 alunos que tem muita afinidade com a matemática, nove deles tiveram de bom à excelente desempenho no pós-teste acertado acima de 50% das questões. Dentre eles cinco revelaram que só estudam véspera da prova, $A_{23}$ acertou 50% das questões, $A_2$ acertou 60% das questões, $A_{21}$ acertou 90% das questões e os alunos $A_{3\ e}$ $A_{18}$ acertaram todas as questões do pós-teste. Dos três alunos que só estudam fim de semana e tem afinidade com a matemática $A_{16}$ teve uma excelente nota no pós-teste acertando todas as questões, o $A_{28}$ errou apenas uma questão e $A_{19}$ foi regular aumentando sua nota em 50% entre os testes. Apenas um aluno afirmou estudar todos os dias e ter muita afinidade com a matéria, mesmo assim seu desempenho foi regular, melhorando em 50% sua nota entre os testes. Entre os alunos que tem muita afinidade com a matemática e estudam alguns dias da semana temos dois alunos que só conseguiram aumentar suas notas em 40%, foram eles $A_{14}$ e $A_{17}$, o aluno $A_1$ foi regular acertando cinco questões no pós-teste, os alunos $A_{20}$, $A_{27}$ e $A_{31}$ foram muito bem após as nossas atividades e conseguiram melhorar suas notas em 80%. Deste grupo que tem muita afinidade e estuda alguns dias da semana apenas o aluno $A_{10}$ tinha acertado uma questão no pré-teste e no pós-teste acertou oito questões, os demais alunos não tinham conseguido acertar pelo menos uma questão no pré-teste.

A seguir, apresentaremos, os dados que relacionam a afinidade com a matemática, com quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 56 -** Afinidade e quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática e desempenho nos testes.

| | | QUEM LHE AJUDA NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA? | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Professor particular | Pai | Mãe | Irmão | Amigo | Ninguém | Outros |
| **AFINIDADE COM A MATEMÁTICA** | Nenhum pouco | ($A_{12}$,0,5,5) | | $A_{13}$(0,9,9) | | | ($A_{15}$,0,6,6)<br>($A_{24}$,0,5,5)<br>($A_{30}$,0,5,5) | |
| | Pouco | ($A_{7}$,0,5,5) | ($A_{5}$,0,6,6) | | | | ($A_{8}$,0,10,10)<br>($A_{9}$,3,8,5)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{22}$,0,9,9)<br>($A_{25}$,0,5,5)<br>($A_{26}$,0,8,8)<br>($A_{29}$,0,5,5)<br>($A_{32}$,0,7,7) | ($A_{4}$,0,8,8) |
| | Muito | | | ($A_{17}$,0,4,4)<br>($A_{21}$,0,9,9) | ($A_{19}$,0,5,5)<br>($A_{23}$,0,5,5) | ($A_{1}$,0,5,5) | ($A_{2}$,0,6,6)<br>($A_{3}$,0,10,10)<br>($A_{5}$,0,5,5)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{14}$,0,4,4)<br>($A_{16}$,0,10,10)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{20}$,0,8,8)<br>($A_{27}$,0,8,8)<br>($A_{28}$,0,9,9)<br>($A_{31}$,0,8,8) | |

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

De acordo com os dados obtidos acima, apenas 31,25% dos alunos tem alguma ajuda nas suas atividades extraclasses. Dos alunos que não possuem afinidade com a matemática o aluno $A_{12}$ recebe ajuda de professor particular, tirou zero no pré-teste e cinco no pós-teste, aumentando sua nota em 50%, o aluno $A_{13}$ recebe ajuda da mãe e teve um excelente desempenho no pós-teste aumentando sua nota em 90% em relação ao pré-teste e três alunos não recebem ajuda extraclasse conseguindo o seguinte desempenho: $A_{15}$ aumentou sua nota entre os testes em 60% e os alunos $A_{24}$ e $A_{30}$ aumentaram suas notas em 50%, todos eles tinham tirado nota zero no pré-teste. Nenhum aluno que não tem afinidade com a matéria tem pai, irmão, amigo ou outra pessoa lhe ajudando nas atividades extraclasses.

Já 34,375% dos discentes pesquisados, revelaram que tem um pouco de afinidade com a matemática, o aluno $A_{7}$ recebe ajuda de professor particular e aumentou sua nota em 50% entre os testes, o aluno $A_5$ teve um bom desempenho, havia tirado zero no pré-teste e após as nossas atividades conseguiu tirar seis no pós-teste. Um aluno afirmou que tem ajuda de outras pessoas, foi ele o $A_4$ e foi muito bem no pós-teste acertando 80% das questões. Entre os alunos que tem um pouco de afinidade com a disciplina e não tem ajuda extraclasse $A_8$ e $A_{11}$ elevaram suas notas em 100%, $A_{22}$ acertou nove questões no pós-teste, $A_{32}$ teve um bom e melhorou sua nota em 70%, os alunos $A_{25}$ e $A_{29}$ tiveram um desenvolvimento regular acertando apenas cinco questões no pós-teste. Todos esses alunos tinham tirando zero no pré-teste. O aluno $A_9$ havia acertado 30% no pré-teste e melhorou consideravelmente, após as nossas atividades, acertando 80% do pós-teste. Nenhum aluno que tem um pouco de afinidade com a matemática disse ter ajuda de mãe, irmão ou um amigo nas suas atividades extraclasses.

Dos alunos pesquisados, 50% tem muita afinidade com a matemática, entre eles, dos que tem ajuda da mãe, $A_{17}$ acertou apenas 40% do pós-teste e $A_{21}$ foi excelente acertando 90% das questões do último teste, ambos tinham tirado zero no pré-teste. Dois alunos afirmaram ter ajuda de irmão, foram eles os alunos $A_{19}$ e $A_{23}$ e um aluno revelou ter ajuda de amigo, os três acertaram 50% do pós-teste e tinham tirado zero no pós-teste. A maioria que tem muita afinidade com a disciplina não recebe ajuda em suas tarefas de matemática, mesmo assim, mais da metade deles conseguiram ótimo desempenho se compararmos as notas do pré-teste com o pós-teste, por exemplo, os alunos $A_3$ $A_{16}$ e $A_{18}$ acertaram todas as questões do pós-teste, $A_{28}$ acertou 90% das questões do pós-teste, $A_{20}$, $A_{27}$ e $A_{31}$ concluíram 80% do pós-teste de forma correta, $A_2$ teve uma melhora significativa acertando seis questões do pós-teste, $A_5$ e $A_{14}$ acertaram, respectivamente, cinco e quatro questões no pós-teste. Todos esses alunos melhoraram suas notas após as nossas atividades, já que tinham tirado zero no pré-teste. O aluno $A_{10}$ também teve um bom desenvolvimento, ele tinha acertado uma questão no pré-teste e após nossas aulas conseguiu acertar 80% do pós-teste.

A seguir, apresentaremos, os dados que relacionam escolaridade do responsável masculino, com escolaridade do responsável feminino e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 57 -** Escolaridade do responsável masculino x escolaridade do responsável feminino e desempenho nos testes.

| ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO | | ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Não escola-rizado | EF incompleto | EF completo | EM incompleto | EM completo | Ensino Superior | Não sabe |
| | Não escolarizado | | ($A_{15}$,0,6,6) | ($A_{25}$,0,5,5) | | | | |
| | EF incompleto | | | | ($A_{28}$,0,9,9) | | | |
| | EF completo | | ($A_{29}$,0,5,5) | | | ($A_1$,0,5,5)<br>($A_6$,0,5,5)<br>($A_{13}$,0,9,9) | | |
| | EM incompleto | | ($A_2$,0,6,6)<br>($A_{16}$,0,10,10) | | | ($A_{24}$,0,5,5)<br>($A_{31}$,0,8,8) | | |
| | EM completo | | ($A_{23}$,0,5,5) | ($A_8$,0,10,10) | | ($A_5$,0,6,6)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{19}$,0,5,5)<br>($A_{30}$,0,5,5) | ($A_{17}$,0,4,4) | ($A_{14}$,0,4,4) |
| | Ensino Superior | | | | | | | |
| | Não sabe | | ($A_{20}$,0,8,8) | | | ($A_9$,3,8,5)<br>($A_{21}$,0,9,9)<br>($A_{32}$,0,7,7) | ($A_4$,0,8,8)<br>($A_7$,0,5,5)<br>($A_{27}$,0,8,8) | ($A_3$,0,10,10)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{12}$,0,5,5)<br>($A_{22}$,0,9,9)<br>($A_{26}$,0,8,8) |

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

De acordo com os dados fornecidos acima, um aluno tem o responsável masculino não escolarizado e a mãe não conseguiu completar ensino fundamental, foi ele o aluno $A_{15}$, que teve um bom desempenho após as nossas atividades acertando 60% das questões do pós-teste. O aluno $A_{25}$ também não tem o responsável masculino escolarizado e afirmou que sua responsável feminina concluiu apenas o ensino fundamental, este aluno teve um desempenho regular acertando 50% das questões do pós-teste. Apenas o aluno $A_{28}$ tem os pais que estudaram até o ensino médio, mas não concluíram esse nível de ensino, ele teve uma excelente nota após as nossas atividades acertando 90% das questões do pós-teste. Um aluno tem os responsáveis masculino e feminino que não chegaram a concluir o ensino fundamental, este aluno foi o $A_{29}$ e acertou 50% do pós-teste. Três alunos afirmaram que seu responsável masculino concluíram o ensino fundamental e que seu responsável feminino estudou até o ensino médio, entre eles os alunos $A_1$

e $A_6$ foram regulares e acertaram 50% das questões do pós-teste, o $A_{13}$ teve um excelente desenvolvimento e acertou nove das 10 questões propostas no pós-teste.

Dois alunos colocaram que seus responsáveis masculino e feminino tem o ensino médio incompleto, $A_2$ teve uma boa nota no pós-teste acertando seis questões e o aluno $A_{16}$ foi excelente acertado o último teste em 100%. Outros dois alunos afirmaram que seus responsáveis masculinos estudaram parcialmente o ensino médio e que seus responsáveis femininos conseguiram completar o mesmo nível de ensino, $A_{24}$ acertou 50% das questões do pós-teste e o aluno $A_{31}$ foi muito bem e errou apenas duas questões no mesmo teste. Um aluno revelou que seu responsável masculino estudou até o ensino médio completo e seu responsável feminino não chegou a completar o ensino fundamental, ele foi o $A_{23}$ e teve um desenvolvimento regular acertando metade das questões do pós-teste, o discente $A_8$ foi excelente e acertou todas as questões do último teste e indicou que seus responsáveis só estudaram até o ensino fundamental completo. Cinco alunos possuem responsáveis que estudaram até o nível médio completo são eles os alunos $A_5$, $A_{11}$, $A_{18}$, $A_{19}$ e $A_{30}$, eles tiraram as respectivas notas no pós-teste, o primeiro tirou seis, os dois seguintes tiraram a nota máxima e os dois últimos foram regulares tirando nota cinco no pós-teste. Os alunos $A_{17}$ e $A_{14}$ acertaram 40% do pós-teste e ambos disseram que o responsável masculino até o ensino médio completo, enquanto que o responsável feminino do primeiro aluno concluiu o nível superior e o segundo não sabe a escolaridade de seu responsável feminino. Todos os alunos citados acima tiraram zero no pré-teste e conseguiram melhorar suas notas após as nossas atividades.

A seguir, apresentaremos, os dados que relacionam dificuldade em aprender matemática, com quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática e o desempenho dos alunos nos testes.

**Quadro 58 -** Dificuldade em aprender matemática x Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática e desempenho nos testes.

| | | QUEM LHE AJUDA NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA? | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Professor particular | Pai | Mãe | Irmão | Amigo | Ninguém | Outros |
| **DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA** | Não | | | ($A_{13}$,0,9,9) | ($A_{23}$,0,5,5) | | ($A_{6}$,0,5,5)<br>($A_{10}$,1,8,7)<br>($A_{14}$,0,6,6)<br>($A_{16}$,0,10,10)<br>($A_{22}$,0,9, 9)<br>($A_{27}$,0,8,8)<br>($A_{28}$,0,9,9) | |
| | Um pouco | ($A_{7}$,0,5,5)<br>($A_{12}$,0,5,5) | | ($A_{17}$,0,4,4)<br>($A_{21}$,0,9,9) | ($A_{19}$,0,5,5) | ($A_{1}$,0,5,5) | ($A_{3}$,0,10,10)<br>($A_{8}$,0,10,10)<br>($A_{9}$,3,8,5)<br>($A_{11}$,0,10,10)<br>($A_{15}$,0,6,6)<br>($A_{18}$,0,10,10)<br>($A_{20}$,0,8,8)<br>($A_{24}$,0,5,5)<br>($A_{25}$,0,5,5)<br>($A_{26}$,0,8,8)<br>($A_{29}$,0,5,5)<br>($A_{31}$,0,8,8)<br>($A_{32}$,0,7,7) | |
| | Muito | | ($A_{5}$,0,6,6) | | | | ($A_{2}$,0,6,6)<br>($A_{30}$,0,5,5) | ($A_{4}$,0,8,8) |

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

No quadro 58, podemos verificar que muitos alunos que tem alguma dificuldade em aprender Matemática, não possuem ajuda nas atividades extraclasse em suas tarefas de Matemática, aproximadamente 47% deles. Cerca de 6% tem muita dificuldade e não possui ajuda de ninguém e quase 41% tem um pouco de dificuldade, mas mesmo assim não possui ajuda extraclasse. Mesmo assim, desses alunos que tem pelo menos um pouco de dificuldade, mais da metade deles tiraram notas excelente. Foram eles os alunos $A_3$, $A_8$, $A_{11}$, $A_{18}$, $A_{20}$, $A_{26}$, $A_{31}$ e $A_{32}$.

## 4.3 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON

Com a análise os dados através do coeficiente de correlação linear de Pearson, geralmente representado pela letra “r”, temos o objetivo de verificar se fatores socioeconômicos podem afetar o desempenho dos estudantes nos testes. Ele mede o grau da correlação entre duas variáveis quantitativas e verifica o que acontece com uma variável quando a outra varia. É um índice com valores de "r" situados no intervalo de -1 a 1, que mede a intensidade de uma relação linear entre as duas variáveis.

> O coeficiente de correlação é uma medida da força e da direção de uma relação linear entre duas variáveis. O símbolo "r" representa o coeficiente de correlação amostral (LARSON; FARBER, 2016, p. 442).

Os Diagramas de dispersão ou gráficos de dispersão são representações de duas ou mais variáveis que são organizadas em um gráfico, uma em função da outra. Ela permite verificar a existência ou não de relação entre duas variáveis de natureza quantitativa.

> Uma correlação é uma relação entre duas variáveis. Os dados podem ser representados por pares ordenados (x, y), sendo x a variável independente (ou explanatória) e y a variável dependente (ou resposta) (LARSON; FARBER, 2016, p. 438)

Os gráficos podem se relacionar e serem interpretados como:

- **Correlação positiva:** quando um aumento de uma grandeza acarreta em um aumento na outra grandeza, onde percebemos um gráfico linear crescente.
- **Correlação negativa:** quando um aumento de uma grandeza acarreta em uma diminuição na outra, onde percebemos um gráfico linear decrescente.
- **Correlação nula:** quando a variação de uma grandeza não acarreta variação na outra, onde percebemos um gráfico linear constante.

O quadro a seguir classifica os tipos de correlação, de acordo com o resultado obtido para o coeficiente de correlação linear de Pearson (r).

**Quadro 59 -** Classificação da correlação.

(continua)

| COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO | CORRELAÇÃO |
|---|---|
| $r = 1$ | Perfeita positiva |
| $0{,}8 \leq r < 1$ | Forte positiva |
| $0{,}5 \leq r < 0{,}8$ | Moderada positiva |
| $0{,}1 \leq r < 0{,}5$ | Fraca positiva |
| $0 < r < 0{,}1$ | Ínfima positiva |

(conclusão)

| | |
|---|---|
| $0$ | Nenhuma correlação |
| $-0{,}1 \leq r < 0$ | Ínfima negativa |
| $-0{,}5 < r \leq -0{,}1$ | Fraca negativa |
| $-0{,}8 < r \leq -0{,}5$ | Moderada negativa |
| $-1 < r \leq -0{,}8$ | Forte negativa |
| $r = -1$ | Perfeita negativa |

Fonte: Adaptado de Barbetta (2012, p. 258)

> Interpretar a correlação usando um diagrama de dispersão pode ser subjetivo. Uma maneira adequada de obter a direção e medir a força de uma correlação linear entre duas variáveis é calcular o coeficiente de correlação. Embora não se tenha a fórmula para calculo manual do coeficiente de correlação amostral, é mais conveniente usar uma ferramenta tecnológica para calcular esse valor (LARSON; FARBER, 2016, p. 438).

Com os dados da tabela acima, podemos quantificar e classificar a força de relação entre as duas grandezas, para isso, utilizaremos o *Software Microsolft Office Excel*. Na primeira correlação iremos relacionar a diferença entre as notas do pré-teste e pós-teste, com o gosto dos alunos pela matemática. Com isso, teremos:

**Quadro 60 -** Parametrização dos dados – Gosto pela Matemática.

| Você gosta de Matemática? | Parametrização |
|---|---|
| Nenhum pouco | 1 |
| Pouco | 2 |
| Muito | 3 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 61 -** Correlação entre a diferença das notas nos testes e gosto pela matemática.

(continua)

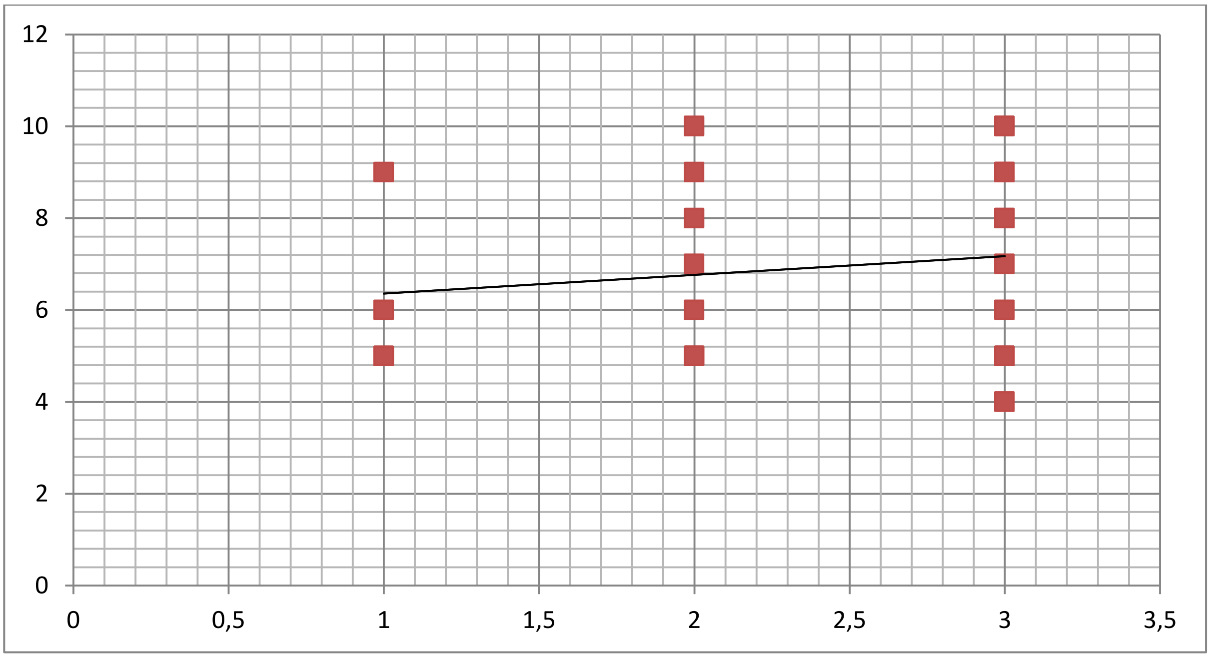
| ALUNO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE | DIFERENÇA ENTRE AS NOTAS DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE | GOSTO PELA MATEMÁTICA |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_2$ | 0 | 6 | 6 | 3 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_4$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_5$ | 0 | 6 | 6 | 2 |
| $A_6$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_7$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_8$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_9$ | 3 | 8 | 5 | 2 |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_{10}$ | 1 | 8 | 7 | 3 |
| $A_{11}$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_{12}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{13}$ | 0 | 9 | 9 | 1 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 | 4 | 3 |
| $A_{15}$ | 0 | 6 | 6 | 1 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_{17}$ | 0 | 4 | 4 | 3 |
| $A_{18}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{21}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 | 9 | 2 |
| $A_{23}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_{27}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 | 7 | 2 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 27 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e gosto pela matemática.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e o gosto do aluno pela matemática, obtivemos r = 0,148205. Como o resultado está dentro do intervalo $0{,}1 < r < 0{,}5$, podemos classificar esta correlação como fraca positiva. Com isso podemos concluir que o fato da maioria dos alunos gostarem pelo menos um pouco de matemática (84,375% deles), teve pouca influência no resultado dos testes.

Com a análise do gráfico, podemos verificar uma reta crescente, que indica uma correlação positiva entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão longe da linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, faremos a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e a dificuldade dos alunos em matemática.

**Quadro 62 -** Parametrização dos dados – Dificuldade em Matemática.

| Você tem dificuldade em matemática? | Parametrização |
|---|---|
| Não | 1 |
| Um pouco | 2 |
| Muito | 3 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 63 -** Correlação entre a diferença das notas dos testes e Dificuldade em Matemática.

(continua)

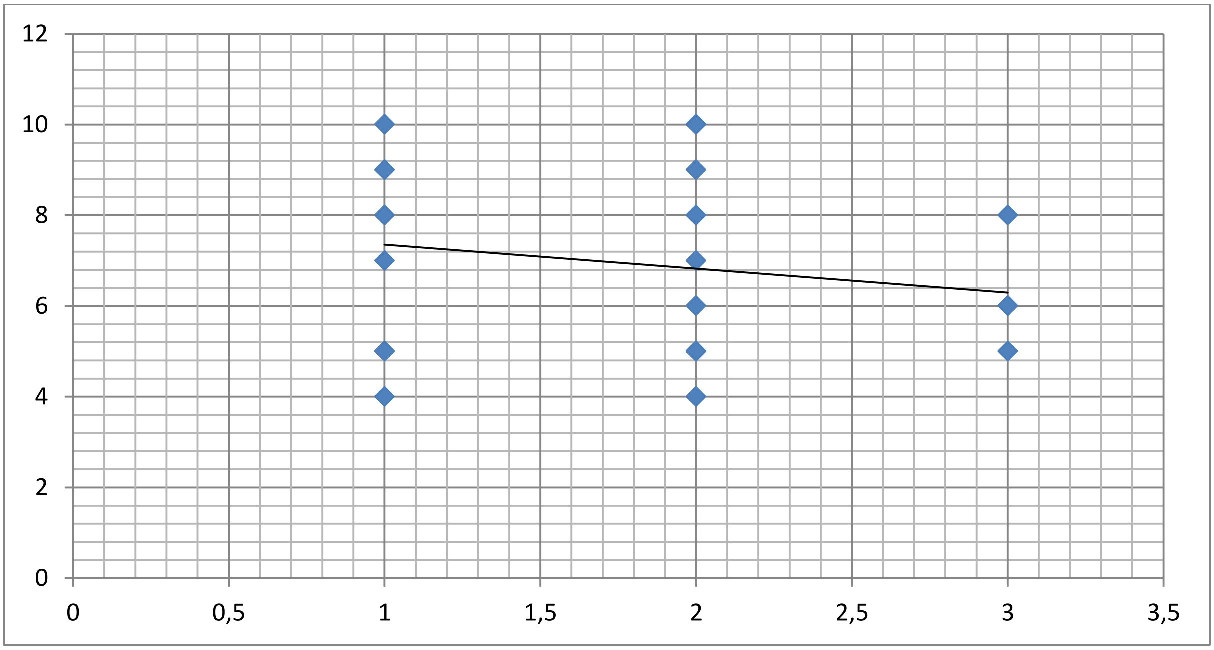
| ALU-NO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE | DIFERENÇA ENTRE AS NOTAS DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE | DIFICUL-DADE |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 0 | 6 | 6 | 3 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_4$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_5$ | 0 | 6 | 6 | 3 |
| $A_6$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_7$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_8$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_9$ | 3 | 8 | 5 | 2 |
| $A_{10}$ | 1 | 8 | 7 | 1 |
| $A_{11}$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_{12}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{13}$ | 0 | 9 | 9 | 1 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 | 4 | 1 |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_{15}$ | 0 | 6 | 6 | 2 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 | 10 | 1 |
| $A_{17}$ | 0 | 4 | 4 | 2 |
| $A_{18}$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_{21}$ | 0 | 9 | 9 | 2 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 | 9 | 1 |
| $A_{23}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_{27}$ | 0 | 8 | 8 | 1 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 | 9 | 1 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 | 7 | 2 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 28 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e Dificuldades em matemática.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e a dificuldade do aluno em matemática, obtivemos r = - 0,16186. Como o resultado está dentro do intervalo

$-0{,}5 < r \leq -0{,}1$, podemos classificar esta correlação como fraca negativa. Com isso podemos concluir que o fato da maioria dos alunos terem pouca ou nenhuma dificuldade em matemática (aproximadamente 81%), influenciou pouco no resultado dos testes.

Com a análise do gráfico, podemos verificar uma reta decrescente, que indica uma correlação negativa entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão longe da linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, faremos a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com a distração dos alunos em matemática.

**Quadro 64 -** Parametrização dos dados – Distração na aula de Matemática.

| Você se distrai nas aulas de matemática? | Parametrização |
|---|---|
| Sim, eu não consigo prestar atenção. | 1 |
| Às vezes quando a aula está chata. | 2 |
| Não, eu sempre presto atenção. | 3 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 65 -** Correlação entre a diferença das notas dos testes e Distração na aula de Matemática.

(continua)

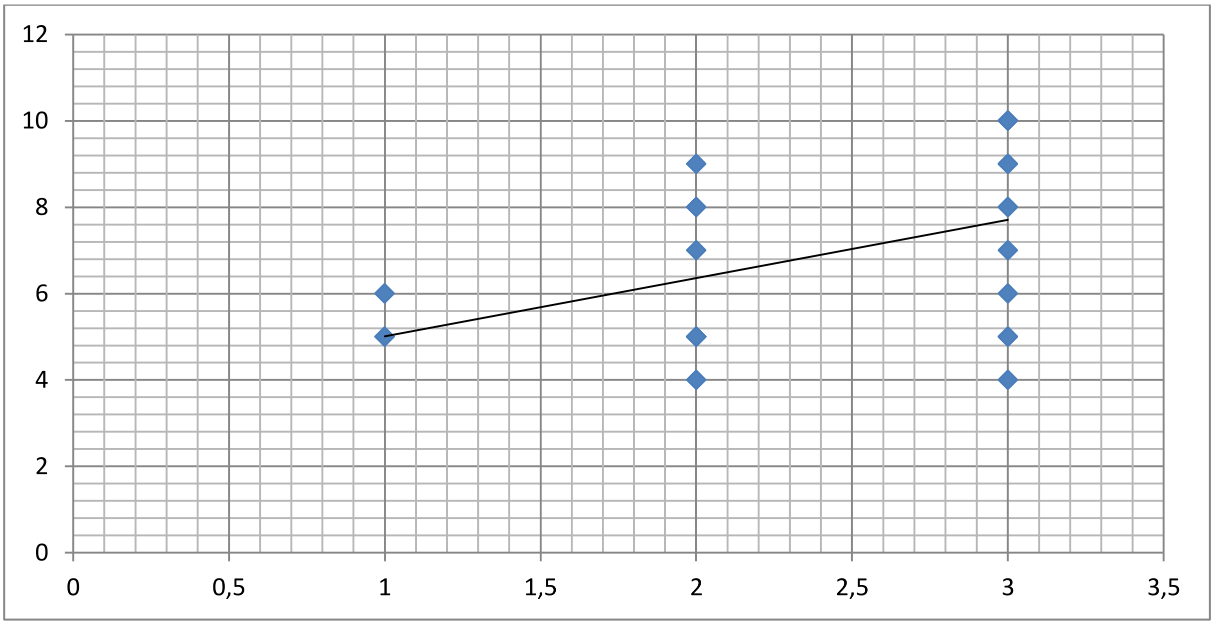
| ALUNO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE | DIFERENÇA ENTRE AS NOTAS DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE | DISTRAÇÃO |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 0 | 6 | 6 | 3 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_4$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_5$ | 0 | 6 | 6 | 1 |
| $A_6$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_7$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_8$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_9$ | 3 | 8 | 5 | 2 |
| $A_{10}$ | 1 | 8 | 7 | 3 |
| $A_{11}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_{12}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{13}$ | 0 | 9 | 9 | 2 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 | 4 | 2 |
| $A_{15}$ | 0 | 6 | 6 | 1 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_{17}$ | 0 | 4 | 4 | 3 |
| $A_{18}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 | 8 | 2 |
| $A_{21}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{23}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{27}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 | 7 | 2 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 29 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e Distração na aula de Matemática.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com a variável distração dos alunos durante as aulas de matemática, obtivemos r = 0,468103. Como o resultado está dentro do intervalo $0{,}1 < r < 0{,}5$, podemos classificar esta correlação como fraca positiva. Com isso, novamente podemos concluir que o fato dos alunos se distraírem ou não em matemática produziu pouco efeito sobre o resultado dos testes.

No gráfico, podemos verificar uma reta crescente, que indica uma correlação positiva entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão longe da linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, faremos a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com a frequência com que os alunos estudam matemática.

**Quadro 66 -** Parametrização dos dados – Frequência com que estuda Matemática.

| Você costuma estudar Matemática? | Parametrização |
|---|---|
| Só na véspera de prova | 1 |
| Só nos fins de semana | 2 |
| Alguns dias da semana | 3 |
| Todo dia | 4 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 67 -** Correlação entre a diferença das notas dos testes e Frequência com que estuda Matemática.

(continua)

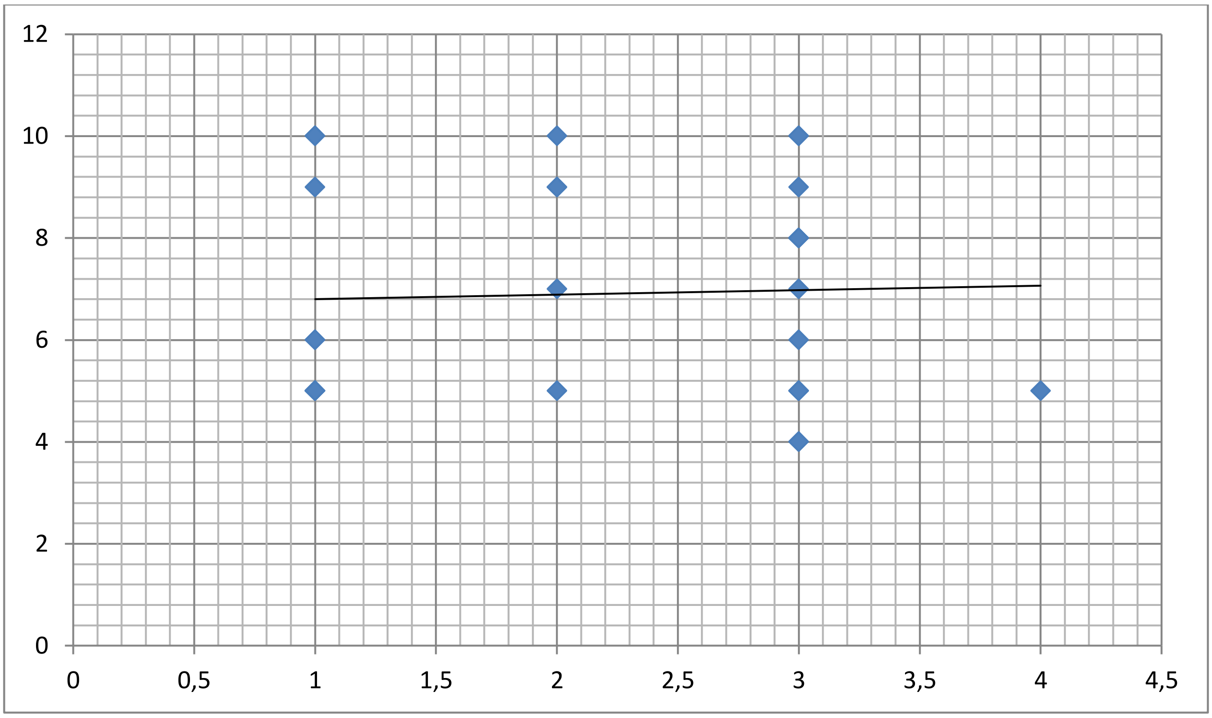
| ALUNO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE | DIFERENÇA ENTRE AS NOTAS DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE | FREQUÊNCIA COM QUE ESTUDA |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_2$ | 0 | 6 | 6 | 1 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 10 | 1 |
| $A_4$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_5$ | 0 | 6 | 6 | 3 |
| $A_6$ | 0 | 5 | 5 | 4 |
| $A_7$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_8$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_9$ | 3 | 8 | 5 | 1 |
| $A_{10}$ | 1 | 8 | 7 | 3 |
| $A_{11}$ | 0 | 10 | 10 | 3 |
| $A_{12}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{13}$ | 0 | 9 | 9 | 2 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 | 4 | 3 |
| $A_{15}$ | 0 | 6 | 6 | 1 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 | 10 | 2 |
| $A_{17}$ | 0 | 4 | 4 | 3 |

(conclusão)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_{18}$ | 0 | 10 | 10 | 1 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{21}$ | 0 | 9 | 9 | 1 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 | 9 | 3 |
| $A_{23}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 | 5 | 3 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{27}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 | 9 | 2 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 | 5 | 1 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 | 8 | 3 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 | 7 | 2 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 30 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e Frequência com que estuda Matemática




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e frequência com que o aluno estuda Matemática, obtivemos r = 0,041709. Como o resultado está dentro do intervalo $0 < r < 0{,}1$, podemos classificar esta correlação como ínfima positiva. Com isso podemos concluir que a frequência com que os alunos estudam matemática teve pouca influência no resultado dos nossos testes.

Neste gráfico, podemos verificar uma reta crescente, que indica uma correlação positiva entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão dispersos em relação à linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, faremos a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com o nível de escolaridade dos responsáveis masculinos.

**Quadro 68 -** Parametrização dos dados – Nível de escolaridade do responsável.

| Até que série estudou seu responsável? | Parametrização |
|---|---|
| Não escolarizado | 1 |
| Fund. Incompleto | 2 |
| Fund. Completo | 3 |
| Médio Incompleto | 4 |
| Médio Completo | 5 |
| Superior | 6 |
| Não sabe | - |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Quadro 69 -** Correlação entre a diferença das notas dos testes e Nível de escolaridade do responsável.

(Continua)

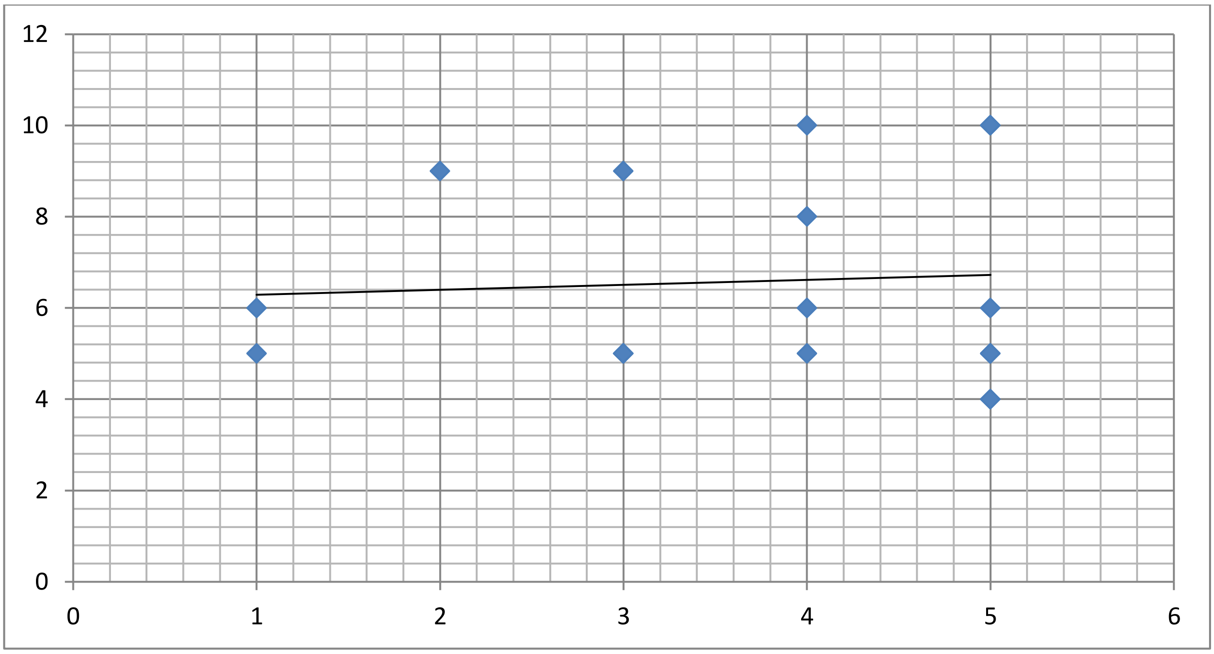
| ALUNO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE | DIFERENÇA NOTAS DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE | ESCOLARIDA-DE MASCULINO | ESCOLARIDA-DE FEMININO |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 | 5 | 3 | 5 |
| $A_2$ | 0 | 6 | 6 | 4 | 2 |
| $A_3$ | 0 | 10 | 10 | - | - |
| $A_4$ | 0 | 8 | 8 | - | 6 |
| $A_5$ | 0 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| $A_6$ | 0 | 5 | 5 | 3 | 5 |
| $A_7$ | 0 | 5 | 5 | - | 6 |
| $A_8$ | 0 | 10 | 10 | 5 | 3 |
| $A_9$ | 3 | 8 | 5 | - | 5 |
| $A_{10}$ | 1 | 8 | 7 | - | - |
| $A_{11}$ | 0 | 10 | 10 | 5 | 5 |

(conclusão)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_{12}$ | 0 | 5 | 5 | - | - |
| $A_{13}$ | 0 | 9 | 9 | 3 | 5 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 | 4 | 5 | - |
| $A_{15}$ | 0 | 6 | 6 | 1 | 2 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 | 10 | 4 | 2 |
| $A_{17}$ | 0 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| $A_{18}$ | 0 | 10 | 10 | 5 | 5 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 | 8 | - | 2 |
| $A_{21}$ | 0 | 9 | 9 | - | 5 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 | 9 | - | - |
| $A_{23}$ | 0 | 5 | 5 | 5 | 2 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 | 5 | 4 | 5 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 | 5 | 1 | 3 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 | 8 | - | - |
| $A_{27}$ | 0 | 8 | 8 | - | 6 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 | 9 | 2 | 4 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 | 5 | 3 | 2 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 | 8 | 4 | 5 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 | 7 | - | 5 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

**Gráfico 31 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e Nível de escolaridade do responsável masculino.

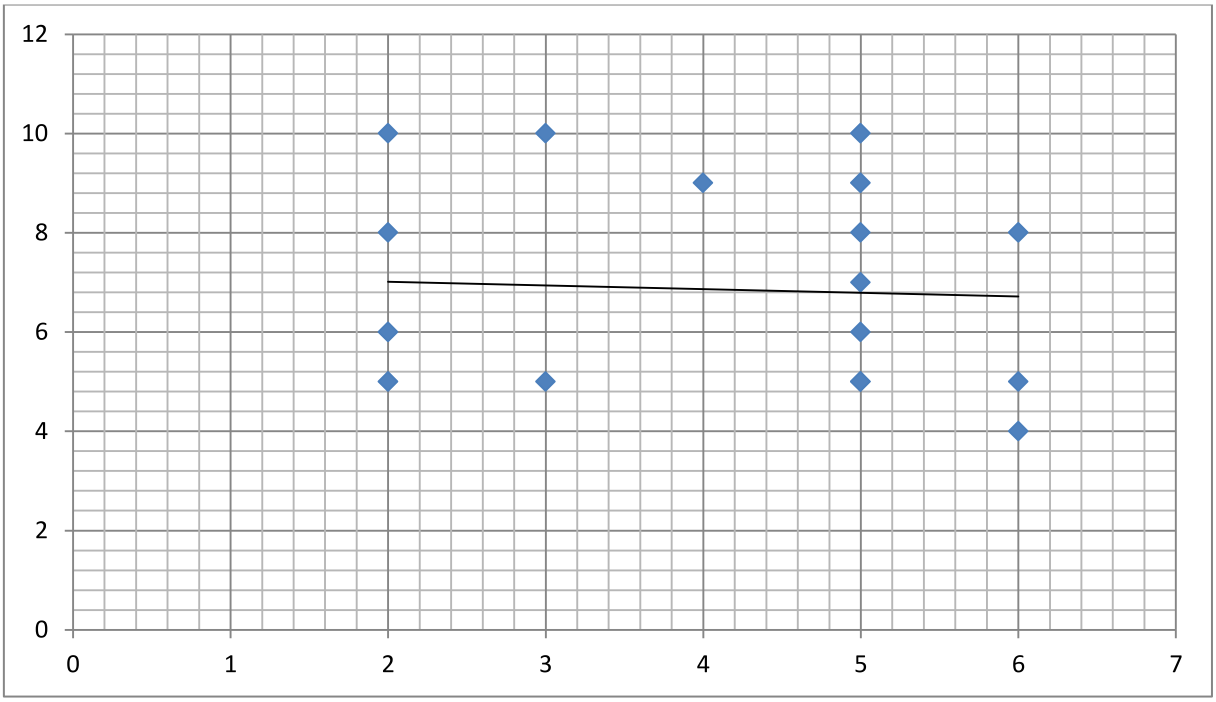



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e com o nível de escolaridade do responsável masculino, obtivemos r = 0,066398. Como o resultado está dentro do intervalo $0 < r < 0{,}1$, podemos classificar esta correlação como ínfima positiva. Com isso podemos concluir que o fato dos alunos não terem algum responsável masculino com formação superior, teve pouca influência no resultado dos testes.

No gráfico, podemos verificar uma reta crescente, que indica uma correlação positiva entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão dispersos em relação à linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, faremos a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com o nível de escolaridade dos responsáveis femininos.

**Gráfico 32 -** Dispersão: diferença das notas dos testes e Nível de escolaridade do responsável feminino.




Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Ao obtermos o valor do coeficiente linear de Pearson “r”, para correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e com o nível de escolaridade do responsável feminino, obtivemos r = - 0,05294. Como o resultado está dentro do intervalo $-0{,}1 < r < 0$, podemos classificar esta correlação como ínfima negativa. Com isso podemos concluir que o fato da maioria dos alunos não ter algum responsável com formação superior, teve pouca influência no resultado dos testes.

Com o gráfico, conseguimos perceber uma reta descrecente, que indica pouca correlação entre as variáveis. Quanto aos pontos, observamos que estão dispersos em relação à linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis.

Em todas as correlações observadas, não tivemos correlações perfeitas, fortes e moderadas negativas e/ou positivas, as únicas correlações que se destacaram foram às fracas e ínfimas positivas e/ou negativas, que são correlações que indicam pouquíssima influência entre as variáveis. De acordo com Barbetta (2012)

> Duas variáveis são positivamente correlacionadas quando elas caminham num mesmo sentido, ou seja, elementos com valores pequenos de tendem a ter valores pequenos de x, e elementos com valores grandes de tendem a ter valores grandes de y e duas variáveis são negativamente correlacionadas quando elas caminham em sentidos opostos, ou seja, elementos com valores pequenos de tendem a ter valores grandes de x, e elementos com valores grandes de tendem a ter valores pequenos de y (BARBETTA, 2012, p.251).

### 4.3.1 Resumo dos resultados dos coeficientes de correlação linear de Pearson (r), em cada item analisado anteriormente.

**Quadro 70 -** Consequências das correlações lineares de Person (r) entre os fatores socioeconômicos e o desempenho nos testes.

| Item | Valor do coeficiente linear de Pearson (r) | Classificação | Correlação linear |
|---|---|---|---|
| Gosto pela matemática | r = 0,148205 | Fraca positiva | Positivamente Correlacionados |
| Dificuldade em matemática | r = - 0, 16186 | Fraca negativa | Negativamente correlacionados |
| Distração na aula de matemática | r = 0,468103 | Fraca negativa | Positivamente correlacionados |
| Frequência com que estuda matemática | r = 0,041709 | Ínfima positiva | Positivamente correlacionados |
| Nível de escolaridade de seu responsável masculino | r = 0,066398 | Fraca positiva | Positivamente correlacionados |
| Nível de escolaridade de seu responsável feminino | r = - 0,05294 | Ínfima positiva | Negativamente correlacionados |

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

A seguir, apresentaremos o teste de hipótese baseado nos resultados do pré-teste e pós-teste, a fim de mostrar outras referências estatísticas sobre nossa pesquisa.

## 4.4 TESTE DE HIPÓTESE

O teste de hipótese é uma norma que caracteriza se deve aceitar ou rejeitar um argumento sobre uma amostra estatística de acordo com os dados fornecidos, para se criar padrões a uma população. Sobre essa determinada amostra, devemos extrair alguns elementos, que veremos posteriormente.

> Um teste de hipótese é um processo que usa estatísticas amostrais para tentar uma afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional. Uma afirmação sobre um parâmetro populacional é chamado hipótese estatística. Para testar uma afirmação sobre um parâmetro populacional, você deve especificar, cuidadosamente, um par de hipóteses – uma que represente a afirmação e outra, seu complemento. Quando uma dessas hipóteses é falsa, a outra deve ser verdadeira. Qualquer uma das hipóteses – **a hipótese nula ou a hipótese alternativa** – pode representar a afirmação original (LARSON; FARBER, 2016, p. 323-324).

Como vimos na citação acima, temos duas hipóteses a considerar, são elas:

> **1.** Uma hipótese nula $H_0$ é uma hipótese estatística que contem uma afirmação de igualdade, tal como $\leq, = ou\ \geq$.
> **2.** A hipótese alternativa $H_a$ é o complemento da hipótese nula. É uma afirmação que é aceita como verdadeira se $H_0$ for falsa e contém uma declaração de desigualdade estrita, tal como $<, \neq ou\ >$.
> O símbolo $H_0$ é lido como “H zero” ou “H nula”, e $H_a$, como “H a”.
> (LARSON; FARBER, 2016, p.324).

Para produzir as hipóteses nula e alternativa, devemos escrever a afirmação feita sobre o parâmetro populacional por meio de uma sentença matemática. O quadro a seguir apresenta a relação entre possíveis declarações sobre o parâmetro $\mu$ e as correspondentes hipóteses nula ou alternativa.

**Quadro 71 -** Declarando e construindo hipóteses.

| **Declaração sobre $H_0$**<br>**A média é** | **Sentença matemática** | **Declaração sobre $H_a$**<br>**A média é** |
|---|---|---|
| ... maior ou igual a K.<br>... pelo menos K.<br>... não menos que K. | $\begin{cases} H_0 : \mu \geq k \\ H_a : \mu < k \end{cases}$ | ... menor que K.<br>... abaixo de K.<br>... menos que K. |
| ... menor ou igual a K.<br>... no máximo K.<br>... não mais que K. | $\begin{cases} H_0 : \mu \leq k \\ H_a : \mu > k \end{cases}$ | ... maior que K.<br>... acima de K.<br>... mais que K. |
| ... igual a K.<br>...k.<br>... exatamente K. | $\begin{cases} H_0 : \mu = k \\ H_a : \mu \neq k \end{cases}$ | ... não igual a K.<br>... diferente de K.<br>... não K. |

Fonte: Larson e Farber (2016, p. 325)

Depois de escolhida às hipóteses que melhor se adequam ao estudo, devemos verificar qual delas vai ser aceita ou rejeitada. Então, usa-se a curva normal para verificá-las, tomando como significância $\propto$ e confiança $1-\propto$. E pelo fato de não estarmos trabalhando com uma população inteira, podem ocorrer erros do tipo I e II, conforme Larson e Farber (2016), que diz, “Um erro do tipo I ocorre se a hipótese nula é rejeitada quando na realidade é verdadeira e um erro do tipo II ocorre se a hipótese nula não é rejeitada quando na realidade é falsa”. (Larson e Farber (2016, p.327 grifo autores)

Agora veja, os possíveis resultados de um teste de hipótese, no quadro.

**Quadro 72 -** Resultados possíveis de um teste de hipótese.

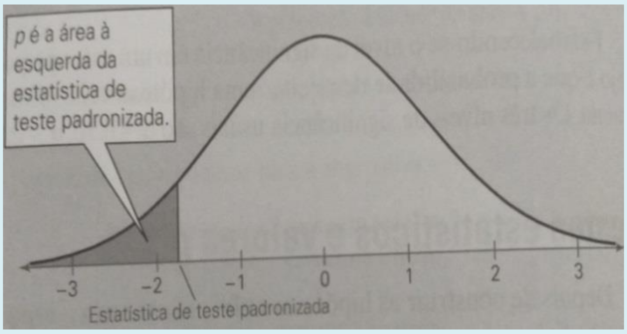
| | **Realidade de $H_0$** | |
|---|---|---|
| **Decisão** | **$H_0$ é verdadeira** | **$H_0$ é falsa** |
| **Não rejeita $H_0$** | Decisão correta | Erro tipo II |
| **Rejeita $H_0$** | Erro tipo I | Decisão correta |

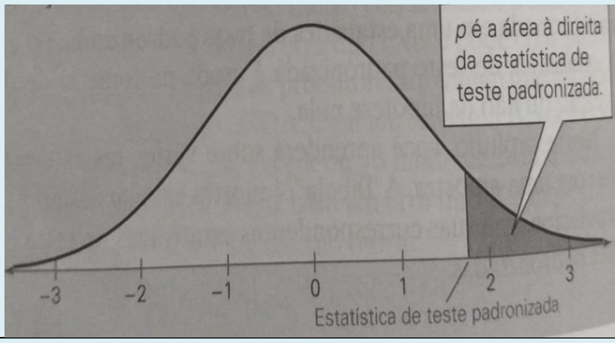
Fonte: Larson e Farber (2016, p. 327)

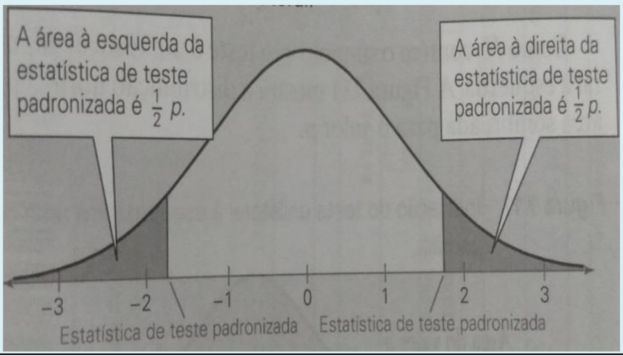
O valor de um teste de hipótese depende da natureza do teste. No quadro abaixo apresentaremos os três tipos de teste de hipótese.

**Quadro 73 -** Tipos de teste de hipótese.

<table>
<tr><th>HIPÓTESES</th><th>CURVA NORMAL</th><th>INTERPRETAÇÃO DA CALDA</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Se a hipótese alternativa $H_a$ contém o símbolo “menor que” (<), então o teste de hipótese é um teste unilateral à esquerda (Veja figura).</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0 : \mu \geq k \\ H_a : \mu < k \end{cases}$</td><td>Figura 57 - Indicação de um teste unilateral à esquerda.


</td><td>É um teste com cauda à esquerda, que possui região de rejeição de H0, na cauda da esquerda.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Se a hipótese alternativa $H_a$ contém o símbolo “maior que” (>), então o teste de hipótese é um teste unilateral à direita (Veja figura).</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0 : \mu \leq k \\ H_a : \mu > k \end{cases}$</td><td>Figura 58 - Indicação de um teste unilateral a direita.


</td><td>É um teste com cauda à direita, que possui região de rejeição de H0, na cauda da direita.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Se a hipótese alternativa $H_a$ contém o símbolo “diferente de” (≠), então o teste de hipótese é um teste bilateral (Veja figura). Em um teste bilateral, cada cauda tem área de $\frac{1}{2}\rho$.</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} H_0 : \mu = k \\ H_a : \mu \neq k \end{cases}$</td><td>Figura 59 - Indicação de um teste bilateral.


</td><td>- É um teste bicaudal com regiões de rejeição de H0 em ambas as caudas.</td></tr>
</table>

Fonte: Sistematizado de Larson e Farber (2016, p. 330-331)

Para concluirmos o teste de hipótese, devemos analisar as seguintes regras, baseado no valor de $\rho$ e interpretá-las.

1. Se $\rho \leq \alpha$, então rejeite $H_0$.
2. Se $\rho > \alpha$, não rejeite $H_0$.

**Quadro 74 -** Interpretando decisões de um teste de hipótese.

| | **Afirmação inicial** | |
|---|---|---|
| **Decisão** | **Afirmação está em $H_0$** | **Afirmação está em $H_a$** |
| **Rejeita $H_0$** | Há evidencia suficiente para rejeitar a afirmação | Há evidencia suficiente para apoiar a afirmação |
| **Não rejeita $H_0$** | Não há evidencia suficiente para rejeitar a afirmação | Não há evidencia suficiente para apoiar a afirmação |

Fonte: Larson e Farber (2016, p. 333)

A seguir, apresentaremos como realizar um teste de hipótese, usando os valores de $\rho$.

1. Expresse a afirmação verbal e matemática. Identifique as hipóteses nula e alternativa.

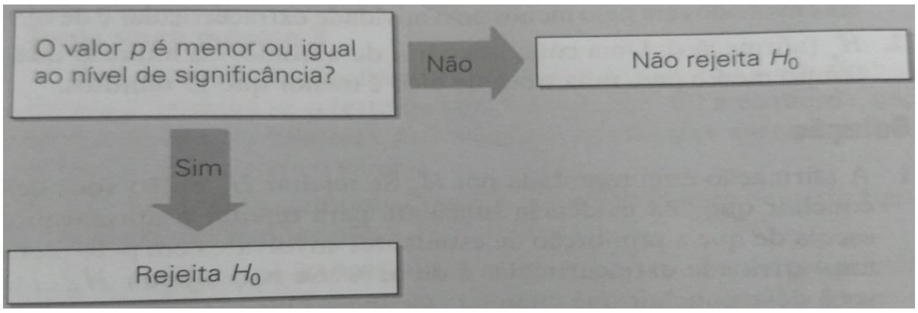
$H_0$: ?    $H_a$: ?

2. Especifique o nível de significância.

$\alpha$: ?

3. Estabeleça a distribuição amostral padronizada e esboce seu gráfico.
4. Calcule a estatística de teste e sua correspondente estatística de teste padronizada. Acrescente isso no seu esboço.
5. Encontre o valor de $\rho$.
6. Use a regra de decisão. **(Figura 60**)

**Figura 60 -** Regra de decisão.




7. Conclua interpretando a decisão no contexto da afirmação original.

Fonte: Larson e Farber (2016, p. 334)

### 4.1.1 Teste de Hipótese do Experimento

Com o percentual dos resultados quantitativos dos testes, aplicamos o teste de hipótese com o intuito de entender conclusões estatísticas sobre o pós-teste e, consequentemente, a metodologia de ensino adotada durante o experimento, já que o último teste expressa o conhecimento que os alunos tinham acerca do assunto, somados aos conhecimentos adquiridos no decorrer das aulas. E pelo que vimos, o conhecimento que os alunos tinham antes das atividades, em relação ao assunto, não se pode considerar.

Nossa amostra foi retirada da tabela abaixo, que identifica as notas, numa escala de zero a dez, de cada aluno no pré-teste e pós-teste, ambos com dez questões cada. Determinamos o nível de significância $\propto = 0{,}05$ e partir daí, verificaremos se foi possível atribuir condições de aceitar ou rejeitar as hipóteses.

**Quadro 75 -** Notas absolutas dos alunos no pré-teste e pós-teste.

(Continua)

| ALUNO | PRÉ-TESTE | PÓS-TESTE |
|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 5 |
| $A_2$ | 0 | 6 |
| $A_3$ | 0 | 10 |
| $A_4$ | 0 | 8 |
| $A_5$ | 0 | 6 |
| $A_6$ | 0 | 5 |
| $A_7$ | 0 | 5 |
| $A_8$ | 0 | 10 |
| $A_9$ | 3 | 8 |
| $A_{10}$ | 1 | 8 |
| $A_{11}$ | 0 | 10 |
| $A_{12}$ | 0 | 5 |
| $A_{13}$ | 0 | 9 |
| $A_{14}$ | 0 | 4 |
| $A_{15}$ | 0 | 6 |
| $A_{16}$ | 0 | 10 |
| $A_{17}$ | 0 | 4 |
| $A_{18}$ | 0 | 10 |
| $A_{19}$ | 0 | 5 |
| $A_{20}$ | 0 | 8 |

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| $A_{21}$ | 0 | 9 |
| $A_{22}$ | 0 | 9 |
| $A_{23}$ | 0 | 5 |
| $A_{24}$ | 0 | 5 |
| $A_{25}$ | 0 | 5 |
| $A_{26}$ | 0 | 8 |
| $A_{27}$ | 0 | 8 |
| $A_{28}$ | 0 | 9 |
| $A_{29}$ | 0 | 5 |
| $A_{30}$ | 0 | 5 |
| $A_{31}$ | 0 | 8 |
| $A_{32}$ | 0 | 7 |

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Em seguida retiramos os dados para a aplicação do teste com base na equação:

$$t = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Onde:

$$x = média\ do\ pré - teste;$$

$$\mu_0 = média\ do\ pós - teste;$$

$$\sigma = desvio\ padrão\ do\ pós - teste;$$

$$n = número\ da\ amostra.$$

Com os dados presentes na tabela, calculamos:

$$x = 0{,}125;$$

$$\mu_0 = 7{,}03125;$$

$$\sigma = 2{,}039677;$$

$$n = 32.$$

Substituindo na equação, teremos:

$$t = \frac{0{,}125 - 7{,}03125}{\frac{2{,}039677}{\sqrt{32}}}$$

Onde:

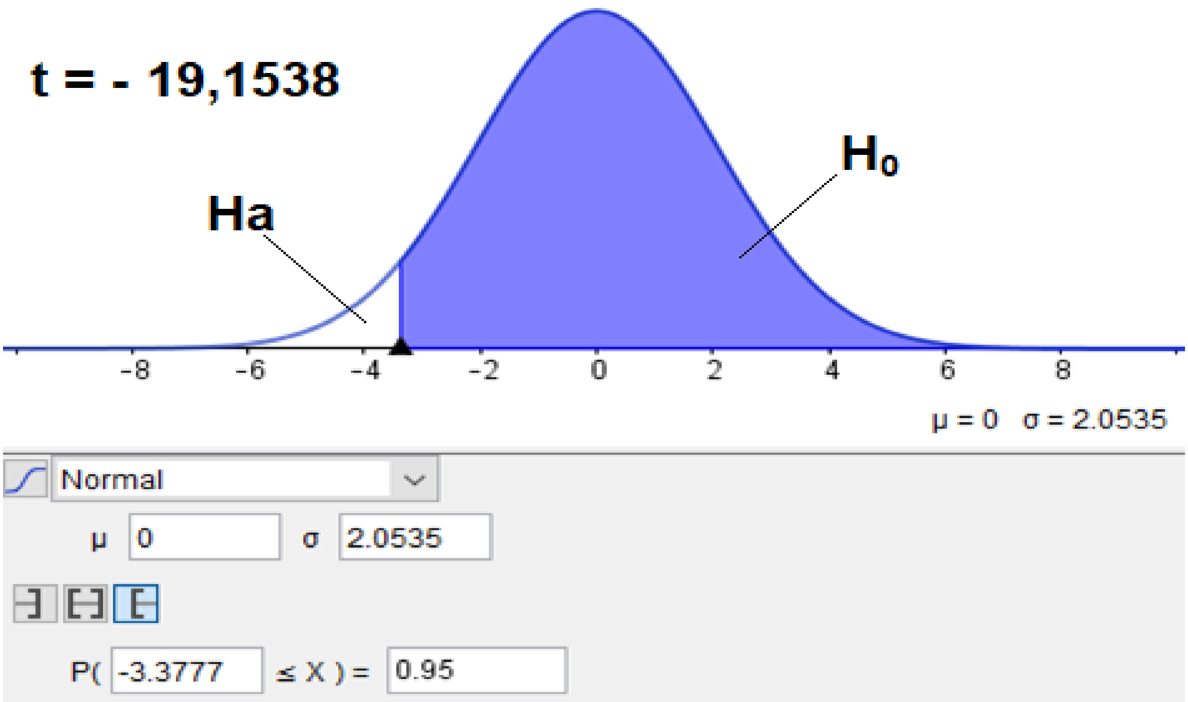
$$t = -19,1538$$

Para o teste de hipótese do experimento, estabelecemos as seguintes hipóteses:

- Hipótese nula $H_0$: $M_1 \geq M_2$, ou seja, a média do pré-teste foi maior ou igual à do pós-teste;
- Hipótese alternativa $H_a$: $M_1 < M_2$, isto é, a média do pré-teste foi menor que a do pós-teste.

O gráfico a seguir apresenta a localização da região de rejeição e a estatística de teste padronizada (t).

**Gráfico 33 -** Localização da região de rejeição e a estatística de teste padronizada (t).




Fonte: Pequisa de campo (2017)

A hipótese inicial está representada na parte pintada em azul no gráfico. Como $t < t_{0,95}$, ou seja, o resultado -19,1538 < -3,3777, implica que ele está à esquerda da cauda, ou seja, fora do intervalo do $H_0$. Neste caso, devemos rejeitar a hipótese nula ($H_0$) de que $M_1 \geq M_2$ e se aceita a hipótese alternativa ($H_a$), comprovando estatisticamente que $M_1 < M_2$, ou seja, nossa metodologia de ensino apresentou, estatisticamente, melhoria no desempenho dos alunos no pós-teste.

## 4.5 ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NAS ATIVIDADES DE ENSINO

Ao todo conseguimos aplicar seis atividades de ensino, com os tópicos de Análise Combinatória, nesta respectiva ordem: Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), Fatorial de um número natural “n”, Permutação Simples, Diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples, Arranjo Simples, e Combinação Simples.

A Atividade 1, sobre P.F.C. tinha o objetivo de fazer com que o aluno descobrisse uma maneira prática de resolver as questões propostas, através do quadro 1. Após a descoberta que poderiam resolver as questões listando todas as possibilidades e encontrar os resultados, os alunos tiveram dificuldades no preenchimento do quadro 1, por desconhecerem alguns termos como: etapa e etapas independentes e tivemos que fazer intervenções para explicá-las. Com isso, eles conseguiram perceber a regularidade nos cálculos e elaboram em seguida boas conclusões a respeito do que seria necessário para encontrar o resultado das questões, ou seja, calcular usando o P.F.C.

Na atividade 2, o objetivo era fazer com que os alunos chegassem a uma conclusão geral do que seria o fatorial de um número natural n, após o preenchimento do quadro 2. Os alunos não tiveram dificuldade para resolver as questões propostas na atividade e preencher o quadro, pois a atividade, de modo geral, era muito parecida com a atividade anterior. Após o preenchimento do quadro e da leitura proposta conseguiram perceber que os cálculos necessários para chegar ao resultado poderiam ser representados pela simbologia do número fatorial e a maioria elaborou boas conclusões.

A atividade 3, tinha como objetivo conceituar Permutação Simples, após preencherem o quadro 3. Esta atividade de ensino apresentou pouca dificuldade na resolução das questões propostas e no quadro tiveram maiores dúvidas no que seria a palavra agrupamento e no preenchimento desta coluna, neste momento tivemos que fazer intervenção. A partir daí, puderam concluir a atividade de forma satisfatória.

Na atividade 4, o objetivo dela era descobrir uma maneira prática de diferenciar  Arranjo Simples de Combinação Simples, com a leitura das questões e preenchimento do quadro 4. Os educandos tiveram dificuldade em resolver as questões por não perceberem as que não importavam a ordem de escolha dos elementos, ou seja, as de Combinação Simples e neste momento fizemos intervenções. Após essas resoluções conseguiram concluir a atividade preenchendo o quadro 4 sem maiores dificuldades.

A quinta atividade, tinha o objetivo de descobrir uma maneira prática de resolver questões de Arranjo, após a resolução das seis questões propostas e preenchimento do quadro 5. Os grupos não tiveram dificuldades em resolvê-las e a maior dificuldade foi no preenchimento do quadro nas duas últimas colunas que formalizariam a fórmula. Nesta hora tivemos que interceder e logo após esse momento os grupos finalizaram as atividades elaborando de modo geral boas conclusões.

Em nossa sexta atividade, o objetivo era descobrir uma maneira prática de resolver questões de Combinação Simples, após a resolução das seis questões propostas e preenchimento do quadro 6. Apesar da atividade de diferenciar Arranjo Simples de Combinação Simples ter ajudado, os alunos ainda sentiram dificuldade na resolução das questões e nas duas últimas colunas da tabela para formalização da fórmula, mas após nossa intervenção a atividade foi concluída e eles elaboração suas conclusões.

A seguir, apresentaremos o confronto entre as análises a priori e posteriori das atividades de ensino de nossa sequência didática.

## 4.6 CONFRONTO ENTRE AS ANÁLISES A PRIORI E POSTERIORI DE NOSSA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ENSINO, PROPOSTA EM NOSSAS ATIVIDADES

A fim de validar nossa sequência de ensino, apresentaremos um quadro comparando o que esperávamos com as nossas atividades de ensino e o que aconteceu durante as mesmas.

**Quadro 76 -** Comparação entre Análise a priori e Análise a posteriori.

(continua)

| **Atividade** | **Análise a priori** | **Análise a posteriori** | **Validação** |
|---|---|---|---|
| | Após a leitura das sete atividades esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, talvez até de maneira empírica através da árvore de possibilidades, | A atividade 1, sobre P.F.C. tinha o objetivo de fazer com que o aluno descobrisse uma maneira prática de resolver questões de contagem, resolvendo as sete questões | |

(continuação)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ª | contagem direta ou ainda pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Não descartando a hipótese de que alguns grupos tenham dificuldades em calcular o total de possibilidades. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização do Princípio multiplicativo (P.F.C.). Pretendemos que esta institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do **quadro 1**. Esperamos que os alunos tenham alguma dificuldade no preenchimento do quadro 1 por desconhecerem algumas palavras a qual teremos que nos posicionar a respeito. | propostas na atividade 1 e com o preenchimento do quadro. Após a descoberta que poderiam resolver as questões listando todas as possibilidades e encontrar os resultados, os alunos tiveram dificuldades no preenchimento do quadro 1 por desconhecerem alguns termos como: etapa e etapas independentes, neste momento tivemos que fazer intervenções para explicá-las. Com isso, eles conseguiram perceber a regularidade nos cálculos e elaboraram em seguida suas conclusões a respeito do que seria necessário para encontrar o resultado das questões, ou seja, calcular usando o P.F.C. Nessa atividade conseguimos validar 75% das conclusões e os outros 25% foram parcialmente válidas. | Posi-tiva |
| 2ª | Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência da atividade anterior. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta | Na atividade 2, o objetivo era fazer com que os alunos chegassem a uma conclusão geral do que seria o fatorial de um número natural n, após o preenchimento do quadro 2. Os alunos não tiveram dificuldade para resolver as | Posi-tiva |

(continuação)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ou P.F.C.. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização do conceito de fatorial. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 2. | questões propostas na atividade e preencher o quadro, pois a atividade de modo geral era muito parecida com a atividade anterior. Após o preenchimento do quadro e da leitura proposta conseguiram perceber que os cálculos necessários para chegar ao resultado poderiam ser representados pela simbologia do número fatorial e a maioria elaborou boas conclusões. Nessa atividade conseguimos validar 62,5% das conclusões e os outros 25% foram parcialmente válidas e apenas um grupo não apresentou conclusão. | |
| 3ª | Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência da atividade anterior. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou P.F.C. Contamos com algumas dificuldades nas interpretações das questões para determinar o total de possibilidades. O objetivo delas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para | A atividade 3, tinha como objetivo conceituar Permutação Simples, após resolverem as seis questões propostas e preencherem o quadro. Esta atividade de ensino praticamente não apresentou dificuldade para os alunos nas resoluções das questões propostas, pela experiência que eles adquiriram com as atividades anteriores e no quadro tiveram dúvidas com a palavra agrupamento e no | Posi-tiva |

(continuação)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | a institucionalização da definição de Permutação Simples. Pretendemos que esta institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura da tabela 3. | preenchimento da coluna que continha esta palavra, neste momento tivemos que fazer intervenção. A partir daí, puderam concluir a atividade de forma satisfatória. Nessa atividade conseguimos validar 25% das conclusões e 62,5% foram parcialmente válidas e apenas uma equipe fez uma conclusão longe do que esperávamos. | |
| 4ª | Após a leitura das seis atividades é esperado que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência das atividades 1 e 2. O que deve ocasionar erros nas atividades em que a ordem da escolha dos elementos não importa na hora de se formar o agrupamento. Esperamos que esta dificuldade seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 4. Talvez as resoluções ainda ocorram de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou ainda pelas fórmulas de Arranjo e Combinação. Esperamos dificuldades nas interpretações das questões propostas para determinar o | Na atividade 4, o objetivo dela era descobrir uma maneira prática de diferenciar Arranjo Simples de Combinação Simples, com a leitura das seis questões e preenchimento do quadro 4. Os educandos tiveram dificuldade em resolver as questões por não perceberem as que não importavam a ordem de escolha dos elementos, ou seja, as de Combinação Simples e neste momento fizemos intervenções. De modo geral, após serem tiradas as dúvidas nas resoluções, conseguiram concluir a atividade preenchendo o quadro 4 sem maiores dificuldades. Nessa atividade conseguimos validar | Posi-tiva |

(continuação)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | total de possibilidades. O objetivo das questões é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a introdução do conceito de Arranjo e Combinação, bem como fazer os alunos perceberem a diferença entre os dois tipos de técnicas. | 91,67% das justificativas e somente três justificativas foram inválidas. | |
| 5ª | Ao lerem as seis atividades, esperamos que os alunos montem estratégias de resoluções, com a experiência das atividades anteriores. Podendo talvez ainda ocorrer de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta, P.F.C. ou Fórmula de Arranjo. O objetivo das questões propostas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula de Arranjo. Pretendemos que está institucionalização seja superada com a construção, preenchimento e leitura do quadro 5. | A quinta atividade, tinha o objetivo de descobrir uma maneira prática de resolver questões de Arranjo, após a resolução das seis questões propostas e preenchimento do quadro 5. Os grupos não tiveram dificuldades em resolvê-las e o maior problema foi no preenchimento do quadro nas duas últimas colunas que formalizariam a fórmula. Nesta hora tivemos que interceder e logo após nossa intervenção, os grupos finalizaram a atividade elaborando de modo geral boas conclusões. Nessa atividade conseguimos validar 62,5% das conclusões, 12,5% foram parcialmente válidas e duas equipes não apresentaram conclusão. | Posi-tiva |
| | Após a leitura das seis questões é esperado que os | Em nossa sexta atividade, o objetivo era descobrir uma | |

(conclusão)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6ª | alunos montem estratégias de resoluções e contamos com a lembrança/valorização das atividades anteriores. Talvez as resoluções ainda ocorram de maneira empírica, através da árvore de possibilidades, contagem direta ou ainda pela fórmula de Combinação. O objetivo das situações-problemas é proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula de Combinação. Esperamos dificuldades nas interpretações dos problemas para determinar o total de possibilidades e para institucionalização da fórmula. Acreditamos que a maioria dos alunos não irá perceber que a ordem dos elementos não importa no momento de configurar os agrupamentos. Fazendo a contagem dos grupos de forma excessiva. | maneira prática de resolver questões de Combinação Simples, após a resolução das seis questões propostas e preenchimento do quadro 6. Apesar da atividade de diferenciar Arranjo Simples de Combinação Simples ter ajudado, os alunos ainda sentiram dificuldade na resolução das questões e nas duas últimas colunas da tabela para formalização da fórmula, mas após nossa intervenção a atividade foi concluída e eles elaboração suas conclusões. Nessa atividade conseguimos validar 50% das conclusões, 12,5% foram parcialmente válidas, 25% foram inválidas e apenas uma não apresentou conclusão. | Posi-tiva |

Fonte: Autor (2017)

## 4.7 CONSIDERAÇÕES DA ANÁLISE DO EXPERIMENTO

Ao analisarmos a nossa experimentação, percebemos que pouquíssimos alunos tinham ideia para resolver problemas de contagem através de algumas das técnicas de contagem, até mesmo a técnica de listar todas as possibilidades não foi desenvolvida de imediato. Essa constatação foi observada, por que de todas as 10 questões resolvidas por cada um dos 32 alunos, apenas quatro foram corretas. A partir da aplicação de nossa atividade, podemos constatar que o raciocínio combinatório foi desenvolvido, técnicas de resoluções foram aprendidas e ideias a respeito dos tópicos de Análise Combinatória foram vivenciadas, graças ao formato das atividades, que se iniciava pela resolução de problemas e através das tabelas, criaram-se padrões que geraram modelos matemáticos perceptíveis à vista dos alunos, gerando conclusões sobre técnicas de contagem que ajudaram e muito a termos bons resultados em nosso pós-teste.

Depois de analisarmos nosso experimento, podemos observar que as dificuldades na resolução das questões estariam relacionadas à compreensão do comando da questão. Geralmente, por não perceberem que nas questões de Análise Combinatória, devemos inicialmente resolver as etapas mais restritivas, ou seja, aquelas que serão resolvidas primeiramente, por terem alguma imposição. Outro erro a se considerar, foi aquele que alguns ainda se confundiram, quando a questão é de Arranjo Simples ou Combinação Simples, isso foi observado nas questões $Q_8$, $Q_9$ e $Q_{10}$ de nosso experimento e especificado em nossa análise de erros.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória, haja visto, que o assunto tem mostrado que professores e alunos sentem dificuldades de interagir com o mesmo, tornando o ensino-aprendizagem pouco satisfatório. E a partir dessa investigação, procuramos responder problematizações como: A sequência didática proposta propicia uma participação efetiva e um bom desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória? A sequência oferecida aos alunos desenvolve competências e habilidades para resolverem problemas de Análise Combinatória?

Com essas perguntas, elaboramos nossa sequência baseada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), no Ensino de Matemática por Atividades segundo Sá (2009) e no uso de jogos. Para a composição de nosso trabalho, escrevemos nas Análises Prévias nossa fundamentação teórica, sobre o ensino de

Matemática, sobre o ensino de Análise Combinatória, fundamentação matemática do assunto (lembrando alguns tópicos relacionados ao conteúdo) e descrevemos uma pesquisa feita a alunos do 2º ano do ensino médio sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Nosso processo metodológico foi baseado no que pesquisamos e estudamos nas Análises Prévias. Direcionamos nossa sequência didática, com o intuito de tirar o professor como centro das atenções e deixamos o aluno no papel principal de construtor de seu conhecimento, sendo este conduzido a descobrir seus anseios nos conteúdos envolvidos. Com a nossa sequência coube ao professor o papel de orientador/facilitador, deixando o aluno aplicar habilidades anteriormente já adquiridas. Esperamos que com essa metodologia, ele seja estimulado a discutir com seus colegas e professores, atividades e estratégias que julgamos adequadas para compreensão de cada tópico do conteúdo, que desenvolva o pensamento lógico, a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação, para ser capaz de questionar a realidade que o cerca. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) temos que

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 2000, p.40)

Na pesquisa feita junto aos alunos do 2º ano do ensino médio, podemos constatar que o ensino do conteúdo Análise Combinatória, ainda vem sendo ministrado de forma tradicional, com aula expositiva, seguida de exemplos e exercícios. Metodologia esta, criticada por estudiosos no assunto, como Sturm (1999), Lopes (2000), Esteves (2001), Pinheiro (2008), entre outros, que defendem que o professor deve orientar seus alunos em suas descobertas, estimulando suas conclusões e sugerindo passos futuros. Não resta dúvida que o aluno pode e deve ser o construtor de seu conhecimento matemático, cumprindo etapas como leitura, discussão, verbalização, resolução de situações-problemas, sintetização e conclusão.

Dentro da nossa proposta de ensino de Análise Combinatória e da matemática, em geral, estamos considerando, por inúmeras vezes, que os alunos estarão envolvidos em situações de discussão e de participação em atividades em grupo. Assim, devemos criar mecanismos para estimulá-los, orientá-los e avaliá-los, ou seja, devemos imaginar a sala de aula como um modelo social reduzido, valorizando atitudes que contribuam para o crescimento do trabalho em grupo.

Em nossa concepção e análise a priori, caracterizamos três processos metodológicos que identificam nossa produção: aula operatória, resolução de problemas e desenvolvimento da competência leitora e escrita. Além de constar nossa sequência didática, elaborada com sete atividades fundamentada nas ideias já citadas anteriormente, o pré-teste e o pós-teste. Infelizmente nossa última atividade foi suprimida, devido alguns imprevistos com horários dentro da escola de aplicação. Porém, considero que as outras seis foram de grande valia para minha vida como professor, pois pude vivenciar junto com os alunos, um aprendizado inesquecível e acredito que com pequenos ajustes nas atividades de Arranjo Simples e Combinação Simples, já descritos no trabalho, nossa sequência de ensino está pronta para contribuir no âmbito educacional.

Na experimentação, foram relembrados todos os nossos encontros, que se iniciou com o pré-teste, seis atividades concluídas, monitoradas por um diário de campo, gravador de vídeo e áudio e o pós-teste. No geral, as atividades foram trabalhadas em 12 aulas de 50 minutos cada, ou seja, duas aulas para cada tópico. Considero que poderíamos ter um melhor rendimento, se tivéssemos exercitado mais as listas de exercícios propostos, pois deveríamos ter resolvidos mais questões que possuíam restrições em suas resoluções, assim como as de Combinação Simples, justamente as questões que apresentaram maiores dificuldades, e até mesmo para aprofundar os cálculos no assunto. Um ponto positivo foi o uso de jogos como processo motivador durante as aulas, os alunos gostaram muito e se sentiram entusiasmados em participar desse tipo de atividade.

O preenchimento das tabelas nas atividades foi de fundamental importância para o entendimento e verificação dos padrões que eram criados e facilitaram a construção dos conhecimentos aprendidos pelos alunos. Um fato que me chamou atenção foi na elaboração das conclusões, exigidas ao final de cada atividade. Senti muitas vezes os alunos inseguros em escrevê-las, o que me fez pensar nos seguintes questionamentos: “Nós enquanto professores de matemática, preparamos os nossos alunos para elaborar conclusões ou respostas mais elaboradas em suas resoluções?”, “Será que não estamos acostumados a aceitar apenas o valor numérico de uma resposta como pronto e acabado, nos dando por satisfeito?”. Vejo que um fato que incentiva a não preocupação com respostas mais bem elaboradas é que hoje em dia, praticamente não temos exames que exijam tal habilidade.

E finalizando a pesquisa, verificamos na análise a posteriori e validação os resultados das coletas dos dados fazendo comparações estatísticas, como o teste de hipótese e o coeficiente de correlação linear de Pearson, além de analisar erros e acertos que nos possibilitaram validar nossa sequência didática. Nossos resultados mostraram que, de modo geral, os alunos aumentaram seu desempenho significativamente entre um teste e outro, perceberam os padrões a serem alcançados e geraram boas conclusões a respeito do que se era cobrado. Outro ponto alto, foi verificar que nenhuma questão foi deixada em branco no pós-teste.

Os testes estatísticos de correlação da nossa pesquisa, sobre gosto pela matemática, dificuldade em matemática, distração na aula de matemática, frequência com que estuda matemática, quem lhe ajuda nas tarefas de matemática, nível de escolaridade de seu responsável masculino, nível de escolaridade de seu responsável feminino e diferença entre as notas nos testes, indicaram as correlações fraca ou ínfima, mostrando pouca influência desses fatores socioeconômicos nos resultados. Com isso, podemos concluir que o bom desempenho dos alunos no pós-teste deve ser atribuído a nossa metodologia de ensino, deixando em evidência que nossa sequência didática proporciona a participação e o bom desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória, além de desenvolver competências e habilidades para resolverem problemas de Análise Combinatória, respondendo assim, as duas questões norteadoras.

Com os bons resultados verificados nessa pesquisa, esperamos que professores do ensino médio e/ou fundamental, continuem em busca de novas metodologias de ensino que reconheça o esforço e o ritmo de cada aluno. Que ela seja inspiradora para se desmistificar o professor como centro do processo de ensino-aprendizagem e que sirva de modelo durante as aulas de Análise Combinatória. Também acreditamos que o processo de descoberta na linha de nossa pesquisa ainda pode evoluir, devemos nos questionar a respeito da escrita dos alunos em suas resoluções matemática, ou seja, o que devemos fazer para se ter respostas corretas, articuladas e com significado? Outro ponto que podemos estar verificando é: Qual é a aceitação do professor que está em sala de aula, com relação à metodologia de nossa pesquisa ou a uma metodologia diferente da tradicional? Podemos verificar também, a aplicação de nossa metodologia de ensino, aos alunos do 2º ano do ensino médio. Série em que geralmente o conteúdo é estudado e os alunos já estão mais maduros.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.** T.C.C. (Licenciatura em Matemática). Universidade Católica de Brasília, Brasília. p.13. 1º semestre de 2006.

ANTUNES, L. R; DO Vale, M. B.; **Análise Combinatória na Escola Pública**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Ciências Sociais e Educação. Belém, UEPA, 2005. p. 89.

BASTOS, A. C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações-Problema e Sob uma Abordagem Histórica. In: **XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Instituto Federal do Espírito Santo, 2013.

BATANERO, C.; GODINO, J.D; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria**. Educación matemática, México, V.8, p. 26-39, agosto, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2000.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. *In*: BRUN, Jean (org). **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. P. 35 – 113.

CABRAL, M. A. **A Utilização de Jogos no Ensino de Matemática**. 52p. T.C.C. (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

CARVALHO, G. Q. **O Uso de Jogos na Resolução de problemas de Contagem:** um estudo de caso em uma turma do 8º ano do colégio militar de Porto Alegra. 195 p. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2009.

COSTA, E. R. S. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio**. 108 p. Dissertação (mestrado profissional em Matemática). Universidade Federal de Lavras. Minas Gerais. 2013.

DURO, M. L. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades:** O raciocínio formal no ensino médio. 106 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higino H. Domingues. Campinas. Unicamp, 1995.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higino H. Domingues. Campinas. Unicamp, 2004.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 111p. Dissertação (Mestrado profissional Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de janeiro, 2014.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 5. São Paulo: Atual, 1993.

LARA, I. C. M. de. **Jogando com a matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Réspel, 2003.

LIMA JÚNIOR, R. A. de. **Estratégias utilizadas por alunos do ensino médio em problemas de Análise Combinatória**. 2014. 76p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – UEPA, Belém, 2014.

LOPES, J. de A. **Livro didático de matemática:** Concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em educação matemática. São Paulo, 2000, 264f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

MENDES, D. F. **A abrangência das permutações na análise combinatória.** 68 p. Dissertação (Mestrado profissional em matemática). Universidade de Brasília. Brasília. 2014.

OLIVEIRA, M.R. de; CARNEIRO, M. L. da R. **Elementos da Matemática**. 2ª ed. Belém: GTR, 2009.

PACHECO, A. B. **Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não-verbais no campo da Análise Combinatória**. Recife, 2001, 257 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco.

PINHEIRO, C.A.M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações problema**. 166 fls. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

PINHEIRO, C. A. M; ROSA, I. S. **Dá Análise Combinatória:** o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio? Belém, 2006, 52 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Centro de Ciências Sociais e Educação. Universidade do Estado do Pará.

PONTE, J. P. **O estudo de caso na investigação em educação matemática**. Quadrante, 3 (1), 3 – 18. Lisboa. 2006.

SANCHIS, I de P.; MAHFOUD, M. Interação e construção: o sujeito e o conhecimento no construtivismo de Piaget. **Ciências & Cognição:** revista científica de estudos da cognição. Publicado on line em 03 de dezembro de 2007. v.12, p.165-177, 2007.

SANTOS, J. P. de O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Editora da UNICAMP, Campinas - SP, 1995.

SÁ, P. F. de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, P. F. de. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. **Traço**: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

SILVA, A. P. da. **Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas:** um olhar para sala de aula. 92p. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2013.

SOUZA, A. L. C. P. de. **Análise Combinatória:** uma Abordagem no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) Unesp - Rio Claro. 2010.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. 94f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. 1999.

TATAIA, E. C. de O. **Análise combinatória para o ensino médio.** Monografia (Especialização em educação Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte. 2012.

VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola do interior paulista.** 90 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2011.

***SITES***

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_das_situa%C3%A7%C3%B5es_did%C3%A1ticas - Acesso em: 02 Jan. 2017.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS EGRESSOS

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ**

**CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO**

**CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Prezado(a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

**1.** GÊNERO
(A) Masculino.
(B) Feminino.

**2.** QUAL É A SUA IDADE? _________

**3.** TIPO DE ESCOLA QUE VOCÊ ESTUDA?
(A) Municipal
(B) estadual
(C) privada (particular)
(D) Conveniada
(E) Federal

**4.** VOCÊ ESTÁ EM DEPENDÊNCIA?
(A) Sim. Qual(is) disciplina(s)____________
(B) Não

**5.** VOCÊ GOSTA DE ESTUDAR MATEMÁTICA?
(A) Detesto
(B) Suporto
(C) Gosto um pouco
(D) Adoro

**6.** QUEM LHE AJUDA NAS TAREFAS DE MATEMÁTICA?
(A) Professor particular
(B) Família. Quem?____________________
(C) Outros: Quem?____________________
(D) Ninguém

**7.** COM QUE FREQUÊNCIA VOCÊ COSTUMA ESTUDAR MATEMÁTICA **FORA DA ESCOLA**?
(A) Só no período de prova
(B) Só no fim de semana
(C) Todo dia
(D) Só na véspera da prova.
(E) Nunca

**8.** VOCÊ CONSEGUE ENTENDER AS EXPLICAÇÕES DADAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA?
(A) sempre
(B) quase sempre
(C) poucas vezes
(D) nunca

**9.** DE QUE MANEIRA VOCÊ COSTUMA SER AVALIADO EM MATEMÁTICA? ATRAVÉS DE:
(A) Prova (simulado)
(B) Testes semanais
(C) Seminários
(D) Pesquisas
(E) Projetos interdiciplinares
(F) Outros. Qual(is)? __________________

**10.** COMO VOCÊ SE SENTE QUANDO ESTÁ DIANTE DE UMA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA?
(A) contente
(B) tranquilo
(C) com medo
(D) com raiva
(E) preocupado
(F) com calafrios
(G) outros.
Quais?_______________________

**11.** EM GERAL, NAS AULAS, OS ESTUDANTES TEM OPORTUNIDADES DE ESCLARECER DÚVIDAS, VERIFICANDO SE APRENDERAM O CONTEÚDO PREVISTOS NA DISCIPLINA?
(A) sempre
(B) quase sempre
(C) poucas vezes
(D) nunca

**12.** NÍVEL QUE VOCÊ ESTUDOU ANÁLISE COMBINATÓRIA.
(A) Ensino Fundamental
(B) Ensino Médio
(C) Ensino Fundamental e Médio

**13.** PARA FIXAR O CONTEÚDO ESTUDADO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA O SEU PROFESSOR
(A) Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos.
(B) Apresentava jogos envolvendo o assunto.
(C) Mandava resolver os exercícios do livro didático.
(D) Não propunha questões de fixação.
(E) Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.

**14.** QUANDO VOCÊ ESTUDOU O ASSUNTO ANÁLISE COMBINATÓRIA A MAIORIA DAS AULAS FORAM
(A) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios
(B) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto
(C) Criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
(D) Somente por meio de exercícios
(E) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos
(F) Outros

O quadro abaixo quer saber que tópicos de análise combinatória você estudou e o grau de dificuldade ou facilidade, que você teve ao estudar o assunto Análise combinatória, nos tópicos estudados. Marque um **X** em suas opções.

**Quadro 1: Tópico Estudado e Nível de Dificuldade em Análise Combinatória**

| | Que conteúdos você lembra ter estudado? | Muito fácil | Fácil | Moderado | Difícil | Muito difícil |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Princípio Aditivo | | | | | | |
| Princípio Fundamental da Contagem | | | | | | |
| Definição de Fatorial | | | | | | |
| Propriedade fundamental dos fatoriais | | | | | | |
| Definição de Permutação Simples | | | | | | |
| Cálculo de permutação simples | | | | | | |
| Definição de Permutação com repetição | | | | | | |
| Cálculo de permutação com repetição | | | | | | |
| Definição de Permutação Circular | | | | | | |
| Cálculo de permutação Circular | | | | | | |
| Definição de Arranjo Simples | | | | | | |
| Cálculo de Arranjo simples | | | | | | |
| Definição de Combinação Simples | | | | | | |
| Cálculo de combinação simples | | | | | | |
| Distinção entre arranjo e combinação | | | | | | |
| Situações-problemas sobre o Princípio Aditivo | | | | | | |
| Situações-problemas sobre o Princípio Fundamental da Contagem | | | | | | |
| Situações-problemas sobre Permutação Simples | | | | | | |
| Situações-problemas sobre Permutação com repetição | | | | | | |
| Situações-problemas sobre Permutação Circular | | | | | | |
| Situações-problemas sobre Arranjo Simples | | | | | | |
| Situações-problemas sobre Combinação Simples | | | | | | |

**Apresentamos a seguir algumas questões a serem resolvidas, por você aluno. Faça com calma e procure deixar suas soluções de forma organizada e com clareza.**

**01)** No restaurante do colégio, são servidos 3 pratos principais e 4 sobremesas. Um cliente pode fazer uma refeição escolhendo um prato principal e uma sobremesa. Quantas refeições, formadas por um prato principal e uma sobremesa, o cliente pode formar?

**02)** Alguns celulares dispõem de uma senha de acesso aos dados do aparelho. Cada senha é uma sequência formada por 4 algarismos, escolhidos entre os 10 algarismos de 0 a 9. Com essas informações, qual é o maior número possível de senhas distintas que se pode criar em um desses aparelhos?

**03)** As permutações das letras da palavra **REMO** foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de quatro letras em um dicionário. Que palavra nessa lista é 6ª?

**04)** Para aumentar as chances de ganhar no sorteio da mega-sena da virada, um grupo de dez amigos se juntou e fez todos os jogos possíveis de seis “dezenas” diferentes, escolhidas dentre quinze “dezenas” distintas previamente escolhidas. Qual o total de jogos que foram realizados por este grupo de amigos?

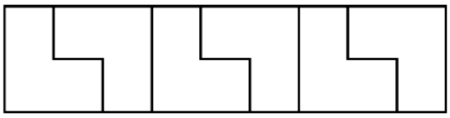
**05)** Uma adolescente possui 5 cores diferentes de esmalte (verde, amarelo, azul, branco e vermelho) e quer escolher duas cores diferentes para pintar as unhas de suas mãos.

Sabendo que essa adolescente não usa as cores vermelho e azul juntas, de quantas maneiras distintas ela pode escolher as duas cores?

**06)** Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra **PAPAO**?

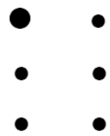
**07)** Segundo a Revista VEJA (11/01/2012), cinco habilidades fundamentais compõem a nova teoria da inteligência social: Comunicação; Empatia; Assertividade; Feedback e Autoapresentação. Dentre as habilidades que compõem a nova teoria da inteligência social, qual o número de possibilidades distintas em que o setor de Recursos Humanos de uma empresa pode eleger três dessas habilidades?

**08)** A figura seguinte, composta pela justaposição de 6 hexágonos não convexos, deve ser colorida com as cores **azul, vermelha, verde e amarela**.



Qual é o número de maneiras distintas de executar essa pintura, de modo que dois hexágonos consecutivos não sejam coloridos com a mesma cor?

**09)** A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.
Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

**10)** No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.


O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

## APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho(a), que estuda na escola estadual ..............para participar da pesquisa intitulada: O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA POR ATIVIDADES sob a responsabilidade do pesquisador LEONARDO DA SILVA ROSAS, vinculado a universidade do estado do Pará.

A colaboração de seu filho (a) na pesquisa será em participar das atividades elaboradas pelo pesquisador no horário das aulas de matemática em sala, nesta devida escola, sob supervisão de um docente da mesma. Em nenhum momento ele será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e assim sua identidade será preservada.

Você e nem ele terão nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Não há risco. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo em Análise Combinatória. Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato pelo fone: 981860317. Poderá também entrar em contato com a direção do centro de ciências sociais e educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djama Dutra s/n. telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; FONE: 4009-9542.

Belém,_____ de __________________de 2016.

______________________________________________

Assinatura do pesquisador

Eu, _______________________________________ aceito que _______________________________________ participe voluntariamente da pesquisa, após ter sido devidamente esclarecido.

______________________________________________

Assinatura do participante da pesquisa

## APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

Caro professor, você que trabalha na Escola Estadual........................ está sendo convidado a participar da pesquisa intitulada: O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA POR ATIVIDADES sob a responsabilidade do pesquisador LEONARDO DA SILVA ROSAS, vinculado a universidade do estado do Pará.

A sua colaboração na pesquisa será permitir que o pesquisador realize fazer uma intervenção no horário das aulas de matemática em sala, nesta devida escola, sob supervisão de um docente da mesma. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e assim sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há risco. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo em Análise Combinatória. Você é livre para decidir se colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato pelo fone: 981860317. Poderá também entrar em contato com a direção do centro de ciências sociais e educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djama Dutra s/n. telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; FONE: 4009-9542.

Belém,_____ de ___________________de 2016.

________________________________________________

Assinatura do pesquisador

Eu, _______________________________________________ aceito participar voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

________________________________________________

Assinatura do participante da pesquisa

## APÊNDICE D - AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM (A título gratuito)

Nome completo do responsável:...........................................................................
Nacionalidade:.............................................................................................
Profissão:.....................................................................................................
RG:........................................... CPF/MF .........................................................
Endereço:.......................................................................Tel.: ..........................
Nome Completo do filho (a): ........................................................................
Nacionalidade:......................................................Idade:...................................

**Objeto: Imagens do filho(a) desenvolvendo atividades de aprendizagem em sala de aula.**

Neste ato, a título gratuito, autorizo, por prazo indeterminado e sem limites de território, ao senhor Leonardo da Silva Rosas, professor, casado, portador da carteira de identidade Nº 2564213, com domicilio na Rua do Arsenal Nº 52, Bairro da Cidade Velha, Cidade de Belém do Pará. O direito de reproduzir a imagem de meu filho (a), objeto desta autorização em trabalhos acadêmicos, na produção de livros voltados à área de Educação Matemática, nos periódicos impressos, em CD-ROM, em DVD, aulas teóricas de cursos de graduação, pós-graduação e aperfeiçoamento profissional e nos materiais impressos ou eletrônicos distribuídos aos alunos, em palestras, em trabalhos a serem apresentados em eventos científicos e para todos os fins científicos e educacionais aqui não expressamente mencionados. Somente não autorizo a inclusão da imagem do meu filho em qualquer circunstância que não sejam as que acima foram citadas.

..............................., .............de ............................de 2017

**Assinatura:** .........................................................................................

Testemunhas:

1)Nome:.......................................................Assinatura:.....................................
RG:...................................................
2)Nome: .......................................................Assinatura:............................................
RG: ....................................................

## APÊNDICE E - PRÉ-TESTE

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO**

Prezado (a) aluno (a), Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato. Muito obrigado!

1-Idade:_________2-Sexo:______________3-Nome:_____________________
4- Quem é o seu responsável masculino?
( )Pai ( )Avô ( )Tio ( )Irmão ( )Não tenho ( )Outro. Quem?___________
5- Quem é a sua responsável feminina?
( )Mãe ( )Avó ( )Tia ( )Irmã ( )Não tenho ( )Outra. Quem? ___________
6- Até que série estudou o seu responsável masculino? __________
E o seu responsável feminino? _______________
7- Seu responsável masculino trabalha?
( ) Não ( ) Sim. Qual a Profissão?____________________________________
8- Seu responsável feminino trabalha?
( ) Não ( ) Sim. Qual a profissão?____________________________________
9- A escola onde você estuda fica no bairro onde você mora? ( ) Sim ( ) Não
10- Em que turno você estuda? ( ) Manhã ( ) Tarde ( ) Noite
11- Você trabalha de forma remunerada? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes
12- Você recebe algum tipo de auxilio, para ajudá-lo (a) nos estudos?
( )Não ( )Sim. De quem?___________________
13- Você faz algum curso?
( ) Informática ( ) Língua estrangeira ( ) Outro. Qual? ______________________
14- Você pratica algum esporte? ( ) Não ( ) Sim. Qual? _____________________
15- Você gosta de Matemática? ( ) Nenhum pouco ( ) Pouco ( ) Muito ( )
16-Você está em dependência, em Matemática? ( ) Não ( ) Sim
17- Você está repetindo esta série? ( ) Não ( ) Sim
18-Você têm dificuldade para aprender matemática: ( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muito
19- Você se distrai nas aulas de matemática?( )Não, eu sempre presto atenção ( ) Sim, eu não consigo prestar atenção ( ) Às vezes, quando a aula está chata

20- Você costuma estudar matemática. Fora da escola. ( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova ( ) Só nos fins de semana ( )Todo dia ( ) Alguns dias da semana. Quantos?______________

21- Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?

( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão ( ) Amigo(a) ( ) Ninguém ( ) Outros. Quem? _________

22- Você já estudou Análise Combinatória? ( ) Sim ( ) Não

## QUESTÕES DO PRÉ-TESTE

**01.** Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **MEDO**?

**02.** Um restaurante oferece no cardápio 3 tipos de salada, 3 pratos distintos de carne, 4 variedades de bebida e 2 sobremesas diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode se servir para comer uma salada, um prato de carne, uma sobremesa e tomar uma bebida?

**03.** Qual é o total de números ímpares positivos de três algarismos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetir algarismos?

**04.** Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?

**05.** Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, qual é o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem?

**06.** Três rapazes e quatro moças formam uma fila para serem fotografados. Se deve ficar um rapaz em cada extremo da fila, quantas disposições diferentes essa fila pode ter?

**07.** A fila do caixa de uma padaria está vazia e estão indo para lá cinco pessoas. De quantas maneiras elas podem se posicionar nesta fila?

**08.** As oito pessoas presentes a uma reunião cumprimentaram-se com um aperto de mão. Quantas apertos de mão foram dados pelas pessoas que estavam presentes a essa reunião?

**09.** Em uma viagem a Paris, Júlia encontrou 8 diferentes perfumes que estavam em oferta em uma loja especializada. Resolveu comprar 4 deles para presentear suas amigas. De quantas maneiras diferentes Júlia pode escolher os quatro presentes?

**10.** Segundo a Revista VEJA (11/01/2012), cinco habilidades fundamentais compõem a nova teoria da inteligência social: Comunicação; Empatia; Assertividade; Feedback e Autoapresentação. Dentre as habilidades que compõem a nova teoria da inteligência social, qual é o número de possibilidades distintas em que o setor de Recursos Humanos de uma empresa pode eleger três dessas habilidades?

## APÊNDICE F - PÓS-TESTE

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA**
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Prezado (a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato. Muito obrigado!

### QUESTÕES DO PÓS-TESTE

**01.** Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **MEDO**?

**02.** Um restaurante oferece no cardápio 3 tipos de salada, 3 pratos distintos de carne, 4 variedades de bebida e 2 sobremesas diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode se servir para comer uma salada, um prato de carne, uma sobremesa e tomar uma bebida?

**03.** Qual é o total de números ímpares positivos de três algarismos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetir algarismos?

**04.** Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?

**05.** Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, qual é o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem?

**06.** Três rapazes e quatro moças formam uma fila para serem fotografados. Se deve ficar um rapaz em cada extremo da fila, quantas disposições diferentes essa fila pode ter?

**07.** A fila do caixa de uma padaria está vazia e estão indo para lá cinco pessoas. De quantas maneiras elas podem se posicionar nesta fila?

**08.** As oito pessoas presentes a uma reunião cumprimentaram-se com um aperto de mão. Quantas apertos de mão foram dados pelas pessoas que estavam presentes a essa reunião?

**09.** Em uma viagem a Paris, Júlia encontrou 8 diferentes perfumes que estavam em oferta em uma loja especializada. Resolveu comprar 4 deles para presentear suas amigas. De quantas maneiras diferentes Júlia pode escolher os quatro presentes?

**10.** Segundo a Revista VEJA (11/01/2012), cinco habilidades fundamentais compõem a nova teoria da inteligência social: Comunicação; Empatia; Assertividade; Feedback e Autoapresentação. Dentre as habilidades que compõem a nova teoria da inteligência social, qual é o número de possibilidades distintas em que o setor de Recursos Humanos de uma empresa pode eleger três dessas habilidades?

## APÊNDICE G – JOGO: CARTA DA COMBINATÓRIA

**Participantes:** de dois a quatro participantes;

**Objetivo:** Fixar o conceito de permutação e a noção de fatorial.

**Regras:**

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro uma trinca que possua a mesma significância entre elas.

| | | |
|---|---|---|
| De quantas maneiras diferentes cinco pessoas A, B, C, D e E podem ser dispostas em uma fila indiana. | $P_5$ | 120 |
| 5.4.3.2.1 | $P_4$ | 4.3.2.1 |
| 4! | 24 | 6! |

| | | |
|---|---|---|
| 6.5.4.3.2.1 | $P_6$ | 720 |
| (3 - 1)! | 2! | 2.1 |
| $P_3 - \dfrac{\mathbf{4}!}{\mathbf{3}!}$ | De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, três livros de Matemática e quatro de Física, de modo que os de mesma matéria permaneçam juntos? | $P_3.P_4.P_2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 288 | 3.2.1.4.3.2.1.2.1 | $\dfrac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}$ |
| n | $\dfrac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}$ | n fatorial dividido por n menos um fatorial |
| Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de uma outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra SOL. | $P_3$ | 3.2.1 |

| | | |
|---|---|---|
| $3!$ | $(7 + 1)!$ | $8!$ |
| $P_8$ | $8.7.6.5.4.3.2.1$ | $\dfrac{\mathbf{5}!}{\mathbf{6}!}$ |
| $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ | $\dfrac{\mathbf{5.4.3.2.1}}{\mathbf{6.5.4.3.2.1}}$ | Permutação de 5 elementos dividido pela permutação de 6 elementos. |

| | | |
|---|---|---|
| $(n-1)! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1$ | $(n-1)! = 9!$ | $n = 10$ |
| $P_9$ | $\dfrac{\mathbf{4}!}{(\mathbf{4}-\mathbf{2})!}$ | 4.3 |
| 12 | $\dfrac{\mathbf{4}!}{\mathbf{2}!}$ | $\dfrac{\mathbf{8}!}{(\mathbf{8}-\mathbf{2})!}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 8.7 | 56 | $\frac{\mathbf{8}!}{\mathbf{6}!}$ |

# ANEXOS

## ANEXO A – JOGO: PIF-PAF DA COMBINATÓRIA

**Participantes:** de dois a quatro participantes;

**Regras:**

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado. Veja os **Exemplos a seguir**:

| | | |
|---|---|---|
| Sabendo que um salão tem 5 portas, determine o número de maneiras distintas de entrar nele e sair dele sem usar a mesma porta? | **5 . 4** | **20** |
| Uma moça possui 3 blusas e 2 saias. De quantas formas ela pode se vestir? | **3 . 2** | 6 |

Eis as cartas:

**CARTA PROBLEMA 01**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Com os números 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números naturais de três algarismo distintos podem ser escritos ? | $\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$ | $\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$ | $\boxed{60}$ |

**CARTA PROBLEMA 02**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Miranda deseja formar um conjunto calça-blusa para vestir-se. se ele dispõe de 7 calças e 8 blusas para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? | $\boxed{7 \cdot 8}$ | $\boxed{7 \cdot 8}$ | $\boxed{56}$ |

**CARTA PROBLEMA 03**

| | | | |
|---|---|---|---|
| No campo do Combinatória Esporte Clube há 10 portas de entrada. Quantas maneiras diferentes existem de um torcedor entrar por uma porta e sair por outra diferente? | $\boxed{10 \cdot 9}$ | $\boxed{10 \cdot 9}$ | $\boxed{90}$ |

**CARTA PROBLEMA 04**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dionísio vai a um restaurante disposto a comer um prato de carne e uma só sobremesa. o cardápio oferece dez pratos distintos de carne e seis diferentes Tipos de sobremesa. de quantas maneiras diferentes Dionísio pode fazer seu pedido? | $\boxed{10 \cdot 6}$ | $\boxed{10 \cdot 6}$ | $\boxed{60}$ |

**CARTA PROBLEMA 05**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Um "Shopping Center" possui 8 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 2 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento.<br>De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados? | $\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$ | $\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$ | $\boxed{80}$ |

**CARTA PROBLEMA 06**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Uma fechadura de segredo possui 3 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados, para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo? | $\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$ | $\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$ | $\boxed{1000}$ |

**CARTA PROBLEMA 07**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate ou de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes, quantos são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura? | $\boxed{10 \cdot 3}$ | $\boxed{10 \cdot 3}$ | $\boxed{30}$ |

**Carta problema 08**

| | | | |
|---|---|---|---|
| De quantas maneiras podemos classificar os 4 empregados de uma micro-empresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias? | $\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$ | $\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$ | $\boxed{81}$ |

**Carta problema 09**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Num concurso de 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras poderão ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios? | $\boxed{12 \cdot 11}$ | $\boxed{12 \cdot 11}$ | $\boxed{132}$ |

**Carta problema 10**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dez atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o $1^0$ , $2^0$ e $3^0$ lugares? | $\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$ | $\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$ | $\boxed{720}$ |

## ANEXO B – JOGO: DOMINÓ COMBINATÓRIO

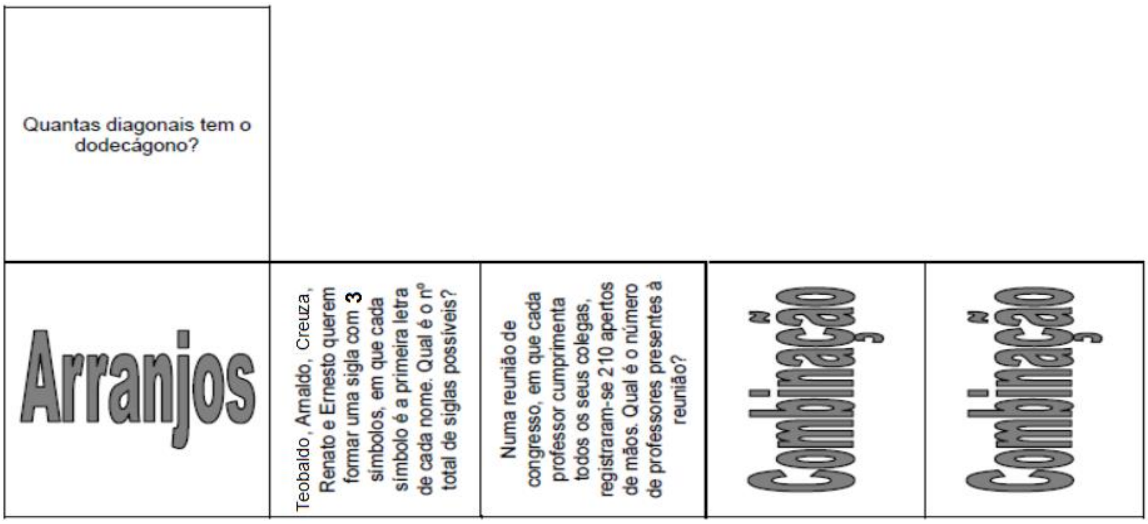
Este jogo consiste em 30 cartas. Algumas contêm um par de situações que representam COMBINAÇÃO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, que serão associadas às demais cartas nas quais estão os seguintes pares de palavras: COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/ARRANJO.

**Objetivo:** Livrar-se de todas as suas cartas, deitando-as na mesa, uma em cada rodada, associando uma situação de combinação (texto) à palavra COMBINAÇÃO; ou uma situação de arranjo (texto) à palavra ARRANJO.

**Participantes:** no mínimo dois.

**Regras:**

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma sequência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.
- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.




A seguir as peças do Dominó Combinado;

| | | |
|---|---|---|
| Um examinador dispõe de 6 questões de Álgebra e 4 de Geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de Álgebra e 2 de Geometria? | Combinação | Arranjos |
| Combinação | Arranjos | Arranjos |
| Entre quatro alunos de uma turma será escolhida a diretoria do grêmio, formada por presidente, secretário e tesoureiro. De quantas maneiras tal diretoria pode ser formada com esses elementos? | Combinação | Combinação |
| Combinação | Arranjos | Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas com 7 alunos de uma escola? |
| Numa reunião de congresso, em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. Qual o número de professores presentes à reunião? | Combinação | Uma empresa quer constituir uma comissão de empregados. Dentre os dez mais cotados e atuantes devem ser escolhidos três. De quantas maneiras essa comissão pode ser constituída? |
| Alfredo, Otavio, Ricardo, Sergio e Luiz querem formar uma sigla com 3 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de cada nome. Qual é o numero total se siglas possíveis? | Combinação | Combinação |

Quantas palavras de três vogais não repetidas podemos formar com as vogais a, e, i, o, u?

Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?

Combinação

Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números três algarismos distintos podem ser formados?

Arranjos

Em um colégio, há três estudantes concorrendo à presidência ou vice-presidência do grêmio: Bia, Cláudia e David. De quantas formas esses dois cargos podem ser preenchidos?

Arranjos

Dispomos de 7 frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes podemos preparar a sala com apenas 5 frutas?

Combinação

Uma empresa possui 8 sócios, dos quais serão escolhidos 2 para os cargos de presidente e vice-presidente. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escolha?

Arranjos

Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?

Dez pessoas disputam uma corrida. Quantos são os possíveis resultados para as três primeiras colocações, sabendo que não pode haver empates?

Arranjos

Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listas, cada lista com um cor. De quantas formas isso pode ser feito?

Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele

Arranjos

Combinação

| | | |
|---|---|---|
| Combinação | Arranjos | Uma prova consta de 10 questões, dais quais o aluno deve resolver 5. De quantas formas diferente ele poderá escolher as 5 questões? |
| Arranjos | Combinação | Quantas palavras de três letras podemos formar com as letras da palavra ESCOLA? |
| Arranjos | Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 10 pessoas? | Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares? |
| Em um campeonato de boxe há doze inscritos. Quantas lutas podem ser realizadas? | Numa urna existem 100 cartelas numeradas de 1 a 100. São extraídas, ao acaso, três cartelas para serem distribuídos três prêmios diferentes. Quantas maneiras diferentes existem para distribuir os prêmios entre as 100 pessoas | Uma organização dispõe de 10 economistas. De quantas maneiras diferentes os dirigentes podem escolher três economistas para desenvolver um projeto econômico para o governo? |
| Num determinado setor de um hospital trabalha 10 enfermeiras. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três enfermeiras para um plantão extra no hospital? | Dispondo de 5 latas de tinta de cores diferentes e necessitando pintar três paredes de um quarto, cada uma com cor diferente, quantas escolhas são possíveis? | Com 15 jogadores, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que qualquer jogador poderá ocupar a posição do goleiro? |
| Arranjos | Combinação | Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é: |

| | | |
|---|---|---|
| Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 de cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho? | Arranjos | Uma agência de publicidade necessita de 2 rapazes e 3 moças para fazer um comercial para a TV. Dispondo de 4 rapazes e 5 moças, quantas opções a agência tem para formar o grupo necessário? |
| Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha? | Combinação | Arranjos |

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Pedagogia
Tv Djalma Dutra s/n – Telégrafo
www.uepa.com.br