Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental

MARCELO BAÍA DA SILVA

O ENSINO DE REGRAS DE TRÊS POR ATIVIDADES

BELÉM/PA
2018

Marcelo Baía da Silva

O ensino de regras de três por atividades

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

BELÉM/PA
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Marcelo Baía da Silva
O ensino de regras de três por atividades /Marcelo Baía da Silva; Pedro Franco de Sá, 2018.

Dissertação (Mestrado em Educação matemática) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

1. Razão e proporção. 2. Aprendizagem por atividades. 3. Educação matemática. I. Sá, Pedro Franco (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed.510.7

Bibliotecária: Regina Ribeiro CRB-2 739

MARCELO BAIA DA SILVA

O ENSINO DE REGRAS DE TRÊS POR ATIVIDADES

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Data de aprovação: 25/06/2018

Banca examinadora

Pedro Sá
______________________________. Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador (Interno)
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Doutor em Matemáticaa – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador (Externo)
Profa. Dra. Celsa Herminia de Melo Maranhao
Doutora em Engenharia Elétrica – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade Federal do Pará

A Santíssima Trindade,
a nossa Senhora de Nazaré e
aos meus pais,
Raimundo Pereira da Silva (*In memoriam*) e
Maria Engracia Baia da Silva,
pelo amor, apoio e confiança
dedicados que foram fundamentais para minha formação
e também para eu vivenciar este momento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me conceder saúde e superação para transpor as dificuldades enfrentadas durante curso e concluir este trabalho.

Aos meus irmãos pelo incentivo e apoio manifestados que nos ajudaram a chegar ao final deste trabalho.

A minha namorada, Sacha, pelo amor, atenção, compreensão, companheirismo e apoio que foram valiosos e acolhedores em muitos momentos da nossa caminhada e também pelas contribuições gramaticas em nosso texto.

Ao meu orientador professor doutor Pedro Franco de Sá, de grande sapiência e profissionalismo, que esteve sempre disponível em nos ajudar na construção deste trabalho por meio de suas preciosas orientações, que foram imprescindíveis na realização desta pesquisa.

A minha banca de qualificação, na pessoa do professor doutor Ducival Carvalho Pereira e da professora doutora Celsa Herminia de Melo Maranhão, pelas colaborações pertinentes em nosso trabalho.

A todos os professores do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará pelo empenho e dedicação demostrados durante o curso que contribuíram de forma significativa para a nossa formação.

Aos colegas mestrandos, em especial, Saul Rodrigo e Deusarino Oliveira, pela amizade e companheirismo que resultaram em momentos agradáveis e profícuos em sala de aula e fora dela, que muito colaboraram para o nosso aprendizado como pessoa e profissional.

A secretária da coordenação do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Glads Maria Serra, pelo trabalho prestado junto a essa coordenação e pelos informes e esclarecimentos dados de interesse dos mestrandos.

E a Universidade do Estado do Pará/UEPA por ofertar o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

RESUMO

SILVA, Marcelo Baía da. **Ensino de regras de três por atividades.** 2017, 480 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa sobre o ensino da regra de três por atividades que teve por objetivo avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Regra de Três tem sobre a participação dos alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública nas aulas de matemática e sobre o desempenho na resolução de questões envolvendo Regra de Três. A metodologia empregada neste trabalho foi a Engenharia Didática, específica da Didática da Matemática, e nas quatro fases dessa metodologia de pesquisa abordaram-se aspectos relevantes sobre a regra, sobretudo, na fase experimental, onde trouxe as sessões de uma sequência didática para o ensino das regras de três, e da mesma forma a última fase, análise a posteriori e validação, onde são mostrados os dados construídos durante todo o processo de aplicação da referida sequência didática. As informações produzidas na fase experimental tiveram um caráter qualitativo e quantitativo, e os instrumentos de coleta dessas informações foram o questionário socioeconômico, pré-teste, produções dos alunos e pós-teste, e também o registro dessas informações ocorreu por meio das técnicas de observação, descrição, comparação, análise e síntese. Os resultados alcançados mostraram que a proposta de uma sequência didática para o ensino das regras de três foi eficaz na maioria da amostra pesquisada, pois ocasionou o aprendizado dos alunos sobre esse conteúdo, uma vez que esses discentes apresentaram um desempenho satisfatório no pós-teste quando comparado com o desempenho do pré-teste. Desse modo, pode-se inferir que essa sequência didática é um produto educacional viável e exequível para as aulas de matemática no 7º ano do ensino fundamental, em particular, para o ensino das regras de três. Além do mais, os dados apresentados neste trabalho sobre esse conteúdo matemático, tornam-se uma fonte de pesquisa a ser utilizada em estudos posteriores na Educação Matemática referente ao tema e também como fonte de informação para professores, alunos e outros que se interessarem sobre o assunto regras de três.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Matemática por atividades. Ensino de regras de três por atividades. Engenharia didática.

ABSTRACT

SILVA, Marcelo Baía da. **Ensino de regras de três por atividades.** 2017, 480 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

This paper presents the results of a research on the teaching of the rule of three by activities that had as objective to evaluate the effects of the application of a didactic sequence, different from the traditional one, for the teaching of Rule of Three has on the participation of the students of the 7th year of elementary school at a public school in math classes and on performance in solving issues involving Rule Three. The methodology used in this work was Didactic Engineering, specific to Mathematics Didactics, and in the four phases of this research methodology, relevant aspects about the rule were addressed, especially in the experimental phase, where the sessions were brought to a didactic sequence for teaching of the rules of three, and in the same way the last phase, a posteriori analysis and validation, where are shown the data constructed throughout the process of application of said didactic sequence. The information produced in the experimental phase had a qualitative and quantitative character, and the instruments of collection of this information were the socioeconomic questionnaire, pre-test, student productions and post-test, and also the recording of this information occurred through observation techniques , description, comparison, analysis and synthesis. The results showed that the proposal of a didactic sequence for the teaching of the rules of three was effective in the majority of the sample studied, because it caused the students to learn about this content, since these students presented a satisfactory performance in the post-test when compared to the pre-test performance. Thus, it can be inferred that this didactic sequence is a viable and feasible educational product for mathematics classes in the 7th year of elementary school, in particular, for teaching the rules of three. Moreover, the data presented in this work on mathematical content, become a research source to be used in later studies in Mathematics Education related to the subject and also as a source of information for teachers, students and others who are interested in the subject rules three.

Key-words: Mathematics Teaching. Teaching mathematics by activities. Teaching of rules of three by activities. Didactic engineering.

LISTA DE ILUTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática atualmente talvez seja uma das maiores preocupações por parte da Educação Matemática e de professores pesquisadores desse ramo do saber, que se debruçam em estudar e entender como o processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento ocorre na educação básica, com o intuito de melhorar o ensino, haja vista que os índices das avaliações de larga escala apresentam um panorama nada promissor sobre o aprendizado da disciplina Matemática.

Nesse cenário surgem várias pesquisas que buscam delinear os problemas e apontar soluções para o ensino e aprendizagem da Matemática, somados a isso, temos os documentos oficiais brasileiros da educação básica, que apresentam caminhos e diretrizes como formas de nortear o trabalho do professor em sala de aula com Matemática. Como exemplo, podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998) que indicam caminhos metodológicos para o ensino dessa disciplina por meio da utilização da História da Matemática, jogos educativos e as Tecnologias de Comunicação e Informação.

Sobre o ensino de Matemática, em particular, o da proporcionalidade, o documento citado no parágrafo anterior recomenda nos objetivos de Matemática para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) que o ensino desse assunto ocorra por meio de situações que conduzam o aluno a: "observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir **estratégias de solução** para resolver situações que envolvam a proporcionalidade." (BRASIL, 1998, p. 65, grifo nosso). Pesando nesse objetivo do documento supracitado, propusemo-nos a elaborar um conjunto de atividades didáticas que possibilite os alunos do 7º ano do ensino fundamental a perceberem os princípios inerentes ao conceito de proporcionalidade (direta e inversa), por meio da estratégia escalar, ao resolverem e analisarem as situações postas pelas atividades. Uma vez consolidado esse conceito, pretendemos ensinar a técnica das regras de três para a resolução de problemas que contenham contextos com grandezas proporcionais. E desse modo, contemplar o que é pedido nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática sobre a regra, que diz: "resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as **regras de três.** (BRASIL, 1998, p. 82, grifo nosso)

Nesse pensar, buscamos investigar neste trabalho de pesquisa o seguinte questionamento: ***Que efeitos o desenvolvimento de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino da Regra de Três, em uma turma do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual, provoca sobre a participação em aulas de matemática e no desempenho da resolução de questões envolvendo Regra de Três?*** Coadunado com essa questão, apresentamos nosso objetivo de pesquisa, o qual busca: ***Avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Regra de Três têm sobre a participação dos alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública nas aulas de matemática e sobre o desempenho na resolução de questões envolvendo Regra de Três.***

Para a execução da pesquisa, de caráter qualitativo e quantitativo, sobre o objeto regras de três, recorremos ao campo da Didática da Matemática, onde se procura estudar os problemas de ensino dos conceitos matemáticos reivindicados pelo próprio saber matemático (ALMOULOUD, 2007 p. 26), e, em particular, a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, enfoque da didática francesa, perpassando por suas quatro fases de sistematização. Desse modo, na primeira fase, Análises Prévias, buscamos abordar sobre a regra de três os seguintes pontos: aspectos curriculares, aspectos históricos, estado da arte, aspectos matemáticos e uma consulta com alunos egressos que estudaram as regras de três. Já na segunda fase dessa metodologia, Concepção e Análise a Priori, tratamos sobre o ensino de matemática e as Tendências da Educação Matemática, questões do pré e pós-testes e sequência didática. Na Experimentação, considerada a terceira fase da Engenharia Didática, procuramos abordar o lócus da pesquisa, cronograma, as informações produzidas na experimentação e os instrumentos e técnicas utilizados para a produção dessas informações. Na quarta e última fase, Análise a posteriori e Validação, apresentamos uma análise-síntese de cada sessão de ensino do experimento, a luz das informações levantadas pelos instrumentos e técnicas de pesquisa utilizados.

Por fim, trazemos as considerações sobre o estudo realizado acerca das regras de três, onde fizemos um apanhado de cada uma das fases da Engenharia Didática, apresentadas no parágrafo anterior, e apresentamos os resultados alcançados pela execução de uma sequência didática para o ensino das regras de três, as sugestões de pesquisa sobre esse objeto de estudo e também as nossas expectativas acerca da viabilidade e utilidade do material produzido como um recurso didático para as aulas de matemática ao nível de educação básica, e das informações produzidas para futuras pesquisas em educação matemática que tenham interesse em estudar as regras de três.

Doravante, falaremos um pouco mais sobre a metodologia da engenharia didática e suas fases que nortearam o desenrolar desta pesquisa.

2. ENGENHARIA DIDÁTICA

A nossa pesquisa por se tratar de uma investigação acerca do ensino da regra de três por meio da experimentação, buscou amparo no campo da Didática da Matemática e na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática.

A concepção de engenharia didática surgiu em Didática da Matemática no início da década de 1980, com o propósito de estruturar o trabalho didático, que se equipara ao trabalho de um engenheiro, pois este ao executar um projeto recorre ao seu conhecimento específico, e se subordina ao controle científico. Além disso, é obrigado a ocupar-se com objetos que exigem outros conhecimentos que diferem de sua instrução. (ARTIGUE, 1996, p. 193)

A metodologia de pesquisa da engenharia didática se caracteriza por uma configuração experimental e investigativa e se ancora nas práticas didáticas de sala de aula, ou seja, na construção, ação, observação e análise das sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 196)

A engenharia didática está alinhada com práticas de pesquisa que buscam investigar, por meio de experimentos, processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos e, em particular, a construção de conceitos empíricos pelos sujeitos investigados. (ALMOULOUD, 2007, p. 171) Com isso, a técnica da engenharia didática serve como interface entre o conhecimento científico e a prática pedagógica. (PAIS, 2011, p. 104)

Nesse contexto, a engenharia didática encontra-se sistematizada em fases que orientam o trabalho de pesquisa em didática da matemática. Para Artigue (1996), essas fases são:

- Análise prévia
- Concepção e análise a priori
- Experimentação
- Análise a posteriori e validação.

A seguir discorremos sobre cada uma dessas fases, ancoradas nas concepções de Almouloud (2007), Oliveira (2013) e Pais (2011).

- **As análises prévias**

As pesquisas que têm como base a engenharia didática estão amparadas em algumas fases que fazem parte do quadro teórico geral da didática. Assim, as analises prévias têm como um dos objetivos reconhecer os problemas de ensino e aprendizagem do objeto que se quer estudar e, a partir disso, planejar, de forma fundamentada, a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Nesse pensar, a primeira fase é onde se elaboram as análises preliminares. (ALMOULOUD, 2007, p. 172)

De acordo com o autor citado no parágrafo anterior, constam das análises preliminares os seguintes tópicos: a) Estudo da organização matemática; b) Análise da organização didática do objeto matemático escolhido; c) Definição da(s) questão(ões) da pesquisa.

A respeito do *Estudo da organização matemática*, o autor destacou os seguintes tópicos:

> ✓ estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito;
> ✓ analisar a estrutura matemática do conceito investigado;
> ✓ analisar o ensino usual e seus efeitos;
> ✓ evidenciar os saberes (matemáticos) e os conhecimentos (matemáticos e/ou culturais ou pessoais) relacionado com o saber visado;
> ✓ analisar as condições e fatores de que depende a construção didática efetiva das situações de ensino;
> ✓ considerar os objetivos específicos da pesquisa. (ALMOULOUD, loc. cit.)

Na *Análise da organização didática do objeto matemático escolhido*, o autor supracitado recomenda, entre outros aspectos, analisar as propostas curriculares e dos Parâmetros Curriculares Nacionais; analisar as concepções dos alunos e/ou professores a respeito dos saberes em jogo, por meio de um instrumento de coleta de dados; buscar nas referências bibliográficas, artigos, livros, dissertações, teses etc., os obstáculos que influenciam no processo de ensino e aprendizagem do objeto em estudo.

Sobre a *Definição da(s) questão(ões) da pesquisa* é indispensável considerar as seguintes perspectivas:

> ✓ fazer um resumo dos principais problemas relacionados o ensino e aprendizagem da noção estudada;
> ✓ relatar os principais resultados das pesquisas didáticas sobre o tema em estudo;
> ✓ destacar o(s) problema(s) de ensino e de aprendizagem que será(ão) objeto da pesquisa em andamento, e para o(s) qual(quais) se pretende buscar um solução;
> ✓ definir a(s) questão(ões) da pesquisa e justificar as escolhas feitas;
> ✓ apresentar as hipóteses da pesquisa e um justificativa fundamentada das escolhas feitas;
> ✓ discutir e definir os fundamentos teóricos e os procedimentos metodológicos que nortearão a fase experimental e as análises *a priori* e *a posteriori* nesta etapa da pesquisa. (ALMOULOUD, 2007, p. 173, grifo do autor)

Aqui cabe ressaltar, que ao longo da pesquisa as fases citadas anteriormente devem ser retomadas e aprofundadas por motivos diversos que venham emergir no desenrolar da pesquisa. Dessa forma, as análises prévias, por ser o primeiro nível de organização, devem ser trabalhadas juntamente com as fases seguintes da pesquisa. (ARTIGUE, 1988, apud ALMOULOUD, 2007, p. 173)

A próxima fase da engenharia didática é a concepção e análise a priori, que, de acordo com Pais (2011, p. 101), constitui-se na definição das variáveis de controle que provavelmente interferem na composição do fenômeno em estudo.

➢ **Concepção e análise *a priori***

Nesta etapa da engenharia didática, o pesquisador deve elaborar e analisar um conjunto de situações-problema, que visem responder a(s) questão(ões) levantada(s) na pesquisa e validar à hipótese. Essas situações-problema podem ser constituídas de questões abertas ou fechadas imersas no saber matemático, por meio de problemas que envolvam uma ou mais competências de saber e conhecimentos. (ALMOULOUD, 2007, p. 174)

O pesquisador ao desenvolver as situações-problema deve levar em consideração, segundo o autor supracitado, ao menos, as seguintes características:

> ✓ Os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na resolução, usando seus conhecimentos disponíveis.

> ✓ Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que se deseja efetivamente explorar e no qual o conhecimento está inserido.
> ✓ Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução completa do problema.
> ✓ Os conhecimentos, objeto de aprendizagem, são as ferramentas que devem ser mobilizadas, em última estância, para obter a solução final.
> ✓ O problema pode envolver vários domínios de conhecimentos: álgebra, geometria, domínio numérico entre outros. (ALMOULOUD, loc. cit.)

De acordo com este autor, as situações-problema devem possibilitar ao aluno agir de forma autônoma para a aquisição de novos conhecimentos. Assim, a função do professor passa a ser de um mediador e orientador, de forma que sua intervenção auxilie o aluno no processo da aprendizagem.

Ainda a respeito das atividades, essas devem ser pensadas de forma que: possibilite ao aluno utilizar conhecimentos disponíveis que o ajude a resolver, mesmo que parcial, o problema proposto; o professor deve estimular um debate acerca dos resultados alcançados pelos alunos, com a intenção de homogeneizar e construir o conhecimento da turma, e com isso possibilitar o avanço na apreensão do conhecimento de cada aluno; o professor deve, após o debate, selecionar e organizar as descobertas dos alunos com a intenção de sistematizar os novos conhecimentos, para ajudar na compreensão do objeto matemático, também cabe ao professor institucionalizar os novos saberes; por fim, o professor deve propor outras situações-problema semelhantes às anteriores, com o objetivo de fixar os novos conhecimentos adquiridos. (ALMOULOUD, 2007, p. 175)

Com vista em atingir o que foi dito no parágrafo anterior a respeito das atividades, o pesquisador precisa escolher as variáveis didáticas, responsáveis por suscitar as transformações esperadas no processo de ensino e aprendizagem com relação ao objeto matemático em estudo. Comunga dessa ideia, Pais (2011, p.102) ao afirma que o início da análise a priori começa pela reunião das variáveis, com o objetivo de indicar quais as variáveis serão controladas, de forma a estabelecer uma relação entre o conteúdo estudado e as atividades desenvolvidas pelo aluno para a aquisição dos conceitos pretendidos.

A respeito da categorização das variáveis, Almouloud (loc. cit.), apoiado nas ideias de Artigue (1988), sugere dois tipos de variáveis a serem manipuladas pelo pesquisador, aos quais são:

- Variáveis macrodidáticas ou globais: são as variáveis que dizem respeito à organização global da engenharia didática;

- Variáveis microdidáticas ou locais: são as variáveis que correspondem à organização de uma seção ou fase da engenharia didática.

As análises dessas variáveis, segundo o autor, devem ocorrer no transcorrer da sequência didática no âmbito: epistemológico (ligado as característica do saber), cognitivo (aspectos cognitivo do aprendiz) e da dimensão didática (organização de ensino a qual o aprendiz faz parte).

Ainda sobre as situações-problema, cabe ressaltar que a análise a priori destas perpassa pelos âmbitos da matemática e da didática, cujas analises recaem sobre os seguintes aspectos:

> 1. *Análise matemática.* Neste estudo, queremos identificar os métodos e/ou as estratégias de resolução de cada situação, evidenciando os conhecimentos e saberes envolvidos.
> 2. *Análise didática:* deve ser feita considerando-se, pelo menos, os seguintes aspectos:
>   - Analisar a pertinência das situações propostas em relação ao saber matemático visado e em relação aos saberes anteriormente adquiridos.
>   - Identificar as variáveis de comando da situação e escolher aquelas necessárias para o estudo.
>   - Estudar a consistência das situações, isto é, verificar se as variáveis escolhidas não possibilitam que os alunos construam conhecimentos incompatíveis, mesmo que de modo provisório.
>   - Prever e analisar as dificuldades que os alunos podem enfrentar na resolução de cada atividade.
>   - Identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos podem adquirir.
>   - Prever os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução de problemas que devem ser institucionalizados. (ALMOULOUD, 2007, p. 176-177)

Uma boa análise a priori contribui para a eficácia das situações-problema, além do mais, ajuda o pesquisador a mediar às ações do aluno com as atividades a serem realizadas, e auxilia na identificação e compreensão dos fatos oriundos do experimento. (ALMOULOUD, 2007, p. 176)

As últimas fases da engenharia didática são a experimentação, análise a posteriori e validação, as quais são apresentadas a seguir.

- **Experimentação**

Nesta fase, a experimentação, é onde se coloca em funcionamento a sequência didática construída, podendo acorrer ajustes, quando necessário, mediantes as análises locais durante a execução do experimento, o que implica retomar a análise a priori para os eventuais reparos. (ALMOULOUD, 2007, p. 177)

> A experimentação é a realização da sequência didática propriamente dita, com participação ativa do professor e alunos, por meio de observações sobre cada sessão e identificação da concepções/representações sobre o conteúdo de ensino e aprendizagem. (OLIVEIRA, 2013, p. 135)

Para a autora do excerto, é na experimentação que são produzidas as informações necessárias por meio dos registros, que auxiliam na quarta fase da Engenharia Didática, análise a posteriori e validação, a qual é apresentada a seguir.

- **Análise a posteriori e validação**

A análise a posteriori de uma sessão de ensino se configura como um conjunto de resultados que foram coletados das informações produzidas durante a execução da sessão, e que podem auxiliar no ensino e aprendizado do aluno sobre o objeto em estudo nas condições realizadas. Cabe ressaltar que essa fase da Engenharia Didática não se trata de uma crônica do experimento, e sim uma avalição dos resultados obtidos com base na análise a priori, fundamentação teórica, hipótese e problemática da pesquisa. Além do mais, as informações levantadas nessa fase dependem de ferramentas técnicas usadas como, por exemplo, material didático e vídeo, ou enfoques teóricos, a saber, teoria das situações, contrato didático entre outras, que auxiliam na construção dos registros de pesquisa, os quais são confrontados com a análise a priori construída, cujo objetivo é comparar o observado na sessão com as conjecturas feitas a priori para estimar a reprodutibilidade e a constância dos fatos didáticos ocorridos. (ALMOULOUD, loc. cit.)

Para Pais (2011, 103), na Engenharia Didática, a validação dos resultados ocorre por meio da confrontação dos resultados alcançados nas análises a priori e a posteriori. Desse modo, essa metodologia de pesquisa se baseia nos registros de estudo de casos, com isso sua validação ocorre internamente e demarcada pelo contexto do experimento realizado.

Em última análise, é recomendável que o pesquisador enfatize, nesta fase, os principais resultados e as questões que emanaram da pesquisa como forma de oportunizar futuros trabalhos. Além do mais, o pesquisador deve evidenciar os resultados alcançados com a pesquisa para a área da didática da matemática, para a escola, para os alunos e, também, para a formação inicial e continuada dos professores. (ALMOULOUD, 2007, p. 178)

Nas seções seguintes abordamos cada uma dessas fases da Engenharia Didática descritas acima com os aspectos estudados da regra de três.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta fase da Engenharia Didática, as abordagens prévias sobre o objeto de estudo, em nosso caso a regra de três, se apresentam como a antessala dos demais aspectos da pesquisa, onde nos propomos abordar sobre a relevância do objeto de estudo nos documentos oficiais da educação básica brasileira, a gênese desse conhecimento no decorrer da história, a fundamentação matemática entre outros pontos que trazem informações pertinentes do objeto de pesquisa. Esses os demais são apresentados nas subseções a seguir.

3.1. ASPECTOS CURRICULARES DA REGRA DE TRÊS

Nesta subseção nos propomos a apresentar uma análise de como o assunto regra de três é abordado nos documentos oficiais da educação brasileira em nível de educação básica. Em nossa análise, buscamos investigar os textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)[1] de Matemática do ensino fundamental, da Base Nacional Comum Curricular (2018)[2], das Matrizes de Referência do Sistema Nacional da Avaliação da Educação Básica (2008)[3] e a matriz de matemática do Sistema Paraense de Avaliação Educacional (2016)[4].

Nos PCN (1998) de Matemática do ensino fundamental o assunto regra de três aparece no quarto ciclo na parte de números e operações como uma das estratégias de resolução de problemas com grandezas proporcionais, como relata o trecho: “Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas,

---

1 PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

2 BNCC: Base Nacional Comum Curricular

3 SAEB: Matrizes de Referência do Sistema Nacional da Avaliação da Educação Básica

4 SisPAE: Sistema Paraense de Avaliação Educacional

incluindo a regra de três." (BRASIL,1998, p. 87) Ainda nesse pensar, a regra de três é mencionada nos critérios de avaliação para o quarto ciclo: "[...] o professor verifica se o aluno é capaz de resolver situações-problema (escalas, porcentagem e juros simples) que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias como as regras de três [...]." (Ibid., p. 92)

Na BNCC (2018) foi possível observar em nossa análise que o uso da regra de três não é recomendado nos textos desse documento. Isso pode ser comprovado na unidade temática Álgebra quando se trata da resolução de problemas envolvendo a interdependência de grandezas diretamente proporcionais, como afirma o trecho: "[...] A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a **variação proporcional direta** entre duas grandezas (**sem utilizar a regra de três**) [...]." (BRASIL, 2018, p. 268, grifo nosso) A mesma recomendação pode ser vista nos Objetos de Conhecimento das Unidades Temáticas Números do 6° ano do ensino fundamental ao se referir ao cálculo de porcentagens, como é mencionado no trecho: "Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da **regra de três**." (BRASIL, 2018, p. 298, grifo nosso) Também o mesmo pensar pode ser visto nas Habilidades (EF06MA13), quando recomenda resolver e elaborar problemas de porcentagem por meio da proporcionalidade sem utilizar a regra de três, como mostra o excerto adiante:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (Ibid., p. 299, grifo do autor)

Em uma última análise, percebemos que apesar dos objetos de conhecimento para o 7º ano das Unidades Temáticas, na parte de Álgebra, sugerirem a abordagem de "Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais." (BRASIL, 2018, p. 304), as habilidades recomendadas para a resolução desses problemas não envolve a regra de três, mas sim o uso de equações, como mostra o trecho: "(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas." (Ibid., p. 305) Também no 8º ano do ensino fundamental nessa mesma unidade temática, Álgebra, um dos objetos de conhecimento se refere ao estudo da variação de grandezas direta e inversamente proporcionais e não proporcionais. Entretanto, as habilidades a serem utilizadas em contextos que envolvam esse objeto de conhecimento matemático não se referem às regras de três, mas sim as sentenças algébricas e a estratégias diversas, sem especificar que estratégias são essas, como mostra o excerto a seguir.

> (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
> (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (BRASIL, 2018, p. 311)

Como podemos observar no trecho citado do documento, a regra de três não é recomendada como estratégia de ensino, ou não fica claro o seu uso, para resolver e elaborar problemas com variação proporcional direta e/ou inversa, pelo contrário, sugere apenas a utilização de sentenças algébricas e variadas estratégias. Sobre esta última, seria aconselhável que BNCC (2018) deixasse claro que tipos de estratégias os alunos deveriam fomentar, pois, a nosso ver, não é tão simples criar modelos matemáticos que retratem uma determinada situação, sobretudo, quando esta relaciona grandezas não proporcionais, e, ainda, quando há mais de duas grandezas envolvidas. Nesse pensar, pressupomos que a regra de três exerce um papel fundamental como estratégia para resolver problemas com variação proporcional, uma vez que seu algoritmo está embasado na propriedade da proporção simples e na propriedade das grandezas compostas. Além do mais, oportuniza os alunos a utilizarem mais de um método de resolução, os quais serão apresentados neste trabalho, inclusive a regra pode ajudar a identificar as situações não proporcionais, pois quando a mesma não é aplicável significa que não há a relação proporcional entre as quantidades. É claro que para alcançar esse nível de análise, é necessário que aluno tenha a plena compreensão dos conceitos sobre as relações proporcionais (direta e inversa).

A pouca relevância dada à regra de três nos textos da BNCC (2018) contrasta com a abordagem das Matrizes de referência do Saeb (2008). Estas disponibilizam o descrito (D29) que pretende avaliar as habilidades dos alunos em “Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.” (BRASIL, 2008, p. 153) Para esse descritor, a estratégia da regra de três simples é, geralmente, a mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas proposto. (BRASIL, 2008, p. 185)

A recomendação das Matrizes do Saeb com relação a melhorar a habilidade citada no paragrafo anterior recai sobre a ênfase a ser dada na compreensão das relações proporcionais entre as grandezas envolvidas no problema, recomendação essa que acreditamos ser o entrave para o ensino e aprendizagem das regras de três.

> A montagem da regra de três simples é rapidamente assimilada pelos alunos. A ênfase deve ser dada no reconhecimento de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Diversos exemplos do cotidiano dos alunos devem ser explorados para verificar se as duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais. (BRASIL, 2008, p. 186)

Realmente, essa facilidade de montar a regra de três simples com base no enunciado da questão foi apontada por 42% dos alunos egressos do 8º ano do ensino fundamental que responderam o questionário socioeconômico sobre as possíveis dificuldades no aprendizado da regra de três apresentadas no Quadro 8, sendo que 41% consideraram regular a montagem da regra e apenas 17% dos alunos pesquisados responderam que era difícil ou muito difícil montar a regra de três simples.

Quanto a utilização da regra de três na matriz de matemática do SisPAE (2016) do ensino fundamental, observamos que não está explicita entre as habilidades arroladas nessa matriz. Entretanto, em uma das habilidades, MPA 49, exigidas no tema *grandezas e medidas*, possibilita uma interpretação quanto ao uso da regra, haja vista que essa habilidade requer que o aluno consiga resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade entre duas grandezas. Nesse caso, a regra de três simples pode ser ensinada como uma estratégia que subsidie os alunos a adquirirem a habilidade mencionada.

Diante das posições dos documentos oficiais citadas no decorrer desta subseção, percebemos que a regra de três ora ocupa seu lugar no rol dos conteúdos matemáticos a serem ensinados ora não. Talvez, por se tratar de uma regra, o seu uso seja visto com restrições por alguns estudiosos para o ensino, já que, em muitas situações, a regra é utilizada de maneira estanque com pouca ou nenhuma compreensão do seu algoritmo pelo aluno na resolução de questões com proporcionalidade. Todavia, não devemos esquecer que a regra de três tem seu valor histórico e social, pois o uso dessa técnica foi de grande valia nas práticas comerciais de épocas passadas, e que por isso, segundo a história, teve seu lugar garantido entre os conteúdos de Matemática que deveriam ser ensinados nas escolas.

> [...] o ensino com ênfase nas práticas da regra de três não seria casual porque nele se reconheceria objetos culturais que teriam uma história que revelaria a regra de três, por exemplo, como ferramenta útil para o enfrentamento de problemas que se tornaram rotineiros e tradicionais no dia a dia, ou ainda, como partícipe da história da construção do conhecimento matemático científico e também do ensino da matemática, com relevância particular como passagem da aritmética à álgebra. (GUERRA; SILVA, 2014, p. 202)

Acreditamos que a regra de três é uma forma eficiente que deve ser utilizada pelo aluno na resolução de problemas que tratam de relações proporcionais (direta e inversa). No entanto, é imperativo que o ensino dessa regra nas escolas ocorra de maneira eficiente, que leve o aluno a perceber e compreender as relações proporcionais existentes entre as grandezas do problema, pois só assim a regra de três tem relevância para o ensino de matemática, como uma das estratégias a ser empregada, de forma consciente, na resolução de problemas que envolvam a proporcionalidade, pois, assim, a regra não se configura como um fazer mecânico e sem sentido para o aluno.

3.2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA REGRA DE TRÊS

Nesta subseção, abordamos os aspectos históricos da regra de três com relação à origem, a nomenclatura e as atividades com Matemática em que a regra era utilizada. Para tanto, buscamos na literatura da História da Matemática e em outras fontes fatos que revelassem uso da regra de três por povos da antiguidade, o que nos permitiu perceber que a regra era usada, pelo menos, pelos babilônios, egípcios, chineses, hindus e árabes.

3.2.1. OS BABILÔNIOS E A REGRA DE TRÊS

Os povos babilônios no período do rei Hamurabi (1700 a.C.) tinham consideráveis conhecimentos sobre Aritmética e Geometria. Esses povos sabiam resolver equações do primeiro e de segundo graus, esta última pelo método do complemento do quadrado, calculavam áreas e volumes, tinham conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e calcularam a diagonal de um quadrado de lado igual um com uma aproximação de: 1,414213. (GARBI, 2010, p. 11)

Quanto a isso, cabe ressaltar que as abordagens matemáticas babilônicas eram meramente numéricas, isto é, não utilizavam incógnitas em suas resoluções para problemas práticos e não práticos, ao invés disso, utilizam palavras como comprimento, largura, área, volume etc., e os procedimentos adotados nessas resoluções estavam alicerçados na proporcionalidade, visto que “[...] o raciocínio proporcional, que era, de fato, uma das mais importantes áreas desenvolvidas pelo pensamento mesopotâmico [...]” (RADFORD, 2011, p. 119), e utilizado na resolução de problemas ligados à Geometria e Aritmética.

Dentre os registros matemáticos dos babilônios, havia, segundo Boyer (2010, p. 20-21), tabelas que abordavam potências sucessivas para um determinado valor, que se assemelhavam com as tabelas logarítmicas atuais. No entanto, tais tabelas não apresentavam a mesma linguagem e notação, bem como não utilizavam como base do logaritmo o mesmo número em outras situações. Também as tabelas babilônicas continham intervalos entre os seus valores maiores que os das tabelas de hoje. Essas tabelas eram utilizadas em situações específicas e não de maneira geral. Quanto aos espaços entre os números dispostos na tabela, os matemáticos babilônicos costumavam praticar a interpolação linear para encontrar valores intermediários aproximados e a notação posicional desses valores era semelhante ao modo de fazer da regra de três.

Outros povos da antiguidade que manipularam a regra de três em problemas geralmente práticos foram os egípcios. Registros dessa prática foram encontrados em um papiro do século XVII a. C., que descrevia como a regra era aplicada em situações imersas num contexto com proporcionalidade, mesmo que de maneira tácita.

3.2.2. OS EGÍPCIOS E A REGRA DE TRÊS

O documento egípcio Papiro de Ahmes (ou Rhind), copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmes de um protótipo datado entre 2000 a 1800 a. C., e descoberto no século XIX pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, abordava 85 problemas sobre Aritmética e Geometria. Dentre esses problemas, aparece o problema 72 que relacionava a quantidade de pães com a força ou *pesu*[5] de grão. A solução apresentada para esse problema se assemelha à técnica da regra de três, como mostra o trecho a seguir: “qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como 100/10 x 45 ou 450 pães.” (BOYER, 2010, p. 11)

O Papiro de Ahmes apresentava muitos problemas que relacionavam grandezas como, por exemplo, cerveja e pães e eram resolvidos através da aplicação da proporção. No entanto, também existiam problemas no Papiro de Rhind que eram de cunho algébrico, como por exemplo, determinar a solução de equações lineares. (GARBI, 2010, p. 13; BOYER, loc. cit.)

Quanto ao problema supracitado é fácil ver que a forma de resolução está ampara na ideia de proporção, pois a disposição dos termos em que o segundo é multiplicado com terceiro, e o resultado divido pelo primeiro, deixa subentendido que essa configuração resulta da comparação de razões, o que em notação matemática atual seria o produto cruzado dos valores, amparado na propriedade da igualdade de frações ou propriedade fundamental da proporção, artifício utilizado na regra de três.

A apropriação pelos egípcios do modo semelhante de aplicar à regra de três em contextos que relacionavam grandezas de maneira proporcional, não garantiu a esses povos a posse sobre a origem da regra de três; que ora diz respeito aos chineses, ora aos hindus, como é mostrado, a seguir, com base nas colocações de Eves (2011) e Smith (1925).

3.2.3. OS CHINESES E A REGA DE TRÊS

Os registros históricos revelam que os chineses desenvolveram obras que travam de Matemática. Uma dessas obras chinesas, talvez a mais importante, era a chamada Chui Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, datada de 250 a. C., e escrita, provavelmente, por Chang Tsang. Essa obra continha 246 problemas sobre mensuração de terra, agricultura, sociedades, engenharia, impostos etc., além dos temas matemáticos sobre porcentagem e proporção, regra de sociedade, regra de três, entre outros. Dentre as soluções apresentadas no livro,

---

[5] “Pesu é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão.” (BOYER, 2010, p. 11)

havia problemas resolvidos por meio da regra de três. (CONTADOR, 2006, p. 477; BOYER, 2010, p. 133-134)

Para Carrera (2009, p. 58) a obra chinesa, Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, data de um período distinto do mencionado anteriormente, pois teria surgido entre 300 a. C. a 200 d. C. Também há divergência com relação à autoria da obra, já que para esse autor a mesma era de autoria desconhecida. A respeito do conteúdo bordado nos Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, em linhas gerais, tratava de extração de raízes, proporção, regra de três, falsa posição, resolução de sistemas de equação, áreas e volumes de figuras planas e de sólidos e também triângulos retângulos.

Cada capítulo do livro chinês abordava um tema geral, que se adequava por meio de um contexto prático aos saberes matemáticos citados no parágrafo anterior. Desse modo, a regras de três, de acordo com Carrera (2009, p. 71), era mencionada no segundo capítulo desse livro, que abordava situações ligadas ao comércio de cereais, assim, a regra era usada para resolver problemas sobre milho e arroz.

Outra perspectiva sobre a obra chinesa é apresentada por Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 13), estes afirmaram que os problemas contidos nos Nove Capítulos sobre a Arte Matemática eram de cunho prático e recreativo. A proporcionalidade teria sido à base de resolução desses problemas para os matemáticos chineses, tanto na Geometria quanto na Álgebra. Tendo em vista a primeira, a proporcionalidade era usada em problemas sobre semelhança de triângulos, com relação à segunda, a proporcionalidade foi utilizada para resolver problemas de equação do primeiro grau.

Quanto a Matemática chinesa, Eves (2011, p. 246) afirma que ela obteve destaque mundial após a Matemática da Grécia antiga entrar em decadência. Com isso, os chineses foram os pioneiros na criação de:

> [...] um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de *n,* (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema Chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) <u>desenvolver a regra de três</u> [...]. (EVES, loc. cit., grifo nosso)

Em consonância com trecho supracitado sobre a origem da regra está à afirmação de Fragoso (1999, p. 13), que diz: “A denominação regra de três, deve-se aos hindus, e historicamente, a sua origem aos chineses.”

De fato, essas duas civilizações são consideradas, segundo Boyer (2010, p.133), as mais antigas, ficando atrás apenas do Egito e da Mesopotâmia, o que corrobora o uso e o aperfeiçoamento da regra por civilizações posteriores.

Acerca da utilização da regra de três pelo povo indiano, merecem destaque neste trabalho os matemáticos Aryabhata, Brahmagupta, Bhâskara e Mahâvira, que aplicaram a regra em situações com matemática e inclusive apresentaram nomes específicos para as quantidades envolvidas.

3.2.4. OS HINDUS E A REGRA DE TRÊS

Para Datta e Singh (1962, p. 204) os problemas de regra de três se configuram da seguinte maneira: “Se p rende f, quanto renderá i?”[6]. Sendo que os termos p, f e i para os hindus são chamados, respectivamente, de pramâna (argumento), phala (fruta) e icchâ (requisição). Esses nomes são encontrados em todos os trados de matemática, também podem ser representados como primeiro, segundo e terceiro termos, nessa ordem.

Os termos mencionados são apresentados ao longo deste texto para representar as quantidades envolvidas em regra de três e, às vezes, com alguma variação, dependendo de como a regra era anunciada e por quem fosse anunciada.

A respeito do manuscrito Aryabhatiya, de autoria do matemático Aryabhata que viveu na Índia durante o sexto século (d.C), este continha regras de cálculos para a Agronomia e Matemática de mensuração. A obra também abordava problemas que eram resolvidos por meio da regra de três, com o uso da proporção simples para determinar o quarto termo desconhecido, como mostra o trecho: “Na regra de três multiplica-se o <u>fruto</u> pelo <u>desejo</u> e divida-se pela <u>medida</u>. O resultado será o <u>fruto do desejo</u>.” Em notação matemática, o trecho supracitado é entendido como a/b = c/x, onde x = bc/a, sendo ‘a’ chamado de “medida”, ‘b’ de “fruto”, ‘c’ de “desejo” e ‘x’ de “fruto do desejo”. (BOYER, 2011, p. 143-144, grifo nosso)

---

[6] If *p* yields *f,* what will *i* yield?

Aryabhata, também conhecido como Aryabhata I (499), fornece, segundo Datta e Singh (1962, p. 204), uma regra para resolver os problemas de regra de três, que consistia em utilizar as operações de multiplicação e divisão com as quantidades (termos) envolvidas, assim descrita no trecho:

> Na Regra de Três, a phala (“fruta”), sendo multiplicada pela icchâ (“requisição”) é dividida pela pramâna (“argumento”). O quociente é o fruto correspondente ao icchâ. Os denominadores de um sendo multiplicado com o outro, dá o multiplicador (isto é, numerador) e o divisor (isto é, denominador)[7]. (DATTA; SINGH, loc. cit., tradução nossa)

Este modo de fazer também aparece na abordagem de Brahmagupta para a regra de três, dois séculos mais tarde. Ele viveu na Índia Central no período do século VII, e anuncia a regra como: ‘na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.’ Esse modo de pensar foi aplicado a um problema de regra de três, proferido por outro matemático hindu, Bhâskara, que dizia: ‘Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?’ À solução apresentada busca relacionar os valores do problema com os termos mencionados por Brahmagupta, com isso temos: 3/7 e 9 são o Argumento e o Requisito, respectivamente, pois têm a mesma denominação, enquanto que 5/2 é considerado o Fruto. O resultado das operações é o Produto: $9\times(5/2)/(3/7) = 52{,}5$. Em outras palavras, o problema apresentado por Bhâskara se resolveria por meio da proporção simples: $x : 9 = (5/2) : (3/7)$. (BOYER, 2010, p. 149; EVES, 2011, p. 263)

O anúncio da regra de três pelo indiano Mahâvira tem a mesma essência da anunciada por Brahmagupta, com relação à posição dos termos, isto é, o termo do meio fica multiplicado pelo último termo e dividido pelo primeiro, sendo que o primeiro e terceiro termos são de mesma natureza, como mostra o trecho a seguir: “Phala multiplicado por Icchâ e dividido por Pramâna torna-se a resposta, quando a Icchâ e Pramâna são semelhantes[8].” (SMITH, 1925, p. 483, tradução nossa)

---

[7] In the Rule of Three, the phala (“fruit”), being multiplied by the icchâ (“requisition”) is divided by the pramâna (“argument”). The quotient is the fruit corresponding to the icchâ. The denominators of one being multiplied with the other give the multiplier (i.e., numerator) and the divisor (i.e., denominator)

[8] Phala multiplied by Icchâ and divided by Pramâna becomes the answer, when the Icchâ and Pramâna are similar.

Ainda sobre o anuncio da regra de três, outro matemático apresenta a referida regra com pequenas variações acerca dos nomes dos termos. Este matemático indiano era Aryabhata II, que viveu na Índia, provavelmente, no período[9] de 920 a 1000 da nossa era. Ele declarava a regra da seguinte forma: “O primeiro termo é chamado mâna, o termo do meio vinimaya e o último icchâ. O primeiro e o último são da mesma denominação. O último multiplicado pelo meio e dividido pelo primeiro dá o resultado[10].” (DATTA; SINGH, 1962, p. 205, tradução nossa)

Os indianos também apresentaram um método para descrever a regra de três inversa; a forma como era descrita, parece que a manipulação dos termos da regra estava de acordo com um contexto de proporcionalidade, pois essa regra só era aplicada, talvez, em situações que havia uma variação conjunta invertida, como é descrito por Bhâskara II no trecho: “Onde com o aumento da icchâ (requisição) o phala diminui ou, com a sua diminuição, o phala aumenta, os especialistas em cálculo sabem que o método é a Regra Inversa de Três.[11]” (DATTA; SINGH, 1962, p. 208, tradução nossa)

Para esses autores a regra de três inversa era chama pelo nome hindu de ‘vyasta-trairâsika’, cujo significado quer dizer ‘regra inversa de três termos’. A forma como ela era utilizada consistia em multiplicar o termo do meio com o primeiro e o resultado era divido pelo terceiro termo. No trecho a seguir estão algumas situações em que a regra inversa de três podia ser utilizada: “Onde o valor dos seres vivos é regulado por a idade deles; e no caso do ouro, onde o peso e o toque são comparados; ou quando os montes são subdivididos, use-se a regra inversa de três[12].” (DATTA; SINGH, loc. cit., tradução nossa)

A proporcionalidade composta também esteve presente nos contextos hindu, à regra que hoje é conhecida como regra de três composta era chama de proporção composta, em que envolvia cinco ou mais termos em sua composição,

---

[9] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata_II.html>. Acesso em: 22 out. 2017.

[10] The first term is called mâna, the middle term vinimaya and the last one icchâ. The first and the last are of the same denomination. The last multiplied by the middle and divided by the first gives the result.

[11] Where with increase of the iccha (requisition) the phala decreases or with its decrease the phala increases, there the experts in calculation know the method to be the Inverse Rule of Three.

[12] Where the value of living beings is regulated by their age; and in the case of gold, where the weight and touch are compared; or when heaps are subdivided let the Inverse Rule of three be used.

devido a isso a regra recebia alguns nomes específicos dependendo da quantidade termos, como mostra o trecho:

> O que foi chamado, por um século ou dois, pelo nome da proporção composta, foi originalmente por nomes como a Regra dos Cinco, quando cinco quantidades estavam envolvidas, a Regra de Sete se sete quantidades foram usadas, e assim por diante. Bhâskara, por exemplo, dá regras de cinco, sete, nove e onze[13]. (SMITH, 1925, p. 491, tradução nossa)

Sobre a proporção composta, esta, de acordo com Datta e Singh (1962, p. 211), também era conhecida como Regra de Termos Ímpares para representar as variações da regra. Nas afirmações de Smith (1925, p. 491-492), os nomes da regra para além de cinco quantidades eram raramente utilizados, ao invés disso se usou nomes como Regra Dupla de três, Regra de Três Composta, Proporção Plural, Regra Conjunta e Proporção Composta, esta última foi utilizada de maneira geral no século XVIII.

Sobre o funcionamento do método, o mesmo é descrito por Brahmagupta da seguinte forma:

> No caso de termos estranhos que começam com três termos até onze, o resultado é obtido através da transposição dos frutos de ambos os lados, de um lado para o outro e, em seguida, dividindo o produto do conjunto maior de termos pelo produto do conjunto menor. Em todas as frações, a transposição dos denominadores, da mesma forma, ocorre em ambos os lados[14]. (DATTA; SINGH, 1962, p. 211-212, tradução nossa)

Outros modos de resolver a proporção composta, segundo Datta e Singh (1962, p. 212), foram apresentados por matemáticos indianos, como é caso de Srîdhara, Bhâskara II, Mahâvira e Aryabhata II, estes dois últimos conforme o primeiro.

A forma como a regra de três esteve nos trados dos árabes e dos latino-americanos revela que o nome regra de três foi adotado, mas os nomes dos termos hindus foram descartados. Apesar disso, a maneira de aplicar a regra permaneceu, isto é, os termos eram organizados em linha, de tal modo que o primeiro e o último

---

[13] What has been called, for a century or two, by the name of compound proportion originally went by such names as the Rule of Five when five quantities were involved, the Rule of Seven if seven quantities were used, and so on. Bhaskara, for example, gives rules of five, seven, nine, and eleven.

[14] In the case of odd terms beginning with three terms upto eleven, the result is obtained by transposing the fruits of both sides, from one side to the other, and then dividing the product of the larger set of terms by the product of the smaller set. In all the fractions the transposition of denominators, in like manner, takes place on both sides.

eram semelhantes, e o resultado obtido provinha da multiplicação do segundo termo com o último, e o produto divido pelo primeiro. Essa regra foi aperfeiçoada na Índia durante os primeiros séculos da era cristã e, talvez, transmitida aos árabes no século VIII, e a partir daí chegou à Europa, onde ficou conhecida como “Regra de Ouro”, esta denominação permaneceu na Inglaterra até o final do século XVIII, sendo abandonada, provavelmente, por ordem da igreja. (DATTA; SINGH, 1962, p. 210; SMITH, 1925, p. 486)

Para Smith (1925, p. 483) a regra de três, talvez, teve sua origem na Índia, inclusive sua nomenclatura era dita como regra mercantil de três, e foi mencionada dessa maneira por Brahmagupta (c. 628) e Bhâskara (c. 1150), e essa mesma denominação esteve também em escritos árabes e latinos medievais.

3.2.5. OS ÁRABES E A REGRA DE TRÊS

Os árabes adquiriram o conhecimento da regra de três dos hindus, no entanto não utilizaram os mesmos nomes específicos para as quantidades envolvidas, ao invés disso, eles aplicaram a técnica da regra, talvez, a princípio, sem associar os termos com a proporcionalidade, apesar de que, como mostrado anteriormente, os hindus, ao manipularem a regra de três, mencionavam a palavra proporção, de acordo com as afirmações de Datta e Singh (1962), em suas descrições sobre a regra e nas atividades com matemática; parece que havia aí um entendimento sobre as relações proporcionais.

Os trechos a seguir relatam com base nas ideias de Guerra e Silva (2014) como a regra de três esteve inserida em situações ligadas ao comércio, em atividades não práticas e no ensino, pois com o desenvolvimento da aritmética comercial no Ocidente durante os séculos XIII, XIV e XV, a regra de três era dita como uma ferramenta indispensável aos ofícios e atividades comerciais da época.

Para Guerra e Silva (2014, p. 206-207) a regra se apresentou de dois modos distintos, sendo o primeiro de maneira utilitária e prática utilizada pelos povos da Índia, em que regra era manuseada apenas com as operações de multiplicação e divisão como aparecem nos escritos antigos de Aryabhata, Mahâvira e Brahmagupta, com poucas diferenças a respeito dos nomes dos termos utilizados. Essa forma utilitária da regra também esteve presente nos ábacos italianos e nos escritos árabes de Ibn Thabãt, al-Karaji e Ibn al-Banna, que manusearam a regra de forma prática e sem preocupações teóricas em transações comerciais. No entanto, o segundo momento da regra de três esteve vinculado à teoria da proporcionalidade, como constavam nos escritos árabes e ibero-provençal.

> Esse afeiçoamento, segundo Hoyrup (2007), teria sido formulado por escritores árabes, de al-Khawarismi em diante, quando passaram a estabelecer que as transações comerciais apresentavam quatro magnitudes em proporção, identificadas, não raro, com o preço solicitado e as magnitudes correspondentes (Thaman, muthaman, etc.). Assim, as transações seriam tratadas como problemas de proporção [...] (GUERRA; SILVA, 2014, p. 208)

A regra era usada pelos árabes, segundos os autores supracitados, sem a utilização de um nome específico e neste contexto havia outras formas de aplicar a regra, o que demonstra que a prática da regra de três não se desenvolveu de maneira cronológica, e que o modo árabe não sobrepujou as demais propostas, isto é, a italiana e a indiana. Com isso, pode-se firmar que “[...] as práticas da regra de três se faziam presentes em acordo com os contextos conformados pelas atividades que realizavam, tendo em conta, por exemplo, os tipos de problemas, o lócus, a linguagem ou a formação intelectual dos indivíduos.” (GUERRA; SILVA, loc. cit.)

A versão árabe da regra, antes das transações comerciais, era pautada em aplicações meramente mecânica com números puros, ou seja, a regra não era usada em contextos que retratassem a realidade, diferentemente da versão italiana, esta, quase sempre, era aplicada em problemas concretos. (GUERRA; SILVA, 2014, p. 211)

Para Smith (1925, p. 488) a regra de três era vista como uma regra sem razão, pois era anunciada sem uma justificativa, devido à maneira de fazer, que consistia em multiplicar o último número com o segundo e dividir o produto pelo primeiro número. Este modo de aplicar a regra foi difundido por outros aritméticos, geralmente em forma de verso. A disposição dos termos na regra de três lembra as primeiras obras hindus, tendo em vista que o primeiro termo e o último são de mesma natureza, o que levou alguns escritores a não relacionar a regra de três com a proporção.

Como a aplicação da regra era de maneira arbitrária, era preciso organizar os termos de tal modo que obedecesse a ordem correta, devido a isso os primeiros livros impressos apresentaram a regra nesse formato, como foram as obras de Borghi (1484) e Glareanus (1538). Entretanto, escritores posteriores que consideram a regra de três como caso de proporção, reorganizaram a forma de escreve os termos da regra, para tanto consideram que a razão deveria ocorrer entre números (ou quantidades) de mesma natureza, diferentemente da forma original da regra. O trabalho de Blassiére (1769) já apresentava a regra neste formato, isto é, a razão ocorria entre termos de mesma natureza. Também outros trabalhos do século XVIII trouxeram a mesma abordagem. Apesar da mudança na disposição dos termos, os escritores mantiveram a posição do termo desconhecido à direita nos problemas comercias em proporção, como na antiga forma da regra de três. (SMITH, 1925, p. 489-490)

Quanto à questão da regra está vinculada à teoria das proporções em obras do século XVIII, cabe ressaltar que Eves (2011, p. 263) afirma, no entanto, que tal acontecimento ocorreu já no final do século XIV.

A regra de três não esteve somente em contextos como os mencionados anteriormente, ela também esteve inserida no contexto do ensino. De acordo com Guerra e Silva (2014, p. 204-205) no período da revolução comercial, durante os séculos XIII a XV, os ofícios dos mercadores e artesões necessitavam de conhecimentos matemáticos de aritmética, não na sua forma teórica ou filosófica, mas sim nos aspectos utilitário, prático e profissional. Devido a isso, os senhores de negócio fundaram escolas com o propósito de fornecer instrução sobre conhecimentos ligados aos negócios. Tais conhecimentos estavam divididos em duas categorias, restrito e geral. Este último era destinado aos mercadores, que recebiam as instruções por meio de textos escolares desenvolvidos por mestres italianos, com orientações práticas por meio de problemas que retratavam a realidade deles.

Nesse cenário, segundo os autores do parágrafo anterior, a regra de três se mostra necessária para a matemática comercial, por isso ela deveria constar nos livros de aritmética.

> é a principal é a mais excelente regra de toda a aritmética. Para todas as outras regras há necessidade dela, e ela perpassa por todas as outras, para cujos casos, é chamada pelos filósofos de regra de ouro; mas nestes últimos dias, está sendo chamada por nós como regra de três, porque é requerido três números na operação. (BROOKS, 1880, p. 330 apud GUERRA; SILVA, 2014, p. 205-206)

A trajetória histórica da regra de três revelou que esta regra recebeu variados nomes em seu percurso, dependo da época, do lócus e dos sujeitos que manipularam a regra em atividades com matemática. A respeito disso, o quadro a seguir expõe alguns desses nomes concedidos à regra.

Quadro 1 – Nomes da regra de três ao longo da história

Nome		Autoria	Fonte
Trairâsika	Três termos ou regra de três termos.	Hindu	Datta e Singh (1962, p.203)
The Merchants' Rule; Rule Merchants'key.	A regra dos comerciantes; Regra chave dos comerciantes.	Licht	Smith (1925, p. 488)
Vyasta- trairâsika; Rule Backer	Regra inversa de três termos; Regra de Backer.	Hindu Recorde	Datta e Singh (1962, p.207); Smith (1925, p. 490)
Rule of Odd terms	Regra dos termos ímpares	Hindu	Datta e Singh (1962, p.203)
Rule of proportions; Golden rule	Regra de proporções; Regra de ouro.	Recorde	Smith (1925, p. 484)
The Mercantile Rule of Three	A regra mercantil de três	Brahmagupta e Bhâskara	Smith (1925, p. 483)
Double Rule of three; Compuond Rule of Trhee; Conjoint Rule; Plural Proportion; Compound Proportion-Rule Five, Rule Seven, Rule Nine etc.	Regra dupla de três; Regra composta de três; Regra Conjunta; Proporção Plural; Proporção composta.	Recorde; Clavius; Coutereels; Hodder; Hindu.	Smith (1925, p. 491-492) Datta e Singh (1962, p.210-211)

Fonte: DATTA; SINGH (1962); SMITH (1925)

As informações produzidas com esse estudo tiveram como propósito apresentar os aspectos históricos da regra de três inseridos em contextos das civilizações antigas, e como estas manusearam e utilizaram a regra em atividades com matemática e no âmbito do ensino. Para tanto, recorremos às fontes científicas, tais como livros de História da Matemática, dissertações e outras fontes que nos respaldassem na produção das informações que fundamentaram a nossa pesquisa.

Nesse contexto, foi possível observar que a regra de três foi uma ferramenta amplamente utilizada pelas civilizações antigas em atividades envolvendo a matemática, desde o seu modo mais primitivo até em contextos com a proporcionalidade.

As informações revelaram também que a origem da regra de três esteve ancorada em duas ideias antagônicas, em que uma delas defende que a origem provém da China, e a outra afirma que a regra de três surgiu na Índia, sendo desenvolvida por esta civilização nas primeiras eras do cristianismo. No entanto, há consenso com relação ao nome “regra de três” de provável origem indiana.

As informações produzidas revelaram ainda que a regra foi difundida no Ocidente por meio dos Árabes e ficou conhecida com “regra de ouro”, por ser amplamente aplicada nas atividades dos mercadores. Estes também a chamavam de “regra chave dos mercadores”. Cabe ressaltar, que a chegada da regra na Europa só foi possível porque aos matemáticos indianos instruíram os árabes sobre a regra durante o século VIII.

Quanto ao papel da regra de três no âmbito do ensino, as informações revelaram que os artesões e mercadores precisavam conhecer o funcionamento da regra para atuarem em suas atividades, pois a regra era vista na época como uma ferramenta eficiente para os negócios. Mostraram também que a regra de três passou a constar nos currículos de Matemática a partir da década de 30 chegando aos dias atuais, como podemos observar nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental (1998).

O estudo realizado sobre a regra de três nos possibilitou observar o papel dessa técnica milenar que foi utilizada nas mais variadas situações com matemática e o aprimoramento da regra até chegar à forma atual vinculada à proporcionalidade, o que corrobora o quão é importante recorrermos à História da Matemática como recurso pedagógico de ensino, para melhorarmos a nossa prática, como professor e futuro pesquisador.

As informações aqui apresentadas não esgotam o tema regra de três, pois esse conteúdo, apesar de elementar, é de grande utilidade nas situações escolares e cotidianas que envolvam variação proporcional, por isso é necessário que se fomentem pesquisas acerca do ensino da regra de três, de modo a viabilizar a compreensão e a apreensão desse assunto pelos alunos em situações com proporcionalidade, que vem sendo esquecido nas aulas de matemática, por acreditarem, equivocadamente, que a regra de três não oportuniza os discentes a compreenderem as variações proporcionais.

A seguir apresentamos os trabalhos que abordaram a regra de três como temática de pesquisa em contextos de ensino.

3.3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE REGRA DE TRÊS

Nesta subseção apresentamos um levantamento bibliográfico de trabalhos científicos sobre o ensino de regra de três, com o propósito de apresentar as abordagens dos pesquisadores acerca do ensino desse conteúdo, uma vez que o levantamento da “literatura especializada, anotações, leituras e tratamento adequados dos textos selecionados são partes imprescindíveis para o trabalho acadêmico de qualidade [...]” (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 79); além do mais, esses estudos científicos serviram como parâmetros para a elaboração da nossa questão de pesquisa a respeito do ensino da regra de três.

As pesquisas foram feitas no Repositório de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em periódicos de revistas, capítulo de livros e em publicações de eventos científicos. Para tanto, buscamos produções brasileiras dos últimos seis anos, entre 2008 a 2014, por meio das seguintes palavras-chave: ensino de regra de três, regra de três e proporcionalidade.

A sistematização dos estudos bibliográficos sobre a regra de três ocorreu em três categorias, a saber, Estudo Diagnóstico, Estudo Experimental e Estudo Teórico/Investigativo.

Na primeira categoria, Estudo Diagnóstico, busca-se investigar e analisar, por meio de instrumentos, os obstáculos que influenciam no aprendizado do aluno frente a um conteúdo matemático, em especial a regra de três, com o intuito de apontar encaminhamentos que subsidiem na melhoria da aprendizagem desse conteúdo. Já o Estudo Experimental é característico de pesquisas em que o fenômeno em estudo é submetido a uma experimentação e uma intervenção sistemática por parte do pesquisador, em que tais intervenções ocorrem por meio de atividades que subsidiem a apreensão, por parte do aluno, do conteúdo matemático, em particular, o conteúdo da regra de três. E no Estudo Teórico/Investigativo prevalece à investigação sobre estratégias e/ou métodos que viabilizem o ensino da Matemática, no nosso caso o ensino de regra de três.

A seguir trazemos um quadro com os estudos bibliográficos utilizados dispostos nas categorias mencionadas acima.

Quadro 2 – Estudos sobre o ensino de regra de três

Categoria	Título	Local e data de publicação	Tipo de publicação
Estudo Diagnóstico	➢ **Labirintos da compreensão de regras em matemática:** um estudo a partir da regra de três	Universidade Federal do Pará: Belém, 2012.	Dissertação
	➢ **REGRA DE TRÊS:** prática escolar de modelagem matemática	Universidade Federal do Pará: Belém, 2011.	Dissertação
Estudo Experimental	➢ **O ensino de matemática por atividades:** experiência com regra de três	2014	Capítulo de livro
Estudo Teórico/Investigativo	➢ **Pensamento proporcional e regra de três:** estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas	Universidade Tuiuti do Paraná: Curitiba, 2008.	Dissertação
	➢ **Raciocínio proporcional:** estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul: Campo grande, 2010.	Dissertação
	➢ **A regra de três nos currículos ao longo da história**	I Simpósio Educação Matemática em Debate, 2014, Joinville-SC	Artigo
	➢ **Modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação**	Universidade Federal do Pará: Belém, 2013.	Dissertação

Fonte: Pesquisa bibliográfica

A seguir apresentamos os objetivos, a fundamentação teórica e os resultados de cada um dos estudos bibliográficos citados no Quadro 2, que auxiliaram na construção da nossa pesquisa sobre o ensino de regra de três, e da mesma forma serviram de aporte teórico na análise dos resultados alcançados com este estudo.

3.3.1. ESTUDO DIAGNÓSTICO

O trabalho de Meira (2012) teve como objetivo a análise dos procedimentos realizados pelos alunos do ensino fundamental na interpretação e na utilização de regras matemáticas ao resolverem os problemas de regra de três simples e composta e o processo de tratamento da linguagem, em particular, à linguagem matemática, com o intuito de responder a questão norteadora da pesquisa: “Que regras matemáticas os alunos aplicam na resolução de problemas de regra de três?”

A pesquisa de Meira (2012) teve como aporte teórico a Virada Linguística e surgimento da nova concepção de filosofia, a Filosofia da Linguagem, de Gustav Bergmann e também a teoria de Múltiplos Jogos de Linguagem de Wittgenstein.

A referida pesquisa iniciou-se em outubro de 2010, em uma escola de nível Federal da região metropolitana de Belém. Teve um caráter qualitativo e participaram da pesquisa 32 alunos do 7° ano do ensino fundamental e o professor da turma.

Desse total de alunos, a autora selecionou de maneira aleatória 15 alunos para uma entrevista que contou com a participação do docente, na intenção de observar as relações que ocorreram no estudo da regra de três no ambiente de sala de aula.

De acordo com a autora, o levantamento do material empírico para análise ocorreu por meio de testes com regra de três, que foram apresentados aos alunos através de três cenas. A primeira cena ocorreu com a aplicação dos testes sobre regra de três simples, após o professor ministrar o referido conteúdo para os alunos. A segunda cena aconteceu como a anterior, isto é, primeiro a aula e depois o teste com problemas de regra de três composta. A última cena apresentou um teste com problemas de regra de três simples e regra de três composta, com o propósito de verificar se os alunos conseguiriam identificar e resolver os problemas de cada tipo.

Com os dados dos instrumentos de pesquisas, que foram os testes e as duas entrevistas, uma com os alunos e outra com professor, a autora sistematizou sua análise em três seções, a saber, confusão/interpretação equivocada de regras na Matemática; seguimento de algoritmo e interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três, como forma de viabilizar suas apreciações por meio das ideias wittgensteinianas com relação ao uso de regra pelos alunos e também da Matemática em geral.

Para Meira (2012) a pesquisa mostrou que na aprendizagem da Matemática a aplicação de regras pelos alunos ocorre de maneira mecânica, quase sempre sem sentido. Da mesma forma, aconteceu com a utilização dos algoritmos na resolução dos problemas analisados. Com relação a isso a autora, afirmou que

> O amadurecimento dos alunos em relação à regra na matemática, possivelmente acontece quando esses alunos apresentam uma vivência de uso das técnicas de resoluções que contribuem para a certeza do domínio sobre a sua aplicação correta. Desse modo, o professor estará promovendo sua aprendizagem, pois essas ações implicam que os alunos construam significado sobre os conceitos matemáticos. (IBID., p.85)

Por fim, a autora reconhece a importância da regra de três como ferramenta no enfrentamento de situações-problema, além de possibilitar ao aluno a compreensão de modelos e conceitos matemáticos. Assim, uma vez consolidada a teoria e regra na utilização do algoritmo a aprendizagem ocorre de forma significativa.

O trabalho de Silva (2011) teve como objetivo mostrar caminhos que levassem a compreensão do ensino da regra de três de maneira crítica, revelando que os modelos matemáticos são resultados de intenções e interesses de sujeitos culturais em atividades com matemática, por isso, tais modelos estão subordinados a algo que vai além da matemática. O trabalho desse autor trouxe também uma discussão sobre a incerteza na aplicação da proporcionalidade ao resolver problemas de regra de três. Aliado a esse objetivo o autor apresentou a questão norteadora da pesquisa: “*como podemos pensar a modelagem matemática no âmbito do ensino da matemática escolar para evidenciar, ainda que parcialmente, o necessário algo mais, em geral, não evidente no fazer matemático escolar?”*

Quanto aos sujeitos e o lócus da pesquisa, Silva (2011) afirmou que a mesma ocorreu com um grupo de trinta professores que participaram de um curso de formação continuada para professores das séries finais do ensino fundamental implementado pelo IEMCI/UFPA de Rondon do Pará, sendo que alguns desses professores eram oriundos de outros municípios do Estado como Bom Jesus do Tocantins e Abel Figueiredo.

A formação desses professores, de acordo com o autor, aconteceu por meio de encontros presenciais e a distância. No que tange o encontro presencial, os professores cursistas foram submetidos à resolução de uma lista de questões em grupos para, em seguida, socializarem as respostas construídas.

De acordo com Silva (2011) as questões da lista tratavam sobre os assuntos: operações com fração, expressões algébricas e matemática financeira. Aqui cabe relatar, que as questões sobre expressão algébrica foram resolvidas pelos professores cursistas como questões de regra de três simples e composta.

No momento da apresentação das repostas das expressões algébricas, os professores em formação, segundo o autor, assumiam que tais questões eram de regra de três, sem fazerem uma análise prévia da situação, pois o enunciado da questão levava o professor assumir que se tratava de regra de três. Então, aplicava-se o algoritmo da regra de maneira mecânica, tanto para a regra de três simples como para a regra de três composta.

De posse das resoluções dos professores, Silva (2011) afirmou que esses docentes resolveram as questões assumidas como de regra de três sempre do mesmo jeito e por um único método, o das setas. Já a respeito da proporcionalidade, o autor relatou que momento algum as falas e os gestos dos professores cursistas indicaram que havia uma teoria que respaldasse o modo de fazer deles, tampouco, a equação que resultou na solução da questão. Sobre esse fazer dos professores, o autor o considera como caráter técnico, reduzindo a regra de três a problemas característicos, que é aplicada sem razão ou justificativa plausível.

Ainda sobre as resoluções dos professores cursistas, Silva (2011) relatou que entre as questões de expressão algébrica havia uma que não relacionava duas grandezas de maneira proporcional, mas todos os professores resolveram essa questão como se fosse de regra de três, sem fazerem uma análise prévia das quantidades envolvidas para saberem se estavam relacionadas proporcionalmente, ao invés disso, se basearam unicamente no enunciado da questão para assumirem como regra de três e aplicarem a técnica.

Para Silva (2011) o ensino da regra de três não oportuniza a conscientização de que os problemas resolvidos pela regra são de proporcionalidade e também não explica a natureza das relações e nem o modelo matemático resultante, uma vez que a técnica possui seu modo próprio de fazer e pensar, bastando apenas uma análise breve das grandezas para saber se são direta ou inversa e, em seguida, aplica-se a equação. Desse modo a ideia de proporcionalidade não fica evidente no processo de resolução do problema, como ocorreu no fazer dos professores cursistas.

Quanto à relação de proporcionalidade no fazer da regra de três, Silva (2011) recorreu à história da matemática para afirma que a regra de três, em seu percurso histórico, não era utilizada inicialmente coadunada com a proporcionalidade, e qual tal relação só ocorreu, posteriormente, para justificar o fazer da regra no âmbito da matemática. Para o autor, o modo como à regra é apresentada nas escolas, isto é, sem uma discussão e análise da proporcionalidade imersa na situação, é resultado do fazer cultural e histórico do homem diante de situações características consideradas como de regra de três.

Por fim o autor considera que o questionamento que norteou a pesquisa foi respondido parcialmente, haja vista que a regra de três pode ser entendida como prática de modelagem matemática e desse modo pode requerer a compreensão a da proporcionalidade não por meio da verificação empírica, mas como ideia presente no contexto analisado, como acontece em geometria com a semelhança.

3.3.2. ESTUDO EXPERIMENTAL

O trabalho de Sá e Costa (2014) teve como objetivo analisar a viabilidade do ensino de regra de três por meio de atividades, que constavam das seguintes etapas: primeira avaliação diagnóstica, construção das atividades, aplicação das atividades, segunda avaliação diagnóstica e análise dos resultados obtidos.

A pesquisa dos autores foi realizada com uma amostra de 30 alunos da 6ª série do ensino fundamental de uma escola municipal no bairro do Guamá em Belém-PA. Esses alunos responderam um questionário, que revelou, entre outras coisas, que 95% da turma não gostavam de matemática.

Na avaliação diagnóstica de Sá e Costa (2014), foi aplicado um pré-teste com dez questões, sem que os alunos soubessem que tratavam de questões sobre regra de três simples e composta. Esse pré-teste revelou para os autores, que a maioria dos alunos apresentava muita dificuldade em resolver questões acerca do assunto regra de três.

Diante desse cenário, os autores desenvolveram atividades de ensino e de fixação, como sendo a segunda etapa da pesquisa. Tais atividades foram: uma atividade para apresentar o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais, o jogo do galo, uma atividade com problemas de regra de três e o jogo pif-paf das regras de três.

Após a execução dessas atividades, com o propósito de construir e fixar os conhecimentos de grandezas proporcionais e regra de três, os autores aplicaram um pós-testes idêntico ao primeiro, para avaliar a eficiência das atividades de ensino junto aos alunos participantes, o que gerou os resultados apresentados pelos autores no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Comparativo do desempenho nos pré e pós-testes

Questões	Acerto		Erro		Em branco
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pós-teste
A	15	24	13	5	1
B	11	23	17	6	1
C	1	22	27	7	1
D	1	23	27	6	1
E	0	0	28	29	1
F	1	17	27	12	1
G	0	0	28	29	1
H	3	17	25	12	1
I	4	17	24	12	1
J	1	20	27	9	1

Fonte: SÁ; COSTA (2014, p. 111)

De posse dos resultados, as análises dos autores revelaram que:

> - O número de acertos aumentou significativamente na maioria das questões;
> - Ocorreu redução significativa do número de erros na maioria das questões;
> - O número de questões em branco foi reduzido à metade em relação ao pré-teste;
> - Em relação às questões E e G, os erros aumentaram em um ponto após a aplicação das atividades, o que pode ter ocorrido em consequência de ter havido mais de um discente que tentou resolvê-las. (SÁ; COSTA, 2014, p. 111)

Em suas considerações, os autores afirmam que o ensino de matemática por atividades é uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, todavia essa forma de ensinar ainda não faz parte da realidade da sala de aula das escolas.

Para Sá e Costa (2014) a pesquisa mostrou que o ensino da regra de três é viável através do uso de atividades de ensino concomitante com o uso de jogos, pois estes auxiliaram os alunos a superarem as dificuldades na identificação das grandezas com relação à proporcionalidade, ou seja, se as mesmas são direta ou inversamente proporcionais. O que para os autores é a maior causa de fracasso frente aos problemas de regra de três.

3.3.3. ESTUDO TEÓRICO/INVESTIGATIVO

A pesquisa de Silva (2008) teve por objetivo verificar se as estratégias utilizadas pelos alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, proporção simples, indicam a compreensão do conceito de proporcionalidade, com o intuito de responder a problemática de pesquisa: “Na resolução de problemas de proporção, os alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental demonstram a compreensão deste conteúdo por meio das estratégias que utilizam?”.

A motivação da pesquisa pela autora supracitada partiu da premissa que o estudo da proporcionalidade tem sua relevância por ser uma interface entre os vários tópicos importantes da Matemática e de outras disciplinas curriculares.

O trabalho de Silva (2008) esteve ancorado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Essa pesquisa teve um caráter qualitativo e foi direcionada aos alunos da 6ª e 8ª séries do ensino fundamental com faixa etária entre 11 a 15 anos de uma escola pública estadual do município de Curitiba no Estado do Paraná.

A pesquisa de Silva (2008) ocorreu em dois momentos. O primeiro tratou da aplicação de uma investigação escrita (utilização de problemas), onde participaram 72 alunos, sendo 42 da 6ª série e 30 da 8ª série do ensino fundamental, ocorrido em outubro de 2007. O segundo momento, ocorreu em novembro do mesmo ano, consistiu de uma entrevista com 10 alunos de cada uma das séries supracitadas, escolhidos ao acaso do total de alunos que participaram do primeiro momento.

Os problemas que foram utilizados para a investigação escrita estavam distribuídos em 4 tipos, a saber: **1º problema:** Problema de Proporção Direta Unitária Unidade Diferente (multiplicação); **2º problema:** Problema de Proporção

Direta Múltipla Unidade Diferente (divisão cotitiva/partitiva); **3º problema:** Problema de Proporção Direta Não-Múltipla Unidade Diferente; **4º problema:** Problema de Proporção Direta Múltipla e Não-Múltipla, Mesma Unidade. Este por sua vez, estava divido em três subseções:

- ✓ 4.1 A.B. – proporção direta múltipla, quantidades discretas e continuas.
- ✓ 4.2 A.B. – proporção direta múltipla e não-múltipla, quantidades discretas e continuas.
- ✓ 4.2 C. – proporção direta não-múltipla, quantidades continuas.

De posse dos tipos de problema, Silva (2008) caracterizou cinco categorias de resolução de problemas de proporção, com base na observação e comprovação na literatura consultada. Essas categorias foram: **1) Operação Aritmética (multiplicação); 2) Operação Aritmética (Divisão cotitiva/partitiva); 3) Adição Sucessiva de Parcelas; 4) Regra de Três; 5) Fator Proporção.** Tais categorias serviram como parâmetros para analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas citados no parágrafo anterior.

Os resultados da eficácia das estratégias utilizadas pelos alunos das séries consultadas (6ª e 8ª séries) revelaram que na resolução do problema 1, os alunos da 6ª série optaram pela categoria 1, onde alcançaram um percentual de acerto integral de 76,3% (29) e um percentual de acertos parciais de 21% (8). Com relação aos alunos da 8ª série, estes escolheram também a categoria 1 e obtiveram um percentual de acerto integral de 86,3% (19), contra um desempenho parcial de 13,6% (3) na resolução do problema 1.

A autora ressaltou ainda que apenas um aluno da 6ª série optou pela categoria 4 (regra de três), porém não obteve sucesso ao utilizar a mesma na resolução do problema. Já um grupo de três alunos da 8ª série utilizou uma estratégia não mencionada nas categorias acima, todavia os alunos resolveram o problema com eficácia de 100%. Além desses, houve ainda dois alunos da 6ª série e quatro da 8ª série que utilizaram estratégias não identificadas e não conseguiram resolver o problema proposto.

Silva (2008) salientou que ao analisar o êxito dos alunos nos dois grupos pesquisados, foi possível observar que tantos os alunos da 6ª série como os alunos da 8ª série laçaram mão de várias estratégias na resolução dos problemas 2, 3 e 4.2. A.B., enquanto que frente aos problemas 1 e 1.4 A.B. os dois grupos utilizaram uma única estratégia. No caso do problema 4.2 C, prevaleceu o uso de estratégia não prevista, onde utilizaram de estimativas e outras estratégias não registradas na busca da solução do problema.

Ainda sobre o êxito das estratégias utilizadas pelos alunos, a autora observou que os dois grupos pesquisados tiveram sucesso no uso das categorias 1 e 3. Além dessas, a autora relatou que os alunos da 8ª série tiveram êxito integral na utilização da regra de três (categoria 4), todavia os alunos da 6ª série não utilizaram de forma expressiva essa categoria.

Em última análise, a autora afirmou que:

> A análise dos resultados mostrou que houve tentativa dos alunos em buscar estratégias variadas para resolver os problemas. A preferência pelos alunos recaiu sobre a utilização de estratégias próprias, provenientes de conhecimentos acumulados de séries anteriores, embora muitas vezes tolhidos pelas limitações na aritmética necessária para a solução dos problemas, [...] ou ainda, por dificuldades conceituais e algorítmicas. (SILVA, 2008, p. 183)

Com relação às estratégias provenientes de conhecimentos anteriores, a autora relatou que os alunos da 8ª série utilizaram, geralmente, a regra de três na resolução dos problemas propostos, todavia de maneira mecânica.

A respeito disso, Silva (2008) defendeu que o ensino de proporção não deve está atrelado somente ao uso do algoritmo da regra de três. É necessário fazer o aluno pensar modos alternativos de resolução de um problema, amparados em seus conhecimentos prévios e em outros conhecimentos que poderá construir.

Por fim, Silva (2008) acrescentou que o ensino de proporção deve enfatizar o raciocínio proporcional, de forma que o aluno fomente estratégias amparadas em seus conhecimentos adquiridos por meio de situações de sua realidade, pois assim o aluno terá a possibilidade de estabelecer relações entre o que é ensinado na escolar e a realidade em que vive.

O trabalho de Gonçalves (2010) teve como objetivo identificar e analisar as principais estratégias sobre o raciocínio proporcional fomentada por alunos do 7º ano do ensino fundamental na resolução de problemas sobre proporções (direta e inversa) e problemas que não apresentavam relações proporcionais, tendo em vista uma abordagem por meio da oralidade. Para tanto, a autora buscou aporte teórico de sua pesquisa nas Situações Didáticas de Brousseau, e a metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática de Michele Artigue. A pesquisa contou com um grupo de 17 alunos voluntários que não haviam recebido instrução formal sobe proporcionalidade. A investigação desses alunos ocorreu no contraturno do horário regular das aulas.

Para colocar em prática o objetivo da pesquisa, Gonçalves (2010) elaborou cinco sessões com os alunos voluntários que duraram em média 50 minutos cada uma, no intuito de investigar as estratégias aplicadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos. Dessa forma, a 1ª sessão continha somente problemas com grandezas diretamente proporcionais. A 2ª e 3ª sessões apresentavam problemas com grandezas diretamente proporcionais e não proporcionais. Já a quarta sessão continha problemas com grandezas inversamente proporcionais e problemas não proporcionais e, por último, a quinta sessão foi organizada com problemas proporcionais (direto e inverso) e não proporcionais.

Nas análises da autora acerca das estratégias utilizadas pelos alunos colaboradores frente aos problemas propostos da primeira sessão, ela constatou que os discentes entenderam a relação de proporcionalidade direta existente entre as grandezas no problema. A estratégia escalar foi a que prevaleceu na resolução dos cinco problemas que compunham a referida sessão. No entanto, a estratégia funcional foi utilizada para resolver os problemas 3 e 5, e a estratégia da regra de três foi empregada apenas por uma aluna, que aplicou a técnica da regra corretamente, porém de maneira mecânica, o que, segundo a autora, se caracterizou numa falta de compreensão da proporcionalidade.

Com relação à segunda sessão, Gonçalves (2010) enfatizou que os alunos desenvolveram estratégias próprias não convencionais frente aos problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais. Nos problemas em que não continham números múltiplos ou sua identificação não era imediata, os alunos utilizaram da estratégia funcional (redução à unidade) para resolver os problemas. Com isso, a autora constatou que alguns alunos conseguiram desenvolver o raciocínio proporcional por meio das estratégias utilizadas. No entanto, a aluna que usou a regra de três não apresentou a compreensão devida sobre a proporcionalidade. Em última análise, a autora afirmou que alguns alunos não conseguiram, a princípio, distinguir os problemas que apresentavam grandezas proporcionais dos que não apresentavam tais grandezas.

Na terceira sessão, a autora apresentou três problemas e constatou que a estratégia funcional (redução à unidade) foi a mais utilizada para resolver os problemas 1 e 3, e os alunos perceberam as relações proporcionais que havia entre as grandezas. Com isso, autora declarou que houve a compreensão da ideia de proporcionalidade pelos alunos. Com relação ao problema 2, Gonçalves (2010) relatou que os alunos compreenderam que as relações entre as grandezas não eram proporcionais, no entanto eles não aceitaram que tal problema não apresentava resposta, o que ocasionou o erro por parte dos alunos, ao tratarem o problema como grandezas diretamente proporcionais.

Na quarta sessão, Gonçalves (2010) afirmou que todos os problemas da referida sessão foram tratados, a princípio, como problemas de grandezas diretamente proporcionais, pois as estratégias aplicadas pelos alunos indicaram tal tratamento. Todavia, após algumas intervenções e discussões, os alunos entenderam que as relações entre as grandezas eram inversamente proporcionais e, assim, conseguiram, através da estratégia escalar, resolver os problemas propostos. Por fim, a autora concluiu que alguns alunos expressaram a compreensão do raciocínio proporcional, ao proferirem os argumentos e explicações das estratégias por eles adotadas.

Na última rodada de problemas, quinta sessão, a autora salientou que os alunos ao resolverem os problemas 1 e 4 sobre grandezas diretamente proporcionais, eles reempregaram os conhecimentos adquiridos anteriormente. De acordo com a autora, apesar do problema 1 ter ocasionado dúvidas e erros nos alunos, esses não se referiram ao raciocínio proporcional, e sim a operação aritmética da divisão ao aplicarem ao método de redução à unidade.

Para Gonçalves (2010) as estratégias que predominaram na resolução dos problemas citados no parágrafo anterior foram a escalar e a funcional. No problema 4, a estratégia utilizada pelos alunos foi a escalar, talvez, segundo a autora, devido os dados do problema estarem dispostos em tabela e os valores das grandezas de mesma espécie serem múltiplos. Com relação ao problema 2, que apresentava grandezas inversamente proporcionais, a autora conjecturou que os erros na tentativa de resolver o problema podem estar associados ao contrato didático ou falta de compreensão, visto que os alunos tentaram resolver o referido problema como sendo de grandezas diretamente proporcionais. Para a autora, essas dificuldades foram minimizadas com reflexões e reformulação das estratégias, devia a colaboração dos colegas, durante o que a autora chamou de retroações do *meio.*

Sobre a resolução dos problemas 3 e 4, Gonçalves (2010) afirmou que a relação proporcional entre grandezas não foi entendida por alguns alunos, pois estes acharam que a relação proporcional ocorria quando as grandezas aumentavam concomitantemente, sem atentar para a razão proporcional.

Por fim, a autora afirmou que as dúvidas surgidas foram erradicadas pelas intervenções e pela institucionalização de certos conceitos referentes ao assunto estudado.

Em suas considerações, Gonçalves (2010) ressaltou que a pesquisa possibilitou averiguar que as estratégias mobilizadas, pela maioria dos alunos, na resolução dos problemas sobre proporção foram três, a saber, a estratégia escalar, a estratégia funcional e a regra de três. Com relação a esta última, a autora acrescentou que a regra foi utilizada somente na 1ª e na 2ª sessões por uma única aluna que já conhecia a regra. A pesar disso, a autora afirmou que a aluna aplicava a técnica de maneira mecânica, pois não sabia justificar as soluções apresentadas para os problemas.

Acerca dos problemas, Gonçalves (2010) afirmou que a escolha destes contribuiu para que os alunos os resolvessem e expusessem suas estratégias oralmente, visto que seus enunciados eram de fácil compreensão e estavam ligados a temas do cotidiano dos alunos. Dessa forma, segundo a autora, foi possível alcançar os objetivos da pesquisa, por meio da verificação do pensamento qualitativo e quantitativo dos alunos.

O trabalho de Silva Neto (2014) teve por objetivo investigar a História da regra de três ao longo do tempo, a partir da reforma Francisco Campos, década de 30, passando pelo Movimento da Matemática Moderna até os dias atuais. Além disso, o autor procurou discutir se uso da regra de três se mostra indispensável na resolução de problemas de proporcionalidade e quais outras maneiras de resolver tais problemas podem ser utilizadas no ensino fundamental.

A pesquisa também procurou responder alguns questionamentos sobre a relevância da regra no ensino de Matemática, como mostra o trecho a seguir:

> Que lugar a Regra de Três ocupava nos currículos de Matemática durante a vigência da Reforma Campos? E durante o Movimento da Matemática Moderna? E nos Parâmetros Curriculares Nacionais? Quais são as críticas à Regra de Três? Quais são as alternativas para se resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais sem a utilização dessa regra no Ensino Fundamental? Pode-se, de fato, substituir a Regra de Três dos conteúdos

> escolares e utilizá-la apenas como ferramenta auxiliar? (SILVA NETO, 2014, p. 106)

A metodologia empregada pelo autor para alcançar o objetivo da pesquisa e responder os questionamentos levantados foi dividida em três etapas, descritas a seguir:

> a) elaborar um texto levantando o lugar que a Regra de Três ocupou e ainda ocupa nos currículos escolares; b) pesquisar em livros da época da Reforma Campos, do MMM e atuais, de que maneira o tópico "Razões e Proporções" é desenvolvido; c) fazer pesquisa em livros didáticos atuais, visando ao levantamento de dados que mostrem se a Regra de Três ainda é ensinada e se é tida como única forma de resolução de problemas de razão e proporção. (SILVA NETO, 2014, p. 107)

A pesquisa de Silva Neto (2014) mostrou que a regra de três esteve presente no documento de 1931, chamado de Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário. Neste documento, segundo o autor apoiado em Alvarez (2004), a proporcionalidade deveria ser ensinada na segunda série no tópico II conhecido como 'Aritmética e Álgebra'.

Outro documento publicado em 1952 é a Portaria de n° 1045 de dezembro de 1951. Esse documento apresentava os planos de desenvolvimento dos programas do ensino secundário e as instruções metodológicas. Nele a regra de três era recomendada a ser ensinada para alunos da terceira série ginasial.

A pesquisa apontou também que durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil na década de 60, ocorreu a segunda modernização do ensino de Matemática por Osvaldo Sangiorgi. Este reorganizou o ensino de Matemática por meio da proposta, 'Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática'. O autor relata que nos vinte e quatro itens da nova proposta, não aparece o termo regra de três. No lugar desta, constam razões e proporções e aplicações.

O autor destaca também que nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), na parte de conteúdos propostos para o ensino de Matemática para o quarto ciclo e no tópico 'Números e Operações', sugerem que a resolução de problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais seja por meio de estratégias variadas, inclusive pela regra de três. Frente a isso, o autor mencionou as três propostas de Lima (2005) para resolver os problemas de regra de três, que são: método direto, redução à unidade e proporção.

Em suas considerações o autor defende que os problemas de proporcionalidade sejam resolvidos sem o uso de ‘receituários prontos e mágicos’, pois estes impendem que o aluno desenvolva sua capacidade crítica ao analisar o problema. Dessa forma, o autor é favorável que a resolução de problemas de proporcionalidade seja por meio de função e não pela utilização da regra de três. Assim, segundo Silva Neto (2014), o professor pode inicializar seus alunos no conceito de função e ensiná-los a resolver os problemas de proporcionalidade sem memorização de fórmulas.

Por fim, o autor concluiu que o uso de função no sétimo ano do ensino fundamental é viável para a resolução dos problemas de proporcionalidade. Com isso, a regra de três poderia ser esquecida ou ocupar um papel secundário no livro didático, isto é, como ferramenta de auxílio para outros assuntos.

O trabalho de Sodré (2013) buscou investigar a problemática “*Que contribuições à modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação possibilita para a matemática escolar?”* e aliado a essa questão de pesquisa o autor apresentou o seguinte objetivo: “*analisar contribuições da modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação para a matemática escolar.”*

O estudo desse autor teve como base a teoria da modelagem matemática crítica de acordo com Burgermeister (2007; 2010) e a metodologia de pesquisa utilizada foi de caráter qualitativo de natureza participante. Os sujeitos da pesquisa foram 43 alunos do 1º ano do ensino médio, os quais foram submetidos à análise de dois modelos matemáticos para uma dada questão numa abordagem sobre a luz da modelagem matemática crítica. Desse modo, os alunos tinham que julgar qual dos dois modelos apresentados era o mais adequado para o contexto do problema, e tal julgamento deveria apresentar argumentos matemáticos oriundo dos saberes prévios dos alunos. As produções dos alunos seriam analisadas pelo esquema Herbatiano de Burgemeister (2007; 2010), o qual, segundo o autor, avalia modelos matemáticos para uma questão, com a intenção de apontar o modelo mais aceitável ao contexto do problema.

A coleta de dados da pesquisa de Sodré (2013) ocorreu durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática crítica, que se configurou em três momentos, a saber, o primeiro consistiu na formação dos grupos de alunos; o segundo tratou da apresentação da tarefa (questão), bem como dos dois modelos matemáticos a serem julgados pelos alunos como o mais adequado para a questão posta e o terceiro momento foi marcado pela socialização das produções dos alunos. Essas informações produzidas durante o desenvolvimento da atividade de modelagem bem como os registros fotográficos serviram de material para a análise da pesquisa apoiada no esquema Herbartiano.

Quanto a análises das produções dos alunos sobre os dois modelos apresentados, aditivo e linear, aconteceram com base nas tomadas de posição dos grupos estabelecidos. Desse modo, os grupos I, V, VI e VII julgaram o modelo aditivo e os grupos II, III e IV o modelo linear para a situação posta. Com relação aos quatro primeiros grupos, as respostas construídas durante a investigação revelaram que esses grupos julgaram à adequação ou não do modelo aditivo com base na utilização da regra de três. O que para o autor foi imprescindível para justificar matematicamente a incompatibilidade desse modelo com a situação apresentada, pois o mesmo era viável apenas para uma única situação, algo que foi constato pelos grupos. Entretanto o grupo V admitiu que o modelo mencionado, aditivo, era viável para a questão apresentada, embora esse grupo tenha também recorrido à regra de três. Sobre esse fato, o autor destaca que as decisões de um grupo podem ser determinadas, às vezes, pelo emocional aliado a praticidade do modelo ao invés do racional. Já com relação à tomada de posição dos grupos I, VI e VII Sodré (2013) destaca que esses recorreram à regra de três para justificar seus argumentos perante a investigação do modelo.

Quanto aos três outros grupos, II, III, IV, o autor destaca a tomada de posição de cada um deles com relação ao julgamento de adequação do modelo linear para a questão posta. Nesse sentido, o grupo II utilizou também a regra de três para qualificar a funcionalidade do modelo mencionado, apresentando argumentos consistentes embasados na regra. O autor defendeu que o uso dessa ferramenta matemática pelos alunos para respaldar as alegações levantadas na situação em estudo é devido à facilidade e praticidade da regra de três. As atitudes dos alunos, de acordo com Sodré (2013), indicaram traços de investigação na atividade escolar, indicando, ainda que parcial, o fomento da competência critico reflexiva como anseia a modelagem matemática crítica.

Com relação ao posicionamento do grupo III sobre o modelo linear, as repostas desses alunos tenderam para o outro modelo, o aditivo, como válido para a questão analisada. Para Sodré (2013) tal atitude sofreu influencia do grupo V, e também da agilidade e segurança oferecidas pelo modelo aditivo.

Diferentemente dessa tomada de posição do grupo III, o grupo IV defendeu o uso do modelo linear para a questão posta, justificando sua funcionalidade por meio da regra de três.

Nesse cenário, onde a regra de três foi utilizada como justificativa para mostrar a funcionalidade ou não dos modelos aditivo e linear junto à questão analisada, Sodré (2013) tem a afirmar que:

> [...] a regra de três articulada para justificar a 'adequação' ou não dos modelos para a questão em debate predominou com mais intensidade no posicionamento dos grupos, exercendo papel significativo no confronto de ideias e estratégias articuladas para a produção da resposta. (SODRÉ, 2013, p. 57, grifo do autor)

Para o autor do excerto, a atividade desenvolvida oportunizou os alunos pesquisados a construírem conhecimentos e também a revisitarem saberes como forma de justificar a validade ou não dos modelos apresentados para a questão em debate. Além do mais, possibilitou os discentes a exercitarem a capacidade de argumentação na defesa de ideias construídas durante atividade com matemática, atitude que, quase sempre, é inibida nos moldes tradicionais de ensino. Nesse pensar, Sodré (2013) defende que a modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação auxilia no trabalho em equipe e na utilização de diferentes conhecimentos matemáticos para julgarem a adequação ou não de modelos para uma determinada situação em análise.

Ainda sobre a relevância da regra de três na atividade com modelagem matemática, o autor afirmou que a regra teve um papel fundamental nas argumentações dos alunos durante os debates tanto no decorrer da atividade como da mesma forma na fase de socialização das respostas, em que foram postos em juízo os modelos aditivo e linear para a questão em análise.

Por fim, o autor afirmou que a pesquisa mostrou a eficiência da prática com modelagem matemática no contexto escolar, o que respondeu, ainda que parcialmente, o questionamento de pesquisa que buscou investigar, isto é, *"Que contribuições à matemática crítica como atividade de ensino e investigação possibilita para a matemática escolar?*

3.4. ASPECTOS MATEMÉTICOS DA REGRA DE TRÊS

Em nossa experiência como professor de escola pública estadual há nove anos, observamos que as dificuldades dos alunos na resolução de problemas de regra de três estavam, quase sempre, relacionadas à falta de compreensão dos enunciados dos problemas, pouca ou nenhuma habilidade para analisar as relações proporcionais entre as grandezas e, às vezes, por não possuírem domínio matemático suficiente das operações aritméticas exigidas na aplicação da regra.

A técnica da regra de três que aparenta ser um processo simples, requer, no entanto, a aquisição de um conjunto de conhecimentos matemáticos prévios que vão além de efetuar operações aritméticas de multiplicação e divisão, como, por exemplo, conhecimentos sobre fração equivalente, operação com fração, equação do 1° grau, razão, proporção, propriedades da proporção (simples e composta) e os conceitos das relações proporcionais (direta e inversa) entre grandezas. Só de posse desse conjunto de conhecimentos, pressupomos ser possível de fato aprender aplicar a regra de três de forma consciente e eficiente em contextos com proporcionalidade simples e composta.

Diante do exposto, trazemos um esquema que descreve de maneira sucinta os conhecimentos que julgamos necessários para aplicar a regra de três em situações com proporcionalidade simples e composta, mencionados anteriormente. Em seguida, apresentamos alguns desses aspectos matemáticos que fundamentam e tornam a aplicação da regra de três exequível, e também cinco métodos de resolução dessa regra que podem ser aplicados tanto para a regra de três simples como para a regra de três composta.

Os fundamentos teóricos matemáticos supracitados sobre a regra de três estão conforme as ideias de Lima et al. (2010; 2013) e Marcondes (1969), já os métodos de resolução da regra seguem de acordo com Fragoso (1999).

3.4.1. CONHECIMENTOS PRÉVIOS PARA AS REGRAS DE TRÊS

Esquema 1− Conhecimentos prévios para as regras de três

Fonte: Pesquisa bibliográfica

Esse esquema traz um panorama sobre os conhecimentos que os alunos devem possuir antes de estudar a técnica da regra de três. É uma interpretação elementar, que tem o propósito apenas de ilustrar alguns dos saberes necessários para o aprendizado das regras; no entanto, pode ocorrer o acréscimo de outros saberes nesse esquema didático conforme o parecer do professor.

A nossa intenção com esse esquema, cabe ressaltar, é apenas enfatizar alguns dos conhecimentos que julgamos necessários para que o ensino e aprendizagem da regra ocorram de maneia eficaz, tornando a utilização da mesma para o aluno inteligível e consciente, evitando desse modo um ensino baseado na memorização mecânica e sem sentido da regra de três, que a transforma numa ferramenta matemática ineficiente para resolver problemas com grandezas proporcionais tanto em contextos escolares como não escolares ligados a realidade do aluno.

Doravante, trazemos os fundamentos teóricos matemáticos, que sustentam a funcionalidade da rega de três coaduna com a fundamentação matemática da proporcionalidade entre duas ou mais grandezas.

3.4.2. GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

A ideia de proporcionalidade remete à relação entre grandezas, essa relação pode ser direta ou inversa entre duas ou mais dessas quantidades. Sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas, apresentamos adiante a definição de Marcondes (1969, p. 304)

Definição 1: Duas grandezas denominam-se diretamente proporcionais, quando tornando um valor qualquer de uma delas um certo número de vezes maior (ou menor), o valor correspondente da outra torna-se maior (ou menor) o mesmo número de vezes, respectivamente.

Para esse autor a relação proporcional direta entre duas grandezas também acontece quando a razão de dois valores quaisquer de uma delas é exatamente igual à razão dos respectivos valores da outra grandeza.

A relação de proporcionalidade direta é perceptível em muitas situações do cotidiano, onde uma grandeza se corresponde com outra grandeza, de forma que para cada valor correspondente da primeira existe um valor determinado para a outra, isto é, se uma aumenta a outra também aumenta, e se aquela reduz essa também fica reduzida sempre na mesma razão. Sobre esse fato inerente as grandezas diretamente proporcionais, apresentamos a seguir um exemplo extraído da obra de Fragoso (1999, p. 20).

Exemplo 01

Considere o comprimento de uma peça de tecido e o seu custo. Suponha que o metro desse tecido custe R$ 12,00. Nestas condições, tem-se

Comprimento (m)	Custo (R$)
1	12,00
2	24,00
3	36,00
4	48,00

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 20)

Na maneira como as grandezas estão relacionadas na tabela acima, é fácil ver que ao dobrar, triplicar, quadriplicar o valor da grandeza comprimento o mesmo ocorre com a grandeza custo, e caso o comprimento fosse reduzido à metade, à terça parte e à quarta parte, o custo também se reduziria na mesma proporção, e vice-versa, isso caracteriza uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas comprimento e custo.

De posse disso, a razão entre as grandezas comprimento e custo vai ser sempre igual a uma constante diferente de zero, a qual é chamada de constante de proporcionalidade, geralmente representada pela letra **k**.

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{24} = \frac{3}{36} = \frac{4}{48} = ... = k.$$

A relação proporcional direta entre duas grandezas está sustentada por uma relação funcional entre essas quantidades, de tal modo que cada grandeza exerce um papel definido nessa relação, ou seja, temos uma grandeza que é dependente da outra grandeza considerada independente. Sobre essa forma de pensar sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas, trazemos adiante a definição de Lima et al. (2010, p. 2).

Definição 2: Duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor de x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Essa ideia também se aplica quando reduzimos o valor de x à metade, à terça parte, à quarta parte etc., o valor de y também se reduz conjuntamente na mesma proporção, isto é, à metade, à terça parte, à quarta parte etc. Nesse pensar, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma proporcionalidade.

Para Lima et al. (2010, p. 5-6) a proporcionalidade numérica é uma função da forma $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que goza das seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, desse modo temos que para todo $x < x'$ implica sempre que $f(x) < f(x')$ para quaisquer que sejam os valores de x, x' $\in \mathbb{R}^+$.

2) Quando o valor de x for multiplicado por um número natural n, o valor corresponde em y = f (x) também fica multiplicado por esse n, isto é, $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Sobre o valor de n na segunda propriedade, de acordo com os autores citados, não se limita ao conjunto $\mathbb{N}$, mas pode assumir qualquer valor real positivo. Essa afirmação é embasada no teorema fundamental da proporcionalidade mencionado e demostrado a seguir conforme Lima et al. (2010, p. 6-15).

3.4.3. TEOREMA FUDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para quaisquer x e c em $\mathbb{R}^+$.

Demonstração

Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função com as seguintes propriedades:

1) $x < x' \rightarrow f(x) < f(x')$;

2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$. Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

A priori, considera-se que todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com m, $n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n.rx) = f(m.x) = m \cdot f(x),$$

por (2), logo $f(rx) = \frac{m}{n}.f(x) = r.f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c.f(x)$ é válida quando c é racional. Suponha-se, por absurdo, que exista c > 0 irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$. Considerando o primeiro caso, temos então $\frac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r.f(x) < c.f(x)$. Como r é racional, vale $r.f(x) = f(rx)$. Assim podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c.f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como r < c, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade (1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c.f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c.f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(cx) = c.f(x)$ para quaisquer c, x ∈ $\mathbb{R}^+$.

Acerca do segundo caso, $f(cx) > c.f(x)$, nos propomos a demonstrar essa inverdade admitindo que exista um racional r aproximado de c, de tal sorte que $r > c$ e seja menor que $\frac{f(cx)}{f(x)}$. Com isso temos: $c < r < \frac{f(cx)}{f(x)}$.

Ao multiplicarmos as desigualdades por $f(x)$, as mesmas podem ser escritas da seguinte forma: $c.f(x) < r.f(x) < f(cx)$. Como dito anteriormente, a igualdade $r.f(x) = f(rx)$ é válida por r ser racional. Então temos que $c.f(x) < f(rx) < f(cx)$. De posse disso, vamos considerar para análise a desigualdade $f(rx) < f(cx)$.

Anteriormente, admitimos que $r > c$, então é verdade que $rx > cx$. Isso implica dizer também que $f(rx) > f(cx)$ e não $f(rx) < f(cx)$, como aparece na desigualdade apresentada no parágrafo anterior. Essa contradição garante que não é verdade que $f(cx) > c.f(x)$. Assim, de acordo com os autores, é verdade que $f(cx) = c.f(x)$ para quaisquer c, x ∈ $\mathbb{R}^+$.

Ainda sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade decorre o corolário a seguir e sua demonstração conforme em Lima et al. (2010).

> **Corolário:** Se f: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então tem-se, para todo $x > 0$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$.
> Com efeito pelo Teorema Fundamental[15] para quaisquer x, c ∈ $\mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x.f(c) = f(c).x$. Em particular, tomando c = 1, obtemos $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$. (LIMA et al., 2010, p. 6)

Nesse contexto onde a relação proporcional direta é entendida como uma relação funcional entre duas quantidades reais e positivas, apresentamos adiante essa relação como um caso particular da função linear de acordo com Lima et al. (2013), pois restringe os valores dessa função a valores reais estritamente positivos.

15 Os autores se referem ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

> Uma função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde a $\in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma função linear. Quando **a** > 0, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax, logo define, por restrição, uma proporcionalidade f: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ [...], **toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear** a $\mathbb{R}^+$. O coeficiente **a** chama-se o fator de proporcionalidade. (LIMA et al., 2010, p. 6-7, grifo nosso)

Para os autores do excerto se f: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ representa uma proporcionalidade, então, para todo x_1 e x_2 com $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, temos a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, cujo resultado das razões é o fator de proporcionalidade **a**, com isso a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ é uma proporção.

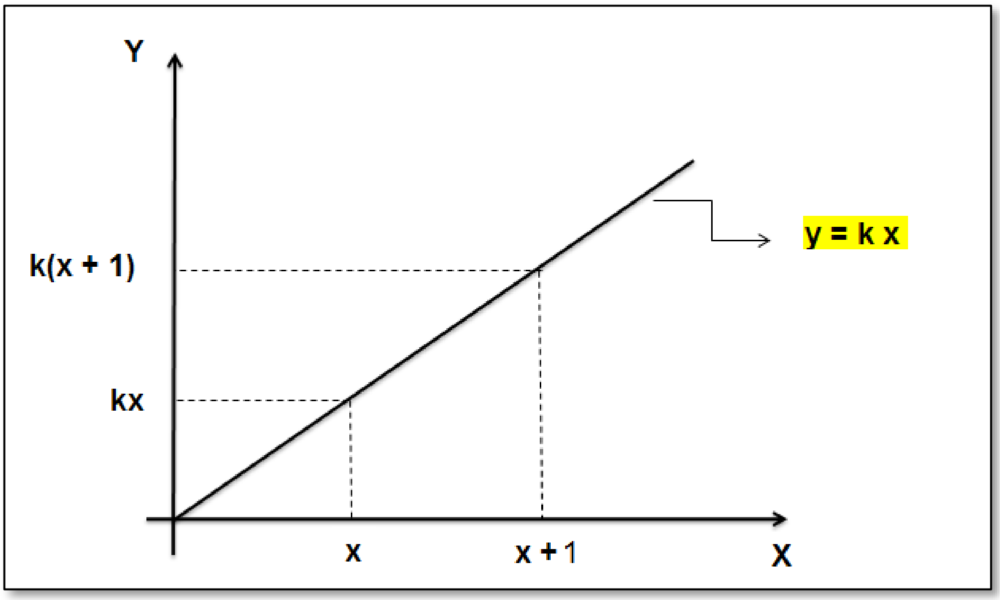
A ideia de proporção também está associada à utilização de uma técnica conhecida como regra de três, que, de acordo com Lima et al (2010, p. 7), é todo problema que busca determinar o quarto elemento de três elementos conhecidos na (x_1, y_1, x_2, y_2). Geralmente, essa técnica pode ser resolvida por duas maneiras, segundo os autores. Uma delas é por meio da proporção, quando conhecemos três dos números dessa proporção, x_1, y_1, x_2, e pretendemos achar o quarto elemento, y_2. Assim, obtemos a igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$, e, seguida, devemos isolar o termo desconhecido, $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$, para resolver o problema via a regra de três.

A outra maneira de resolver a regra de três, de acordo com os autores supracitados, é por meio da redução à unidade. Este parte da seguinte ideia: sendo f (x_1) = y_1, temos $ax_1 = y_1$, e mais, $a = \frac{y_1}{x_1}$. Seguindo esse raciocínio, vamos encontrar o valor do termo desconhecido, y_2, que falta na proporção $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Com isso temos que f ($x_2$) = y_2, e ainda $ax_2 = y_2$. Como se trata de uma relação proporcional, o valor de **a** é o mesmo, então é válido escrever $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$. Aqui cabe ressaltar que o nome redução à unidade é devido ao fato de que f (1) = a (constante de proporcionalidade) quando o valor de x = 1.

Sobre essas duas maneiras de resolver a regra de três, falaremos com mais detalhes na sessão adiante que trata dos métodos de resolução dessa regra.

De posse do que foi mostrado sobre a proporcionalidade como um caso particular da função linear definida para valores reais estritamente positivos, é necessário mostramos a representação dessa ideia por meio de um gráfico. Para tanto, consideramos y uma grandeza diretamente proporcional à grandeza x, com isso temos, conforme a definição mostrada anteriormente da função linear, y = kx, com x e $y \in \mathbb{R}^+$. Logo, o gráfico desse modelo matemático é uma reta que passa pela origem dos eixos cartesianos, e se encontra no primeiro quadrante, conforme é mostrado a seguir.

Gráfico 1− Proporcionalidade direta



Fonte: Pesquisa bibliográfica

Com base no comportamento do gráfico acima, podemos observar que para qualquer valor que se tome no eixo X com o valor corresponde em Y, temos que a razão entre esses valores é sempre igual a k, pois este é considerado a constante de proporcionalidade; desse modo, a relação entre os valores mencionados é uma relação diretamente proporcional.

A proporcionalidade é considerada uma das mais antigas noções Matemática e com grande aplicação em áreas como a Geometria, Física e Astronomia, bem como em atividades do cotidiano. O que faz da proporcionalidade um tema relevante para o ensino. Além do mais, a ideia de proporcionalidade se configura em um modelo matemático de fácil representação por meio das equações $y = k.x$ e $y = \frac{k}{x}$, quando se trata de duas variáveis. No caso de mais de duas variáveis, a proporcionalidade pode ser representada por equações do tipo: $y = k.\frac{x.y}{u.v.w}$. (LIMA, 1991, p. 139) A respeito desta última, abordaremos com mais detalhes na seção sobre grandezas diretamente ou inversamente proporcional a várias outras. A seguir apresentamos o conceito de grandezas inversamente proporcionais e a abordagem matemática que fundamenta esse conhecimento.

3.4.4. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

A relação de proporcionalidade inversa também está presente em situações do cotidiano, e ocorre quando duas quantidades variam proporcionalmente de maneira invertida, isto é, quando uma grandeza aumenta a outra reduz na mesma quantidade por meio das operações de multiplicação e divisão, respectivamente. A formalização dessa ideia é posta a seguir conforme Marcondes (1969, p. 305).

Definição 1: Duas grandezas são inversamente proporcionais, quando, tornando-se o valor de uma delas um certo número de vezes maior (ou menor), o valor correspondente da outra tornar-se-á o mesmo número de vezes menor (ou maior) [...]. Se duas grandezas são inversamente proporcionais, a razão de dois valores quaisquer de uma delas é igual à razão inversa dos valores correspondentes da outra.

Para representar a definição acima, tomamos como exemplo a situação abaixo extraída da obra do autor supracitado.

Exemplo 03

Comparando as grandezas velocidade de um automóvel e o tempo que ele gasta para percorrer uma distância de 120 km, tem-se:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	2
30	4
20	6
15	8

Fonte: MARCONDES, loc. cit.

Na relação inversa entre as grandezas velocidade e tempo, é fácil verificarmos que ao reduzir o valor da velocidade pela metade, o valor da grandeza tempo fica multiplicado por dois, e quanto reduzidos à terça parte o valor da velocidade, a grandeza tempo fica multiplicada por três, e assim sucessivamente. Isso caracteriza uma relação inversamente proporcional entre as grandezas velocidade e tempo.

Com isso a razão entre os valores da grandeza velocidade vai ser igual à razão inversa dos valores da grandeza tempo.

$$\frac{60}{30} = \frac{4}{2}.$$

E mais, os produtos entre os valores das grandezas velocidade e tempo são sempre iguais a uma constante diferente de zero, quando as grandezas são inversamente proporcionais, a essa constante chama-se de constante de proporcionalidade.

$$60 \times 2 = 30 \times 4 = 20 \times 6 = 15 \times 8 = 10 \times 12 = \ldots = k.$$

Essa igualdade também pode ser escrita como

$$\frac{60}{\frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{1}{6}} = \frac{15}{\frac{1}{8}} = \frac{10}{\frac{1}{12}} = \ldots = k\ .$$

Outra forma de apresentar a ideia da relação proporcional inversa entre duas quantidades é por meio da representação funcional, onde as grandezas assumem papeis de variáveis, isto é, variável independente (x) e dependente (y), conforme apresentam Lima et al. (2013, p. 15-16) adiante.

Definição 2: Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando

1) As grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Escreve-se então $x \mapsto y$ e diz-se que y é função de x. Costuma-se também escrever $y = f(x)$.

2) Quanto maior for x menor será y. Simbolicamente: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y' < y$. Ou ainda: se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, tem-se a implicação $x < x' \rightarrow f(x') < f(x)$.

3) Se y_0 é o valor de y que corresponde ao valor x_0 de x e c é qualquer número, então ao valor cx_0 corresponde $\frac{1}{c}y_0$. Ou seja: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto \frac{1}{c}y_0$. Na notação funcional: $f(cx) = \frac{1}{c}.f(x)$.

Os autores fazem ainda uma observação com relação à validade do item (3) da definição acima, afirmando que basta considerar o número c como inteiro, isto é, se a correspondência $x \mapsto y$, sendo y = f(x), cumprir as condições apresentadas nos itens (1) e (2) e, além disso, se for verdade que $f(nx) = \frac{1}{n}.f(x)$ quando n for inteiro, então valerá $f(cx) = \frac{1}{c}.f(x)$, tanto para c sendo um número inteiro ou não. Aqui cabe ressaltar, que esse fato é garantido pelo teorema fundamental da proporcionalidade, demonstrado anteriormente, onde o número c assume valores reais positivos.

Ainda acerca da proporcionalidade inversa entre duas grandezas, Lima et al. (2013, p. 17) consideram que se $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade inversa e k é o valor de y que corresponde a $x = 1$, isto é, $1 \mapsto k$, então o valor de y que corresponde a $x = x\,.\,1$ *é* $\frac{1}{x}\,.\,k = \frac{k}{x}$.

Em notação funcional, o exposto acima, quando y (y = f(x)) for inversamente proporcional a x, pode ser escrito como:

$$f(x) = f(x.1) = \frac{1}{x}.\,f(1) = \frac{1}{x}\,.\,k = \frac{k}{x}\,.$$

Em outras palavras, se y for inversamente proporcional a x, existirá uma constante k, conhecida como fator de proporcionalidade, de forma que $y = \frac{k}{x}$ ou $y.x = k$, isso implica dizer que na relação inversa o produto do valor de x pelo valor de y é sempre constante. Além do mais, a igualdade $y = \frac{k}{x} = k.\left(\frac{1}{x}\right)$ quer dizer também que y é inversamente proporcional a x se, e somente se, y for diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$. (LIMA et al., 2013 p. 17)

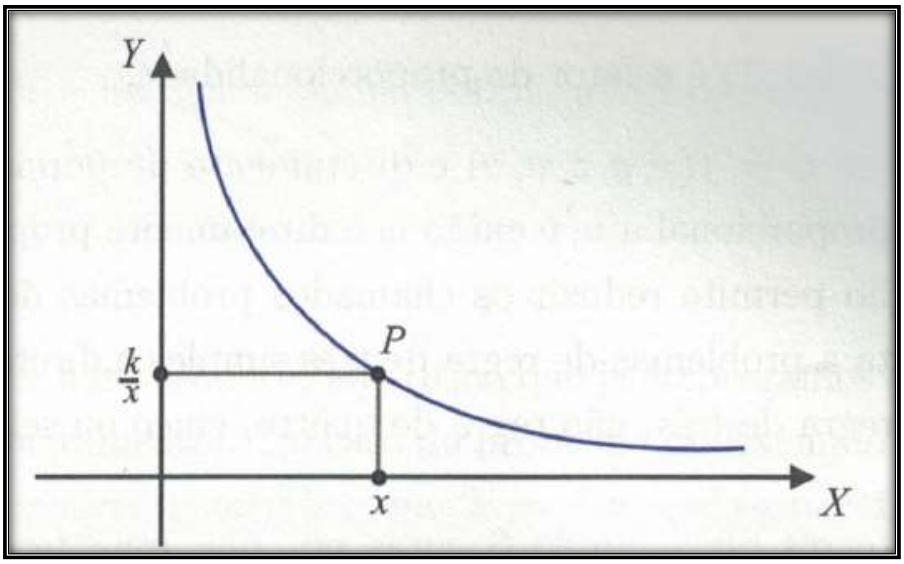
Para esses autores, como há na proporcionalidade direta a regra de três, o mesmo acontece com a proporcionalidade inversa, onde teremos a regra de três inversa. Nesta há uma grandeza y inversamente proporcional à grandeza x, e tendo os valores particulares x' e x'' de x, os quais estão relacionados, respectivamente, com os valores correspondentes de y, y' e y'', com isso temos:

$$y' = \frac{k}{x'} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{k}{x''}, \ \text{portanto} \ \frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}.$$

Na regra de três inversa, conhecidos três dos valores x', x'', y', y'', encontra-se o termo desconhecido por meio da proporção $\frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}$.

Assim, de acordo com Lima et al. (2013, p. 18), se y é inversamente proporcional a x então $y = \frac{k}{x}$, e essa relação entre x e y é representada graficamente pela curva denominada de hipérbole, determinada pelos pontos de $P = (x, \frac{k}{x})$, com $x > 0$.

Gráfico 2 − Grandezas inversamente proporcionais



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 19)

Na regra de três simples, tanto direta como inversa, usa-se apenas a propriedade fundamental da proporção ou propriedade da igualdade de frações para encontrar o termo desconhecido. Nos problemas em que aparecem mais de duas espécies de grandeza, conhecidos como regra de três composta, a propriedade supracitada não é suficiente para resolução desses problemas. Desse modo, é necessário conhecermos a definição de proporcionalidade composta e sua propriedade que são apresentados a seguir.

3.4.5. PROPORCIONALIDADE COMPOSTA

Os contextos que relacionam mais de duas grandezas de modo proporcional são considerados de proporcionalidade composta, o que implica numa relação de dependência entre essas grandezas, conforme é mostrado a seguir na definição de Marcondes (1969, p. 306).

Definição: Uma grandeza composta é proporcional às grandezas das quais ela deriva quando é proporcional, separadamente, a cada uma delas, permanecendo constantes as demais.

Essa definição é amparada pela propriedade das grandezas compostas descrita adiante conforme o autor supracitado.

Propriedade: *se uma grandeza é proporcional a várias outras, existe uma proporcionalidade entre a medida dessa grandeza e o produto dos valores correspondentes das medidas das outras. (ibid., p. 307)*

A definição supracitada sempre se aplica no enfrentamento de problemas considerados de regra de três composta, onde se relacionam três ou mais espécies de grandezas, em que se deseja determinar o valor desconhecido de uma delas.

Uma representação acerca da proporcionalidade composta é apresentada por Marcondes (1969, p. 307-308), que utilizou um contexto geométrico, para relacionar proporcionalmente as dimensões de retângulos com os valores respectivos de suas áreas, como apresentamos a seguir por meio do exemplo:

Exemplo 4

Considere três retângulos com as seguintes dimensões:

Altura	Base	Área
a	B	S
a'	b'	S’
a	b'	S’’

Fonte: MARCONDES (1969, p. 307)

Diante do exposto, é fácil ver que o primeiro e o terceiro retângulos têm a mesma altura, logo a razão entre as áreas é representada da seguinte forma:

$$\frac{S}{S''} = \frac{a \times b}{a \times b'} \rightarrow \frac{S}{S''} = \frac{b}{b'} \qquad (1)$$

Como o segundo e o terceiro retângulos têm a mesma base, contados de cima para baixo, a razão entre suas áreas pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{S''}{S'} = \frac{a \times b'}{a' \times b'} \rightarrow \frac{S''}{S'} = \frac{a}{a'} . \qquad (2)$$

Agora, ao multiplicarmos as proporções (1) e (2) termo a termo, obtemos:

$$\frac{S}{S''} \times \frac{S''}{S'} = \frac{b}{b'} \times \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{a \times b}{a' \times b'} .$$

Alterando-se os meios da igualdade, temos:

$$\frac{S}{a \times b} = \frac{S'}{a' \times b'} .$$

Dessa forma, ao adotarmos outros retângulos com dimensões a'', b'' e a''', b''', etc. obtemos as igualdades:

$$\frac{A}{a \times b} = \frac{A'}{a' \times b'} = \frac{A''}{a'' \times b''} = \frac{A'''}{a''' \times b'''} = ...$$

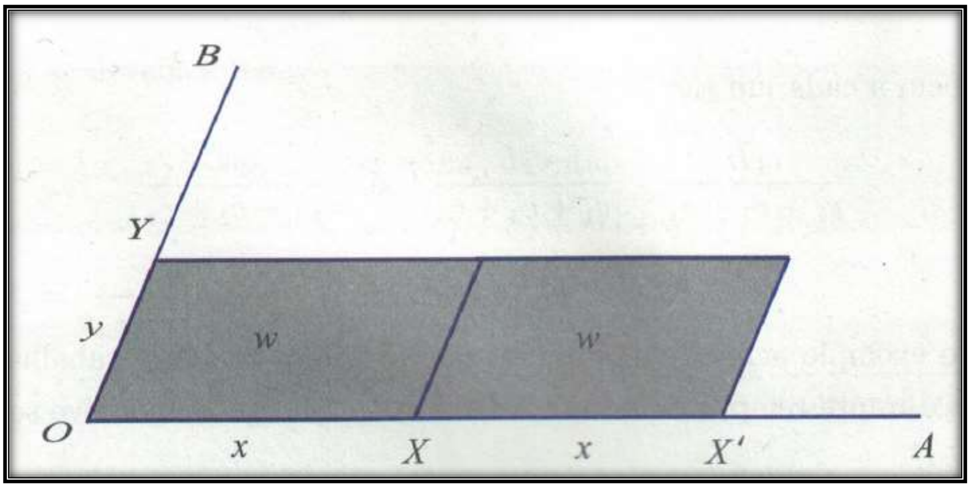
Logo, as áreas dos retângulos são diretamente proporcionais aos produtos de suas dimensões.

Ainda num contexto geométrico, Lima et al. (2013, p. 11-14) abordam a proporcionalidade composta via ao tratamento de função, por meio das relações entre as dimensões de um paralelogramo com sua área e as dimensões de um paralelepípedo com seu volume. Essas relações ocorrem de forma diretamente proporcionais, como são mostradas a seguir.

3.4.6. GRANDEZA DIRETAMENTE PROPORCIONAL A VÁRIAS OUTRAS

Na figura a seguir, de acordo com Lima et al. (2013, p. 11-12), há duas semirretas AO e OB e sobre elas, nesta ordem, toma-se os segmentos OX, cujo comprimento é x, e OY, de comprimento y. Essas medidas determinam um paralelogramo, cuja área é representada por w. Com isso, w é função de x e y, ou seja, w = f(x, y). De posse disso, se mantivermos Y fixo e tomarmos OX de comprimento 2x, obtemos um paralelogramo de área 2w, conforme a Figura 1.

Figura 1 − Proporcionalidade composta no paralelogramo



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 12)

Com isso, temos $f(2x, y) = 2f(x, y)$. Logo, a mesma observação garante se n for qualquer número natural então $f(nx, y) = n.f(x, y)$. Isto significa que, mantendo y fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a x. Da mesma forma podemos ter $f(x, ny) = n.f(x, y)$, ou seja: mantendo x fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a y.

Os autores afirmam ainda que, de acordo com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, é válida a igualdade $f(cx, y) = c.f(x, y)$ e $f(x, dy) = d.f(x, y)$ para quaisquer que sejam os números c, d inteiros ou não. Então segue que:

$$w = f(x, y) = f(x.1, y.1) = x.f(1, y.1) = x.y.f(1, 1) = k.\,x.y, \text{ onde } k = f(1, 1).$$

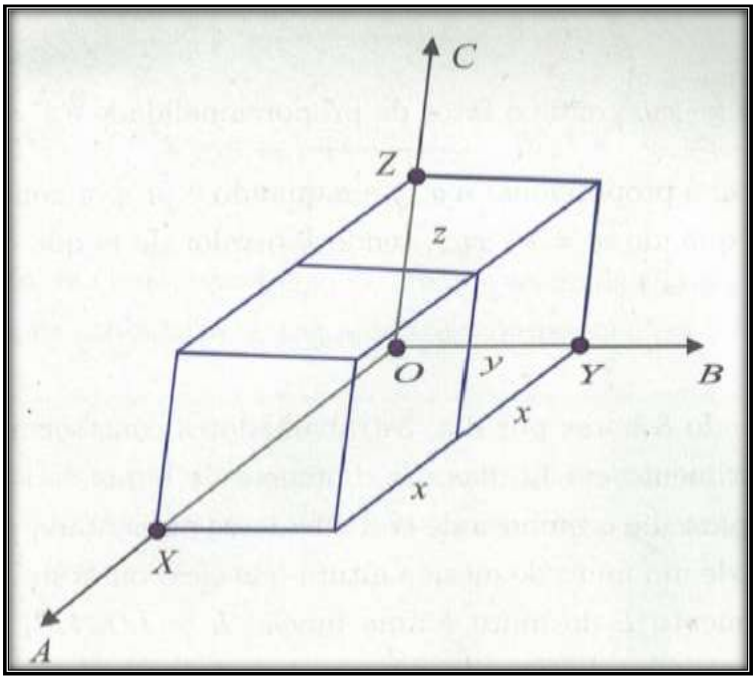
Ainda de acordo com os autores supracitados, se fixarmos as semirretas AO e OB, e tomamos sobre elas os segmentos OX e OY de comprimento x e y, respectivamente, a área do paralelogramo de lados adjacentes OX e OY é proporcional ao produto $x.y$.

A mesma abordagem pode ser aplicada a três semirretas não coplanares, AO, OB e OC, de mesma origem, e marcado sobre elas os segmentos OX, OY e OZ, com os comprimentos x, y e z, nessa ordem. Com isso eles determinam as arestas de um paralelepípedo de volume representado pela função de três variáveis x, y, z, isto é, $V = V(x, y, z)$, descrito na figura adiante. (LIMA et al., 2013, p. 12)

Como procedemos anteriormente, variando as dimensões do paralelogramo, vamos fazer o mesmo com as do paralelepípedo, para tanto, vamos fixar os valores de y e z, e dobrar o valor de x, o volume do sólido dobra, ou seja, $V = V(2x, y, z) = 2.V(x, y, z)$. Esse procedimento pode ser aplicado para qualquer número natural n, que o volume ficará $V(nx, y, z) = n.V(x, y, z)$. O mesmo raciocínio valerá para y e z, por exemplo, $V(x, ny, z) = n.V(x, y, z)$ e $V(nx, y, nz) = n.V(x, y, z)$. E mais, com base no Teorema Fundamental da Proporcionalidade, a afirmação anterior não se restringe somente para n natural, podendo este ser qualquer número real positivo. (LIMA et al., 2013, p. 12-13)

Sobre o exposto acima, a Figura 2 a seguir traz o sólido com a variação da aresta x mantendo as demais fixas. Também apresentamos a relação proporcional direta do volume com as dimensões do paralelepípedo.

Figura 2 − Proporcionalidade composta no paralelepípedo



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 13)

$$V = V(x, y, z) = V(x.1, y, z) = x.V(1, y.1, z) = xy.V(1, 1, z.1) = xyz.V(1, 1, 1) = k.xyz.$$

Sendo $k = V(1, 1, 1)$ o volume do paralelepípedo de arestas de comprimento unitário, onde três delas têm origem em O e estão sobre as semirretas AO, OB e OC. (LIMA et al., 2013, p. 13)

De posse do exposto sobre a proporcionalidade composta direta entre grandezas, em que utilizamos como exemplos as relações proporcionais da área do paralelogramo com suas dimensões e também do volume do paralelepípedo com suas dimensões, cabe formalizamos essa abordagem por meio de uma definição, a qual é apresentada a seguir conforme Lima et al. (2013, p. 13-14).

Definição: Consideremos uma grandeza cujo valor w depende dos valores x, y, z de três outras. Escrevemos então $w = f(x, y, z)$. Diremos que w é proporcional a x, y e z quando, mantendo fixos dois quaisquer desses valores, w for proporcional à variável restante. Quando este é o caso, tem-se:

$$w = f(x, y, z) = f(x.1, y, z) = x.f(1, y.1, z) = xy.f(1, 1, z.1) = xyz.f(1, 1, 1),$$

portanto $w = k.xyz$, onde o fator de proporcionalidade é $k = f(1, 1, 1)$.

Além do mais, os autores afirmaram que w é proporcional a x, y e z quando é proporcional ao produto xyz, ou seja, quando $w = k.xyz$, sendo k o valor de w que corresponde a x = 1, y = 1 e z =1.

De posse da definição de proporcionalidade composta direta entre grandezas, vamos aplicá-la na resolução de um problema em que estão relacionadas proporcionalmente quatro grandezas; para tanto, utilizamos o exemplo a seguir extraído da obra de Lima et al. (2013, p. 14).

Exemplo 05

Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construirão em 15 dias?

Resolução

O comprimento L do muro é uma função $L = L(h, t, d)$ do número h de horas de trabalho diárias, do número t de trabalhadores e do número d de dias de trabalho. É razoável admitir que, em condições normais, L é proporcional a cada uma dessas três variáveis. Portanto $L = k.\,htd$. Sabemos que, quando valem $h = 8$, $t = 3$ e $d = 12$, temos $L = 40$. Portanto, $40 = k \times 8 \times 3 \times 12$, ou seja, $40 = 288 \times k$, então $k = \frac{40}{288}$.

Segue-se que, para $h = 6$, $t = 5$ e $d = 15$, tem-se:

$$L = \frac{40}{288} \times 6 \times 5 \times 15 = 62{,}5 \text{ m}.$$

Logo, o comprimento do muro construído de mesma altura do primeiro é de 62,5 m.

A relação proporcional composta entre grandezas também pode ocorrer de forma direta e inversa ao mesmo tempo entre essas grandezas, isso depende do contexto do problema.

A respeito disso, apresentamos adiante uma definição formal sobre esse tipo de relação proporcional mista entre grandezas conforme Lima et al. (2013).

3.4.7. GRANDEZAS DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS A VÁRIAS OUTRAS

Algumas situações não triviais apresentam relações de proporcionalidade entre grandezas, de forma que a grandeza dependente se relaciona ora direta, ora inversamente proporcional com outras grandezas. A luz desse contexto, trazemos a Lei de Atração Universal de Newton, onde uma grandeza dependente se relaciona de direta e inversamente proporcionais com outras grandezas, como mostra o trecho a seguir.

> [...] “a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”. Assim, se dois corpos com massas m_1 e m_2 acham-se situados a uma distância d um do outro, então, segundo Newton, eles se atraem segundo uma força cuja intensidade f é (diretamente) proporcional a m_1 e m_2 e inversamente proporcional a d^2. (LIMA et al. 2013, p.19, grifo do autor)

De acordo com esses autores, o que foi dito no excerto supracitado é descrito matematicamente como $f = f(m_1, m_2, d) = k\frac{m_1 . m_2}{d^2}$, sendo que a constante k vai depender da unidade utilizada.

Sobre esse tipo relação proporcional mista, onde uma grandeza se relaciona direta e inversamente com outras grandezas, apresentamos a seguir uma definição conforme Lima et al. (2013, p. 19-20)

Definição: Seja $w = f(x, y, z, u, v)$ uma grandeza diretamente proporcional às grandezas x, y, z e inversamente proporcional a u e v. Isto quer dizer que

$$f(cx, y, z, u, v) = c \, . \, f(x, y, z, u, v)$$

e

$$f(x, y, z, cu, v) = \frac{1}{c} . \, f(x, y, z, u, v),$$

valendo relações análogas para y e z no lugar de x e v no lugar de u. Como se tem $f(x, y, z, u, v) = f(x\,1, y.1, z.1, u.1, v.1)$, segue-se daí que:

$$f(x, y, z, u, v) = xyz \, . \, f(1, 1, 1, u.1, v.1) = \frac{xyz}{uv} . f(1, 1, 1, 1, 1).$$

Logo,

$$f(x, y, z, u, v) = k\frac{xyz}{uv},$$

onde $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$ é o fator de proporcionalidade.

Em outras palavras, se $w = f(x, y, z, u, v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u e v, então w será diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$. Dessa maneira, é possível reduzir os ditos problemas de regra de três composta mista em problemas de regra de três simples e direta. (LIMA et al., 2013, p. 20)

Como forma de aplicar a definição formalizada acima, resolvemos o problema a seguir que relacionam cinco grandezas proporcionalmente e foi extraído da obra de Lima et al. (2013, p. 20)

Exemplo 06

Com 5 teares funcionando 6 horas por dia, uma tecelagem fabrica 1.800m de tecido com 1,20m de largura em 4 dias. Se um dos teares não puder funcionar e a largura do tecido for de 0,80m, em quanto tempo a tecelagem fabricará 2.000m do mesmo tecido, com as máquinas funcionando 8 horas por dia?

Resolução

O tempo T a determinar é uma função do tipo $T = T(t, h, m, \ell)$, onde t é o número de teares, h o número de horas diárias em que são utilizados, m o número de metros de tecidos e ℓ é a largura da peça. Por meio da análise proporcional da grandeza dependente com as demais grandezas independentes, temos que T é inversamente proporcional a t e h e diretamente proporcional a m e ℓ. Logo $T = k.\frac{m.\ell}{t.h}$.

Como o tempo T é dado em dias, tem-se:

$$4 = k.\frac{180 \times 1{,}2}{5 \times 6} = 72k = 4$$

$$k = \frac{4}{72} \rightarrow k = \frac{1}{18}.$$

Daí segue que

$$T = \frac{1}{18} \times \frac{200 \times 0{,}8}{4 \times 8} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9} \approx 3 \text{ dias}.$$

Logo, o tempo gasto pela tecelagem para produzir 2000 m do mesmo tecido será aproximadamente 3 dias.

Os exemplos que apresentamos até agora sobre a relação proporcional entre grandezas foram resolvidos utilizando apenas a definição de proporcionalidade (simples e composta), todavia problemas dessa natureza, também conhecidos como de regras de três, podem ser solucionados por outros formas ou métodos de resolução, sobre isso trazemos adiante cinco métodos de resolução da regra de três de acordo com Fragoso (1999).

3.4.8. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DA REGRA DE TRÊS

Os métodos de resolução da regra de três que vamos apresentar aqui, seguem conforme as informações extraídas da obra de Fragoso (1999, p. 27). A seguir mostramos cada um desses cinco métodos de resolução da regra e também os seus respectivos procedimentos de utilização.

- Método das proporções;
- Método das flechas ou regra das flechas;
- Método algébrico ou regra algébrica;
- Método duplex ou método de Carroll;
- Método da redução à unidade.

Cabe ressaltar que os procedimentos de resolução desses métodos podem ser usados na resolução de problemas tanto de regras de três simples como de regra de três composta. O primeiro método a ser apresentado é o da proporção.

3.4.8.1. MÉTODO DAS PROPORÇÕES

De acordo com Fragoso (loc. cit.) o referido método se baseia no conceito de proporções, e esse método era utilizado na década de 40 para justificar à resolução de problemas de regra de três.

O funcionamento do método das proporções é basicamente igualar as razões das grandezas do problema quando essas forem diretamente proporcionais para achar o valor do termo desconhecido. Caso as razões forem inversamente proporcionais, é preciso inverter uma delas para que a igualdade ocorra de fato entre as razões.

Para colocar em prática o método das proporções trazemos o exemplo a seguir retirado de Fragoso (1999, p. 28)

Exemplo 07

Com 120 kg de trigo, fabricam-se 60 kg de certo tipo de farinha. Quantos quilogramas de trigo serão necessários para fabricar 130 kg do mesmo tipo de farinha?

Resolução

A solução apresentado pelo autor parte da seguinte ideia de que com 120 kg de trigo são fabricados 60 kg farinha, logo para fabricar 130 kg de farinha serão necessários mais trigo. Assim, as grandezas trigo e farinha são diretamente proporcionais e podem ser escritas na forma da proporção a seguir:

$$\frac{120}{x} = \frac{60}{130} \rightarrow 60x = 120.130 \rightarrow x = \frac{15.600}{60} \rightarrow x = 260\,.$$

Logo, são necessários 260 kg de trigo para fabricar 130 kg de farinha.

Com relação à utilização do método das proporções na resolução da regra de três composta, o autor afirma que o valor da grandeza que se quer achar depende da razão direta ou inversa de várias outras grandezas envolvidas. Dessa forma há duas maneiras de resolução de regra de três composta pelo método das proporções, a saber, a Decomposição em Regra de Três Simples e a Redução a uma Regra de Três Simples, os quais são mostrados adiante.

Decomposição em regra de simples: a decomposição em regra de três Simples, de acordo com Fragoso (1999, p. 29), consiste em agrupar em uma tabela as grandezas envolvidas no problema com seus respectivos valores e cada grandeza de mesma espécie deve estar na mesma coluna da tabela, para que se possa calcular a proporção entre elas. Logo, para encontrar a solução de um dado problema com regra de três composta através do método das proporções, basta decompor esse problema em (n - 1) regras de três simples, em que n representa o número de grandezas presente no problema. Vajamos como funciona na resolução do exemplo a seguir extraído de Fragoso (1999, p.30).

Exemplo 08

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Primeiro o passo: é organizar as grandezas no quadro com os seus respectivos valores.

Páginas	**Linhas/páginas**	**Letras/linha**
300	36	50
250	30	?

Como o problema apresenta três grandezas, vamos utilizar duas regras de três simples (3 – 1 = 2).

Segundo passo: a solução parcial (x) do problema é obtida por meio da regra de três simples mediante a análise proporcional das grandezas abaixo, mantendo fixo quantidade de páginas.

Linhas/páginas	Letras/linha
36	50
30	x

Como o livro possui 36 linhas e em cada linha há 50 letras, ao ser reimpresso, mantendo o número de páginas constante, com 30 linhas por páginas é necessário que se aumente o número de letras por página, o que caracteriza uma relação inversamente proporcional entre as grandezas envolvidas, assim temos a proporção:

$$\frac{30}{36} = \frac{50}{x} \rightarrow 30x = 36.50 \rightarrow x = \frac{1.800}{30} \rightarrow x = 60\,.$$

Terceiro passo: com a solução parcial, a solução definitiva (y) do problema é obtida substituindo o valor da solução parcial na grandeza letras/linha, mantendo a grandeza linhas/páginas constante, conforme é mostrado a seguir.

Páginas	Letras/linha
300	60
250	y

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 31)

Como o livro tem 300 páginas com 60 letras/linha, ao ser reimpresso, com 250 páginas, é necessário que o livro possua mais letras por linha, desse modo à relação é inversamente proporcional entre as grandezas páginas e letras/linha, com isso temos a proporção:

$$\frac{250}{300} = \frac{60}{y} \quad \uparrow \quad 250y = 300.60 \quad \uparrow \quad y = \frac{18.000}{250} \quad \uparrow \quad y = 72\,.$$

Portanto, com o livro reimpresso com 250 páginas é necessário ter 72 letras por linha.

A segunda maneira de resolver a regra de três composta por meio da proporção é reduzindo a uma única regra de três simples, como é detalhado a seguir.

Redução a uma regra de três simples: essa forma de resolver a regra de três composta por meio da proporção tem como finalidade simplificar os cálculos desse tipo regra, utilizando apenas uma única regra de três simples para solucionar o problema. Vajamos como funciona na resolução do exemplo a seguir extraído de Fragoso (1999, p.37).

Exemplo 09

Na abertura de um canal, 15 homens trabalhando 8 horas diárias, escavaram 400 m^3 de terra em 10 dias. Quantos homens serão necessários para escavar 600 m^3 trabalhando 15 dias de 6 horas?

Resolução

Em linhas gerais, a forma de resolver a regra de três composta reduzindo a uma única regra de três simples no método das proporções consiste em relacionar as grandezas do problema, geralmente as independentes, de tal modo que uma fique em função da outra, para, em seguida, ser relacionada por meio da rega de três simples com a grandeza que contém o termo desconhecido. Seguindo esse raciocínio para resolver o problema do exemplo acima, podemos relacionar a quantidade de terra escada com o tempo de duração em dia desse trabalho e depois com o tempo em dia, conforme mostrado adiante:

Encontrar a quantidade de terra escavada por dia e depois por hora de trabalho:

i) $400 \div 10 = 40 \div 8 = 5$.

Logo, 15 homens escavaram 5 m^3 de terra por hora.

ii) $600 \div 15 = 40 \div 6 = 20/3$.

Portanto, x homens escavaram 20/3 m^3 de terra por hora.

De posse desses valores, podemos resolver o problema proposto por meio da regra de três simples, conforme mostrado a seguir.

Homens	Quantidade de terra escavada (m^3)
15	5
X	20/3

Como as grandezas do quadro acima estão relacionadas diretamente proporcionais, uma vez que ao aumentarmos o número de homens a quantidade de terra escavada também aumenta na mesma razão; desse modo, podemos determinar o valor do termo desconhecido utilizando a proporção abaixo:

$$\frac{15}{x} = \frac{5}{20/3} \uparrow 5x = \frac{15.\ 20}{3} \uparrow x = \frac{100}{5} \uparrow x = 20\ .$$

Logo, serão necessários 20 homens para escavar 600m^3 de terra trabalhando 6 horas diárias durante 15 dias.

Com isso, finalizamos funcionalidade o método das proporções na resolução de problemas de rega de três simples e composta, revelando a eficácia desse método no enfrentamento de problemas com grandezas proporcionais.

Adiante apresentamos outro método de resolução das regras conhecido como método das flechas.

3.4.8.2. MÉTODO DAS FLECHAS (OU REGRA DAS SETAS)

O método das flechas ou método das setas é, geralmente, o mais utilizado na resolução de problemas de regra de três. Esse método é considerado uma variação do método das proporções, pois utiliza flechas ou setas para representar a relação de proporcionalidade (direta e inversa) entre as grandezas do problema. Provavelmente, o método das flechas foi aplicado como recurso metodológico na década de 60. (FRAGOSO,1999, p. 38)

A execução do método das flechas nos problemas de regra de três simples requer alguns procedimentos norteadores na sua utilização, como os listados a seguir:

> I- Monta-se um quadro (tabela) com as duas grandezas envolvidas no problema e seus respectivos valores;
> II- Na coluna onde se encontra o valor a ser determinado (x), coloca-se uma seta apontando para a incógnita, ou seja, o valor desconhecido;
> III- Para se colocar a seta na outra coluna, e tomando-se como referência a grandeza onde se encontra o valor (x), faz-se a seguinte pergunta:
> Se aumentarmos a grandeza ligada a x, a outra grandeza aumenta ou diminui?
> Se a resposta for aumenta, as grandezas são diretamente proporcionais, caso contrário, elas são inversamente proporcionais.
> Obtida as respostas, colocar-se-á a seta na outra coluna, com o mesmo sentido da primeira seta, se as grandezas são direta, e oposto, se inversa.
> IV- Escreve-se a proporção, obedecendo-se a propriedade das proporções direta, ou inversa;
> V- Determina-se o valor do termo desconhecido (x), através da proporção construída. (FRAGOSO, 1999, p. 38-39)

Estes procedimentos do método das flechas caracterizam as etapas que devem ser seguidas na resolução de problemas de regra de três simples. Assim, aplicamos cada um desses procedimentos na resolução do exemplo adiante, cujo contexto relaciona duas grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 10[16]

Uma empresa de engenharia consegue asfaltar 60 km de estrada em 20 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma empresa asfaltar uma estrada de 84 km?

Resolução

A princípio devemos dispor num quadro as grandezas do problema com os seus respectivos valores, como recomenda o primeiro procedimento de resolução da regra de três simples.

I) Quadro das grandezas e respectivos valores:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
60	20
84	x

16 [Exemplo do livro, p. 130] ENTRE jovens 1ª série do ensino médio: guia do tutor matemática. São Paulo: Instituto Unibanco/CAEd, 2013. 362 p.

O próximo passo é colocar uma seta na grandeza que contém o termo desconhecido, apontada para o valor de x, conforme ilustrado abaixo.

II) Coloca-se a seta na coluna do termo desconhecido:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
60	20 ↓
84	x

Em seguida, no procedimento III, devemos realizar a análise proporcional entre as grandezas do problema, isto é, se elas são direta ou inversamente proporcionais por meio da pergunta:

III) Pergunta-se: Ao aumentarmos o tempo, a quantidade de asfalto, aumenta ou diminui na mesma quantidade?

Resposta: Aumenta.

Portanto, as grandezas acima são classificadas como grandezas diretamente proporcionais. Então, coloca-se uma seta na outra coluna de mesmo sentido da anterior:

Quantidade de asfalto (em km)	Tempo (em dias)
↓ 60	20 ↓
84	x

Os dois procedimentos restantes a seguir dizem respeito à montagem da proporção simples e a determinação do valor de x por meio de uma equação do 1º grau.

IV) Montar a proporção:

$$\frac{60}{84} = \frac{20}{x}$$

V) Obter o valor da incógnita na proporção:

$$60x = 84.20 \rightarrow x = \frac{1680}{60} \rightarrow x = 28\,.$$

Assim, para a empresa asfaltar 84 km da estrada são necessários 28 dias de trabalho.

O método das flechas também é utilizado na resolução de problemas de regra de três composta; e como na rega de três simples, devemos seguir cinco procedimento de resolução, conforme descritos abaixo.

> I- Monta-se o quadro com as respectivas grandezas e seus valores;
> II- Coloca-se a primeira seta na coluna onde se encontra o valor a ser determinado (x);
> III- Uma a uma comparam-se as grandezas com a que corresponde à coluna da indeterminada, efetuando-se a mesma pergunta enunciada no procedimento para regra de três simples, uma coluna a cada vez, colocando-se a respectiva seta;
> IV) Escreve-se a proporção, obedecendo à propriedade das proporções compostas;
> V) Determina-se o valor do termo desconhecido. (FRAGOSO, 1999, p. 42)

Para mostrarmos a funcionalidade desses procedimentos de execução da regra de três composta, vamos resolver o exemplo adiante, onde estão relacionadas três grandezas proporcionalmente.

Exemplo 11

Um obra foi realizada por 5 operários com uma carga horária de trabalho de 6 horas por dia, durante 12 dias. Caso essa obra fosse realizada por 9 operários com as mesmas capacidades de trabalho dos primeiros e nas mesmas condições, trabalhando 10 horas por dia, em quantos dias ela seria finalizada?

Resolução

O primeiro procedimento recomenda que devemos organizar as grandezas do problema em um quadro com os seus respectivos valores, conforme mostrado abaixo.

I) Monta-se o quadro de grandezas com os respectivos valores:

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
5	6	12
9	10	x

Em seguida, no procedimento II, devemos colocar uma seta na grandeza que contém o termo desconhecido, apontada para a letra x.

II) Coloca-se a seta na coluna do termo desconhecido:

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
5	6	12
9	10	x ↓

Depois disso, devemos fazer a análise proporcional das outras grandezas com relação à grandeza que contém o termo desconhecido, por meio das perguntas:

III) Pergunta-se em cada coluna:

i) Se aumentarmos o número de dias, o número de operários para realizar a obra, aumenta ou diminui?

Resposta: diminui.

Logo, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

ii) Se aumentarmos o número de dias, o número de horas trabalhadas por dia de trabalho aumenta, ou diminui?

Resposta: diminui.

Logo, as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Depois de realizarmos as análises proporcionais das grandezas com relação à grandeza que contém o valor de x, colocamos as demais setas nessas grandezas de acordo com o tipo de relação proporcional existente, isto é, se a grandeza for diretamente proporcional a seta tem o mesmo sentido da primeira, caso seja inversamente proporcional, a seta tem o sentido contrário à primeira seta, conforme ilustramos abaixo.

Operários	Horas/dia	Tempo em dias
5	6	12
9	10	x

Os dois últimos procedimentos de resolução da regra de três composta adiante tratam, respectivamente, de montar a proporção composta e resolvê-la para encontrar o valor de x dessa proporção. Vejamos:

IV) Escreve-se a seguinte proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{5} \cdot \frac{10}{6}$$

V) Determina-se o valor de x, ou seja:

$$\frac{12}{x} = \frac{90}{30} \rightarrow 90x = 360 \rightarrow x = \frac{360}{90} \rightarrow x = 4$$

Assim, são necessários 4 dias para que a mesma obra fosse concluída nas condições apresentadas.

Desse modo, encerramos a aplicação do método das flechas na resolução de regras de três simples e composta. Desvelando, assim, a eficácia desse método em resolver problemas que relacionam grandezas proporcionais.

Adiante, apresentamos outro método eficaz na resolução de problemas de regra de três simples e composta, conhecido como método algébrico ou regra algébrica.

3.4.8.3. MÉTODO ALGÉBRICO (OU REGRA ALGÉBRICA)

O método algébrico utiliza o raciocínio algébrico para resolver os problemas considerados de regra de três por meio do uso de equação do 1º grau. Esta é resultante da descoberta de uma constante inerente ao contexto do problema. Desse modo, para cada situação será necessário o fomento de um raciocínio distinto, o que torno o método mais complexo quando comparado com os demais. (FRAGOSO, 1999, p. 49)

Para mostrar o funcionamento do referido método, apresentamos adiante o exemplo extraído da obra de Fragoso (1999, p. 50) onde estão relacionadas proporcionalmente apenas duas grandezas.

Exemplo 12

Com 120 kg de trigo, fabricam-se 60 kg de certo tipo de farinha. Quantos quilos de trigo serão necessários para fabricar 130 kg do mesmo tipo de farinha?

Resolução

O primeiro passo para resolver o problema de regra de três posto por meio do método algébrico é identificar uma constante que esteja relacionada com as quantidades desse problema, para, em seguida, montar a equação do 1º grau com o termo desconhecido. Por isso, é necessário fazermos a pergunta: “o que é constante na fabricação de certa quantidade de farinha, tendo uma determinada quantidade de trigo?” (FRAGOSO, loc. cit.)

Como as grandezas supracitadas são grandezas diretamente proporcionais, elas variam sempre na mesma quantidade ou razão de proporcionalidade, logo, por meio da definição de proporcionalidade, existe uma constante k, diferente de zero, que garante tal relação entre essas grandezas. Desse modo podemos escrever as equações:

1° caso: $60 = k \cdot 120$

2º caso: $130 = k \cdot x$

Então, para encontrar o valor do termo desconhecido, x, basta igualarmos o valor da constante k, com isso temos as razões:

$$\frac{60}{120} = \frac{130}{x} \rightarrow 60x = 15600 \rightarrow x = \frac{15600}{60} \rightarrow x = 260.$$

Logo, são necessário 260 kg de trigo para a fabricação de 130 kg de farinha.

O próximo exemplo que vamos resolver mostra o método algébrico sendo aplicado num problema de regra de três composta. Para tanto, utilizamos o exemplo adiante retirado da obra de Fragoso (1999, p. 51-52).

Exemplo 13

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Já que o primeiro passo no método algébrico é identificar qual a constante inerente ao contexto do problema, e isso não é uma tarefa trivial em problemas de regra de três composta, sugerimos, então, recorrer a definição de *grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras,* apresentada anteriormente, a qual coloca em evidência essa constante de proporcionalidade.

Como as grandezas independentes do problema acima são inversamente proporcionais à grandeza dependente, pela definição mencionada, temos a representação:

$$L = k\frac{1}{p\,.\,\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I) } 50 = k\dfrac{1}{300\,.\,36} & \uparrow k = 50\,.\,300\,.\,36 \\ \text{II) } x = k\dfrac{1}{250\,.\,30} & \uparrow k = x\,.\,250\,.\,30\,. \end{array}$$

Grandezas :

L : letras; ℓ: linhas; p : páginas

Ao compararmos (I) e (II) pela constante k, temos a equação e o valor do termo desconhecido, x:

$$50\,.\,300\,.\,36 = x\,.\,250\,.\,30$$

$$x = \frac{540.000}{7500} \quad \uparrow x = 72\,.$$

Logo, com o livro reimpresso teremos 72 letras em cada uma das 30 linhas desse livro.

Com isso, encerramos o método algébrico de resolver problemas de regra de três simples e composta. Adiante apresentamos outro método de resolver as regras de três, conhecido como método duplex.

3.4.8.4. MÉTODO DUPLEX

O método Duplex foi desenvolvido pelo matemático de Oxford e diácono chamado de Charles Lutwidge Dogdson (1832-1898) também era conhecido pela nomeação de Lewis Carroll. Ele criou em 1879, um quebra-cabeça de palavras que chamou de duplex, o qual foi adequado ao estudo da regra de três e se tornou um método eficaz e de fácil entendimento na resolução de problemas, apoiado nos conceitos de proporcionalidade direta e inversa. O quebra-cabeça duplex parte de uma palavra para construir outra com a mesma quantidade de letras da primeira, onde são trocadas as letras uma de cada vez até obter outra palavra com sentido. (FRAGOSO, 1999, p. 53)

O autor supracitado mostra a seguir o passo a passo como o quebra-cabeça duplex funciona, quando transforma as palavras 'tia' em 'sol', 'ver' em 'mar' e 'terra' em 'marte'.

> 1) Dada a palavra TIA obter a palavra SOL.
> TIA ⟶ TIL ⟶ TAL ⟶ SAL ⟶ SOL
> 2) Dada a palavra VER obter a palavra MAR.
> VER ⟶ LER ⟶ LAR ⟶ MAR
> 3) Dada a palavra TERRA obter a palavra MARTE.
> TERRA ⟶ BERRA ⟶ BARRA ⟶ BARCA ⟶ MARCA ⟶ MARTA ⟶ MARTE. (FRAGOSO, 1999, p. 54)

De acordo com esse autor, o quebra-cabeça duplex quando aplicado em contexto com matemática resolve todos os problemas de regra de três. Para tato, utiliza-se da noção de proporcionalidade para relacionar as grandezas envolvidas nos problemas e também das operações de multiplicação e divisão em um procedimento simples que consiste na troca de posição dessas operações para encontrar a solução do problema.

No exemplo a seguir apresentamos a execução de método Duplex seguindo três etapas, conforme sugeriu Fragoso (1999, p. 56), para a resolução da regra de três.

Exemplo 14

Um pessoa gasta 25 minutos para percorrer uma certa distância, caminhado 54 passos por minuto. Quanto tempo levaria para vencer a mesma distância se caminhar 45 passos por minuto?

Resolução

A aplicação do método Duplex requer seguir as três etapas abaixo:

I. Montar um quadro com as grandezas e seus respectivos valores;

II. Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas;

III. Aplicar o método Duplex em cada grandeza.

Com isso, devemos primeiro identificar as grandezas do problema e seus respectivos valores para realizar o que recomenda a primeira etapa, assim temos:

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores

Tempo (min)	Velocidade (passos/min)
25	54
X	45

Fonte: FRAGOSO (1999, p. 56)

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Para verificar qual a relação proporcional ocorre entre as grandezas, faz-se a seguinte pergunta: ao aumentar o valor da grandeza tempo o valor da grandeza velocidade aumenta ou diminui? Certamente, quando aumentamos o valor da grandeza tempo, o valor da grandeza velocidade tende a diminuir, na mesma proporção. Isso caracteriza que as grandezas 'tempo' e 'velocidade' são do tipo inversamente proporcionais.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Como no quebra-cabeça mencionado anteriormente, precisamos partir do valor 54 para obter o valor 45, correspondentes à grandeza velocidade, por meio das operações aritméticas da divisão e multiplicação. Dessa forma temos:

Velocidade $\longrightarrow$ partir de 54 para obter 45

$54 \div 6 \times 5 = 45.$

Tempo $\longrightarrow$ partir de 25 para obter x

$25 \times 6 \div 5 = x \rightarrow x = 30.$

Aqui cabe a pergunta: como o autor chegou aos valores 5 e 6, utilizados na aplicação do método Duplex?

Em nossa análise, foi possível observar que os números utilizados no método são os termos da fração irredutível dos valores da grandeza velocidade, quando simplificados ao máximo. Ver simplificação abaixo.

$$\frac{54}{45}\begin{matrix}:9\\:9\end{matrix} = \frac{6}{5}.$$

Dessa forma, os valores 5 e 6 são combinados com as operações de divisão e multiplicação, de maneira que a partir do valor de uma grandeza possamos obter o outro valor dessa grandeza. O mesmo raciocínio é realizado para encontrar o valor de x da outra grandeza, uma vez que as grandezas estão relacionadas proporcionalmente.

Como as frações são equivalentes, o resultado da primeira expressão também poderia ser obtido multiplicando 54 por 5 e o resultado dividido por 6.

Ainda sobre aplicação do método Duplex, cabe ressaltar que a ordem invertida das operações aritméticas na segunda expressão é porque as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, caso não fossem, as operações seguiriam a ordem da primeira expressão.

Para verificar o que foi dito no parágrafo anterior, aplicamos o método Duplex no exemplo a seguir que relacionou duas grandezas diretamente proporcionais.

Um motorista abasteceu o tanque de seu carro com 15 litros de gasolina e pagou pelo combustível o valor de R$ 60,00. Caso ele tivesse abastecido o seu carro com apenas 10 litros de gasolina, quanto pagaria pelo combustível?

Resolução

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores.

Quantidade de gasolina (L)	**Preço (R$)**
15	60
10	x

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Na situação apresentada, observamos que as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, porque quando aumentamos o valor do preço a pagar a quantidade de combustível também aumenta na mesma proporção.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Antes de executarmos o método em cada uma das grandezas, devemos encontrar os valores que serão utilizados nas operações aritméticas de multiplicação e divisão, na busca de solucionar o problema. Para tanto, simplificamos os valores da grandeza ‘quantidade de gasolina’, representados na razão abaixo:

$$\frac{15 \; : 5}{10 \; : 5} = \frac{3}{2}\,.$$

De posse dos valores 2 e 3, podemos aplicar o método Duplex e encontrar o valor de x.

Quantidade de gasolina ⟶ sair do valor 15 para obter o valor 10.

$15 \times 2 \div 3 = 10.$

Preço ⟶ sair do valor 60 para obter o valor de x.

$60 \times 2 \div 3 = x \;\rightarrow x \;= 40.$

Assim, concluímos que o motorista pagaria R$ 40,00 pelos 10 litros de gasolina.

O método Duplex também pode ser aplicado para resolver problemas de regra de três compostas, com é mostrado a seguir.

Exemplo 15

Andando a pé, 8 horas por dia, um rapaz conseguiu, em 10 dias, percorrer a distância de 320 km. Quantos quilômetros esse rapaz poderia percorrer, em 8 dias, na mesma velocidade, se andasse 12 horas por dia?[17]

Como o problema acima relaciona mais de duas grandezas, o método Duplex deve ser aplicado mais de uma vez, como mostra o trecho: “[...] no caso da regra de três composta, o método é utilizado tantas vezes quanto o número total de grandezas subtraindo-se um.” (FRAGOSO, 1999, p. 57-58) Neste caso, o método será aplicado duas vezes, visto que o problema proposto possui três grandezas. As etapas do método são apresentamos a seguir:

---

17 [Questão do livro, p. 222] BIANCHINI, E. **Matemática.** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

I) Montar o quadro com as grandezas e seus valores

Horas/dia	Dias	Distância em km
8	10	320
12	8	x

Fonte: BIANCHINI (2011, p. 222)

II) Verificar a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas

Como estão relacionadas três grandezas no problema, a verificação das relações proporcionais ocorre de duas em duas. Dessa forma, vamos verificar a proporcionalidade das grandezas ‘hora/dia’ e ‘distância’, por meio da pergunta: se *aumentarmos o valor da distância o valor da grandeza horas/dia aumenta?* Certamente que sim, pois o valor da última grandeza também aumentará e na mesma proporção. Assim, as grandezas relacionadas são ditas diretamente proporcionais.

Agora, se *aumentarmos o valor da grandeza distância o valor da grandeza dias aumenta?* Com certeza também aumentará na mesma razão. Isso caracteriza que as grandezas relacionadas, distância e dias, são diretamente proporcionais.

De posse das análises das grandezas, aplicamos o método em cada uma das grandezas, como é mostrado a seguir.

III) Aplicar o método Duplex em cada uma das grandezas

Como foi dito anteriormente, o método supracitado será aplicado duas vezes, conforme a relação proporcional existente entre as grandezas. No entanto, é necessário, a princípio, encontrar os valores da razão irredutível de cada grandeza envolvida no problema, para, em seguida, aplicar o método. Dessa forma, temos:

Razão dos valores da grandeza ‘Horas/ dia’ ⟶ $\frac{8}{12}\begin{matrix}:4\\:4\end{matrix} = \frac{2}{3}$.

Razão dos valores da grandeza ‘Dias’ ⟶ $\frac{10}{8}\begin{matrix}:2\\:2\end{matrix} = \frac{5}{4}$.

1º caso: grandezas diretamente proporcionais

Horas/dias: sair do valor 8 para obter o valor 12.

$8 \times 3 \div 2 = 12.$

Distância: sair do valor 320 para obter o valor x_1 (resultado parcial).

$320 \times 3 \div 2 = x_1 \rightarrow x_1 = 480.$

2º caso: grandezas diretamente proporcionais

Dias: sair do valor 10 para obter o valor 8.

$10 \times 4 \div 5 = 8.$

Distância: sair do valor $x_1 = 480$ para obter o valor x (resultado final).

$488 \times 4 \div 5 = x \quad \rightarrow \; x = 384.$

De posse do resultado, é possível concluir que o rapaz percorreu 384 km nas condições apresentadas.

Em nossa análise, os exemplos aqui apresentados reforçam a eficácia do método Duplex para resolver problemas de regras de três de maneira elementar, visto que tal método exige apenas conhecimentos básicos de Matemática sobre simplificação de fração, fração equivalente, operações de multiplicação e divisão, além dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, indispensáveis para o uso da regra de três. Apesar da trivialidade do método, presumimos que o uso de tal proposta seja pouca utilizada nas aulas de Matemática, como uma das estratégias para resolver problemas que relacionam grandezas proporcionais, uma vez que os textos dos livros didáticos de matemática não apresentam o método Duplex como uma alternativa a ser utilizada em contextos com a proporcionalidade simples e composta.

De posse dessa constatação, é necessário que busquemos outras formas de ensino para os conteúdos de Matemática, dentro das capacidades cognitivas dos discentes, de tal sorte, a municiar nossos alunos com possibilidades que venham subsidiar o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Pensando nisso, apresentamos a seguir outra possibilidade de resolver problemas com grandezas proporcionais, chamado de método de redução à unidade.

3.4.8.5. MÉTODO DE REDUÇÃO À UNIDADE

O método de redução à unidade foi usado para o ensino na década de 40, assim como o método das proporções. Atualmente, entretanto, esse método deixou de ser utilizado nas aulas de matemática sem uma justificativa plausível (FRAGOSO, 1999, p. 66).

O referido método não recorre ao modelo da proporção e nem da equação do 1º grau. A solução do problema é encontrada mediante uma análise proporcional das grandezas, em que essas são relacionadas entre si utilizando as operações aritméticas de multiplicação e divisão.

> [...] um método em um estilo de pensamento que não depende das proporções e nem das equações, são da análise para encontrar a solução sem ter que depender de recordar de regras mais ou menos artificiais. Uma das formas desse método analítico será conhecida pelo nome de método de redução à unidade. (GOMEZ, 2006, p. 59 apud GUERRA; SILVA, 2014, p.223)

Ainda com a intenção de compreender a funcionalidade do método de redução à unidade, recorremos ao dicionário Oxford de Matemática Essencial, que apresenta a seguinte entendimento sobre esse método:

> Esse método pode ser usado quando a relação entre duas quantidades é fixa, o valor de uma terceira quantidade é dado, e o valor da quarta quantidade tem de ser encontrado tendo a mesma relação com o terceiro que os do primeiro par têm entre si. *O método todo se baseia em transformar um dos valores do primeiro par de quantidades em valor unitário.* (TAPSON, 2012, p. 162, grifo do autor)

Em linhas gerais, o método de redução à unidade tem sua funcionalidade garantida na definição de proporcionalidade (simples e composta), e o valor da variável independente sempre é reduzido à unidade, e, nesta condição, o valor da variável dependente representa a constante de proporcionalidade. Cabe ressaltar, todavia, que esse método não se preocupa em destacar a constante k, como acontecia no método algébrico, apresentado anteriormente.

Para Lima et al. (2013, p. 15) o método de redução à unidade é metodologicamente adequado aos problemas de regra de três composta, pois reduz esses tipos de problema a problemas de regra de três simples.

Com relação à funcionalidade do método de redução à unidade, vamos resolver o exemplo adiante extraído da obra de Fragoso (1999, p. 67), para mostrarmos o passo a passo do método na resolução de um problema de regra de três simples.

Exemplo 16

Uma pessoa gasta 25 minutos para percorrer uma certa distância, caminhando 54 passos por minuto. Quanto tempo levaria para vencer a mesma distância se caminhar 45 passos por minuto?

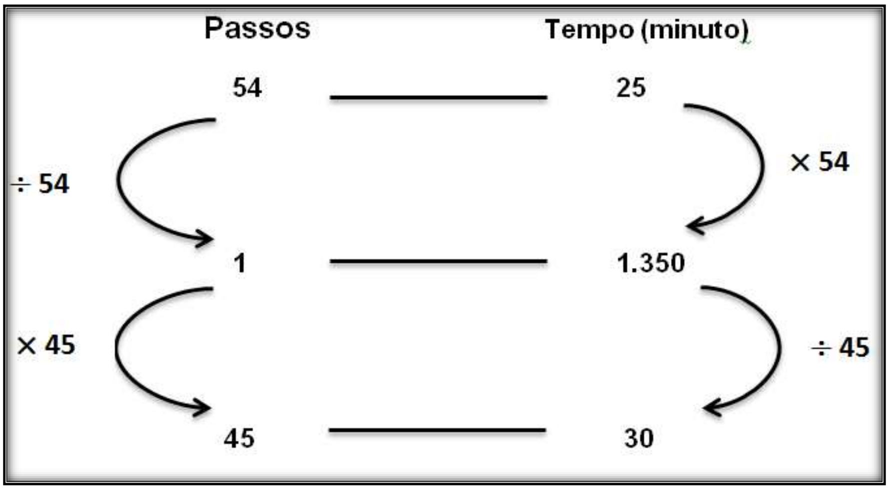
Resolução

Em primeiro lugar, precisamos verificar qual a relação proporcional existente entre as grandezas do problema, tempo e passos por minuto, para em seguida aplicarmos o método de redução à unidade. Nesse sentido, se o tempo gasto para completar o percurso aumentar, significa que a quantidade de passos por minuto foi reduzida na mesma proporção que aumentou a primeira grandeza; e se o tempo do percurso for reduzido, implica dizermos que a quantidade de passos por minuto aumentou no mesma proporção que diminuiu a primeira. Logo, com base nessa análise, podemos pressupor que as grandezas do problema são inversamente proporcionais.

De posse da relação proporcional das grandezas, vamos organizar essas quantidades no modelo do método de redução à unidade de Lima et al. (2013, p, 18) com as devidas adaptações dos valores do problema proposto.

O esquema abaixo traz a execução do método de redução à unidade e também a solução encontrada para o problema. Nesse método a grandeza independente, 'Passos', é sempre reduzida à unidade para, em seguida, ser multiplicada com o valor pretendido do problema. Enquanto que a grandeza dependente, 'Tempo', será multiplica (ou dividida conforme à relação proporcional) pelo mesmo valor da primeira grandeza, e, em seguida, é dividida pelo valor pretendido da grandeza independente para encontrar a solução do problema.

Esquema 2 − Método de redução à unidade



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 18)

Logo, a pessoa gasta 30 minutos para percorrer a distância pretendida, executando 45 passos por minuto.

Ainda com relação à execução do método de redução à unidade no exemplo anterior, cabe um adendo sobre a utilização das operações aritméticas caso a relação proporcional entre as grandezas fosse direta; neste contexto, as operações aritméticas empregadas seriam as mesmas nos dois momentos da execução do método e não distintas como ocorreu no exemplo posto, ou seja, primeiramente utilizamos a divisão e, em seguida, a multiplicação para encontrar a solução do problema.

Doravante, vamos aplicar o método de redução à unidade no exemplo adiante, que já foi apresentado anteriormente, onde estão relacionadas mais de duas grandezas, com isso pretendemos mostrar a eficácia desse método também na resolução de problemas de regra de três composta.

Exemplo 17

Um livro tem 300 páginas. Cada página, 36 linhas e cada linha, 50 letras. Reimpresso com 250 páginas, quantas letras poderá ter em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

Resolução

Em primeiro lugar, precisamos identificar qual a grandeza dependente e, em seguida, verificar a relação proporcional existente entre essa e as demais grandezas independentes. Desse modo, temos que a quantidade de 'Letras' é a grandeza dependente, pois contém o termo desconhecido, e se relaciona com as demais, 'página' e 'ℓinhas', de maneira inversamente proporcional. Assim, a situação posta pode ser modelada conforme a definição de *grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras* mostrada anteriormente. Nesse sentido, apresentamos a seguir o modelo matemático e as representações de cada grandeza do problema em questão.

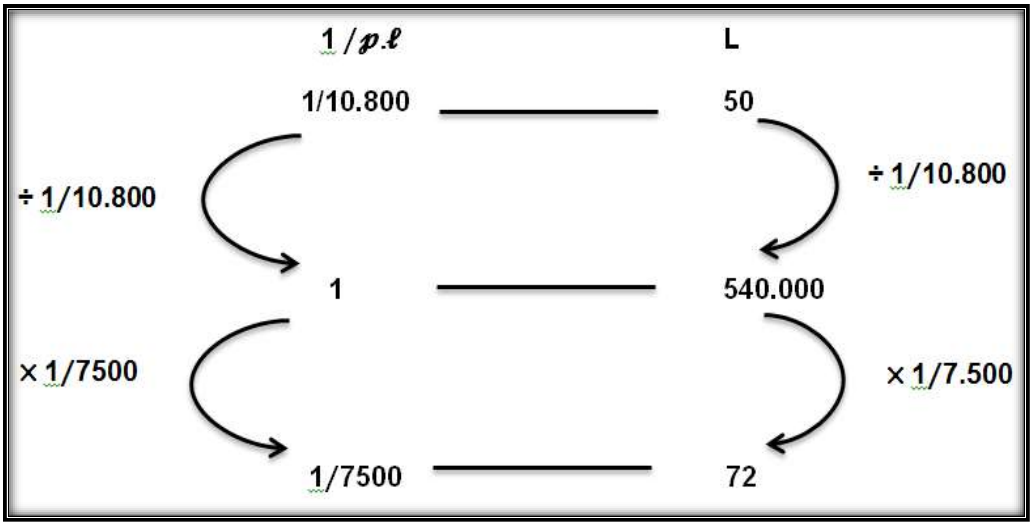
$L = \frac{k}{p.\,\ell} \rightarrow L = k.\left(\frac{1}{p.\,\ell}\right)$, sendo L diretamente proporcional a $\left(\frac{1}{p.\,\ell}\right)$, e 'L' representa a grandeza 'Letras', p e ℓ representam, respectivamente, as grandezas 'página' e 'ℓinhas'.

De posse dos dados do problema, podemos afirmar que quando a grandeza dependente assume o valor $L = 50$, a razão $\left(\frac{1}{p.\,\ell}\right)$ assume o valor

$\left(\frac{1}{p\,.\,\ell}\right) = \frac{1}{300 \times 36} = \frac{1}{10800}$. Seguindo esse raciocínio, queremos determinar qual o valor de ‘L’ quando o valor de $\left(\frac{1}{p\,.\,\ell}\right) = \frac{1}{250 \times 30} = \frac{1}{7500}$.

De acordo com o modelo de Lima et al. (2013) para o método de redução à unidade que simplifica os problemas de regra de três composta em problemas de regra de três simples, já que por definição a grandeza dependente é diretamente proporcional ao valor inverso da grandeza independente, o problema proposto tem a seguinte resolução:

Esquema 3 − Método de redução à unidade



Fonte: LIMA et al. (2013, p. 21)

Assim, o livro reimpresso tem 72 letras em cada linha, sendo que cada página possui 30 linhas.

Com base no esquema acima sobre o método de redução à unidade proposto por Lima et al. (2013, p. 21), cabe ressaltar que esses autores entendem que a regra de três composta mista ou com grandezas apenas inversamente proporcionais pode ser resolvida como uma regra de três simples e direta; já que tal fato é garantido na definição de proporcionalidade, uma vez que a grandeza dependente é sempre diretamente proporcional à razão das grandezas independentes (ou ao valor inverso das grandezas independentes). Essa compreensão confere ao método de redução à unidade ser considero uma ferramenta matemática viável, prática e exequível metodologicamente para o ensino de matemática, já que os problemas de regra de três composta são tratados como problemas de regra de três simples, com isso, pressupomos que as dificuldades dos alunos com relação à aplicação do algoritmo da regra em contextos com mais de três grandezas podem ser minimizadas ou erradicadas, e, assim, facilitar a compreensão e o aprendizado desse conhecimento, que, na maioria dos casos, ocorrem de maneira superficial, levando o aluno a aplicar a regra de forma mecânica e sem nenhum sentido em sua funcionalidade.

Ainda que o método de redução à unidade se mostre um recurso metodológico eficaz no ensino das regras de três, como os demais métodos, é necessário, entretanto, que os conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais estejam consolidados de fato antes da aplicação de qualquer um dos métodos mostrados anteriormente, caso contrário o ensino da regra de três não alcançará o seu objetivo fundamental, que é servir de ferramenta matemática para resolver problemas com grandezas proporcionais.

Diante das colocações nesta seção sobre os métodos de resolução da regra de três, entendemos que esses métodos podem funcionar como caminhos metodológicos para o ensino e aprendizado do conteúdo regra de três, tão necessário como estratégia para a resolução de problemas com grandezas proporcionais em contextos escolar e extraescolar, haja vista que cada método apresenta um modo próprio de resolver a regra, o que deve ser utilizado em favor do ensino de matemática, escolhendo dentre os modelos apresentados àquele que melhor se adequa a facilitar à compreensão dos alunos no ensino da regra de três, que, quase sempre, recorre a um único método de ensino nas aulas de matemática, aumentando, assim, as chances dos alunos não aprenderem esse conteúdo, da mesma forma se executa um ensino reducionista e limitado, pois nega a possibilidade dos discentes conhecerem outras maneiras de resolver a regra de três e de ampliar seus horizontes de conhecimento.

A seguir apresentamos um estudo sobre o ensino das regras de três com base numa consulta realizada com alunos do 8º ano do ensino fundamental, que já estudaram esse conteúdo, por meio de um questionário socioeconômico, cuja intenção era verificar quais as possíveis dificuldades enfrentadas pelos egressos no ensino das regras de três.

3.5. CONSULTA AOS ALUNOS EGRESSOS SOBRE O ENSINO DA REGRA DE TRÊS

Esta pesquisa foi resultado de um trabalho de campo realizada em uma escola estadual de ensino fundamental e médio localizada do bairro do Guamá, periferia de Belém. Naquela instituição de ensino, foi realizado um levantamento quantitativo sobre as possíveis dificuldades no ensino de regra de três, junto a uma amostra de 100 (cem) alunos egressos do 8º ano do ensino fundamental regular.

Para a coleta de dados da pesquisa, utilizamos o instrumento questionário, que, segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 201), "é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador". Esse pensar é complementado pelas ideias de Gil (2008, p. 121) ao afirma que o questionário é "a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, [...]."

Com relação aos dados da instituição de ensino e dos sujeitos que fizeram parte da pesquisa, esses foram mantidos em total sigilo, como forma de preservar a fonte de pesquisa e a lisura do processo.

A seguir detalharemos as etapas da pesquisa, no que se referem ao lócus, os sujeitos, período de coleta dos dados e as dificuldades encontradas na pesquisa de campo.

3.5.1. ETAPAS DA PESQUISA

Ao darmos início a nossa pesquisa de campo, procuramos visitar algumas escolas no bairro do Guamá, o que ocorreu no dia 24 de agosto de 2016. Na ocasião visitei uma escola estadual de ensino fundamental e médio localizada naquele bairro. Ao chegar à instituição de ensino, identifiquei-me com o porteiro, que me encaminhou até a sala da direção. Lá fui recebido pela Coordenadora Pedagógica do turno da manhã, e me informou que a diretora da escola não estava presente, porque tinha sido convocada para participar de uma reunião na Unidade Seduc na Escola (USE).

Após os informes da coordenadora, justifiquei o porquê da minha visita na escola, pois tínhamos a intenção, como aluno do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), de realizar uma pesquisa por meio de um questionário com os alunos do 8º ano do ensino fundamental regular, para verificar possíveis dificuldades no aprendizado do assunto regra de três, estudado por eles no 7º ano, e para isso eu precisaria de uma amostra de 80 (oitenta) a 100 (cem) alunos.

A funcionária ouviu atentamente a minha fala, e concordou que eu realizasse a pesquisa, mas com algumas ressalvas acerca dos horários de aula dos alunos. Dessa forma, a coordenadora pedagógica afirmou que eu só poderia aplicar os questionários nas turmas do 8º ano na segunda-feira e nos seguintes horários da manhã: 10h na turma 802, 10h45min na turma 803 e 11h na turma 801. O motivo alegado foi que nesse dia e horários os alunos estavam com aulas vagas, assim a realização da pesquisa não atrapalharia o andamento das aulas nas turmas. De posse disso, agradeci a atenção dada pela funcionária, e tomei nota dos números de telefones da Escola e da coordenadora pedagógica, para marcar um possível retorno. Com isso dei por encerrada a visita na naquela instituição de ensino.

Em nossa análise, decidimos não aplicar o questionário socioeconômico na escola mencionada, pois entendemos que as condições impostas pela coordenadora com relação a dia e horários para realização da pesquisa, poderiam demandar muito tempo no levantamento de dados, uma vez que se numa primeira tentativa de realizar o estudo pretendido não alcançássemos o tamanho da amostra desejada, 100 alunos, teríamos que esperar seis dias consecutivos para uma segunda tentativa de pesquisa e sem garantias de sucesso na aplicação, o que se tornou inviável a realização do nosso trabalho naquela escola.

Diante dessa situação, partimos para visitar outra escola estadual de ensino fundamental e médio no mesmo bairro. Ao chegar naquela instituição de ensino, identifiquei-me junto à portaria e solicitei falar com a diretora. Então me encaminharam para a sala da direção, onde fui recebido pela coordenadora pedagógica do turno da manhã, que informou que a diretora não estava na escola, pois se encontrava na Secretaria de Estado de Educação (SEDUC-PA), mas que eu poderia tratar o assunto do meu interesse com a coordenação. De posse disso, justifiquei a minha visita à escola, cujo motivo era realizar uma pesquisa por meio de um questionário que contemplasse uma amostra de 80 (oitenta) a 100 (cem) alunos, para verificar as possíveis dificuldades dos alunos sobre o assunto regra de três, conteúdo estudado no 7º ano do ensino fundamental, e essa pesquisa era um trabalho do Curso de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará.

Diante do exposto, a coordenadora concordou que a pesquisa poderia ocorrer na escola, e que os alunos estariam disponíveis para responder o questionário em qualquer dia da semana pela parte da manhã. Em seguida, perguntei a quantidade de alunos por turma, à coordenadora informou que na turma 701 tinha 35 alunos, na turma 702 tinha 39 alunos e na turma 703 tinha 37 alunos, o que totalizou uma amostra de 111 educandos.

Depois das informações concedidas pela funcionária, optei por realizar a pesquisa nessa escola, e marcamos o meu retorno para o dia 02 de setembro de 2016, data em que ocorreria a pesquisa. Agradeci as informações concedidas pela coordenadora pedagógica e finalizei minha visita na escola por volta das 10 horas da manhã de quarta-feira do dia 24 de agosto de 2016.

No dia 02 de setembro de 2016, retornei à escola por volata de 07h40min, para aplicar os questionários. Assim, identifiquei-me na portaria e me encaminhei para falar com a coordenadora do turno da manhã, como havia combinado. Na ocasião a diretora também estava na escola, assim, aproveitei para esclarecê-la sobre a minha visita inesperada naquela manhã. Disse à funcionária que pretendia realizar uma pesquisa com alunos do 8º ano do ensino fundamental acerca das possíveis dificuldades sobre o ensino de regra de três. Após ouvir minha justificativa, a diretora concordou e pediu que eu esperasse na sala dos professores até que os alunos entrassem em sala.

Depois que todos os alunos já estavam em sala, à diretora sinalizou que eu poderia passar os questionários nas turmas do 8° ano do ensino fundamental, então assim o fiz. E dei início aos trabalhos de coleta naquela manhã.

A primeira turma em que entrei foi a 701, na ocasião, fui apresentado pela coordenadora da manhã e, em seguida, tomei a palavra e justifiquei para os alunos o propósito da pesquisa na escola. Feito isso, os alunos concordaram em participar da pesquisa, então distribui o questionário (Apêndice A) para os alunos, assim, deu-se início a coleta de dados às 08h07min.

O processo de coleta ocorreu normalmente sem nenhum agravante que viesse a comprometer a realização da coleta de dados, que se encerrou às 08h: 45min. Guardei os questionários devidamente preenchidos. Em seguida, encaminhei-me para outra turma a 703. Lá fui novamente apresentado para os alunos pela coordenadora. Também justifiquei a importância da pesquisa para eles, que concordaram em participar da mesma. Após esse primeiro momento, os questionários forma distribuídos para os alunos. Eles começaram a responder as perguntas às 08h: 50min. A coleta ocorria normalmente, quando de repente alguns alunos falaram que não podiam responder os itens 16, 17, 18 e 19, pois alegaram que não tinham estudado o assunto regra de três no ano anterior. Como eles já haviam respondido mais da metade do questionário, pedi que eles continuassem a responder os outros itens, 20 e 21, e que não precisariam responder os itens mencionados anteriormente. A coleta de dados nessa turma terminou às 09h05min., agradeci aos alunos e me retirei de sala.

Diante da situação ocorrida, em que os alunos da turma 703 da manhã não estudaram o assunto regra de três, foi preciso completar a amostra da pesquisa com os alunos do turno da tarde desta mesma escola, o que será comentado mais adiante.

A terceira turma que entrei pela manhã foi a 702, e aconteceu após o intervalo. Já em sala, o ritual de apresentação e justificativa da pesquisa ocorreu como de praxe das outras turmas. Depois disso, distribuímos o questionário socioeconômico, e o preenchimento do mesmo se iniciou às 10h20min. A coleta ocorreu dentro da normalidade, e finalizei a pesquisa naquela sala às 10h40min.

Por fim, agradeci a diretora e a coordenadora pela ajuda em nosso trabalho. Em seguida, solicitei à diretora um retorno em uma turma da tarde para completar a minha amostra com 100 (cem) alunos, a professora concordou, então agendei a minha volta à escola no turno da tarde para o dia 05 de setembro de 2016.

No dia marcado retornei a escola no turno da tarde, o que aconteceu por volta das 13h50min. Dirige-me a sala da direção, cumprimentei a diretora e fui aplicar os questionários na turma 701, na ocasião eles estavam com horário vago, então me apresentei como professor pesquisador para os alunos, e pedi que eles participassem de uma pesquisa sobre o ensino de regra de três e justifique a importância da mesma. Os alunos concordaram em participar. Então, em seguida, distribui o questionário e dei início à coleta dos dados às 14h05 min., e foi finalizada às 14h40min. Agradeci a contribuição de todos, e me retirei da sala.

Diante da diretora reforcei meu agradecimento por ter contribuído com o meu trabalho de pesquisa, deixando a instituição às 14h55min. Assim, encerrei a coleta de dados naquela escola.

A seguir apresentamos as análises dos principais resultados da pesquisa e também um quadro de possíveis dificuldades sobre o ensino da regra de três enfrentadas pelos alunos egressos que participaram do estudo.

3.5.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA CONSULTA AOS ALUNOS EGRESSOS

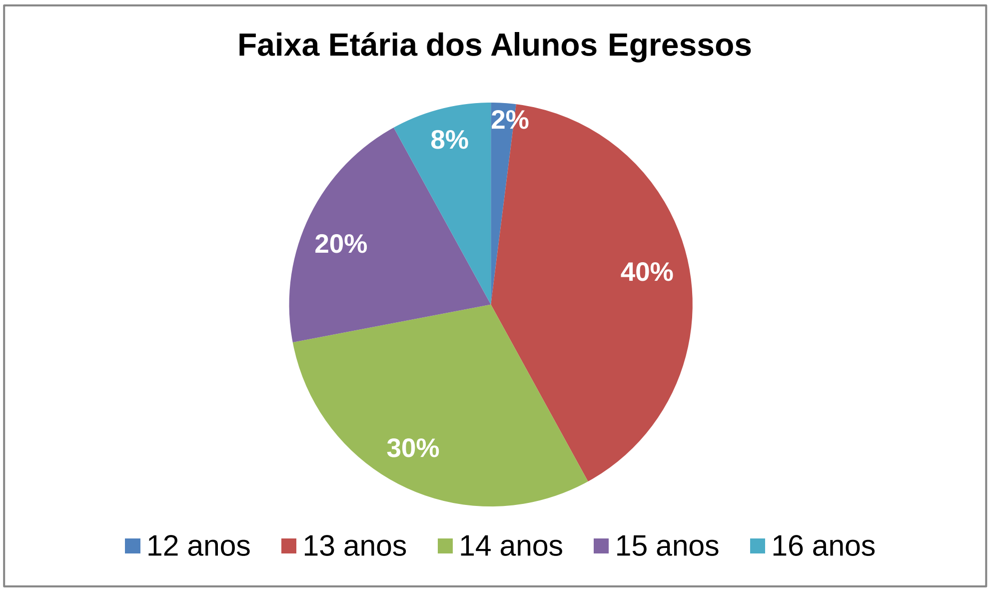
Nesta etapa, faremos uma análise quantitativa dos dados coletados na pesquisa de campo e as devidas interpretações das respostas obtidas, baseado na tabulação desses dados. Dessa forma, a relevância da análise e da interpretação na pesquisa se destaca pelos objetivos desses dois processos, como mostra o trecho a seguir.

> A análise tem como objetivo organizar e sumariar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação. Já a interpretação tem como objetivo a procura do sentido mais amplo das respostas, o que é feito mediante sua ligação a outros conhecimentos anteriormente obtidos. (GIL, 2008, p. 156)

Amparados nesse pensar, buscamos analisar os dados levantados na pesquisa de campo de uma amostra de 100 (cem) alunos por meio de um questionário. Os dados obtidos nos possibilitaram perceber que os educandos das turmas pesquisadas, alunos do 8º ano do ensino fundamental, encontram-se, em sua maioria, fora da faixa etária estipulada pela Lei de Diretrizes e Base da Educação Brasileira 9394/96 (LDB). Esta diz em seu Art. 32 que o ensino fundamental terá duração de 9 (anos), e terá início aos 6 (seis) anos de idade. No entanto, a pesquisa mostrou que 30% dos alunos estavam com 14 (quatorze) anos de idade no 8º ano do ensino fundamental, 20% com 15 (quinze) anos de idade e 8% com 16 anos de idade no referido ano. De acordo com a LDB 9394/96, alunos entre 15 a 17 anos de idade deveriam estar cursando o ensino médio e não mais o ensino fundamental. Esses percentuais apontam que há uma distorção idade série nas turmas pesquisadas. Os dados mostraram também que apenas 40% dos alunos estavam com a idade de acordo com o ano escolar, isto é, com 13 (treze) anos de idade. A pesquisa também mostrou que 2% dos alunos presentes na amostra estavam cursando o referido nível de ensino com apenas 12 anos idade; outro caso de distorção idade ano escolar, mas, neste caso, para menos.

Os dados apresentados acima sobre a idade dos alunos egressos que participaram da pesquisa estão dispostos no gráfico a seguir, onde podemos observar com clareza o universo de alunos do 8º ano do ensino fundamental que apresentam a distorção idade ano escolar.

Gráfico 3 − Faixa etária dos alunos egressos



Fonte: Pesquisa de campo (2016)

De posse dessas informações do gráfico supracitado, podemos afirmar que na amostra pesquisada há evidências de distorção idade-ano, visto que 58% dos alunos estavam com a idade superior ao desejado para o ano escolar, o que caracteriza a existência de algum agravante que impossibilitou o avanço desses alunos para os anos subsequentes. De fato, “a distorção idade-série ocorre quando o aluno abandona os estudos por dois anos ou mais durante a sua formação, e a outra situação é quando o aluno repete a série que está em curso.” (ARAUJO, 2014, p. 28)

Outro dado da pesquisa a respeito dos alunos egressos foi com relação aos casos de dependência na disciplina matemática, a respeito disso o quadro a seguir traz as informações produzidas no questionário socioeconômico, apresentando o valor percentual de cada caso.

Quadro 4 − Percentual de alunos em dependência na disciplina matemática

Dependência em matemática	**Valor em percentual**
Estou em dependência	3%
Estive em dependência no anterior	11%
Nunca ficou em dependência	86%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de campo (2016)

De acordo com as informações no quadro acima, podemos observar que 86% dos alunos nunca ficaram de dependência em matemática; 11% disseram que estiveram de dependência no ano anterior; e 3% estavam de dependência no ano da pesquisa. Esses dados mostraram que a maior parte dos alunos pesquisados não ficou em dependência na disciplina matemática, o que revelou um baixo índice de dependência nas turmas pesquisadas, apesar de esses alunos dedicarem poucas horas de estudo para o aprendizado de Matemática, como revelou os dados produzidos sobre a frequência de estudo dessa disciplina fora da escola apresentados a seguir:

Quadro 5 − Frequência de estudo na disciplina matemática fora da escola

Frequência de estudo na disciplina matemática fora da escola	**Percentual de aluno (%)**
Todos os dias	6%
Mais de três vezes por semana	14%
Costumo estudar três vezes ou menos por semana	23%
Só no período de prova	47%
Não costumo estudar fora da escola	10%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de campo (2016)

Conforme as informações produzidas no quadro acima, podemos observar que 47% da amostra pesquisada só estuda a disciplina matemática no período de prova, 23% costuma estudar a disciplina três vezes ou menos a cada semana, 14% mais de três vezes por semana, 6% estudam todos os dias a matemática e ainda há um grupo de alunos que não estuda a disciplina fora da escola, 10%. Essas informações nos levaram a constatar que o percentual de alunos que estuda a matemática não só no período de prova, 43%, é menor do que os que estuda a disciplina só nesse período ou que não estuda matemática, 57%. Esses dados mostraram que a maioria dos alunos pesquisados dedica pouco de tempo de estudo para a disciplina matemática, o que pode contribuir para uma formação ruim desses alunos perante os conteúdos matemáticos.

O desinteresse pelo estudo na disciplina matemática apontado no parágrafo anterior, talvez, esteja atrelado também à forma como o conteúdo é explicado, pois se essa explicação não for clara e de fácil entendimento, é bem provável, que o discente perca o interesse pela disciplina, haja vista que ele não consegue compreender o que está sendo apresentado nas aulas. Sobre a compreensão das explicações nas aulas de matemática o quadro a seguir traz as informações produzidas na amostra pesquisada.

Quadro 6 – Compreender as explicações nas aulas de matemática

Compreender as explicações nas aulas de matemática	**Percentual de aluno (%)**
Sempre	24%
Quase sempre	31%
Poucas vezes	43%
Nunca compreendo	2%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de campo (2016)

Conforme as informações mostradas no gráfico supracitado, podemos afirmar que 45% da dos alunos pesquisados poucas vezes ou nunca compreenderam o que estava sendo explicado pelo professor nas aulas de Matemática. Talvez, esse fato seja resultado da metodologia adotada nas aulas da disciplina, já que 65% dos alunos pesquisados afirmaram que essas aulas aconteceram nos moldes tradicionais de ensino, isto é, o professor explica o conteúdo, depois apresenta exemplos e, em seguida, aplicações para que os alunos repliquem o que havia sido ministrado. Essa prática de causa-efeito não garante que os discentes de fato compreenderam o assunto, pois prioriza a memorizado ao invés da aquisição saberes. Sobre esse modo de ensino, D'Ambrósio (1996, p. 120) sugere "[...] a adoção de uma nova postura educacional, a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem baseado numa relação obsoleta de causa-efeito." Concatena com as ideias desse autor, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática ao afirmarem que:

> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não aprendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (BRASIL, 1998, p. 37)

Outro olhar sob esse modo de ensino é apresentado por Piletti (2013, p. 143) ao afirmar que: “muitas pessoas ainda entendem o processo ensino-aprendizagem de forma estática. Ou seja, de um lado existe o professor que ensina, transmite informações; do outro lado está o aluno, que escuta e deve esforça-se para aprender.”

O autor supracitado defende que o ensino deva ocorrer por meio de uma relação chamada Relação Dinâmica, isto é, a relação que acontece entre humanos. Os alunos não podem ser considerados como depósitos de conhecimentos memorizados sem entender, uma gaveta ou arquivo, pois os alunos são seres capazes de pensar, refletir, discutir, ter opiniões, participar, decidir o que pretende aprender ou não, da mesma forma o professor. Desse modo, a relação dinâmica acontece quando:

> Na sala de aula, enquanto ensina, o professor também aprende e, enquanto aprende, o aluno também ensina. O professor ouve os alunos, respeita os seus pontos de vista, trabalhando-os durante a aula; além de ouvir o professor, os alunos também relatam as suas experiências, que são únicas, das quais, apesar de intransferíveis, o professor e os colegas podem extrair lições importantes. (PILETTI 2013, p. 144)

Ainda de acordo com esse autor, a aprendizagem tem que ser entendida como um processo dinâmico, pois alunos e professores são seres em transformação, os quais se desenvolvem quando estão disponíveis a novos conhecimentos, que venham a modificar nossas concepções, crenças, convicções, pois só assim ocorre à evolução do conhecimento, caso contrário, estaremos fado ao retrocesso e ao estanque.

O aprendizado na dinâmica da sala de aula pode ser constado de várias maneiras pelo professor, dentre essas possibilidade existem os recursos didáticos, livros, listas, jogos, entre outros, cuja função é verificar e consolidar o conhecimento dos alunos, quando estes forem submetidos ao ensino de determinado conteúdo. Nesse pensar, a pesquisa realizada com alunos egressos buscou verificar também quais os recursos usados pelo professor para fixar o conhecimento desses alunos a respeito das regras de três, as informações produzidas são apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 7 – Recursos didáticos utilizados para fixar os conteúdos matemáticos

Recursos didáticos utilizados para fixar os conteúdos matemáticos	**Percentual de aluno (%)**
Apresentava uma lista de exercícios para sempre resolvidos	77%
Apresentava jogos envolvendo o assunto	2%
Mandava resolver os exercícios do livro didático	12%
Não propunha questões de fixação	-
Procurar questões sobre o assunto para resolver	9%
Propunha a resolução de questões por meio de softwares	-
Total	100%

Fonte: Pesquisa de campo (2016)

Conforme as informações apresentadas no quadro acima, o recurso didático mais utilizado para fixar o conteúdo matemático nas aulas foi à lista de exercícios, 77%, e o segundo mais utilizado foi os exercícios do livro didático. Além desses foram usados também, com menor frequência, os recursos jogos, 2%, e a pesquisa por questões que tratassem do assunto regra de três, 9%.

Ainda sobre a ideia do ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998) recomendam que o ensino da Matemática deva ocorrer vinculado à resolução de problemas como forma de apresentar conceitos, propriedades, procedimentos e relações inerentes ao conteúdo matemático que se pretende ensinar. Assim, a resolução de problemas é o eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p. 40)

Para Miron (2013) a resolução de problemas tem forte influência na aprendizagem da Matemática de forma significante, pois torna o aluno um agente ativo da construção do conhecimento, e não mais executor de tarefas usando modelos. Segundo essa autora a metodologia de resolução de problemas permite ao aluno utilizar de seus conhecimentos prévios, além de desenvolver novas estratégias de solução a partir de discussões com os colegas e professor, proporcionando um ambiente salutar para aprendizagem, uma vez que seus conhecimentos matemáticos são aplicados em situações reais. Dessa forma essa metodologia contribuiu para que o aluno encontre motivação para estudar Matemática.

> Ensinar através da resolução de problemas tem o sentido mais forte significando que o problema é o ponto inicial do desenvolvimento do conteúdo matemático. É a partir de um problema orientador que os conteúdos vão sendo criados. Ou seja, ele deve oferecer aos alunos a possibilidade de construir conhecimento a partir e através de problemas, e de vivenciar situações de aprendizagem por meio de um trabalho autônomo, criativo e significativo. (MIRON, 2013, p. 23)

Os autores Greboggi e Agranionih (2016) consideram a resolução de problemas uma metodologia para ensinar e aprender Matemática, apesar se configurar em uma tarefa trabalhosa e desafiador, essa metodologia traz grande contribuição para professores e alunos no processo de aprender.

> Para que haja aprendizagem é importante que o professor verifique conhecimentos prévios dos alunos, para planejar problemas matemáticos que façam sentido e desafiem os alunos, de modo a permitir que compreendam e construam novos conhecimentos. Outro aspecto relevante é o professor atuar como mediador, problematizador, questionador, investigador, antes, durante e após a resolução de problemas. Os documentos estudados também apresentam a importância da troca de ideias e experiências entre os colegas, como forma de expressão e socialização de conhecimentos. (GREBOGGI e AGRANIONIH, 2016, p. 3)

Diante do que foi exposto sobre a relevância da metodologia de resolução de problemas como ponto de partida para a atividade Matemática, amparada nas perspectivas de Greboggi e Agranionih (2016), Miron (2013) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), , a pesquisa mostrou, no entanto, que apenas 21% dos alunos afirmaram que o assunto matemático ministrado em sala teve início com a apresentação de um problema, para, em seguida, sistematizar os conceitos matemáticos do assunto abordado com base nas intervenções feitas na resolução do problema. Isso mostra que a prática de utilizar a metodologia de resolução de problema como ponto de partida no ensino de matemática, como querem os PCN (1998), ainda se mostra de maneira tímida, com certa resistência em adotar metodologias alternativas para o ensino de Matemática, sendo majoritária a metodologia tradicional da aula expositiva.

Além da metodologia de resolução de problemas, os PCN (1998) sugerem algumas formas de trabalho que podem ser utilizadas em sala de aula para ensinar os conteúdos matemáticos. Essas formas de trabalho são: a História da

Matemática, o uso das tecnologias de comunicação e uso de jogos. Estes, por sua vez, podem ser utilizados nas aulas de matemática como uma proposta tácita de resolução de problema, vinculada a um determinado conteúdo. Visto que os jogos trazem em sua configura uma problemática a ser resolvida, o que possibilita ao aluno explorar a imaginação, a criatividade, o raciocínio lógico e a tomada de decisões, componentes essenciais para a boa formação do aluno. Além disso, os jogos contribuem para que as aulas de matemática sejam mais atrativas, divertidas e dinâmicas.

A nossa pesquisa teve como propósito maior, saber quais as dificuldades apontadas pelos alunos no ensino da Regra de Três. Para tanto, foi elaborado um quadro com as possíveis dificuldades enfrentadas pelos discentes ao estudarem o assunto regra de três, sendo que essas prováveis dificuldades foram construídas com base em minhas experiências enquanto professor efetivo da escola pública.

Antes de comentarmos sobre as dificuldades sobre o ensino de regra de três apresentadas no quadro a seguir, cabe analisarmos as repostas acerca do questionamento que fizemos no questionário: **Como você gostaria de aprender o assunto regra de três?** Essa pergunta foi subdividida em sugestões metodológicas para o ensino de regra de três, as quais foram ponderadas pela frequência de utilização, por meio das respostas: ‘Sempre’, ‘Quase sempre’, Ás vezes’ e ‘Nunca’.

A primeira sugestão trazia como proposta o ensino de regra de três por meio da *aula expositiva* e *consulta do livro didático,* a pesquisa mostrou que dos 100 alunos consultados, 30% ‘Raramente’ gostariam de aprender o assunto regra de três via a aula expositiva e por meio da consulta do livro didático. Esse dado corrobora com as concepções de D’Ambrósio (1996), PCN (1998) e Piletti (2013) acerca da predominância da aula expositiva no ensino de matemática. Talvez, essa metodologia não desperte tanto o interesse do aluno em aprender o conteúdo matemático, visto que a pesquisa mostrou também que 37% dos alunos optaram por ‘Quase sempre’ estudar o ensino de regra de três por meio da apresentação de problemas, o que representou o maior percentual dentre as opções pesquisadas.

Doravante, apresentamos, no quadro a seguir, os percentuais das possíveis dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudarem o assunto regra de três no 7º ano do ensino fundamental, e estão representadas pelas categorias: ‘Muito fácil’, ‘Fácil’, ‘Regular’, ‘Difícil’ e ‘Muito difícil’.

Quadro 8 − Possíveis dificuldades no aprendizado da regra de três

Assunto	**Grau de dificuldade para aprender**				
	Muito fácil	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito difícil**
Conceito de proporção.	11%	33%	41%	11%	4%
	44%			15%	
Realizar multiplicação de frações	21%	44%	27%	7%	1%
	65%			8%	
Propriedade fundamental da proporção.	2%	23%	58%	15%	2%
	25%			17%	
Determinar o valor desconhecido x em proporção da forma: $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$	5%	16%	25%	37%	17%
	21%			54%	
Conceito de grandeza	1%	32%	44%	17%	6%
	33%			23%	
O significado de grandezas diretamente proporcionais	0%	18%	55%	21%	6%
	18%			27%	
Determinar quando uma grandeza é diretamente proporcional à outra grandeza	2%	16%	38%	36%	8%
	18%			44%	
O significado de grandezas inversamente proporcionais	2%	16%	50%	26%	6%
	18%			32%	
Determinar quando uma grandeza é inversamente proporcional à outra grandeza.	3%	16%	43%	36%	2%
	19%			38%	
Determinar quando duas grandezas não são proporcionais	6%	28%	50%	11%	5%
	34%			16%	
Armar a regra de três simples com base no enunciado	13%	29%	41%	14%	3%
	42%			17%	
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais	9%	24%	41%	24%	2%
	33%			26%	
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo grandezas inversamente proporcionais	5%	23%	39%	27%	6%
	28%			33%	
Resolver problemas de regra de três simples quando uma das grandezas for o tempo representado em horas e minutos.	6%	18%	28%	36%	12%
	24%			48%	
Resolver problemas de regra de três simples quando é necessário fazer transformações de unidades (Quilômetro para metro, litro para milímetro, quilograma para grama e vice-versa)	4%	14%	31%	33%	18%
	18%			51%	
Resolver problemas de regra de três simples com números decimais (números com vírgula)	5%	22%	40%	23%	10%
	27%			33%	
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo porcentagem (%)	6%	27%	47%	17%	3%
	33%			20%	
Armar a regra de três composta com base no enunciado	6%	21%	32%	34%	7%
	27%			41%	
Resolver problemas de regra de três composta envolvendo somente grandezas diretamente proporcionais.	8%	17%	39%	22%	14%
	25%			36%	
Resolver problemas de regra de três composta somente com grandezas inversamente proporcionais.	0%	21%	40%	22%	17%
	21%			39%	
Resolver problemas de regra de três composta envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais.	4%	9%	38%	24%	25%
	13%			49%	
Resolver problemas de regra de três composta quando uma das grandezas é um número fracionário (número em forma de fração) .	3%	7%	37%	29%	24%
	10%			53%	
Resolver problemas de regra de três em que é necessário adaptar as informações apresentadas no enunciado.	3%	13%	44%	22%	18%
	16%			40%	
Resolver problemas de regra de três em que o resultado obtido é a resposta da questão.	2%	14%	47%	26%	11%
	16%			37%	
Resolver problemas de regra de três em que o resultado obtido não é a resposta da questão.	1%	15%	38%	26%	20%
	16%			46%	
Resolver problemas de regra de três em que basta dispor as informações diretamente do enunciado.	4%	11%	47%	23%	15%
	15%			38%	

Fonte: Pesquisa de campo (2016)

A nossa análise foi feita sobre as dificuldades apontadas pelos alunos acerca de alguns assuntos que entendemos serem relevantes para a compreensão da regra de três. Além disso, analisamos também as dificuldades dos alunos a respeito da resolução dos problemas de regras de Três simples e composta.

Com relação ao conceito de proporção, que é fundamental para o estudo da regra de três, a pesquisar revelou que 41% dos alunos responderam que o entendimento desse conceito é ‘Regular’, e 33% responderam que tal conceito é ‘Fácil’, 11% responderam ‘Muito fácil’, 4% disseram que é ‘Muito difícil’ e 11% disseram que é ‘Difícil’. Essas duas últimas respostas mostraram que 15% dos alunos apresenta algum tipo de dificuldade em assimilar o conceito de proporção. Diante desse fato, presumimos que essa dificuldade seja de cunho pedagógico, pois o conceito de proporção só é apresentado ao aluno no 7º ano do ensino fundamental. No entanto, tal conceito deveria ser apresentado, mesmo que superficialmente, nos anos anteriores, quando os alunos começam a conhecer as operações aritméticas de multiplicação e divisão.

> No início do processo de escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação, mas frequentemente esta relação não é enfatizada. A operação multiplicação é apenas enfocada como uma "adição repetida" de parcelas iguais, a qual não mostra o sentido de proporção que existe por trás desse processo. (FIOREZI, 2010, p. 103)

Aqui cabe ressaltar que a assimilação de um conceito não está vinculada a uma mensagem pronta, a uma simples definição, é preciso que se construa esse conceito através de situações que forneçam elementos que subsidiem essa construção.

> Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los. (VERGNAUD, 1996 *apud* PAIS, 2011, p. 57)

A pesquisa mostrou também que 37% dos alunos classificou como ‘Difícil’ o item: Determinar o valor de x em proporção da forma a/x = b/c. Essa dificuldade pode estar atrelada ao conceito de proporção e ao uso da propriedade fundamental da proporção (ou propriedade da igualde de frações), que, certamente, não foram efetivamente compreendidos pelo aluno nas aulas de Matemática. Outro motivo que, provavelmente, justifique esse percentual de dificuldade é porque esses alunos não sabem como determinar o valor de ‘x’ na igualdade. Isso acontece quando o aluno não apreendeu de fato o funcionamento do algoritmo de resolução de equação do 1º grau, ensinado através do princípio de equivalência ou pelo método prático. Com relação a este, Moraes (2013, p. 34) afirma que: “[...] saber usar regras práticas de resolução de equações é um ponto importante na aprendizagem de resolução de equações, mas se deve tomar cuidado para não enfatizar o trabalho mecânico com tais regras.” Ainda sobre esse pensar, a referida autora acredita que, com base nas ideias de Kieran (2005), o método prático de transposição na resolução de equações do 1° grau, que pode ocasionar erros na resolução dessas equações, devido a não compreensão desse método e tendo como consequência a memorização de regras e procedimento mecânicos sem sentido, comprometendo o aprendizado da equação do 1° grau.

> [...] embora a transposição seja muitas vezes considerada como uma versão abreviada do procedimento de efetuar a mesma operação nos dois membros, para os alunos, esse procedimento pode ser visto de maneira diferente. O método de efetuar a mesma operação nos dois membros é justificado, precisamente, para manter os termos da equação em equilíbrio, mantendo a equivalência entre as etapas durante o processo de resolução; essa ênfase no equilíbrio entre o primeiro e segundo membro não aparece no procedimento de transposição. O outro diferencial nessas duas abordagens é o fato de que o primeiro procedimento envolve a simplificação nos dois membros da equação, enquanto que na transposição isso ocorre apenas em um dos membros. (MORAES, 2013, p. 34)

Outros itens que analisamos foram: ‘O significado de grandezas diretamente proporcionais’ e ‘O significado de grandezas inversamente proporcionais’. Os percentuais mostraram que, em relação ao primeiro, 55% dos alunos responderam ‘Regular’, 21% disseram que é ‘Difícil ’ o significado de grandezas diretamente proporcionais, 6% responderam que é ‘Muito difícil’ e 18% consideraram ‘Fácil’. Já com relação o segundo item de dificuldade, os percentuais mostraram o seguinte: 2% responderam ‘Muito fácil’, 16% disseram ‘Fácil’, 50% optaram por ‘Regular’, 26% responderam ‘Difícil’ e 6% disseram que é ‘Muito difícil’.

Em uma última análise acerca das dificuldades dos itens supracitados, observamos que 27% dos alunos pesquisados apresentam alguma dificuldade em entender o significado de grandezas diretamente proporcionais, pois esse percentual engloba as respostas ‘Difícil’ e ‘Muito difícil’ do quadro. Sobre as grandezas inversamente proporcionais, observamos que 32% dos alunos não entenderam o significado desse conceito, visto que o percentual apresentado corresponde às respostas ‘Difícil’ e ‘Muito difícil’ do quadro de dificuldades.

Frente a esse cenário de dificuldades com relação ao significado de grandezas direta e inversamente proporcionais, foi engendrada a nossa proposta de ensino por meio de uma sequência didática, com o intuito de minimizar tais dificuldades. Para tanto, foram construídas um conjunto de atividades didáticas, com propósito de conduzir o aluno a identificar os princípios dos conceitos de grandezas proporcionais (direta e inversa), pois, entendemos que a aquisição desses conceitos é imprescindível para que o aluno consiga resolver problemas que relacionam grandezas proporcionais, tanto por meio da regra de três como por outro método.

> [...] uma das causas das dificuldades apresentadas pelos discentes na resolução de questões envolvendo regras de três está na identificação do tipo de grandezas envolvidas nas questões, ou seja, em identificar se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais (SÁ; COSTA, 2014, p. 97)

Ainda sobre as dificuldades dos alunos no aprendizado das regras de três, apresentamos os percentuais dessas dificuldades a respeito da resolução de problemas de regra de três simples, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais. Os dados mostraram que 24% dos alunos acharam ‘Difícil’ resolver problemas de regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais. Já com relação aos problemas de regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais, a pesquisa mostrou que 27% dos alunos acharam “Difícil” resolver tais problemas.

Certamente, essas dificuldades na resolução dos problemas de regra de três simples tendem a ser erradicadas à medida que os alunos compreenderem a relação de proporcionalidade direta e inversa entre as grandezas envolvidas. Assim, é importante que o professor utilize metodologias alternativas que subsidiem seu trabalho em sala de aula, para viabilizar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos aos alunos, em particular, o ensino das regras de três.

Quanto à resolução de problemas de regra de composta com grandezas direta e inversamente proporcionais, observamos que 24% dos alunos responderam que acham difíceis esses problemas, e 25% dos pesquisados acham muito difíceis os problemas de regra de três composta que combinam grandezas direta e inversamente proporcionais. Presumimos que essas dificuldades ocorreram devido ao fato recorrente já comentado anteriormente, isto é, os alunos não entenderam efetivamente os conceitos de grandezas proporcionais. Logo, eles não conseguem realizar as análises que caracterizam as grandezas do problema quanto à proporcionalidade, e tampouco conseguem utilizar a técnica da regra de três.

Essa breve análise sobre a dificuldade em resolver os problemas de regra de três composta contempla as demais, pois sem a compreensão da relação de proporcionalidade que ocorre entre as grandezas, o aluno não obtém êxito na resolução do problema, ainda que ele memorize o método de resolução da regra de três por meio de flechas, ou outro qualquer, esse aluno estará replicando um procedimento mecanicamente que não é válido para todas situações, pois êxito na execução da regra depende da disposição das grandezas na proporção composta, e essa disposição das grandezas está subordinada a análise proporcional.

Este trabalho de campo teve como fito mostrar as possíveis dificuldades que os alunos egressos vivenciaram no estudo da regra de três, quando os mesmos estavam no 7° ano do ensino fundamental. Além disso, a pesquisa também nos possibilitou observar que nem todas as turmas estudaram o assunto regra de três no decorrer do 7º ano do ensino fundamental, como esperávamos. Esse fato nos chamou atenção, pois o conteúdo regra de três é ensinado, normalmente, nesse nível de ensino. E a ausência desse ensino para aqueles alunos pode causar prejuízos em estudos posteriores, que utilizam as regras de três como técnica para resolver problemas com proporcionalidade simples e composta.

Os dados mostram também que os alunos que estudaram o conteúdo da regra de três, encontravam-se com dificuldades em compreender os significados de grandezas proporcionais (direta e inversa), já que essas dificuldades somaram 59%, considerando os percentuais do grau de dificuldade, “Difícil” e “Muito difícil”, do quadro anterior com relação à compreensão dos significados das grandezas direta e inversamente proporcionais, respectivamente. Ou seja, mais da metade dos alunos não possuíam um conhecimento consolidado sobre as relações proporcionais (direta e inversa) entre grandezas.

Esse quadro de dificuldades com relação ao conhecimento sobre proporcionalidade compromete não só o estudo da regra de três como também os outros conteúdos matemáticos dos anos posteriores e a tomada de decisão pelo aluno no contexto social. Visto que o conceito de proporcionalidade está vinculado não somente à área da Matemática, como também a outras áreas do conhecimento e as várias situações do cotidiano.

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo das operações com os números naturais, da representação fracionária dos números racionais, de áreas, de funções, probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 224)

A relevância da proporcionalidade na formação do aluno como sujeito pensante e atuante na sociedade é defendida também pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, quando afirmam: “O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real.” (BRASIL, 1998, p. 67)

Frente à relevância do estudo da proporcionalidade e as dificuldades apresentadas pelos alunos sobre o ensino da regra de três mostradas na pesquisa, fomos motivados a construir uma proposta de ensino desses conteúdos por meio de uma sequência didática diferente do modo tradicional de ensino, a questão de pesquisa e o objetivo do nosso estudo, o qual busca avaliar os efeitos causados por uma sequência didática no desempenho dos alunos com relação à resolução de questões de regra de três simples e composta.

Sobre as atividades da sequência didática, buscamos alinhá-la com um dos objetivos de Matemática para o terceiro ciclo do ensino fundamental presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais acerca da proporcionalidade, que diz:

> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 65)

Assim, as atividades estão sistematizadas de maneira a conduzir o aluno a compreender de forma atuante as relações proporcionais entre duas grandezas por meio da regularidade. Com isso, esperamos que o aluno perceba que a variação proporcional ocorre de forma conjunta e por meio das operações aritméticas da multiplicação e divisão, e utilize essa percepção na análise das relações proporcionais e nas observações a serem construídas ao final de cada atividade.

De posse desses princípios sobre a relação proporcional e da formalização dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, pressupomos que o ensino e aprendizado das regras de três aconteçam sem grandes dificuldades, e com isso contemple o que sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) de matemática do ensino fundamental para a regra de três, que é vista por esse documento como uma estratégia a ser utilizada na resolução de problema com variação proporcional entre quantidades, como mostra o excerto a seguir: “[...] resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três.” (BRASIL, 1998, p. 81)

Em última análise, acreditamos que a pesquisa realizada com os alunos egressos nos forneceu informações relevantes que nos ajudaram a nortear os nossos estudos sobre o objeto regra de três em um contexto com alunos do 7° ano do ensino fundamental. Além do mais, a referida pesquisa serviu também como parâmetro para a construção de uma proposta de ensino das regras de três por meio de uma sequência didática diferente da tradicional, composta por um conjunto de atividades didáticas que irão, na melhor das hipóteses, subsidiar os alunos na compreensão dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, o que julgamos, com base em estudos anteriores, ser essencial para que o ensino e aprendizado do nosso objeto de estudo, de modo significativo, funcional e não de maneira mecânica como geralmente acontece.

A seguir, apresentamos a seção sobre a concepção e análise a priori, onde a proposta de sequência didática para o ensino das regras de três é abordada com maior ênfase, bem como outros aspectos inerentes a segunda fase da engenharia didática.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta fase da Engenharia Didática, buscamos abordar sobre o ensino de Matemática no contexto atual e como esse ensino pode acontecer por meio de algumas tendências da Educação Matemática. Além desses pontos, fazem parte desta seção às questões do pré e pós-teste que, aliás, são as mesmas questões que serão utilizadas nessas duas provas, pois dessa forma poderemos avaliar ponto a ponto o desempenho dos alunos, antes e depois de aplicarmos uma sequência didática, a qual será abordada nesta seção com mais detalhes.

4.1. O ENSINO DE MATEMÁTICA E AS TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

4.1.1. O ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino da disciplina matemática na educação básica tem com objetivo fornecer saberes aos aprendizes, para atuarem na sociedade como indivíduos capazes de compreender, interpretar, analisar e contextualizar a realidade que os cercam por meio dos conhecimentos matemáticos, dessa forma o ensino da matemática contribui tanto para a formação pessoal como cidadã dos alunos.

> Como todas as disciplinas da escola básica, a matemática é um meio para a formação pessoal, desempenhando um papel fundamental na articulação entre a expressão e a compreensão de fenômenos; entre a análise argumentativa e a síntese que favorece a tomada de decisões; entre o enfrentamento de questões que a realidade concreta continuamente apresenta e o recurso a instrumentos abstratos que constituem meio de aproximação de tal realidade. (MACHADO, 2014, p. 14)

Entretanto, o ensino dessa disciplina no cenário atual não condiz com o trecho supracitado, quando olhada pelas lentes das avaliações nacionais de larga escala que mensuram a eficácia do ensino de Matemática na educação básica. Acerca disso, o site do G1[18] apresentou um estudo sobre o desempenho dos alunos nas avalições da Prova Brasil (Anresc) e do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2013. Nele constou que apenas 9,3% dos estudantes do 3° ano do ensino médio obtiveram um aprendizado apropriado em Matemática, tanto das escolas pública e privada. A matéria ressalta ainda, que esse índice apresentou queda de 2009 a 2013, no que se refere à Prova Brasil.

Sobre o ensino fundamental, o site afirmou também que o ensino de Matemática apresenta problema, pois o percentual de alunos que tiveram domínio da disciplina, no final do primeiro ciclo, 5° ano, era de 39,5%, sendo que esse índice cai para 16,4% ao final do segundo ciclo, 9° ano.

---

18 Disponível em:<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/12/so-93-dos-alunos-do-ensino-medio-sabem-o-esperado-em-matematica.html>. Acesso em: 23 abr. 2017.

Essas avaliações de larga escala, segundo o G1, servem de diagnóstico para avaliar a qualidade do ensino brasileiro e foram fomentadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep).

Ainda sobre o ensino de Matemática, o diretor do IMPA[19], Marcelo Viana, o considera como catastrófico. Essa afirmação ocorreu em uma entrevista a Folha de São Paulo em 28/01/2016[20].

Para Marcelo Viana, o Brasil está com dificuldade na educação básica e na formação dos licenciados em Matemática. Além disso, ele afirmou que 40% dos alunos não conseguem entender o enunciado de uma questão de matemática e que somente 4% desses poderiam trabalhar com tecnologia.

Na perspectiva de Viana a precariedade do ensino de Matemática está atrelada, entre outros fatores, à escola e a baixa qualidade na formação dos professores tanto nas universidades públicas e, sobretudo, nas IES particulares.

Diante dos trechos supracitados, talvez seja coerente dizer que o ensino de Matemática, salvo algumas exceções, se apresenta de forma pouco eficiente. Isso é corroborado por Machado (2014, p. 13), quando afirmou que: “Periodicamente, resultados de avalição ou pesquisa acadêmicas chamam a atenção de todos para o fato basal: ressalvadas as exceções de praxe, de modo geral o ensino de matemática nas escolas básicas vai mal.”

A respeito do fato, Brasil (1998) de Matemática do ensino fundamental mencionam alguns entraves que são decisivos para o ensino de Matemática no país, a saber:

> Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas. (BRASIL, 1998, p. 21)

Entre as equivocadas concepções pedagógicas que o trecho se refere estão à resolução de problemas e a História de Matemática. Com relação à primeira, ela é vista como um item isolado que se apresenta na forma de uma aplicação de

---

19 IMPA- Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

20 Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2016/01/1734373-ensino-de-matematica-no-brasil-e-catastrofico-diz-novo-diretor-do-impa.shtml>. Acesso em: 23 abr 2017.

aprendizagem, amparada em listas de problemas que são resolvidas por meio de técnicas ou formas conhecidas previamente pelos alunos (BRASIL, 1998, p. 22). Cabe aqui ressaltar, no entanto, que um problema, na visão de Lester (1982), citado por Dante (2009, p. 12), “é um situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução.” Nesse pensar, cabe ao professor obter os esclarecimentos necessários sobre a metodologia de resolução de problemas e sua implementação nas aulas de matemática, para que essa metodologia não seja reduzida a mera resolução de listas de exercícios.

Sobre a História da Matemática, apesar de ser considerada importante para aprendizagem por oportunizar a compreensão abrangente do percurso dos métodos e conceitos matemáticos, ela é vista, equivocadamente, na maioria das vezes como um item dos conteúdos de matemática utilizada apenas para informar fatos ou biografias de personagens da Matemática. (BRASIL, 1998, p. 23) A História da Matemática não se resume a isso; ela possui uma importância significativa no contexto de ensino dos conteúdos matemáticos, porque “[...] é considerada um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época.” (D’AMBROSIO, 1996, p. 29-30)

Outro olhar sobre as dificuldades no ensino de Matemática é apontado por Machado (2014) que firmou que as concepções que o docente tem acerca do conhecimento e da disciplina que ministra influenciam diretamente no ensino, pois

> Se o professor associa o ato de ensinar à meta de “dar a matéria”, no sentido de encher a cabeça dos alunos de “conteúdos”, sua prática educacional, suas ações de planejamento e avaliação serão atribuídas de tal concepção; se pensa a matemática como um tema essencialmente “abstrato”, “exato”, especialmente “difícil”, os resultados que obtém decorrem naturalmente de tais pressuposições. (MACHADO, 2014, p. 14, grifo do autor)

O trecho nos faz suscitar de práticas vivenciadas no início da nossa carreira como professor de matemática da educação básica, que na ocasião acreditava que para ocorrer o ensino e aprendizado da disciplina, era preciso o aluno adquirir uma quantidade significativa de informação sobre os conteúdos ministrados. No entanto, a experiência com o passar dos anos aliada a formação continuada, nos fizeram mudar a concepção de como ensinar a disciplina matemática e recorresse a outras metodologias de trabalho, que subsidiassem o aprendizado dos alunos. Nesse pensar, é necessário que nós professores de Matemática recorramos a metodologias alternativas com o propósito de possibilitar ao aluno a participação ativa na construção do seu conhecimento de forma crítica, reflexiva e autônoma.

Como metodologias alternativas para o ensino de matemática, estão as Tendências da Educação Matemática, as quais surgiram a partir da procura por soluções dos problemas enfrentados pela Educação Matemática. (LOPES; BORBA, 1994 apud FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 15)

Alternativas para o ensino de matemática também aparecem nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), que indicam caminhos para trabalhar a matemática em sala de aula, como por exemplo, a História da Matemática, a Resolução de Problemas, o uso de Jogos Pedagógicos e a utilização das Tecnologias da Comunicação e Informação. Aliada a essas podemos citar o ensino por Atividades de Redescoberta, cujo propósito é ensinar os conteúdos matemáticos por meio de atividades, que levem o aluno à percepção e compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Nas subseções seguintes, abordamos as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998) para o ensino fundamental como Tendências da Educação Matemática e também a Modelagem Matemática, a Etnomatemática e o Ensino de Matemática por Atividades de Redescoberta.

4.1.2. AS TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

4.1.2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O uso da História da Matemática é um caminho a ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem da disciplina matemática, pois por meio dessa tendência é possível apresentar a Matemática como uma construção humana utilizada por diferentes culturas em momentos distintos da história da humanidade e também mostrar a evolução ocorrida nos conceitos e procedimentos matemáticos. Assim, a História da Matemática pode despertar no aluno o interesse pela Matemática. (BRASIL, 1998, p. 42)

A relevância da História da Matemática no processo de ensino de matemática também é compartilhada por Lopes e Ferreira (2013), citados por

Mendes e Chaquiam (2016, p. 78), quando afirmaram que “a história da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto em pauta.”

Para Machado (2014) o ensino de qualquer conhecimento científico não deve ser desvinculado de sua História, pois

> Ninguém pode ensinar nenhum conteúdo, das ciências às línguas, passando pela matemática, sem uma visão histórica de seu desenvolvimento. É na história que se podem perceber as razões que levaram tal ou qual relação, tal ou qual conceito a ser constituído, reforçado ou abandonado. É na história que buscamos o significado das transformações – de significado. (MACHADO, 2014, p. 29)

Com relação ao uso adequado da História da Matemática nas aulas de matemática, os autores Mendes e Chaquiam (2016, p. 81) concordam com Medes (2013, p. 68) ao afirmar que

> [...] o uso da história da matemática em sala de aula transcende o uso de narrativas que retratam nomes, datas e locais, e que em grande parte se encontram desvinculadas dos conteúdos matemáticos abordados em sala de aula ou das ideias produzidas para explicar determinados contextos, sejam sociais, culturais ou internos a própria Matemática.

Para este autor, o ensino e aprendizagem de matemática se tornam significativos, quando estão aliados com atividades que abordam contextos históricos da Matemática.

> Para efetivarmos um ensino-aprendizagem significativo em matemática, é necessário utilizarmos as atividades históricas, buscarmos no material histórico existente todas as informações úteis à condução da nossa ação docente e somente a partir daí orientar os estudantes à realização de atividades. Surge, porém, nesse momento, uma questão: Como conduzir esse processo? Esse questionamento se resolve quando fazemos uma reflexão acerca da necessidade de se buscar a investigação histórica como meio de (re)construção da matemática produzida em diferentes contextos sócio-culturais e em diferentes épocas da vida humana. (MENDES, 2008, p. 41)

De acordo com o autor do trecho, a História da Matemática é um meio para a construção do conhecimento matemático escolar. Além disso, Brasil (1998, p. 42) complementa ao afirmar que os conceitos matemáticos associados com a história fornecem informação cultural, sociológica e antropológica para a formação dos alunos, o que faz da História da Matemática um recurso de resgate cultural.

De posse dos trechos que relataram a importância da História da Matemática no ensino da disciplina matemática e as recomendações do uso da História nas aulas de matemática para que o aprendizado se torne atrativo, interessante e significativo, passamos a apresentar a Tendência sobre a Resolução de Problemas nas aulas de matemática.

4.1.2.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O pensar dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental acerca da resolução de problemas para o ensino de matemática revela que "[...] Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução." (BRASIL 1998, p. 40) Dante (2003, p.11) complementa essa afirmação ao dizer que "Um dos principais objetivos da Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las."

Nesta perspectiva, utilizar a resolução de problemas nas aulas de matemática

> [...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p. 40)

Aqui cabe ressaltar que a expressão problema mencionada nos trechos acima não se encaixa em exercícios do tipo padrão, em que o aluno dispõe de fórmulas ou procedimentos prontos que lhe forneça a solução imediata. Por outro lado, um problema, segundo Dante (2003, p. 9), "É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la." Esta ideia é compartilhada por Brasil (1998) ao afirmar que

> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. (BRASIL, 1998, p. 41)

Frente a isso, Polya (1995) sugere alguns procedimentos (ou fases) hierárquicos que ajudam na estruturação de um problema, os quais são:

> Primeiro, temos que *compreender* o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executarmos* o nosso plano. Quarto, fazermos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 1995, p. 3-4, grifo do autor)

Em suma, o autor sugere que a resolução de um problema perpasse por quatro fases, isto é, a compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Todavia, resolver um problema em matemática exigirá do aluno conhecimentos prévios dessa disciplina e, também, outros conhecimentos que permitam relacionar as circunstâncias do problema apresentado com diferentes situações ou problemas similares para o ajudarem na consecução da solução. Nesse sentido, o trecho a seguir relata o que é necessário na resolução de um problema:

> [...] a tradução do problema exige a presença de conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos que facilitem a compreensão da tarefa, permitam a sua representação em termos matemáticos e ajudem a elaborar um plano para resolvê-la. (ECHEVERRÍA, 1998, p. 52)

A utilização da resolução de problemas nas aulas de matemática pressupõe fomentar algumas habilidades e competências além de ser um diferencial nas aulas. O que na perspectiva de Dante (2003 p. 11-15) são objetivos da resolução de problema, fazer o aluno a pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; ensinar o aluno a enfrentar situações novas; dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações matemática; tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras; equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e dar uma boa base matemática às pessoas.

Diante deste cenário, é conveniente afirmar que a proposta de resolução de problemas como forma de trabalho para o ensino de matemática oportuniza o aluno a externar seu conhecimento prévio, criatividade, experiência, abstração, expressar-se matematicamente e a ter autonomia em suas decisões. Além disso, nas perspectivas de Bueno, Alencar e Millones (2017), a resolução de problema

> [...] propicia a interação entre o professor e os alunos quebrando a rotina da sala de aula e contribui para o ensino de conceitos matemáticos tornando a aprendizagem do aluno mais significativa, contribuindo para que ele perceba que os processos de pensamento utilizados na sala de aula para a resolução podem ser utilizados na resolução de problemas do cotidiano. (BUENO; ALENCAR; MILLONES, 2017, p. 15)

De posse disso, Brasil (1998, p. 40) defende que a resolução de problemas deve ser o eixo organizador no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Assim, cabe ao professor buscar entender e aplicar os procedimentos que norteiam o fazer da resolução de problemas nas diversas fontes disponíveis acerca do assunto, no sentido de tornar as aulas de matemática mais atrativa, dinâmica e interessante para aluno e que este encontre significado no ensino desta disciplina.

4.1.2.3. O USO DE JOGOS

O uso metodológico dos jogos nas aulas de Matemática pode possibilitar uma atmosfera atrativa, interessante e desafiadora para as aulas, uma vez que o jogo traz embutido em sua configuração o desafio frente a uma situação posta. Isso faz com que aluno fomente estratégias na busca de solucionar o desafio apresentado. Assim, os jogos

> [...] podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 1998, p. 47)

No contexto do jogo o aluno constrói, faz rupturas e reconstrói estratégias na busca da melhor jogada, com o objetivo de vencer o jogo. Essas habilidades estão presentes em ações do cotidiano e nas aulas de matemática quando os alunos precisam resolver algum problema de cunho pessoal ou educacional, dessa forma

> [...] quando o aluno joga, ele se depara com a necessidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada, refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. O jogo possibilita uma forma de prazer e aprendizagem significativa durante as aulas de matemática. (SMOLE et al., 2007 apud PREVÊ; SHENECKEMBERG; MUNHOZ, 2014, p. 91)

Nesse cenário o uso de jogos como recurso metodológico nas aulas se mostra profícuo, pois dota os alunos de habilidades que podem ser utilizadas em contextos reais e no ensino de conteúdos, o que é comungado por Sá et al. (2014, p. 83) ao afirmarem que “o uso de jogos [...] é uma alternativa metodológica que leva a bons resultados tanto no campo do conhecimento matemático como na capacidade de expressar e registrar observações e conclusões.”

A atividade do jogo oportuniza o aluno a exercitar atitudes que são necessárias para sua formação pessoal, no que se refere a obedecer regras, o uso da ética, tomada decisões, o bom convívio com seus pares, assumir risco, ter confiança e autonomia.

Por outro lado, o jogo pode ser visto como algo sociocultural, permeado pela Matemática, além de contribuir para o fomento de procedimentos psíquicos fundamentais; ele também possibilita a execução de tarefas de forma prazerosa desprovida de imposições autoritárias, apesar de está subjaz em regras. (BRASIL, 1998, p. 47)

4.1.2.4. O USO DE TECNOLOGIAS DA COMUNICAÇÃO E INFORMAÇÃO

O uso das novas tecnologias de comunicação e informação (TIC) é uma realidade da sociedade contemporânea, em que tais recursos são utilizados tanto na produção de bens e serviços como também na produção do conhecimento por meio de pesquisas, intercambio de saberes, criação de hardwares, uso de softwares entre outros. Nesse cenário, onde os recursos tecnológicos são utilizados para tornarem a atividade humana mais prática e eficiente, o ensino das disciplinas escolares também devem se adequar nessa realidade tecnológica, cabendo à escola promover a inclusão digital do aluno e ao professor cabe uma formação adequada para o uso eficaz desses recursos tecnológicos no ensino de sua disciplina, promovendo, assim, um ensino e aprendizado de qualidades e adequados à realidade dos alunos.

Diante desse contexto, é necessário que o ensino de matemática nas escolas ocorra também por meio do uso das TICs, tornado o ensino dessa disciplina mais dinâmico, prazeroso e de fácil compreensão já que uma boa comunicação contribui para o aprendizado.

Dentre os recursos tecnológicos disponíveis para o ensino de matemática, citamos o computador, pois este “[...] exerce um papel decisivo no ensino da matemática nos dias atuais em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais para a matemática imaginária.” (MENDES 2008, p. 61) Além do mais, o uso desse instrumento tecnológico possibilita nas aulas de matemática a socialização do conhecimento dos alunos entre seus pares, melhora a relação professor/aluno, adequa o ritmo de aprendizagem do aluno e também promove um ensino atrativo da disciplina.

Ainda sobre o computador, Brasil (1998) entende que ele pode possibilitar muitas finalidades nas aulas de Matemática, uma vez que é visto

> - como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
> - como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
> - como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
> - como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. (BRASIL, 1998, p.44)

Na concepção de Piletti (2013, p. 118-119) a escola de hoje possui um aluno que requer novas práticas educacionais aliadas às novas tecnologias de comunicação e informação. Para tanto, é preciso que o professor adquira conhecimento acerca das tecnologias, para auxiliá-lo em sua práxis pedagógicas.

Uma pesquisa realizada pela Fundação Carlos Chagas mostrou que o uso da tecnologia em escolas públicas municipais do Estado do Piauí nas aulas de Matemática, durante o ano de 2009, trouxe avanço no processo de ensino e aprendizagem da disciplina ao ser ministrada em salas multimídia com lousa digital, laptops e tabletes, softwares educativos entre outros, pois ocasionou um aumento na nota dos alunos em Matemática em 8,3 pontos comparado ao mesmo período do ano anterior. No entanto, os alunos que não usufruíram dos recursos tecnológicos, mantidos em salas tradicionais, tiveram uma melhora na nota de apenas 0,2 pontos. (MARGALL, 2011 apud PILETTI, 2013, p. 123)

O parágrafo anterior concatena com as concepções de Mendes (2008) e Brasil (1998), ditas anteriormente, no que tange a eficácia da tecnologia nas aulas de Matemática. Todavia, cabe ressaltar que a utilização de computadores como recurso metodológico nas aulas de Matemática não é a realidade da maioria das escolas, pois de acordo com Rodrigues (2012b apud Piletti, 2013, p. 122) “os especialistas afirmam que o principal empecilho para a introdução dos meios digitais nas escolas é a falta de investimento nas formações inicial e continuada dos professores.” Além disso, Piletti (2013, p. 123) complementa que existem a falta de investimento em infraestrutura, “a indiferença e relutância” no uso das novas tecnologias.

Talvez, a resistência por parte de alguns professores em não utilizar as novas tecnologias como recurso pedagógico, esteja ambarada na ideia de que o uso de recursos tecnológicos nas aulas seja apenas utilizar o equipamento, sem explorar devidamente os recursos disponíveis atrelados com o fito da disciplina que pretende ensinar, o que para Braga (2013, p. 59) “[...] gera em alguns professores a sensação de que a tecnologia em sala de aula não passa de um modismo”. Dessa forma, a utilização dos recursos tecnológicos pelo recurso não trará benefícios nas aulas de Matemática, pois “Não é a incorporação da tecnologia que determina as mudanças nas práticas de ensino, mas sim o tipo de uso que o professor faz das possibilidades e recursos oferecidos pelas TICs.” (BRAGA, loc. cit)

Diante das concepções postas sobre o uso das tecnologias de comunicação e informação como recurso pedagógico para o ensino de Matemática, é necessário que o professor adquira conhecimentos e habilidades acerca dos softwares educacionais que pretende utilizar nas aulas, para que os mesmos possam contribuir com os objetivos de aprendizagem que o docente pretende alcançar ao ministrar um determinado conteúdo. Assim, os recursos tecnológicos não são vistos como um modismo e sim como ferramentas uteis no processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática, além de proporcionarem um ambiente atrativo, dinâmico, interativo, colaborativo e criativo nas aulas.

4.1.2.5. MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Flemming, Luz e Mello (2005, p. 22) a prática da modelagem já ocorreria desde épocas remotas, por volta de 1200 a.C., segundo afirmações de Biembengut via textos históricos, quando problemas foram solucionados por meio da utilização de modelos matemáticos.

As autoras afirmam ainda, amparadas nas ideias de Barbosa e Borba (2000), que a modelagem, no início do século XX, foi aplicada na resolução de problemas ligados as áreas de Biologia e Economia, e somente na década de 80 é que a modelagem aparece como recurso de trabalho nas aulas de Matemática; consta ainda desse período que a modelagem passa a ser vista como uma abordagem pedagógica.

O sentido lato de modelar é “[...] representar através de objetos e/ou símbolos as abstrações ocorridas a respeito de qualquer ente físico (material) ou situação real.” (MENDES, 2008, p. 35)

Para Bassanezi (2002), citado por Flemming, Luz e Mello (2005, p. 22, grifo das autoras), a “modelagem é uma nova forma de encarar a Matemática e ‘consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real’.”

Diante do exposto, podemos dizer que a metodologia da modelagem é uma alternativa para o ensino de alguns conteúdos da disciplina Matemática, entretanto, o professor, de acordo com Burak (1994, p. 51), deve adotar uma postura diferenciada da maneira tradicional de ensinar, pois o docente assume a posição de um orientador no processo de ensino e aprendizagem, à medida que esclarece dúvidas e aponta caminhos que auxiliem os alunos na busca de soluções do problema posto.

A proposta de utilizar a modelagem nas aulas de Matemática se apresenta como um desafio para o professor, pelo fato de ter que buscar meios que conciliem os conteúdos que pretende ensinar com a problemática a ser solucionada. (BURAK, 1994, p. 52-53)

Uma vez adotada pelo docente a modelagem como a metodologia para o ensino de Matemática, ele precisa “reconhecer um problemática, escolher um teoria para tratá-la e produzir conhecimento novo a respeito são três aspectos essenciais do processo de modelagem” (SADOVSKY, 2010, p. 26)

Acerca da importância de utilizar a modelagem nas aulas de Matemática Flemming, Luz e Mello (2005) destacam que

> Podemos enfatizar a importância da modelagem quando possibilita a conexão de conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Estamos trabalhando numa das questões importantes do processo ensino aprendizagem da Matemática, que diz respeito ao interesse do aluno em visualizar aplicações práticas, ligadas ao seu dia-a-dia. O uso da modelagem pode propiciar esta conexão, além de ampliar o conhecimento matemático, ajudando a estruturar a maneira de pensar e agir do aluno. FLEMMING, LUZ E MELLO (2005, p. 23)

Nesse sentido em que o aluno é instigado a fomentar conhecimento por meio da prática da modelagem, ele se apresenta como um “matemático” na busca de solucionar a problemática posta, munido de seus conhecimentos prévios e novos conhecimentos que emanam da pesquisa, da colaboração de outros profissionais e das orientações do professor. Assim, a modelagem como metodologia nas aulas de Matemática é uma alternativa de ensino que propicia ao aluno ampliar seus saberes acerca de outras áreas do conhecimento e uma possibilidade de visualizar os conteúdos matemáticos aprendidos em sala aplicados em situações de natureza real.

Para utilizar a Matemática como ferramenta na contextualização de situações socioculturais ligadas a um determinado grupo, é preciso conhecer seus saberes, costumes, cultura, crenças e os modos de agir, pensar, entender e explicar a realidade por meio da matemática deles. Para tanto, apresentaremos a seguir a Tendência da Etnomatemática.

4.1.2.6. ETNOMATEMÁTICA

Nos anos 70, ocorreram as inquietudes que levariam à criação da etnomatemática. Neste contexto, os estudiosos do terceiro mundo[21] viam com preocupação a colocação da Matemática nos sistemas educacionais, no que se refere às consequências desfavoráveis de acomodação frente às condições

---

21 “A expressão ‘Terceiro Mundo’ surgiu na época da **Guerra Fria**, denominando os países que não estavam nem do lado dos EUA nem do lado da URSS, os chamados ‘não – alinhados’.” (Caroline Faria, grifo da autora). Disponível em: <http://www.infoescola.com/geografia/terceiro-mundo/>. Acesso em: 29 maio 2017.

socioculturais daqueles países e também como forma de oposição à Matemática europeia. (COSTA; BORBA, 1996, p. 90-91)

Diante deste cenário, pesquisas foram fomentadas no âmbito da educação matemática por pesquisadores de várias partes do mundo, ainda sem mencionar o prefixo etno. Assim, surgiram expressões como sociomatemática da África, matemática espontânea, matemática informal, matemática oral, matemática escondida ou congelada, entre outras. Posteriormente, essas ideias se condensaram no termo etnomatemática. (BORBA, 1987 apud COSTA; BORBA, 1996, p. 91) Com relação a esta, faz-se necessário os esclarecimentos a seguir

> O termo Etnomatemática [...] foi sugerido por D'Ambrosio. Ele diz que o radical etno deve ser aceito como referente ao contexto cultural incluindo, assim, considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos. Matema seria explicar, conhecer, entender e, finalmente, tica (originária de techne) que é a mesma raiz de arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. (COSTA; BORBA, 1996, p. 91, grifos dos autores)

Sobre os trabalhos em etnomatemática, pode-se dizer que

> [...] a etnomatemática é um programa de pesquisa que está diretamente ligado ao processo ensino-aprendizagem da matemática. É um processo que vai da realidade à ação, que conecta diferentes culturas, modos de pensar e agir ao conteúdo matemático nos grupos sociais. (FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 37)

Além disso, a etnomatemática como área de pesquisa em educação matemática procura estudar os fenômenos sociais de um determinado grupo com base na

> [...] antropologia, psicologia, sociologia e nos conhecimentos matemáticos do pesquisador, busca desvelar/analisar/compreender os conceitos e práticas geradas por um grupo cultural e a matemática gerada por outros grupos mas apreendidas e/ou utilizadas por este grupo segundo a sua visão de mundo, seus valores, linguagem, sentimentos, ações e desejos, com a recomendação de que um tal estudo seja seguido, sempre que possível, de uma aplicação pedagógica junto ao próprio grupo. (COSTA; BORBA, 1996, p. 92)

Para um trabalho pedagógico por meio da etnomatemática, é necessário "desenvolver ações na área de ensino de Matemática que permitam a contextualização sociocultural dos conteúdos acadêmicos abordados em sala." (FLEMMING; LUZ; MELLO 2005, p. 38)

Assim, a proposta da etnomatemática como metodologia para o ensino de Matemática propicia ao aluno uma maneira diferenciada de utilizar os conteúdos matemáticos referentes ao seu nível de ensino, uma vez que aplicados, na medida do possível, em situações que retratem a realidade sociocultural de um dado grupo, tem como fito explicar, conhecer e entender essa realidade pelas lentes da Matemática.

4.1.2.7. ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES DE REDESCOBERTA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental acreditam que as necessidades do quotidiano fomentam nos alunos aptidões matemáticas práticas, que levam os aprendizes a resolver problemas, colher informações e a tomar decisões, dessa forma cabe a escola aprimorar tais aptidões para a melhoria da aprendizagem. (BRASIL, 1998, p. 37)

Neste contexto, a metodologia de ensino dos conteúdos matemáticos por atividades de redescoberta pode possibilitar ao aluno desenvolver habilidades de cunho prático, pois, ancorada no construtivismo, propicia ao aprendiz participar de forma ativa na construção do seu conhecimento, mediado pelas orientações do professor, ao invés de recebê-lo passivamente, isto é, por meio da transferência, como acontece nos moldes tradicionais de ensino. Assim, a metodologia de ensino por atividades de redescoberta parte do princípio que o “[...] conhecimento está, de fato, intimamente ligado à <u>ação</u> e à experiência do sujeito e tem sua origem <u>na atividade do sujeito</u> em relação aos objetos.” (ALMOULOUD, 2007, p. 24, grifos nosso)

O ensino por atividades de redescoberta traz em uma metodologia que “pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade.” (Sá, 2009, p. 18)

A respeito do objetivo presente em cada atividade, esse discorre sobre o assunto matemático que se pretende ensinar ao aluno, utilizando de questões direcionadas para a construção do conhecimento. Para tanto, o professor “deve propor situações que conduzam o aluno à descoberta do conhecimento por meio do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados e pela realização de explorações.” (Ibid., p. 14)

A proposta do ensino de matemática via a utilização de atividades de redescoberta é mais uma possibilidade metodológica ao professor que busca meios alternativos de ensinar a disciplina diferentemente da maneira tradicional, a qual tem como premissa que a aprendizagem ocorre por meio da transferência de conhecimento, feita por um emissor (o professor) a um receptor (o aluno). Essa forma de ensino, ainda muito recorrente na prática da maioria dos docentes, acredita que por meio da transferência do conteúdo matemático o aluno seja capaz de aprender e utilizá-lo em situações diferentes. Salvo algumas exceções, é uma hipótese débil, visto que o fato do aluno repetir procedimentos mecanicamente não garante que o aprendizado ocorreu de fato, o que faz dessa forma de ensino, na maioria das vezes, uma proposta pouco eficiente para o aprendizado da Matemática.

> Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (BRASIL, 1998, p. 37)

Sobre a metodologia de ensino por atividades de redescoberta, Sá (2009) recomenda alguns pontos essenciais que devem constar na confecção das atividades para o ensino dos conteúdos matemáticos, a saber.

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção e sua aprendizagem;
> - Toda atividade deve procurar conduzir o aluno à construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades proposta pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos. (SÁ, 2009, p. 18)

Uma análise acerca dos pontos supracitados pelo autor, nos leva a concluir que a utilização dessa metodologia nas aulas de matemática, propicia ao aluno um aprendizado autônomo dos conteúdos da disciplina, pois as atividades devem ser constituídas de maneira que o professor realize poucas intervenções no desenrolar do processo de construção do conhecimento pelo aluno. Além desses aspectos, em uma última análise, a metodologia de ensino por meio das atividades de redescoberta fortalece as relações em sala de aula entre os alunos e entre os alunos e o professor, e contribui para que o aprendizado de Matemática ocorra em uma atmosfera palatável, devido possibilitar o debate entre os discentes e a socialização do conhecimento pelos mesmos, uma vez que o “confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa [...]” (BRASIL, 1998, p. 38).

Com relação ao professor, este, por sua vez, passa a ocupar uma postura diferenciada no contexto da aprendizagem, não mais como agente central do conhecimento, e sim como proponente, organizador, incentivador, orientador, do processo de ensino e aprendizagem, onde o aluno é o foco principal.

> Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, loc. cit.)

Diante do exposto, cabe ressaltar que as atividades de redescoberta podem se configurar como atividade de demonstração ou atividade experimental. Na atividade de demonstração, o professor desenvolve a atividade em sala, enquanto que os alunos observam, conjecturam, fazem registros, discutem os resultados e constroem uma conclusão, com isso os alunos redescobrem o conhecimento matemático presente na atividade. No caso da atividade como experimental, que pode ser realizada individualmente ou grupo, o professor assume o papel de orientador e fornece as devidas orientações para que os alunos desenvolvam a atividade. Assim, eles observam, constroem hipóteses e fazem os seus registros. No final, o professor abre para a discussão dos resultados encontrados, a fim de instituir o conhecimento matemático oriundo da atividade. (SÁ, 2009, p. 23)

A maneira como a metodologia das atividades por redescoberta propõe o ensino de matemática, de forma que se valorize o conhecimento prévio do aluno, suas manifestações e representações simbólicas, aliados a um ambiente de experimentação, faz dessa metodologia uma possiblidade de ensino dos conteúdos matemáticos de forma mais participativa, prazerosa e significativa. Além disso, as atividades por redescoberta

> [...] contribuem para a compreensão de propriedades, relações, regras e teoremas matemáticos, bem como para a construção de conceitos, o que certamente conduz o ensino de Matemática para uma dimensão mais condizente com o status de conhecimento que tem como finalidade explicar e conhecer uma dimensão mais humana. (Ibid., p. 24)

Ainda sobre a relevância das atividades por redescoberta no ensino de Matemática, o autor supracitado e outros têm a dizer que

> Cremos que atividades de redescoberta podem ser utilizadas como mais uma alternativa metodológica para as aulas de matemática [...], pois tais atividades proporcionam subsídios aos educadores para que os mesmos possam desenvolver um ensino mais eficaz e significativo para os alunos em sua formação escolar. (SÁ et al, 2008, p. 91)

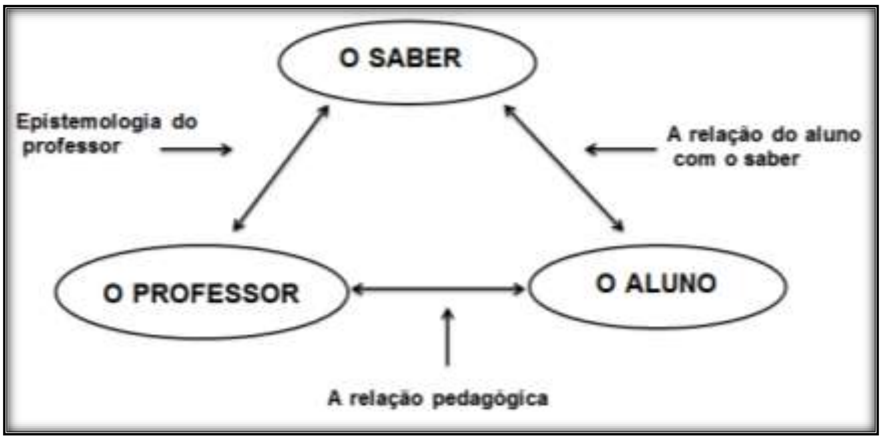
A luz desse cenário é coerente dizer que o processo de aprendizagem ocorre por meio da interação entre o aluno, professor e o saber no ambiente de sala de aula. Tais componentes se mostram como características peculiares da Teoria das Situações Didáticas, fomentada pelo pesquisador francês Guy Brousseau (1986), que procurou “modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.” (ALMOULOUD, 2007, p. 31);.

Para este autor, Brousseau (1986) procurou basear seu modelo de aprendizagem na interação entre aluno, saber e o meio (ou milieu), no qual a aprendizagem deve acontecer. Nesse contexto, “o aluno aprende adaptando-se a um ambiente que é fator de contradições, de dificuldade, de desequilíbrio [...]. Esse saber, fruto da adaptação do estudante, manifesta-se com as novas respostas que são a prova da aprendizagem [...].” (D’AMORE, 2007, p. 233) Todavia, cabe ressaltar que o meio desprovido de pretensões didáticas se mostra ineficaz para a aquisição dos conhecimentos matemáticos pelo aluno, dessa forma o papel do professor é de preparar o meio, onde serão fomentadas as atividades que canalizarão para o aprendizado matemático.

Nesse sentido, a aprendizagem do conteúdo matemático se manifesta na teoria das situações didáticas por meio de situações reprodutíveis que acarretam mudanças no comportamento do aprendiz. Tais mudanças concretizam a obtenção do conhecimento e a existência de uma aprendizagem significativa. (ALMOULOUD, 2007, p.31-32)

Para Almouloud (2007, p. 32) o objeto principal de estudo da teoria das situações didáticas não está centrado no sujeito cognitivo, mas sim na situação didática, onde ocorrem às interações entre o professor, o aluno e o saber. Brousseau (1986) esquematizou essas interações por meio de um sistema chamado de *minimal* (sistema didático stricto sensu), onde as interações entre professor e aluno acontecem através das intenções de ensino.

Esquema 4 − Triângulo Didático



Fonte: ALMOULOUD (2007, p. 32)

A luz desse contexto cabe definir o objeto central da teoria das situações que é a situação didática, a qual é considerada:

> o conjunto de ralações estabelecidas explicita e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978 apud ALMOULOUD, 2007, p. 33)

No que se refere ao saber trabalhado coletivamente entre os alunos e/ou grupo de alunos juntamente com o professor, pode-se dizer que tal iniciativa contribui para o desenvolvimento de habilidades que levam o aprendiz a:

> - perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
> - saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro;
> - discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias;
> - incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender. (BRASIL, 1998, p. 39)

Na situação didática a ocorrência de uma situação adidática é essencial para que o processo de aprendizagem ocorra de maneira em que o aluno é instigado a construir o seu conhecimento. Para que tal situação ocorra, é necessário que o professor execute uma arquitetura didática, que sirva de subsídio para aquisição do conhecimento pretendido. Assim, uma situação adidática pode ser entendida como "uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para apropriação do novo saber que deseja ensinar." (ALMOULOUD, loc. cit.)

Nesse pensar, uma situação adidática deve apresentar algumas características peculiares em sua sintaxe, conforme indicadas no trecho a seguir:

> - o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
> - o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às *razões didáticas;*
> - o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (ALMOULOUD, loc. cit.)

A situação didática se caracteriza pelas interações entre o aluno e o problema proposto pelo professor, sendo a proposta de problema chamada de devolução, cujo objetivo é fornecer as informações necessárias para que o aluno consiga avançar no processo de ensino de forma autônoma. (ALMOULOUD, 2007, p. 34-35)

> A concepção moderna de ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, por uma escolha judiciosa dos

> problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio [...].(ALMOULOUD, 2007, p. 35)

Em última análise dos aspectos da teoria das situações didáticas de Brousseau (1986), nos foi possível perceber que o processo de ensino e aprendizagem ancorado nessa teoria acontece por meio de quatro fases distintas, conhecidas como ação, formulação, validação e institucionalização. Com relação à primeira, esta se apresenta como atitude frente a uma situação de ação posta por meio de um problema, cuja solução é o conhecimento que se pretende ensinar. Dessa forma uma situação de ação adequada, permiti ao aprendiz avaliar sua atitude, podendo ser abandonada ou melhorada, através de retroações, como resposta ao problema apresentado. Assim, a aprendizagem nesta fase acontece por meio de adaptação. Na fase de formulação, o aluno ou o grupo de alunos apresenta os meios matemáticos utilizados e a solução encontrada para o problema posto. Essa comunicação pode ser escrita ou proferida. O que importa nesta fase é a troca de informações pelos alunos. Com relação à validação, é nesta fase que o aluno exibe suas asserções acerca do modelo criado por ele, expondo sua criação ao julgamento dos demais colegas da sala, para que aconteça o debate de ideias sobre o modelo apresentado, com o intuito de aprová-lo ou refutá-lo. A última fase, a institucionalização, corresponde à intervenção do professor frente ao conhecimento construído e validado no decorrer das fases com o saber constituído. Nesse momento, o conhecimento empírico matemático passa a ser institucionalizado e aceito por todos na turma, podendo, assim, ser aplicado em outros problemas matemáticos. (ALMOULOUD, 2007, p. 38-40)

As fases da teoria das Situações Didáticas ora apresentadas no parágrafo anterior se assemelham com as etapas da proposta metodológica das atividades por redescoberta, já que esta também prioriza o ensino pautado no construtivismo pelo aluno e por meio de questões. Dessa forma o aprendizado matemático via a utilização de atividades

> [...] deve ocorrer, principalmente, no desenvolvimento do poder matemático do aluno, noção essa que integra a capacidade de investigar, explorar, conjecturar e raciocinar a capacidade de usar diversos métodos matemáticos para perceber a procura de soluções para situações novas; e ainda, adquirir segurança na sua própria capacidade de fazer matemática. (BEZERRA, 2008, p. 13 apud MACÊDO, 2011, p. 58)

As metodologias de ensino apresentadas nesta seção, a História da Matemática, a Resolução de Problemas, o uso de Jogos Pedagógicos, Tecnologias da Comunicação e Informação, Modelagem, Etnomatemática e Atividades de Redescoberta, são algumas das Tendências da Educação Matemática, a serem utilizadas pelos professores no ensino da Matemática, como ferramentas eficazes no aprendizado da disciplina, pois as pesquisas na área de Educação Matemática revelam resultados satisfatórios no aprendizado dos conteúdos matemáticos, quando estes são ministrados por meio dessas metodologias.

Nesse pensar, é necessário reaver as práticas pedagógicas de ensino na matemática, ainda tão ancoradas nos moldes tradicionais, em que o professor expõe todo o conhecimento para o aluno, impedindo este de um aprendizado por meio da descoberta, autônomo, analítico e reflexivo. Para mudar esse modo de ensino, é preciso, no entanto, que o docente tenha uma postura diferenciada em sua prática, assuma o papel de professor pesquisador, buscando meios e métodos que subsidiem sua prática pedagógica para que o ensino da disciplina desperte no aluno a curiosidade e a vontade de querer aprender os princípios, conceitos, métodos e procedimentos que norteiam os conteúdos a serem ensinados.

A seção seguinte traz as questões do teste sobre as regras de três e também a análise a priori do teste.

4.2. QUESTÕES DO PRÉ E PÓS-TESTES

A elaboração do teste teve como propósito aferir o conhecimento dos alunos do 7º ano do ensino fundamental acerca do conteúdo regras de três, objeto de estudo da nossa pesquisa. Desse modo, os alunos serão submetidos, a princípio, à realização de um teste inicial (pré-teste) sem terem recebido qualquer instrução do assunto regras de três; a posteriori, farão novamente o mesmo teste (pós-teste), entretanto, com as instruções devidas sobre as regras de três, que foram repassadas por meio da aplicação de uma sequência didática para o ensino desse conteúdo. Assim, esperamos produzir informações quantitativas suficientes por meio desses testes que nos ajudem a julgar a eficiência ou não dessa proposta de sequência didática para o ensino das regras de três.

Quanto à composição do teste, este possui dez questões sobre regras de três simples e composta, sendo que as cinco primeiras questões correspondem ao primeiro tipo, regra de três simples, e as cinco últimas ao segundo tipo, regra de três composta.

Com relação às questões da regra de três simples, o teste trouxe três questões sobre grandezas diretamente proporcionais e duas sobre grandezas inversamente proporcionais. No caso da regra de três composta, as questões foram duas envolvendo apenas grandezas diretamente proporcionais, duas somente com grandezas inversamente proporcionais e uma com grandezas direta e inversamente proporcionais.

A preferência por questões, no caso da regra de três simples, com grandezas diretamente proporcionais, foi porque esse tipo de relação entre quantidades é mais recorrente em situações do cotidiano do que a relação inversamente proporcional. Com isso buscamos assemelhar, o mais próximo possível, o contexto escolar do contexto real. Já com relação às questões de regra de três composta, a escolha dessas questões quanto a relação proporcional seguiu apenas o critério de equidade; por isso, optamos por apresentar duas questões de cada tipo da relação proporcional e uma com os dois tipos.

A seguir apresentamos as dez questões do teste que serão aplicadas antes e depois do experimento e também as análises a priori desse teste.

Questões do pré e pós-testes

Aluno (a):_______________________________ Data: ____/ ____/ 2017.

01. Em um banco, constatou-se que um caixa leva, em média, 5 minutos para atender 3 clientes. Qual é o tempo que esse caixa vai levar para atender 36 clientes?

02. Em um dia de trabalho de 8 horas, um operário executou 10 m^2 de cimentado. Quantas horas deverão levar para executar 25 m^2?

03. Uma máquina, funcionando durante 5 horas, enche 120 vasilhas de detergente. Quantas vasilhas ela encheria se funcionasse durante 8 horas?

04. Três torneiras completamente abertas enchem um tanque em 90 minutos. Quantas torneiras iguais a essas encheriam o mesmo tanque em 54 minutos?

05. Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra seria concluída?

06. Se 5 homens montam 20 televisores em 12 dias, quantos televisores 9 homens montarão em 4 dias?

07. Usando um ferro elétrico 40 minutos por dia, durante 15 dias, o consumo de energia será de 6 kWh. Qual será o consumo do mesmo ferro elétrico se ele for usado 50 minutos por dia, durante 20 dias?

08. Se 4 tratores iguais realizam um serviço em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia, calcule em quantos dias esse serviço seria realizado com 2 tratores trabalhando 10 horas por dia.

09. Um caminhoneiro entrega uma carga em 30 dias, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h?

10. Para alimentar 12 porcos durante 20 dias são necessários 400 quilos de farelo. Quantos porcos podem ser alimentados com 600 quilos de farelo durante 24 dias?

Análise a priori do pré e pós-testes

Como no primeiro momento os alunos não receberam qualquer instrução formal sobre as regras de três, pressupomos que esses alunos não obterão resultado satisfatório frente às questões propostas no primeiro teste, sobretudo, nas últimas cinco questões que tratam da regra de três composta. Entretanto, presumimos que alguns alunos conseguirão resolver a primeira questão, pois os valores que estão relacionados em cada espécie de grandeza são submúltiplo e múltiplo, respectivamente, o que facilita a resolução dessa questão utilizando apenas a multiplicação, sem precisar de um artifício matemático mais elaborado ou do algoritmo da regra de três simples.

Esse cenário de baixo rendimento nas questões do teste inicial tende a mudar com aplicação da sequência didática para o ensino das regras de três. Assim, acreditamos que os alunos terão um bom desempenho no pós-teste após receberem, nas sessões de ensino, as instruções necessárias sobre as regras de três. Com isso, presumimos que pelo menos 70% dos alunos pesquisados alcançarão rendimentos satisfatórios frente às questões das regras de três.

Adiante trazemos uma seção sobre sequência didática, onde apresentamos os conceitos, de acordo com Zabala (1998) e Oliveira (2013), e também um breve histórico sobre o seu surgimento.

4.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os conteúdos matemáticos que devem ser ensinados nas escolas da educação básica são geralmente ministrados por meio de aulas expositivas, em que o professor apresenta o conteúdo em sua totalidade por meio da definição, propriedades seguidos de exemplos e exercícios, o que limita a participação do aluno na descoberta e construção do conhecimento.

As pesquisas em Educação Matemática têm apresentado meios alternativos que podem ser utilizados pelo professor no ensino da Matemática, como aqueles mencionados anteriormente neste trabalho, que possibilitem o engajamento do aluno no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática. Assim o discente, passa da posição passiva para uma postura participativa na aquisição dos saberes e na construção do conhecimento essenciais para sua formação.

Nesse pensar, apresentamos um conjunto de atividades didáticas como proposta de uma sequência didática, cujo objetivo é subsidiar o aluno na compreensão dos conceitos de proporcionalidade simples (direta e inversa), e também de proporcionalidade composta direta, envolvidos em contextos variados com grandezas. Pois acreditamos que esses conceitos são fundamentais para o uso consciente e não mecanizado das regras de três.

Para Zabala (1998, p. 18) uma sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos." Esse autor denomina também as sequências de atividades como *unidade didática*, *unidade de programação* ou *unidade de intervenção pedagógica*. Além do mais, chama a sequência didática como sequência de ensino/aprendizagem.

Outro conceito de sequência didática semelhante ao descrito no parágrafo anterior é apresentado por Oliveira (2013), que considera uma sequência didática como um:

> Procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem." (OLIVEIRA, 2013, p. 53)

A primeira ideia de sequência didática que se teve notícia ocorreu na França no início dos anos de 1980, e tinha por objetivo melhorar o ensino da língua materna, que, na época, era ensinada de maneira separada e sem elo com a ortografia, sintaxe e as classes gramáticas. Desse modo, a sequência didática se apresentou como uma nova proposta de educação, cuja intenção era integrar o ensino. A princípio, essa proposta sofreu resistências com relação a sua implementação, mas depois foi aceita pelos estudiosos da didática do ensino, que passaram a produzir pesquisas com os resultados alcançados ao aplicarem os procedimentos da sequência didática. Esta proposta de ensino só chegou ao Brasil em 1992, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e foi utilizada também no ensino da língua materna. (OLIVEIRA, 2013, p. 53-54)

A nossa sugestão de sequência didática foi construída para subsidiar o ensino das regras de três, como comentamos anteriormente. E para alcançar essa pretensão elaboramos um conjunto de três atividades didáticas, a saber, uma para o a compreensão do conceito de grandezas diretamente proporcionais, constituída de quatro situações que abordaram a relação proporcional direta entre duas quantidades, e uma em que essa relação proporcional não acontece. Já a segunda, foi elaborada para entendimento do conceito de grandezas inversamente proporcionais, e sua configuração seguiu a mesma ideia da primeira atividade, ou seja, quatro situações com grandezas inversamente proporcionais e uma em que tal relação proporcional não ocorre. Por último a terceira atividade, cujo objetivo era conduzir os alunos participantes da pesquisa a perceberem alguma relação que indicasse a proporcionalidade composta direta entre três grandezas. Essa atividade foi estruturada com três situações em que a proporcionalidade composta direta ocorre, e uma situação onde tal relação não acontece.

Adiante apresentamos o cronograma de execução da sequência didática para o experimento, as atividades didáticas, as análises a priori e as questões de aprofundamento.

Quadro 9 – Cronograma e as atividades da sequência didática

Aula	Atividade	Objetivo	Tempo
1ª	**Diagnóstico inicial:** Questionário sócio educacional e pré-teste.	■Verificar os aspectos social e educacional dos alunos e seus conhecimentos sobre a regra de três.	135'
2ª	**Atividade 1:** Uma abordagem sobre grandezas diretamente proporcionais	■Levar o aluno a perceberem os princípios do conceito de grandezas diretamente proporcionais por meio de situações didáticas. ■Reforçar os novos conhecimentos dos alunos por meio de questões de aprofundamento.	135'
3ª	**Atividade 2:** Uma abordagem sobre grandezas inversamente proporcionais	■Oportunizar o aluno a perceber os princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais por meio de situações didáticas.	135'
4ª	Questões de aprofundamento	■Reforçar os novos conhecimentos dos alunos por meio de questões de aprofundamento.	
5ª	Apresentação da regra de três simples e seus procedimentos de resolução	■Mostrar os procedimentos de resolução da regra de três simples para grandezas direta e inversamente proporcionais. ■Oportunizar os alunos a aplicarem os conhecimentos adquiridos sobre grandezas direta e inversamente proporcionais na resolução de questões meio da regra de três simples.	135'
6ª	Aplicação da regra de três simples	■Reforçar o conhecimento da regra de três simples com a resolução de questões.	135'
7ª	**Atividade 3:** Uma abordagem sobre a proporcionalidade composta direta	■ Conduzir os alunos a identificarem princípios sobre a relação proporcional composta direta entre três grandezas por meio de situações didáticas. ■Oportunizar os alunos a perceberem o porquê do uso da multiplicação entre as razões das grandezas na regra de três composta.	135'
8ª	Apresentação da regra de três composta e seus procedimentos de resolução	■Mostrar os procedimentos de resolução da regra de três composta utilizando o método das flechas; ■Oportunizar os alunos a aplicarem os conhecimentos adquiridos na resolução de questões que apresentam relações proporcionais (direta e inversa) através da regra de três composta.	135'
9ª	Aplicação da regra de três composta	■Reforçar o conhecimento da regra de três composta com a resolução de questões.	135'
10ª	Revisão dos conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores	■Revisitar os conhecimentos sobre grandezas proporcionais (direta e inversa) e regras de três.	135'
11ª	**Diagnóstico final:** Pós-testes	■Conferir se houve uma melhora significativa no conhecimento dos alunos acerca das regras de três após a execução da sequência didática.	135'

Fonte: Experimento (2017)

Doravante, trazemos as atividades da sequência didática para o ensino das regras de três; e a primeira delas tem por objetivo levar o aluno a construir o conceito de grandezas diretamente proporcionais e a segunda atividade o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Atividade 1

Título: Grandezas diretamente proporcionais
Objetivo: Conceituar grandezas diretamente proporcionais
Material: Folha de situações, calculadora, caneta ou lápis e borracha.
Procedimento:
Leia cuidadosamente cada uma das situações apresentadas;
Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação;
Responda as questões propostas.

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo x volume de água
1	5			
2	10			
	15			
4				
5	25			
6				
	35			
8				
	45			
10				
11	55			
	60			

Observações:

Situação 2[22]: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5			8		10
Produção de açúcar em sacas	4		12		20	24	28		36	

O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

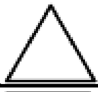
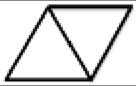
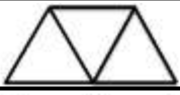
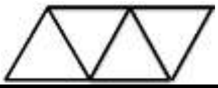
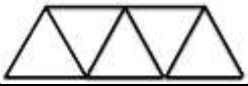
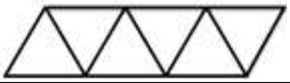
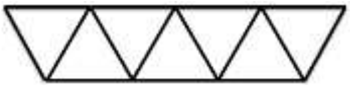
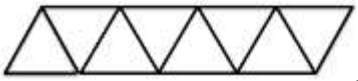
Litros de açaí vendido	1	2		4	5	6		8	9	10
Valor a pagar em reais	8		24				56			80

As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

[22] [Questão adaptada] BIACHINI, E. **Matemática.** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

<u>Situação 4:</u> Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de Palitos
		
		
		
		
		
		
		
		

A quantidade de triângulos e quantidade de palitos são diretamente proporcionais? Por quê?

<u>Situação 5</u>: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6		8	9	
Distância percorrida em km	12	24			60		84			120

O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa (“peso”) ( )

b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. ( )

c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ( )

e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ( )

g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ( )

h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. ( )

i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( )

j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. ( )

Análise a priori da Atividade 1

Nesta atividade esperamos que os alunos consigam relacionar as grandezas envolvidas no contexto da situação 1 e percebam que as razões entre os valores dessas grandezas são sempre constante e que os produtos não seguem o mesmo padrão, ou seja, são sempre diferentes. De posse dessas constatações, pressupomos que os alunos conseguirão construir observações acerca do comportamento dos valores das grandezas envolvidas na referida situação.

A respeito das situações 2, 3 e 5, acreditamos que os alunos conseguirão preencher os quadros dessas situações corretamente relacionando seus valores por meio da multiplicação, e perceberão que as quantidades envolvidas nessas situações estão relacionadas de maneira diretamente proporcional. Também acreditamos que os alunos responderão os questionamentos levantados nessas situações acerca da proporcionalidade direta embasados nas observações construídas na situação 1. Já com relação à situação 4, presumimos que os alunos perceberão que a relação entre as grandezas dessa situação não representa uma relação proporcional direta, e apresentarão uma justificativa com base no observado na situação 1.

Quanto às sentenças sobre a ocorrência ou não da relação proporcional direta ao final da atividade 1, acreditamos que os alunos não encontrarão dificuldades em identificar os pares de grandezas diretamente proporcionais na maioria das sentenças apresentadas.

A respeito das dificuldades da atividade 1, presumimos que estarão relacionadas com a construção textual das justificativas quanto à relação proporcional nas situações propostas, uma vez que os alunos, em sua maioria, não estão familiarizados com atividades experimentais que exijam a construção textual nas aulas de matemática. Devido a isso, podem aparecer escritas com falhas na semântica e na coerência. Também a dificuldade pode ocorrer na identificação correta de todos os pares de grandezas diretamente proporcionais na última sentença dessa atividade, uma vez que os contextos propostos não apresentam valores numéricos.

A relevância da atividade 1 está no fato de apresentar os fundamentos do conceito de grandezas diretamente proporcionais, indispensável ao estudo das regras de três, os quais são constatados pelos alunos ao explorarem as situações dessa atividade. Dessa forma, o aluno passa a perceber que quantidades que variam ao mesmo tempo e na mesma proporção e que possuem a razão constante entre seus valores são denominadas grandezas diretamente proporcionais. Assim, o aluno não se limita a memorizar conceito sem entender, pelo contrário, ele percebe os princípios desse conceito por meio de situações com matemática.

As questões de aprofundamento adiante têm o propósito de reforçar e consolidar o conhecimento construído na atividade 1.

Questões de aprofundamento (Atividade 1)

1) A seguir estão apresentadas as medidas dos lados de alguns triângulos equiláteros (triângulos que possuem os três lados iguais) e seus respectivos perímetros.

Medida do lado (cm)	2	4	6	8	10
Perímetro (cm)	6	12	18	24	30

a) As grandezas “medida do lado” e “perímetro” são diretamente proporcionais? Por quê?.
b) Qual a medida do lado de um triângulo equilátero que tem 42 cm de perímetro?

2) Com base nos itens abaixo respondas as perguntas acerca das grandezas.
a) A altura de Aline aos 13 anos de idade era de 155 cm e aos 26 anos, 176 cm. Nesse caso, a “idade” e a “altura” são diretamente proporcionais? Por quê?
b) Em certa fábrica uma máquina produz 188 peças em 4 horas e 94 peças em 2 horas de funcionamento. Nesse caso, as grandezas “números de peças produzidas” e “tempo” de funcionamento são diretamente proporcionais? Por quê?
c) Em um supermercado, o preço do pacote de arroz de 1 kg de certa marca custa R$ 3,70 e o de 5 kg, R$ 17,20. Nesse caso, as grandezas “massa” e “preço” são diretamente proporcionais? Por quê?

3) Considerando que 1 t (tonelada) de cana-de-açúcar rende 75 L (Litros) de etanol. Quantos litros de etanol são produzidos com 10 t de cana-de-açúcar?

4) Na bula de um determinado remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança. Com base nessa informação, responda os itens abaixo:
a) Se uma criança tem 12 kg de “peso”, qual a dosagem correta que ela deverá receber?
b) Supondo que uma criança com 18 kg de “peso” fosse medicada com esse remédio, qual o número de gotas que ela deveria tomar?
c) Se forem ministradas 40 gotas do remédio, qual o “peso” da criança em kg?

5) Um dos alimentos mais ricos em vitamina **E** é o abacate, que em uma porção de 75 g tem 3 mg de vitamina **E**. Quantos miligramas de vitamina **E** há em 150 g de abacate?[23]
a) 6 mg   b) 9 mg   c) 5 mg   d) 8 mg

6) Um pintor fez uma tabela relacionando a área da superfície a ser pintada, tempo gasto para pintar essa superfície e a quantidade de tinta.

Área (em m^2)	Tempo (em h)	Tinta (em L)
10	2	1
40	8	4
80	16	8

Para pintar uma superfície de 200 m^2 (metro quadrado), o tempo e a quantidade de tinta gastos são, respectivamente:
a) 10 h e 20 L.
b) 20 h e 30 L.
c) 20 h e 20 L.
d) 40 h e 20 L.

[23] [Questão adaptada] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 7° ano.** 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

Atividade 2

Título: Grandezas inversamente proporcionais
Objetivo: Conceituar grandezas inversamente proporcionais.
Material: Folha de situações, calculadora, caneta ou lápis e borracha.
Procedimento:
Leia cuidadosamente cada uma das situações apresentadas;
Preencha os espaços em branco dos quadros de cada situação;
Responda as questões propostas.

<u>Situação 1</u>
Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72			
2	36			
3				
	18			
6				
8				
9	8			
12				

Observações

<u>Situação 2</u>:
Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3		6	7	12	14
Litros de leite	84	42		21	14			6

As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

<u>Situação 3</u>:
Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3		5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90		45					15

As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

<u>Situação 4:</u>
Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3		5		7	8	9	
Temperatura (º C)	120	110		90		70				30

As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

<u>Situação 5</u>:
Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3		5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120		60		40			

As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. ( )

c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. ( )

g) Comprimento do passo e o número de passos. ( )

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( )

Análise a priori da atividade 2

Para essa atividade, esperamos que discentes percebam que os valores das grandezas na situação 1 se relacionam de maneira inversa, ou seja, quando o valor de uma grandeza aumenta o valor respectivo da outra grandeza reduz na mesma quantidade e vice-versa. Além disso, esperamos também que os alunos notem que as razões entre os valores das grandezas são diferentes, enquanto que o produto deles é sempre igual. Com essas constatações, pressupomos que os discentes conseguirão redigir observações sobre esses fatos inerentes a situação 1.

Com relação às outras situações, 2, 3, 4 e 5, presumimos que os alunos utilizarão o mesmo raciocínio da situação anterior para preencher os espações em branco dos quadros dessas situações, recorrendo aos seus conhecimentos prévios sobre multiplicação e divisão; quanto a análise da relação entre as grandezas, os discentes a farão com base no realizado na situação 1, isto é, observarão se as grandezas apresentam razões diferentes e/ou produtos iguais, para classifica-las como grandezas inversamente proporcionais ou não proporcionais. Pressupomos também que a maioria dos alunos não encontrará dificuldade em identificar a relação não proporcional na situação 4, ao verificar que o produto entre os valores das grandezas não é constante. Acreditamos ainda que os discentes poderão apresentar um bom desempenho nas sentenças sobre grandezas inversamente proporcionais ao final da atividade 2, mas encontrarão, talvez, dificuldades em apontar os pares de grandezas inversamente proporcionais, uma vez que as sentenças não trazem valores numéricos, o que pode embaraçar os alunos na identificação das relações inversas entre as grandezas do contexto.

Quanto às dificuldades da atividade 2, presumimos que uma delas pode estar relacionada a produção textual das respostas para cada situação dessa atividade, já que 62,1% dos alunos nunca participaram de aulas de matemática com experimento, talvez, esse fato contribua para que alguns alunos não apresentem rendimento satisfatório na atividade. Outra possibilidade de dificuldade é com relação à utilização das operações de multiplicação e divisão, concomitantemente, para relacionar os valores das grandezas nos contextos apresentados em cada situação. Por último, presumimos que os alunos podem encontrar dificuldade em identificar os pares de grandezas inversamente proporcionais nas sentenças apresentadas ao final da atividade 2, devido a pouca vivência desses alunos com contextos sobre proporcionalidade inversa.

A atividade 2 se justifica por ser parte complementar do estudo das regras de três, uma vez que antes de aplicar o algoritmo da regra é necessário conhecer que tipo de relação proporcional acontece entre as grandezas do problema, assim, consolidar o conceito das grandezas inversamente proporcionais é imprescindível para uso correto da regra.

A seguir trazemos as questões de aprofundamento da atividade 2, cuja intenção é reforçar e consolidar o conceito de grandezas inversamente proporcionais construído nessa atividade

Questões de aprofundamento (Atividade 2)

1) Mariana pretende comprar um computador em uma loja na internet. Essa loja oferece, como forma de pagamento, o preço à vista em até 12 parcelas iguais sem acréscimos. A seguir são apresentadas algumas possibilidades de pagamento.

Número de parcelas	1	2	3	4	5
Valor de cada parcela (R$)	1.200	600	400	300	240

a) As grandezas “número de parcelas” e “valor de cada parcela” são grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? Por quê?

b) Qual o valor de cada parcela se Mariana comprar o computador em?

- 6 vezes? ________________________
- 8 vezes? ________________________

2) Em um edifício, as vidraças são limpas uma vez por semana por uma equipe de 14 funcionários em 6 h de trabalho.

Considerando que o ritmo de trabalho se mantenha, responda às questões:

a) Se aumentar o número de funcionários, o tempo para limpar as vidraças vai aumentar ou diminuir?

b) Neste caso, as grandezas “quantidade de funcionários” e “tempo de trabalho” são diretamente ou inversamente proporcionais? Por quê?.

3) As grandezas A e B relacionam-se do modo indicado no quadro a seguir[24]:

Grandeza A	Grandeza B
12	300
36	100
48	75

a) As grandezas do quadro acima são diretamente ou inversamente proporcionais? Por quê?

b) Quando o valor da grandeza A for 72, qual vai ser o valor da grandeza B?

4) Embalando alimentos doados para o programa “Fome Zero”, 4 voluntários gastaram 75 horas. Se fosse possível contar com 12 voluntários, trabalhando no mesmo ritmo daqueles 4, em quanto tempo o trabalho teria sido feito?[25]

5) A altura de Pedrinho aos 4 anos era 100 cm; aos 8 anos, 140 cm, e aos 12 anos, 160 cm. Esses dados estão representados na tabela abaixo.

Idade de Pedrinho	Altura de Pedrinho
4 anos	100 cm
8 anos	140 cm
12 anos	160 cm

É correto afirmar que a altura e a idade de Pedrinho:
a) são diretamente proporcionais.
b) são inversamente proporcionais.
c) são proporcionais.
d) não são proporcionais.

6) Um obra foi construída em 45 dias, e para isso precisou de 6 operários. Supondo que essa obra ao invés de 6 tivesse 18 operários, em quantos dias ela seria construída?

Número de operários	Tempo (em dia)
6	45
18	?

Resposta:

A atividade 3 diante traz contextos onde estão relacionadas proporcionalmente três grandezas; a nossa intenção com essa atividade é levar o aluno a descobrir uma relação entre as grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza, relação essa que diz respeito a proporcionalidade composta direta.

A referida atividade é composta de quatro situações, sendo que para três delas estão disponíveis folhas anexas de figuras geométricas, que auxiliarão na execução dessa atividade.

[24] [Questão adaptada] CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática:** teoria e contexto, 7° ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

[25] [Questão adaptada] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 7° ano.** São Paulo: FTD, 2009.

Atividade 3

Título: Proporcionalidade composta
Objetivo: Descobrir uma relação entre grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza.
Material: Folha de situações, quadro da atividade, calculadora, caneta ou lápis e borracha.
Procedimento:
Leia atentamente cada uma das situações apresentadas;
Preencha os espaços em branco dos quadros a respeito de cada situação;
Com base no realizado, preencha o quadro da atividade.

Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?
Resposta:____
____

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?
Resposta:____
____

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?
Resposta:____
____

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta:____
____

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta:____
____

Quadro 3

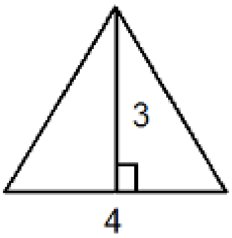
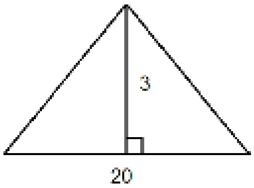
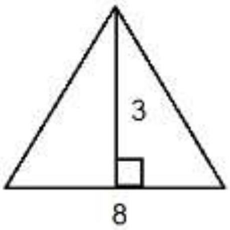
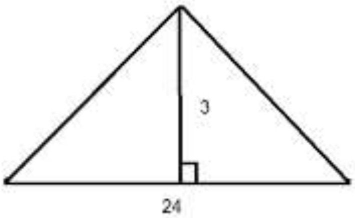
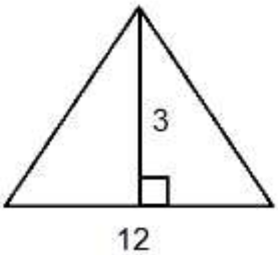
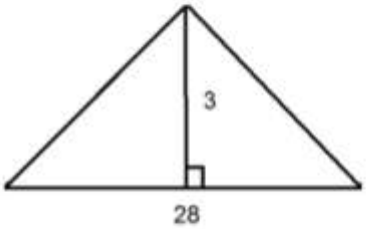
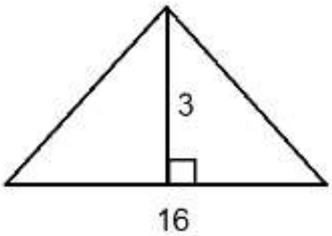
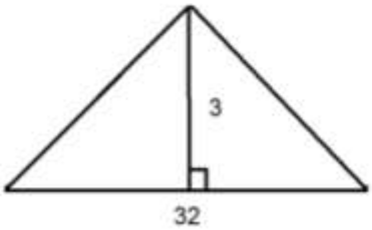
Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta:____
____

FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

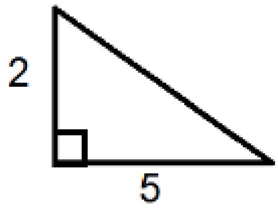
QUADRO 1

Triângulo 1  **Base = 4** **Altura = 3** **Área = 6**	**Triângulo 5**  **Base = 20** **Altura = 3** **Área = 30**
Triângulo 2  **Base = 8** **Altura = 3** **Área =12**	**Triângulo 6**  **Base = 24** **Altura = 3** **Área = 36**
Triângulo 3  **Base = 12** **Altura = 3** **Área = 18**	**Triângulo 7**  **Base = 28** **Altura = 3** **Área = 42**
Triângulo 4  **Base = 16** **Altura = 3** **Área = 24**	**Triângulo 8**  **Base = 32** **Altura = 3** **Área = 48**

FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

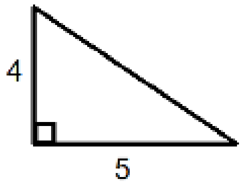
QUADRO 2

Triângulo 1



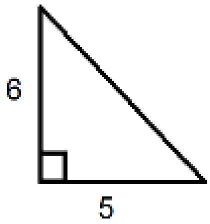
Base = 5
Altura = 2
Área = 5

Triângulo 2



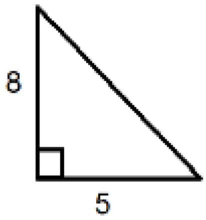
Base = 5
Altura = 4
Área = 10

Triângulo 3



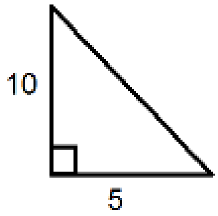
Base = 5
Altura = 6
Área = 15

Triângulo 4



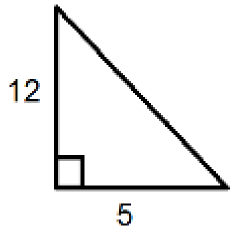
Base = 5
Altura = 8
Área = 20

Triângulo 5



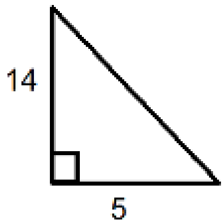
Base = 5
Altura = 10
Área = 25

Triângulo 6



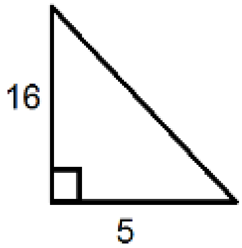
Base = 5
Altura = 12
Área = 30

Triângulo 7



Base = 5
Altura = 14
Área = 35

Triângulo 8

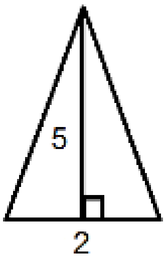


Base = 5
Altura = 16
Área = 40

FOLHA COM TRIÂNGULOS (SITUAÇÃO 1)

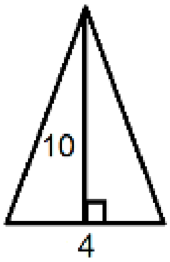
QUADRO 3

Triângulo 1



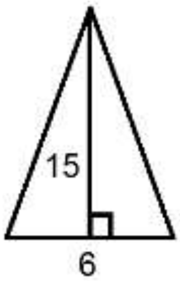
Base = 2
Altura = 5
Base x Altura = 10
Área = 5

Triângulo 2



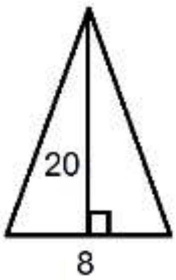
Base = 4
Altura = 10
Base x Altura = 40
Área = 20

Triângulo 3



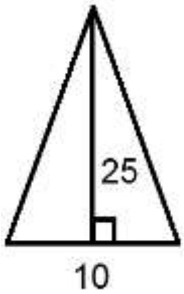
Base = 6
Altura = 15
Base x Altura = 90
Área = 45

Triângulo 4



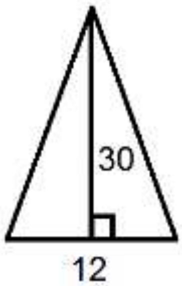
Base = 8
Altura = 20
Base x Altura = 160
Área = 80

Triângulo 5



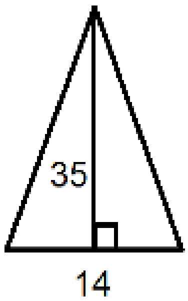
Base = 10
Altura = 25
Base x Altura = 250
Área = 125

Triângulo 6



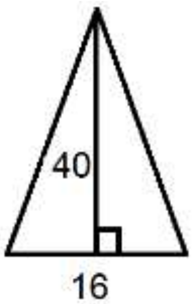
Base = 12
Altura = 30
Base x Altura = 360
Área = 180

Triângulo 7



Base = 14
Altura = 35
Base x Altura = 490
Área = 245

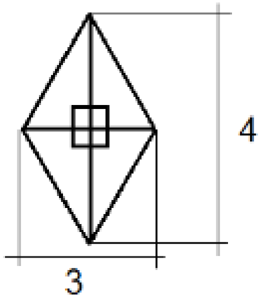
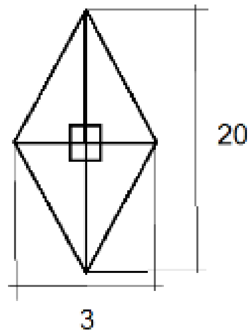
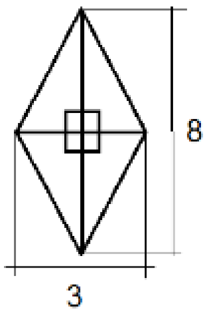
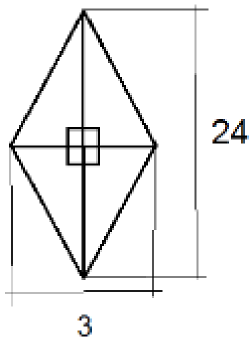
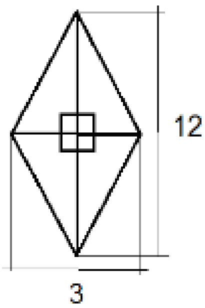
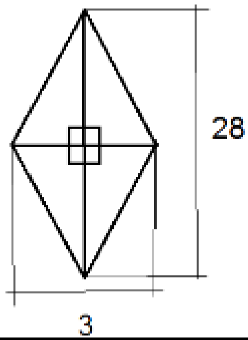
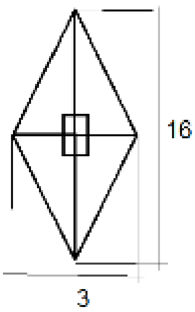
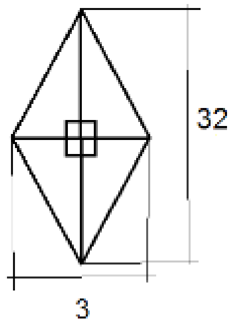
Triângulo 8



Base = 16
Altura = 40
Base x Altura = 640
Área = 320

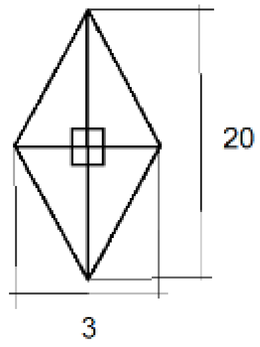
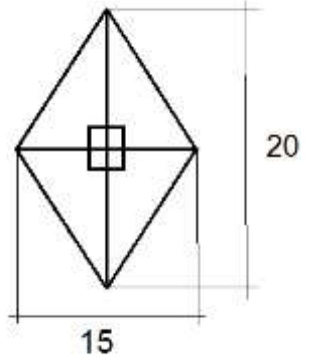
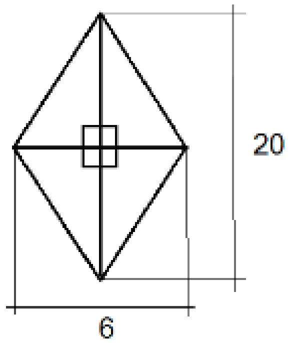
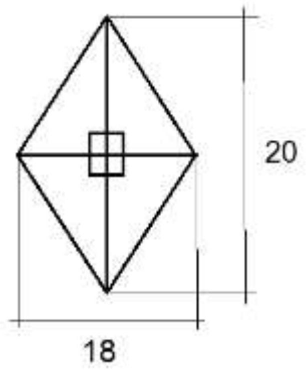
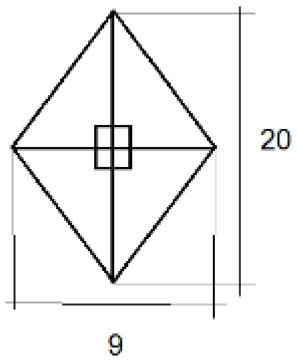
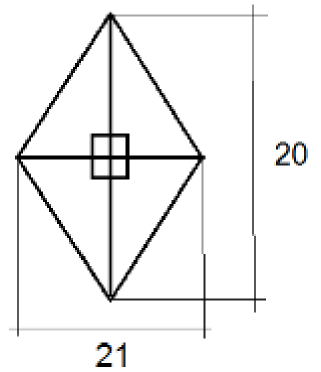
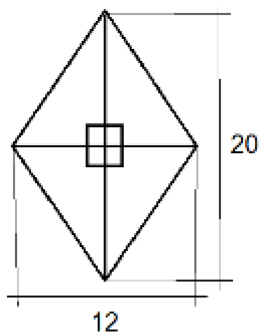
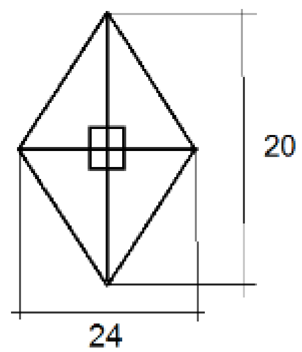
FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 1

<u>Losango 1</u> **Diagonal maior = 4** **diagonal menor = 3** **Área = 6**  	**<u>Losango 5</u>** **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 3** **Área = 30** 
<u>Losango 2</u> **Diagonal maior = 8** **diagonal menor = 3** **Área = 12**  	**<u>Losango 6</u>** **Diagonal maior = 24** **diagonal menor = 3** **Área = 36** 
<u>Losango 3</u> **Diagonal maior = 12** **diagonal menor = 3** **Área = 18**  	**<u>Losango 7</u>** **Diagonal maior = 28** **diagonal menor = 3** **Área = 42** 
<u>Losango 4</u> **Diagonal maior = 16** **diagonal menor = 3** **Área = 24**  	**<u>Losango 8</u>** **Diagonal maior = 32** **diagonal menor = 3** **Área = 48** 

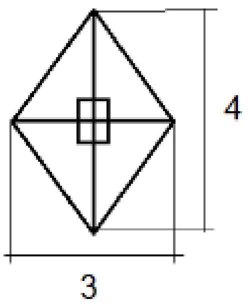
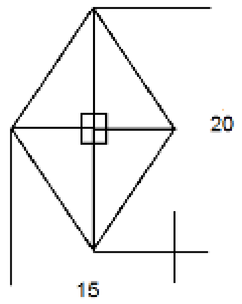
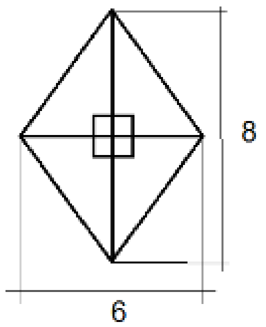
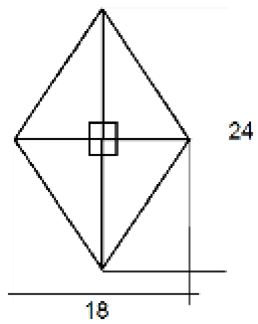
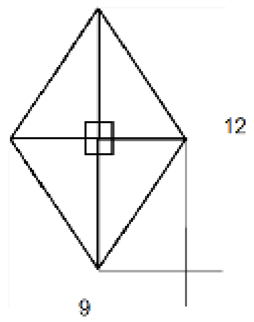
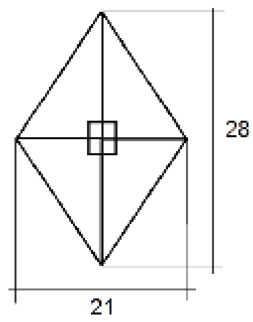
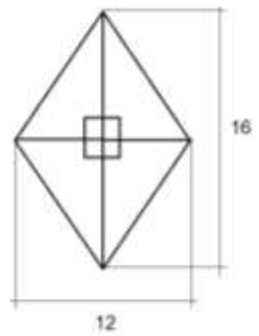
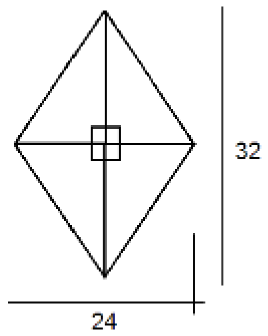
FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 2

<u>Losango 1</u> **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 3** **Área = 30** 	**<u>Losango 5</u>** **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 15** **Área = 150** 
<u>Losango 2</u> **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 6** **Área = 60** 	**<u>Losango 6</u>** **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 18** **Área = 180** 
<u>Losango 3</u> **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 9** **Área = 90** 	**<u>Losango 7</u>** **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 21** **Área = 210** 
<u>Losango 4</u> **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 12** **Área = 120** 	**<u>Losango 8</u>** **Diagonal maior = 20** **diagonal menor = 24** **Área = 240** 

FOLHA COM LOSANGOS (SITUAÇÃO 2)

QUADRO 3

<u>Losango 1</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 12** **Área = 6**	<u>Losango 5</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 300** **Área = 150**
<u>Losango 2</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 48** **Área = 24**	<u>Losango 6</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 432** **Área = 216**
<u>Losango 3</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 108** **Área = 90**	<u>Losango 7</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 588** **Área = 294**
<u>Losango 4</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 192** **Área = 96**	<u>Losango 8</u>  **Diagonal maior × diagonal menor = 768** **Área = 384**

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta:____
____

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?
Resposta:____
____

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?
Resposta:____
____

Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espações em branco dos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?
Resposta:____
____

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?
Resposta:____
____

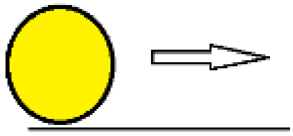
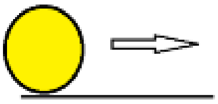
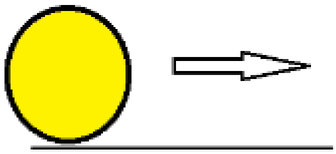
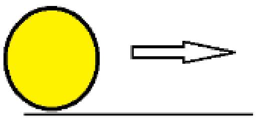
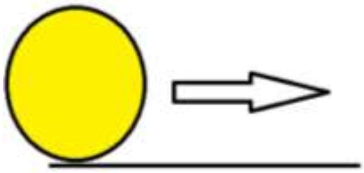
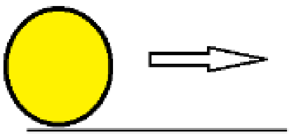
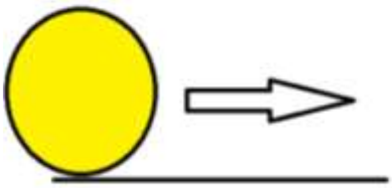
Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?
Resposta:____
____

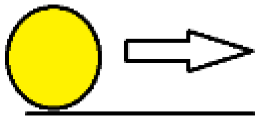
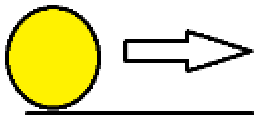
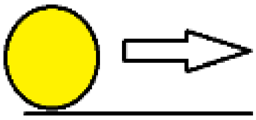
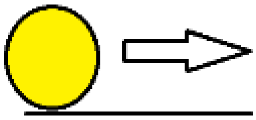
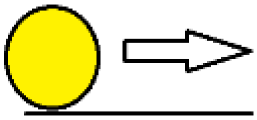
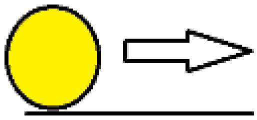
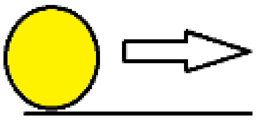
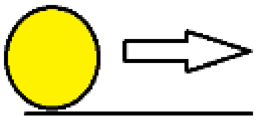
FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

QUADRO 1

<u>Figura 1</u>  **Velocidade = 2 m/s (metros por segundo)** **Massa = 3 kg (quilograma)** **Energia = 6 J (Joule)**	<u>Figura 5</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 15 kg** **Energia = 30 J**
<u>Figura 2</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 6 kg** **Energia = 12 J**	<u>Figura 6</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 18 kg** **Energia = 36 J**
<u>Figura 3</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 9 kg** **Energia = 18 J**	<u>Figura 7</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 21 kg** **Energia = 42 J**
<u>Figura 4</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 12 kg** **Energia = 24 J**	<u>Figura 8</u>  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 24 kg** **Energia = 48 J**

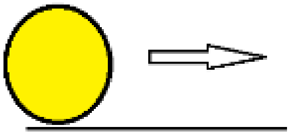
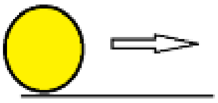
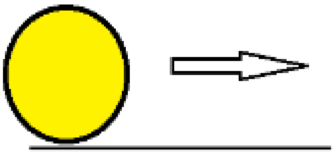
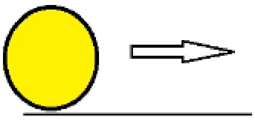
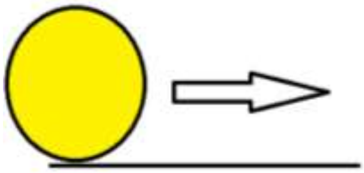
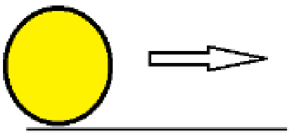
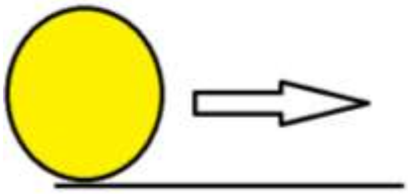
FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

QUADRO 2

Figura 1  **Velocidade = 1 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 2 J**	Figura 5  **Velocidade = 5 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 50 J**
Figura 2  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 8 J**	Figura 6  **Velocidade = 6 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 72 J**
Figura 3  **Velocidade = 3 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 18 J**	Figura 7  **Velocidade = 7 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 98 J**
Figura 4  **Velocidade = 4 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 32 J**	Figura 8  **Velocidade = 8 m/s** **Massa = 4 kg** **Energia = 128 J**

FOLHA COM FIGURAS (SITUAÇÃO 4)

QUADRO 3

Figura 1  **Velocidade = 1 m/s** **Massa = 2 kg** **Velocidade × Massa = 2** **Energia = 1 J**	**Figura 5**  **Velocidade = 5 m/s** **Massa = 10 kg** **Velocidade × Massa = 50** **Energia = 125 J**
Figura 2  **Velocidade = 2 m/s** **Massa = 4 kg** **Velocidade × Massa = 8** **Energia = 8 J**	**Figura 6**  **Velocidade = 6 m/s** **Massa = 12 kg** **Velocidade × Massa = 72** **Energia = 216 J**
Figura 3  **Velocidade = 3 m/s** **Massa = 6 kg** **Velocidade × Massa = 18** **Energia = 27 J**	**Figura 7**  **Velocidade = 7 m/s** **Massa = 14 kg** **Velocidade × Massa = 98** **Energia = 343 J**
Figura 4  **Velocidade = 4 m/s** **Massa = 8 kg** **Velocidade × Massa = 32** **Energia = 64 J**	**Figura 8**  **Velocidade = 8 m/s** **Massa = 16 kg** **Velocidade × Massa = 128** **Energia = 512 J**

Quadro da atividade 3

SITUAÇÃO	GRANDEZA	É DIRETAMENTE PROPORCIONAL A		É DIRETAMENTE PROPORCIONAL A		É DIRETAMENTE PROPORCIONAL AO PRODUTO	
		BASE		ALTURA		BASE × ALTURA	
1	ÁREA DO TRIÂNGULO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
2	ÁREA DO TRAPÉZIO	ALTURA		BASE MAIOR + BASE MENOR		(BASE MAIOR + BASE MENOR) × ALTURA	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
3	ÁREA DO LOSANGO	DIAGONAL MAIOR		DIAGONAL MENOR		DIAGONAL MAIOR × DIAGONAL MENOR	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
4	QUANTIDADE DE ENERGIA	MASSA		VELOCIDADE		MASSA × VELOCIADE	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO

Observação

Conclusão

Análise a priori da atividade 3

Para essa atividade foram pensadas quatro situações com contextos que relacionam três grandezas, sendo que em três dessas situações as quantidades estão relacionadas diretamente proporcionais, e uma situação em que a ralação proporcional não ocorre.

A nossa expectativa é para que alunos percebam a relação proporcional direta existente entre as três grandezas nas situações construídas para esse fim (situações 1, 2 e 3). Dessa maneira, os alunos deverão recorrer ao conhecimento adquirido na atividade 1 sobre grandezas diretamente proporcionais, para serem aplicados na análise das situações propostas e também na justificativa de suas respostas para essas situações. Da mesma forma, utilizar esse conhecimento sobre a relação proporcional direta para identificar na situação 4 a não ocorrência da proporcionalidade. Ao final desta atividade, esperamos que alunos consigam construir observações e conclusões a respeito da relação proporcional composta direta entre três grandezas, tendendo como parâmetro o quadro síntese da relação proporcional direta e não proporcional ao final desta atividade.

Quanto à dificuldade da atividade 3, presumimos que a maioria dos alunos não conseguirá descrever, por meio da escrita, a relação proporcional composta direta entre as grandezas envolvidas nas situações, mesmo depois de perceber tal relação, uma vez que esses alunos têm pouca ou nenhuma vivência com atividades que solicitem escrever suas constatações sobre o objeto matemático em estudo.

A relevância da atividade 3 está no fato de mostrar uma justificativa, embasada na propriedade das grandezas compostas, para o uso da multiplicação das razões entre os valores das grandezas na regra de três composta, que, quase sempre, não é justificado o porquê desse uso ao aplicar a regra.

A seção experimentação seguir traz o lócus, sujeitos e o cronograma de pesquisa e também as onze sessões de ensino, com os relatos dos fatos ocorridos durante o experimento.

5. EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação é a fase da Engenharia Didática em que será aplicada a sequência didática construída intencionalmente para o ensino do objeto de estudo, que neste caso, é a regra de três. É importante que nessa fase, segundo Oliveira (2013, 135), o professor pesquisador e alunos participem de maneira ativa do processo de ensino e aprendizado. Ao professor cabe registrar as observações, em cada uma das sessões de ensino, que indiquem as concepções e representações manifestadas pelos alunos acerca do assunto que se pretende ensinar.

Nesse pensar, apresentações a seguir o lócus onde a pesquisa foi realizada e o público alvo, o cronograma de pesquisa, os instrumentos utilizados na produção de informação e as sessões de ensino sobre as regra de três com as observações realizadas sobre o comportamento e as produções dos alunos no andamento de cada uma das sessões.

5.1. LÓCUS E OS SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa de campo ocorreu em uma escola pública estadual de ensino fundamental e médio localizada no bairro do Guamá na cidade de Belém-PA, e os atores sociais que participaram dessa pesquisa foram alunos do 7º ano do ensino fundamental, que ainda não haviam estudado o assunto regra de três, pois pretendíamos ministrar aulas desse conteúdo por meio de uma sequência didática distinta da tradicional, com o fito de analisarmos os efeitos dessa metodologia no ensino de matemática, sobretudo no ensino e aprendizado das regras de três.

A seguir apresentamos o cronograma das atividades desenvolvidas na execução da pesquisa.

5.2. CRONOGRAMA DA PESQUISA

A produção de informação da pesquisa teve início no dia 17 de outubro de 2017, com o término no dia 05 de dezembro do mesmo ano, e ocorreu em uma escola pública estadual de ensino fundamental e médio junto a uma amostra de 29 alunos do 7º ano do ensino fundamental por meio da aplicação de um questionário socioeconômico, das produções dos alunos nas atividades desenvolvidas e também pelas observações levantadas pelo professor pesquisador no diário de campo.

O quadro a diante traz os dias de trabalho ocorridos ao longo do período mencionado para a execução da pesquisa bem como as respectivas atividades fomentadas.

Quadro 10 – Cronograma de atividades da sequência didática

Sessão de ensino	Data/mês	Atividade desenvolvida
Primeira	17/out.	Aplicações do questionário socioeconômico e pré-teste
Segunda	19/out.	Aplicação da atividade 1
Terceira	26/out.	Aplicação da atividade 2
Quarta	31/out.	Aplicação da atividade de aprofundamento
Quinta	07/nov.	Apresentação da regra de três simples
Sexta	09/nov.	Aplicação da regra de três simples
Sétima	14/nov.	Aplicação da atividade 3
Oitava	21/nov.	Apresentação da regra de três composta
Nona	23/nov.	Aplicação da regra de três composta
Décima	28/nov.	Revisão de estudo da regra de três simples e composta.
Décima primeira	05/dez.	Aplicação do pós-teste

Fonte: Experimento (2017)

A seguir apresentamos cada uma das sessões mencionadas acima, descrevendo os fatos ocorridos nessas sessões que constituíram o substrato deste estudo sobre o ensino e aprendizado das regras de três no 7º ano do ensino fundamental.

5.4. PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO: aplicações do questionário socioeconômico e pré-teste

No dia 17 de outubro de 2017, demos início a nossa pesquisa de campo na escola estadual, mencionada anteriormente, escolhida para implementarmos a nossa sequência didática para o ensino das regras de três. Neste dia, chegamos a essa instituição de ensino às 07h30min. Na ocasião, encaminhamo-nos à sala da direção para comunicar a nossa estada na escola nos três primeiros horários da aula de matemática, como havíamos combinado no encontro anterior. Com a permissão da diretora, passamos a aguardar o professor responsável pela turma onde iríamos aplicar os instrumentos de pesquisa, neste caso o questionário socioeconômico e o pré-teste.

O referido professor chegou às 07h35min na escola, então nos dirigimos para a sala de aula. Lá, o colega de profissão nos apresentou aos alunos presentes, e solicitou que os discentes contribuíssem com o nosso trabalho da universidade. Após essa apresentação inicial pelo professor da turma, nos foi concedida a palavra, e, na ocasião, nos identificamos para a classe como aluno do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, e revelamos a nossa intenção por estar na escola, ou seja, informações que pretendíamos realizar naquela sala um trabalho envolvendo o ensino de um conteúdo de matemática específico do 7º ano do ensino fundamental, e, para tanto, contávamos com a participação de todos nesse trabalho que começaria neste dia com a aplicação de um questionário e, posteriormente, de um pré-teste. Sobre este, comunicamos aos alunos que eles não precisariam se preocupar com o resultado obtido, haja vista que as notas alcançadas não acarretariam, de forma alguma, em suas avaliações bimestrais, era apenas para mensurarmos os conhecimentos prévios deles acerca de determinadas situações com matemática.

Depois desses informes, entregamos a cada aluno e aluna o questionário socioeconômico que se iniciou às 07h50min. E após a conclusão do mesmo, às 08h20min, entregamos a folha de questões do teste. No desenrolar deste, presenciamos a preocupação de alguns alunos por não saberem como proceder, matematicamente, em determinadas questões, então tranquilizamos esses alunos dizendo que eles poderiam utilizar de conhecimentos anteriores e de sua criatividade para solucionar os problemas, mas caso não tivessem qualquer ideia de como resolvê-los, eles poderiam passar para a questão seguinte.

Todos os alunos entregaram o pré-teste depois de uma hora e quinze minutos do início do mesmo. Dessa forma, demos por encerrada esta primeira sessão de ensino às 09h35min. Em seguida, agradecemos aos alunos pela contribuição dada ao nosso trabalho e também ao professor responsável pela classe por ceder o espaço para executarmos o nosso estudo. Depois disso, nos retiramos de sala de aula, mas antes, deixamos acertado para o próximo encontro a participação de todos na atividade 1.

Sobre as informações produzidas pelos instrumentos mencionados nesta primeira sessão de ensino, as mesmas estão descritas na sessão sobre a Análise a Posteriori e Validação.

5.5. SEGUNDA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da atividade 1

Na data marcada, 19 de outubro de 2017, chegamos à escola às 07h30min, e entramos na sala de aula às 07h35min. Como a turma ainda estava com poucos alunos, resolvemos aguardar alguns instantes para iniciarmos a atividade. Nesse ínterim, os discentes foram chegando para a aula e também aproveitei para separar os materiais que seriam utilizados em nosso trabalho. Depois de passado o tempo de tolerância, a quantidade de alunos na turma era expressiva para a realização do experimento, o qual foi iniciado de fato às 07h45min com a composição dos grupos de alunos, que totalizaram nove equipes, sendo que o número esperado era de onze equipes. Essas equipes foram constituídas de três integrantes cada uma, apenas uma delas continha dois integrantes.

Depois da formação das equipes, distribuímos uma parte do material da referida atividade para cada grupo formado contendo a situação 1, e, em seguida, apresentamos aos alunos a questão com as orientações devidas para a execução da tarefa. Após esse preâmbulo, as equipes começaram a resolver a situação proposta. No entanto, para algumas dessas equipes as orientações realizadas não foram suficientes, e precisaram de uma intervenção a mais, para prosseguirem na tarefa. Então, fizemos as devidas mediações que auxiliaram os alunos na continuação do trabalho.

Aqui cabe ressaltar, que o objetivo desta atividade 1 era conduzir os alunos a perceberem os princípios que norteiam o conceito de grandezas diretamente proporcionais para, em seguida, formalizarmos tal conceito. Isto é, esperávamos que esses discentes percebessem as variações conjuntas entre os valores das grandezas envolvidas na questão e também que as razões entre os valores dessas grandezas eram constantes, além do mais, observassem da mesma forma que o produto dos valores das grandezas não era constante.

Esse primeiro momento da atividade 1 que consistiu na construção de observações sobre relação proporcional direta entre duas grandezas representadas na situação1, foi finalizado pelas equipes num curto intervalo de tempo, ou seja, os alunos concluíram a situação mencionada entre 15 a 20 minutos, e as produções da maioria das equipes contemplaram as expectativas previstas para a situação proposta, pois indicaram os princípios necessários para a aquisição do conceito de grandezas diretamente proporcionais, como podemos constatar nas imagens adiante:

Imagem 1– Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe A
Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 1
Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0.2	5
2	10	5	0.2	20
3	15	5	0.2	45
4	20	5	0.2	80
5	25	5	0.2	125
6	30	5	0.2	180
7	35	5	0.2	245
8	40	5	0.2	320
9	45	5	0.2	405
10	50	5	0.2	500
11	55	5	0.2	605
12	60	5	0.2	720

Observações:

A razão entre as grandezas são iguais
O tempo e o volume da agua multiplicado
são diferentes

Observações: "A razão entre as grandezas são iguais o tempo e o volume da água multiplicado são diferentes."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 2 – Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe B

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0,2	5
2	10	5	0,2	20
3	15	5	0,2	45
4	20	5	0,2	80
5	25	5	0,2	125
6	30	5	0,2	180
7	35	5	0,2	245
8	40	5	0,2	320
9	45	5	0,2	405
10	50	5	0,2	500
11	55	5	0,2	605
12	60	5	0,2	720

Observações:

Percebemos que a razão que o volume da aguá e o tempo deu o mesmo números e a razão entre o volume da água deu o mesmo número. é o produto é diferente.

Observações: "Percebemos que a razão que o volume da água e o tempo deu o mesmo número e a razão entre o volume da água deu o mesmo número, e o produto é diferente."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 3 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe C
Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 1
Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0,2	5
2	10	5	0,2	20
3	15	5	0,2	45
4	20	5	0,2	80
5	25	5	0,2	125
6	30	5	0,2	180
7	35	5	0,2	245
8	40	5	0,2	320
9	45	5	0,2	405
10	50	5	0,2	500
11	55	5	0,2	605
12	60	5	0,2	720

Observações:
a Entendemos que a gente A Entendemos multiplica o tempo e o volume da água em ml ~~[illegible]~~. ~~a razão~~. A RAZÃO é ~~[illegible]~~ igual A MUTIPLICA É TIPERÉTE

Observações: "A razão é igual a multiplicação é diferente."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 4− Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe D
Equipe D – S_{18}, S_{22}, S_{27}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0.2	5
2	10	5	0.2	20
3	15	5	0.2	45
4	20	5	0.2	80
5	25	5	0.2	125
6	30	5	0.2	180
7	35	5	0.2	245
8	40	5	0.2	320
9	45	5	0.2	405
10	50	5	0.2	500
11	55	5	0.2	605
12	60	5	0.2	720

Observações:

~~Eu percebi que são muitos igualdades.~~

~~Quanto razão são igual e as grandezas diferentes.~~

Quando a razão entre duas grandezas e constantes (igual) dizemos que as grandezas são diretamente pro porcionais.

Observações: “Quando a razão entre duas grandezas é constante (igual) dizemos que as grandezas são diretamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 5 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe E
Equipe E – S_3, S_7, S_{28}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5 ÷ 1 = 5	1 ÷ 5 = 0,2	1 × 5 = 5
2	10	10 ÷ 2 = 5	2 ÷ 10 = 0,2	2 × 10 = 20
3	15	15 ÷ 3 = 5	3 ÷ 15 = 0,2	3 × 15 = 45
4	20	20 ÷ 4 = 5	4 ÷ 20 = 0,2	4 × 20 = 80
5	25	25 ÷ 5 = 5	5 ÷ 25 = 0,2	5 × 25 = 125
6	30	30 ÷ 6 = 5	6 ÷ 30 = 0,2	6 × 30 = 180
7	35	35 ÷ 7 = 5	7 ÷ 35 = 0,2	7 × 35 = 245
8	40	40 ÷ 8 = 5	8 ÷ 40 = 0,2	8 × 40 = 320
9	45	45 ÷ 9 = 5	9 ÷ 45 = 0,2	9 × 45 = 405
10	50	50 ÷ 10 = 5	10 ÷ 50 = 0,2	10 × 50 = 500
11	55	55 ÷ 11 = 5	11 ÷ 55 = 0,2	11 × 55 = 605
12	60	60 ÷ 12 = 5	12 ÷ 60 = 0,2	12 × 60 = 720

Observações: As razões São iguais e o Produtos e diferente

Observações: "As razões são iguais e o produto é diferente."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 6 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe F

Equipe F – S_{11}, S_{21}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0,2	5
2	10	5	0,2	20
3	15	5	0,2	45
4	20	5	0,2	80
5	25	5	0,2	125
6	30	5	0,2	180
7	35	5	0,2	245
8	40	5	0,2	320
9	45	5	0,2	405
10	50	5	0,2	500
11	55	5	0,2	605
12	60	5	0,2	720

Observações: o terceiro e o quarto quadro deram valores iguais já o último quadro deu valores maiores só isso

Observações: “O terceiro e o quarto quadro deram valores iguais já o último quadro deu valores maiores só isso.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 7 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe G

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0.2	5
2	10	5	0.2	20
3	15	5	0.2	45
4	20	5	0.2	80
5	25	5	0.2	125
6	30	5	0.2	180
7	35	5	0.2	245
8	40	5	0.2	320
9	45	5	0.2	402
10	50	5	0.2	500
11	55	5	0.2	605
12	60	5	0.2	720

Observações:

[illegible]

Observamos também que as razões são todas iguais e a multiplicação é diferente

Observações: "Observamos também que as razões são todas iguais e a multiplicação é diferente."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 8 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe H
Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0.2	5
2	10	5	0.2	20
3	15	5	0.2	45
4	20	5	0.2	80
5	25	5	0.2	125
6	30	5	0.2	180
7	35	5	0.2	245
8	40	5	0.2	320
9	45	5	0.2	405
10	50	5	0.2	500
11	55	5	0.2	605
12	60	5	0.2	720

Observações:

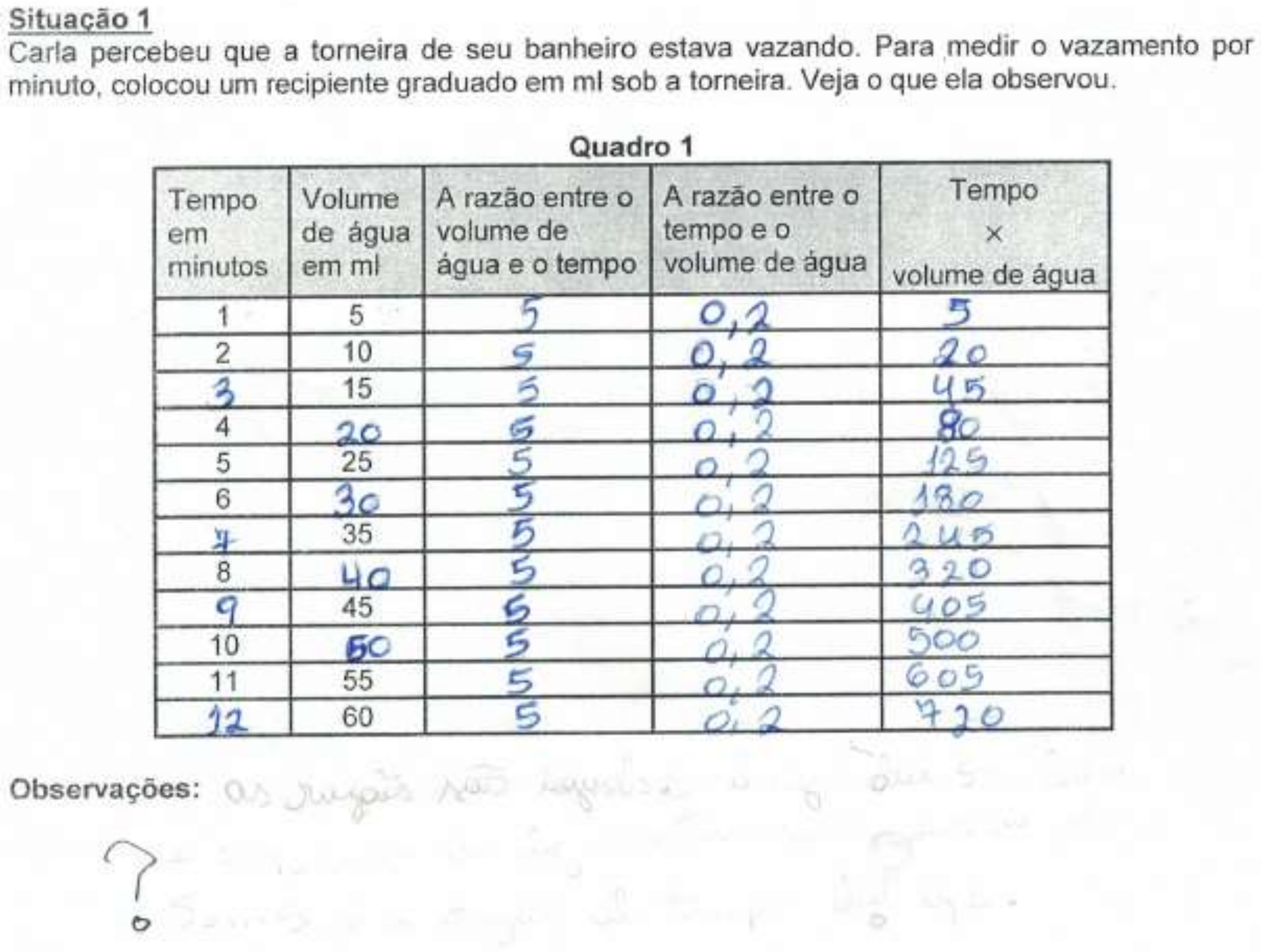
A razão é tudo igual e o produto e diferente

Observações: “A razão é tudo igual e o produto é diferente.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 9 − Resolução da situação 1 da primeira atividade pela equipe I

Equipe I – S_2, S_5, S_{30}



Situação 1

Carla percebeu que a torneira de seu banheiro estava vazando. Para medir o vazamento por minuto, colocou um recipiente graduado em ml sob a torneira. Veja o que ela observou.

Quadro 1

Tempo em minutos	Volume de água em ml	A razão entre o volume de água e o tempo	A razão entre o tempo e o volume de água	Tempo × volume de água
1	5	5	0,2	5
2	10	5	0,2	20
3	15	5	0,2	45
4	20	5	0,2	80
5	25	5	0,2	125
6	30	5	0,2	180
7	35	5	0,2	245
8	40	5	0,2	320
9	45	5	0,2	405
10	50	5	0,2	500
11	55	5	0,2	605
12	60	5	0,2	720

Observações:

?

Observações: NÃO APRESENTOU OBSERVAÇÕES.

Fonte: Experimento (2017)

De posse das observações construídas pelos alunos em cada equipe, foi necessário julgarmos quais dessas produções estavam de acordo com o pretendido para a tarefa da situação 1 da primeira atividade. Desse modo, classificamos cada uma das observações apresentadas como sendo: válidas, parcialmente válidas ou não válidas para a situação em questão. O quadro a seguir traz as equipes conforme a validade de suas observações e os respectivos percentuais de frequência de aproveitamento dessas observações.

Quadro 11 – Parecer sobre as produções das equipes na situação 1 da primeira atividade

Observações	Frequência	%
Válidas	Equipe A; Equipe C; Equipe E; Equipe G; Equipe H	56%
Parcialmente válidas	Equipe B; Equipe F	22%
Não válidas	Equipe D; Equipe I	22%

Fonte: Experimento (2017)

Esses dados mostraram que a maioria das equipes, 56%, apresentou observações válidas para a situação 1, o que nos fez considerar a execução da tarefa como satisfatória, pois alcançou o pretendido, que era conduzir os alunos a verificarem os princípios que embasam o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Já com relação às outras equipes, percebemos que apenas duas delas, 22%, não escreveram observações totalmente válidas para a situação proposta, da mesma forma 22% das equipes participantes não construíram as observações esperadas. Quanto a estas últimas equipes, pressupomos que a dificuldade em realizar análise e redigir os fatos observados esteja atrelada a pouca experiência com atividades experimentais nas aulas de matemática, mas acreditamos que essas lacunas possam ser superadas à medida que as sessões de ensino avancem.

Depois de finalizado esse primeiro momento da atividade 1, apresentamos no quadro da sala de aula a primeira informação acerca do conceito de grandezas diretamente proporcionais, conforme o trecho: ***Quando a razão entre os valores de duas grandezas é constante, dizemos que as grandezas são diretamente proporcionais.*** Depois dessa informação, que serviu como um conceito parcial e estruturado para as observações construídas empiricamente pelos discentes a respeito da relação proporcional direta entre duas grandezas, fizemos perguntas as equipes com relação à variação dos valores das grandezas na situação 1, com o intuito de levar os alunos a perceberem que essa variação acontecia de forma conjunta, isto é, quando um valor qualquer de uma grandeza dobra, triplica ou quadruplica etc., ou ainda, é reduzido a metade, a terça parte, ou quarta parte etc., os respectivos valores da outra grandeza também sofre a mesma variação? As respostas apresentadas pelas equipes a esse questionamento indicaram que os discentes haviam percebido a variação conjunta nos valores das grandezas da situação 1, pois seus argumentos sinalizaram para essa compreensão. Com isso, pressupomos que esses alunos detectaram mais um princípio das grandezas diretamente proporcionais. Então, confiantes nessas respostas, mostramos uma segunda informação que respaldava as constatações dos alunos sobre a proporcionalidade direta, conforme a afirmação: ***Duas grandezas são diretamente proporcionais se e somente se quando multiplicando ou dividindo o valor de uma delas por um número, deferente de zero, o valor da outra fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.***

De posse dessas informações pelos alunos aliadas as observações construídas na situação 1 da primeira atividade, demos por formalizado o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Sobre a aquisição de princípios e conceitos matemáticos aliados ao experimento, Zabala (1998) tem a dizer que:

> No caso dos conteúdos referentes a conceitos e princípios, as atividades adequadas são de uma complexidade superior e são qualitativamente diferentes da simples repetição verbal de algumas ideias, definições e enunciados. A aprendizagem destes conteúdos exige atividades que situem os meninos e meninas frente a **experiências** que permitam a compreensão, o estabelecimento de relações e a utilização do que foi aprendido em situações diversificadas. (ZABALA, 1998, p. 177, grifo nosso)

Com as pretensões alcançadas para a situação 1, partimos para o segundo momento da atividade 1, onde apresentamos outro material que continha quatro situações que relacionavam grandezas e uma questão extra, sendo que uma dessas situações, situação 4, trazia uma relação não proporcional entre as quantidades envolvidas.

Cada equipe recebeu o material e, em seguida, passamos as informações necessárias para a execução da tarefa. Assim, demos início ao segundo momento do experimento com a realização das questões pelos alunos. Entretanto, algumas equipes precisaram ainda de orientações de como proceder na execução da tarefa, talvez, por não estarem acostumados com esse tipo de atividade matemática que exigia autonomia na realização do trabalho. Desse modo, nos dirigimos a essas equipes e explicamos novamente o funcionamento daquelas questões e reforçamos que eles (alunos) teriam que recorrer aos conceitos aprendidos na situação anterior para responder cada uma das quatro situações propostas. Após os informes complementares, as equipes retardatárias conseguiram avançar na tarefa, e as nossas intervenções passaram a ser reduzidas à medida que a sessão de ensino caminhava.

Nesta segunda sessão de ensino, com o fim do primeiro momento da atividade 1, já percebemos uma mudança considerável no comportamento dos alunos e na atmosfera da sala de aula com relação ao ensino de matemática, pois esses alunos, em sua maioria, estavam engajados na realização da tarefa proposta. Além do mais, havia uma interação entre os membros das equipes por meio de discussões na busca das respostas adequadas para as situações analisadas. Esse fato nos motivou ainda mais na execução do experimento, pois nos mostrou que, diferentemente da aula tradicional, os alunos estavam interessados em aprender matemática.

Quanto às produções dos alunos frente as quatro situações mencionadas da atividade 1 sobre a relação proporcional direta, apresentamos a seguir suas respostas e o parecer dessas construções quanto à validade para as situações propostas.

Imagem 10 − Resolução da equipe A nas situações 2 e 3

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, Porque Quando a Razão e igual entre duas grandezas elas são diretamente Proporcionais

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, Porque quando a razão e igual entre duas Grandezas elas são diretamente Proporcionais

Respostas

Situação 2: "Sim, porque quando a razão é igual entre duas grandezas elas são diretamente proporcionais."

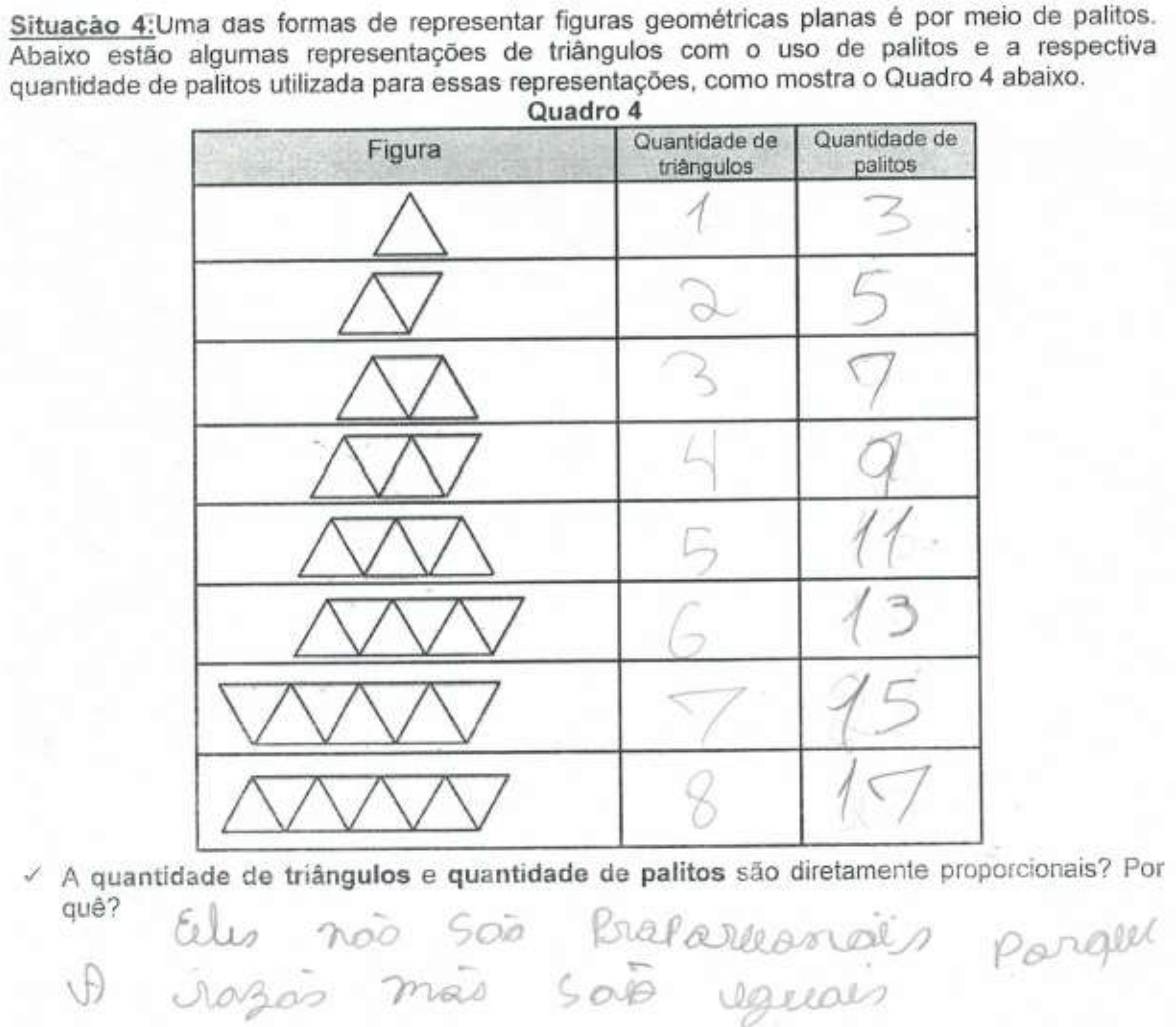
Situação 3: "Sim, porque quando a razão é igual entre duas grandezas elas são diretamente proporcionais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 11 − Resolução da equipe A na situação 4

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

Eles não são proporcionais porque a razão não são iguais

Resposta: “Eles não são proporcionais porque a razão não são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 12 − Resolução da equipe A na situação 5 e o aproveitamento na questão extra

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 5 e Questão extra

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	112	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim Porque Quando a razão é igual entre duas grandezas elas são diretamente proporcionais

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( )

b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X)

70%

c) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)

d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ( )

e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. (X)

g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. (X)

h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X)

i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. (X)

j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X)

Resposta: "Sim porque quando a razão é igual entre duas grandezas elas são diretamente proporcionais."

Questão extra (Aproveitamento): 70%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 12 – Parecer das produções da equipe A nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				■
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o mostrado no Quadro 12, podemos presumir que a equipe A compreendeu o conceito de grandezas diretamente proporcionais, haja vista que as respostas apresentadas pelos alunos nas quatro situações da atividade 1 mencionaram os princípios do referido conceito, um indicativo que os alunos perceberam quando duas grandezas estão relacionadas de forma diretamente proporcional. Apenas na situação 5 ocorreu um erro pontual com relação à multiplicação, pois os discentes apresentaram na coluna nove o valor 112 para a grandeza “Distância percorrida em km’, quando de fato seria 108. Apesar desse erro, consideramos como satisfatório o desempenho dos alunos S_8, S_{32}, S_{34} da equipe A nas quatro situações da atividade 1, pois não comprometeu a validade de suas respostas. Ainda cabe ressaltar, que esses alunos alcançaram 70% de acertos nas situações postas da questão extra sobre grandezas diretamente proporcionais, conforme mostrado na Imagem 12.

A seguir trazemos as construções dos alunos da equipe B nas quatro situações da atividade 1 sobre o conceito de grandezas diretamente proporcionais, e também o parecer dessas produções quando a qualidade de suas respostas.

Imagem 13 − Resolução da equipe B nas situações 2 e 3

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?
SIM PORQUE AS RAZÕES SÃO IGUAIS

Situação 3: Um empresário do ramo de açai vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açai vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

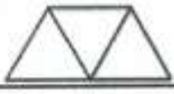
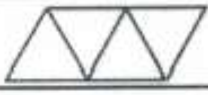
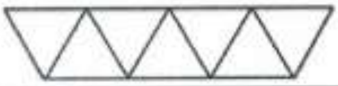
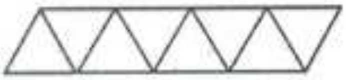
✓ As grandezas **litros de açai** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê? SIM PORQUE AS RAZOES SÃO IGUAIS

Respostas
Situação 2: “Sim porque as razões são iguais.”
Situação 3: “Sim porque as razões são iguais.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 14 − Resolução da equipe B na situação 4
Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}
Situação 4

Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê? NÃO PORQUE AS RAZÕES NÃO SÃO IGUAIS

Resposta: “Não porque as razões não são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 15 − Resolução da equipe B na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe B – S_{13}, $S_{15,}$ S_{16}
Situação 5 e Questão extra

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê? SIM PORQUE AS RAZOES SÃO IGUAIS

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") (   ) c
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X) c
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. (   ) c
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. (   ) x ?
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. (   ) c
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. (   ) x ?
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. (   ) x ?
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X) c
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. (   ) c
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X) c

70%

Resposta: "Sim porque as razões são iguais."

Questão extra (Aproveitamento): 70%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 13 – Parecer das produções da equipe B nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com o exposto no Quadro 13, podemos pressupor que a equipe B, formada pelos alunos S_{13}, $S_{15,}$ S_{16}, compreendeu o conceito de grandezas diretamente proporcionais, ainda que de forma superficial, pois construiu respostas válidas para as situações apresentadas na atividade 1, que relacionavam duas grandezas proporcionalmente, e também perceberam na situação 4 que as quantidades relacionadas nessa situação não eram proporcionas. Essas constatações, nos fazem presumir que os discentes entenderam quando duas grandezas estão relacionadas de maneira diretamente proporcionais. Tal suspeita também é reforçada com o desempenho dos alunos da equipe B obtido na questão extra, de acordo com Imagem 15, ou seja, eles alcançaram 70% de acerto nas situações apresentas sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas. Desse modo, avaliamos como positivo o rendimento dos alunos da equipe B na atividade 1.

Adiante trazemos as produções dos alunos da equipe C frente as quatro situações da atividade 1 a respeito da compreensão do conceito de grandezas diretamente proporcionais, da mesma forma apresentamos o parecer dessas produções e a qualidade das mesmas.

Imagem 16 − Resolução da equipe C nas situações 2 e 3

Equipe C – S_{12}, $S_{17,}$ S_{24}
Situações 2 e 3

Situação 2: Marian~ pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, porque as razões entre elas são iguais!

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

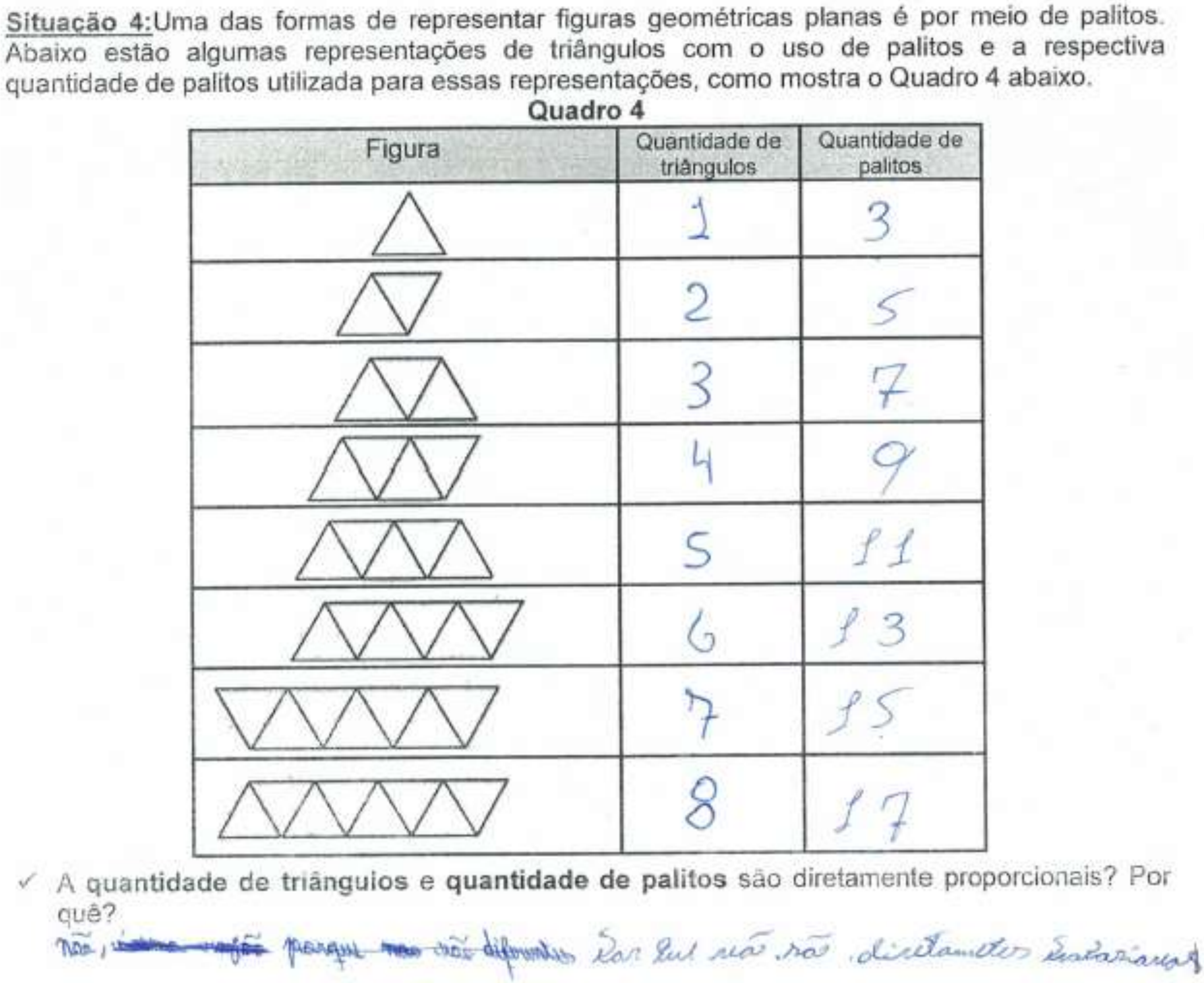
Sim, porque ~~elas~~ as razões entre elas são iguais

Respostas
Situação 2: “Sim , porque as razões entre elas são iguais.”
Situação 3: “Sim , porque as razões entre elas são iguais.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 17 − Resolução da equipe C na situação 4

Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A quantidade de triângulos e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

Não, ~~porque não são diferentes~~ Por que não são diretamente proporcionais

Resposta: “Não porque não são diretamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 18 − Resolução da equipe C na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}
Situação 5 e Questão extra

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, porquê as razões são iguais

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**
a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") (   ) C
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (x) C
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. (   ) C
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. (   ) x ? 70%
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. (   )
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. (   ) x ?
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. (   ) x ?
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (x) C
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. (   ) C
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (x) C

Resposta: "Sim, porque as razões são iguais."

Questão extra (Aproveitamento): 70%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 14 – Parecer das produções da equipe C nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■		■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.			■	
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

De posse das informações do Quadro 14, podemos supor que os alunos S_{12}, $S_{17,}$ S_{24} da equipe C assimilaram o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois construíram respostas válidas para as situações apresentadas da atividade 1 que relacionaram grandezas diretamente proporcionais. Somente na situação 4, onde não havia relação proporcional direta, a equipe C não construiu uma resposta válida, apesar de negar a relação proporcional direta entre as quantidades envolvidas no contexto, porque trouxe uma justificativa pouco convincente a respeito da relação não proporcional existente na situação posta, uma vez que não mencionou que as razões entre as grandezas naquela situação eram diferentes.

Já com relação ao desempenho na questão extra, podemos considerar como satisfatório, pois a equipe C conseguiu 70% de acerto nessa questão. Desse modo, avaliamos o rendimento dos alunos da referida equipe como positivo na atividade 1.

A seguir apresentamos as produções dos alunos da equipe D acerca da aplicação do conceito de grandezas diretamente proporcionais frente as quatro situações da atividade 1, bem como o parecer dessas produções quanto a qualidade das mesmas.

Imagem 19 − Resolução da equipe D nas situações 2 e 3

Equipe D – S_{18}, S_{22}, S_{27}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim,

Por que a razão é igual!

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

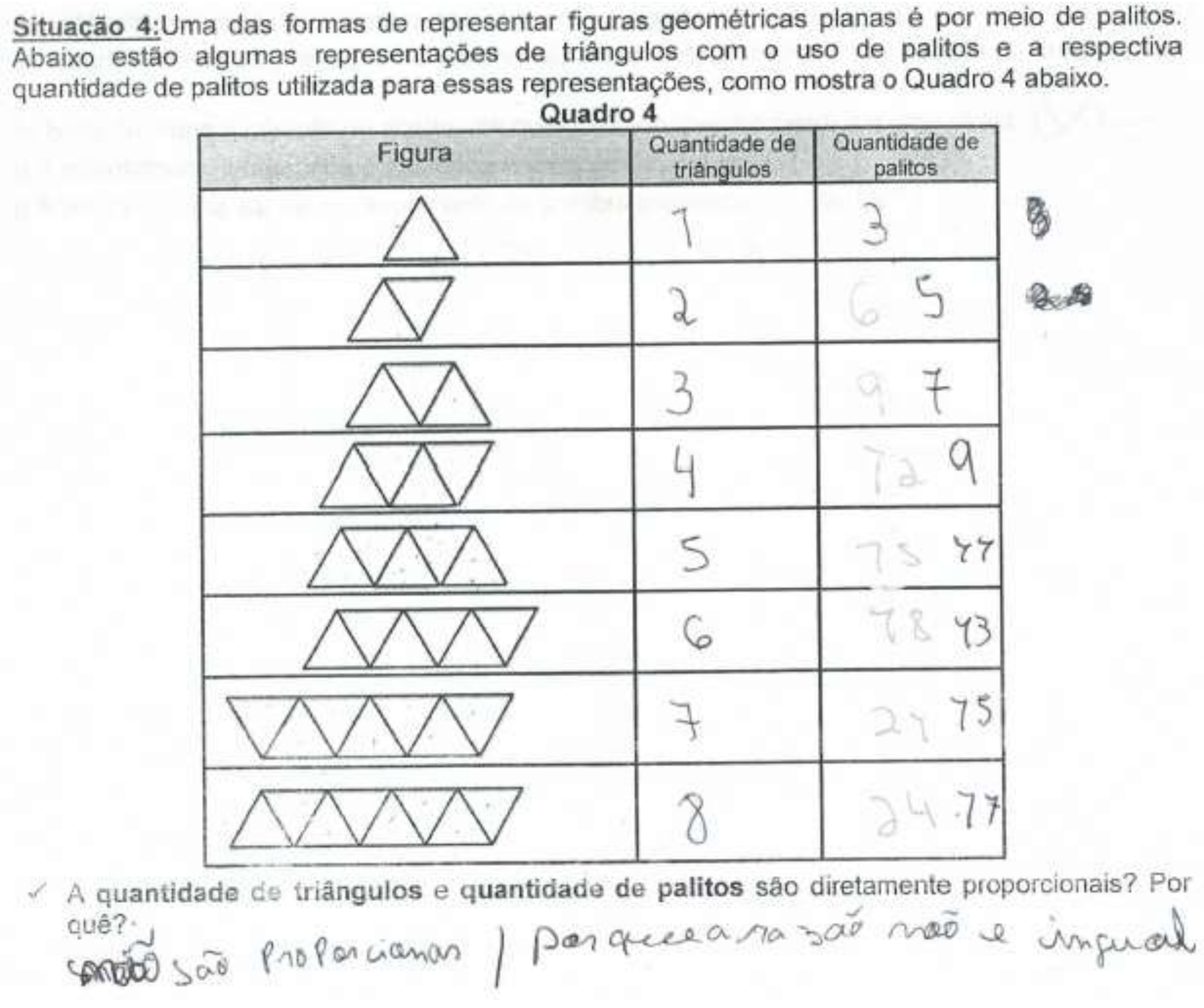
✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê? Quando multiplicando ou dividido o valor de uma delas por um número!

Respostas
Situação 2: “Sim porque a razão é igual.”
Situação 3: “Quando multiplicando ou dividido o valor de uma delas por um número,” (INCOMPLETA)
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 20 − Resolução da equipe D na situação 4

Equipe D – S_{18}, $S_{22,}$ S_{27}

Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

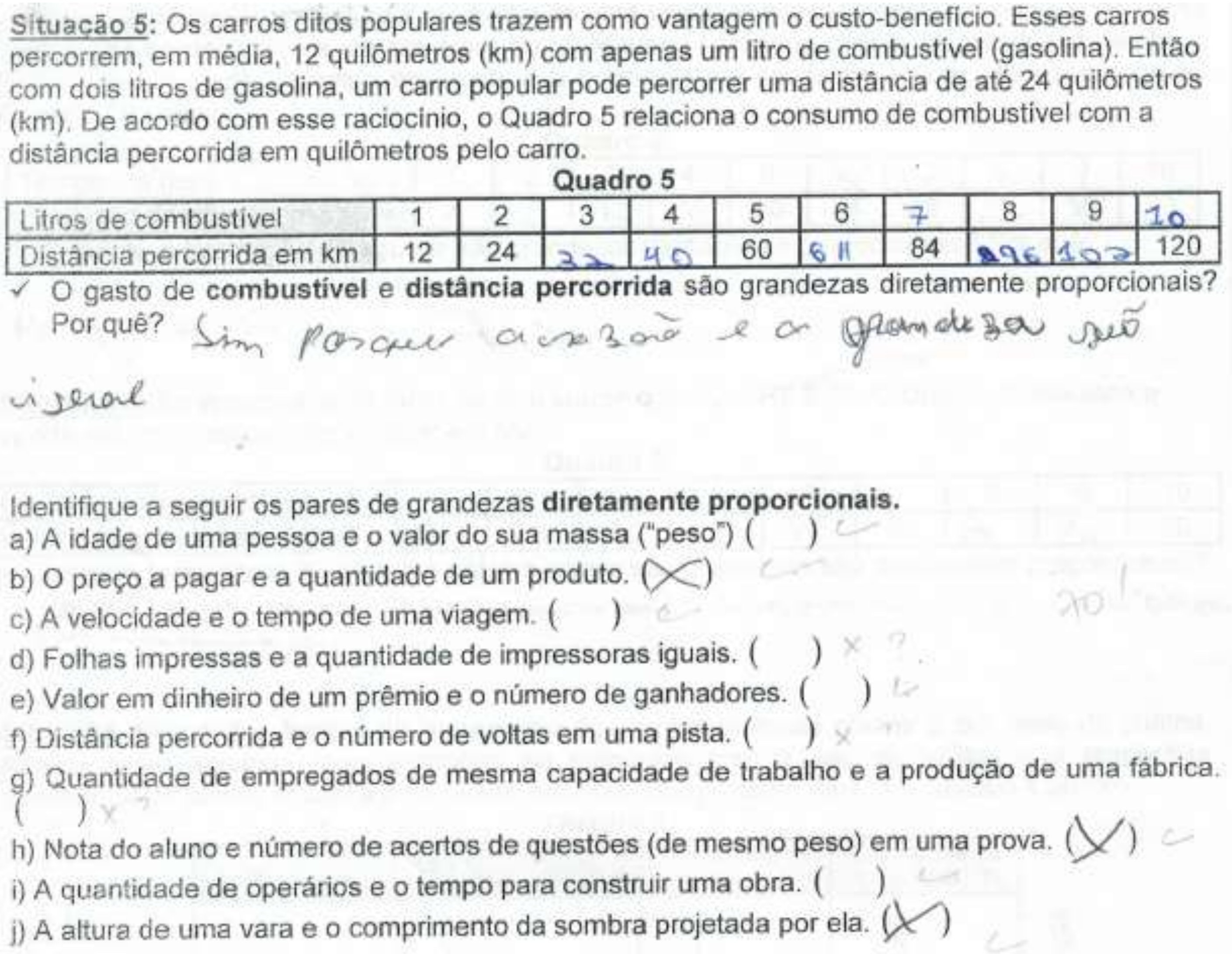
✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

~~são~~ são proporcionas | porque a razão não é igual

Resposta: “Não são proporcionais, porque a razão não é igual.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 21 − Resolução da equipe D na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe D – S_{18}, $S_{22,}$ S_{27}
Situação 5 e Questão extra



Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	32	40	60	6 11	84	96	102	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê? Sim porque a razão e a grandeza são igual

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**
a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( )
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X)
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ( )
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ( )
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ( )
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X)
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( )
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X)

70%

Resposta: "Sim porque a razão e a grandeza são igual."

Questão extra (Aproveitamento): 70%
Fonte: Experimento (2017)

Quadro 15– Parecer das produções da equipe D nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■		■	
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				■
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.		■		
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o Quadro 15 com o parecer das produções da equipe D nas quatro situações da atividade 1, percebemos que os alunos S_{18}, $S_{22,}$ S_{27} da referida equipe construíram respostas válidas acerca da relação proporcional direta entre duas grandezas apenas em duas situações, 2 e 4, nas outras, 3 e 5, os discentes apresentaram respostas parcialmente corretas, sendo que tais respostas continham falta de sentido, erro de multiplicação ou estava incompleta. Esses erros pontuais comprometeram o rendimento da equipe D em duas das quatro situações da atividade 1 sobre a relação proporcional direta entre duas quantidades. No entanto, as alunos da equipe D obtiveram 70% de aproveitamento na questão extra, um indicativo que o conceito de grandezas diretamente proporcionais tenha sido compreendido entre alguns dos membros da equipe, mesmo que de forma superficial.

A avaliação que fazemos do desempenho dos alunos da equipe D nas quatro situações da atividade 1 mencionadas no parágrafo anterior é positiva, pois houve indícios nas situações com respostas corretas de que esses alunos assimilaram princípios do conceito de grandezas diretamente proporcionais, dessa forma, com a execução de questões de aprofundamento, acreditamos que as dificuldades existentes acerca do conceito de grandezas diretamente proporcionais tendem a serem erradicadas ou minoradas.

Adiante apresentamos as produções dos alunos da equipe E a respeito da utilização do conceito de grandezas diretamente proporcionais em situações envolvendo duas grandezas.

Imagem 22 − Resolução da equipe E nas situações 2 e 3

Equipe E – S_3, S_7, S_{28}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, Por que. o Razão e igual

Situação 3:Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

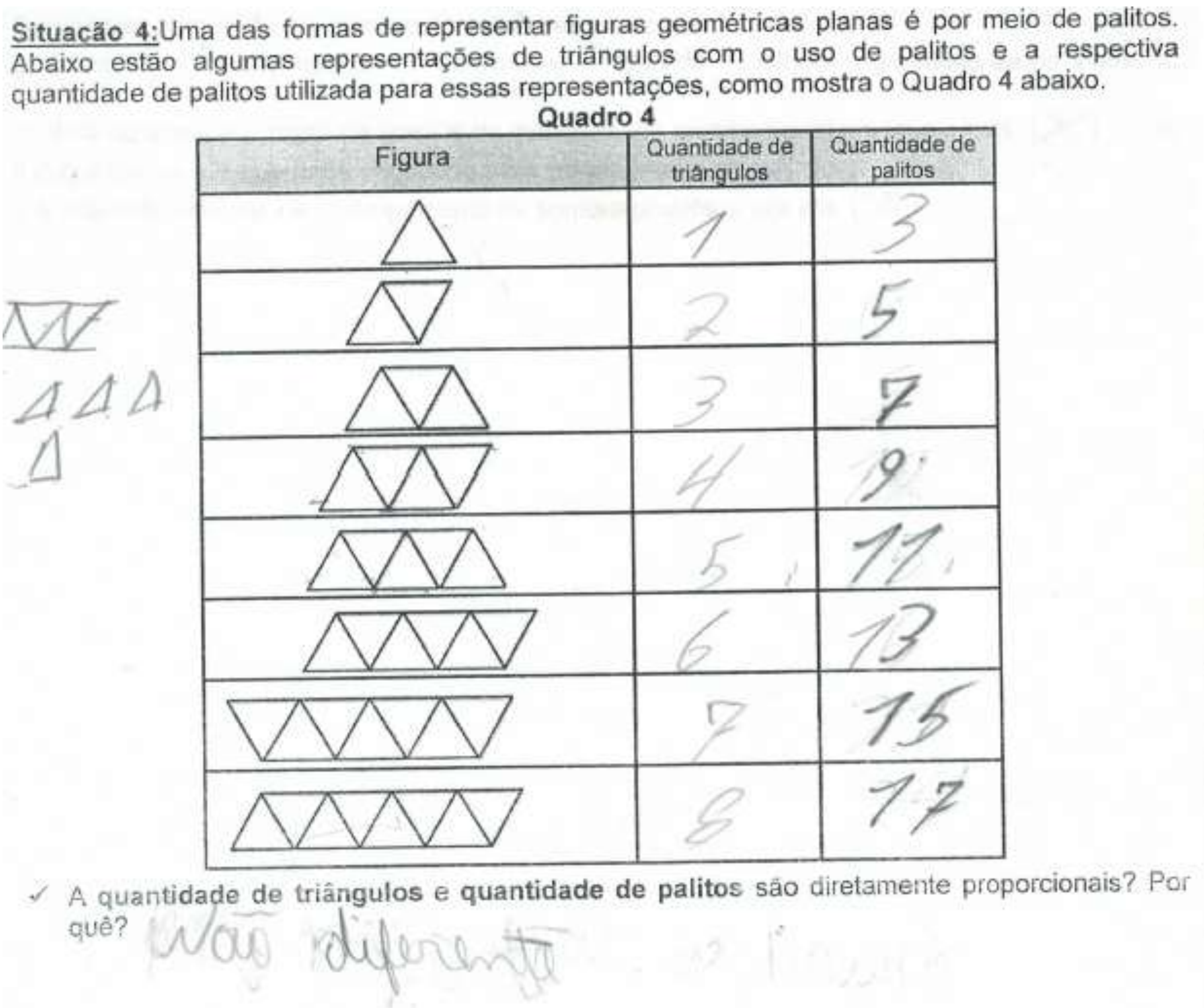
Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê? Sim, Porque o Razão e igual

Respostas
Situação 2: “Sim, porque a razão é igual.”
Situação 3: “Sim, porque a razão é igual.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 23 − Resolução da equipe E na situação 4
Equipe E – S_3, S_7, S_{28}
Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

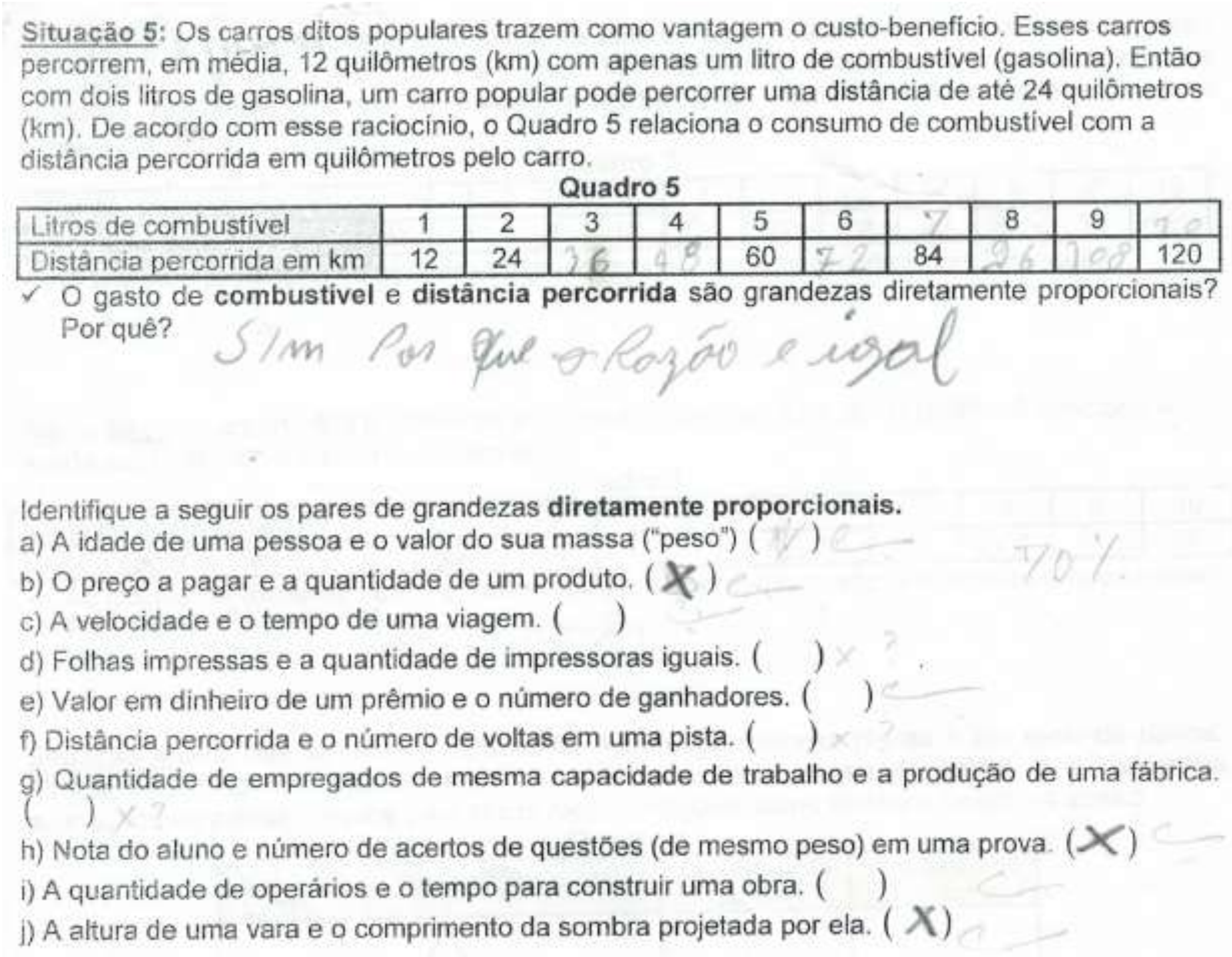
✓ A quantidade de triângulos e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê? Não diferente

Resposta: “Não diferente.” (INCOMPLETA)
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 24 − Resolução da equipe E na situação 5 e o aproveitamento na questão extra

Equipe E – S_3, S_7, S_{28}

Situação 5 e Questão extra



Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê? Sim Por que o Razão e igual

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( ) C

b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X) C

c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ( ) x ?

e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( ) C

f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ( ) x ?

g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ( ) x ?

h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X) C

i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( ) C

j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X) C

70%

Resposta: "Sim porque a razão é igual."

Questão extra (Aproveitamento): 70%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 16 – Parecer das produções da equipe E nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■		■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.			■	
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com o parece do Quadro 16 sobre as produções dos alunos da equipe E, podemos avaliar o desempenho dessa equipe como positivo, haja vista que das quatro situações analisadas em três delas os alunos construíram respostas válidas acerca do conceito de grandezas diretamente proporcionais, sendo que apenas na situação 4 os alunos não apresentaram uma resposta adequada sobre a relação não proporcional presente na referida situação. Já com relação ao desempenho dos alunos da equipe E na questão extra, podemos afirmar que foi satisfatório, pois obtiveram 70% de acertos nos contextos apresentados da mencionada questão.

A seguir trazemos as produções dos alunos da equipe F acerca da utilização do conceito de grandezas diretamente proporcionais nas quatro situações da atividade 1, também apresentamos o parecer dessas produções quanto a qualidade das mesmas.

Imagem 25 − Resolução da equipe F nas situações 2 e 3

Equipe F – S_{11}, S_{21}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Por que as razão proporcional são Iguais

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

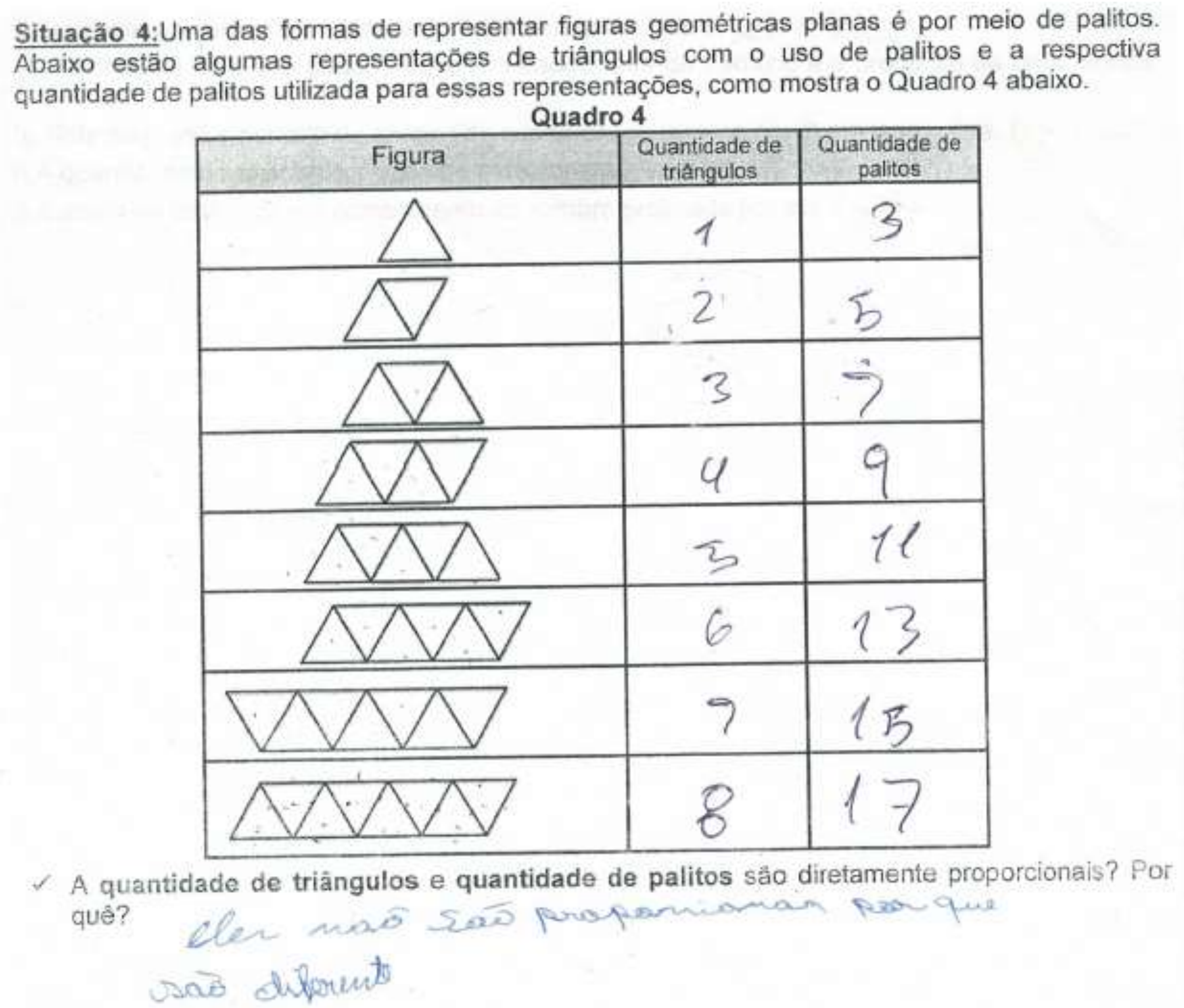
as razão são Iguais então elas são diretamente Proporcional

Respostas
Situação 2: “Porque as razão proporcional são iguais.”

Situação 3: “As razão são iguais então elas são diretamente proporcional.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 26 − Resolução da equipe F na situação 4
Equipe F – S_{11}, S_{21}
Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

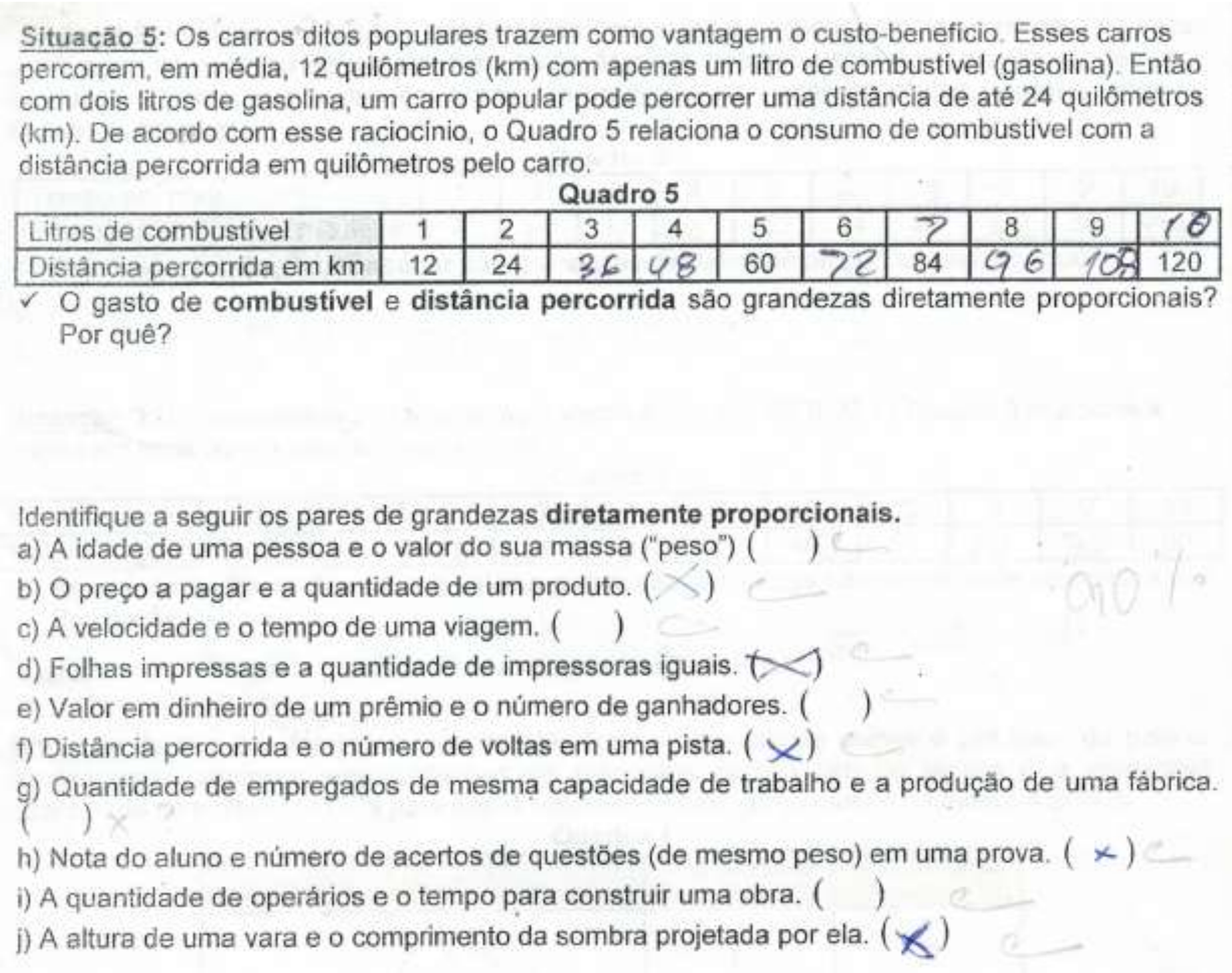
Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

Eles não são proporcionam porque são diferente

Resposta: “Eles não são proporcionais porque são diferente.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 27 − Resolução da equipe F na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe F – S_{11}, S_{21}
Situação 5 e Questão extra



Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**
a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( )
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X)
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. (X)
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. (X)
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ( )
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X)
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( )
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X)

90%

Resposta: NÃO RESPONDEU

Questão extra (Aproveitamento): 90%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 17 – Parecer das produções da equipe F nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■			
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.		■		
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.			■	
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				■

Fonte: Experimento (2017)

Com base no Quadro 17, podemos presumir que os alunos S_{11}, S_{21} da equipe F tiveram dificuldades em construir respostas válidas em duas das quatro situações da atividade 1, situações 4 e 5. Essas dificuldades estavam relacionadas a falta de coerência textual e por deixar sem resposta uma das situações da atividade mencionada. No entanto, esses alunos obtiveram acertos expressivos na questão extra, alcançando 90% de aproveitamento na referida questão, que abordou a relação proporcional direta entre duas grandezas.

De posse dessas constatações, avaliamos o desempenho dos alunos da equipe F como regular, pois acreditamos que o conceito de grandezas diretamente proporcionais precisa ser mais assimilado por esses alunos, haja vista que as produções textuais apresentadas não indicaram uma compreensão nítida dos princípios da relação proporcional direta entre duas grandezas. Provavelmente, essa dificuldade tende a ser minimizada ou erradicada com a resolução de questões de aprofundamento sobre o assunto.

Doravante, apresentamos as produções dos alunos da equipe G acerca da utilização do conceito de grandezas diretamente proporcionais frente as situações da atividade 1, da mesma forma trazemos o parecer dessas produções quanto a qualidade das mesmas.

Imagem 28 − Resolução da equipe G nas situações 2 e 3

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, porque a Razão são iguais.

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	4	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, porque os Resultados são iguais

Respostas
Situação 2: “Sim, porque a razão são iguais.”

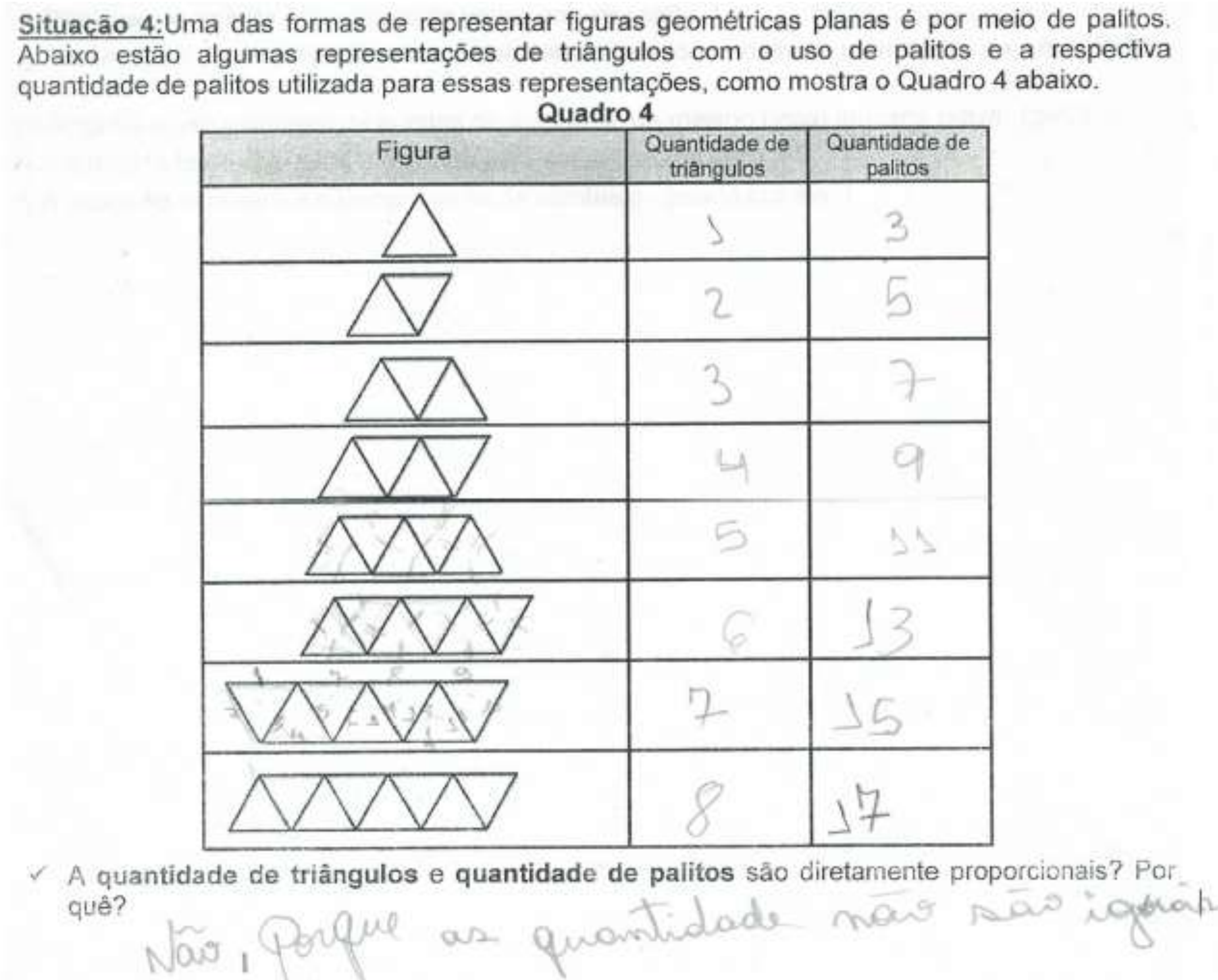
Situação 3: “Sim, porque os resultados são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 29 − Resolução da equipe G na situação 4

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}

Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

Não, Porque as quantidade não são iguais

Resposta: “Não, porque as quantidade não são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 30 − Resolução da equipe G na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe G – S_4, S_9, S_{33}
Situação 5 e Questão extra

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim, Por quê as grandezas são iguais

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( )
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X)
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. ( )
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ( )
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. ( )
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X)
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( )
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. ( )

Resposta: "Sim, porque as grandezas são iguais."

Questão extra (Aproveitamento): 60%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 18 – Parecer das produções da equipe G nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■			
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.		■	■	■
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

De posse das informações do Quadro 18, avaliamos o desempenho dos alunos S_4, S_9, S_{33} da equipe G como insatisfatório, uma vez que esses alunos não construíram respostas válidas, com exceção da situação 2, que indicassem uma compreensão, ainda que superficial, do conceito de grandezas diretamente proporcionais por todos os membros da equipe. Desse modo, acreditamos que a lacuna conceitual existente entre alguns dos alunos da equipe G possa ser sanada ou minorada com a prática de questões de aprofundamento sobre o referido assunto concomitantemente com as intervenções pedagógicas necessárias do professor.

Já com relação ao desempenho da equipe G na questão extra, podemos considerar como bom, pois os alunos alcançaram 60% de acerto nos contextos sobre a relação proporcional direta entre duas grandezas abordados na questão citada. Isso reforça a suspeita de que um ou mais dos membros da equipe mencionada compreendeu o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

A seguir, trazemos as produções dos alunos da equipe H a respeito da aplicação do conceito de grandezas diretamente proporcionais nas quatro situações da atividade 1.

Imagem 31 − Resolução da equipe H nas situações 2 e 3

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}
Situações 2 e 3

Situação 2: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	36	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Sim porque a razão e a grandezas são iguais

Situação 3: Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	36	24	35	39	47	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

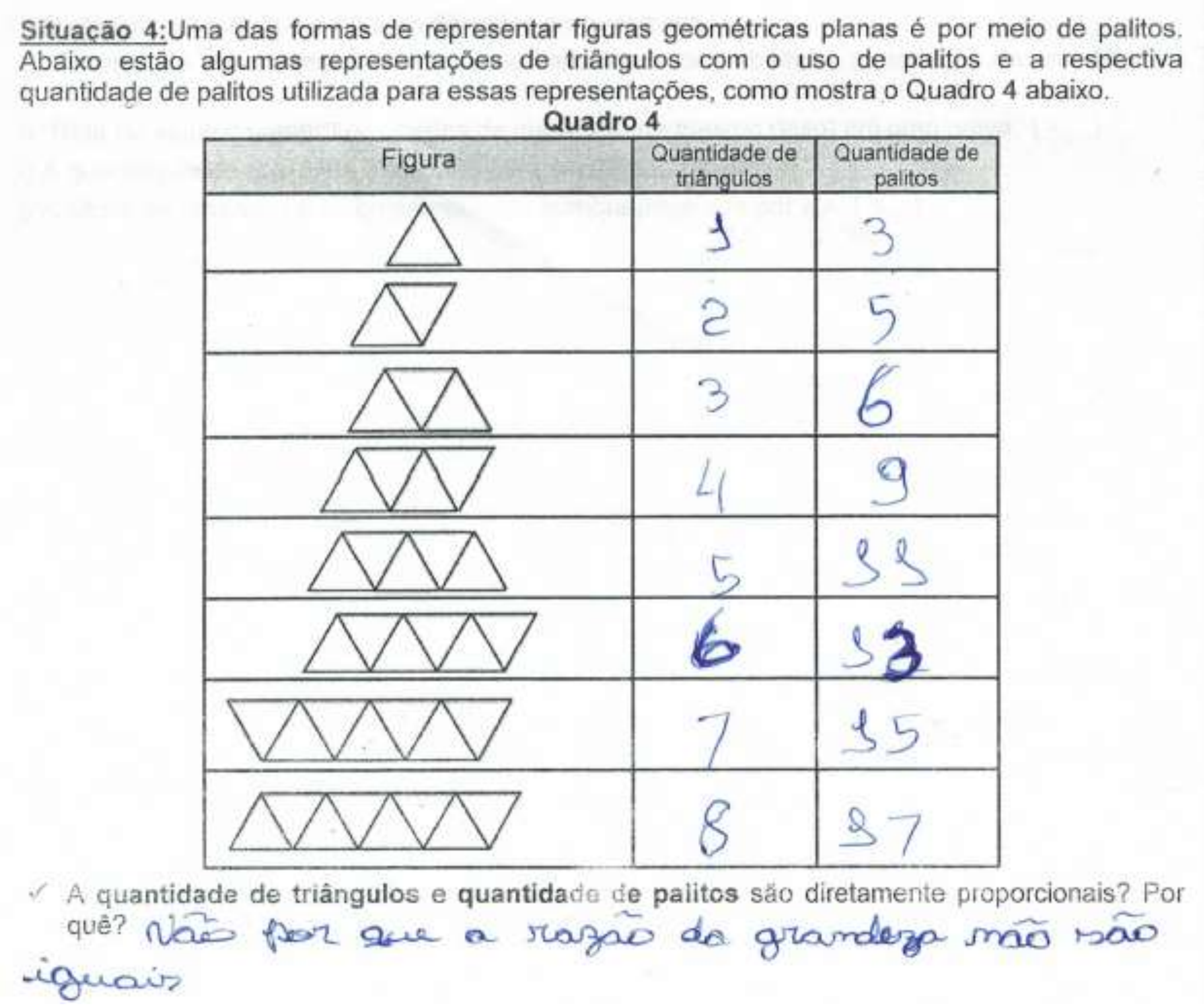
Por que a razão e a grandeza são iguais

Respostas
Situação 2: “Sim porque a razão e a grandezas são iguais.”

Situação 3: “Porque a razão e a grandeza são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 32 − Resolução da equipe H na situação 4
Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}
Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	6
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

✓ A quantidade de triângulos e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê? Não por que a razão da grandeza não são iguais

Resposta: “Não porque a razão da grandeza não são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 33 − Resolução da equipe H na situação 5 e o aproveitamento na questão extra

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 5 e Questão extra

Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	47	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê? sim porque a razão e a grandeza são iguais

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**

a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") (   ) C

b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X) C

c) A velocidade e o tempo de uma viagem. (   ) C

d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. (X) C

e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. (X) =

f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. (   ) X

g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. (X) C

h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X) C

i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. (   ) C

j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X) C

80%

Resposta: "Sim porque a razão e a grandeza são iguais."

Questão extra (Aproveitamento): 80%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 19 – Parecer das produções da equipe H nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.				
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.		■		■
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.			■	
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.	■			
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o Quadro 19, podemos presumir que a equipe H encontrou dificuldades em construir respostas que indicassem, de forma coerente, os princípios do conceito de grandezas diretamente proporcionais na maioria das situações da atividade 1, salvo na situação 4, onde os alunos S_1, S_{14}, S_{31} da referida equipe perceberam que a relação entre as quantidades envolvidas nessa situação não era diretamente proporcional por meio da igualdade de razão. Esse fato, indicou que algum (ou alguns) aluno da equipe H havia compreendido que a razão entre duas grandezas diretamente proporcionais é sempre igual. Esse raciocínio é sintomático de que o conceito de grandezas diretamente proporcionais foi assimilado, ainda que superficialmente, por um ou mais membros da equipe H. Essa suspeita também é reforçada com base no desempenho dos alunos na questão extra, pois obtiveram 80% de acertos nos contextos em que existia a relação proporcional direta entre as grandezas.

De acordo com o realizado, avaliamos como regular o desempenho da equipe H nas quatro situações da atividade 1 a respeito da utilização do conceito de grandezas diretamente proporcionais. Acreditamos que as dificuldades encontradas pelos discentes na execução desta tarefa, que caracterizou o segundo momento da atividade mencionada, possam ser erradicadas ou minimizadas com a prática de questões de aprofundamento para que o conceito de grandezas diretamente proporcionais seja sedimentado pelos alunos.

Por fim, apresentamos as produções dos alunos da equipe I na atividade 1.

Imagem 34 − Resolução da equipe I nas situações 2 e 3

Equipe I – S_2, S_5, S_{30}

Situações 2 e 3

<u>Situação 2</u>: Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de um dia. Para tanto, Mariana trabalhou com duas grandezas: tempo e produção. Ela mediu o tempo em horas e a produção em sacas de açúcar, representados no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2

Tempo em hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produção de açúcar em sacas	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

✓ O **tempo** e **produção de açúcar** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Porque a razão e a grandeza são iguais

<u>Situacão 3:</u>Um empresário do ramo de açaí vende o litro por R$ 8,00. O Quadro 3 relaciona a venda em litros com o valor a pagar em reais.

Quadro 3

Litros de açaí vendido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a pagar em reais	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

✓ As grandezas **litros de açaí** e **o valor a pagar** são grandezas são diretamente proporcionais? Por quê?

Porque a razão e a grandeza são iguais

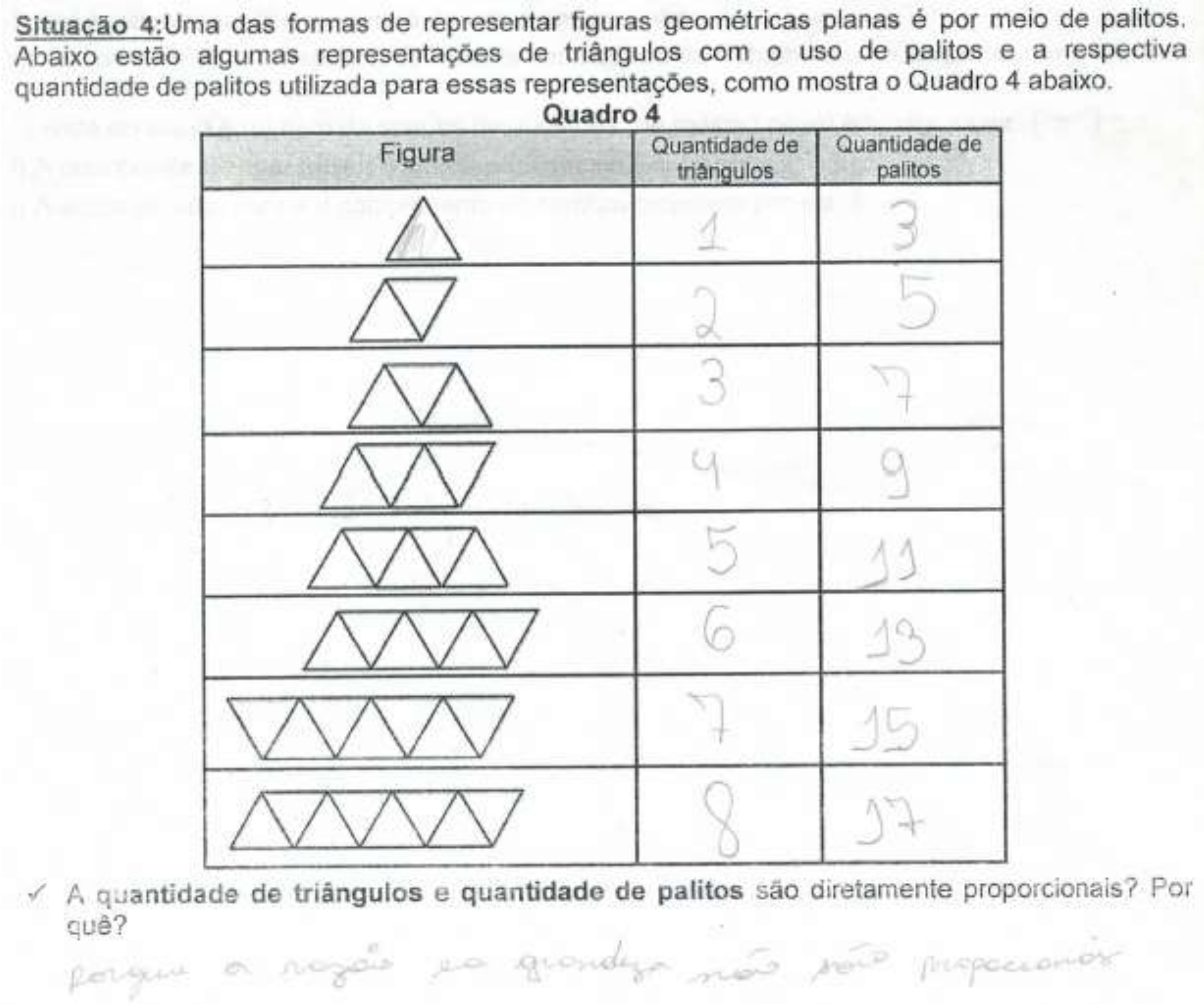
Respostas

Situação 2: “Porque a razão e a grandeza são iguais.”

Situação 3: “Porque a razão e a grandeza são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 35 − Resolução da equipe I na situação 4
Equipe I – S_2, S_5, S_{30}
Situação 4



Situação 4: Uma das formas de representar figuras geométricas planas é por meio de palitos. Abaixo estão algumas representações de triângulos com o uso de palitos e a respectiva quantidade de palitos utilizada para essas representações, como mostra o Quadro 4 abaixo.

Quadro 4

Figura	Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
	1	3
	2	5
	3	7
	4	9
	5	11
	6	13
	7	15
	8	17

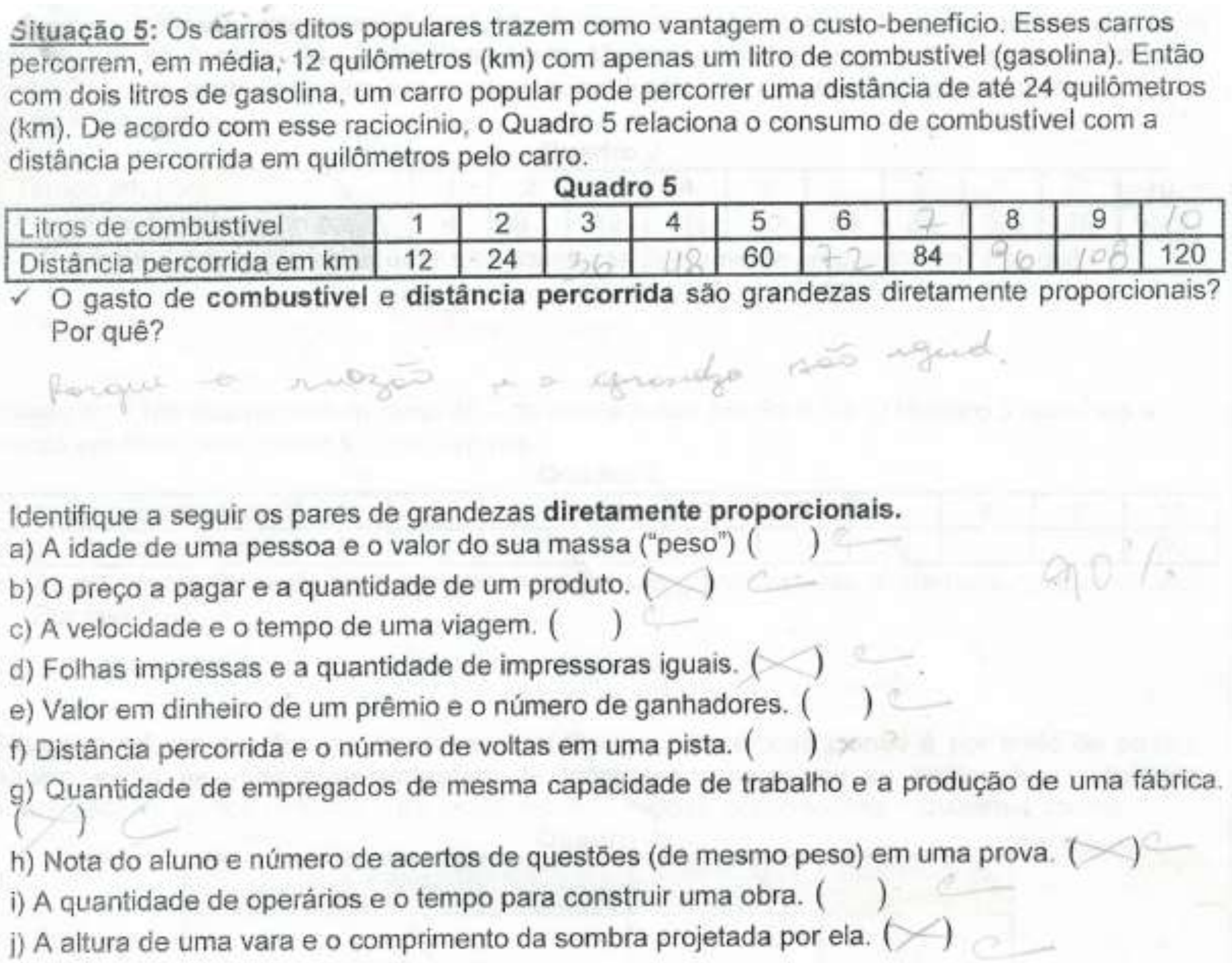
✓ A **quantidade de triângulos** e **quantidade de palitos** são diretamente proporcionais? Por quê?

porque a razão e a grandeza não são proporcionais

Resposta: “Não porque a razão e a grandeza não são proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 36 − Resolução da equipe I na situação 5 e o aproveitamento na questão extra
Equipe I – S_2, S_5, S_{30}
Situação 5 e Questão extra


Situação 5: Os carros ditos populares trazem como vantagem o custo-benefício. Esses carros percorrem, em média, 12 quilômetros (km) com apenas um litro de combustível (gasolina). Então com dois litros de gasolina, um carro popular pode percorrer uma distância de até 24 quilômetros (km). De acordo com esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona o consumo de combustível com a distância percorrida em quilômetros pelo carro.

Quadro 5

Litros de combustível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distância percorrida em km	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

✓ O gasto de **combustível** e **distância percorrida** são grandezas diretamente proporcionais? Por quê?

Porque a razão e a grandeza são igual.

Identifique a seguir os pares de grandezas **diretamente proporcionais.**
a) A idade de uma pessoa e o valor do sua massa ("peso") ( )
b) O preço a pagar e a quantidade de um produto. (X)
c) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )
d) Folhas impressas e a quantidade de impressoras iguais. (X)
e) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )
f) Distância percorrida e o número de voltas em uma pista. ( )
g) Quantidade de empregados de mesma capacidade de trabalho e a produção de uma fábrica. (X)
h) Nota do aluno e número de acertos de questões (de mesmo peso) em uma prova. (X)
i) A quantidade de operários e o tempo para construir uma obra. ( )
j) A altura de uma vara e o comprimento da sombra projetada por ela. (X)

90%

Resposta: "Porque a razão e a grandeza são igual."

Questão extra (Aproveitamento): 90%
Fonte: Experimento (2017)

Quadro 20 – Parecer das produções da equipe I nas situações 2, 3, 4 e 5 da primeira atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.				
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.	■	■	■	■
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

Com base no Quadro 20, podemos pressupor que os alunos S_2, $S_{5,}$ S_{30} da equipe I tiveram dificuldades em responder corretamente as quatro situações da atividade 1 por não apresentarem de forma coerente os princípios do conceito de grandezas diretamente proporcionais, uma vez que as respostas construídas estavam confusas ao relacionarem os termos razão e grandeza. É provável, que os alunos da equipe I compreenderam a relação proporcional direta entre duas quantidades, ainda que de maneira superficial, mas a dificuldade em transcrever a ideia proporcional percebida nas situações propostas para o papel, tenha sido o maior obstáculo para os discentes, talvez por não estarem acostumados em resolver questões de matemática que exigissem a construção textual. Essa possibilidade é reforçada ao observamos o desempenho da equipe I na questão extra, que não necessitava da construção textual, cujo aproveitamento foi de 90% nos contextos com grandezas diretamente proporcionais. Tal constatação, nos faz acreditar que a noção de relação proporcional direta entre duas grandezas foi entendida pelos alunos da equipe I, porém precisa ser consolidada por meio da prática de resolução de questões de aprofundamento sobre o conceito de grandezas diretamente proporcionais para que as dificuldades existentes sejam erradicadas.

Quanto a avaliação da equipe I, consideramos como regular, pois apresentou um rendimento abaixo do esperado nas quatro situações da atividade 1.

Conforme as produções apresentadas, cada uma das nove equipes respondeu quatro situações e uma questão extra, que abordaram contextos sobre grandezas diretamente proporcionais. Para avaliarmos o trabalho desenvolvido por essas equipe no segundo momento da atividade 1, tomamos como parâmetros o preenchimento dos quadros e as respostas apresentadas em cada uma das situações bem como os acertos na questão extra. Desse modo, foi possível julgarmos o nível de compreensão dos alunos acerca do conceito de grandezas diretamente proporcionais, que foi o objetivo da atividade 1.

Os quadros adiante trazem, respectivamente, os percentuais de aproveitamento das equipe nas quatro situações da atividade 1 com relação aos pareceres apresentados anteriormente ao final do trabalho de cada equipe, e também os percentuais de aproveitamento dessas equipes na questão extra.

Quadro 21 – Desempenho por equipe nas quatro situações da atividade 1

Parecer	**Desempenho por equipe (%)**								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	75	100	75	50	75	25	25		
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				25				50	
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.	25					25		25	
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.			25	25	25	25	75	25	100
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.						25			

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 22 – Desempenho por equipe na questão extra da atividade 1

Equipe	**Desempenho (%)**
A	70%
B	70%
C	70%
D	70%
E	70%
F	90%
G	60%
H	80%
I	90%

Fonte: Experimento (2017)

Conforme as informações produzidas no Quadro 21, observamos que mais da metade das equipes, aproximadamente 56%, obtiveram um desempenho igual ou superior a 50% de acordo com o primeiro parecer, isto é, preencheram o quadro e responderam corretamente as situações apresentadas na atividade 1. Isso indicou que as equipes, A, B, C, D, E, haviam assimilado, ainda que superficialmente, o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois conseguiram apresentar respostas acertadas que sinalizaram a compreensão dos princípios que norteiam esse conceito.

Já com relação à questão extra, observamos que o desempenho de todas as equipes foi positivo com um aproveitamento acima dos 50% nos contextos que abordaram a relação proporcional direta entre duas grandezas, conforme apresentado no Quadro 22.

Ainda com a intenção de mostrarmos o desempenho das equipes nesta sessão de ensino, o quadro adiante traz as equipes que apresentaram resposta válida (RV), resposta parcialmente validada (RPV) e resposta não válida (RNV) para as quatro situações que compuseram o segundo momento da atividade 1.

Quadro 23 – Qualidade das respostas sobre as situações da atividade 1

Situação	Reposta			Percentual		
	RV	RPV	RNV	%RV	%RPV	%RNV
2	A, B, C, D, E, F, G	H, I		78%	22,%	-
3	A, B, C, E, F	G, H, I	D	56%	33%	11%
4	A, B, D, H	C, E, F, G, I		44%	56%	-
5	A, B, C, E	D, G, H, I	F	44%	44%	11%

Fonte: Experimento (2017)

Conforme as informações produzidas no quadro supracitado podemos observar que a situação 2 foi a que apresentou um percentual maior de respostas válidas, 78%, seguida da situação 3, com 56% das produções válidas. Apenas as situações 3 e 5 tiveram respostas não válidas, o que correspondeu a 11% das equipes para cada situação.

Após a conclusão do segundo momento da atividade 1, os alunos foram convidados a resolverem outras questões de aprofundamento como forma de reforçar os saberes construídos nesta sessão de ensino, isso caracterizou o terceiro momento da referida atividade. O desenrolar dessa última etapa ocorreu sem dificuldade para a maioria das equipes, pois se assemelhou com a anterior. Desse modo, os alunos passaram a resolver as questões de maneira autônoma interagindo com seus pares, recorrendo poucas vezes às orientações do professor pesquisador. Esses fatos indicaram que a compreensão do conceito de grandezas diretamente proporcionais estava sendo consolido pelos alunos, e esses avanços são também pelo fato de que a atividade planejada tornou as aulas de matemática mais dinâmica e produtiva, facilitando, assim, o acesso ao conhecimento, como recomenda Oliveira (2013, p. 53), ao afirmar que as atividades de uma sequência didática devem ser planejadas de tal modo que as aulas de matemática sejam dinâmicas e produtivas.

As equipes conseguiram finalizar todas as questões propostas e mostraram competência nas respostas construídas ao final da tarefa. Mesmo assim, apresentamos comentários sobre o conceito de grandezas diretamente proporcionais, que entendemos como necessários para reforçar o que foi constado pelas equipes durante o experimento nesta sessão de ensino. Depois de encerrada a nossa fala e confiantes que os alunos haviam alcançado o propósito da atividade, demos por encerrada esta sessão de ensino às 09h45min com o término do terceiro horário da aula de matemática, mas antes de sairmos de sala, marcamos para a aula seguinte o nosso próximo encontro, que tratará sobre grandezas inversamente proporcionais. Depois disso, nos despedimos dos alunos e saímos de sala de aula.

Sobre o desenrolar da atividade 2, que foi pensada como o propósito de subsidiar o aluno na compreensão do conceito de grandezas inversamente proporcionais por meio de questões, apresentamos a seguir a terceira sessão de ensino.

5.6. TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da atividade 2

No dia 26 de outubro de 2017, retornamos à escola, e chegamos nessa instituição de ensino às 07h30min, e adentramos na sala de aula às 07h35min. Como nesse horário havia poucos alunos, resolvemos aguardar um pouco antes de iniciarmos a atividade neste dia, até que houvesse uma quantidade de discentes significativa para a implementação do trabalho. Passados dez minutos, a turma já se encontrava com uma boa quantidade de alunos. Então começamos de fato o trabalho às 07h45min, pedindo aos alunos que formassem novamente os grupos da aula passada. Nesse instante, observamos que alguns alunos se mostraram relutantes em retomar os grupos, mas que aos poucos foram cedendo aos nossos pedidos, convencidos de que a aula de matemática ocorreria em grupo. Assim, foi possível formar nove equipes com três alunos cada.

Depois de formadas as equipes distribuímos uma primeira parte do material da atividade 2, como na sessão anterior, onde continha a situação 1 que trouxe um contexto sobre a variação proporcional inversa entre duas grandezas e também um quadro com valores incompletos que deveria ser preenchido pelos discentes por meio da observação e de seus conhecimentos prévios, utilizando, de preferência, as operações aritméticas de multiplicação e divisão. Após concluída a distribuição do material, fizemos a leitura do objetivo da atividade 2, que era conduzir os alunos a construírem o conceito de grandezas inversamente proporcionais, e os procedimentos de execução da mesma. Além disso, repassamos as orientações devidas para os alunos executarem a situação 1, que caracterizou o primeiro momento do experimento. Aqui cabe ressaltar, que nesse ínterim chegaram à sala de aula três alunos, e foram alocados nos grupos formados, conforme a afinidade desses alunos, assim, tivemos nesta aula trinta alunos, sendo que uma das equipes continha cinco alunos, outra ficou com quatro e as demais permaneceram com três alunos.

Como os alunos já estavam inicializados em realizar a tarefa experimental, que era semelhante a da aula passada, mas com um contexto diferente, eles poucas vezes pediram orientação ao professor pesquisador para realizar a situação 1 da atividade 2, cuja intenção era levar os alunos a construírem observações acerca do comportamento dos valores das grandezas envolvidas no contexto apresentado. Desse modo, esperávamos que os alunos identificassem os princípios que fundamentam o conceito de grandezas inversamente proporcionais, em particular, percebessem que a razão entre os valores das grandezas era diferente, e que o produto dos valores dessas grandezas era constante.

Doravante, apresentamos as imagens com as produções das equipes acerca da situação 1 da atividade 2, e também um quadro onde julgamos a validade ou não das produções construídas. Aqui cabe destacar, que as equipes concluíram a tarefa proposta num curto intervalo de tempo, aproximadamente em 15 minutos.

Imagem 37 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe A

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 1

Um reservatório de água fica **totalmente cheio após 72 horas** com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com **duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas**. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0,013 888889	72	72
2	36	0,0555555556	18	72
3	24	0, 125	8	72
4	18	0,2222222222	4,5	72
6	12	0,5	2	72
8	9	0,8888888889	1.125	72
9	8	1,125	0,8888888889	72
12	6	2	0,5	72

Observações A razão entre as grandezas são diferentes o produto entre as grandezas são iguais

Observações: "A razão entre as grandezas são diferentes o produto entre as grandezas são iguais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 38 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe B

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0,01389	72	72
2	36	0,05	18	72
3	24	0,125	8	72
4	18	0,2	4,5	72
6	12	0,5	2	72
8	9	0,89	1,125	72
9	8	1,125	0,89	72
12	6	2	0,5	72

Observações AS RAZÕES ENTRE AS GRANDEZAS SÃO DIFERENTES E O PRODUTO ENTRE AS GRANDEZAS SÃO IGUAIS

Observações: “As razões entre as grandezas são diferentes e o produto entre as grandezas são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 39 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe C

Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0.01389	72	72
2	36	0,05	18	72
3	24	0,125	8	72
4	18	0,2	4,5	72
6	12	0,5	2	72
8	9	0,89	1,125	72
9	8	1,125	0,89	72
12	6	2	0,5	75

Observações

As ~~grandezas~~ razões entre as grandezas são diferentes, e o produto entre as grandezas são iguais

Observações: "As razões entre as grandezas são diferentes, e o produto entre as grandezas são iguais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 40 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe D

Equipe D – S_6, S_{22}, S_{27}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0.0139	72	72
2	36	0.056	18	72
3	24	0.129	8	72
4	18	0.2	4.5	72
6	12	0.5	2	72
8	9	0.89	1.125	72
9	8	1.125	0.89	72
12	6	2	0.5	72

Observações

A Razão entre as grandezas foram diferente e a multiplicação entre as grandezas foram iguais

Observações: "A razão entre as grandezas foram diferente e a multiplicação entre as grandezas foram iguais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 41 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe E

Equipe E – S_3, S_7, S_{18}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0,01388	72	72
2	36	0.05	18	72
3	24	0.0125	8	72
4	18	0.2	4,5	72
6	12	0.5	2	72
8	9	0,89	1,125	72
9	8	1,125	0,89	72
12	6	2	0,5	72

Observações

A Razão entre As grandezas são diferentes o produto entre As grandezas são iguais

Observações: "A razão entre as grandezas são diferentes o produto entre as grandezas são iguais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 42 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe F

Equipe F – S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	00,139	72	72
2	36	00,056	18	72
3	24	0,125	8	72
4	18	0,222	4,5	72
6	12	0,5	2	72
8	9	0,888888	1,125	72
9	8	1,125	0,89	72
12	6	2	0,5	72

Observações: As grandezas começaram com divisão e terminou com multiplicação

Observações: “As grandezas começaram com divisão e terminou com multiplicação.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 43 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe G

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0,0139	72	72
2	36	0,0556	18	72
3	24	0,125	8	72
4	18	0,2222	4,5	72
6	12	0,5	1,5	72
8	9	0,8889	1,125	72
9	8	1,125	0,8889	72
12	6	2	0,5	72

Observações

as Razões entre as grandezas são diferente
o produto entre as grandezas são iguais

Observações: “As razões entre as grandezas são diferente o produto entre as grandezas são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 44 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe H

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0.0139	72	72
2	36	0.05556	18	72
3	24	0.125	8	72
4	18	0.2222	4.5	72
6	12	0.5	2	72
8	9	0.8889	1.125	72
9	8	1.125	0.8889	72
12	6	2	0.5	72

Observações

A Razão entre as grandezas são diferente
O produto entre as grandezas são iguais.

Observações: "A razão entre as grandezas são diferente o produto entre as grandezas são iguais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 45 − Resolução da situação 1 da segunda atividade pela equipe I

Equipe I – S_2, S_5, S_{29}, S_{30}

Situação 1

Um reservatório de água fica totalmente cheio após 72 horas com uma única torneira em funcionamento. No entanto, com duas torneiras idênticas a primeira o reservatório estaria cheio em 36 horas. De acordo com esse raciocínio, o Quadro 1 relaciona a quantidade de torneiras e o tempo em horas necessário para encher o reservatório.

divisão

Quadro 1

Quantidade de torneiras	Tempo em horas	A razão entre a quantidade de torneiras e o tempo	A razão entre o tempo e a quantidade de torneiras	Quantidade de torneiras × Tempo
1	72	0,0139	72	75
2	36	0,05	18	72
3	24	0,125	8	72
4	18	0,22222	4,5	72
6	12	0,55555	2	72
8	9	0,8	1,125	72
9	8	1,125	0,888888	72
12	6	2	0,5	72

Observações

A Razão Entre as grandezas São Diferentes Mas Porém, O Produto é Igual

Observações: “A razão entre as grandezas são diferentes mas porém, o produto é igual.”

Fonte: Experimento (2017)

As produções das equipes na situação 1 mostraram que a maioria dos alunos conseguiu detectar os princípios que sustentam a ideia da proporcionalidade inversa entre duas grandezas. Desse modo, cabe destacar no quadro abaixo quais as observações dessas equipes foram consideradas: válidas, parcialmente válidas ou não válidas para o propósito da referida situação.

Quadro 24− Parecer sobre as produções das equipes na situação 1 da segunda atividade

Observações	Frequência	%
Válidas	Equipe A; Equipe B; Equipe C; Equipe D; Equipe E; Equipe G; Equipe H; Equipe I	89%
Parcialmente válidas	NENHUMA	-
Não válidas	Equipe F;	11%

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o observado no quadro supracitado, 89% das equipes apresentaram observações válidas para a situação 1, ou seja, conseguiram perceber os princípios do conceito da relação proporcional inversa entre duas grandezas ao analisarem a questão proposta. Diante disso, podemos afirma que a execução da tarefa foi eficaz para a maioria da amostra pesquisada.

Com a finalização da situação 1 pelas equipes, que levaram em média quinze minutos para executá-la, apresentamos para os alunos no quadro da sala de aula a primeira informação sobre grandezas inversamente proporcionais, conforme o trecho: **Duas grandezas são chamadas inversamente proporcionais quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo.** Em seguida, os alunos tomaram nota dessa informação e, então, perguntamos: as grandezas da situação 1 são grandezas inversamente proporcionais? As respostas dos alunos foram imediatas, afirmando que sim. Tal afirmação, nos fez pressupor que os alunos haviam associado à experiência vivenciada na situação 1 com a informação apresentada, contribuindo, desse modo, para a construção de saberes e ampliação do conhecimento dos alunos.

Como pretendíamos mostrar uma segunda informação sobre a relação proporcional inversa entre duas grandezas, fizemos outras perguntas para as equipes sobre os valores das grandezas da situação mencionada no parágrafo anterior a respeito da variação desses valores, da seguinte forma:

Professor: *O que acontece com o valor da grandeza tempo se nós dobramos quantidade de torneiras de 2 para 4?*

Equipe A: *O valor do tempo fica dividido por dois.*

Equipe G: *O tempo é reduzido pela metade.*

Equipe H: *O valor do tempo diminui, é dividido por dois.*

.Equipe I: *O valor do tempo fica menor, cai pela metade.*

Com essas respostas obtidas e confiantes que os alunos haviam percebido a variação inversa nos valores das grandezas, resolvemos fazer a pergunta de outra forma, isto é, se reduzíssemos o valor da grandeza quantidade de torneira o que ocorreria com o valor da grandeza tempo? Os alunos pensaram um pouco e passaram a dizer que aumentaria. Essa resposta foi proferida por praticamente todas as equipes presente em sala de aula. Assim, tivemos a certeza que esses discentes tinham detectado mais um princípio da relação proporcional inversa. Então, confiantes nessas constatações, mostramos a segunda informação sobre a relação proporcional inversa de acordo com o trecho: **Duas grandezas são inversamente proporcionais, quando o valor de uma delas é multiplicado por dois, por três, por quatro etc., o valor da outra grandeza fica dividido por dois, por três, por quatro etc., respectivamente.**

De posse de mais essa informação, que serviu de conceito estruturado para a relação proporcional inversa entre duas grandezas, pedimos que os alunos tomassem nota, e com isso finalizamos o primeiro momento da atividade 2. Em seguida, distribuímos outro material dessa atividade que continha quatro situações, sendo que três delas, 1, 2 e 5, traziam contextos com grandezas inversamente proporcionais e uma, situação 4, abordava a relação não proporcional entre duas grandezas. Além dessas, ao final do material, havia uma questão extra com contextos sobre a relação proporcional inversa e também situações que tal relação não ocorria, e todas as situações apresentadas não continham valores numéricos. A nossa intenção com essa questão extra era levar os alunos a pensarem sobre a relação proporcional inversa entre duas grandezas sem a presença de números. E, assim, talvez, fomentar o raciocínio, a reflexão e a tomada de decisão desses alunos em situações com matemática semelhantes a realidade deles.

O desenrolar do segundo momento da atividade 2 ocorreu dentro da normalidade com a maioria das equipes debruçada sobre as questões propostas. Com isso, presenciamos discussões produtivas entre os membros das equipes na busca de apresentar uma reposta acertada para a situação em debate, recorrendo ao conceito apresentado anteriormente e as constatações empíricas vivenciadas na situação 1. Também observamos que integrantes de algumas equipes estavam interessados em fazer outras coisas ao invés da atividade proposta, como por exemplo, ficar em conversas paralelas, utilizar o celular para acessar as redes sociais etc. Devido a esses comportamentos, tivemos que intervir, pedindo aos discentes que se voltassem para a tarefa de matemática, pois eles estavam comprometendo o andamento do experimento, bem como o aprendizado deles próprios e de seus pares, pois em algumas ocasiões presenciamos apenas um ou dois alunos trabalhando na equipe.

Após essas intervenções disciplinares, os alunos pouco participativos passaram a se interessar pelo trabalho de matemática desenvolvido em sala.

Depois de passado certo tempo do início do segundo momento da atividade 2, presenciamos as produções dos alunos sobre as situações apresentadas, e essas produções relevaram que algumas equipes tinham compreendido o conceito da a relação proporcional inversa entre duas grandezas, enquanto que outras demonstraram insegurança sobre esse conceito, como revelaram as imagens adiante:

Imagem 46 – Resolução da equipe A nas situações 2 e 3

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 2:
Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16.8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim São inversamente proporcionais Por que as Produtos são iguais

Situação 3:
Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim Porque o Produto é igual

Respostas

Situação 2: “Sim são inversamente proporcionais porque os produtos são iguais.”

Situação 3: “Sim porque o produto é igual.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 47 – Resolução da equipe A nas situações 4 e 5

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não Por que o Produto não é igual

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	12

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim são enversamente Proporcionais Por que o valor da Primeiro grandeza com o valor correspondente da segunda é sempre o mesmo

Respostas

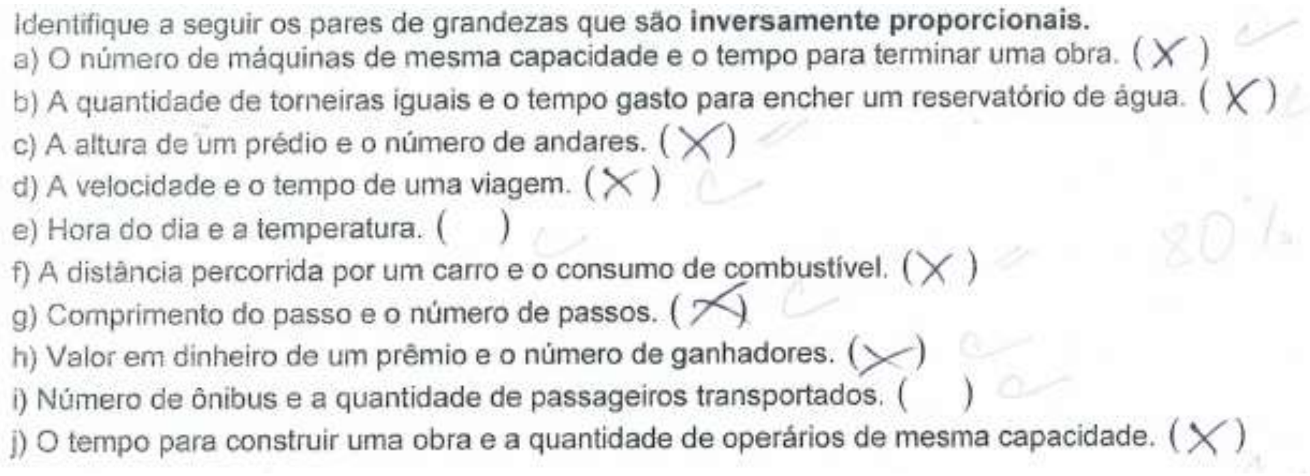
Situação 4: “Não porque o produto não é igual.”

Situação 5: “Sim são inversamente proporcionais porque o valor da primeira grandeza com o valor correspondente da segunda é sempre o mesmo.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 48 – Aproveitamento da equipe A na questão extra

Equipe A – S_8, S_{32}, S_{34}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**
a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. (X)
b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)
c) A altura de um prédio e o número de andares. (X)
d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)
e) Hora do dia e a temperatura. (   )
f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)
g) Comprimento do passo e o número de passos. (X)
h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. (X)
i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. (   )
j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. (X)
80%

Aproveitamento: 80%
Fonte: Experimento (2017)

Quadro 25 – Parecer das produções da equipe A nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				■
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu.				

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o exposto no Quadro 25, avaliamos o desempenho da equipe A como satisfatório, pois das quatro situações propostas na atividade 2 três foram respondidas corretamente conforme o esperado, ou seja, mencionaram os princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais. Apenas na situação 5 os alunos S_8, S_{32}, S_{34} da referida equipe construíram resposta parcialmente válida, porque não ficou explicito a igualdade de produto entre os valores das grandezas, entretanto, os discentes acertaram ao afirmar que a relação entre as grandezas era inversamente proporcional. Quanto ao aproveitamento da equipe A na questão extra também foi satisfatório, pois obtive 80% de acerto, um indicativo de que houve compreensão do conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Imagem 49 – Resolução da equipe B nas situações 2 e 3

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 2:
Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim porque o produto são iguais

Situação 3:
Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim porque o produto são iguais

Respostas

Situação 2: “Sim porque o produto são iguais.”

Situação 3: “Sim porque o produto são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 50 – Resolução da equipe B nas situações 4 e 5

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	40	90	24	70	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não porque o produto não são iguais

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	[illegible]

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não porque o produto não são iguais

?

Respostas

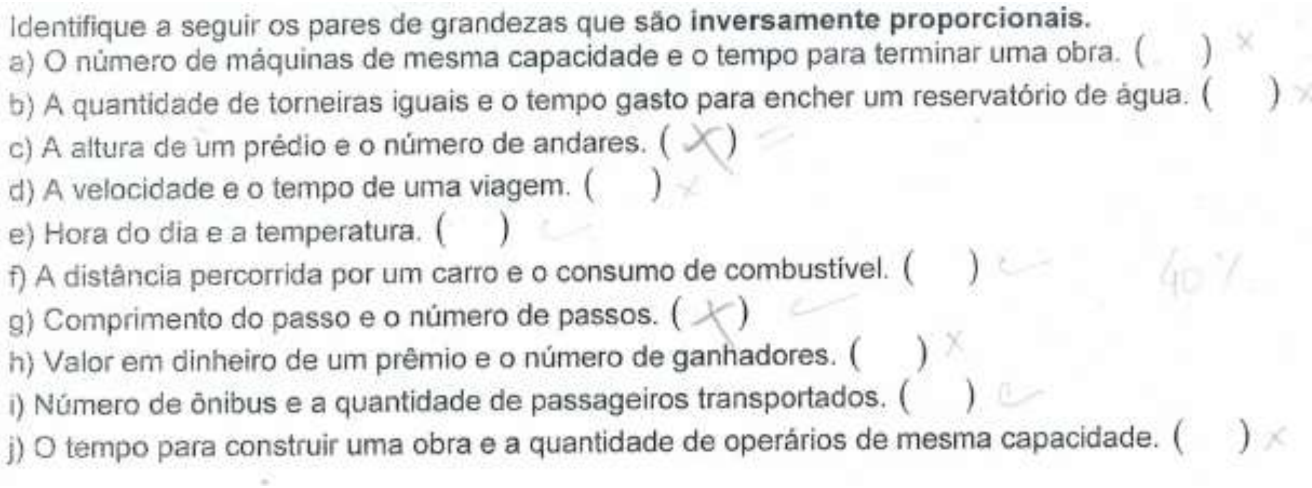
Situação 4: “Não porque o produto são iguais.”

Situação 5: “Não porque o produto são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 51 – Aproveitamento da equipe B na questão extra

Equipe B – S_{13}, S_{15}, S_{16}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. ( )

c) A altura de um prédio e o número de andares. (X)

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. ( )

g) Comprimento do passo e o número de passos. (X)

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( )

Aproveitamento: 40%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 26 – Parecer das produções da equipe B nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	Situação 2	Situação 3	Situação 4	Situação 5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■		
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.			■	
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).				■

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o apresentado no Quadro 26, avaliamos o desempenho da equipe B como bom, pois construiu respostas válidas em três das quatro situações da atividade 2, todavia, apresentou dificuldades em preencher os quadro das situações 4 e 5, sendo que nesta última situação afirmou equivocadamente que a relação entre as grandezas não era inversamente proporcional, o que ocasionou erro nessa situação. Além do mais, a equipe B não alcançou um bom desempenho na questão extra, porque acertou apenas 40% das situações propostas. Acreditamos que com a prática de questões de aprofundamento sobre o conceito de grandezas inversamente proporcionais as dificuldades dos alunos da equipe B possam ser minimizadas.

Imagem 52 – Resolução da equipe C nas situações 2 e 3

Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

os produtos são inversamente proporcionados

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim por que os produtos são iguais

Respostas

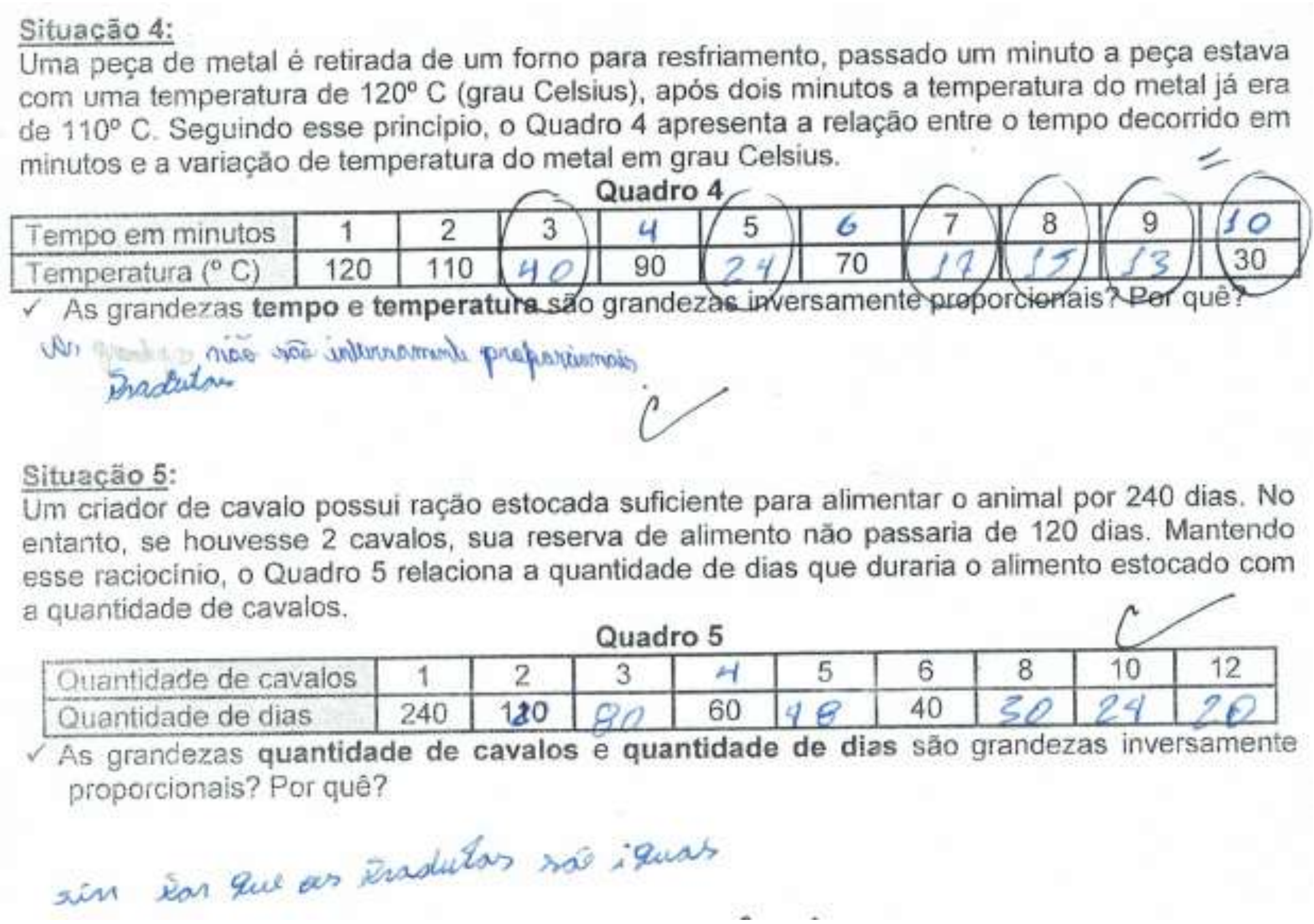
Situação 2: “Os produtos são inversamente proporcionais.”

Situação 3: “Sim porque os produtos são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 53 – Resolução da equipe C nas situações 4 e 5

Equipe C – S_{12}, S_{17}, S_{24}



Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	40	90	24	70	17	15	13	30

✓ As grandezas **tempo e temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Os [illegible] não são inversamente proporcionais produtos

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

sim por que os produtos são iguais

Respostas

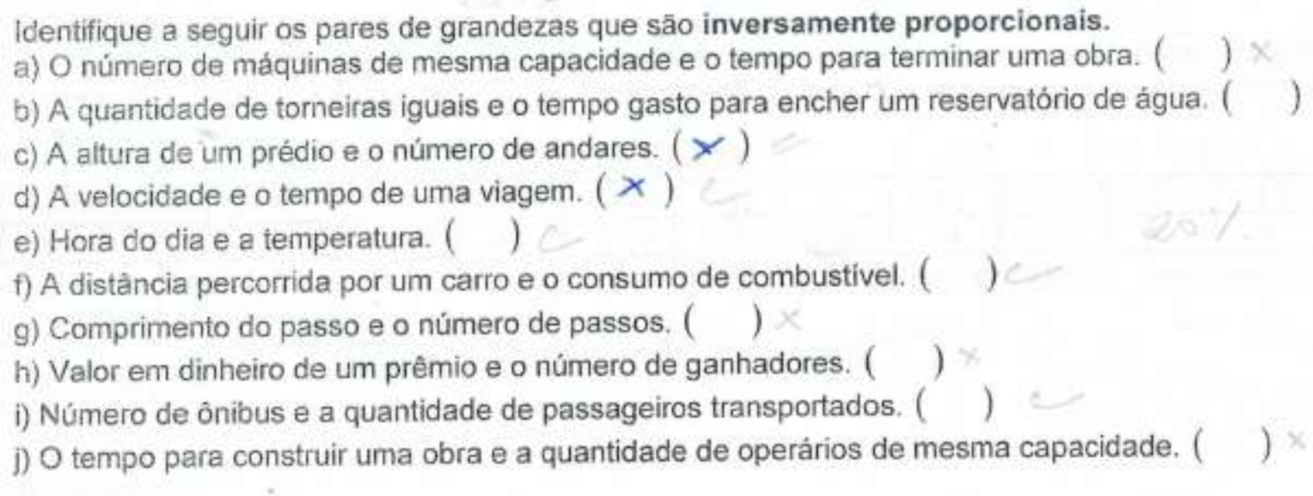
Situação 4: “Os produtos são inversamente proporcionas.”

Situação 5: “Sim porque os produtos são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 54 – Aproveitamento da equipe C na questão extra

Equipe C – S_{13}, S_{15}, S_{16}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( ) ×

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. ( )

c) A altura de um prédio e o número de andares. (X)

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. ( )

g) Comprimento do passo e o número de passos. ( ) ×

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( ) ×

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( ) ×

20%

Aproveitamento: 20%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 27 – Parecer das produções da equipe C nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.		■		■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.			■	
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).	■			

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com as informações do Quadro 27, a equipe C conseguiu construir apenas duas respostas corretas, situações 3 e 5, que mencionaram um dos princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais, isto é, o produto entre os valores das grandezas era igual; entretanto, as demais respostas estavam parcialmente correta ou incorreta. Desse modo, avaliamos como regular o desempenho da referida equipe. Sobre o aproveitamento dos alunos S_{13}, S_{15}, S_{16} da equipe C na questão extra, também ficou abaixo do esperado, pois esses discentes alcançaram apenas 20% de acerto nos contextos com grandezas inversamente proporcionais.

Imagem 55 – Resolução da equipe D nas situações 2 e 3

Equipe D – S_6, S_{22}, S_{27}

Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim. Porque os produtos entre as grandezas é sempre iguais

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim. porque os produtos entre as grandezas é sempre iguais.

Respostas

Situação 2: “Sim porque os produtos entre as grandezas é sempre iguais.”

Situação 3: “Sim porque os produtos entre as grandezas é sempre iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 56 – Resolução da equipe D nas situações 4 e 5

Equipe D – S_6, S_{22}, S_{27}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Não. porque os produtos não são iguais.

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim porque os produtos entre as grandezas são iguais

Respostas

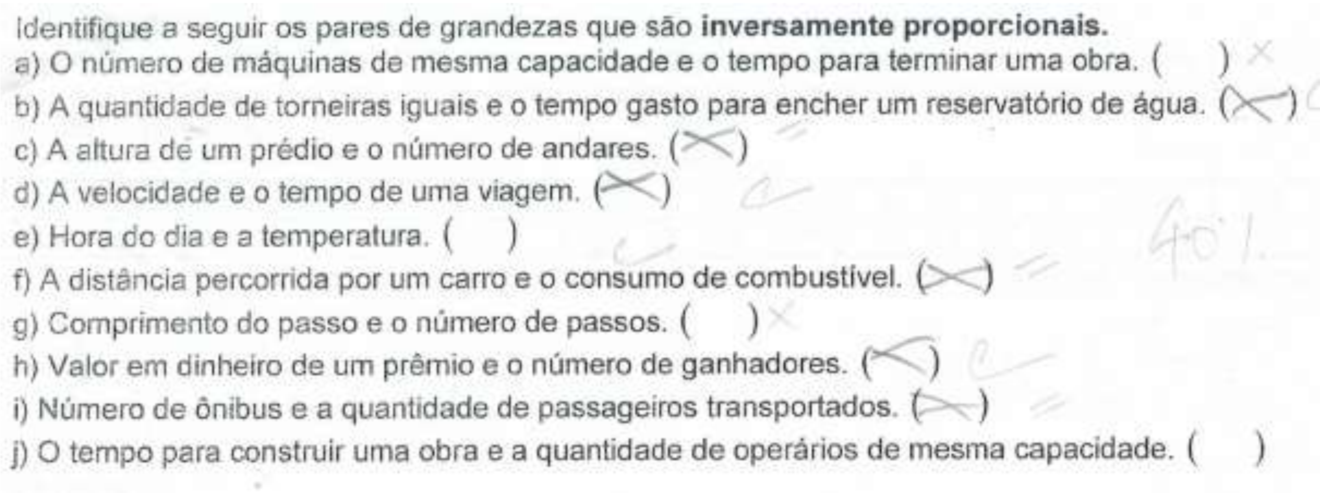
Situação 4: “Não, porque os produtos não são iguais.”

Situação 5: “Sim porque os produtos entre as grandezas são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 57 – Aproveitamento da equipe D na questão extra

Equipe D – S_6, S_{22}, S_{27}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( ) X

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)

c) A altura de um prédio e o número de andares. (X)

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)

g) Comprimento do passo e o número de passos. ( ) X

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. (X)

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. (X)

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( )

40%

Aproveitamento: 40%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 28 – Parecer das produções da equipe D nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

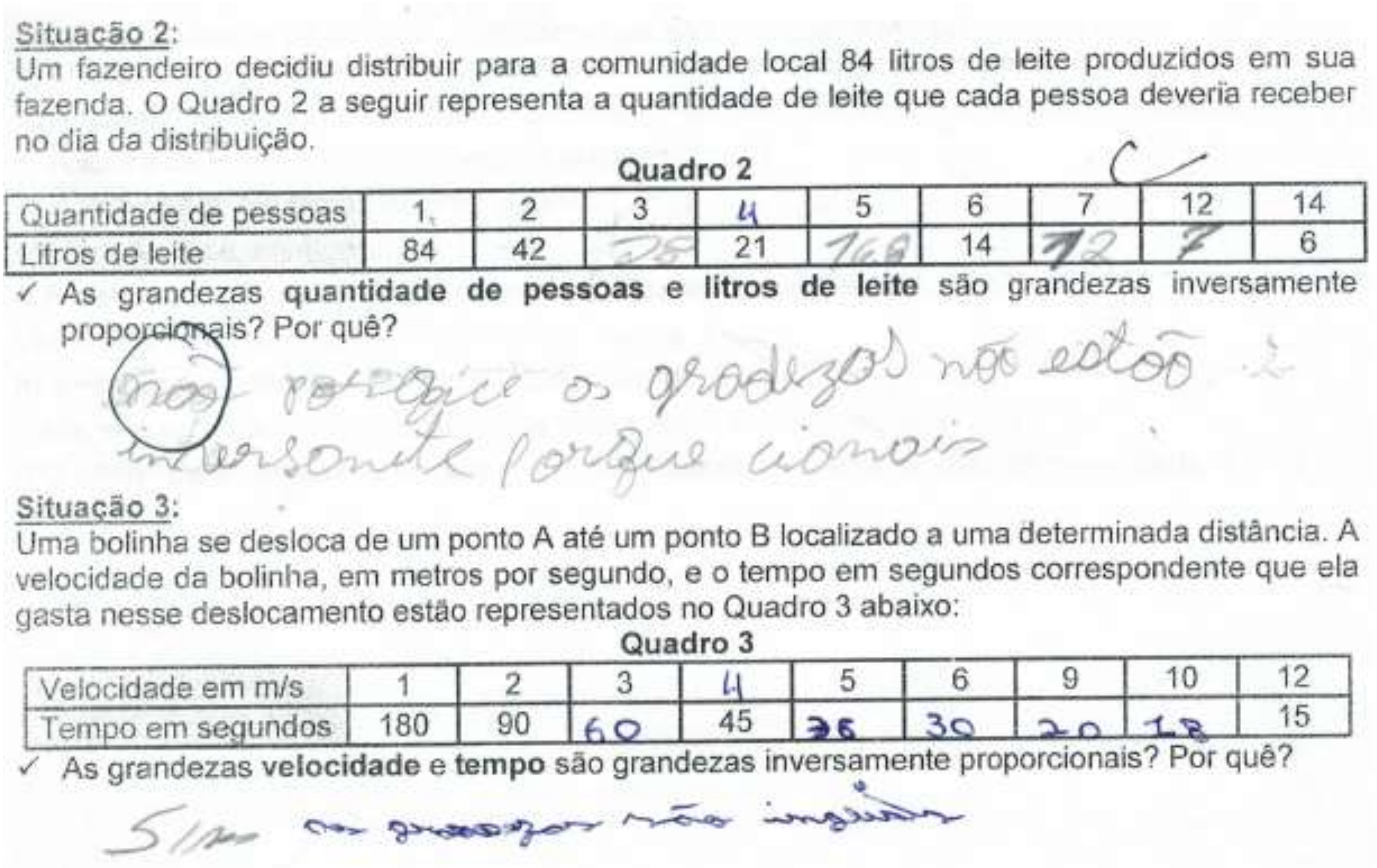
Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).				

Fonte: Experimento (2017)

De posse do parecer do Quadro 28, avaliamos como positivo o desempenho dos alunos S_6, S_{22}, S_{27} da equipe D, pois construíram respostas que mencionaram um dos princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais (o produto é sempre igual entre valores das grandezas). Quanto ao desempenho na questão extra, a equipe D obteve apenas 40% de acerto nos contextos com grandezas inversamente proporcionais. É provável, que o baixo aproveitamento da equipe D nessa questão foi porque as situações postas para análise não traziam valores numéricos, como geralmente aparecem nas questões de matemática. Todavia, acreditamos que os alunos da equipe D tenham assimilado, ainda que superficial, o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Imagem 58 – Resolução da equipe E nas situações 2 e 3

Equipe E – S_3, S_7, S_{18}



Situação 2:
Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não porque os grandezas não estão inversamente porque cionais

Situação 3:
Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim as grandezas são iguais

Respostas

Situação 2: “Não porque as grandezas não estão inversamente proporcionais.”

Situação 3: “Sim as grandezas são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 59 – Resolução da equipe E nas situações 4 e 5

Equipe E – S_3, S_7, S_{18}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo e temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

NÃO [illegible]

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

SIM [illegible]

Respostas

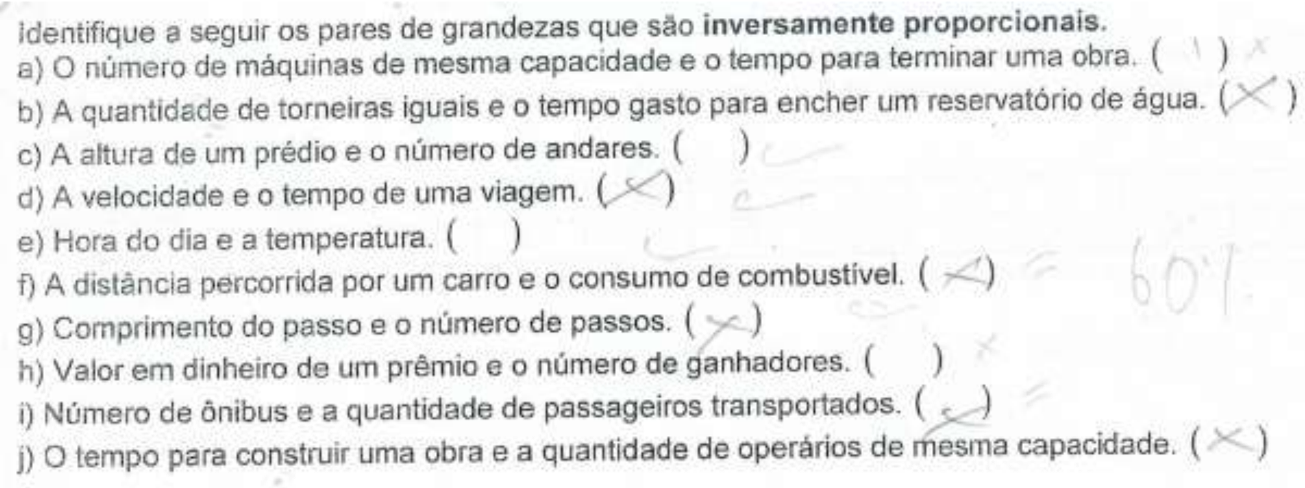
Situação 4: “Não as grandezas não são iguais.”

Situação 5: “Sim a razão entre as grandezas.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 60 – Aproveitamento da equipe E na questão extra

Equipe E – S_3, S_7, S_{18}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)

c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)

g) Comprimento do passo e o número de passos. (X)

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. (X)

Aproveitamento: 60%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 29 – Parecer das produções da equipe E nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

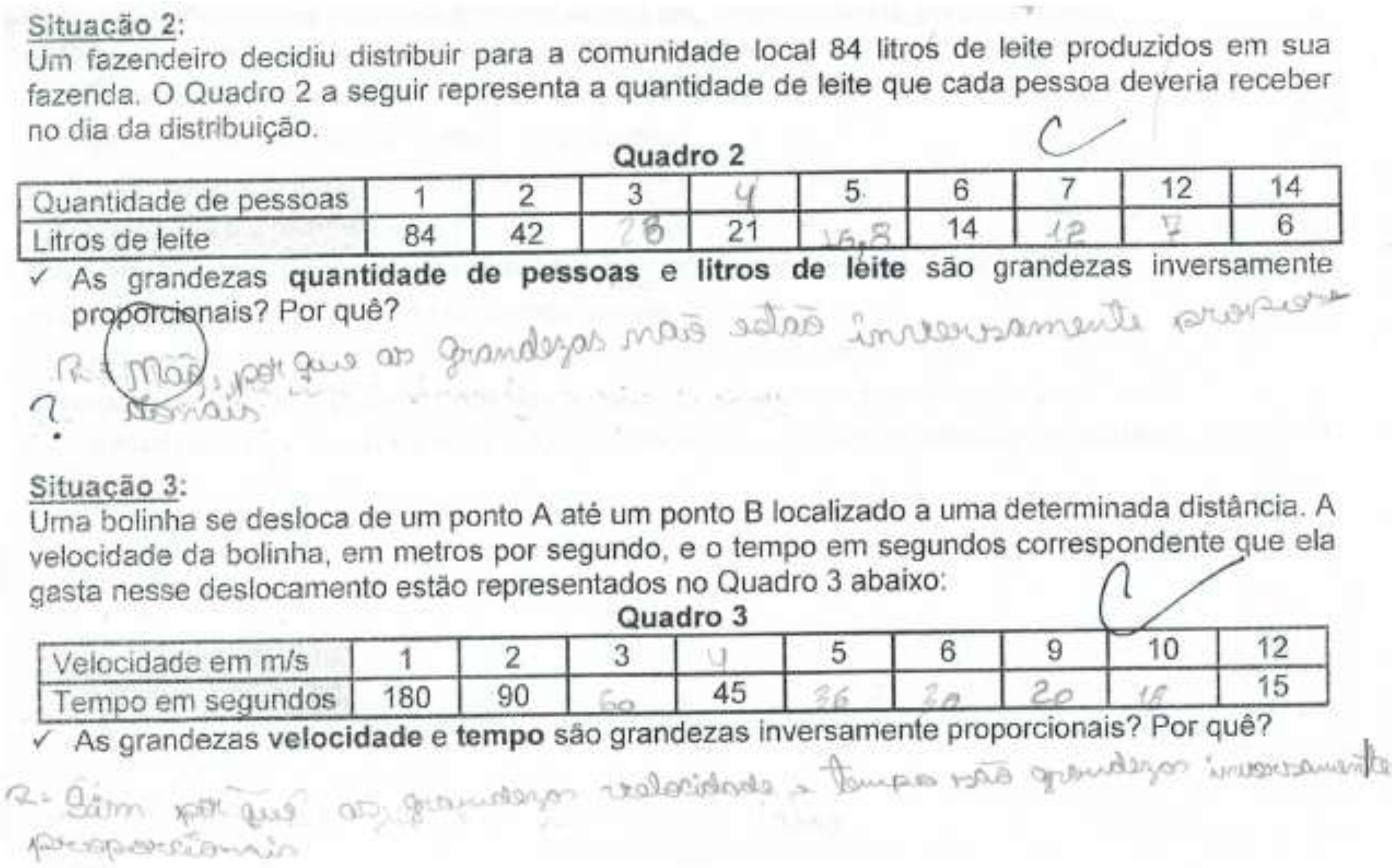
Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.				
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).	■	■	■	■

Fonte: Experimento (2017)

Com base no Quadro 29, avaliamos o desempenho dos alunos S_3, S_7, S_{18} como insatisfatório nas quatro situações da atividade 2, pois não construíram nenhuma justificativa que mencionasse os princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais. Todavia, cabe ressaltar que esses alunos responderam de forma correta o primeiro questionamento a respeito da relação proporcional, com exceção da situação 2. É provável, que os alunos tiveram dificuldade em relacionar os termos razão e grandeza na construção textual de forma coerente, ocasionando frases sem sentido para a questão. Já na questão extra o desempenho da equipe E foi positivo, pois obtive 60% de acerto nos contextos com grandezas inversamente proporcionais.

Imagem 61 – Resolução da equipe F nas situações 2 e 3

Equipe F – S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}



Situação 2:
Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

R: Não, por que as grandezas não estão inversamente proporcionais

Situação 3:
Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	16	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

R: Sim por que as grandezas velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais

Respostas

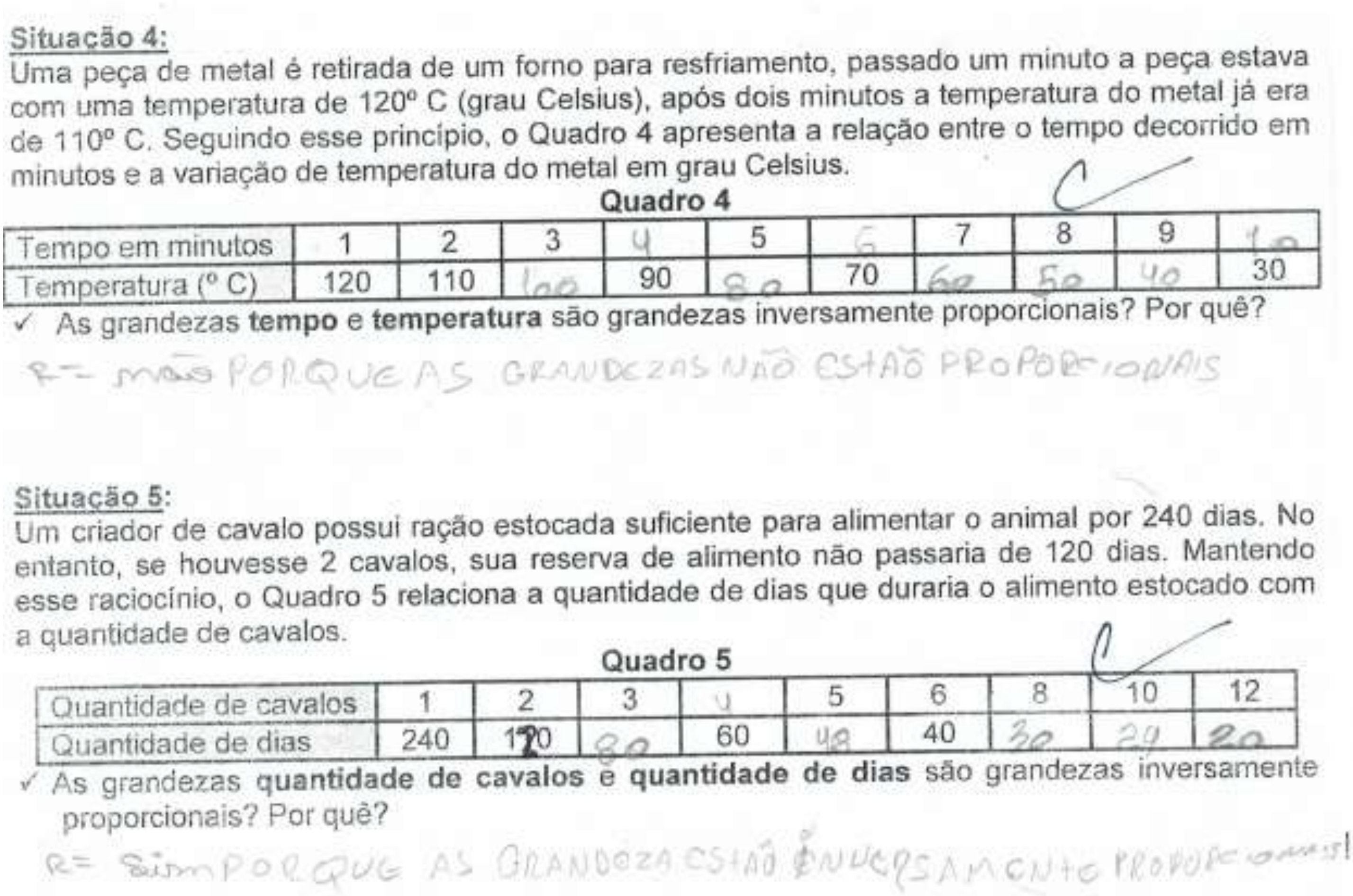
Situação 2: "Não porque as grandezas não estão inversamente proporcionais."

Situação 3: "Sim porque as grandezas velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 62 – Resolução da equipe F nas situações 4 e 5

Equipe F – S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}



Situação 4:
Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

C

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

R= NÃO PORQUE AS GRANDEZAS NÃO ESTÃO PROPORCIONAIS

Situação 5:
Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

C

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	29	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

R= SIM PORQUE AS GRANDEZA ESTÃO INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Respostas

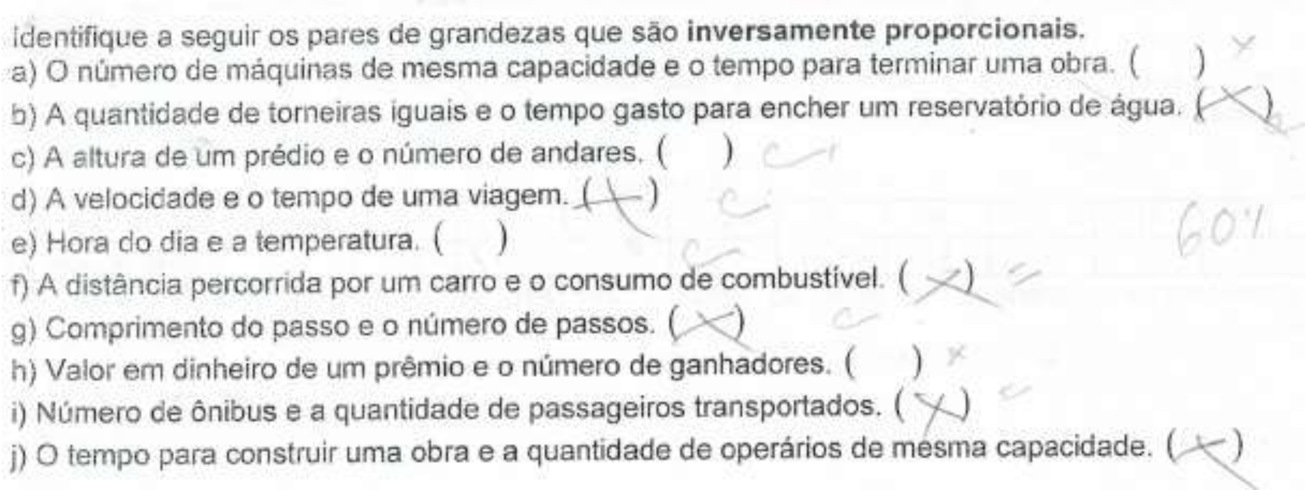
Situação 4: “Não porque as grandezas não estão proporcionais.”

Situação 5: “Sim porque as grandezas estão inversamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 63 – Aproveitamento da equipe F na questão extra

Equipe F – S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}



Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)

c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)

g) Comprimento do passo e o número de passos. (X)

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. (X)

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. (X)

60%

Aproveitamento: 60%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 30 – Parecer das produções da equipe F nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.				
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.		■	■	■
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).	■			

Fonte: Experimento (2017)

De posse das informações do Quadro 30, avaliamos o desempenho dos alunos S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26} da equipe F como insatisfatório nas quatro situações da atividade 2, pois as justificativas construídas não mencionaram os princípios do conceito de grandezas inversamente proporcionais, porém esses alunos responderam corretamente o questionamento feito sobre a relação proporcional entre duas grandezas, com exceção da situação 2. Acreditamos que as dificuldades desses alunos tendem a ser minimizadas com a execução das questões de aprofundamento sobre a relação proporcional inversa, onde os alunos terão a oportunidade de rever o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Imagem 64 – Resolução da equipe G nas situações 2 e 3

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}

Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim, Por que

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Respostas

Situação 2: “Sim, porque” (INCOMPLETA)

Situação 3: NÃO RESPONDEU

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 65 – Resolução da equipe G nas situações 4 e 5

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

?

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	120	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Respostas

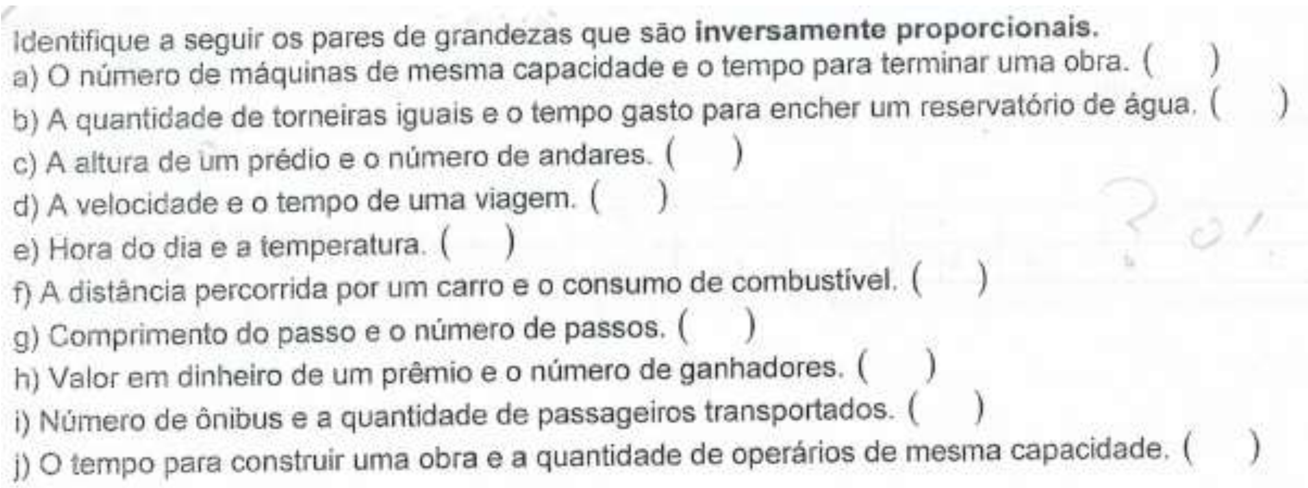
Situação 4: NÃO RESPONDEU

Situação 5: NÃO RESPONDEU

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 66 – Aproveitamento da equipe G na questão extra

Equipe G – S_4, S_9, S_{33}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. ( )

c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. ( )

g) Comprimento do passo e o número de passos. ( )

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( )

Aproveitamento: 0%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 31 – Parecer das produções da equipe G nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

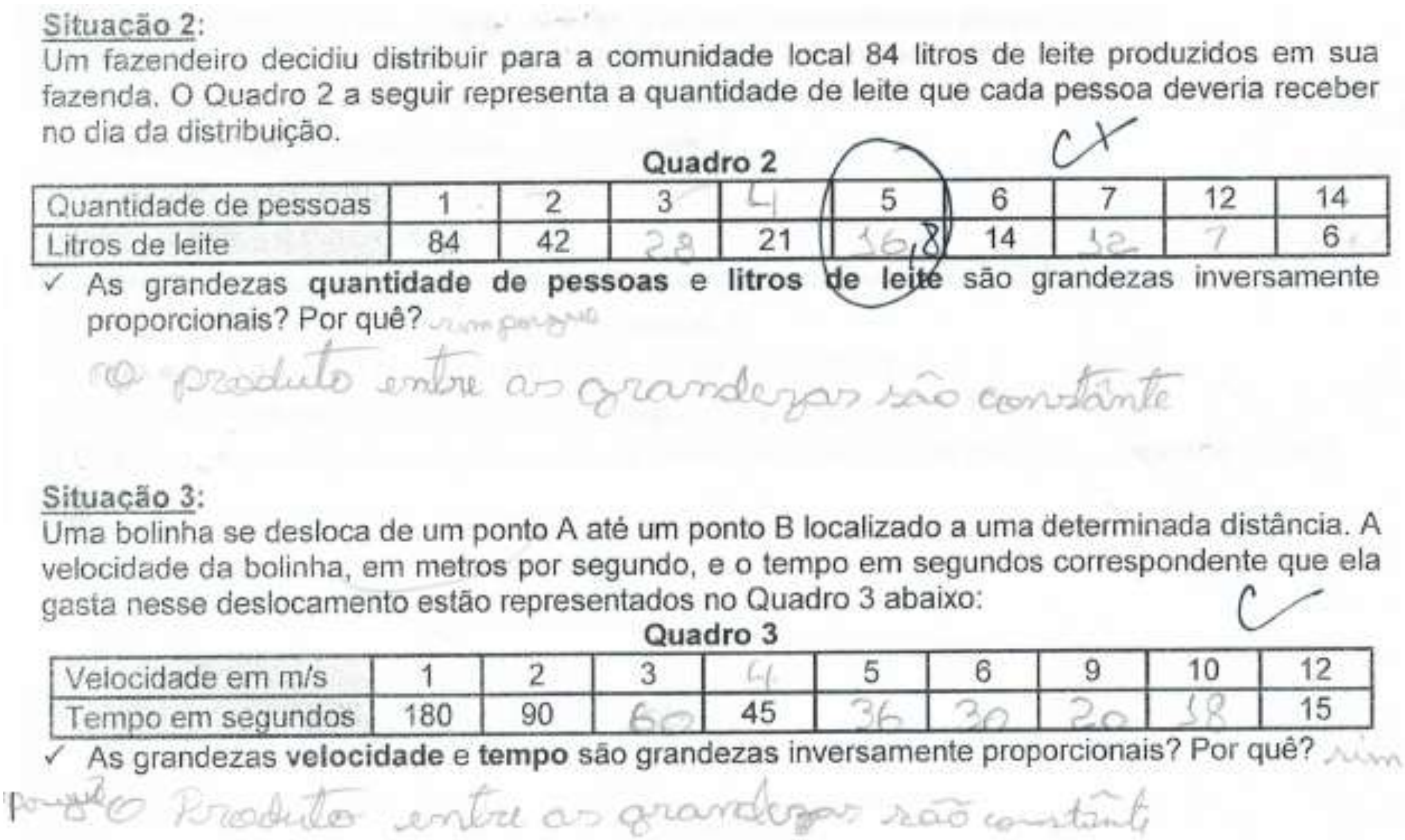
Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.				
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).	■	■	■	■

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com o Quadro 31, é perceptível que a equipe G não conseguiu ou não se interessou em responder as quatro situações da atividade 2 sobre a relação proporcional inversa entre duas grandezas, provavelmente, porque os membros dessa equipe foram pouco participativos na execução da tarefa durante a sessão de ensino. O que refletiu também na realização da questão extra, uma vez que os alunos S_4, S_9, S_{33} da referida equipe não identificaram os pares de grandezas inversamente proporcionais, deixando a questão em branco. Diante desse cenário, avaliamos o desempenho da equipe G como insuficiente na realização da atividade 2.

Imagem 67 − Resolução da equipe H nas situações 2 e 3

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}



Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

C

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,8	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê? sim porque

o produto entre as grandezas são constante

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

C

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê? sim

porque o Produto entre as grandezas são constânte

Respostas

Situação 2: “Sim porque o produto entre as grandezas são constante.”

Situação 3: “Sim porque o produto entre as grandezas são constante.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 68 – Resolução da equipe H nas situações 4 e 5

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

C

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo e temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Não porque o produto entre as grandezas não são iguais

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

C

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	110	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não porque o produto entre as grandezas não são iguais

Respostas

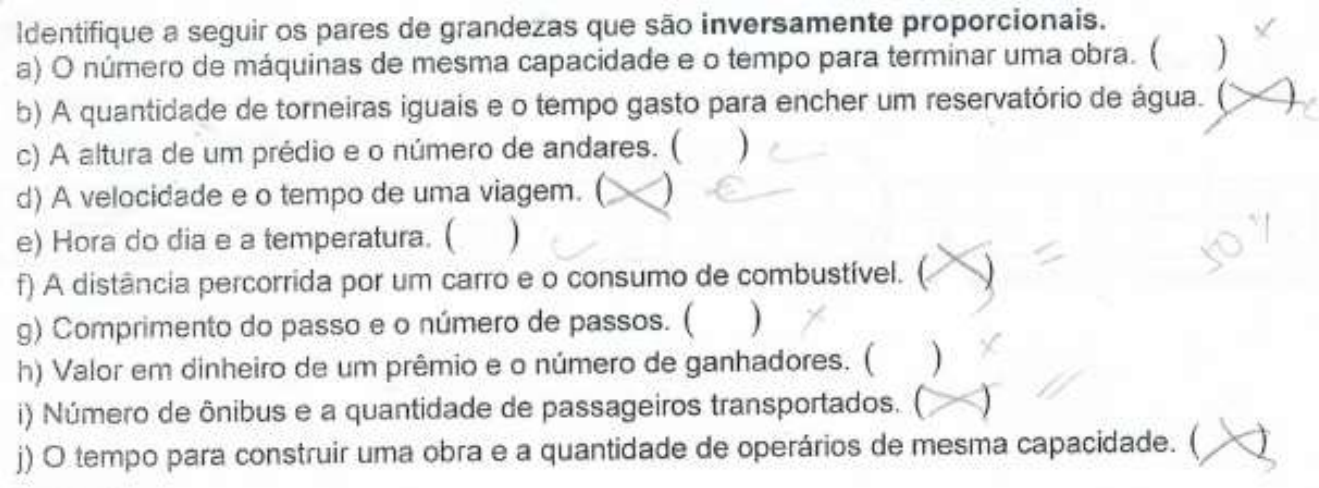
Situação 4: “Não porque o produto entre as grandezas não são iguais.”

Situação 5: “Não porque o produto entre as grandezas não são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 69 − Aproveitamento da equipe H na questão extra

Equipe H – S_1, S_{14}, S_{31}


Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**
a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )
b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)
c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )
d) A velocidade e o tempo de uma viagem. (X)
e) Hora do dia e a temperatura. ( )
f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)
g) Comprimento do passo e o número de passos. ( )
h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )
i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. (X)
j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. (X)

Aproveitamento: 50%
Fonte: Experimento (2017)

Quadro 32 – Parecer das produções da equipe H nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	Situação			
	2	3	4	5
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).				■

Fonte: Experimento (2017)

Com base no Quadro 32, avaliamos o desempenho dos alunos S_1, S_{14}, S_{31} da equipe H nas quatro situações da atividade 2 sobre a relação proporcional inversa como satisfatório, pois apresentaram justificativas que mencionaram um dos princípios que norteia o conceito de grandezas inversamente proporcionais, ou seja, os alunos perceberam que o produto entre os valores das quantidades era sempre constante. Um indicativo de que esses alunos compreenderam, ainda que superficial, a relação proporcional inversa entre duas grandezas. Apenas na situação 5 a equipe H não respondeu conforme o esperado para a questão

Imagem 70 − Resolução da equipe I nas situações 2 e 3

Equipe I – S_2, S_5, S_{29}, S_{30}

Situação 2:

Um fazendeiro decidiu distribuir para a comunidade local 84 litros de leite produzidos em sua fazenda. O Quadro 2 a seguir representa a quantidade de leite que cada pessoa deveria receber no dia da distribuição.

Quadro 2

Quantidade de pessoas	1	2	3	4	5	6	7	12	14
Litros de leite	84	42	28	21	16,08	14	12	7	6

✓ As grandezas **quantidade de pessoas** e **litros de leite** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim são inversamente proporcionais. Porque o produto das grandezas é igual

Situação 3:

Uma bolinha se desloca de um ponto A até um ponto B localizado a uma determinada distância. A velocidade da bolinha, em metros por segundo, e o tempo em segundos correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão representados no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3

Velocidade em m/s	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Tempo em segundos	180	90	60	45	36	30	20	18	15

✓ As grandezas **velocidade** e **tempo** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

Sim são inversamente proporcionais porque o produto é igual

Respostas

Situação 2: “Sim são inversamente proporcionais porque o produto das grandezas é igual.”

Situação 3: “Sim são inversamente proporcionais porque o produto é igual.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 71 – Resolução da equipe I nas situações 4 e 5

Equipe I – S_2, S_5, S_{29}, S_{30}

Situação 4:

Uma peça de metal é retirada de um forno para resfriamento, passado um minuto a peça estava com uma temperatura de 120º C (grau Celsius), após dois minutos a temperatura do metal já era de 110º C. Seguindo esse princípio, o Quadro 4 apresenta a relação entre o tempo decorrido em minutos e a variação de temperatura do metal em grau Celsius.

Quadro 4

Tempo em minutos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Temperatura (º C)	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30

✓ As grandezas **tempo** e **temperatura** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

não elas não são inversament proporcionais pois o produto não é igual

Situação 5:

Um criador de cavalo possui ração estocada suficiente para alimentar o animal por 240 dias. No entanto, se houvesse 2 cavalos, sua reserva de alimento não passaria de 120 dias. Mantendo esse raciocínio, o Quadro 5 relaciona a quantidade de dias que duraria o alimento estocado com a quantidade de cavalos.

Quadro 5

Quantidade de cavalos	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Quantidade de dias	240	~~110~~ 120	80	60	48	40	30	24	20

✓ As grandezas **quantidade de cavalos** e **quantidade de dias** são grandezas inversamente proporcionais? Por quê?

as grandezas são inversamente proporcionais pois o produto é igual

Respostas

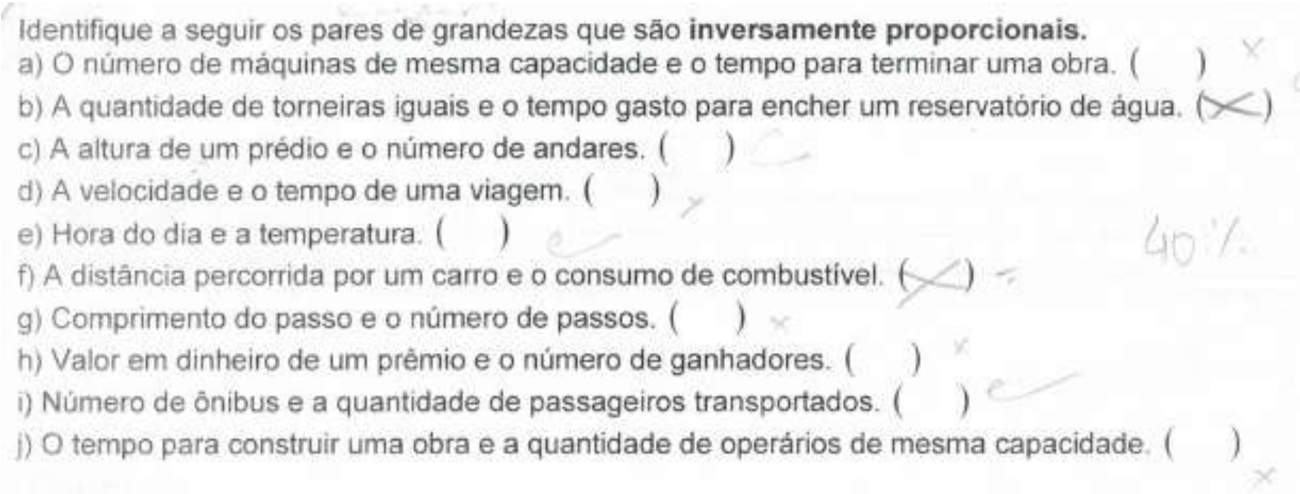
Situação 4: "Não elas não são inversamente proporcionais pois o produto não é igual."

Situação 5: "As grandezas são inversamente proporcionais pois o produto é igual."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 72 − Aproveitamento da equipe I na questão extra

Equipe I – S_2, S_5, S_{29}, S_{30}



Identifique a seguir os pares de grandezas que são **inversamente proporcionais.**

a) O número de máquinas de mesma capacidade e o tempo para terminar uma obra. ( )

b) A quantidade de torneiras iguais e o tempo gasto para encher um reservatório de água. (X)

c) A altura de um prédio e o número de andares. ( )

d) A velocidade e o tempo de uma viagem. ( )

e) Hora do dia e a temperatura. ( )

40%

f) A distância percorrida por um carro e o consumo de combustível. (X)

g) Comprimento do passo e o número de passos. ( )

h) Valor em dinheiro de um prêmio e o número de ganhadores. ( )

i) Número de ônibus e a quantidade de passageiros transportados. ( )

j) O tempo para construir uma obra e a quantidade de operários de mesma capacidade. ( )

Aproveitamento: 40%

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 33 – Parecer das produções da equipe I nas situações 2, 3, 4 e 5 da segunda atividade

Parecer	**Situação**			
	2	**3**	**4**	**5**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	■	■	■	■
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.				
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.				
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.				
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).				

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com o Quadro 33, a equipe I construiu respostas válidas nas quatro situações da atividade 2, devido a isso avaliamos o desempenho dos alunos S_2, S_5, S_{29}, S_{30} da equipe citada como excelente. Entretanto, esses alunos não tiveram bom aproveitamento na questão extra, pois acertaram somente 40% das situações sobre a relação proporcional inversa. Tal fato ocorreu, provavelmente, porque as situações analisadas na questão extra não envolviam valores numéricos, o que, talvez, tenha dificultado a tomada de decisão dos alunos sobre a relação proporcional inversa. Isso é sintomático de que é necessário a realização de questão de aprofundamento que levem os discentes a analisarem contextos não numéricos sobre a relação proporcional inversa entre duas quantidades; com isso, pressupomos que as dificuldades remanescentes possam ser erradicadas ou minoradas a medida que os alunos ganhem confiança e experiência nesse tipo de questão.

De posse das produções construídas no segundo momento da atividade 2 pelos alunos de cada equipe, cabe julgarmos a adequação ou não dessas produções com o objetivo dessa atividade. Nesse pensar, tivemos como parâmetros de avaliação o preenchimento correto, parcial ou não dos quadros em cada situação proposta, bem como as respostas elaboradas pelos alunos aos questionamentos levantados sobre as grandezas inversamente proporcionais. Assim, trazemos no quadro síntese adiante o percentual de desempenho das equipes levando em consideração os pareceres pré-estabelecidos.

Quadro 34 – Desempenho por equipe nas quatro situações da atividade 2

Parecer	**Desempenho por equipe (%)**								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
O Preenchimento do quadro e a resposta foram feitos corretamente.	75	50	50	100				75	100
O Preenchimento do quadro e a responda estavam parcialmente corretos.			25						
O Preenchimento do quadro foi feito parcialmente correto, porém a resposta estava correta.		25							
O Preenchimento do quadro estava correto, porém a resposta estava parcialmente correta.	25					75			
Preencheu o quadro corretamente, mas não respondeu (ou respondeu incorretamente).		25	25		100	25	100	25	

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com as informações produzidas no quadro supracitado, observamos que 67% das equipes, A, B, C, D, H, I, alcançaram um desempenho igual ou maior que 50%. Ou seja, essa equipes obtiveram acerto parcial ou total nas quatro situações que compuseram o segundo momento da atividade 2. Um indicativo de que o conceito de grandezas inversamente proporcionais havia sido compreendido por aquelas equipes, mesmo que superficialmente, o que nos fez pressupor que a atividade desenvolvida obteve êxito e alcançou ao objetivo pretendido.

Aqui cabe apresentar o quadro síntese sobre o desempenho de cada equipe na questão extra ao final da atividade 2, que abordou contextos com grandezas inversamente proporcionais ou não e sem a presença de valores numéricos. O quadro citado é mostrado adiante com os percentuais de aproveitamento de cada equipe.

Quadro 35 – Desempenho por equipe na questão extra da atividade 2

Equipe	Desempenho (%)
A	80%
B	40%
C	40%
D	40%
E	60%
F	60%
G	0%
H	50%
I	40%

Fonte: Experimento (2017)

Conforme as informações do quadro de desempenho acima, podemos afirma que as equipes apresentaram dificuldade em analisar as situações propostas com relação à proporcionalidade inversa, haja vista que apenas 44% das equipes participantes do experimento tiveram desempenho satisfatório na questão extra, ou seja, tiveram acertos igual ou maior que 50%. Talvez, a dificuldade dos alunos esteja atrelada a falta do valor numérico nos contextos e/ou pela incipiência em situações com grandezas inversamente proporcionais.

Outro modo de avaliarmos as produções dos alunos é inferir se suas respostas foram válidas, parcialmente válidas ou não válidas para as quatro situações da atividade 2. Sobre isso, apresentamos o quadro a seguir que traz as equipes dispostos conforme a qualidade de suas respostas.

Quadro 36 – Qualidade das respostas sobre as situações da atividade 2

Situação	Reposta			Percentual		
	RV	RPV	RNV	%RV	%RPV	%RNV
2	A, B, D, H, I		C, E, F, G	56%	-	44%
3	A, B, C, D, H, I	F	E, G	67%	11%	22%
4	A, B, D, H, I	C, F	E, G	56%	22%	22%
5	C, D, I	A, F	B, E, G, H	34%	22%	44%

Fonte: Experimento (2017)

Os dados do Quadro 36 mostraram que os percentuais de respostas válidas foram superiores com relação as demais respostas em 75% das situações da atividade 2, apenas a situação 5 presentou um percentual de resposta não válida, 44%, acima do percentual de resposta válida, 34%. Desse modo, avaliamos como positivo o trabalho desenvolvido pelos alunos nesta sessão de ensino. Entretanto, cabe ressaltar que o desenrolar da atividade 2 neste segundo momento levou um tempo maior quando comparado com a atividade 1, e devido a isso não foi possível aplicarmos as outras questões de aprofundamento sobre grandezas inversamente proporcionais, uma que vez que as equipes concluíram as quatro situações e a questão extra daquela atividade às 09h30min, e como faltavam apenas quinze minutos para o término da aula, decidimos não iniciar a resolução das outras questões. Então, demos por encarrada a terceira sessão de ensino, ficando acertado para próximo encontro a resolução e comentários dessas questões. Por fim, nos despedimos da turma e nos retiramos da sala de aula às 09h40min.

5.7. QUARTA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da atividade de aprofundamento

Essa sessão ocorreu no dia 31 de outubro de 2017, com o objetivo de oportunizar os discentes a colocarem em prática os aprendizados sobre grandezas inversamente proporcionais, ocorridos na sessão precedente. Tiveram presentes neste dia 26 alunos, e o trabalho teve início às 07h45min, porque foi dado um tempo de tolerância para a chegada dos discentes a escola. Na ocasião, foram entregues as equipes o material com as questões de aprofundamento, estas continham situações diversas sobre a relação de proporcionalidade inversa, num total de 10 questões. De posse do material, sugerimos as equipes que discutissem as situações entre seus membros, e apresentassem, em seguida, as respostas que julgassem mais adequadas como solução. Para tanto, concedemos aos alunos um intervalo de tempo, para que eles resolvessem, sem pressa, todas as questões propostas.

A tarefa ocorreu de forma tranquila e positiva, isto é, sem nenhum problema na execução e com poucas intervenções do professor pesquisador. Além do mais, os alunos se mostraram a vontade e confiantes na realização, interpretação e resolução das questões. Essas atitudes sinalizaram uma autonomia por parte dos discentes no processo de ensino e aprendizagem de grandezas inversamente proporcionais, pois eles assumiram para si a responsabilidade de executar a tarefa até o final, confiantes no conhecimento que haviam construído com as situações vivenciadas na atividade 2.

Após a conclusão da tarefa pelos discentes, iniciamos as resoluções das dez questões no quadro branco e tecemos os comentários que julgamos necessários no decorrer desse processo. Na ensejo, as equipes apresentaram suas respostas e, assim, coadunadas com os nossos comentários, construiu-se uma atmosfera em sala de aula de debate a respeito das situações propostas; o que para nós foi visto como positivo no processo de ensino e aprendizagem de grandezas inversamente proporcionais. Ademais, nos permitiu observar as conquistas realizadas e as lacunas no conhecimento dos alunos, que deveriam ser preenchidas, para que eles continuassem avançando na construção do conhecimento.

Dessa maneira, acreditamos que as questões de aprofundamento serviram também como termômetro, para avaliarmos o nível de compreensão dos alunos acerca de grandezas inversamente proporcionais, o que, em nosso olhar, foi classificado como bom, mesmo com poucas experiências vivenciadas, pois sabemos que para erigir um conhecimento sólido sobre um objeto de estudo demanda muito tempo, o que não é possível acontecer em poucos encontros de uma sequência didática. Entretanto, acreditamos que demos um passo inicial e importante na construção do conhecimento de grandezas proporcionais, pois os resultados alcançados pelos alunos, ficaram dentro do esperado, e nos motivaram, de maneira confiante, a implementar a fase seguinte da nossa proposta de sequência didática, em que será abordada a técnica da regra de três simples, como culminância das duas sessões de ensino sobre grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, apresentadas anteriormente.

Esta sessão de ensino encerrou às 09h45min, com a conclusão da tarefa proposta para este dia.

5.8. QUINTA SESSÃO DE ENSINO: apresentação da regra de três simples

No dia 07 de novembro de 2017, voltamos à escola para apresentar a técnica da regra de três simples aos alunos. Neste dia chegamos à escola às 07h35min, então nos encaminhamos até a sala da direção para informar nossa estada na instituição nos três primeiros horários de aula de matemática na turma do 7º ano do ensino fundamental. Após isso, fomos para a sala de aula e entramos às

07h40min, cumprimentamos os alunos presentes, e nos assentamos à mesa do professor para esperar os demais discentes, já que o número de alunos em sala era reduzido. Na ocasião, aproveitamos o tempo de tolerância para organizar o material do experimento para este dia.

Com achegada de alguns alunos retardatários, iniciamos os trabalhos desta sessão de ensino às 07h50min, com a distribuição do material com as questões de regra de três simples e os procedimentos de resolução da regra (APÊNDICE C) aos 26 discentes que estavam dispostos em sala de aula em pequenos grupos ou em fileiras.

A princípio, a nossa intenção era mostrar os procedimentos de resolução da regra de três simples, e, a posteriori, utilizá-los na resolução de questões. Desse modo, apresentamos esses procedimentos, que estavam localizados acima das questões de regra de três simples do material que foi entregue, lendo cada um deles para os alunos de forma detalhada. Aqui cabe ressaltar, que a construção desses procedimentos foi embasada nas sugestões de Fragoso (1999), com as devidas adaptações ao nosso trabalho. Tais procedimentos são mostrados a seguir:

Procedimentos para a aplicação da regra de três simples
I- Identificar as grandezas no problema;
II- Montar o quadro com as grandezas e seus respectivos valores;
III- Classificar as grandezas em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais;
IV- Determinar o valor de ‘x’ por meio da proporção simples (para as grandezas diretamente proporcionais) ou por meio da igualdade de produtos (para as grandezas inversamente proporcionais).

Um dos requisitos para implementarmos esta sessão de ensino na turma escolhida, era que os alunos já tivessem sido instruídos sobre os conceitos de razão e proporção simples, o que de fato já havia sido feito, pois, segundo o professor da turma, no início do mês de outubro tais conceitos foram ensinados, ou seja, antes de darmos início a nossa sequência didática para o ensino das regras de três.

Doravante, prossegue o desenrolar desta sessão de ensino com o relato da resolução de duas questões com grandezas diretamente proporcionais por meio da regra de três. Uma dessas questões trazia o seguinte enunciado:

Uma moto percorre 240 km utilizando 20 litros de gasolina. Quantos litros ela precisa para percorrer 360 km?

Depois da leitura da questão, pedimos que os alunos indicassem quais as grandezas envolvidas no problema. Como respostas, os alunos apontaram a distância percorrida e a quantidade de litros gastos nesse percurso. Com isso, passamos a registrar essas quantidades citadas na lousa construindo o quadro de grandezas com os seus respectivos valores, executando, assim, o primeiro e o segundo procedimentos de resolução da regra, conforme ilustrado abaixo.

I) e II)

Distância (km)	Consumo (L)
240	20
360	X

Posteriormente, fizemos a análise proporcional das grandezas supracitadas, tendo com referência a grandeza que contém o termo desconhecido ‘x’, conforme o sugerido no procedimento III. Então, perguntamos aos alunos: o que aconteceria com a grandeza distância se aumentar ou diminuir o valor da grandeza consumo? A maioria dos alunos respondeu que a primeira grandeza aumentaria se a segunda aumentasse, e diminuiria se a segunda diminuísse também. De posse dessa constatação, fizemos outra pergunta: as grandezas da questão são direta ou inversamente proporcionais? Sem grande dificuldade, os alunos afirmaram que as quantidades do problema eram diretamente proporcionais. Com essa certeza proferida pela maioria da turma, demos continuidade em seguir os procedimentos de resolução, ou seja, indicamos as grandezas como diretamente proporcionais e depois resolvemos a proporção simples para encontrar o valor de ‘x’, como ilustrado baixo.

III) e IV)

Distância (km)	Consumo (L)
240	20
360	X

↑Grandezas diretamente proporcionais↑

$$\frac{240}{360} = \frac{20}{x} \rightarrow 240x = 20 . 360 \rightarrow 240x = 7200 \rightarrow x = \frac{7200}{240}$$

$$x = 300$$

Após finalizada essa questão, pedimos que os alunos anotassem a resolução realizada para estudos posteriores. E ao finalizarem suas anotações partimos para a resolução da outra questão do material com o seguinte enunciado:

Uma padaria produz 100 pães a cada quatro horas. Sabendo que ela fica aberta durante 16 horas, quantos pães ela produz durante um dia?

Como anteriormente, perguntamos aos alunos: quais as grandezas do problema? Os alunos responderam acertadamente que eram 'pães' e o 'tempo' em horas. Então, construímos o quadro das grandezas com os seus respectivos valores, executando, assim, os procedimentos I e II, ilustrados abaixo:

I) e II)

Pães	Tempo (Horas)
100	4
X	16

Depois de realizado do quadro acima, fizemos a análise proporcional das grandezas envolvidas na questão, perguntando aos alunos: o que acontece com a grandeza 'tempo' quando a grandeza 'pães' aumenta? E quando a grandeza 'pães' diminui? Sem nenhuma dificuldade os alunos responderam acertadamente que a primeira grandeza, tempo, iria aumentar e, em seguida, responderam que iria diminuir. De posse dessas constatações, proferimos outra pergunta: as grandezas do problema são direta ou inversamente proporcionais? Bem confiantes, a maioria dos alunos respondeu corretamente que as grandezas eram diretamente proporcionais. Com essas certezas dos alunos, encerramos a análise das grandezas, e partimos para encontrar o valor de 'x' do problema, resolvendo a proporção simples. Assim, finalizamos os dois últimos procedimentos de resolução da regra, representados a seguir:

III) e IV)

Pães	Tempo (Horas)
100	4
x	16

↑Grandezas diretamente proporcionais↑

$$\frac{100}{x} = \frac{4}{16} \rightarrow 4x = 100.16 \rightarrow 4x = 1600 \rightarrow x = \frac{1600}{4}$$

$$x = 400 \text{ pães}$$

Com a realização de mais essa questão, foi solicitado aos discentes que anotassem essa resolução da regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais, pois serviria de apontamento para estudos posteriores. Depois que os alunos registraram a resolução, e confiantes de que esses alunos haviam compreendido o algoritmo da regra para grandezas diretamente proporcionais, ainda de maneira incipiente, decidimos aplicar os procedimentos de resolução da regra de três simples em questões com grandezas inversamente proporcionais. Então, agindo como antes, escolhemos uma questão do material com o seguinte enunciado:

Utilizando copos descartáveis de 175 ml, eu consigo servir 12 pessoas. Se eu utilizar copos de 150 ml, quantas pessoas eu conseguirei servir o mesmo volume de bebida?

Como de praxe, fizemos a leitura dessa questão e solicitamos que os alunos apontassem as grandezas envolvidas no problema. Aqui cabe relatar, que na ocasião, quase todos os alunos indicaram as grandezas com facilidade, um indicativo do aprendizado ocorrido nas duas primeiras sessões dessa sequência didática; entretanto, apenas os alunos menos interessados em aprender o conteúdo da aula não responderam.

De posse das respostas acertadas dos alunos, passamos a construir o quadro de grandezas com os seus respectivos valores, conforme representado abaixo:

I) e II)

Capacidade do copo (mL)	Quantidade de pessoas
175	12
150	X

Depois de construído o quadro, partimos para a análise das grandezas do problema, então perguntamos aos alunos: o que acontece com a quantidade de bebida no copo se aumentar a quantidade de pessoas a ser servida? Após essa pergunta, percebemos que boa parte dos alunos em sala apresentou dúvida sobre a relação inversa entre as grandezas da questão, apenas aqueles que já haviam compreendido de fato tal relação nas aulas anteriores responderam acertadamente, isto é, a quantidade de bebida no copo iria diminuir. Quanto aos alunos inseguros em suas respostas, fizemos as intervenções necessárias para que a dúvida momentânea fosse erradicada, apresentando o contexto da questão em situações em que eles estavam acostumados. Desse modo, esses alunos perceberam que relação entre as grandezas do problema era inversa. Com os devidos esclarecimentos realizados, e as dúvidas sanadas, perguntamos a turma: as grandezas do problema são direta ou inversamente proporcionais? Os alunos responderam corretamente que eram inversamente proporcionais. Com isso, registramos no quadro de grandezas a relação proporcional proferida pelos alunos e, em seguida, encontramos o valor de ‘x’ por meio da igualdade dos produtos dos valores das grandezas do problema, como ilustrado a seguir:

III) e IV)

Capacidade do copo (mL)	Quantidade de pessoas
175 →	12
150 →	X

↑Grandezas inversamente proporcionais↑

$$150x = 175 \cdot 12 \rightarrow 150x = 2100 \rightarrow x = \frac{2100}{150} \rightarrow x = 14 \text{ pessoas}$$

Com a solução apresentada, pedimos que os alunos anotassem essa resolução, para, em seguida, resolver outra questão com grandezas inversamente proporcionais. Concluído os registros dos alunos, escolhemos outra questão do material com o seguinte enunciado:

> Com 6 pedreiros construiu-se um muro em 18 dias de trabalho, com apenas 4 pedreiros, de mesma capacidade dos primeiros, o muro seria construído em quanto tempo?

Então, fizemos a leitura dessa questão e, posteriormente, pedimos aos alunos que indicassem as grandezas envolvidas no problema. E, assim, o fizeram com tranquilidade e confiança, afirmando que as grandezas do problema eram a quantidade de pedreiros e dias. Depois dessas indicações acertadas, passamos a construir o quadro com grandezas e seus respectivos valores, conforme a ilustração abaixo.

I) e II)

Pedreiros	Tempo (dias)
6	18
4	X

De posse das informações sobre as grandezas organizadas no quadro acima, partimos para a análise proporcional das mesmas, proferindo as seguintes perguntas: o que acontece com a quantidade de pedreiro se o tempo de construção do muro diminuir? E se o tempo de construção aumentar? Os alunos pensaram um pouco e a maioria percebeu que as grandezas estavam relacionadas de forma inversa, devido a isso, apresentaram respostas acertadas acerca dos questionamentos levantados. Posteriormente, fizemos a outra pergunta: as grandezas da questão estão relacionadas direta ou inversamente proporcionais? A resposta da maioria da turma foi que essas grandezas eram inversamente proporcionais. De posse dessas certezas por parte dos alunos, passamos a executar os dois últimos procedimentos, III e IV, de resolução da regra, ou seja, registramos a relação proporcional entre as quantidades do problema e resolvemos a equação do 1º grau para encontrar o valor de 'x', sendo que tal equação é resultante da igual dos produtos dos valores das grandezas, conforme apresentamos na resolução da questão anterior, vide ilustração abaixo:

III) e IV)

Pedreiros	Tempo (dias)
6 $\longrightarrow$	18
4 $\longrightarrow$	X

↑Grandezas inversamente proporcionais↑

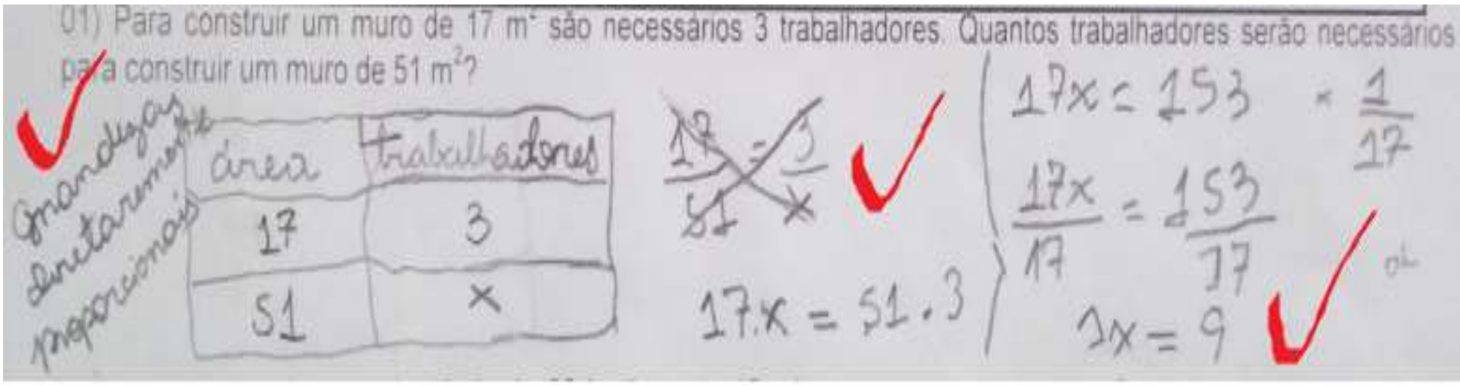
$$4x = 6 \,.\, 18 \rightarrow 4x = 108 \rightarrow x = \frac{108}{4} \rightarrow x = 27 \text{ dias.}$$

Com a finalização dessa resolução, pedimos para os alunos tomarem nota do que foi feito. Posteriormente, solicitamos que os discentes tentassem resolver as seis questões restantes do material. Desse modo, foi possível avaliarmos o nível de compreensão desses alunos com relação ao fazer da regra de três simples.

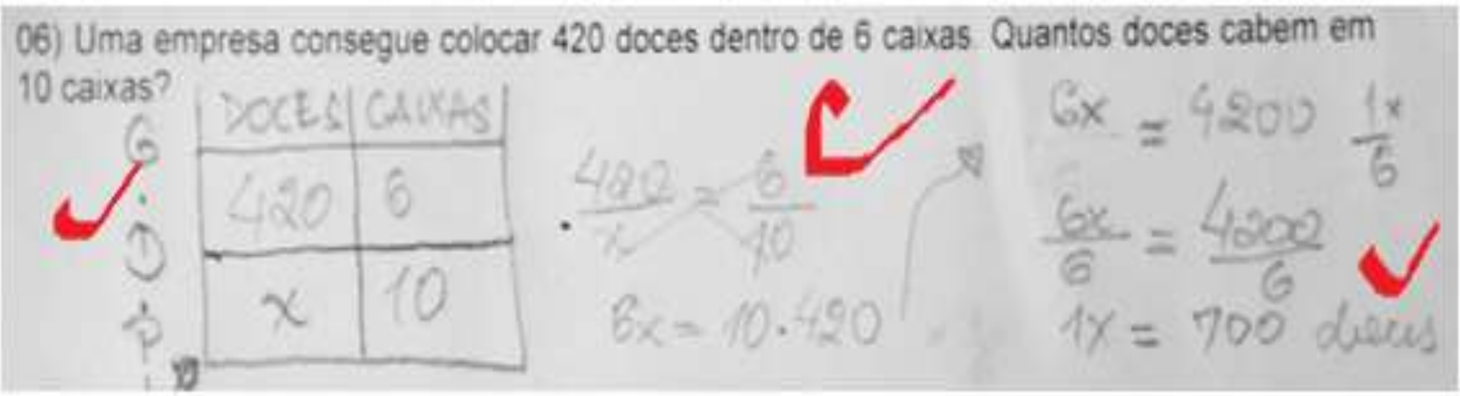
As produções mostradas a seguir indicaram que os alunos assimilaram os procedimentos de resolução da regra, e mais, deram indícios de que esses alunos haviam realizado, acertadamente, a análise proporcional entre as grandezas.

Imagem 73 – Resolução dos alunos na regra de três simples

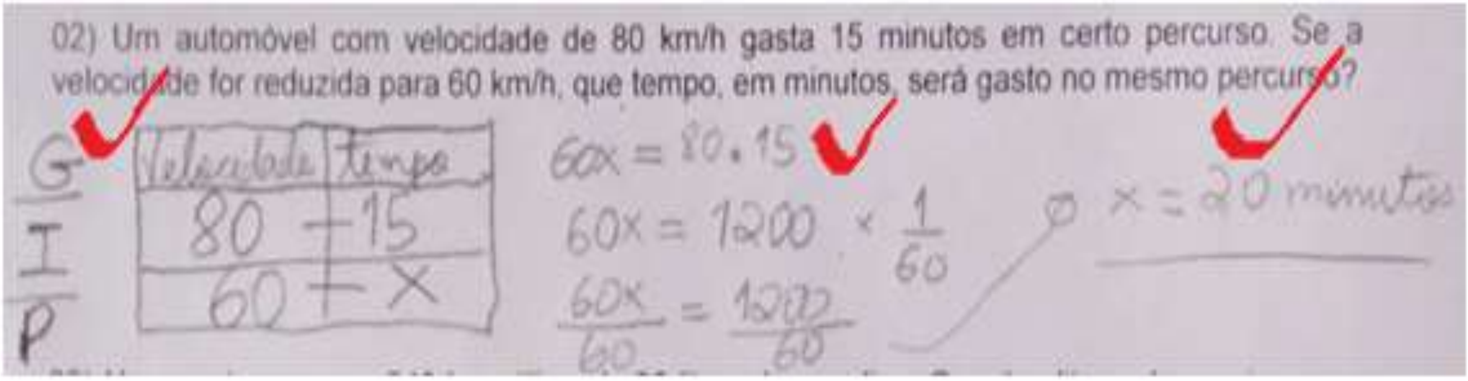
Resolução da regra de três simples pela aluna S_{30}



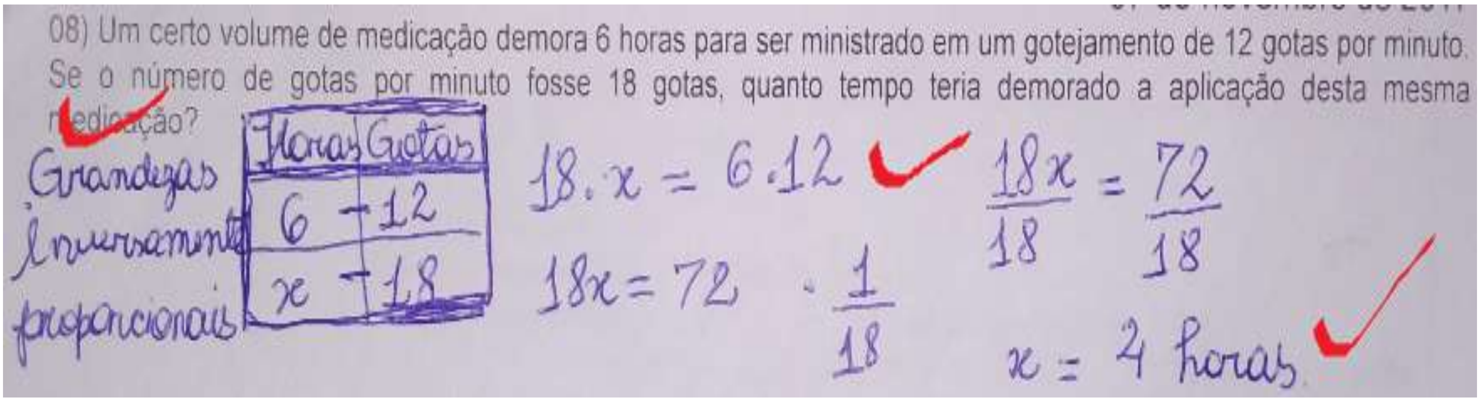
Resolução da regra de três simples pela aluno S_{22}



Resolução da regra de três simples pela aluno S_{16}



Resolução da regra de três simples pela aluna S_{26}



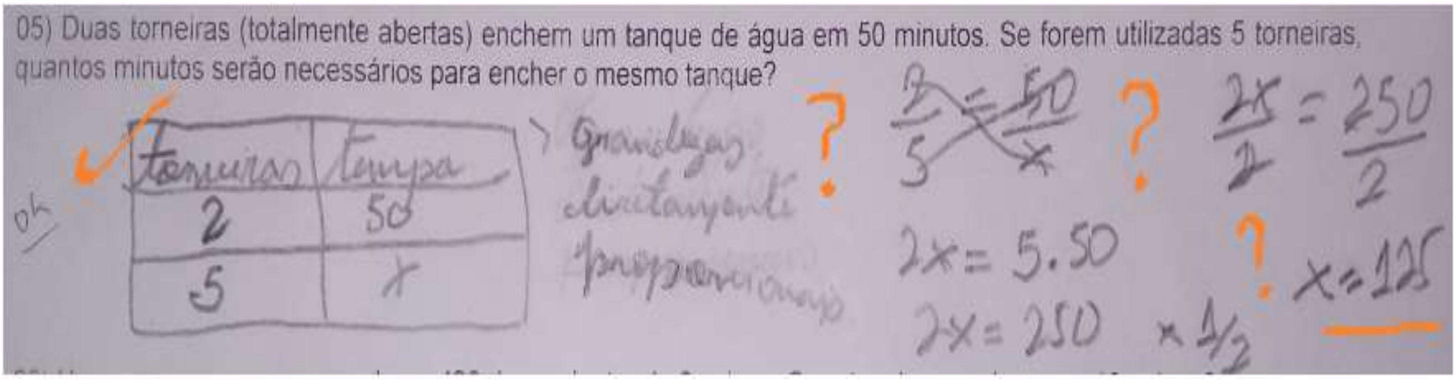
Fonte: Experimento (2017)

A maioria dos alunos apresentou produções acertadas como as supracitadas nesta sessão de ensino, revelando que os procedimentos de resolução da regra de três simples foram compreendidos. Desse modo, podemos pressupor que as dificuldades reveladas no início, ao realizarem o pré-teste, tendem a ser minoradas com o aprimoramento da regra.

Com o andamento das resoluções das questões restantes do material pelos alunos, observamos que poucas vezes esses discentes recorreram as nossas orientações, quando tal fato acontecia, geralmente, estava relacionado com aqueles alunos que tiveram pouca participação na aula ou que não prestaram a devida atenção no momento de apresentação da regra, o que acarretou em produções com alguns equívocos, quase sempre, relacionados com a execução dos procedimentos de resolução dessa regra. Sobre isso, trazemos à produção do aluno S_{27}, que executou parcialmente certo os procedimentos da regra, por isso, a solução encontrada para a questão foi incompatível com o contexto do problema.

Imagem 74 – Resolução da regra de três simples

Resolução da regra de três simples pelo aluno S_{27}



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Conforme a imagem acima, o aluno executou corretamente os dois primeiros procedimentos de resolução da regra, ou seja, ele conseguiu identificar as grandezas e montar o quadro dessas grandezas com seus respectivos valores. Entretanto, ele aplicou o terceiro e o quarto procedimentos equivocados, pois a análise proporcional realizada estava em desacordo com a relação existente entre as grandezas, o que o levou, consequentemente, a comparar as razões dessas grandezas ao invés de comparar os produtos dos valores dessas quantidades para achar o valor de 'x', acarretando dessa forma em uma solução incompatível com o contexto do problema.

Mesmo que algumas produções dos alunos não estiveram conforme o esperado, devido as dificuldades desses alunos em aplicarem a regra de três simples corretamente, acreditamos que à medida que a regra seja retomada nas sessões subsequentes essas dificuldades tendem a diminuir e o algoritmo da regra de três simples passe a ser compreendido e aplicado facilmente. Todavia, consideramos que esta sessão de ensino se mostrou eficaz, pois alcançou o pretendido, pelo menos para a maioria da turma, uma vez que oportunizou os alunos a conhecerem os procedimentos de resolução da regra de três simples, e aplicá-los de forma eficiente em outras situações envolvendo a regra.

Com a finalização das resoluções dos alunos, fizemos as correções e os comentários devidos para cada uma das questões restantes do material no quadro e solicitamos que os discentes realizassem a autocorreção de suas produções. Após esse momento de troca de conhecimentos, demos por encerrada esta sessão de ensino às 9h40min. Então, nos despedimos da turma, e reforçando que no nosso próximo encontro retomaríamos o estudo da regra de três simples; em seguida, nos retiramos de sala.

5.9. SEXTA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da regra de três simples

Esta sessão de ensino ocorreu na escola no dia 09 de novembro de 2017. Neste dia chegamos à instituição de ensino às 07h30min, em seguida, nos encaminhamos à sala da direção para informarmos nossa permanência na turma do 7° ano nos três primeiros horários da aula de matemática. Posteriormente a isso, dirigimo-nos à sala de aula e adentramos na mesma às 07h35min. Na ocasião, cumprimentamos os alunos presentes, e como a quantidade de alunos era reduzida, optamos por esperar os demais discentes chegarem. Após o tempo de tolerância, já se encontravam na sala de aula 29 alunos. Diante desse número, iniciamos esta sessão de ensino às 07h40min, com a distribuição do material (APÊNDICE D) para os alunos com dez questões sobre regra de três simples com contextos diversos sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, cujo propósito era esmerar os ensinamentos ocorridos da técnica da regra na sessão anterior, e fomentar nos alunos a autoconfiança e a autonomia matemática na resolução de questões.

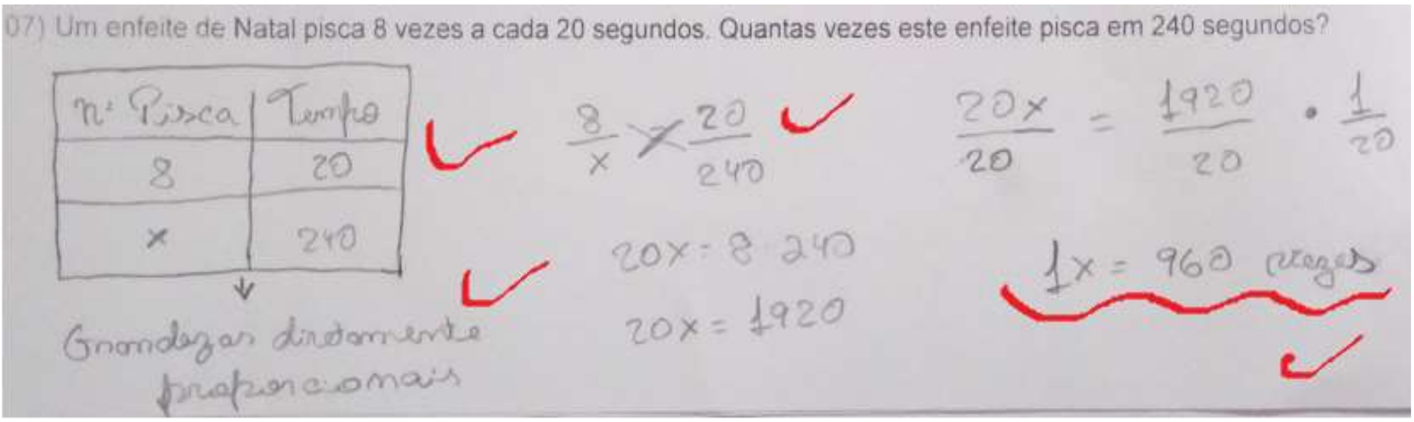
O desenrolar desta sessão seguiu os moldes da aula anterior, isto é, resolvemos uma questão de cada tipo com relação à proporcionalidade, e, em seguida, pedimos aos alunos que resolvessem as outras oito restantes, sendo que para isso eles teriam um intervalo de tempo para finalizarem a tarefa.

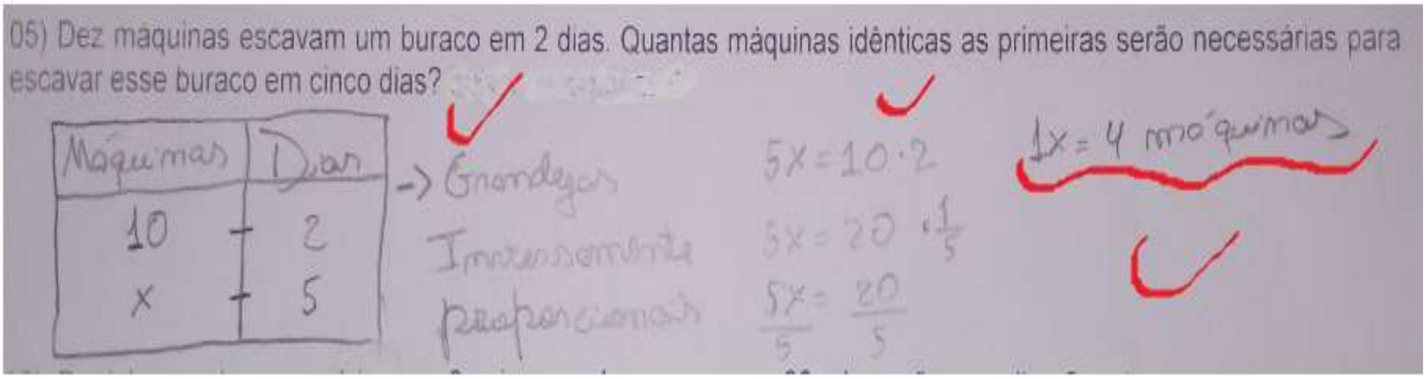
Ao final, retomamos a discussão sobre as questões e tecemos os comentários pertinentes sobre as resoluções no quadro, e, concomitantemente, os alunos fizeram a autocorreção de suas questões.

Sobre as respostas dos discentes nesta sessão de ensino, apresentamos a seguir quatro resoluções da regra de três simples, sendo duas sobre grandezas diretamente proporcionais e duas de grandezas inversamente proporcionais, respectivamente.

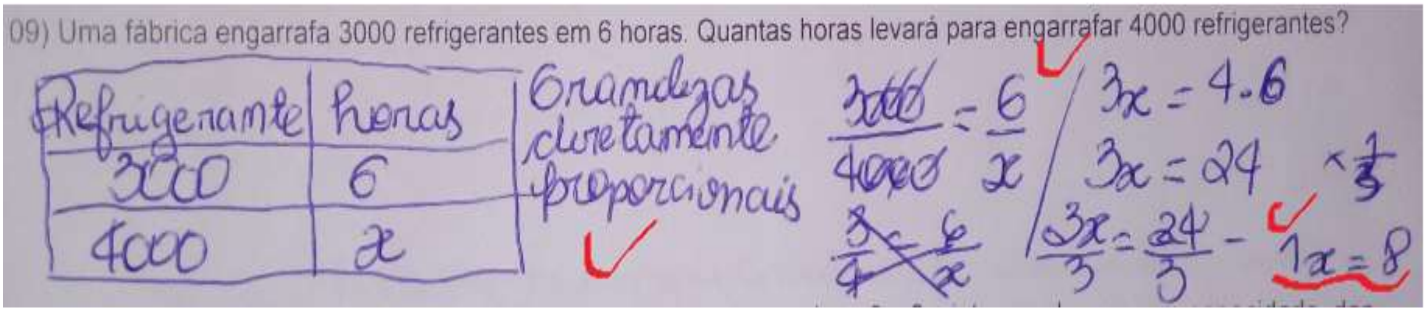
Imagem 75– Resolução de questões de regra de três simples pelos alunos

Resolução da regra de três simples pela aluna S_{10}

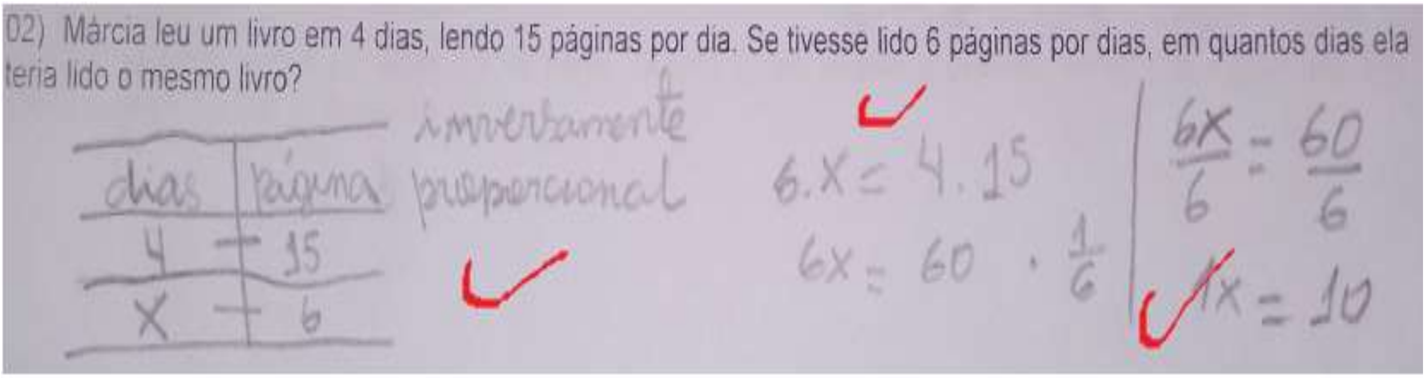




Resolução da regra de três simples pelo aluno S_1



Resolução da regra de três simples pelo aluno S_{32}



Fonte: Experimento (2017)

As respostas construídas pelos alunos sinalizaram que houve compreensão dos procedimentos de aplicação da regra de três simples. Essas respostas também nos fizeram acreditar que as atividades anteriores sobre grandezas direta e inversamente proporcionais surtiram o efeito desejado, haja vista que as análises apresentadas estavam também corretas.

Frente a esses resultados positivos, arriscamos dizer que os alunos superaram, em sua maioria, as dificuldades iniciais sobre a regra de três simples demonstradas na resolução do pré-teste e na sessão anterior. A respeito dos alunos que ainda não apresentaram um desempenho satisfatório acerca da regra, acreditamos que eles poderão encontrar suporte pedagógico nas sessões de ensino subsequentes, onde retomaremos a regra de três simples juntamente com a regra de três composta.

Por fim, avaliamos esta sexta sessão de ensino como positiva, pois as respostas apresentadas pelos alunos ficaram de acordo com as nossas expectativas, além do mais a quantidade de acertos superou a de erros na resolução da regra de três simples. A presente sessão encerrou às 09h45min, com término do horário das aulas de matemática.

No encontro seguinte, abordarmos a proporcionalidade composta direta entre três grandezas, para tanto utilizamos questões sobre assuntos elementares de Geometria e da Física, com o propósito de conduzir os alunos a perceberam às relações proporcionais e não proporcionais existentes entre as quantidades envolvidas nesses contextos.

5.10. SÉTIMA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da atividade 3

No dia 14 de novembro de 2017, chegamos à escola às 07h30min, com a intenção de aplicarmos esta sétima sessão de ensino da nossa sequência didática. Em seguida, passamos na sala da direção para registrar nossa presença na escola. Depois disso, nos dirigimos para a sala de aula e adentramos na mesma às 07h35min. Cumprimentos os poucos alunos presentes, e decidimos aguardar a chega dos demais. Passados dez minutos, a turma já apresentava uma quantidade de alunos suficiente, 28 alunos, para iniciarmos os trabalhos neste dia. Então, pedimos aos alunos que retomassem a formação inicial das equipes. Assim, foram constituídas as nove equipes, sendo que uma delas continha quatro alunos. Após isso, distribuímos para cada grupo o material de ensino, dando início ao experimento neste dia às 07h50min, com a leitura do objetivo e procedimentos de execução da atividade. Cabe ressaltar, que a nossa pretensão com esta atividade era conduzir os discentes a perceberem empiricamente os princípios que norteiam a proporcionalidade composta direta entre três grandezas, para, em seguida, formalizarmos tal conceito e apresentarmos também a propriedade das grandezas composta. Tudo isso, para justificar o modo funcional da regra de três composta, sobretudo, fundamentar o porquê do uso da operação de multiplicação no algoritmo dessa regra.

Quanto ao fazer das equipes no decorrer desta sessão de ensino, percebemos que a maioria delas não apresentou de início qualquer dificuldade em executar a tarefa, após receberem as instruções necessárias. Provavelmente, porque os alunos já estavam se adaptando com esse tipo de atividade nas aulas de matemática. Entretanto, outras equipes precisaram ainda de orientações pedagógicas na realização da tarefa, pois apresentavam dificuldades, quase sempre, a respeito de como preencher os quadros das situações propostas. Então, reforçamos as instruções de início, enfatizando o procedimento de preenchimento desses quadros que deveriam ocorrer com o auxílio das folhas de figuras anexas ao final de cada situação.

Sobre os fatos ocorridos durante o andamento desta sessão de ensino, podemos relatar a chegada de três alunos retardatários à sala de aula, que pediram permissão para participar da aula. Dada essa permissão, os dois alunos foram alocados em uma única equipe, pois assim preferiram. Com isso, tivemos nesta sessão um total de 31 alunos em sala. Também cabe relatar o desinteresse e falta de compromisso dos alunos da equipe F na execução da atividade 3, haja vista que esses alunos passaram a maior parte do tempo da sessão de ensino sem conseguirem avançar na tarefa, pois deram prioridade as conversas destoadas do assunto da aula, aliadas a falta de concentração e a pouca vontade de participar da atividade, comprometendo de fato o desempenho desses alunos nesta sessão de ensino. Fatos como esses foram também presenciados em outras equipes, que, por vezes, deixavam de lado a tarefa de matemática para se concentrarem em outros afazeres como, por exemplo, utilizar o celular para acessar as redes sociais, ficar em conversas paralelas, desinteressar-se momentaneamente pela tarefa entre outras ocorrências. Todavia, tivemos equipes que se mostram compromissadas com a tarefa de matemática e apresentaram desempenhos satisfatórios, a exemplo das equipes A, B, C, G entre outras.

A respeito do desempenho das equipes nesta sessão de ensino, apresentamos adiante as produções desses alunos em cada uma das quatro situações que compuseram a atividade 3, bem como os pareceres dessas produções levando em consideração se respostas são válidas (RV), parcialmente válidas (RPV) ou não válidas (RNV).

Imagem 76 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe B
Situação 1/Quadro 1 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

B

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: SIM PORQUE A BASE E A ÁREA AUMENTAM AO MESMO TEMPO.

Resposta: “Sim porque a base e a área aumentam ao mesmo tempo.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 77− Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe B
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: Sim porque a altura e a área aumentam ao mesmo tempo.

Resposta: “Sim porque a altura e a área aumentam ao mesmo tempo.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: Sim são diretamente proporcional se eu multiplicar o produto a área também vai multiplicar pelo mesmo numero.

Resposta: “Sim são diretamente proporcionais se eu multiplicar o produto a área também vai multiplicar pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 78 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe C
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: são diretamente proporcionais, porque ao multiplicarmos a base a grandeza área também será multiplicada ou dividida pelo mesmo número

Resposta: "São diretamente proporcionais, porque ao multiplicarmos a base a grandeza área também será multiplicada ou dividida pelo mesmo número."
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 79 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe C
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: ~~não diretamente por~~ sim, porque a altura e as área podem ser multiplicadas ou divididas pelo mesmo número

Resposta: “Sim porque a altura e a área podem ser multiplicada ou dividida pelo mesmo número.”

Quadro 3

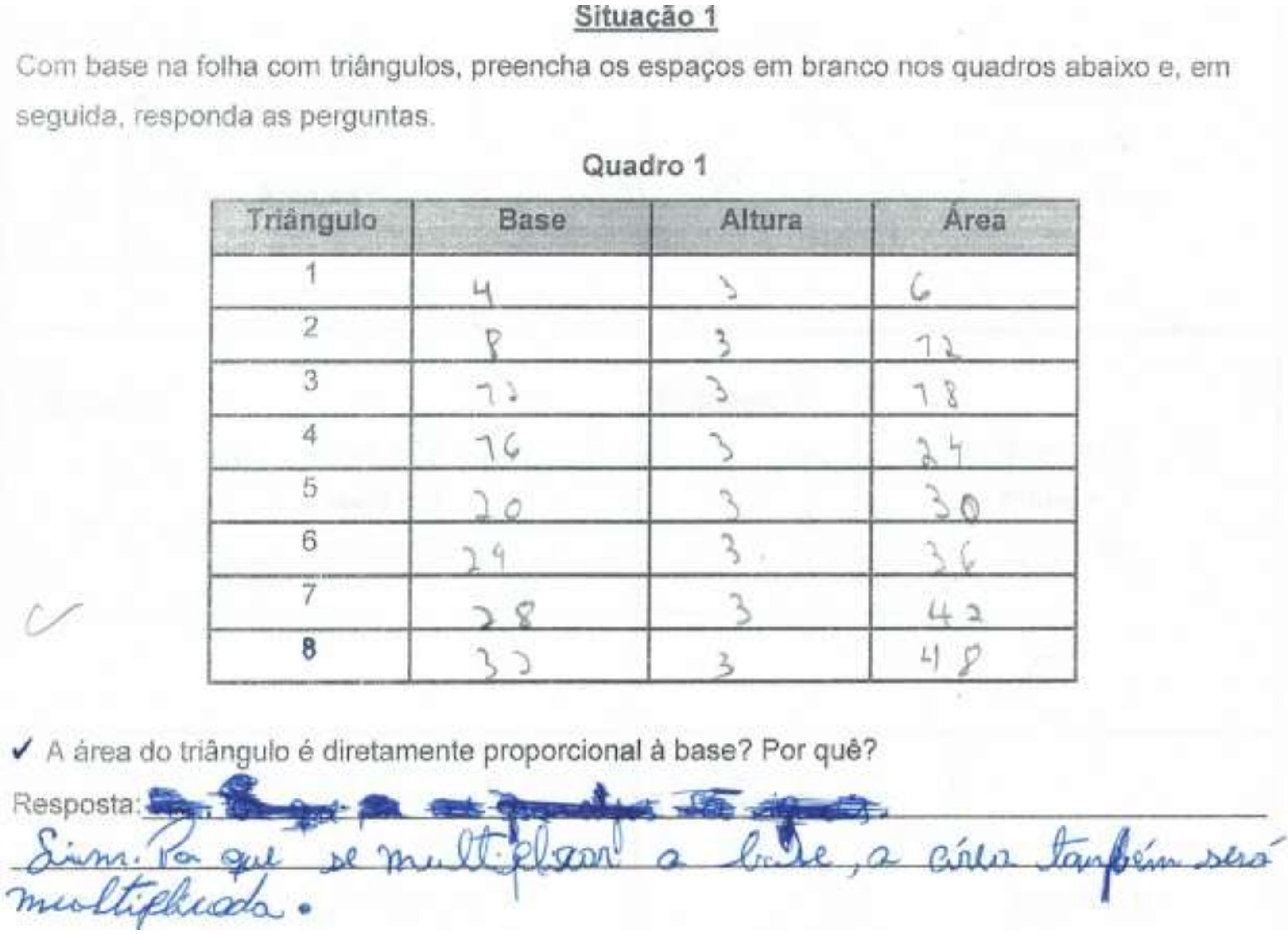
Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: [illegible]
sim, porque as grandezas podem ser multiplicadas ou divididas pelo mesmo número

Resposta: “Sim porque as grandezas podem ser multiplicadas ou divididas pelo mesmo número.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 80 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe D
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}



Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: ~~[illegible]~~
Sim. Por que se multiplicar a base, a área também será multiplicada.

Resposta: “Sim. Porque se multiplicar a base, a área também será multiplicada.”
Fonte: Experimento (2017)

.

Imagem 81 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe D

Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: Sim, São diretamente proporcional, ~~[illegible]~~. Porque a base ser será multiplicada e a área também será pelo mesmo número.

Resposta: “Sim são diretamente proporcional, porque a base será multiplicada e a área também pelo mesmo número.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

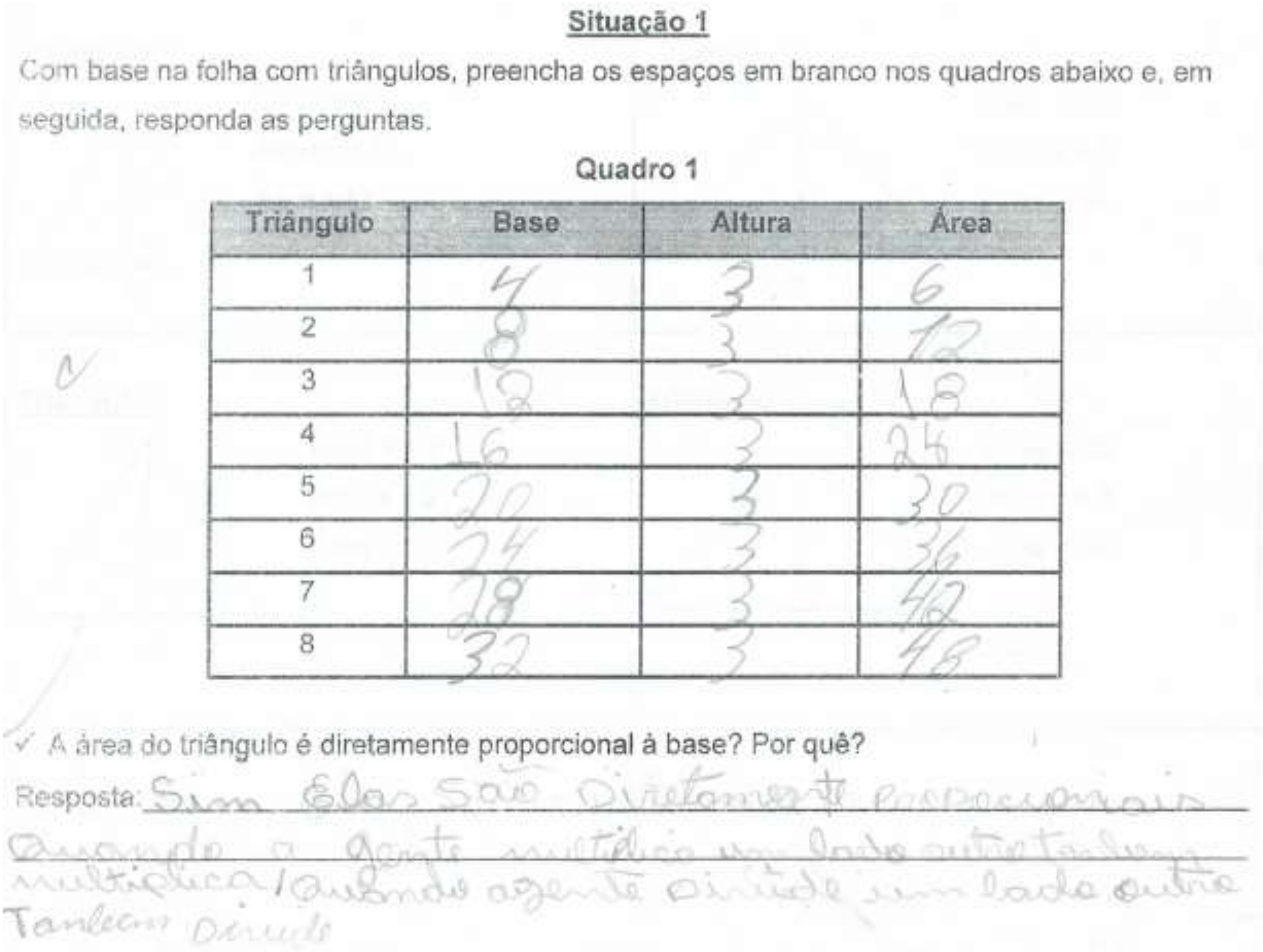
✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: Sim, são diretamente proporcionais ao produto, por que a base x altura será multiplicado a área também será multiplicada pelo mesmo número

Resposta: “Sim, são diretamente proporcionais ao produto, porque a base x altura será multiplicada a área também será multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 82 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe E
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}



Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: Sim Elas são Diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro tambem multiplica / quando agente dividi um lado outro Tambem dividi

Resposta: “Sim. Elas são diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro também multiplica, quando a gente dividi um lado outro também dividi.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 83 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe E
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: Sim Elas São Diretamente Proporcionais Quando a gente multiplica um lado outro também multiplica

Resposta: “Sim elas são diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro também multiplica.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

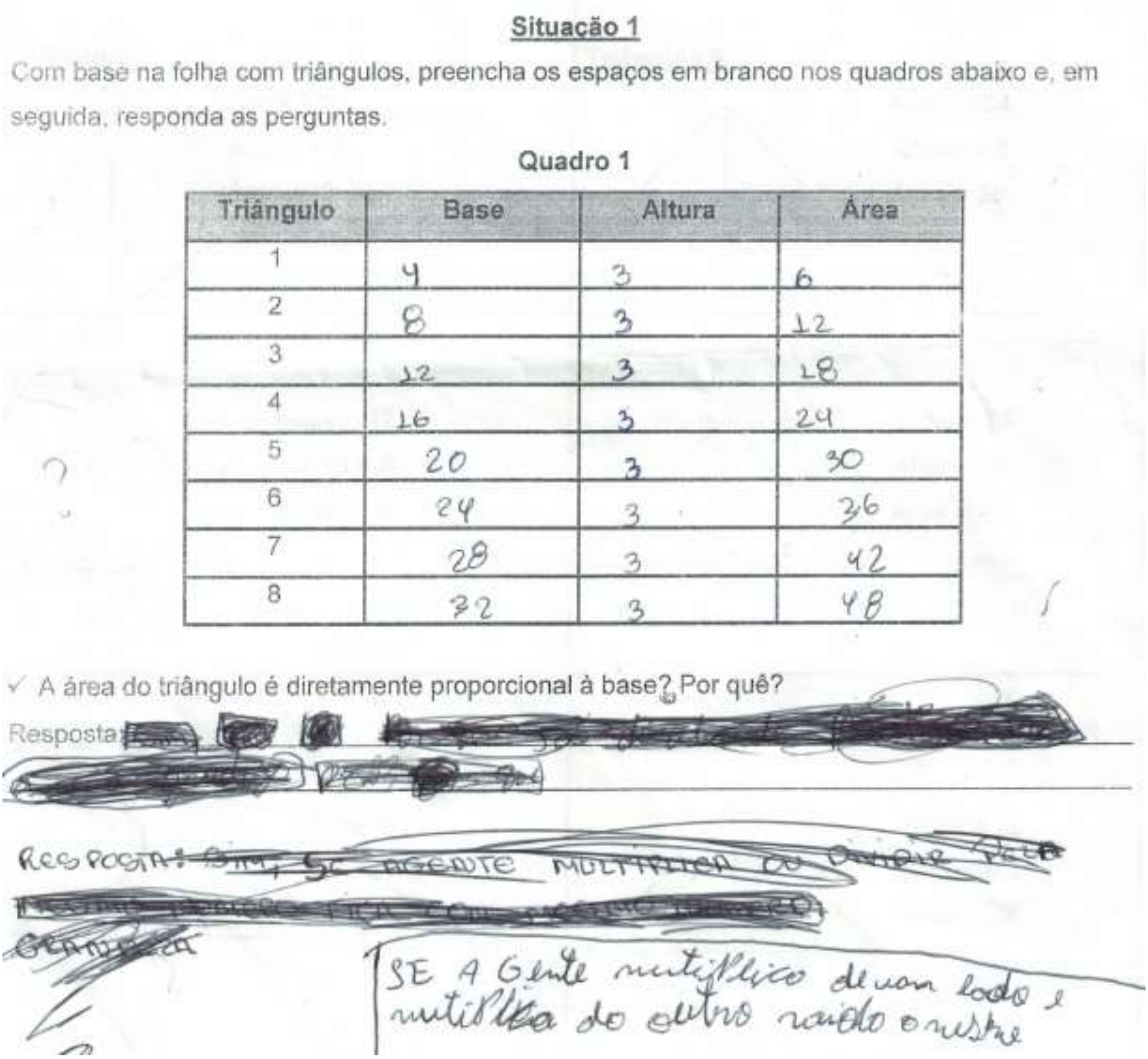
✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: Sim Elas São Diretamente proporcionais Quando a gente multiplica ou Divide o Produto o outro lado também multiplica ou divide pelo mesmo Numero

Resposta: “Sim elas são diretamente proporcionais quando a gente multiplica ou dividi o produto o outro lado também multiplica ou dividi pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 84 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe F
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}



Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: [redacted]

RESPOSTA: ~~SIM, SE AGENTE MULTIPLICA OU~~ [redacted]

SE A Gente mutiplica de um lado e mutiplica do outro vaido o mesmo

Resposta: “Se a gente multiplica de um lado e multiplica do outro vai da o mesmo.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 85 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe F
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

?

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: SIM, POR QUE AS GRANDEZAS ~~E~~SÃO DIRETAMENTE PRORPORCIONAIS

Resposta: “Sim, porque as grandezas são diretamente proporcionais.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

?

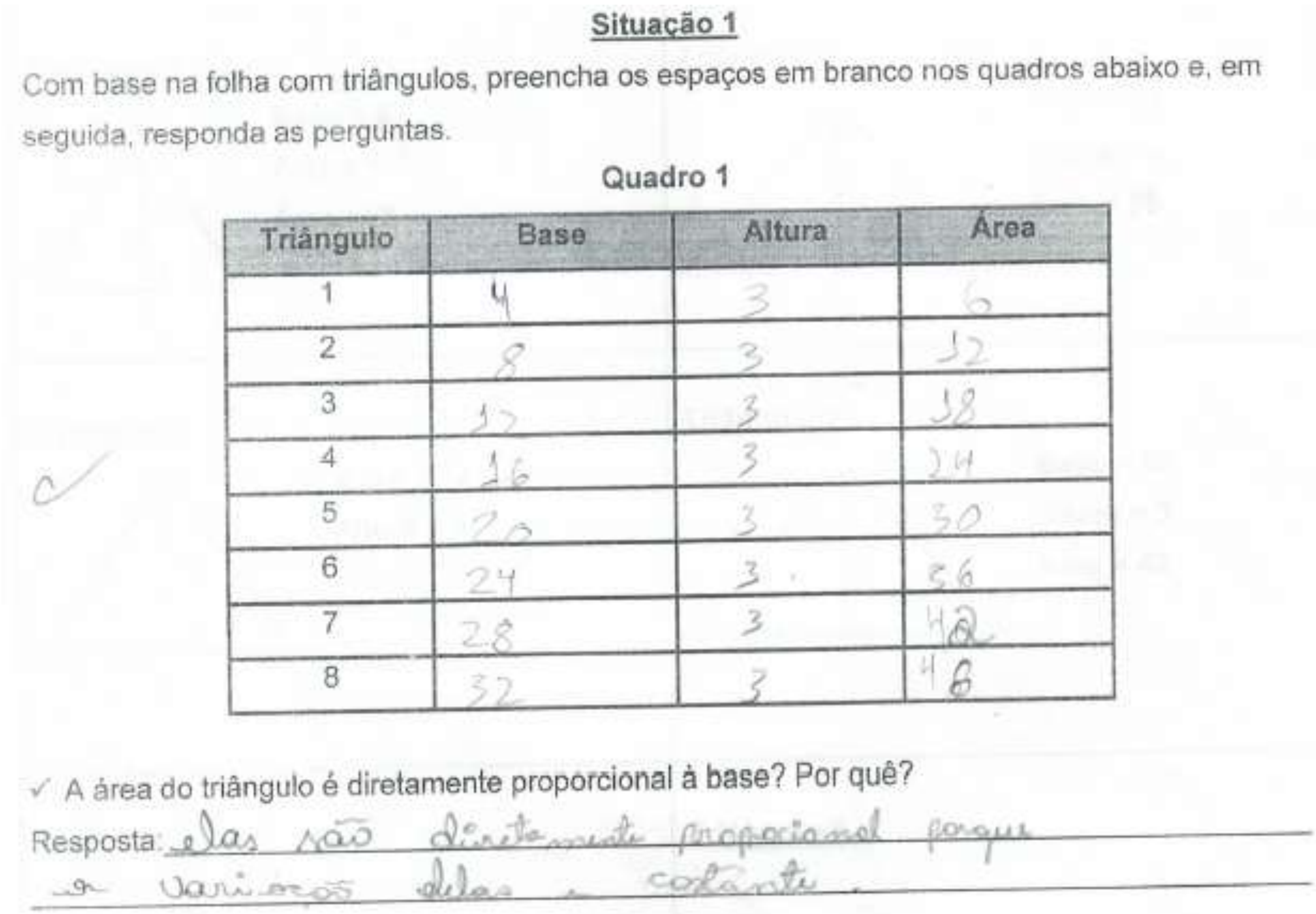
✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: INVERSAMENTE PRORPOSIONAIS

Resposta: “Inversamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 86 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe G
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}



Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: elas são diretamente proporcional porque a variação delas é constante.

Resposta: “Elas são diretamente proporcional porque a variação delas é constante.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 87 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe G
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	8	15
4	5	10	20
5	5	12	25
6	5	14	30
7	5	16	35
8	5	18	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: ela é diretamente proporcional porque quando uma aumenta a outra aumenta na mesma proporção.

Resposta: “Ela é diretamente proporcional porque quando uma aumenta a outra aumenta na mesma proporção.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	320	320

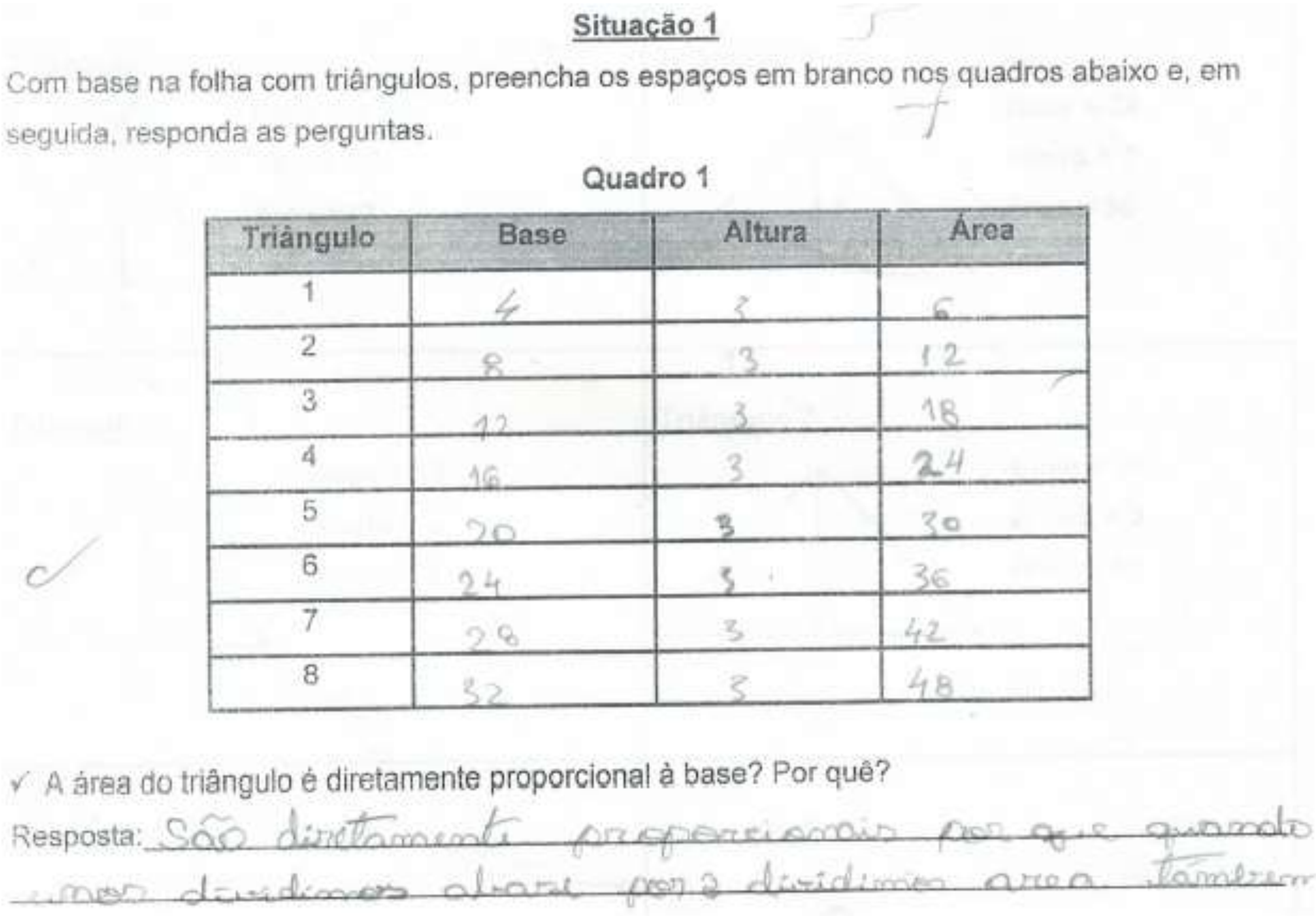
✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: Sim! porque a razão entre elas é constante

Resposta: “Sim porque a razão entre elas é constante.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 88 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe H
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}



Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais por que quando nós dividimos a base por 2 dividimos area tambem

Resposta: “São diretamente proporcionais porque quando nós dividimos a base por 2 dividimos área também.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 89 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe H
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número da outra grandeza se dividimos ou multiplicamos do mesmo número

Resposta: "São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número da outra grandeza se dividimos ou multiplicamos do mesmo número."

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	80
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

?

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque as grandezas são constante

Resposta: "São diretamente proporcionais porque as grandezas são constante."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 90 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe I
Situação 1/ Quadro 1 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Situação 1

Com base na folha com triângulos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Triângulo	Base	Altura	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à base? Por quê? Sim

Resposta: Por que se Eu dividi a outra tambem fica dividida pelo Mesmo Numero, se Multiplicar ou Dividir a outra tambem fica dividida ou Multiplicado Pelo Mesmo Numero

Resposta: "Sim porque se eu dividi a outra também fica dividida pelo mesmo número, se eu multiplicar ou dividir a outra também fica dividida ou multiplicada pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 91 − Resolução da situação 1 da atividade 3 pela equipe I
Situação 1/ Quadros 2 e 3 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Quadro 2

Triângulo	Base	Altura	Área
1	5	2	5
2	5	4	10
3	5	6	15
4	5	8	20
5	5	10	25
6	5	12	30
7	5	14	35
8	5	16	40

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional à altura? Por quê? Sim

Resposta: Por Quê Se Eu Dividir a outra também fica dividido pelo Mesmo Numero, se Multiplicar ou Dividir a outra também fica dividido ou Multiplicada Pelo Mesmo Numero

Resposta: “Sim porque se eu dividir a outra também fica dividida pelo mesmo número, se multiplicar ou dividir a outra também fica dividido ou multiplicada pelo mesmo número.”

Quadro 3

Triângulo	Base x Altura	Área
1	10	5
2	40	20
3	90	45
4	160	8
5	250	125
6	360	180
7	490	245
8	640	320

✓ A área do triângulo é diretamente proporcional ao produto (Base x Altura)? Por quê? Sim

Resposta: Por Quê Se Eu Dividi a outra também fica dividida pelo Mesmo Numero, Se Multiplicar ou Dividir a outra também fica dividido ou Multiplicada Pelo Mesmo Numero.

Resposta: ““Sim porque se eu dividi a outra também fica dividida pelo mesmo número, se multiplicar ou dividir a outra também fica dividido ou multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

De posse das produções dos alunos na situação 1 da atividade 3 apresentadas nas imagens anteriores, cabe julgarmos a qualidade dessas produções, isto é, se os alunos responderam conforme o esperado para a tarefa. Para tanto, classificamos as respostas das equipes como resposta válida (RV), resposta parcialmente válida (RPV) ou resposta não válida (RNV), como é mostrado no quadro a seguir.

Quadro 37 – Qualidade das respostas por equipe na situação 1 da atividade 3

Equipe	**Situação 1**		
	Q1	**Q2**	**Q3**
A[26]	-	-	-
B	RV	RV	RV
C	RV	RV	RV
D	RV	RV	RV
E	RV	RV	RV
F	RNV	RNV	RNV
G	RV	RV	RV
H	RV	RV	RPV
I	RV	RV	RV

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

De acordo com o observado no Quadro 37, temos que do total de respostas produzidas na situação 1, 83% foram válidas, e 88% das equipes se enquadraram nessa condição; apenas a equipe F não conseguiu construir respostas válidas para situação 1. Esse desempenho satisfatório da maioria das equipes neste primeiro momento da atividade 3, mostrou que os alunos haviam compreendido a relação proporcional direta entre duas grandezas, o que serviu de base para que esses alunos julgassem acertadamente a relação proporcional composta existente entre três grandezas na situação 1. Desse modo, acreditamos que as situações construídas para a atividade 3 possam subsidiar os alunos na compreensão e assimilação do conceito de proporcionalidade composta, e, consequentemente, contribuir para o ensino da regra de três composta de forma positiva.

A seguir, apresentamos as produções das equipes na situação 2 da atividade 3 e também os pareceres sobre a qualidade dessas produções.

[26] Esta equipe levou o material da atividade 3 ao final da sessão de ensino, por isso, a análise do desempenho dos alunos da equipe A não consta no trabalho.

Imagem 92 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe B
Situação 2/ Quadros 1 e 2 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: sim porque diagonal maior e área aumentam ao mesmo tempo

Resposta: "Sim porque a diagonal maior e área aumentam ao mesmo tempo."

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

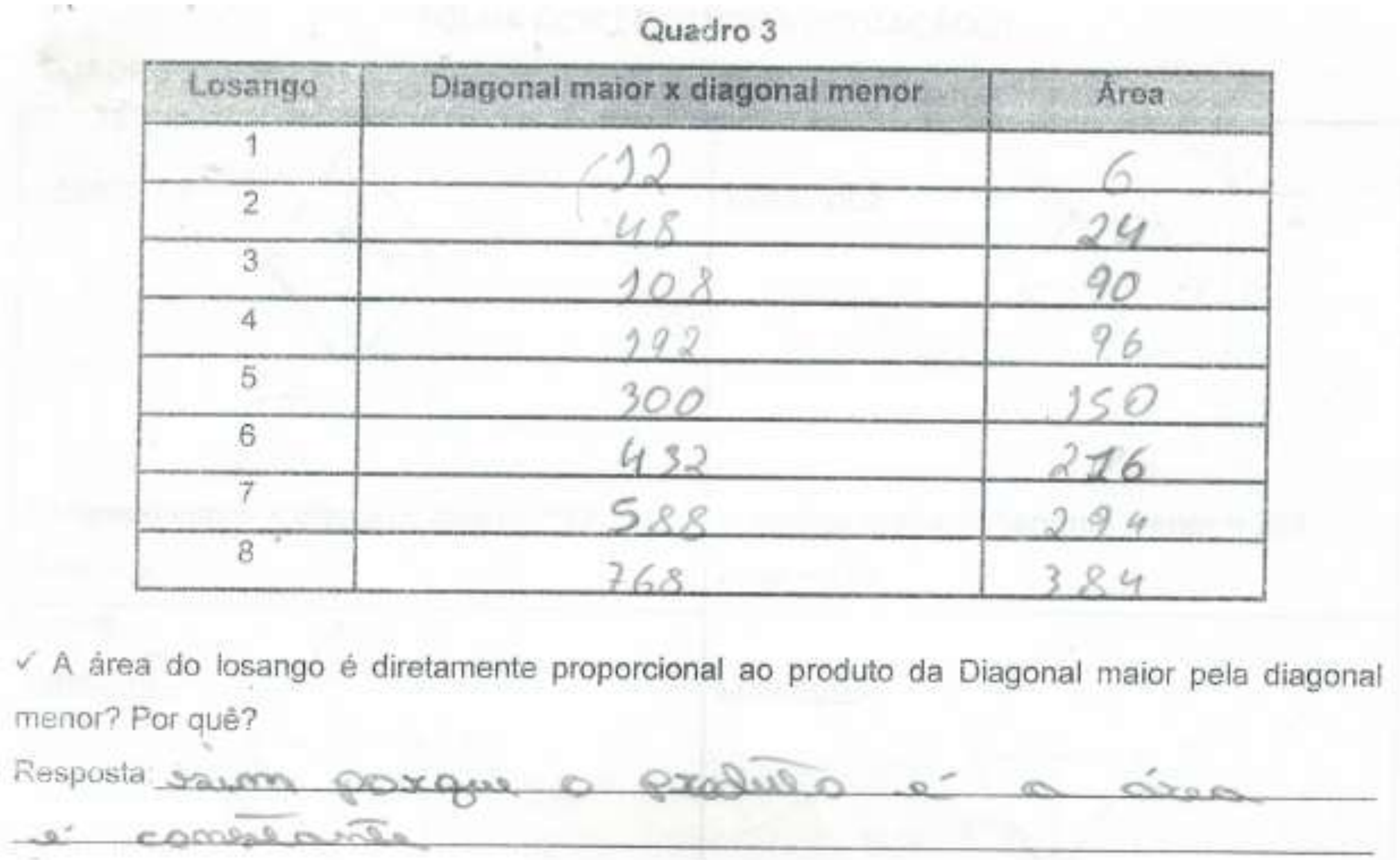
✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: sim porque a diagonal menor e a área são constante

Resposta: "Sim porque a diagonal menor e a área são constante."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 93 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe B
Situação 2/Quadro 3 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}



Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: sim porque o produto é a área é constante

Resposta: “Sim porque o produto e a área é constante.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 94 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe C
Situação 2/ Quadros 1 e 2 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: sim, por que as grandezas são multiplicadas e divididas pelo mesmo número.

Resposta: "Sim porque as grandezas são multiplicadas e divididas pelo mesmo número."

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	240	240

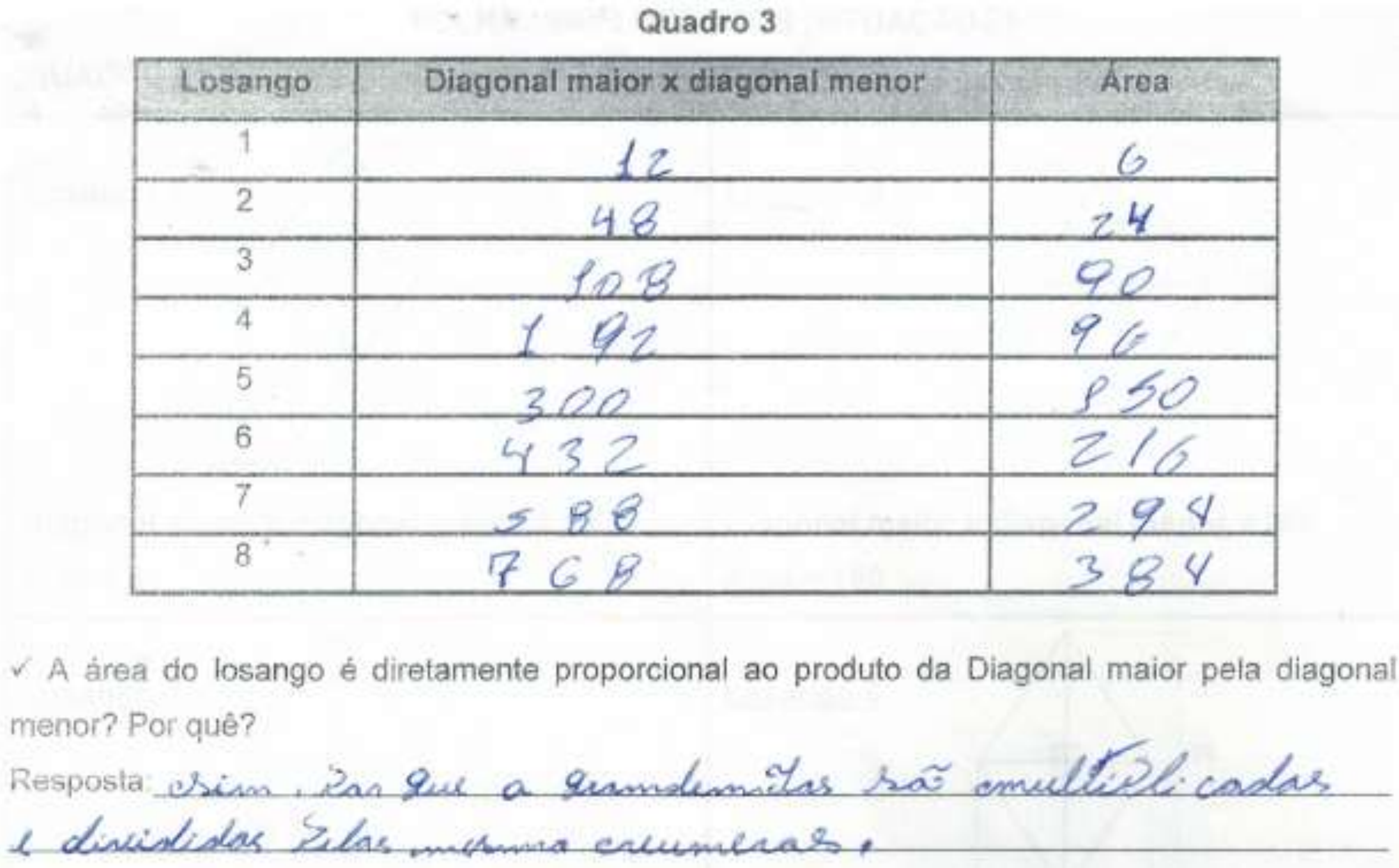
✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: sim, por que a grandezas são multiplicadas e divididas pelos mesmos números.

Resposta: "Sim, porque as grandezas são multiplicadas e divididas pelos mesmos números."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 95 – Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe C
Situação 2/Quadro 3 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}



Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim, Par Que a grandemitas são multiplicadas e divididas pelas mesma numeras.

Resposta: “Sim, porque as grandezas são multiplicadas e divididas pelos mesmos números.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 96 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe D
Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: Sim. Porque se multiplicar a diagonal maior, a área também será multiplicada.

Resposta: “Sim. Porque se multiplicar a diagonal maior, a área também será multiplicada.”

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim. Porque a diagonal maior ~~ser~~ será multiplicada e a área também ~~pela~~ pelo mesmo numero

Resposta: “Sim. Porque a diagonal maior será multiplicada e a área também pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 97 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe D
Situação 2/Quadro 3 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta:

Resposta: “Sim são diretamente proporcionais ao produto porque a base x altura são multiplica e a área também será multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 98 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe E
Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: Sim Elas São Diretamente proporcionais Quando a gente multiplica um lado o outro Tambem multiplica

Resposta: “Sim. Elas são diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro também multiplica.”

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	2100
8	20	24	2400

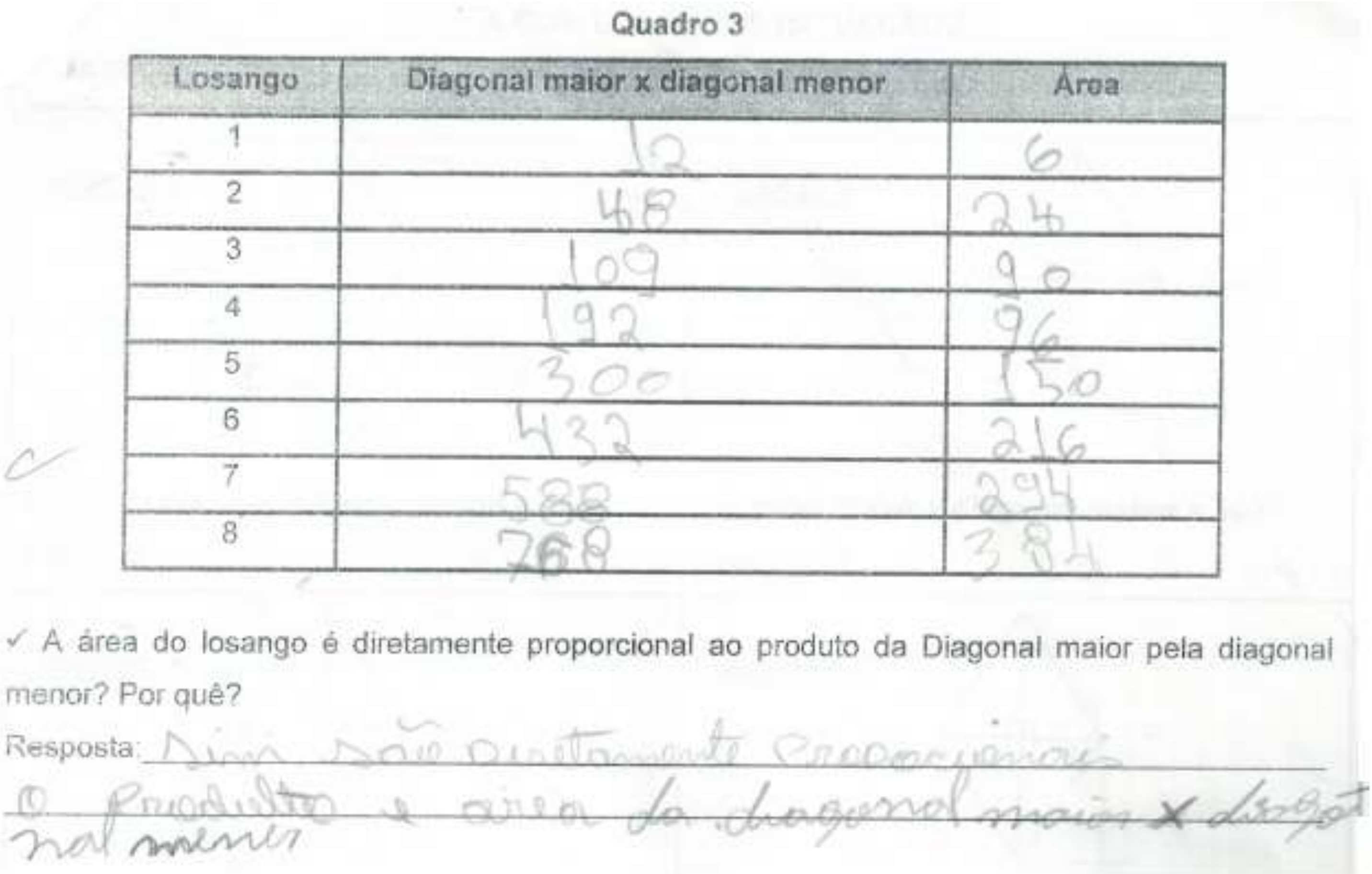
✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim São diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro lado Tambem multiplica

Resposta: “Sim elas são diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro também multiplica.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 99 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe E
Situação 2/Quadro 3 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}


Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	109	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim são diretamente proporcionais o produto e área da diagonal maior x diagonal menor

Resposta: “Sim são diretamente proporcionais o produto e área da diagonal maior x diagonal menor.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 100 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe F

Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: é diretamente Proporcional Por as grandezas são Iqual

Resposta: “é diretamente proporcional pois as grandezas são igual.”

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: e Sim, porque a area do losango e a diagonal sao iguais

Resposta: “Sim, porque a área do losango e a diagonal são iguais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 101 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe F
Situação 2/Quadro 3 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: INVERSAMENTE PRORPOSIONAIS

Resposta: “Inversamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 102 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe G
Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: ela é diretamente proporcional porque a variação é constante

Resposta: "ela é diretamente proporcional porque a variação é constante."

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim. porque a razão entre elas é constante

Resposta: "Sim porque a razão entre elas é constante."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 103 – Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe G
Situação 2/Quadro 3 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	568	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: Sim, porque a variação é constante

Resposta: “Sim, porque a variação é constante.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 104 – Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe H
Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: São diretamenti proporcionais porque nós dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza se dividimos ou multiplicamos pelo mesmo número.

Resposta: "São diretamente proporcionais porque nós dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza se dividimos ou multiplicamos pelo mesmo número."

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

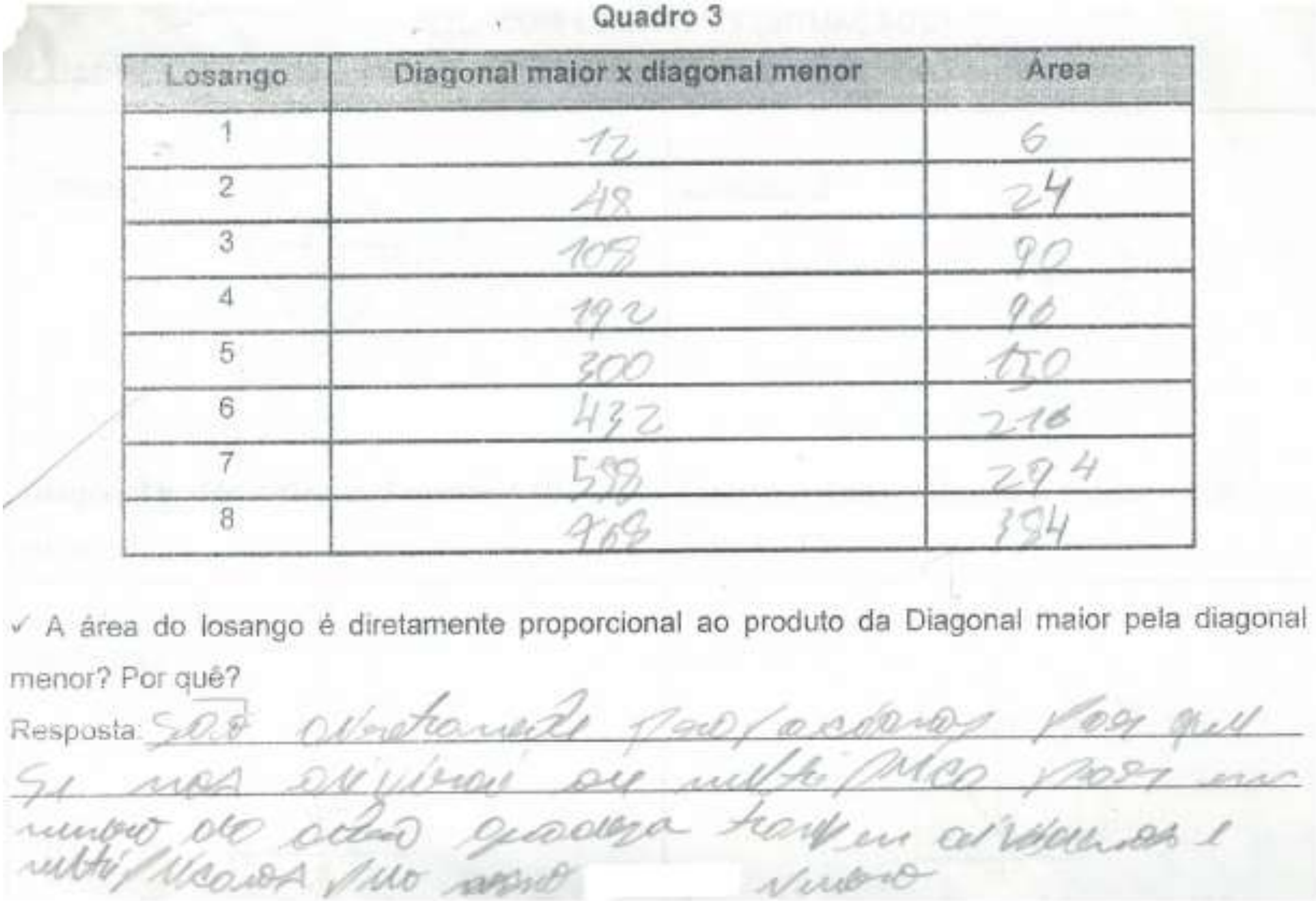
✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque nós dividimos ou multiplicamos por um numero a outra grandeza nós também dividimos ou multiplicamos pelo mesmo numero

Resposta: "São diretamente proporcionais porque nós dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza também dividimos ou multiplicamos pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 105 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe H
Situação 2/Quadro 3 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}



Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza também dividimos ou multiplicamos pelo mesmo número.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 106 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe I
Situação 2/Quadros 1 e 2 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Situação 2

Com base na folha com losangos, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	4	3	6
2	8	3	12
3	12	3	18
4	16	3	24
5	20	3	30
6	24	3	36
7	28	3	42
8	32	3	48

✓ A área do losango é diretamente proporcional à Diagonal maior? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcional porque se eu divido a diagonal maior a área também vai ser dividida por esse número.

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se eu divido a diagonal maior a área também vai ser dividida por esse número.”

Quadro 2

Losango	Diagonal maior	diagonal menor	Área
1	20	3	30
2	20	6	60
3	20	9	90
4	20	12	120
5	20	15	150
6	20	18	180
7	20	21	210
8	20	24	240

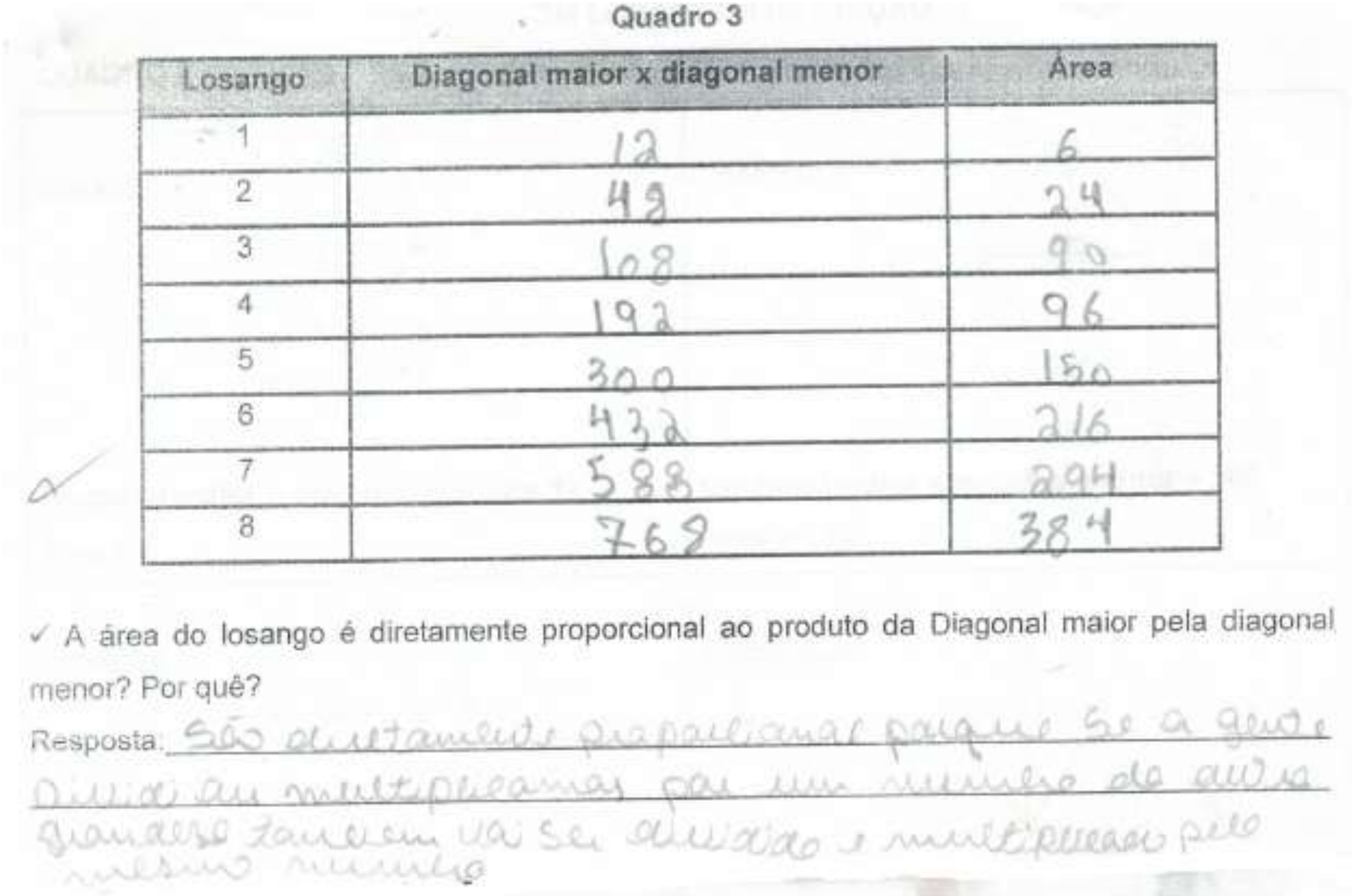
✓ A área do losango é diretamente proporcional à diagonal menor? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza também vai ser dividido e multiplicado pelo mesmo número.

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos por um número a outra grandeza também vai ser dividida e multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 107 − Resolução da situação 2 da atividade 3 pela equipe I
Situação 2/Quadro 3 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}



Quadro 3

Losango	Diagonal maior x diagonal menor	Área
1	12	6
2	48	24
3	108	90
4	192	96
5	300	150
6	432	216
7	588	294
8	768	384

✓ A área do losango é diretamente proporcional ao produto da Diagonal maior pela diagonal menor? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionai porque se a gente dividi ou multiplicamos por um numero da outra grandeza tambem vai ser dividido e multiplicado pelo mesmo numero

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se a gente dividi ou multiplicamos por um número a outra grandeza também vai ser dividida e multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

O Quadro 38 a seguir traz uma síntese das produções dos alunos por equipe realizadas na situação 2 da atividade 3 durante o experimento. Essas produções foram classificadas conforme a adequação total, parcial ou não ao contexto da situação 2; nesse sentido, podemos ter resposta válida (RV), resposta parcialmente validade (RPV) ou resposta não válida (RNV) das equipes participantes da sessão de ensino.

Quadro 38 – Qualidade das respostas na situação 2 por equipe

Equipe	**Situação 2**		
	Q1	**Q2**	**Q3**
A	-	-	-
B	RV	RPV	RPV
C	RV	RV	RV
D	RPV	RV	RPV
E	RV	RV	RPV
F	RNV	RNV	RNV
G	RV	RV	RV
H	RV	RV	RV
I	RV	RV	RV

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

As informações apresentadas no quadro acima revelaram que a maioria das equipes construiu resposta válida para a situação 2, ou seja, das 24 respostas produzidas no experimento 16 se enquadraram nesse parece, correspondendo a 67% do total de respostas. Esse fato é positivo e sintomático de que os alunos assimilaram o conceito de grandezas diretamente proporcionais, o que subsidiou esses alunos na tomada de decisão acertada sobre a relação proporcional direta envolvendo três grandezas. Desse modo, acreditamos que a atividade 2 pode auxiliar o aluno na compreensão e assimilação do conceito da proporcionalidade composta e também no ensino da regra de três composta de forma consciente e não de maneira mecânica, como geralmente acontece nas aulas de matemática, pois o aluno tem participação ativa no processo de aprendizagem observando, por meio das experiências, os princípios que norteiam tal conceito e o bom funcionamento dessa regra, contribuindo, assim, para um ensino de matemática compreensivo e acessível aos alunos.

Adiante apresentamos as produções das equipes na situação 3 e também os pareceres dessas produções quanto a validade das respostas.

Imagem 108 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe B
Situação 3/Quadro 1 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: Sim são diretamente proporcionais porque se eu multiplicar a quantidade de operários a produção de corda também será multiplicada

Resposta: “Sim são diretamente proporcionais porque se eu multiplicar a quantidade de operários a produção de corda também será multiplicada.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 109 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe B
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

90

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim porque se eu multiplicar a quantidade de dias e a produção de cordas será multiplicado pelo mesmo numero

Resposta: “Sim porque se eu multiplicar a quantidade de dias e a produção de cordas será multiplicada pelo mesmo número.”

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim porque ao multiplicar ou dividir a produção de corda por um numero o produto será multiplicado ou dividido pelo mesmo numero

Resposta: “Sim porque ao multiplicar ou dividir a produção de corda por um número o produto será multiplicado ou dividido pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 110 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe C
Situação 3/Quadro 1 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: Sim Por que A quantidade de operarios e a produção de corda em metros são diferentes

Resposta: “Sim porque a quantidade de operários e a produção de corda em metros são diferentes.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 111 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe C
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim, por que dividimos e multiplicamos os produtos [illegible] dias e cordas em metros pelo mesmo número

Resposta: "Sim, porque dividimos e multiplicamos as grandezas dias e cordas em metros pelo mesmo número."

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

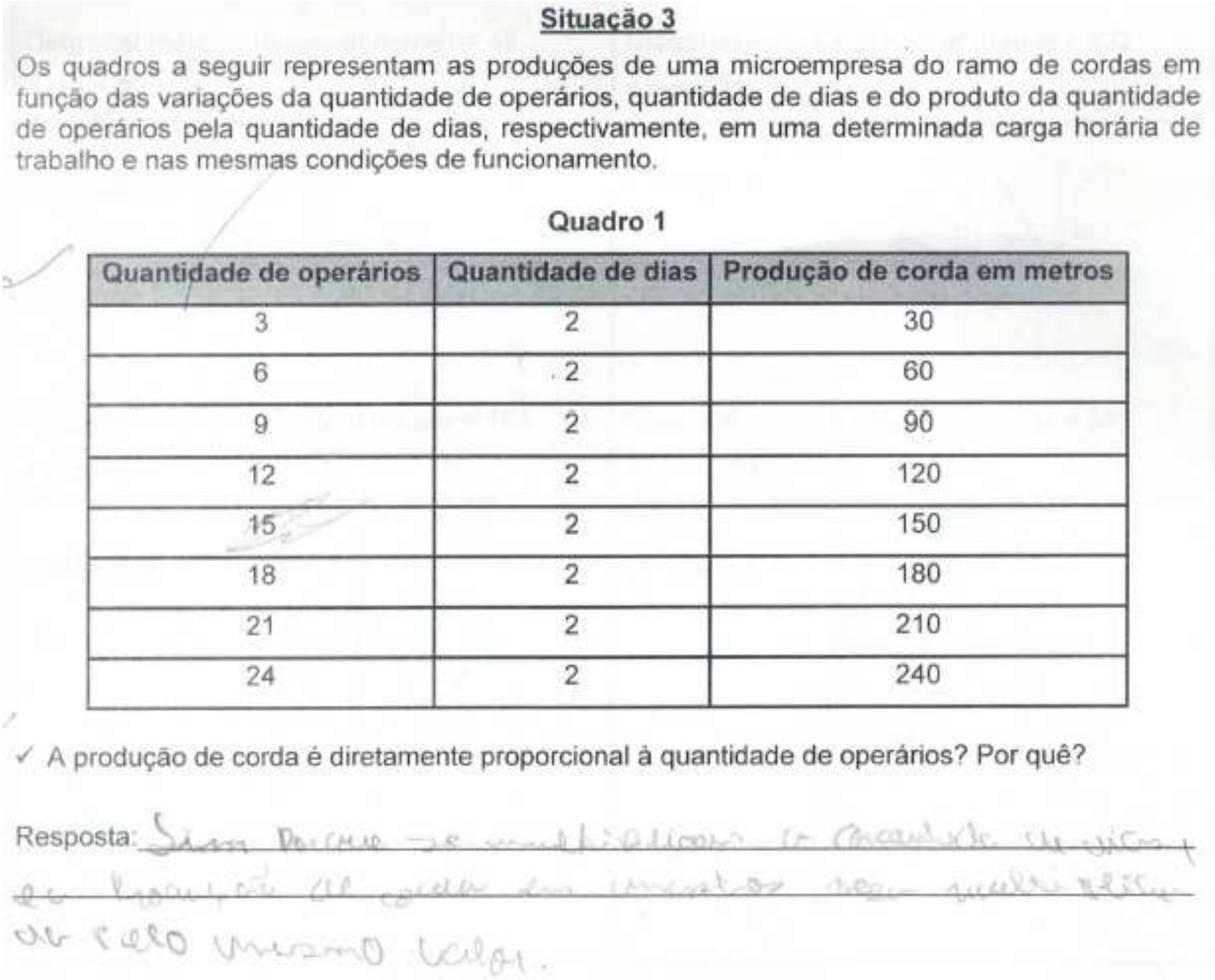
✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim porquê a grandeza são multiplicadas e divididas pelos mesmos números

Resposta: "Sim, porque a grandeza são multiplicadas e divididas pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 112 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe D
Situação 3/Quadro 1 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}



Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: Sim porque se multiplicar a quantidade de dias e a produção de corda em metros será multiplicada pelo mesmo valor.

Resposta: “Sim porque ser multiplicar a quantidade de dias e a produção de corda em metros será multiplicada pelo mesmo valor.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 113 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe D
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim. Porque a Quantidades de dias ser uma multiplicada e a Produção de corda em metros também será Pelo mesmo numero.

Resposta: "Sim porque a quantidade de dias será multiplicada e a produção de corda em metros também será pelo mesmo número."

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim. Porque a quantidade de dias e a quantidades de Operario ~~multiplicada~~ e a produção de corda em metros também será pelo mesmo numero.

Resposta: "Sim porque a quantidade de dias e a quantidade de operário e a produção de corda em metros também será pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 114 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe E
Situação 3/Quadro 1 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: Sim sao diritante proporcionais quanto a gente multiplico um lado outro tambem multiplico

Resposta: “Sim são diretamente proporcionais quando a gente multiplica um lado outro também multiplica.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 115 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe E
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim, porque quando a gente multiplica uma quantidade a produção de corda tambem multiplico

Resposta: “Sim, porque quando a gente multiplica uma quantidade a produção de corda também multiplica.”

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim, quantidade de operario x quantidade de dias multiplica a produção de corda tamb multiplico

Resposta: “Sim, quantidade de operários x quantidade de dias multiplica a produção de corda também multiplica.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 116 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe F
Situação 3/Quadro 1 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta:____________________________________

Resposta: NÃO RESPONDEU

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 117 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe F
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta:____

Resposta: NÃO RESPONDEU

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta:____

Resposta: NÃO RESPONDEU

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 118 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe G
Situação 3/Quadro 1 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: Sim, porque a razão entre elas é igual

Resposta: “Sim, porque a razão entre elas é igual.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 119 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe G
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim, porque a "quantidade de dias" e a "Produção de corda em metros" não variados

Resposta: "Sim, porque a quantidade de dias e a produção de corda em metros são variados."

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: Sim, porque as grandezas são constantes

Resposta: "Sim, porque as grandezas são constantes."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 120 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe H

Situação 3/Quadro 1 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza também

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza também”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 121 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe H

Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza quantidade de dias a outra grandeza da produção também dividimos pelo mesmo número

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza quantidade de dias a outra grandeza da produção também dividimos pelo mesmo número.”

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza do produto fica dividido ou multiplicado pela produção de corda

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza do produto fica dividido ou multiplicado pela produção de corda.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 122 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe I

Situação 3/Quadro 1 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Situação 3

Os quadros a seguir representam as produções de uma microempresa do ramo de cordas em função das variações da quantidade de operários, quantidade de dias e do produto da quantidade de operários pela quantidade de dias, respectivamente, em uma determinada carga horária de trabalho e nas mesmas condições de funcionamento.

Quadro 1

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
3	2	30
6	2	60
9	2	90
12	2	120
15	2	150
18	2	180
21	2	210
24	2	240

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de operários? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número também vai ser dividido e multiplicado pelo mesmo número.

Resposta: “São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número também vai ser dividido e multiplicado pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 123 − Resolução da situação 3 da atividade 3 pela equipe I
Situação 3/Quadros 2 e 3 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Quadro 2

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Produção de corda em metros
4	2	40
4	4	80
4	6	120
4	8	160
4	10	200
4	12	240
4	14	280
4	16	320

✓ A produção de corda é diretamente proporcional à quantidade de dias? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos a grandeza quantidade de dias a outra grandeza de produção de corda também dividimos pelo mesmo número.

Resposta: "São diretamente proporcionais porque se dividimos ou multiplicamos a grandeza quantidade de dias a outra grandeza de produção de corda também dividimos pelo mesmo número."

Quadro 3

Quantidade de operários	Quantidade de dias	Quantidade de operários × Quantidade de dias	Produção de corda em metros
1	2	2	10
2	4	8	40
3	6	18	90
4	8	32	160
5	10	50	250
6	12	72	360
7	14	98	490
8	16	128	640

✓ A produção de corda é diretamente proporcional ao produto da quantidade de operários pela quantidade de dias? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza do produto fica dividido ou multiplicado pelo produção de corda

Resposta: "São diretamente proporcionais porque se nós dividimos ou multiplicamos por um número a grandeza do produto fica dividido ou multiplicado pelo produção de corda."
Fonte: Experimento (2017)

De posse das produções dos alunos, mostradas nas imagens acima, cabe julgarmos a qualidade dos trabalhos desenvolvidos pelas equipes, ou seja, se estão ou não de acordo com o pretendido para a situações 3 da terceira atividade, que procurou conduzir os alunos a identificarem os princípios tácitos da proporcionalidade composta entre três grandezas. Desse modo, classificamos as respostas dessas equipes como resposta válida (RV), resposta parcialmente válida (RPV) ou resposta não válida (RNV), apresentadas no quadro adiante.

Quadro 39 – Qualidade das respostas na situação 3 por equipe

Equipe	**Situação 3**		
	Q1	**Q2**	**Q3**
A	-	-	-
B	RV	RV	RV
C	RNV	RV	RV
D	RV	RV	RPV
E	RV	RV	RV
F	RNV	RNV	RNV
G	RV	RNV	RNV
H	RPV	RV	RPV
I	RPV	RV	RPV

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

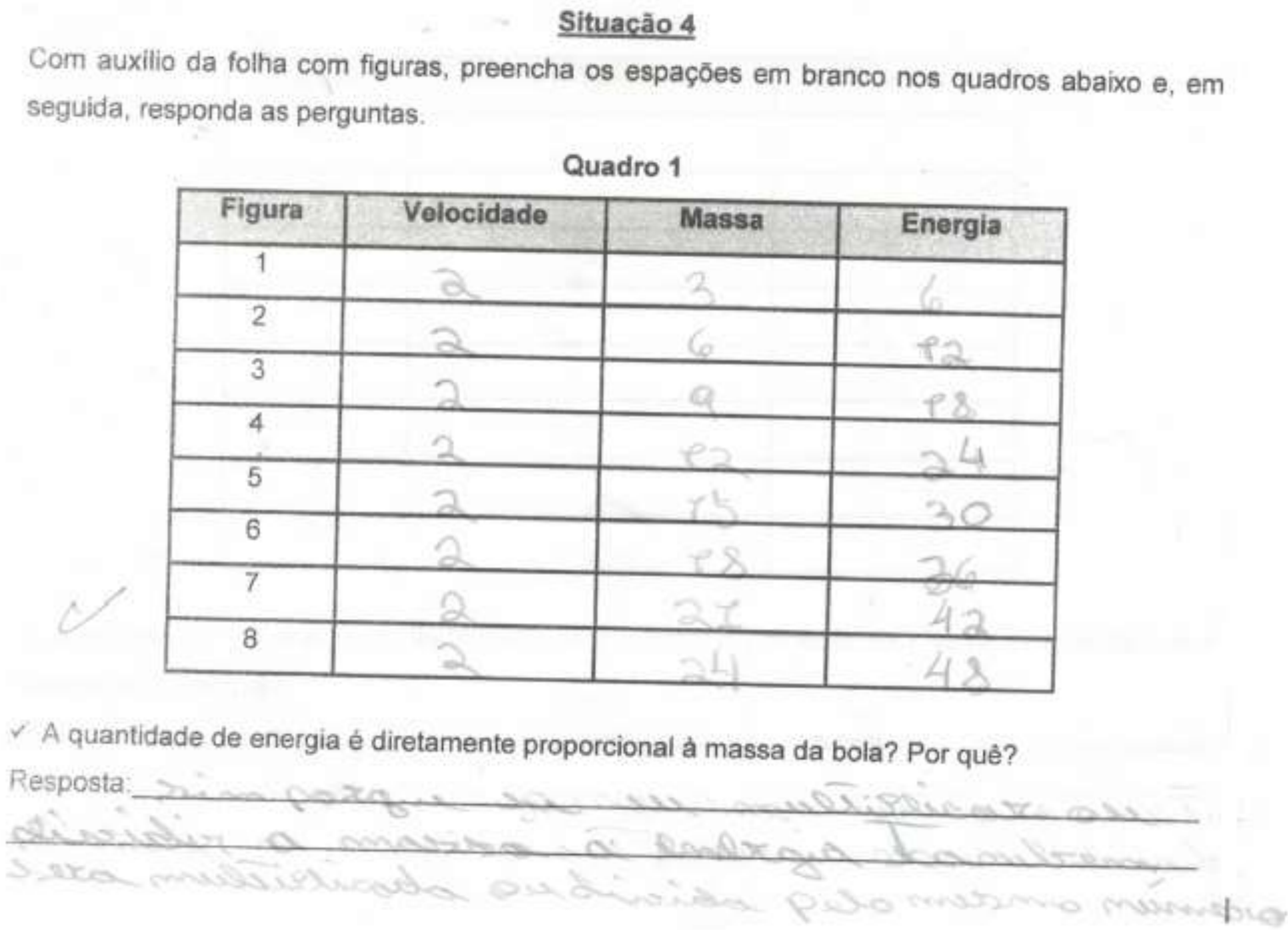
Conforme o Quadro 39, observamos que das 24 respostas produzidas para a situação 3, 6 foram não válidas, 13 válidas e 5 parcialmente válidas, isso correspondeu a 25%, 54% e 21% respectivamente. Com isso, podemos inferir que as respostas válidas (RV) prevaleceram como maioria nas produções observadas. Aqui cabe um adendo sobre as respostas parcialmente válidas (RPV) de algumas equipes, pois essas produções, quase sempre, revelaram problemas com a coerência no transcrever das ideias e não na falta de compreensão, ainda que parcial, da noção de proporcionalidade direta entre as quantidades envolvidas, haja vista que em alguns casos os alunos mencionaram os princípios desse conceito, a exemplo, podemos citar a equipe I, a qual apresentou respostas válidas nas duas situações precedentes, entretanto na situação em questão trouxe duas repostas (RPV), que indicaram a noção da relação proporcional entre as grandezas analisadas, porém a construção textual careceu de coerência no registro das ideias. Nesse mesmo pensar, esteve também equipe D, que apresentou em uma de suas produções uma resposta (RPV), devido à incoerência na escrita.

Quanto às repostas não válidas, cabe destacar apenas o trabalho da equipe F, que manteve o mesmo desempenho insatisfatório nas produções, como nas situações avaliadas anteriormente. Entretanto, podemos considerar que o desempenho da maioria das equipes foi satisfatório na situação 3.

A seguir, trazemos as produções das equipes com relação à situação 4, que trouxe um contexto onde as quantidades envolvidas nem sempre estavam relacionadas proporcionalmente; além disso, apresentamos também os pareceres dessas produções quanto a qualidade das mesmas.

Imagem 124 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe B

Situação 4/Quadro 1 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}



Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: Sim porque se eu multiplicar ou dividir a massa a energia também será multiplicado ou dividido pelo mesmo número

Resposta: “Sim porque se eu multiplicar ou dividir a massa a energia também será multiplicada ou dividida pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 125 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe B
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe B: S_{13}, S_{15}, S_{16}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?
Resposta: não porque a variação entre as grandezas não é igual

Resposta: "Não porque a variação entre as grandezas não é igual."

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?
Resposta: não porque a variação entre as grandezas não é igual

Resposta: "Não porque a variação entre as grandezas não é igual."
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 126 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe C
Situação 4/Quadro 1 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: sim, por que multiplicamos e dividimos a grandeza massa e a grandeza energia pelo mesmo número

Resposta: “Sim, porque multiplicamos e dividimos a grandeza massa e a grandeza energia pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 127 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe C
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: [illegible]
não porque a variação entre a velocidade e a energia não é igual

Resposta: “Não porque a variação entre a velocidade e a energia não é igual”

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

Resposta: não, porque a variação entre a massa x velocidade e energia não é igual

Resposta: “Não, porque a variação entre a massa x velocidade e energia não é igual.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 128 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe D

Situação 4/Quadro 1 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: São diretamente proporcionais. Porque se multipli car a massa a energia também será multipli cada pelo mesmo número.

Resposta: "São diretamente proporcionais, porque se multiplicar a massa a energia também será multiplicada pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 129 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe D
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe D: S_{18}, S_{22}, S_{27}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: não. Porque a energia ser multiplicada por um número e a velocidade não dar o mesmo.

Resposta: “Não, porque a energia ser multiplicada por um número e a velocidade não dar o mesmo.”

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

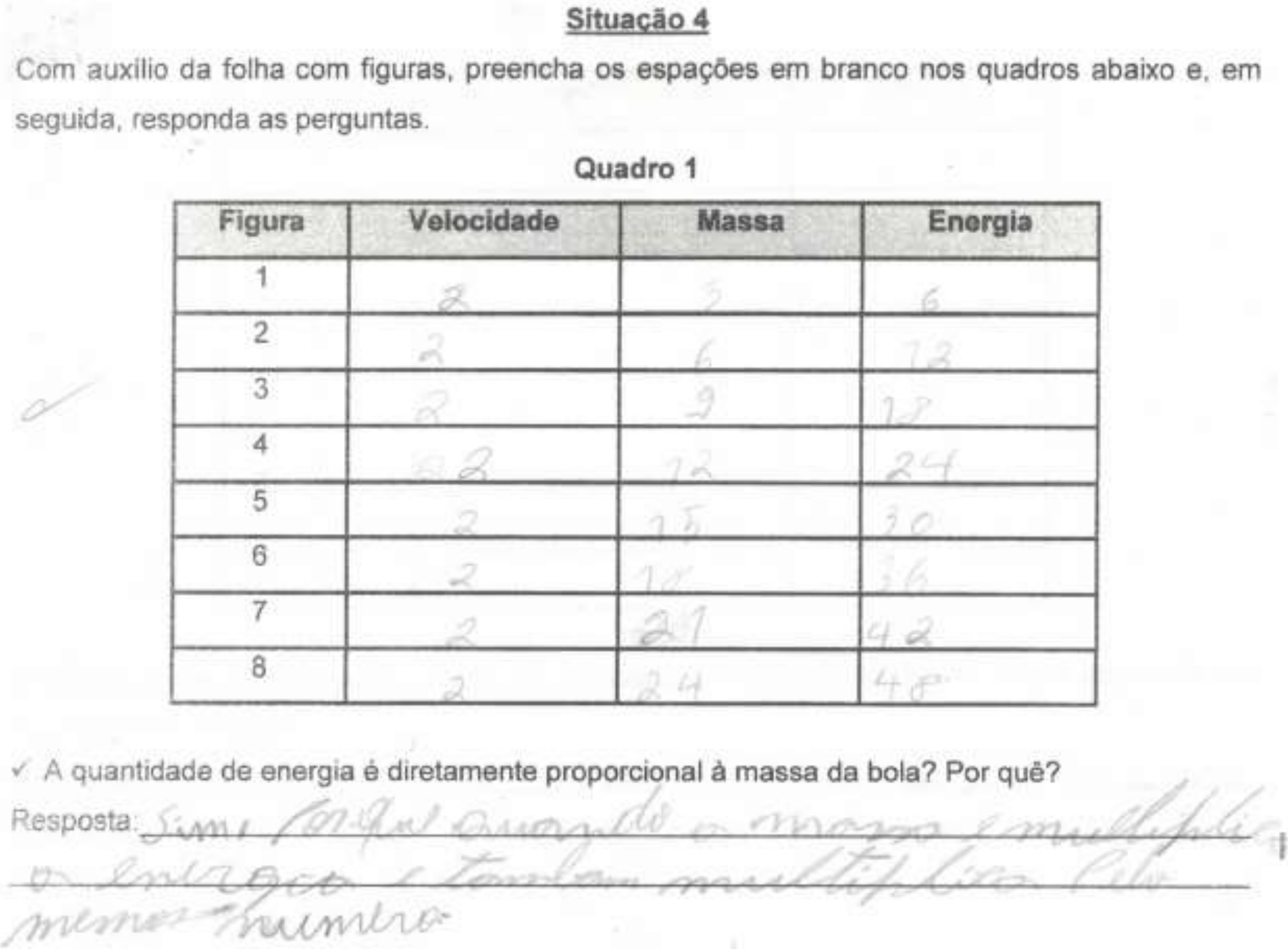
Resposta: não. Porque a massa x velocidade se multiplica por um número e a energia por outro.

Resposta: “Não, porque a massa x velocidade se multiplica por um número e a energia por outro.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 130 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe E

Situação 4/Quadro 1 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}



Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: Sim, porque quando a massa é multiplica a energia e tambem multiplica pelo mesmo numero

Resposta: “Sim, porque quando a massa é multiplicada a energia é também multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 131 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe E
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe E: S_3, S_7, S_{28}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: não/ Porque a variação entre a velocidade e o energia não e igual/

Resposta: “Não, porque a variação entre a velocidade e a energia não é igual.”

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	36	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

Resposta: não/ Porque a variação entre a massa x velocidade e a energia não e igual

Resposta: “Não, porque a variação entre a massa x velocidade e a energia não igual.”
Fonte: Experimento (2017)

Imagem 132 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe F

Situação 4/Quadro 1 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espações em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta:____

Resposta: “NÃO RESPONDEU.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 133 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe F
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe F: S_{10}, S_{11}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?
Resposta:____________________

Resposta: "NÃO RESPONDEU."

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

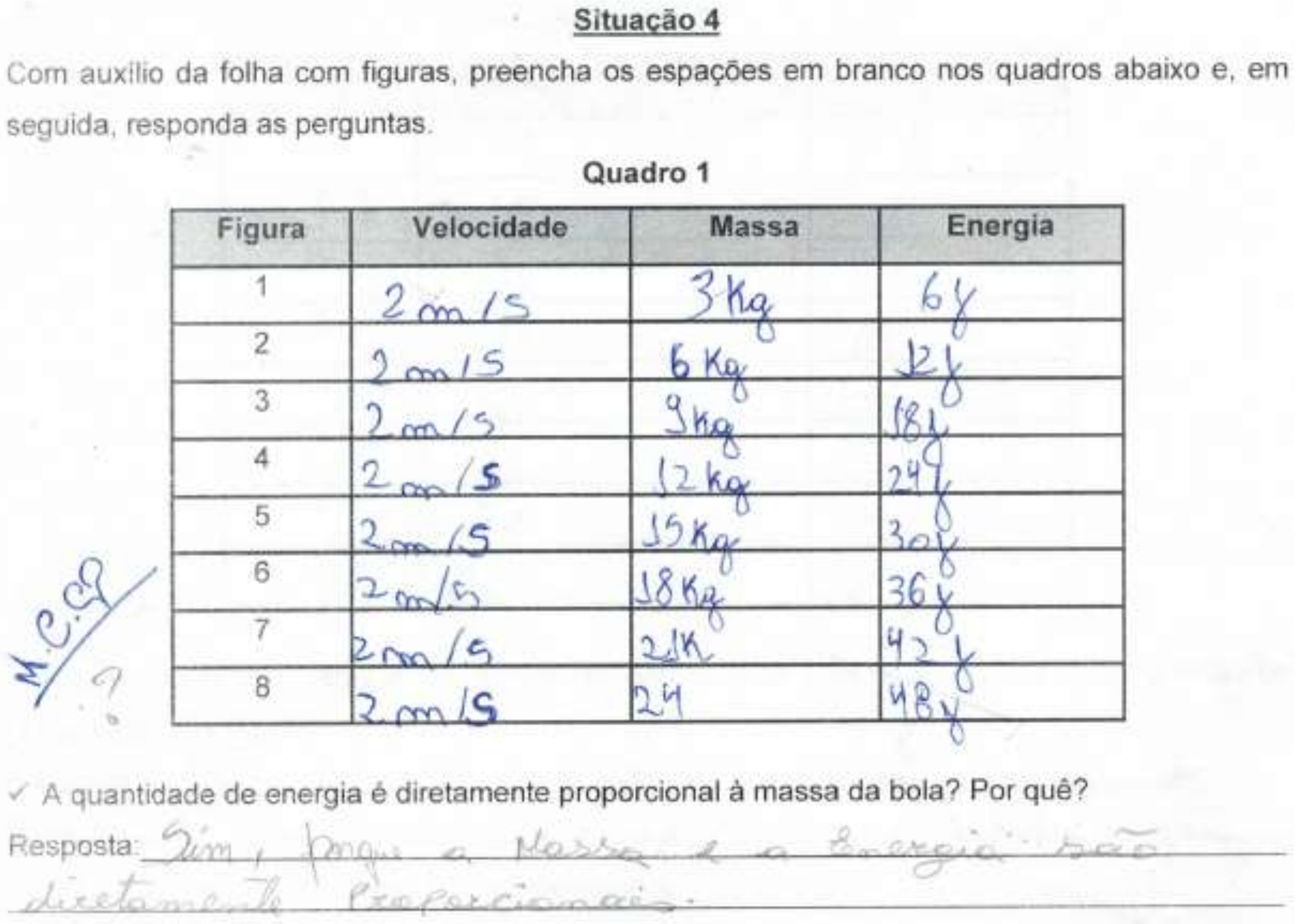
✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?
Resposta:____________________

Resposta: "NÃO RESPONDEU."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 134 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe G

Situação 4/Quadro 1 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}



Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2 m/s	3 Kg	6 J
2	2 m/s	6 Kg	12 J
3	2 m/s	9 kg	18 J
4	2 m/s	12 kg	24 J
5	2 m/s	15 Kg	30 J
6	2 m/s	18 Kg	36 J
7	2 m/s	21 K	42 J
8	2 m/s	24	48 J

M.C.Q ?

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: Sim, porque a Massa e a Energia são diretamente Proporcionais.

Resposta: “Sim, porque a massa e a energia são diretamente proporcionais.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 135 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe G
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: Não. As variações entre velocidade e energia não são diretamente proporcionais.

Resposta: “Não, as variações entre velocidade e energia não são diretamente proporcionais.”

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

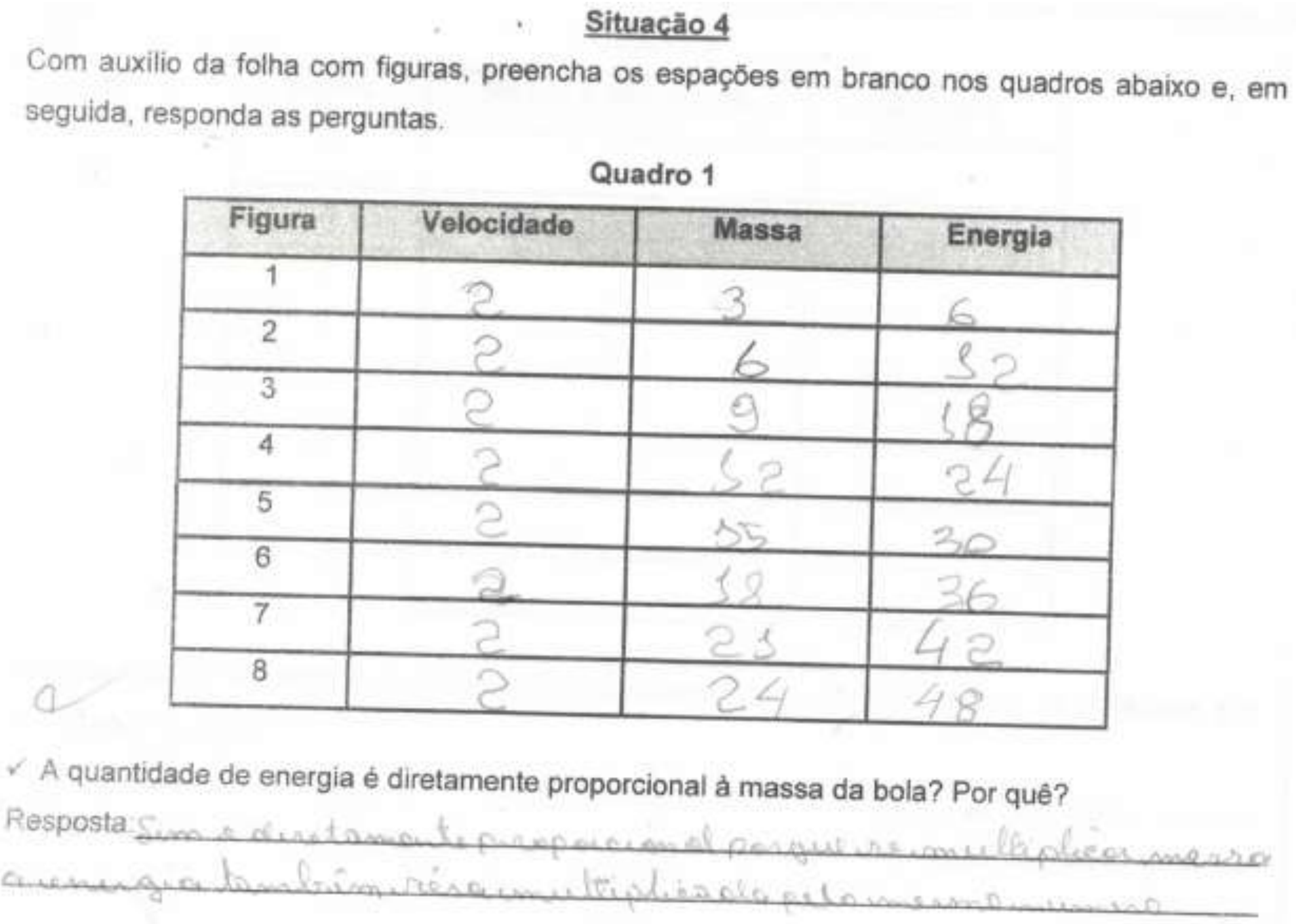
Resposta: Não, porque a quantidade de energia não é diretamente proporcionais com massa x velocidade, pois ao multiplicar a quantidade de energia ~~o~~ produto massa x velocidade

Resposta: “Não, porque a quantidade de energia não é diretamente proporcionais com a massa x velocidade, pois ao multiplicar a quantidade de energia o produto massa x velocidade.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 136 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe H

Situação 4/Quadro 1 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}



Situação 4

Com auxilio da folha com figuras, preencha os espações em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: Sim é diretamente proporcional porque se multiplicar a massa a energia também será multiplicado pelo mesmo número

Resposta: “Sim é diretamente proporcional porque se multiplicar a massa a energia também será multiplicada pelo mesmo número.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 137 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe H
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	2
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta: não porque a energia ser multiplicar por um número e a velocidade não ~~da o mesmo~~ não é multiplicado pelo mesmo número

Resposta: “Não porque a energia ser multiplicada por um número e a velocidade não é multiplicada pelo mesmo número.”

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

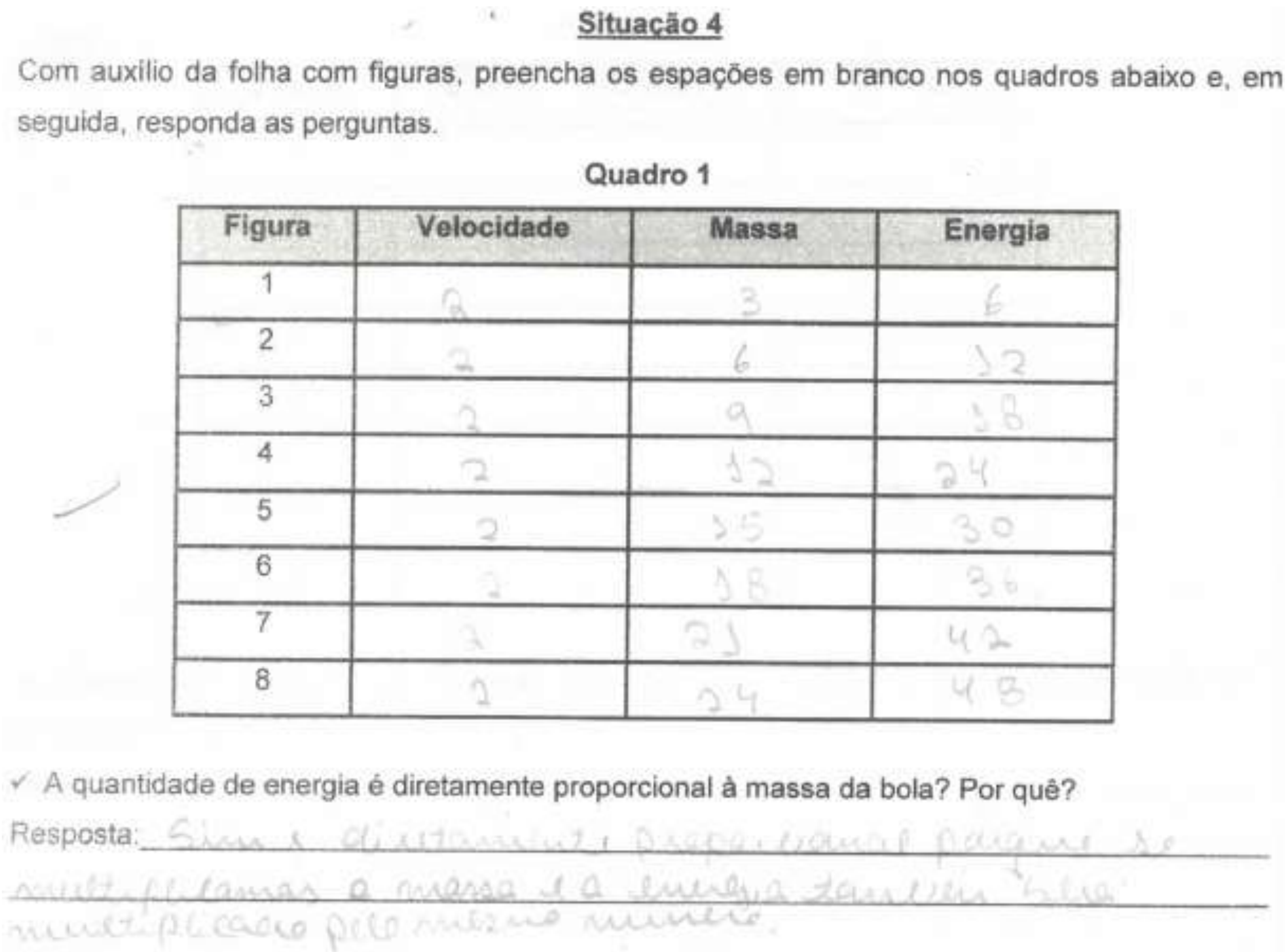
Resposta: não. porque se multiplicar massa x velocidade da um número a energia dá outro

Resposta: “Não, porque se multiplicar massa x velocidade da um número a energia dá outro.”

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 138 − Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe I

Situação 4/Quadro 1 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}



Situação 4

Com auxílio da folha com figuras, preencha os espaços em branco nos quadros abaixo e, em seguida, responda as perguntas.

Quadro 1

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	2	3	6
2	2	6	12
3	2	9	18
4	2	12	24
5	2	15	30
6	2	18	36
7	2	21	42
8	2	24	48

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional à massa da bola? Por quê?

Resposta: Sim é diretamente proporcional porque se multiplicamos a massa e a energia também será multiplicado pelo mesmo número.

Resposta: "Sim é diretamente proporcional porque se multiplicamos a massa e a energia também será multiplicada pelo mesmo número."

Fonte: Experimento (2017)

Imagem 139− Resolução da situação 4 da atividade 3 pela equipe I
Situação 4/Quadros 2 e 3 – Equipe I: S_2, S_5, S_{29}

Quadro 2

Figura	Velocidade	Massa	Energia
1	1	4	8
2	2	4	8
3	3	4	18
4	4	4	32
5	5	4	50
6	6	4	72
7	7	4	98
8	8	4	128

9

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao valor da velocidade da bola? Por quê?

Resposta:____

Resposta: NÃO RESPONDEU.

Quadro 3

Figura	Massa × Velocidade	Energia
1	2	1
2	8	8
3	18	27
4	32	64
5	50	125
6	72	216
7	98	343
8	128	512

✓ A quantidade de energia é diretamente proporcional ao produto da massa da bola pela sua velocidade? Por quê?

Resposta:____

Resposta: NÃO RESPONDEU

Fonte: Experimento (2017)

Com base nas produções dos alunos apresentadas acima por meio das imagens, julgamos essas produções conforme o esperado para a situação 4 da atividade 3, ou seja, avaliamos se as respostas das equipes identificaram as relações proporcional e não proporcional que ocorreram entre as grandezas envolvidas no contexto da referida situação. Assim, classificamos as respostas das equipes construídas nesta sessão e ensino como resposta válida (RV), resposta parcialmente válida (RPV) ou resposta não válida (RNV) e estão dispostas no quadro a seguir.

Quadro 40 − Qualidade das respostas na situação 4 por equipe

Equipe	**Situação 4**		
	Q1	**Q2**	**Q3**
A	-	-	-
B	RV	RV	RV
C	RV	RV	RV
D	RV	RPV	RV
E	RV	RV	RV
F	RNV	RNV	RNV
G	RPV	RV	RPV
H	RV	RV	RPV
I	RV	RNV	RNV

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Conforme as informações apresentadas no Quadro 40, tivemos novamente na situação 4 a quantidade de produções válidas sendo a maioria, 62%, seguida de 21% de respostas não válidas e 17% de respostas parcialmente válidas. Nesse cenário, podemos considerar que o aproveitamento das equipes foi satisfatório na situação 4 da terceira atividade, com exceção da F que manteve um desempenho insuficiente na atividade. Cabe ressaltar que a situação mencionada trouxe a relação não proporcional entre grandezas, desse modo, nos possibilitou avaliarmos o nível de compreensão dos alunos sobre o conceito de grandezas diretamente proporcionais, uma vez que esses alunos teriam que analisar, com base nos saberes construído anteriormente, se a relação entre duas grandezas era ou não proporcional, e as tomadas de posições dos discentes quanto a isso foram satisfatórias. Logo, podemos afirma que a maioria das equipes analisadas demostrou compreensão, ainda que superficial, sobre a relação proporcional direta entre três grandezas.

De posse das produções dos alunos nas quatro situações que compuseram a atividade 3, é relevante apresentarmos o desempenho global das equipes nessa atividade e, com isso, avaliarmos se tal desempenho foi ou não positivo para o experimento. Para tanto, apesentamos o quadro adiante que traz os pareceres sobre as produções das equipes em cada situação e os percentuais de validade dessas construções.

Quadro 41 – Qualidade das produções na atividade 3 por equipe

Equipe	Situação 1			Situação 2			Situação 3			Situação 4			Aproveitamento (%)		
	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	Q1	Q2	Q3	%RV	%RPV	%RNV
B	RV	RV	RV	RV	RPV	RPV	RV	RV	RV	RV	RV	RV	83%	17%	-
C	RV	RV	RV	RV	RV	RV	RNV	RV	RV	RV	RV	RV	92%	-	8%
D	RV	RV	RV	RPV	RV	RPV	RV	RV	RPV	RV	RPV	RV	67%	33%	-
E	RV	RV	RV	RV	RV	RPV	RV	RV	RV	RV	RV	RV	92%	8%	-
F	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	RNV	-	-	100%
G	RV	RV	RV	RV	RV	RV	RV	RNV	RNV	RPV	RV	RPV	67%	17%	16%
H	RV	RV	RPV	RV	RV	RV	RPV	RV	RPV	RV	RV	RPV	67%	33%	-
I	RV	RV	RV	RV	RV	RV	RPV	RV	RPV	RV	RNV	RNV	67%	17%	16%

Fonte: Experimento (2017)

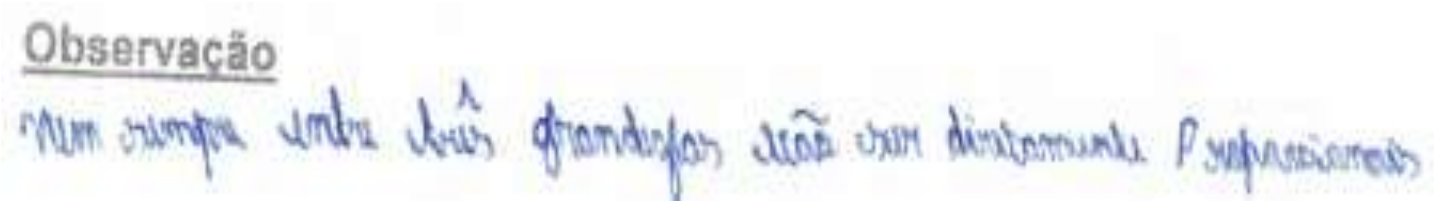
De posse das informações produzidas no quadro supracitado, podemos inferir que o desempenho das equipes na atividade 3 foi bom, pois o mesmo ficou acima dos 66% de aproveitamento, com exceção da equipe F que apresentou um desempenho insuficiente nesta atividade. Assim, pressupomos que o objetivo da atividade 3 que era levar o aluno a perceber por meio do experimento os princípios do conceito da proporcionalidade composta foi alcançado, pois as produções do alunos revelaram uma constatação de tais princípios ao afirmarem sobre a presença da relação proporcional direta entre três grandezas, bem como a variação conjunta entre as quantidades analisadas, e, por vezes, indicaram que certas relações não eram proporcionais.

A presente atividade trouxe inda ao final das quatro situações um quadro síntese, onde os alunos deveriam registrar a existência ou não da relação proporcional direta entre as grandezas em cada situação com base nas experiências vivenciadas durante a execução da atividade 3, e, por conseguinte, redigir uma observação e uma conclusão sobre os fatos percebidos durante a atividade.

Quanto aos registros dos alunos no quadro síntese citado no parágrafo anterior, observamos que a maioria das equipes preencheu corretamente o quadro, apenas as equipes F e I o deixaram em branco. Já com relação às produções escritas (observação e conclusão) somente três equipes redigiram conclusões e/ou observações sobre a proporcionalidade entre três grandezas, as quais são apresentadas a seguir juntamente com o parecer sobre a validade dessas produções.

Imagem 140 − Observação e conclusão da equipe C na atividade 3

Equipe C: S_{12}, S_{17}, S_{24}



Observação : “Nem sempre entre três grandezas vão ser diretamente proporcionais.”

Conclusão: “As conclusões entre a área do triângulo é diretamente.”

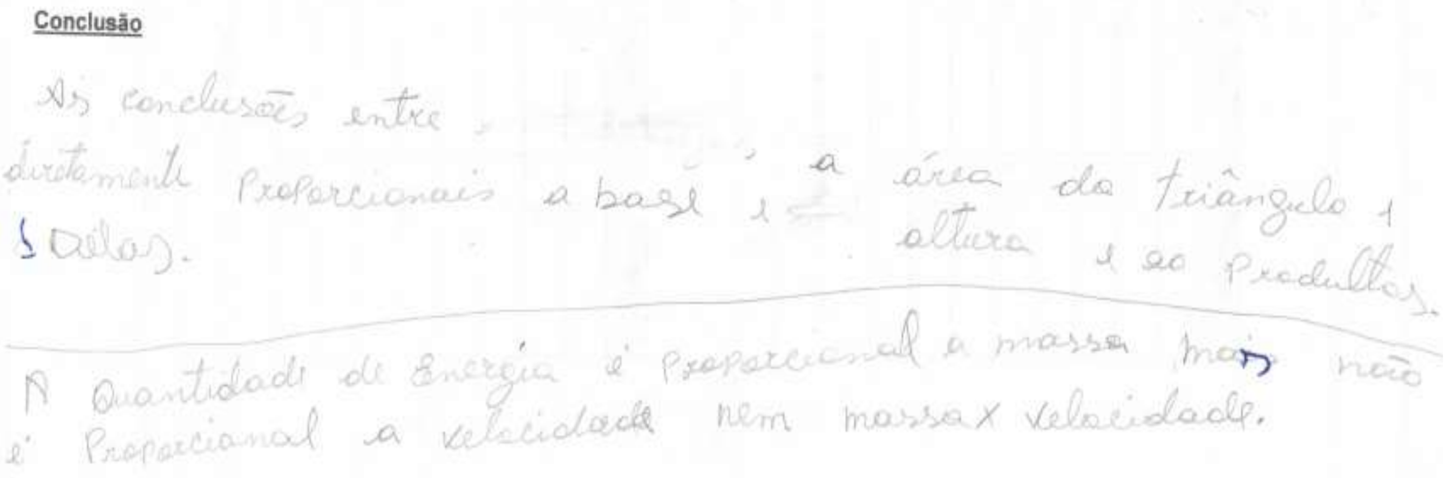
Fonte: Experimento (2017)

Com base na Imagem 140, observamos que os alunos S_{12}, S_{17}, S_{24} da equipe C constataram acertadamente na atividade 3 que nem sempre três grandezas vão se relacionar diretamente proporcional. Essa observação é sintomática de que os alunos da equipe C compreenderam quando ocorre ou não a relação proporcional direta entre três quantidades tomadas duas a duas. Com isso, podemos pressupor que a atividade 3 possibilitou aos alunos ampliarem seus conhecimentos sobre a relação proporcional direta, uma vez que eles vivenciaram tal saber num contexto envolvendo três grandezas ao invés de duas. No entanto, esses alunos não conseguiram elaborar uma conclusão válida que mencionasse os princípios da proporcionalidade composta, como era esperado para a atividade 3; talvez, porque a pouca prática de escrita e de analisar situações desse tipo, tenham contribuído para que eles não elaborassem uma conclusão correta. Mesmo assim, consideramos, com base na totalidade da atividade 3, que os alunos da equipe C tiveram um bom desempenho.

Adiante, trazemos as observações e conclusões das equipes G e H, respectivamente, na atividade 3.

Imagem 141 − Observação e conclusão da equipe G na atividade 3
Equipe G: S_4, S_9, S_{30}, S_{33}

Observação : “Nem sempre entre três grandezas vão ser diretamente proporcionais.”



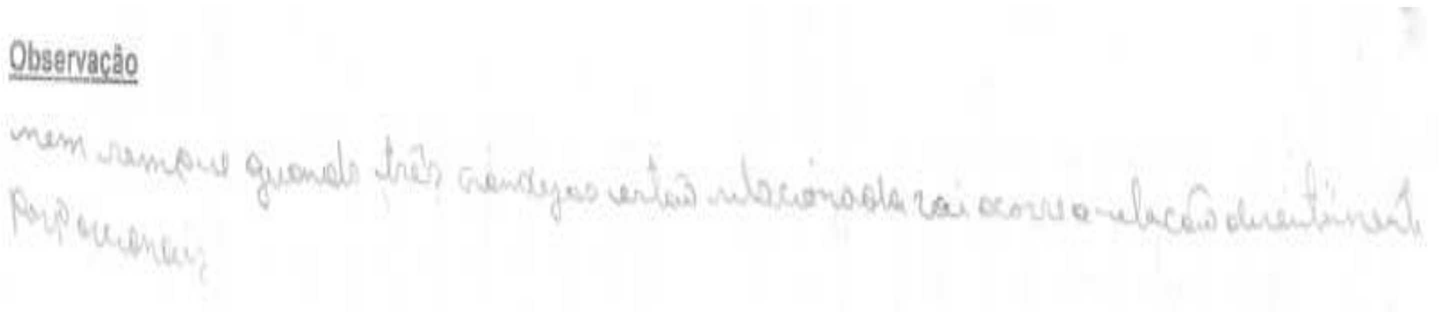
Conclusão: “As conclusões entre a área do triângulo é diretamente proporcionais a base e a altura e ao produto delas. A quantidade de energia é proporcional a massa mas não é proporcional a velocidade nem massa x velocidade.”

Fonte: Experimento (2017)

Com base na Imagem 141, podemos avaliar o desempenho dos alunos S_4, S_9, S_{30}, S_{33} da equipe G como satisfatório, pois apresentaram construções textuais dentro do esperado para atividade 3 tanto no que se refere a observação e a conclusão. Com relação a esta última, cabe ressaltar que os alunos constataram e relataram os princípios que norteiam a relação proporcional composta entre três grandezas vivenciados no experimento, ao afirmaram que a área do triângulo é diretamente proporcional as medidas de suas dimensões e também ao produto destas. Além do mais, os discentes da equipe G perceberam também que a relação proporcional direta nem sempre ocorria entre as quantidades da energia cinética. Desse modo, afirmaram que a energia é proporcional a massa, mas não é proporcional a velocidade e nem ao produto destas últimas. Essa constatação, reforça a ideia de que os alunos assimilaram a relação proporcional direta entre três grandezas tomadas duas a duas; desse modo, o objetivo da atividade 3 foi alcançado com os alunos da equipe G, ainda que de maneira parcial, pois previmos em nossa análise a priori para a atividade 3 que os discentes conseguiram elaborar observação e conclusão acerca da relação proporcional composta direta entre três grandezas. Devido a isso, consideramos a referida atividade como eficaz para o ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade composta.

Imagem 142 − Observação e conclusão da equipe H na atividade 3

Equipe H: S_1, S_{14}, S_{31}



Observação: “Nem sempre quando três grandezas estão relacionada vai ocorrer relação diretamente proporcionais.”

Conclusão: NÃO APRESENTOU

Fonte: Experimento (2017)

Conforme o observado na Imagem 142, os alunos S_1, S_{14}, S_{31} da equipe H conseguiram apenas construir observação válida para a atividade 3, por outro lado não elaboraram a conclusão, onde esperávamos que fossem mencionados os princípios do conceito da proporcionalidade composta. Ainda sim, avaliamos o desempenho da equipe H como bom pelo apresentado no geral na atividade 3, pois, de acordo com o Quadro 43, essa equipe produziu 67% de respostas válidas para as situações que compuseram a referida atividade.

Abaixo trazemos um quadro síntese com as equipes comentadas anteriormente a respeito da qualidade das produções elaboradas ao final da atividade 3, no que diz respeito a observação e conclusão.

Quadro 42 – Parecer sobre a observação e conclusão na atividade 3

Equipe	**Parecer**	
	Observação	**Conclusão**
C	Válida	Não válida
G	Válida	Válida
H	Válida	Não válida

Fonte: Experimento (2017)

Conforme as informações apresentadas no Quadro 42 sobre a observação e conclusão na atividade 3, podemos considerar que as equipes em destaque construíram observações válidas, pois defenderam a ideia de que nem sempre a relação entre três grandezas será proporcional. Por outro lado, apenas a equipe G redigiu uma conclusão válida, ao relatar que a relação proporcional direta ocorreu na situação 1, cujo contexto trazia a relação entre a área do triângulo e suas dimensões. A referida equipe relatou ainda acertadamente a não ocorrência da relação proporcional direta na situação 4 da atividade 3, ao afirmar que algumas das quantidades da energia cinética não estavam relacionadas proporcionalmente. Essas constatações dos alunos da equipe G indicaram que eles perceberam por meio do experimento os fundamentos do conceito da proporcionalidade composta, mesmo sem terem ainda a formalização desse conceito, que seria revelado a posteriori.

Apesar de a maioria das equipes não ter redigido observação e conclusão válidas a respeito desses fatos ocorridos na atividade 3, não deprecia o ensino e aprendizagem dessas equipes no experimento, haja vista que os alunos obtiveram, conforme o Quadro 41, um percentual acima de 66% de respostas válidas nas situações que compuseram a atividade 3. Assim, pressupomos que esta atividade oportunizou a construção de saberes tácitos sobre a relação proporcional composta entre três grandezas por meio dos contextos apresentados nas quatro situações. Além do mais, abriu precedentes para formalizarmos o conceito da proporcionalidade composta e apresentar a propriedade das grandezas compostas, descritos abaixo, e indiretamente revelar os princípios que norteiam o funcionamento da regra de três composta, sobretudo, o porquê do uso da multiplicação entre as razões das grandezas nessa regra.

> **Proporcionalidade Composta –** Uma grandeza composta é proporcional às grandezas das quais ela deriva quando é proporcional, separadamente, a cada uma delas, permanecendo constantes as demais.
> **Propriedade das grandezas compostas –** Se uma grandeza é proporcional a várias outras existe uma proporcionalidade entre a medida dessa grandeza e o produto dos valores correspondentes das medidas das outras. (MARCONDES, 1969, p. 306-307)

De posse dessas informações escritas no quadro, pedimos que os alunos tomassem nota e, em seguida, nos reportamos às experiências vivenciadas nesta atividade, com o intuito de solidificar o conceito revelado bem como a funcionalidade da propriedade coadunando as teorias com a prática dos alunos no experimento.

Após finalizado esse momento, demos por encerrada esta sessão de ensino, que utilizou os três horários disponíveis para a aula de matemática. Assim, nos retiramos da sala de aula às 09h45min, reforçando o nosso próximo encontro com os alunos, onde falaremos sobre a regra de três composta.

Aqui cabe uma última informação acerca das produções das equipes. Conforme o apresentado anteriormente, as produções da equipe A não foram mencionadas nesta sessão de ensino, haja vista que um dos alunos dessa equipe levou o material do experimento ao final da aula, o que nos impossibilitou de apresentar as produções desses alunos e os pareceres sobre suas respostas.

A seguir apresentamos a próxima sessão de ensino, onde serão mencionados os procedimentos de resolução da técnica da regra de três composta.

5.11. OITAVA SESSÃO DE ENSINO: apresentação da regra de três composta

No dia 21 de novembro de 2017, retornamos à escola com a intenção de aplicar a oitava sessão de ensino. Neste dia, chegamos àquela instituição de ensino às 07h35min. Então, nos dirigimos à sala da direção para comunicar nossa permanência na escola nos três primeiros horários na turma do 7° ano do ensino fundamental. Após essa comunicação, fomos para a sala de aula, e adentramos na mesma às 07h40min, cumprimentamos os alunos presentes, e, em seguida, organizamos o material do experimento (APÊNDICE E) para este dia, o qual foi distribuído às 07h45min, aos 26 discentes que estavam dispostos em fila na sala de aula. Esse material continha os procedimentos de resolução da regra, e as oito questões de proporcionalidade composta que seriam comentadas e resolvidas no decorrer da sessão.

Sobre os procedimentos da regra, buscamos construí-los de acordo com as ideias de Fragoso (1999) e Marcondes (1969), com adaptações conforme a proposta do nosso trabalho. Assim, montamos cinco procedimentos ordenados a serem seguidos na resolução da regra de três composta, conforme apresentados a seguir:

Procedimentos para a aplicação da regra de três composta
I) Montar o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores;
II) Analisar se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais em relação à grandeza que contém o termo desconhecido ‘x’;
III) Indicar a grandeza diretamente proporcional pela seta (ou flecha) $\underset{d}{\downarrow}$ e a grandeza inversamente proporcional pela seta (ou flecha) $\overset{i}{\uparrow}$ em relação à grandeza que contém o valor de ‘x’;
IV) Montar a proporção de acordo com a propriedade das grandezas compostas;
V) Determinar o valor de ‘x’.

Esses procedimentos são semelhantes aos listados na regra de três simples, com exceção dos itens III e IV que tratam, respectivamente, sobre o uso das setas para indicar a relação proporcional entre as grandezas e a proporção composta.

Quanto ao caminhar das resoluções nesta sessão de ensino, primeiramente começamos com a resolução de uma questão do material que apresentava somente grandezas diretamente proporcionais, que trouxe o seguinte enunciado:

Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

Depois de lida a questão, pedimos aos alunos que indicassem as grandezas presentes no enunciado do problema, e a maioria deles conseguiu apontar cada uma das grandezas. Com isso, aplicamos o primeiro procedimento de resolução regra, ou seja, montar o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores, conforme representado abaixo.

I)

Homens	Carrinhos	Dias
8	20	5
4	x	16

Com a construção do quadro das grandezas, passamos para o segundo procedimento, que era analisar as grandezas quanto à proporcionalidade, tendo como referência de análise à grandeza que contém o termo desconhecido x, neste caso, a grandeza quantidade de carrinhos. A análise proporcional foi feita considerando uma das grandezas constante, a grandeza dias, e, em seguida, variando conjuntamente as quantidades ‘homens e ‘carrinhos’. Depois perguntamos aos alunos que tipo de relação proporcional havia entre essas grandezas. Boa parte da turma respondeu acertadamente que eram grandezas diretamente proporcionais. Após essa resposta, colocamos uma seta para baixo com a letra ‘d’ ao lado da grandeza ‘homens’ para indicar a proporcionalidade dessa grandeza. Posteriormente, fizemos o mesmo procedimento de análise para a grandeza dias, considerando a outra grandeza, quantidade de homens, constante. Então, perguntamos de novo aos discentes que relação proporcional ocorria entre as grandezas mencionadas, e eles responderam que era diretamente proporcional. Com essa resposta acertada, escrevemos ao lado da grandeza dias a seta para baixo com a letra ‘d’ para indicar a proporcionalidade dessa grandeza. Desse modo, aplicamos o segundo e o terceiro procedimentos de resolução da regra, uma vez que fizemos à análise proporcional das grandezas e a indicação da mesma por meio das setas, como ilustrado a adiante:

II) e III)

$\downarrow d$	Homens	Carrinhos	Dias	$\downarrow d$
	8	20	5	
	4	x	16	

Depois de finalizados esses três procedimentos, partimos para os dois últimos, que era montar a proporção composta com as razões de cada uma das três grandezas do problema e encontrar o valor do termo desconhecido x. Assim, escrevemos no quadro da sala de aula a proporção composta e resolvemos essa proporção para encontrar o valor de x, conforme ilustrado abaixo:

IV) e V)

$$\frac{20}{x} = \frac{8}{4} \bullet \frac{5}{16} \quad \rightarrow \quad \frac{20}{x} = \frac{40}{64} \rightarrow 40x = 1280 \rightarrow x = 32 \text{ carrinhos.}$$

Com o fim da primeira resolução, pedimos que os alunos tomassem nota do apresentado, para isso demos um intervalo de tempo antes de começarmos a resolver outra questão do material, nesse ínterim, aproveitamos para justificar aos alunos o porquê do uso da multiplicação na regra de três composta, recorrendo à propriedade das grandezas compostas, conforme havíamos mencionada na sessão de ensino anterior, coadunada com as experiências vivenciadas por eles nas situações da atividade 3, que, naquela ocasião, detectaram que uma grandeza pode ser diretamente proporcional ao produto de outras duas grandezas. Sendo esse fato que legitima o uso da multiplicação na regra.

Após realizado os esclarecimentos pertinentes sobre uso da multiplicação na regra de três composta e os alunos terem finalizado as suas anotações, passamos para a próxima questão do material, cujas grandezas relacionadas eram inversamente proporcionais, mas antes de aplicarmos os cinco procedimentos de resolução da regra, achamos necessário fazer um adendo sobre o comportamento da razão nas grandezas inversamente proporcionais. Para tanto, apresentamos aos alunos no quadro branco a relação entre duas grandezas quaisquer, representadas por X e Y, com os seus respectivos valores, conforme a ilustração abaixo:

X	Y
3	120
6	60
9	40
12	30
15	24

Em seguida, pedimos aos alunos que determinassem a razão entre os valores 3 e 6 da grandeza X e 120 e 60 da grandeza Y. Depois de algum tempo, os alunos conseguiram perceber que as razões entre esses valores eram diferentes. Então, pedimos a eles que calculassem os produtos entre 3 e 120, 6 e 60. Novamente, os alunos responderam corretamente afirmando que resultados dos produtos eram iguais. Com isso, perguntamos: *As grandezas X e Y são direta ou inversamente proporcionais? Por quê?* Sem titubear os alunos responderam que eram inversamente proporcionais porque os produtos eram iguais. De posse dessa certeza, apresentamos para turma as razões:

$$\boxed{\frac{3}{6} \quad \frac{120}{60}; \quad \frac{9}{12} \quad \frac{40}{30}.}$$

E, em seguida, simplificamos ao máximo os pares de razões, com intuito de levar os alunos a perceberem que os mesmos possuíam elementos parecidos, só que em ordem trocada. Assim, apresentamos para a turma as razões:

$$\boxed{\frac{1}{2} \quad \frac{2}{1}; \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3}\ .}$$

Com as simplificações finalizadas, conforme mostradas acima, perguntamos novamente aos alunos: *O que deveríamos fazer para que os pares de razões de grandezas inversamente proporcionais ficassem iguais?* Os alunos pensaram um pouco e, em seguida, a maioria respondeu: *"É só **inverter** a ordem dos números, em uma delas (as razões) para ficarem iguais."*

De posse dessa constatação pelos alunos, afirmamos que esse fato sempre ocorre quando duas grandezas estão relacionadas inversamente proporcionais. Desse modo, grandezas dessa natureza podem ser escritas também como igualdade de razões, desde que uma delas seja invertida.

Com a realização desses esclarecimentos sobre as grandezas inversamente proporcionais e de posse da assimilação dos alunos sobre mais esse princípio da relação proporcional inversa, demos continuidade com a resolução de questões de regra de três composta, e escolhemos a seguinte questão do material:

Três faxineiros levam 8 dias para limpar um prédio, trabalhando 5 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 4 faxineiros, com o mesmo ritmo de trabalho dos anteriores, para limparem o prédio em 10 dias?

Depois de lida a questão, pedimos aos discentes que mostrassem as grandezas presentes no problema, como na primeira resolução. E a maioria turma conseguiu apontar cada uma das grandezas na questão. Com isso, aplicamos o primeiro procedimento de resolução regra, ou seja, montar o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores, conforme ilustrado abaixo.

I)

Faxineiros	**Horas**	**Dias**
3	5	8
4	x	10

De posse da construção do quadro das grandezas, seguimos para o segundo procedimento, que era analisar as grandezas quanto à proporcionalidade, tendo como referência de análise à grandeza que contém o termo desconhecido x, neste caso, a grandeza ‘horas’. A análise proporcional foi feita considerando uma das grandezas constante, a grandeza ‘dias’, e, em seguida, variamos a grandeza ‘horas’. Então, perguntamos aos alunos se a variação da quantidade de ‘faxineiros’ ocorria de forma conjunta ou contrária a essa grandeza. Nesse momento, alguns alunos mostraram incerteza em suas respostas, pois responderam que seria de maneira conjunta, porém outros alunos perceberam que as grandezas em análise variavam inversamente. Devido a presente dúvida quanto à relação proporcional, achamos necessário nesse momento intervir junto às respostas incorretas, apresentando outras variações nos valores das grandezas examinadas, para que aqueles discentes conseguissem perceber por meio da observação que a variação entre as quantidades era inversa. Depois, de alguns exemplos os alunos perceberam que as grandezas estavam relacionadas de maneira inversamente proporcional. Sanada a dúvida, escrevemos ao lado da grandeza ‘faxineiros’ uma seta para cima com a letra ‘i’, indicando que essa grandeza era inversamente proporcional. Posteriormente, demos continuidade à resolução da questão, fazendo à análise proporcional da outra grandeza, a quantidade de ‘dias’, seguindo o mesmo raciocínio anterior, ou seja, variamos a grandeza horas e perguntamos aos alunos se a outra grandeza variava conjuntamente ou de maneira contrária a grandeza que continha o termo ‘x’. As respostas, da maioria da turma, foram acertadas, pois consideraram que as grandezas em questão variavam de maneira contrária. Com isso, escrevemos novamente uma seta para cima com a letra ‘i’ ao lado da grandeza ‘dias’, indicando que esta era inversamente proporcional. A ilustração a seguir traz as representações da proporcionalidade entre as grandezas por meio das setas, conforme o comentado.

II) e III)

$i \uparrow$ Faxineiros	Horas	Dias $i \uparrow$
3	5	8
4	x	10

Com a finalização dos procedimentos II e III mencionados acima, partimos para os dois últimos desses procedimentos de resolução da regra de três composta, que eram montar a proporção composta utilizando as razões inversas das grandezas ‘faxineiros’ e ‘dias’ com a grandeza ‘horas’, e, a posteriori, a resolução dessa proporção para encontrar o valor de ‘x’ procurado, conforme mostrado a seguir:

IV) e V)

$$\frac{5}{x} = \frac{4}{3} \bullet \frac{10}{8} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{40}{24} \rightarrow 40x = 120 \rightarrow x = 3 \text{ horas.}$$

De posse do valor de ‘x’ como solução do problema mencionado no início, construímos uma resposta juntamente com a turma ao questionamento levantado nesse problema. Após isso, demos por encerrada a resolução da segunda questão de regra de três composta com grandezas inversamente proporcionais. Em seguida, os alunos tomaram nota do que foi apresentado para um estudo posterior sobre o assunto.

O próximo passo desta sessão de ensino tratou da resolução de uma terceira questão do material, cujo contexto trazia a relação entre grandezas direta e inversamente proporcionais, conforme o enunciado a seguir:

Considere que 2 cães farejadores consigam cobrir uma área de 15 m^2 em 10 minutos. Quanto tempo seria necessário para que 3 cães cobrissem uma área de 27 m^2?

Como de praxe, fizemos a leitura da questão para a turma e depois pedimos aos alunos que identificassem as grandezas desse problema. Os discentes apontaram as grandezas com facilidade, provavelmente porque já haviam adquirido habilidade em localizar as grandezas, aprimorada nas resoluções anteriores. Após isso, construímos o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores; concluindo, assim, o primeiro procedimento de resolução da regra, ilustrado abaixo:

I)

Cães	Tempo (minuto)	Área
2	10	15
3	x	27

Com a escrita do quadro supracitado, partimos para análise das quantidades quanto à proporcionalidade, desse modo, tomamos como referência a grandeza tempo, para verificar a proporcionalidade da grandeza quantidade de ‘cães’, considerando a grandeza ‘área’ constante. Então, perguntamos aos alunos se as duas grandezas em questão variavam conjuntamente ou de forma contrária, ou seja, se dobrarmos o tempo o número de cães dobra também ou reduz pela metade. Nesse instante, alguns alunos responderam que dobrava, mas a maioria da turma respondeu que iria reduzir. Quanto aos alunos que demonstram dúvida em suas respostas, fizemos novamente a pergunta com outra abordagem, de modo a facilitar a compreensão desses alunos sobre a relação inversa existente nas grandezas ‘tempo’ e ‘cães’. Depois dessas intervenções pontuais, e com a certeza de que a dúvida dos alunos foi sanada naquela situação, escrevemos ao lado da grandeza ‘cães’ a seta para cima com a letra ‘i’, para indicar que essa quantidade era inversamente proporcional. Em seguida, passamos para análise da grandeza ‘área’, mantendo a primeira grandeza analisada constante. Então, perguntamos aos alunos se ao variar a grandeza tempo para mais a ‘área’ também variava para mais ou para menos. Os alunos responderam corretamente que era para mais; com isso, pressupomos que eles haviam compreendido que com um tempo maior a área a ser coberta pelos cães também seria maior. De posse dessa resposta da turma, escrevemos ao lado da grandeza ‘área’ a seta para abaixo com a letra ‘d’, indicando que essa grandeza era diretamente proporcional. Com isso, finalizamos os procedimentos de resolução II e III da regra de três composta.

II) e III)

Cães	Tempo (minuto)	Área
2	10	15
3	x	27

Depois concluída a etapa acima, partimos para a execução dos dois últimos procedimentos, IV e V, de resolução da regra de três composta, isto é, montamos a proporção composta com as razões das grandezas do problema e, em seguida, resolvemos essa proporção para encontrar o valor de ‘x’, conforme ilustrado a seguir.

IV) e V)

$$\frac{10}{x} = \frac{3}{2} \bullet \frac{15}{27} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{45}{54} \rightarrow 45x = 540 \rightarrow x = 12 \text{ minutos.}$$

Com a conclusão dessa última etapa e com a construção de uma resposta para questão analisada, demos por encerrada à terceira resolução da regra de três composta com grandezas direta e inversamente proporcionais. Então, sugerimos que os alunos anotassem o que foi apresentado para estudos posteriores.

Depois que alunos já haviam terminado de copiar a resolução da terceira questão de regra de três composta, pedimos a esses alunos que tentassem resolver as cinco questões restantes, com base no que havia sido mostrado. Os alunos aceitaram a tarefa, e utilizaram o tempo restante da aula para resolver as questões propostas.

Sobre a execução da tarefa, percebemos que alguns alunos não se empenharam em realizá-la, e preferiram permanecer em sala sem participar da aula esperando o término da mesma. Entretanto, a maioria apresentou interesse em participar, e buscou resolver as questões do material mesmo com uma provável insegurança em enfrentar a situação nova.

Ao observamos essas atitudes, passamos a intervir junto ao trabalho dos alunos com o propósito de minimizar as dificuldades no fazer matemático da regra, e sondar quais os entraves na tarefa apontados por eles. Então, detectamos que os discentes estavam com dúvidas em relação à quantidade de grandezas envolvidas no contexto da questão, pois, algumas vezes, indicavam apenas duas grandezas na situação ao invés de três, um resquício do aprendizado ocorrido na regra de três simples. Cabe ressaltar, que tal fato não foi presenciado durante a resolução das questões durante a apresentação da regra de três composta, pois a maioria dos alunos mostrou certa confiança em indicar as grandezas envolvidas na questão. Agora, talvez, por estar assumindo uma postura autônoma na toma de decisão, isso tenha contribuído para desencadear certa insegurança em sua observação, mas consideramos isso como uma dificuldade pontual e dentro da normalidade para o estágio inicial da sessão de ensino, até mesmo porque os alunos se depararam com uma situação diferente, da qual estavam acostumados na regra de três simples. E isso acarretou uma exigência cognitiva maior do aluno, pois ele precisará perceber mais de duas grandezas na questão, e também realizar mais de uma análise sobre a proporcionalidade. Ou seja, na regra de três composta a exigência cognitiva do aluno é maior do que na regra de três simples. No entanto, acreditamos que com as intervenções pedagógicas adequadas, e a resolução de mais questões para que assimilem a regra, presumimos que os alunos tendem a superar essas dificuldades e obterem um bom desempenho na regra de três composta, já que os discentes demonstraram compreensão dos conceitos de proporcionalidade direta e inversa nas atividades anteriores.

Com base nessas constatações, resolvemos mais duas questões do material no quadro do mesmo modo como o mostrado anteriormente e deixamos as demais para o próximo encontro juntamente com outro material de regra de três composta, pois o horário da aula já havia encerrado. Assim, demos por terminada a presente sessão de ensino às 09h45min.

5.12. NONA SESSÃO DE ENSINO: aplicação da regra de três composta

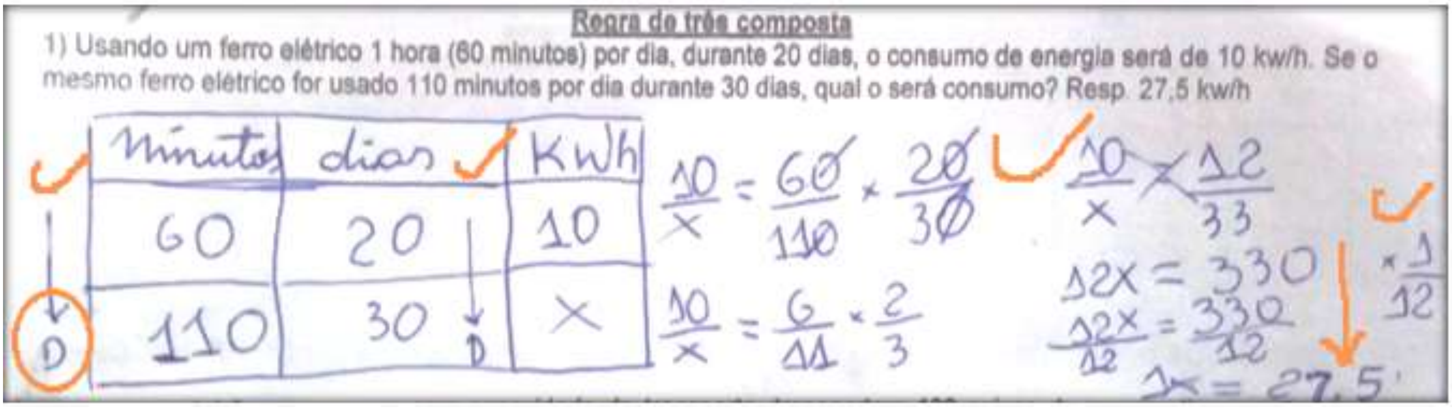
No dia 23 de novembro de 2017, retornamos à escola para darmos continuidade no ensino da regra de três composta. Neste dia chegamos nessa instituição de ensino às 07h35min. Então, comunicamos na sala da direção a nossa permanência na turma do 7º ano nos três primeiros horários, como de praxe. Em seguida, nos dirigimos para a sala de aula, e adentramos na mesma às 07h40min. Cumprimentamos os poucos alunos presentes, e resolvemos aguardar os demais discentes para iniciarmos o experimento neste dia. O tempo de tolerância dado foi de cinco minutos apenas. Durante esse intervalo de tempo chegaram outros alunos, com isso foi possível começarmos o trabalho neste dia com 27 alunos presentes que estavam dispostos em fileiras, pedindo que retomassem o material da aula passada sobre a regra de três composta. Depois que alunos já estavam com o material em mãos, nos dirigimos ao quadro da sala de aula e escrevemos os cinco procedimentos de resolução da regra, e, em seguida, escolhemos uma das três questões restantes do material da sessão de ensino anterior para começarmos a falar novamente da regra de três composta; e isso serviu como um apanhado do que havia sido apresentado sobre a regra. Dessa forma, buscamos enfatizar os procedimentos na resolução com o propósito de minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos quanto à determinação das grandezas, análise da proporcionalidade e o valor do termo desconhecido.

Com a sessão em andamento, em que o professor pesquisador apresentava e comentava sobre mais uma questão de regra de três composta, percebemos que um grupo de alunos não prestava atenção ao que estava sendo comentado, e essa indisciplina comprometia a compreensão dos outros alunos, por isso tivemos que parar com o nosso trabalho, e intervir juntos aqueles alunos que, de certa forma, atrapalhavam o andamento da sessão. Inclusive, o professor da turma, que estava em sala de aula, também interveio, e solicitou que os alunos prestassem a atenção na aula, pois o comportamento deles também estava sendo avaliado, e que o desempenho deles no teste serviria como a nota do bimestre para a disciplina, finalizou o docente. Após essas medidas disciplinares, retomamos a realização da tarefa planejada.

Ao final da resolução das questões da aula passada, percebemos que muitos dos alunos que apresentaram dúvidas, estavam mais confiantes em relação à regra de três compostas, após explicações e intervenções realizadas nesse primeiro momento do experimento. Diante dessa constatação e motivados em continuar o experimento, entregamos a cada aluno outro material com questões sobre a regra de três composta (APÊNDICE F), e, imediatamente, solicitamos aos alunos que tentassem resolver essas outras questões, para avaliarmos o nível de compreensão e o desempenho deles com relação ao que foi apresentado acerca da regra. Para tanto, os discentes tiveram um intervalo de tempo para realizarem o proposto.

Os resultados mostraram que a maioria da turma conseguiu assimilar os procedimentos da regra depois da aula de reforço, o que auxiliou os alunos na determinação das grandezas e na análise proporcional com três grandezas. A seguir apresentamos a resolução do aluno S_6 de uma questão de regra de três composta.

Imagem 143 − Resolução da regra de três composta
Resolução da regra de três composta pelo aluno S_6



Regra de três composta

1) Usando um ferro elétrico 1 hora (60 minutos) por dia, durante 20 dias, o consumo de energia será de 10 kw/h. Se o mesmo ferro elétrico for usado 110 minutos por dia durante 30 dias, qual o será consumo? Resp. 27,5 kw/h

Minutos	dias	KWh
60	20	10
110	30	x

$\frac{10}{x} = \frac{60}{110} \cdot \frac{20}{30}$

$\frac{10}{x} = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{10}{x} \times \frac{12}{33}$

$12x = 330$

$\frac{12x}{12} = \frac{330}{12}$

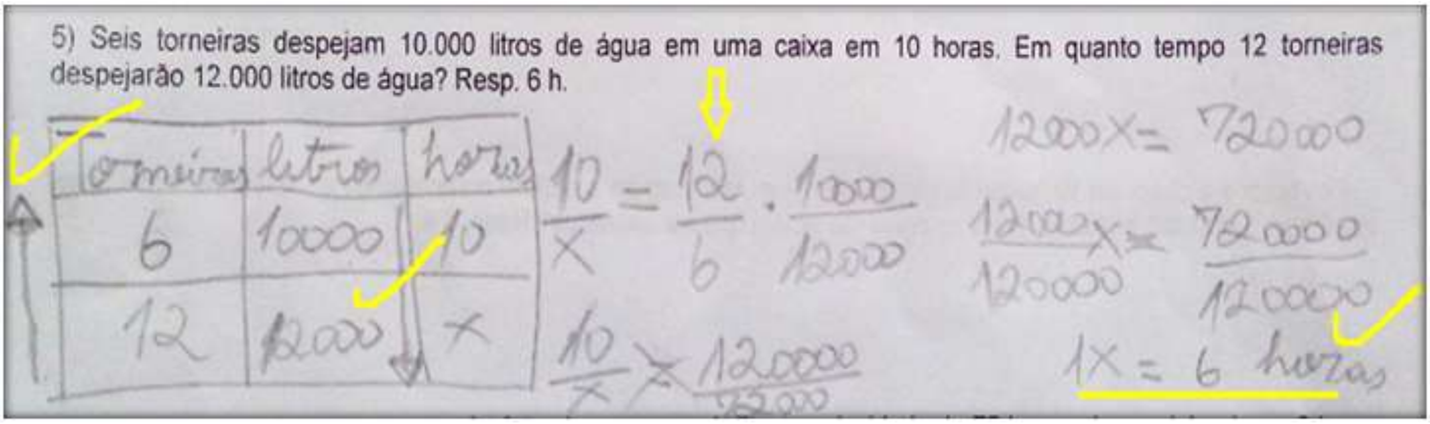
$x = 27.5$

Fonte: Experimento (2017)

As construções desse aluno demostraram que ele aplicou os procedimentos de resolução da regra de três composta de maneira correta e conseguiu obter a solução esperada para a questão. Logo, avaliamos como satisfatório de desempenho desse aluno na resolução da regra de três composta.

Outro aluno, S_{31}, também mostrou êxito em sua resposta, e seguiu corretamente os procedimentos de resolução da regra para o contexto apresentado, onde estavam relacionadas grandezas direta e inversamente proporcionais, inclusive representou corretamente a relação proporcional por meio das setas invertidas, o que caracterizou uma compreensão dos procedimentos de resolução II e III da regra, como é mostrado na imagem a seguir.

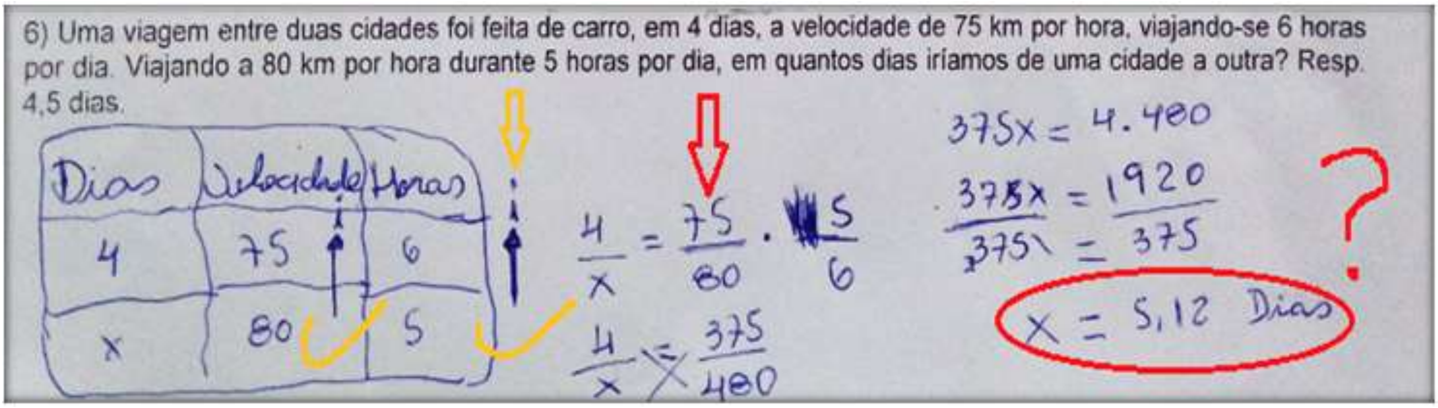
Imagem 144 − Resolução da regra de três composta
Resolução da regra de três composta pelo aluno S_{31}



Fonte: Experimento (2017)

Também encontramos respostas que continham erros que indicaram pouca competência com as operações matemáticas ou por falta de atenção no momento de montar a proporção composta. Sobre este último caso, mostramos a resolução adiante da aluna S_{26}.

Imagem 145 − Resolução da regra de três composta
Resolução da regra de três composta da aluna S_{26}



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A resolução supracitada deixou claro que a aluna S_{26} aplicou corretamente os procedimentos I, II e III de resolução da regra, entretanto, cometeu um equívoco no IV, pois não montou a proporção composta corretamente, uma vez que a razão da grandeza velocidade não foi invertida, o que foi crucial para comprometer o resultado final. Apesar dessa provável desatenção da aluna com relação à grandeza inversamente proporcional, presumimos que ela compreendeu a aplicação da regra de três composta, porque aplicou corretamente quase todos os procedimentos de resolução da regra. Embora não tenha feito a inversão da razão na proporção composta, mesmo assim consideramos bom o seu desempenho ao tentar resolver a questão posta.

Com os avanços apresentados pelos alunos sobre o estudo da regra de três composta, avaliamos esta sessão de ensino como positiva e atendeu as nossas expectativas com relação ao ensino do conteúdo, ainda que alguns alunos não participaram de forma efetiva da aula, pois permaneceram a maior parte do tempo da sessão em conversas paralelas, sem esboçarem interesse em resolver as questões do material. Entretanto, a maioria dos alunos conseguiu resolver as seis questões propostas sobre a regra, mostrando autonomia e segurança no trabalho matemático, já que poucas vezes precisaram de nossas intervenções.

Assim, acreditamos que a intenção desta sessão de ensino foi alcançada, pois minimizou, pressupomos, as dificuldades dos alunos apresentadas de início a respeito da regra de três composta, haja vista que os discentes se mostraram confiantes nas tomadas de posição sobre a relação proporcional entre as grandezas bem como nas respostas produzidas.

O encerramento desta sessão ocorreu às 09h45min com o final do terceiro tempo de aula. Então, nos despedimos dos alunos e nos retiramos de sala de aula.

A seguir apresentamos a penúltima sessão de ensino, em que fizemos um apanhado sobre a regra de três simples e composta, e serviu como revisão de estudo desse conteúdo.

5.13. DÉCIMA SESSÃO DE ENSINO: revisão de estudo da regra de três simples e composta.

No dia 28 de novembro de 2017, fizemos uma revisão de estudo sobre a regra de três simples e composta (APÊNDICE G), estavam presentes 30 alunos nesta sessão de ensino, que começou às 7h50min. Na ocasião, pedimos que os alunos se assentassem nas cadeiras organizadas em filas, como de praxe, para que o material fosse distribuído a todos e, assim, déssemos início a aula.

Nesta fase em que os alunos já apresentavam algum conhecimento da regra de três simples e composta, pedimos a eles que resolvessem as sete questões propostas, e para isso teriam um tempo de 30 minutos, e, em seguida, faríamos os comentários e as correções das questões no quadro branco. Assim, a tarefa teve início às 8h.

Aqui cabe relatar que alguns alunos pediram para relembrar a regra de três simples, então com intervenções simples e particulares, fizemos com que esses alunos recordassem a regra para duas grandezas, com isso eles puderam continuar a tarefa sozinhos. Também, percebemos que os alunos indisciplinados sentiram dificuldade em resolver as questões do material, pois, como dito antes, eles permaneceram a maior parte do tempo das sessões de ensino sem prestar a atenção devida ao conteúdo ensinado, por isso esses alunos não conseguiam avançar na tarefa. De posse dessas constatações, fizemos algumas orientações de como proceder na resolução das questões, com o intuito de minorar o déficit acumulado por eles em relação ao conhecimento da regra de três. Mesmo assim, percebemos que alguns desses alunos indisciplinados não tinham condições de acompanhar a maioria da turma a respeito do conhecimento construído ao longo das nove sessões de ensino.

A respeito desse conhecimento construído pelos alunos, nesta sessão observamos comportamentos e falas que demonstravam a aquisição do saber sobre grandezas proporcionais e também sobre a regra, pois presenciamos várias cenas em que os alunos discutiam sobre a relação proporcional entre as grandezas envolvidas na situação e também sobre a técnica mais adequada a ser utilizada para a questão em discussão. Aqui cabe destacar uma dessas discussões entre dois alunos na sala, eram mais ou menos assim:

"*As grandezas aumentam ao mesmo tempo e na mesma quantidade, então elas são diretamente proporcionais."*

"[...] s*ó tem apenas duas grandezas, devemos usar a rega de três simples e não a regra de três composta."*

Em outro momento, escutei o relato de um aluno que se dirigiu a mim, e apresentou argumentos sobre a resolução que estava fazendo, ele disse na ocasião:

S*: "Professor, as grandezas são essa três, certo?"*

P: *"Sim."*

S: *"Elas são diretamente proporcionais, porque quando eu aumento essa que tem 'x' à outra também aumenta, e se eu diminuo a outra também diminui. A mesma coisa acontece com a outra grandeza. Aminha resposta foi esta, ela está correta?"*

P: *“Sim, você acertou a questão.”*

Comentários como os que acabamos de mencionar foram vivenciados por nós durante todo o tempo de realização da tarefa pela maioria da turma. No entanto, um comentário, em particular, me chamou a atenção e foi do próprio professor da turma em relação ao aluno S_{28}, o professor disse:

“Professor (professor pesquisador), estou impressionado com a participação do aluno (...), ele não fazia nada nas aulas de matemática, não copiava, não trazia caderno, só queria saber de ficar conversando nas minhas aulas. Agora, ele está participativo e interessado nas atividades de matemática, é muito bom vê-lo assim.”

O nosso pensar sobre esse comentário, é, em primeiro lugar, acreditar que o trabalho fomentado funcionou e produziu frutos positivos para o ensino de matemática, sobretudo, para os alunos que não se interessavam pelas aulas da disciplina, talvez, por serem pouco atrativas e enfadonhas, e viram na proposta apresentada um ensino de matemática ao alcance de todos. E, em segundo lugar, esse comentário sinaliza que a utilização de sequências didáticas, diferentes da tradicional, pode contribuir de modo significativo para o ensino e aprendizado de matemática. Por fim, em terceiro lugar, mas não menos importante, ficou o nosso entusiasmo, em ouvir de um profissional da educação que a proposta apresentada para o ensino das regras de três trouxe uma oportunidade de mostrar esse ensino por outro prisma, que viabilizou o aprendizado e, consequentemente, a participação efetiva dos alunos nas aulas de matemática.

Sobre a tarefa mencionada no inicio da sessão de ensino, ao final do tempo concedido para realização da mesma, nos dirigimos ao quadro branco para resolver as questões do material com os alunos. No decorrer do processo, quando indagávamos sobre quais as grandezas envolvidas na situação, os alunos respondiam corretamente quase como coro e também sobre a relação proporcional. Essa constatação também ocorreu com a regra de três composta, com isso foram poucos os alunos que demonstraram dúvidas, com exceção dos indisciplinados, quanto à relação proporcional entre três grandezas. Assim, concluímos mais esta sessão de ensino com uma avalição positiva do que foi planejado para o ensino de regra de três. E às 09h40min, demos por encerrado o nosso trabalho, e nos retiramos de sala de aula.

Quanto a participação dos alunos nas aulas de matemática e sobre o desempenho deles na resolução de questões de regras de três nas sessões de ensino, podemos afirmar que a participação nas aulas foi satisfatória, haja vista que a maioria dos discentes se mostrou participativa e interessada em realizar as atividades com matemática durante as aulas, além do mais, presenciamos trocas de saberes por meio de discussões entre os alunos que demostraram certa autonomia e confiança a respeito do saber matemático envolvido, neste caso as regras de três. Essa troca de saberes entre pares de alunos por meio da interação revelou que a aula de matemática se mostrou interessante, dinâmica e atrativa para esses alunos, diferentemente como ocorre no modelo tradicional de ensino, onde o aluno ocupa uma posição passiva no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos. Já a respeito do desempenho desses alunos na resolução de questões de regras de três, podemos pressupor que eles conseguiram assimilar a técnica de resolução dessas regras, porque mostraram confiança, compreensão e habilidade no enfrentamento das questões, o que resultou num desempenho positivo. Desse modo, acreditamos que as nove sessões de ensino fomentadas para o ensino das regras de três foram positivas e contribuíram positivamente para tornar as aulas de matemática atrativa, e, assim, despertaram o interesse dos alunos em aprender o conteúdo regra de três de maneira participativa.

Aproxima e última sessão trata da realização do pós-teste pelos alunos, como a culminância do trabalho desenvolvido ao longo dessas nove sessões de ensino.

5.14. DÉCIMA PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO: aplicação do pós-teste

O nosso retorno à escola aconteceu no dia 05 de dezembro de 2017, para realizarmos a última sessão de ensino da nossa sequência didática, que foi a aplicação do pós-teste para um grupo de 29 alunos presentes.

Ao chegarmos à sala de aula neste dia, às 07h35min, boa parte dos alunos já estava nos aguardando para realizar a avaliação. Como ainda faltavam alguns alunos, decidimos esperar por 10 minutos a chegada dos outros discentes. Nesse ínterim, aproveitamos para arrumar a sala de aula em filas organizadas, de modo a não facilitar a troca de ideias no momento da prova. Terminado o tempo de tolerância, decidimos começar a distribuição das folhas do pós-teste aos alunos presentes, às 07h45min, após todos terem recebido, fizemos as recomendações de praxe para a realização do teste, isto é, afirmamos que a avalição era individual, os alunos não poderiam trocar ideias entre si sobre as questões, eles não poderiam consultar material algum, o teste poderia ser feito a lápis ou caneta (de cor preta ou azul) e também poderiam usar a calculadora. Finalizados esses informes, pedimos aos alunos que começassem a resolver as questões, dessa forma o pós-teste começou de fato às 07h55min.

Depois de começado o teste, alguns alunos chegaram para fazer à prova, então entregamos a eles a folha de questões e pedimos que se assentassem para fazer a prova.

O desenrolar do pós-teste ocorreu dentro do esperado e sem nenhum acontecimento que viesse atrapalhar o andamento do mesmo. Os alunos se mostraram comprometidos com a resolução das questões, e depois de uma hora e trinta minutos, os alunos passaram a entregar a folha de questões, porém os alunos que apresentaram dificuldade com o conteúdo demoraram um pouco mais na tentativa de resolver a prova. Assim, o pós-teste terminou no final do terceiro horário, às 9h45min.

Com o fim da aplicação, gradeci a todos os alunos presentes pela colaboração em nosso trabalho de pesquisa. Também agradeci ao professor da turma, pela boa vontade de ceder seus horários de aula e por confiar o aprendizado dos seus alunos a nossa proposta de ensino.

Ainda em sala de aula, fomos abordados por um grupo de alunos, que indagaram se no ano seguinte (9º ano) nós trabalharíamos novamente com eles por meio de atividades nas aulas de matemática, então respondi: provavelmente não, pois a minha pesquisa era com alunos do 7° ano do ensino fundamental e só aconteceria essa vez. Com essa resposta, os alunos se mostraram um pouco decepcionados, e responderam:

“Poxa, professor! Foram tão legais as aulas de matemática, gostaria de estudar assim no 9° ano.”

“Venha dá aula pra nós, professor, ano que vem...”

Essas respostas nos motivam a continuar engajado como professor e futuro pesquisador, e, de alguma forma, contribuir com as pesquisas na área de educação matemática, que viabilizem o ensino e aprendizado da disciplina matemática na educação básica, disciplina esta tão importante para a formação pessoal e/ou profissional do aluno.

Por fim, nos despedimos da turma e do professor, e nos dirigimos à direção da escola, onde fomos agradecer a oportunidade concedida para implementarmos a nossa sequência didática para o ensino da regra de três. Após isso, nos retiramos da escola e demos por encarrada a nossa pesquisa de campo.

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta quarta fase é onde serão apresentados os dados produzidos durante todo o processo da sequência didática, no que tange as observações, os registros dessas observações, a relação professor/aluno e a análise dos resultados alcançados (OLIVERIA, 2013, p.135). Com relação a esta última, recorremos às ferramentas estatísticas para que nos dessem suporte às inferências construídas, e, assim, não torná-las apenas uma crônica dos acontecimentos ocorridos durante a execução do experimento no ambiente da sala de aula. Par tanto, utilizamos o teste *t* para dados pareados, o coeficiente de correlação linear de Pearson e gráficos comparativos.

A seguir apresentamos a análise a posteriori da primeira sessão de ensino.

6.1. ANÁLISE A POSTERIORI DA PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

Os dados apresentados nesta seção de análise foram produzidos no dia 17 de outubro de 2017, pelo questionário socioeconômico e pelo pré-teste junto a uma amostra de 29 alunos de uma escola estadual de ensino médio e fundamental. A tabela a seguir traz o cruzamento dos dados sobre gênero e faixa etária dos alunos pesquisados.

Tabela 1 – Percentuais de idade por gênero dos discentes pesquisados

Idade (em anos)	**Gênero**		**Total (%)**
	Masculino (%)	**Feminino (%)**	
11	3,5	–	3,5
12	20,7	20,7	41,4
13	27,6	17,2	44,8
14	10,3	–	10,3
Total	62,1	37,9	100

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas na Tabela 1 revelaram que a idade majoritária na turma pesquisada é de 13 anos, com percentual de 44,8% dos alunos, desses 27,6% são do gênero masculino, e 17,2% do feminino. A idade média da turma é de 12,62 anos com desvio padrão de aproximadamente 0,72.

Esses percentuais mostram que a quantidade de meninos em sala de aula supera a de meninas em pouca mais de 24%.

Sobre as idades apresentadas, podemos inferir que a turma pesquisada estava com distorção idade-ano letivo, pois de acordo com a Lei de Diretrizes Básicas da Educação Brasileira, em seu Art. 32, o ensino fundamental terá duração de nove anos, e o ingresso do aprendiz deverá ocorrer aos seis anos de idade. No entanto, a idade que prevaleceu na classe pesquisada do 7º ano do ensino fundamental foi à de 13 anos, o que contraria a Lei 9394/96, sem contar os alunos do sexo masculino com idade de 14 anos, ainda nesse nível de ensino.

Outro dado da pesquisa revelou que 89,7% dos alunos nunca estiveram de dependência em matemática, contra 6,9% que revelaram estar em dependência e 3,4% já estiveram de dependência na disciplina. Essas informações cruzadas com as do parágrafo anterior nos levam a pressupor que os alunos pesquisados tiveram algum contratempo em sua vida pessoal para apresentarem o atraso escolar mencionado, ou por terem ficado retidos no ano anterior, item este não perguntado em nosso questionário socioeconômico.

A respeito da escolaridade dos pais ou responsáveis dos discentes, a Tabela 2 adiante traz os percentuais do nível de formação educacional desses pais ou responsáveis a nível dos ensinos fundamental, médio ou superior.

Tabela 2 – Nível de escolaridade dos pais ou responsáveis dos discentes

	Nível de escolaridade em percentual (%)						
Pais ou responsáveis	**Ensino Fund.**	**Ensino Fund. Incompleto**	**Ensino Médio**	**Ensino Médio Incompleto**	**Superior**	**Sem nível de ensino**	**Total**
Masculino	10,3%	10,3%	34,5%	31,1%	10,3%	3,5%	100%
Feminino	17,2%	10,3%	37,9%	24,2%	6,9%	3,5%	100%

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

De posse das informações mencionadas na Tabela 2, podemos afirmar que 55,1% dos responsáveis masculinos concluíram algum nível de ensino, contra 44,9% que não terminaram algum nível de ensino ou não possuem escolaridade.

Quanto as responsáveis do sexo feminino, percebemos que 62% destas terminaram algum nível de ensino, ao passo que 38% delas não concluíram ou não possuem algum nível de escolaridade.

Ainda sobre o nível de escolaridade dos genitores ou responsáveis dos alunos, percebemos que as mães (ou responsáveis do sexo feminino) superaram em formação educacional os pais (ou responsáveis do sexo masculinos) ao nível de educação básica. Entretanto, estes são maioria com relação à formação de nível superior, com uma margem de diferença de 3,4%.

Os dados produzidos na pesquisa revelaram também o nível de afinidade dos alunos pela matemática. Desse modo, 65,5% dos alunos afirmaram gostar um pouco de matemática, 24,1% disseram que gostam da disciplina, 6,9% afirmaram não gostar de matemática e 3,5% disseram gostar bastante de matemática.

Esses dados mostraram que a maioria da turma gosta de matemática, todavia a dedicação para estudar a disciplina ainda está aquém do ideal, pois as informações produzidas revelaram que 55,2% dos alunos só estudam matemática no período de prova, 17,2% revelaram que estudam três vezes ou menos por semana, 17,2% disseram estudar mais de três vezes por semana, 6,9% afirmaram estudar todos os dias a disciplina e 3,5% responderam que não estudam matemática fora da escola.

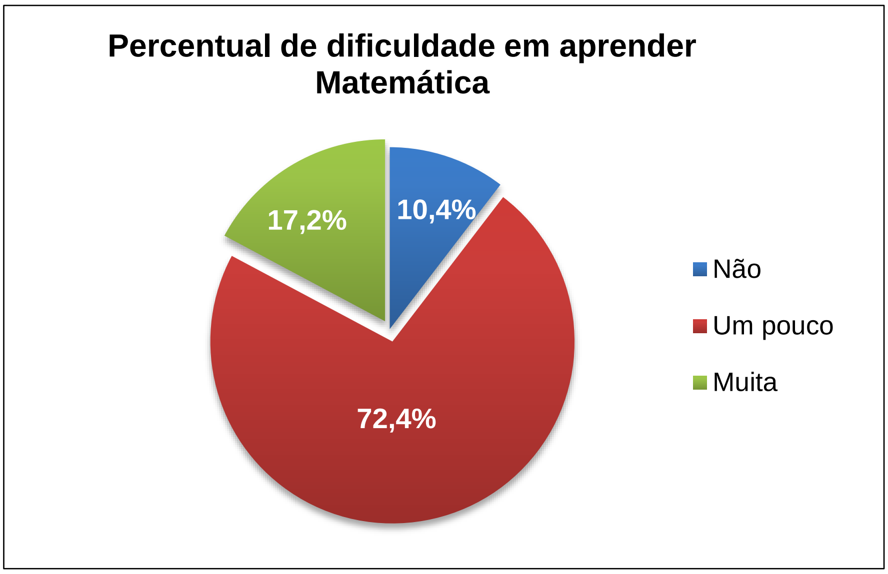
Sobre os percentuais do parágrafo anterior, podemos afirmar que mais da metade da turma relativiza a importância dessa disciplina para sua formação educacional e seu desenvolvimento pessoal, apesar de gostar de matemática, pois mais da metade dos discentes pesquisados só estuda matemática para realizar a prova (ou exame) bimestral, isto é, para obtenção de uma nota. Frente a esse fato, parece que a matemática ensinada na sala de aula não vem exercendo o papel que se espera dela, ou seja, um ensino e aprendizagem que seja "[...] condutor do alcance de autonomia e aquisição ou desenvolvimento de competências e habilidades para leitura, compreensão e explicação da vida, da natureza e da cultura, de modo que possa seguir de forma cidadã, a sua vida" (MENDES, 2014, p. 118), mas sim um ensino visto pelo aluno unicamente para a progressão de ano escolar. Dessa forma o aprendizado da matemática é encarado pelo discente, pressupomos, como algo sem utilidade para sua vida fora da escola.

Na verdade, a Matemática não deve ser encarada pelos discentes como uma disciplina estanque, acabada e estéril sem qualquer relação com suas vidas, pelo contrário, cabe a nós professores explorarmos o ensino de matemática de maneira abrangente por meio das Tendências da Educação Matemática, quando possível, e apresentá-lo como ferramenta imprescindível para a resolução de problemas e compreensão da dinâmica da realidade. Ademais, desmitificar que a matemática é para poucos, e mostrar que ela está ao alcance de todos, desde que haja interesse e dedicação para estudá-la.

A falta de interesse em estudar a disciplina matemática, comentado anteriormente, talvez, seja resultado da metodologia empregada nas aulas de matemática, quase sempre via aula tradicional. Esta apresenta uma proposta pouco interessante e, muita das vezes, enfadonha para o aluno com relação ao ensino de matemática. Tal possibilidade pode ser corroborada pelas informações produzidas no questionário socioeconômico, que revelaram um percentual majoritário de 75,9% para as aulas de matemática ministradas nos moldes tradicionais, ou seja, começando pela definição, seguidas de exemplos e exercícios. Outras metodologias também foram pesquisadas para saber com que frequências eram utilizadas nas aulas de matemática, como por exemplo, jogos, uso de experimento e a resolução de problema, e os dados do questionário revelaram os seguintes percentuais de uso dessas metodologias 6,9%; 10,3% e 6,9%, respectivamente. Estes últimos percentuais indicaram que poucas vezes as aulas de matemática foram ministradas por meio de outras metodologias que não fosse a tradicional, o que impossibilita a participação do discente em propostas que valorize seu conhecimento prévio e sua experiência de vida, pois a aula tradicional com seus ritos próprios, apresentação da lição, estudo individual sobre o livro didático, repetição do conteúdo aprendido e obtenção de nota (ZABALA, 1998, p. 54), trata todos os alunos de maneira uniforme e diretiva, não respeitando as diferenças e os ritmos de aprendizagem de cada aluno, atribuindo a este uma participação passiva no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A respeito dos ritmos de aprendizagem que, quase sempre, não é respeitado na metodologia tradicional de ensino, as informações produzidas na pesquisa mostraram no Gráfico 4, a seguir, os percentuais sobre a dificuldade em aprender a disciplina matemática.

Gráfico 4 − Percentuais de dificuldade em aprender Matemática



Fonte: Questionário socioeconômico (2017)

Com base nas informações do gráfico apresentado, podemos afirmar que a maioria dos alunos pesquisados apresentou alguma dificuldade em aprender os conteúdos de matemática do 7º ano do ensino fundamental, cujo universo de discente nessa situação chegou a 89,6% da turma, se considerarmos os percentuais de alunos com muita e pouca dificuldade.

Em termo de gênero, essa dificuldade acerca da compreensão da disciplina matemática se mostra mais acentuada no sexo masculino, conforme os dados mostrados na tabela 3 a seguir.

Tabela 3 – Dificuldade em aprender matemática (%)

Gênero	Grau de dificuldade em aprender matemática por gênero			
	Não	Um pouco	Muita	Total
Masculino	10,3%	44,8%	6,9%	62%
Feminino	-	27,6%	10,4%	38%

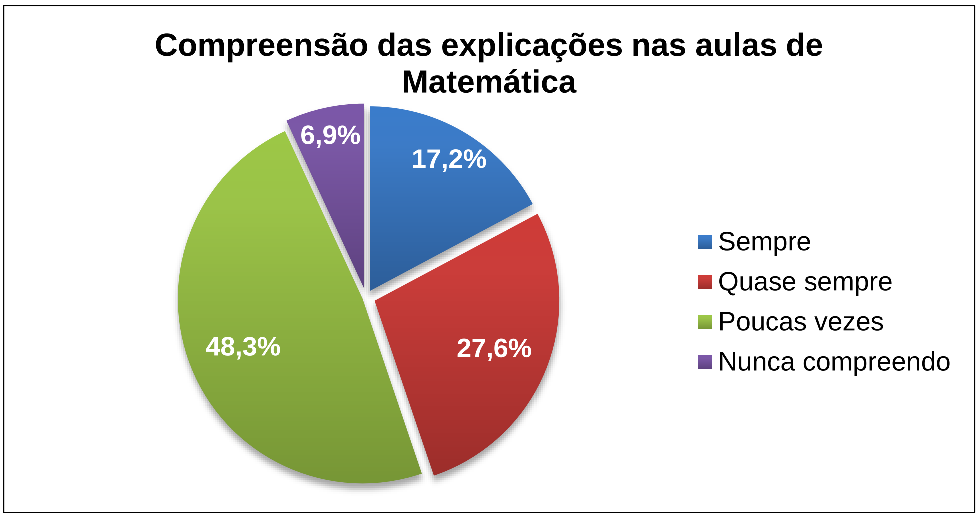
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Os dados da Tabele 3 indicaram que há um percentual maior dos alunos em relação às alunas quando ao grau de dificuldade “Um pouco” em aprender matemática, 44,8%; no entanto, 10,4% das alunas responderam que sentem “Muita” dificuldade para aprender a disciplina, um percentual superior ao dos alunos nessa mesma categoria. Quanto a não apresentar dificuldade em aprender matemática estão neste grupo apenas os alunos do sexo masculino, e representam um percentual de 10,3% da amostra consultada.

Esses dados esboçam a dificuldade enfrentada por professores e alunos no ensino de matemática nas escolas públicas, e indicaram que necessitamos mudar a proposta pedagógica nas aulas da disciplina, para que essas dificuldades sejam, pelo menos, minimizadas. Presumimos que uma das saídas para o embaraço no ensino de matemática, seja adotar outras metodologias de ensino, diferentes dos moldes tradicionais, que possam ajudar o aluno e a aluna na compreensão dos conteúdos matemáticos. Sobre isso, as pesquisas na área de educação matemática atestam a eficácia dessas metodologias alternativas no ensino da disciplina, cuja proposta pedagógica é centrada no aluno, e o professor passa a ser o mediador do processo de ensino e aprendizagem, por meio de atividades de ensino planejadas e direcionadas para alcançar os objetivos preestabelecidos para determinado conteúdo. Nesse contexto, o discente atua como protagonista nas situações de ensino, ou seja, ele passa a construir o seu conhecimento por meio da utilização de suas experiências e saberes prévios confrontados com o conhecimento que se pretende ensinar. Dessa forma, o aluno faz rupturas e construções de saberes, e com isso amplia suas experiências de aprendizado e solidifica novos conhecimentos. Além do mais, a relevância dessas metodologias alternativas também diz respeito à importância dada à disciplina ensinada, pois esta se justifica para o aluno pela sua funcionalidade e utilidade em contextos, quase sempre, reais, e não pelo apelo de ser importante em si mesma.

Aqui cabe ressaltar, que um dos motivos dos discentes apresentarem dificuldades em compreender a matemática ensinada nas aulas, diz respeito à forma como essa disciplina é apresentada na sala de aula. Sobre isso, o gráfico adiante traz os percentuais de nível de compreensão dos alunos e alunas pesquisados com relação as explicações proferidas pelo professor durante as aulas de matemáticos sobre determinado conteúdo.

Gráfico 5 − Compreensão das explicações nas aulas de Matemática

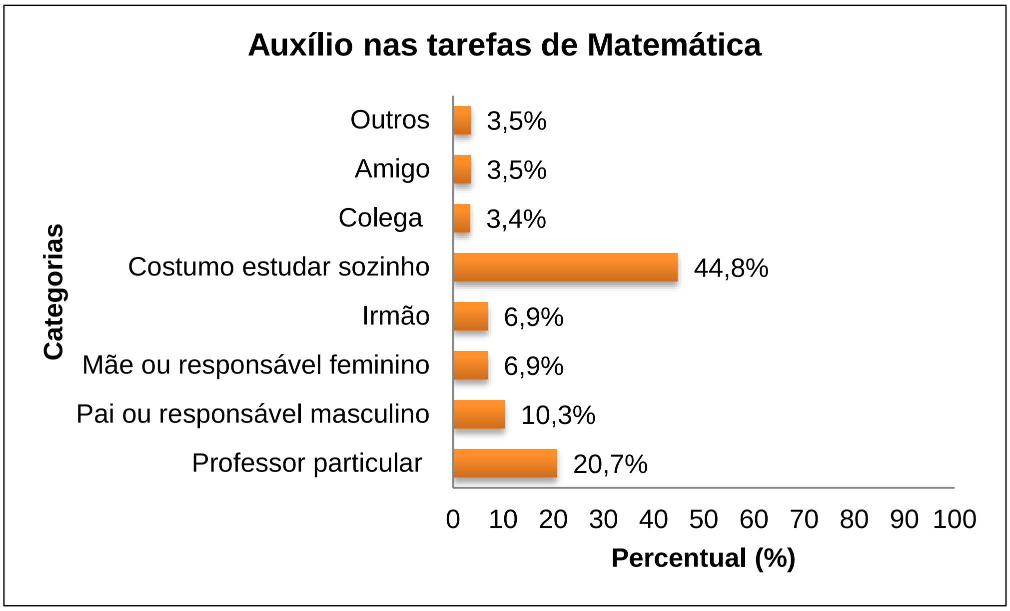


Fonte: Questionário socioeconômico (2017)

As informações produzidas revelaram que 48,3% poucas vezes conseguem compreender as explicações nas aulas de matemática, e 6,9% nunca compreendem o que está sendo ensinado. A soma desses percentuais mostrou que mais de 50% dos alunos pesquisados não entendem as explicações dos conteúdos nas aulas de Matemática, o que acarreta um déficit no aprendizado de conceitos, princípios, procedimentos matemáticos e, consequentemente, na formação básica desses alunos.

Além desses números mencionados sobre a dificuldade em compreender as explicações nas aulas de matemática, as informações produzidas mostraram também a quem os alunos recorrem para minorar tais dificuldades no momento de estudar matemática. Sobre isso, o gráfico adiante traz os percentuais.

Gráfico 6 – Auxilio nas tarefas de Matemática



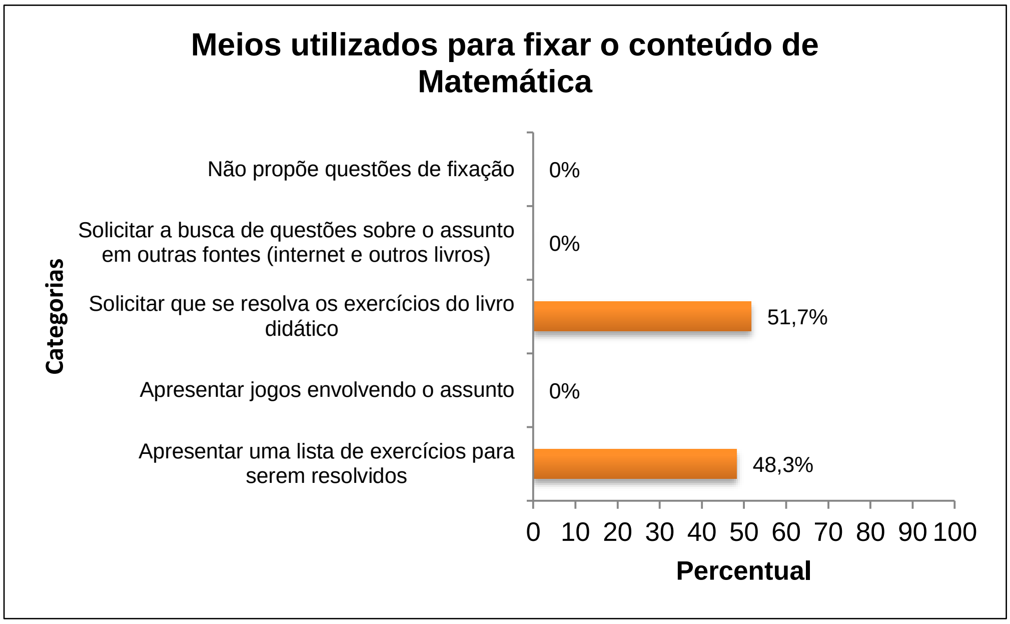
Fonte: Questionário socioeconômico (2017)

Conforme os dados supracitados, percebemos que quase 45% dos alunos costumam estudar sozinhos a matemática, sem auxílio de um adulto com mais experiência e conhecimento, a despeito do dado apresentado anteriormente, em que mais de 50% da turma não compreende o que é explicado nas aulas de matemática. Logo, presumimos que é pouco provável que esses alunos consigam progredir no ano escolar com uma base matemática satisfatória, que permita interpretar, analisar, resolver e inferir em situações com matemática provenientes dos contextos escolar e real. Também observamos que somente 17,2% dos alunos recorrem aos pais ou responsáveis para ajudar na tarefa de matemática. E apenas 20,7% dos alunos pesquisados têm a ajuda de um professor particular para auxiliar no estudo da disciplina.

Apesar de constatarmos na amostra analisada uma quantidade considerável de alunos que não recebe qualquer ajuda nas tarefas de matemática, percebemos, entretanto, que a maioria desses alunos, 55,2%, tem alguma ajuda com a matemática, o que minimiza, talvez, as dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo dessa disciplina.

Quanto aos recursos didáticos utilizados pelos discentes pesquisados para fixarem o conteúdo matemático ministrado no ambiente de sala de aula, as informações produzidas no gráfico a seguir revelam quais recursos são mais sugeridos pelo professor de matemática.

Gráfico 7 − Meios didáticos utilizados para fixar o conteúdo de Matemática



Fonte: Questionário socioeconômico (2017)

Como o percentual majoritário apresentado no gráfico acima é a utilização dos exercícios do livro didático para fixar o conteúdo ensinado, 51,7%, fica evidente a limitação do aprendizado do aluno a uma única fonte de conhecimento; e, como segunda opção, o uso de lista de exercícios, 48,3%. A tomada de posição na atividade educativa deve buscar meios que potencialize o processo de ensino e aprendizagem, ao invés de restringi-lo; dessa forma o professor deve se municiar dos recursos disponíveis para o ensino, como por exemplo, o uso de jornais, do computador, de software educativo, aplicativos entre outros, aliados a uma metodologia adequada como forma de possibilitar um aprendizado que respeito o ritmo e as diferenças existentes em uma sala de aula, pois cada aluno aprende de maneira distinta; algo que é negligenciado quando são adotadas como únicas formas de ensino a aula expositiva e o uso do livro didático. A respeito deste cabe citar algumas críticas apresentadas por Zabala (1998) com relação aos livros didáticos que priorizam, o que o autor chama, de modelo de aula transmissor e dogmático:

- Fomentam a atitude passiva dos meninos e meninas, já que impedem que participem tanto no processo de aprendizagem como na determinação dos conteúdos. Dessa maneira a iniciativa dos alunos é freada, se limita sua curiosidade, eles são obrigados a adotar algumas estratégias de aprendizagem válidas apenas para uma educação baseada nestes materiais escolares.
- Não respeitam a forma nem o ritmo de aprendizagem dos alunos. Não observam as experiências, os interesses ou as expectativas dos alunos nem suas diferenças pessoais. Propõem ritmos de aprendizagem comuns para coletividades, em vez de indivíduos. O resultado é a uniformização do ensino, deixando de lado as necessidades de muitos alunos.
- Fomentam certas estratégias didáticas baseadas primordialmente em aprendizagens por memorização mecânica. (ZABALA, 1998, p. 175)

Aqui cabe ressaltar, no entanto, que não temos a intenção de depreciar o uso do livro didático, até mesmo porque a utilização desse recurso no ensino de alguns conteúdos se mostra bem eficaz; entretanto, não devemos adotar o livro texto como a única fonte de conhecimento para o aprendizado dos alunos em matemática, mas sim como uma das tantas outras disponíveis que podemos fazer uso.

Um último questionamento feito foi com relação se alunos já haviam participado de algum experimento nas aulas de matemática, e as informações produzidas mostraram que 62,1% responderam não, contra 37,9% responderam que sim, já haviam participado de um experimento. Esses dados mostraram que o uso de metodologias alternativas nas aulas de matemática ainda não é realidade para a maior parte dos alunos pesquisados, talvez pela carência de material disponível e acessível aos professores da rede pública, ou por falta de conhecimento dos docentes. Devido a isso, grande parte desses professores encontra no livro didático a única forma estruturada para implementar sua atividade educativa.

Outras informações produzidas nesta primeira sessão de ensino dizem respeito ao desempenho dos alunos no pré-teste. Sobre isso, a tabela a seguir traz a quantidade de acertos, erros e também a quantidade de questões em branco deixadas no referido teste.

Tabela 4 – Desempenho dos alunos no pré-teste

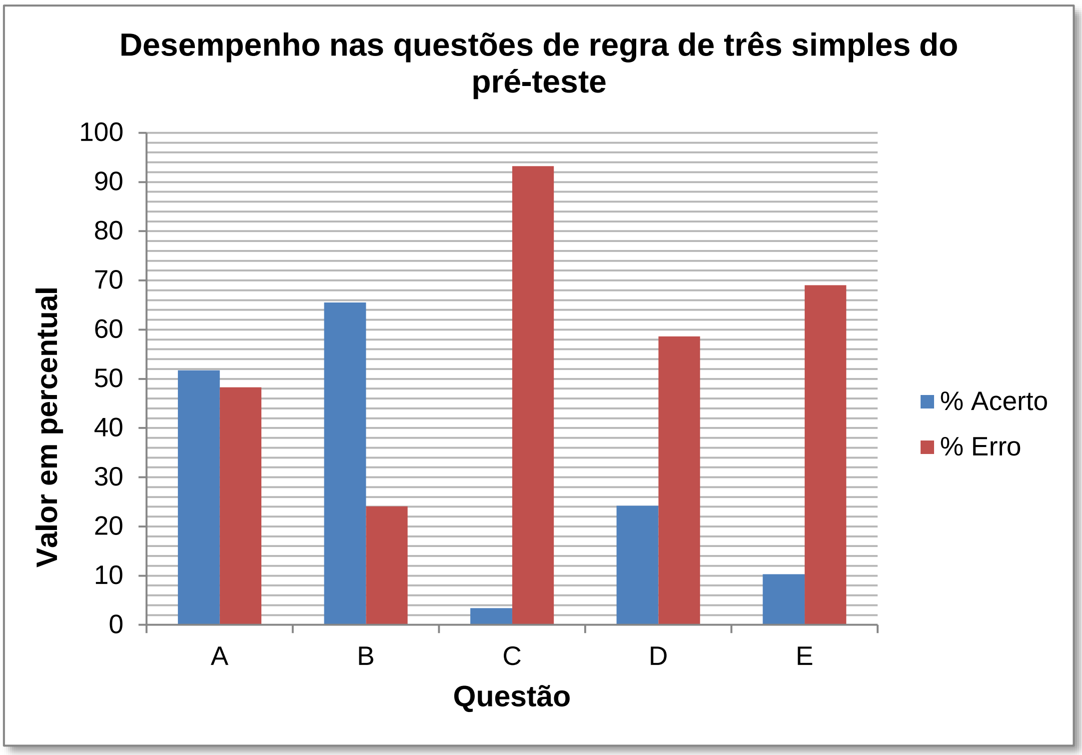
Questões	Quantidade de acerto	%	Quantidade de erro	%	Quantidade em branco	%
A	15	51,7	14	48,3	0	0
B	19	65,5	7	24,1	3	10,4
C	1	3,4	27	93,2	1	3,4
D	7	24,2	17	58,6	5	17,2
E	3	10,3	20	69,0	6	20,7
F	0	0	17	58,6	12	41,4
G	4	13,8	17	58,6	8	27,6
H	1	3,4	18	62,1	10	34,5
I	0	0	19	65,5	10	34,5
J	3	10,3	16	55,2	10	34,5

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A intenção do pré-teste foi avaliar o desempenho dos alunos sobre o conteúdo regra de três, objeto de estudo desta pesquisa, todavia sem que os discentes tivessem recebido qualquer instrução formal sobre esse assunto. Os dados produzidos revelaram que a quantidade de erros nas questões foi superior a de acertos, como previmos em nossa análise a priori. No entanto, esse fato não ocorreu nas questões ‘A’ e ‘B’ do teste mencionado, cujo percentual de acerto foi superior a 50% e a 60%, respectivamente. Presumimos que os alunos utilizaram de seus conhecimentos prévios de multiplicação e divisão para solucionar o problema proposto, uma vez que as questões mencionadas poderiam ser resolvidas apenas relacionando as quantidades das duas grandezas envolvidas por meio de um escalar, o que dispensava a utilização da técnica da regra de três simples, e também de conhecimentos formais sobre proporcionalidade. Entretanto, esses acertos não ocorreram com a mesma frequência nas situações em que havia relações inversamente proporcionais simples, da mesma forma, não aconteceram acertos expressivos nas questões em que estavam relacionadas três grandezas proporcionalmente, certamente porque os alunos não possuíam o domínio dos conceitos de proporcionalidade (direta e inversa) e da técnica das regras de três para resolver as questões.

A respeito dessas informações produzidas sobre o desempenho dos alunos no pré-teste mencionado, os gráficos a seguir trazem as quantidades de erro e acerto nas questões das regras de três simples e composta, respectivamente.

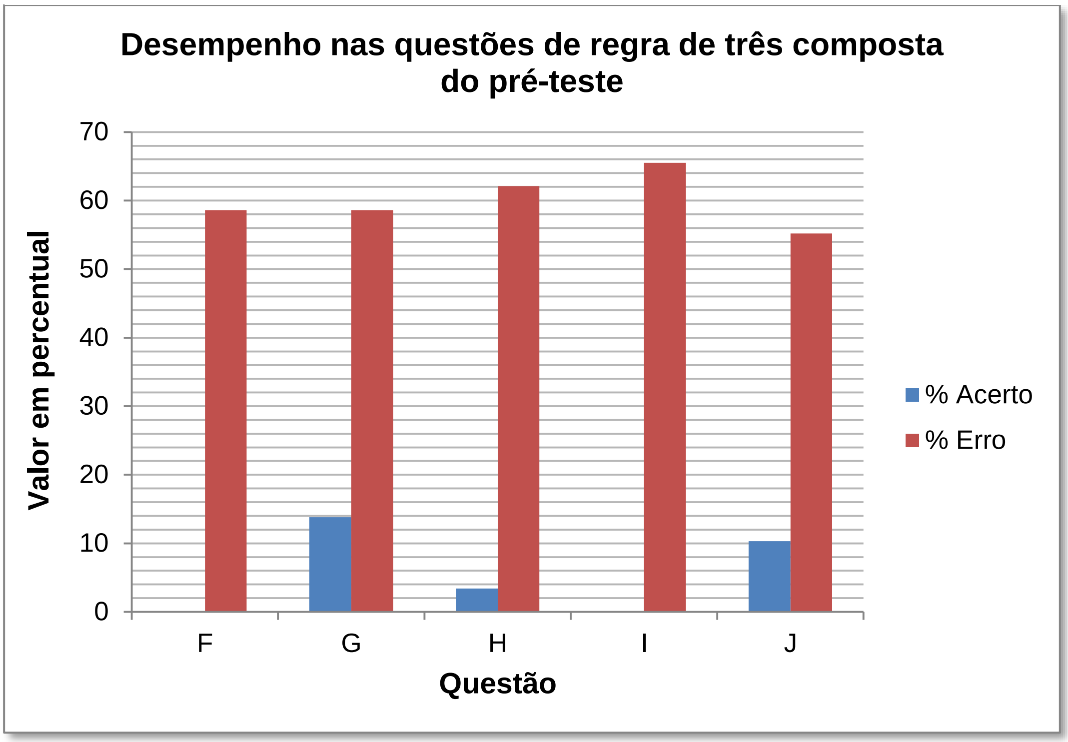
Gráfico 8 – Desempenho nas questões de regra de três simples do pré-teste



Fonte: Experimento (2017)

Conforme o exposto no gráfico acima fica evidente que os alunos obtiveram acertos acima dos 50% apenas nas questões ‘A’ e ‘B’, sendo que nas demais a quantidade de erros foi maior que a de acertos. Cenário semelhante a este último também ocorreu nas questões de regra de três composta, onde a quantidade de erros superou a de acertos, como é mostrado no gráfico adiante.

Gráfico 9 − Desempenho nas questões de regra de três composta do pré-teste



Fonte: Experimento (2017)

Esses dados deixam evidente que os alunos apresentaram dificuldades em resolver as questões com proporcionalidade composta envolvendo três grandezas, haja vista que o número de questões erradas foi expressivo quando comparado com a quantidade de questões certas.

Quanto ao desempenho individual dos alunos pesquisados, o quadro adiante mostra o número de acertos que cada discente obteve nas dez questões do pré-teste, e como forma de manter em sigilo os nomes dos participantes da pesquisa, representamos cada um deles pela letra “S”, a primeira letra da palavra “*Student”* (aluno), com o intuito de manter a ética na pesquisa e resguarda a identidade e o bem estar dos sujeitos envolvidos.

Quadro 43 – Desempenho individual dos alunos no pré-teste

Aluno(a)	**Questões certas**		**Questões erradas**		**Questões em branco**	
	Quant.	**%**	**Quant.**	**%**	**Quant.**	**%**
S_1	2	20	1	10	7	70
S_2	0	0	1	10	9	90
S_3	1	10	9	90	0	0
S_4	4	40	6	60	0	0
S_5	1	10	4	40	5	50
S_7	2	20	8	80	0	0
S_8	1	10	9	90	0	0
S_9	5	50	5	50	0	0
S_{10}	1	10	9	90	0	0
S_{11}	4	40	5	50	1	10
S_{13}	2	20	8	80	0	0
S_{14}	3	30	6	60	1	10
S_{15}	0	0	10	100	0	0
S_{16}	2	20	8	80	0	0
S_{17}	1	10	9	90	0	0
S_{19}	0	0	10	100	0	0
S_{20}	2	20	8	80	0	0
S_{21}	2	20	1	10	7	70
S_{22}	4	40	5	50	1	10
S_{24}	0	0	10	100	0	0
S_{26}	2	20	1	10	7	70
S_{27}	1	10	8	80	1	10
S_{28}	0	0	1	90	9	90
S_{29}	1	10	4	40	5	50
S_{30}	0	0	4	40	6	60
S_{31}	1	10	4	40	5	50
S_{32}	3	30	7	70	0	0
S_{33}	5	50	3	30	2	20
S_{34}	3	30	7	70	0	0

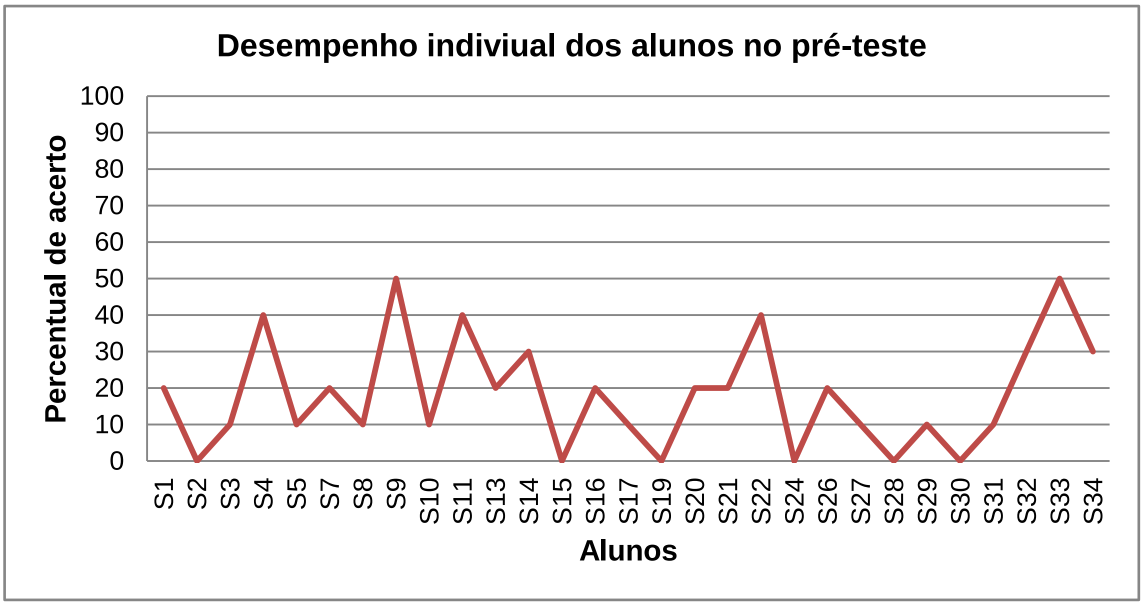
Fonte: Pré-teste (2017)

Os dados tabulados do pré-teste sobre o desempenho individual dos discentes revelaram que apenas dois deles, S_9 e S_{33}, tiveram acertos de 50% das questões do teste. Já os alunos S_2, S_{15}, S_{19}, S_{24}, S_{28} e S_{30} não conseguiram acertar nenhuma das questões propostas, sendo que o S_2 e S_{28} deixaram 90% do teste em branco.

Esses dados ficaram dentro do esperado, como havíamos previsto em nossa análise a priori para o pré-teste, pois tínhamos a convicção de que os alunos não conseguiriam resolver as questões propostas, porque não tinham recebido nenhuma instrução formal sobre o conteúdo. No entanto, o dado em que os acertos de dois alunos alcançaram 50% das questões não foi previsto em nossas análises a priori do referido teste.

O gráfico a seguir apresenta apenas os percentuais de acerto de cada aluno no pré-teste, e tal representação nos fez observar que a maioria dos participantes obteve um aproveitamento abaixo dos 40% nas questões desse teste.

Gráfico 10 – Desempenho individual dos alunos no pré-teste

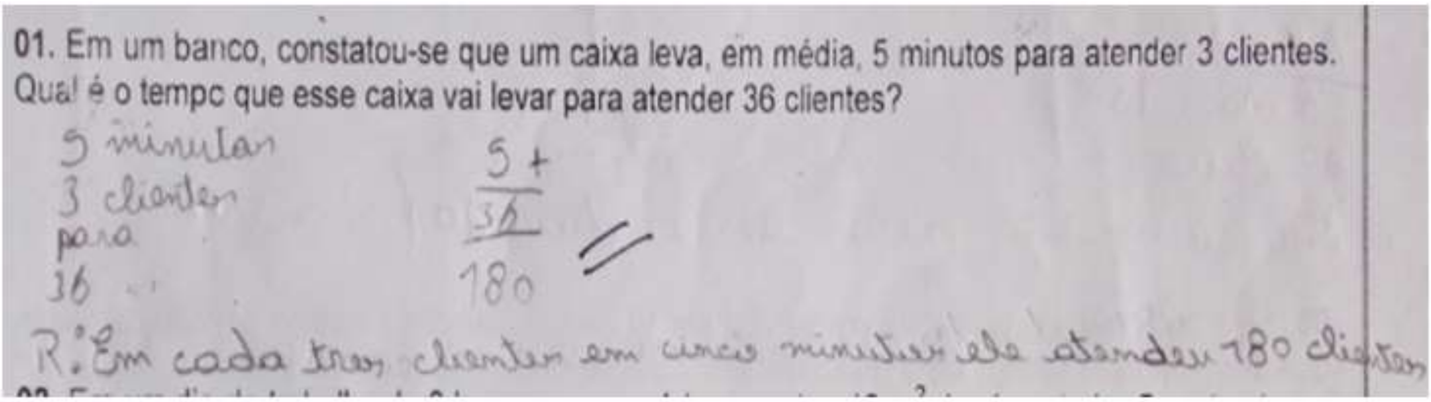


Fonte: Pré-teste (2017)

Quanto às produções dos alunos no pré-teste, abordamos adiante as questões onde identificamos erros desses alunos ao aplicarem conhecimentos matemáticos prévios incompatíveis com o contexto do problema proposto, e, em seguida, apresentamos a análise desses erros, com o intuito de apontar possíveis caminhos e estratégias utilizadas por eles na busca de solucionar a questão posta que relacionava grandezas diretamente proporcionais.

Imagem 146 – Erros cometidos no pré-teste na regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais

Resolução do aluno S_{15}



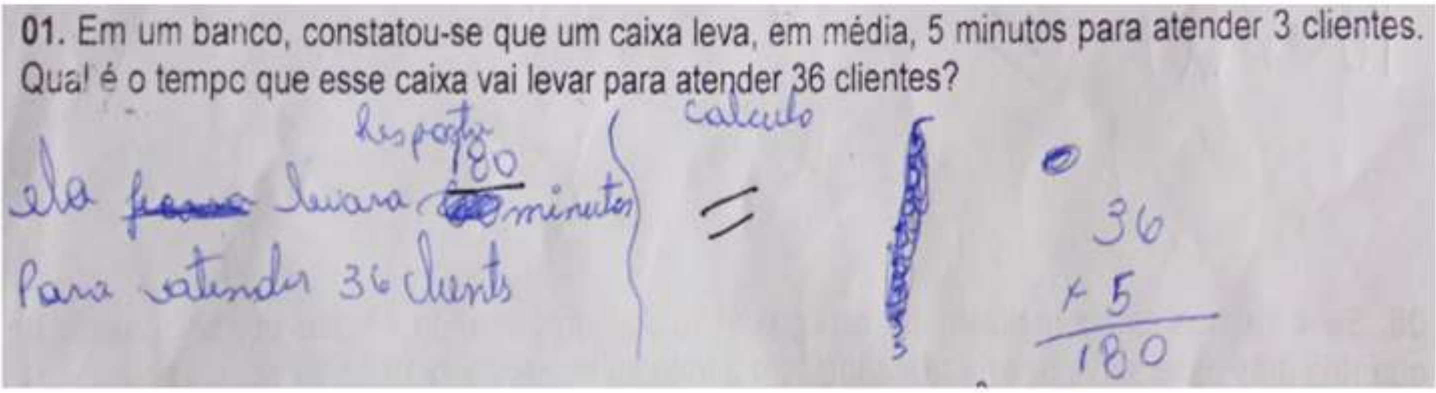
01. Em um banco, constatou-se que um caixa leva, em média, 5 minutos para atender 3 clientes. Qual é o tempo que esse caixa vai levar para atender 36 clientes?

5 minutos
3 clientes
para
36

$$\begin{array}{r} 5\ \times \\ 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

R: Em cada tres clientes em cinco minutos ele atendeu 180 clientes

Resolução do aluno S_{30}



01. Em um banco, constatou-se que um caixa leva, em média, 5 minutos para atender 3 clientes. Qual é o tempo que esse caixa vai levar para atender 36 clientes?

Resposta

ele ~~passa~~ levara 180 minutos
Para atender 36 clients

Calculo

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

Fonte: Experimento/Pré-teste (2017)

A questão supracitada foi à primeira apresentada no pré-teste, e mais de 50% da amostra conseguiu resolvê-la, entretanto muitos alunos não tiveram o mesmo aproveitamento, como é o caso dos alunos S_{15} e S_{30}, que apresentaram erros semelhantes na resolução da questão. Esses erros nos levaram a presumir, que os discentes entenderam que o funcionário do banco precisaria de cinco minutos para atender um cliente, ao invés de três clientes, haja vista que eles multiplicaram o valor 5 por 36 para encontrar a solução do problema, o que não estaria totalmente errado se a ideia inicial fosse verdadeira, ou seja, para atender um cliente o funcionário precisasse de fato dos cinco minutos, porém para o contexto da questão esse raciocínio estava equivocado.

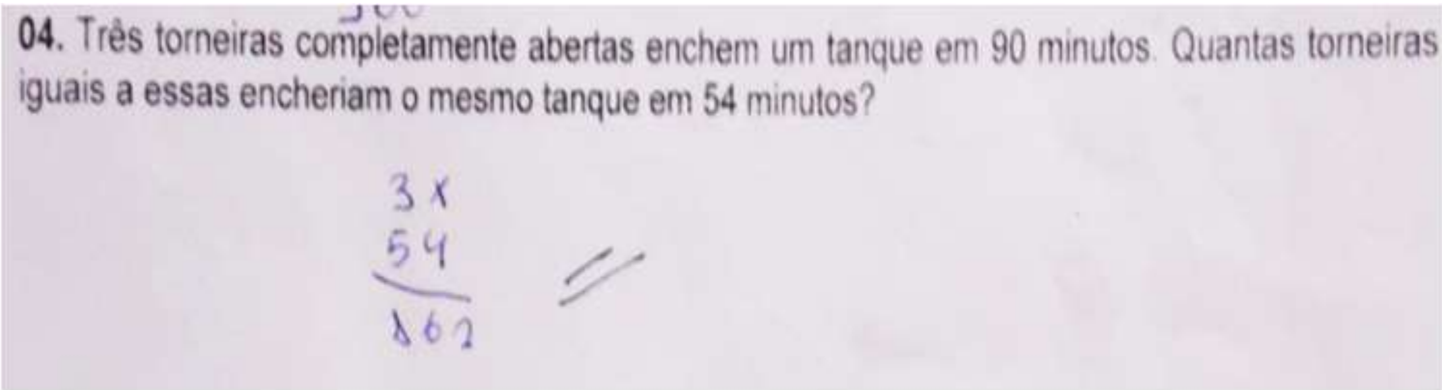
Erros dessa natureza indicam que os discentes mencionados têm dificuldade com a interpretação textual, talvez por não terem o hábito da leitura, ou por não estarem acostumados a resolver questões que exijam uma interpretação do contexto, algo diferente das questões que apresentam comandos diretos do tipo resolva, determine, efetue, etc. Outra possibilidade está no fato de que os alunos não possuíam um roteiro de resolução a ser seguido, como acontece na aula tradicional, em que o professor explica o assunto, apresenta exemplos e depois parte para os exercícios, por isso os alunos não conseguiram avançar na resolução da questão. Esta última, talvez, seja a mais adequada aos erros apresentados, até mesmo porque as informações produzidas no questionário socioeconômico revelaram que 75,9% das aulas de matemática são ministradas começando pela definição, exemplos e depois exercícios.

Os erros citados bem como outros com respostas sem nexo e sem nenhum esboço matemático representaram um universo 48,3% (Tabela 4) dos alunos pesquisados, que não tiveram êxito na resolução da primeira questão do pré-teste sobre grandezas diretamente proporcionais.

Quanto às questões 4 e 5 do pré-teste, sobre grandezas inversamente proporcionais, apresentamos a seguir os erros dos discentes ao tentarem encontrar a solução para essas questões.

Imagem 147 – Erros cometidos no pré-teste na regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais

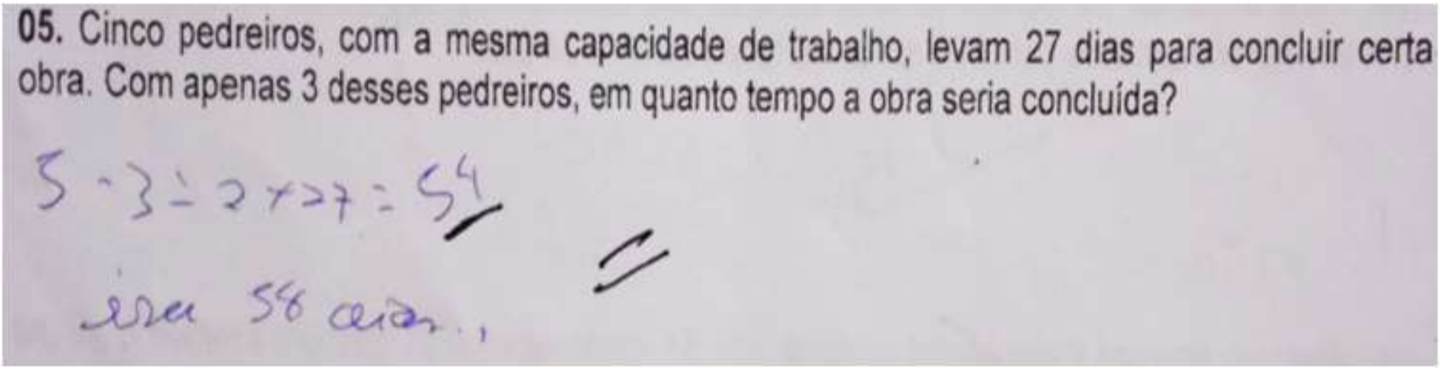
Resolução do aluno S_{29}


04. Três torneiras completamente abertas enchem um tanque em 90 minutos. Quantas torneiras iguais a essas encheriam o mesmo tanque em 54 minutos?

Fonte: Pré-teste (2017)

Imagem 148 – Erros cometidos no pré-teste na regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais

Resolução do aluno S_{27}

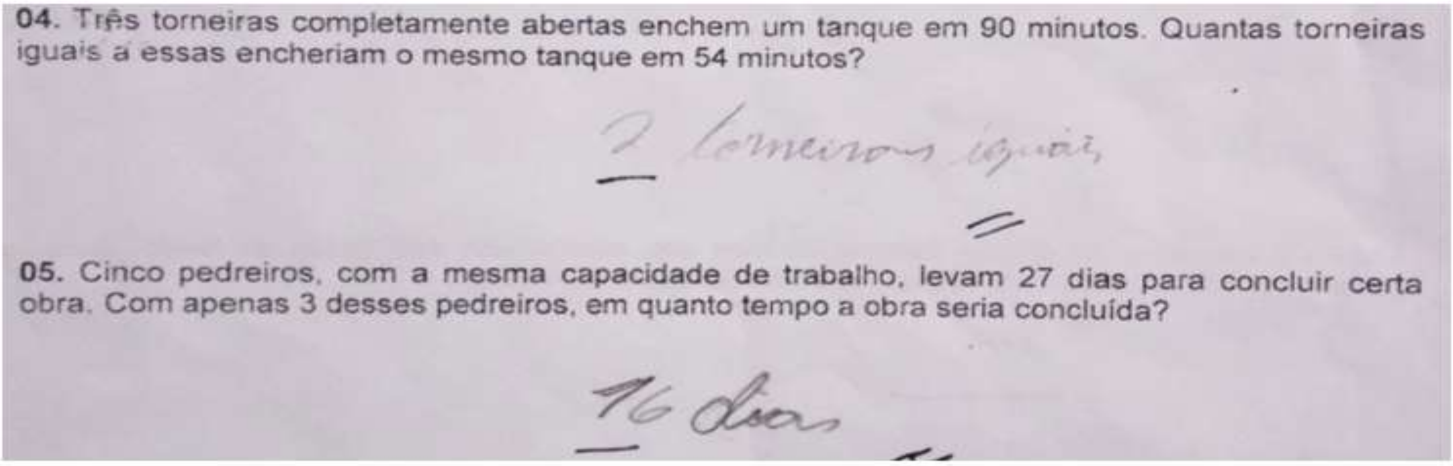


05. Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra seria concluída?

5 - 3 = 2 × 27 = 54

era 54 dias.,

Resolução do aluno S_7



04. Três torneiras completamente abertas enchem um tanque em 90 minutos. Quantas torneiras iguais a essas encheriam o mesmo tanque em 54 minutos?

2 torneiras iguais,

05. Cinco pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra seria concluída?

76 dias

Fonte: Pré-teste (2017)

Como base nas resoluções apresentadas das questões 3 e 4 do pré-teste acerca de grandezas inversamente proporcionais, podemos pressupor que a maneira encontrada pela aluna S_{29} para resolver a questão 4, foi por meio da multiplicação dos valores 3 e 54, como se a quantidade de torneiras procurada fosse obtida pelo produto desses dois valores. Provavelmente, essa aluna não conseguiu fomentar nenhum outro raciocínio que viesse relacionar as quantidades envolvidas no problema de maneira inversa, até mesmo porque contextos dessa natureza não são encontrados facilmente no quotidiano dos alunos, e com raras experiências desse tipo é pouco provável que o discente consiga observar que as quantidades do problema estão relacionadas de maneira inversa, bem diferente dos contextos com grandezas diretamente proporcionais, pois quase sempre estão presentes no dia-a-dia.

Já o aluno S_{27} desenvolveu um pensamento um pouco mais elaborado na resolução da questão 5, ele conseguiu perceber que as quantidades no problema estavam relacionadas de maneira inversa, porém não utilizou a operação correta na redução da quantidade de pedreiros, pois usou a subtração no lugar da divisão; no entanto, ao variar a quantidade dias de trabalho, o aluno agiu corretamente, e ampliou essa grandeza por meio da multiplicação. Apesar de que o raciocínio apresentado estivesse parcialmente correto, a solução encontrada pelo discente não era adequada ao problema.

Esses modos distintos de pensar matematicamente revelam a diferença no ritmo de aprendizagem e compreensão dos alunos em relação aos conteúdos ministrados em sala de aula, algo que é negligenciado pelo modo tradicional de ensino, porque trata todos os alunos de maneira uniforme sem respeitar o tempo de aprendizagem de cada um, e impossibilita uma intervenção adequada que ajude os alunos com mais dificuldade na disciplina.

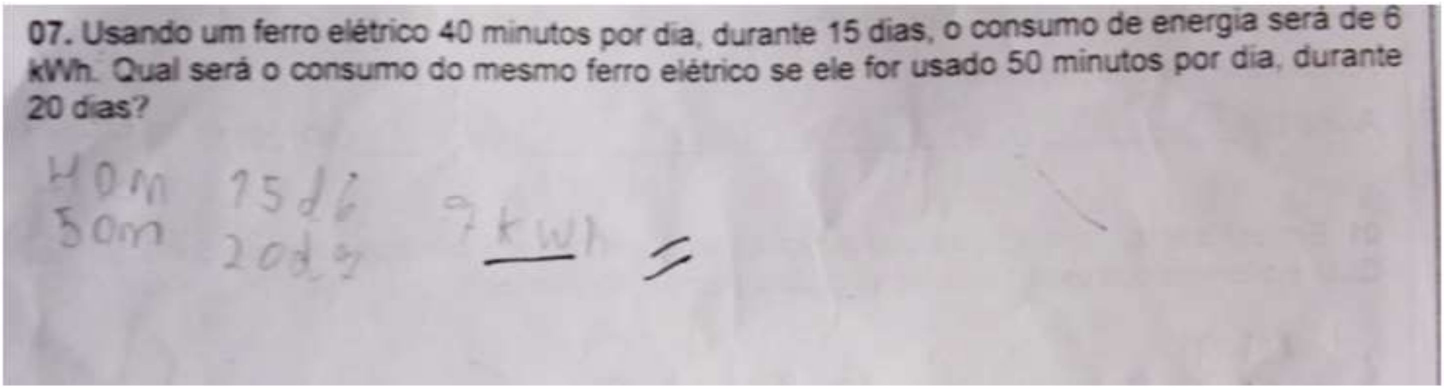
Com relação ao aluno S_7, podemos pressupor que as respostas erradas apresentadas por ele para as questões 4 e 5, revelaram que o discente tinha total desconhecimento sobre o conteúdo abordado, no entanto pelo fato de achar que todo problema de matemática possui solução, ele se viu na obrigação de apresentar uma resposta para as questões, mesmo de maneira errada. Todavia, esse fato é compreensivo, pois o aluno não havia recebido qualquer instrução sobre como proceder com grandezas inversamente proporcionais, devido a isso as respostas construídas não foram adequadas ao contexto proposto.

Por fim, cabe ressaltar que respostas semelhantes as do aluno supracitado para as questões 4 e 5 do pré-teste foram majoritárias, e chegaram a 58,6% e 69%, respectivamente, da amostra pesquisada conforme apresentamos na Tabela 4.

A respeito do desempenho dos alunos no pré-teste com relação à regra de três composta, identificada nas questões de 6 a 10, as imagens adiante trazem as respostas dos discentes ao tentarem solucionar as questões com proporcionalidade composta.

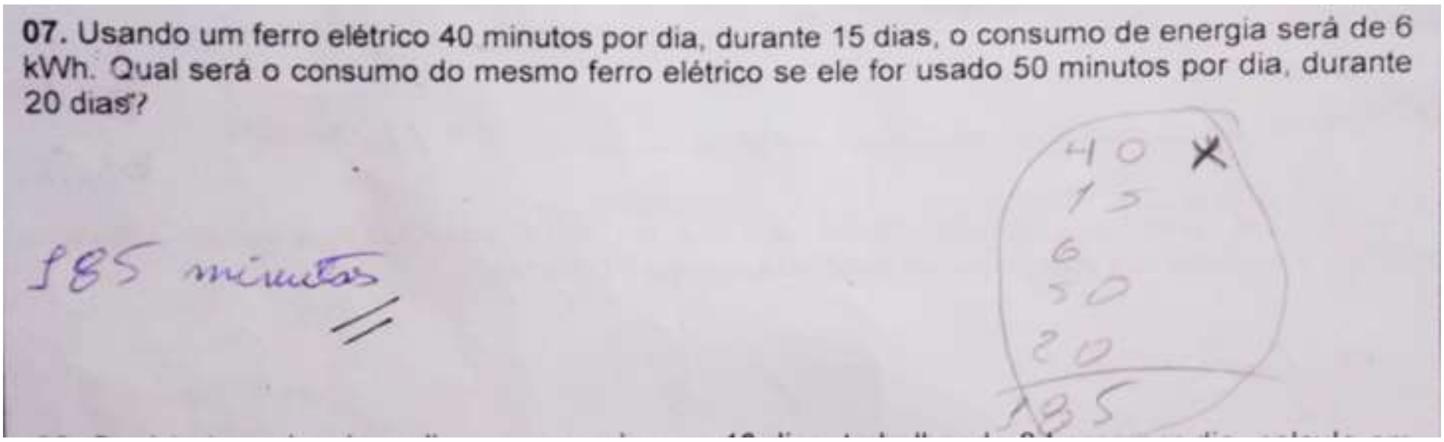
Imagem 149 – Erros cometidos no pré-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_8


07. Usando um ferro elétrico 40 minutos por dia, durante 15 dias, o consumo de energia será de 6 kWh. Qual será o consumo do mesmo ferro elétrico se ele for usado 50 minutos por dia, durante 20 dias?

40m 15d
50m 20d
7kWh

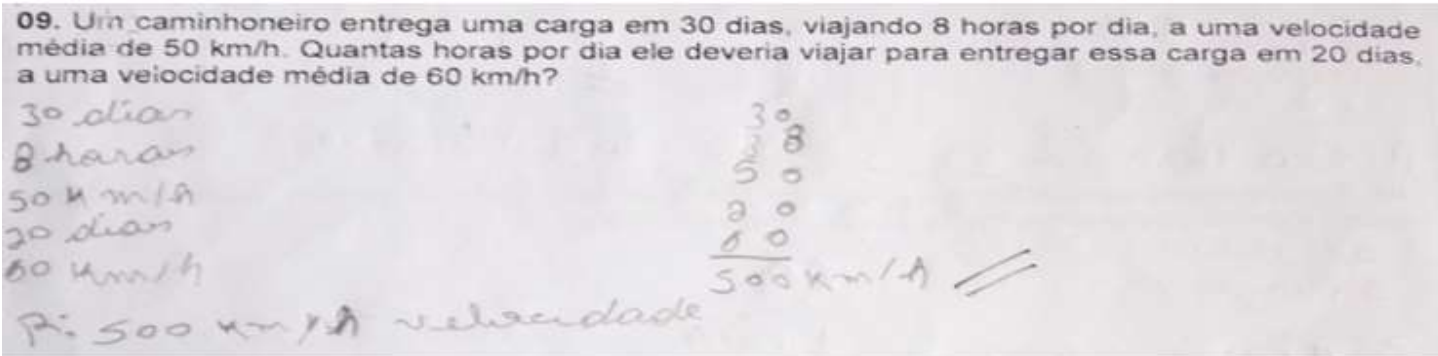
Resolução do aluno S_{24}


07. Usando um ferro elétrico 40 minutos por dia, durante 15 dias, o consumo de energia será de 6 kWh. Qual será o consumo do mesmo ferro elétrico se ele for usado 50 minutos por dia, durante 20 dias?

185 minutos

40
15
6
50
20
185

Resolução do aluno S_{15}


09. Um caminhoneiro entrega uma carga em 30 dias, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h?

30 dias
8 horas
50 km/h
20 dias
60 km/h
R: 500 km/h velocidade

30
8
50
20
60
500 km/h

Fonte: Pré-teste (2017)

O desempenho dos alunos na regra de três composta revelado na Tabela 4 mostrou que a quantidade de erros e questões em branco no pré-teste superou em muito a quantidade de acertos, como havíamos previsto em nossa análise a priori. Nesse cenário, consideramos questões certas no teste realizado, aquelas que correspondiam o valor do gabarito, mesmo que não tivessem o cálculo matemático escrito. Já com relação às questões erradas, consideramos aquelas respostas em que os discentes escreveram valores arbitrários ao contexto do problema ou com cálculos que utilizaram operações matemáticas incompatíveis com o pedido na questão.

Sobre os erros das questões acerca da proporcionalidade composta, analisamos as respostas dos alunos apresentadas na Imagem 149, como é o caso do aluno S_8, cuja solução trouxe traços que indicassem uma relação entre duas grandezas de mesma espécie, algo peculiar da ideia de proporção simples já conhecida do aluno. No entanto, o discente não relacionou uma terceira grandeza em sua resolução, o que acarretou em erro da questão.

Quanto a iniciativa do aluno S_8 na questão 7, parece que a presença de uma terceira grandeza atrapalhou o raciocínio matemático no momento de encontrar a solução do problema, pois ele deu como resposta um valor que relacionava apenas duas grandezas. Sobre isso, entendemos como algo normal diante das circunstâncias, pois o aluno desconhecia a teoria da proporcionalidade composta, por isso não aplicou a regra de três composta corretamente.

Já o aluno S_{24} apresentou uma reposta sobre a mesma questão do parágrafo anterior, em que utilizou apenas a operação da adição para relacionar os valores do problema, com isso ele somou as quantidades das três grandezas como números de uma sequência numérica e apresentou a soma como resposta. Atitude típica de quem desconhecia como relacionar grandezas proporcionais.

Raciocínio semelhante ao mencionado no parágrafo anterior também foi desenvolvido pelo aluno S_{15}, que somou todos os valores das grandezas do problema como números de uma sucessão numérica.

Esses erros já eram esperados, uma vez que os alunos estavam diante de um conteúdo novo e desconhecido, mesmo com seus conhecimentos prévios atuando não foram necessários para alcançar êxito na solução do problema, porque o contexto com regra de três composta requer algo a mais do que a regra de três simples, cuja relação ocorre somente entre duas grandezas, o que torna mais fácil estabelecer uma correspondência entre os valores das grandezas por meio de um escalar.

Apesar da quantidade de erros e das questões em branco terem sido superior a de acertos no pré-teste, tínhamos a convicção que esse quadro poderia mudar com aplicação da nossa sequência didática, e conseguir resultados expressivos no pós-teste ao final das sessões de ensino.

A seguir temos a análise a posteriori da segunda sessão de ensino da nossa sequência didática para o ensino da regra de três.

6.2. ANÁLISE A POSTERIORI DA SEGUNDA SESSÃO DE ENSINO

A presente sessão de ensino aconteceu no dia 19 de outubro de 2017, na ocasião aplicamos a atividade 1, que tinha como fito conduzir os alunos a construírem o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Em nossa análise a priori, prevíamos para a *situação 1* que os discentes conseguiram observar as regularidades ocorridas entre as razões de duas grandezas, que variavam conjuntamente, e também notariam que os produtos dos valores das duas grandezas envolvidas no problema não eram constantes. As informações produzidas no Quadro 11 revelaram que das noves equipes 56% delas (equipes: A, C, E, G, H) conseguiram construir observações válidas para a referida situação, 22% dessas equipes (equipes: B, F) apresentaram observações parcialmente válidas, e apenas as equipes (D, I) construíram observações não válidas, o que correspondeu também a 22%. Sobre estas últimas, cabe ressaltar que os alunos deixaram em branco o espaço destinado as observações ou copiaram as observações de outros colegas.

Sobre as observações válidas, podemos afirmar que a nossa análise a priori para a situação 1 da primeira atividade foi confirmada pela maioria das equipes, o que faz dessa análise ser aceita.

Quanto as situações 2, 3 e 5, para as quais havíamos previsto em nossa análise a priori que os discentes conseguiriam preencher os quadros dessas situações corretamente e também apresentariam uma justificativa válida sobre a relação proporcional direta existente entre as quantidades envolvidas naquelas situações. As produções dos alunos revelaram que 78% das equipes (Equipes: A, B, C, D, E, F, G) apresentaram respostas válidas na situação 2; 56% dessas equipes (Equipes: A, B, C, E, F) construíram respostas válidas na situação 3 e 44% delas (Equipes: A, B, C, E) apresentaram respostas válidas para a situação 5. Diante desse cenário, podemos presumir que a nossa análise a priori se confirmou na maioria das equipes em duas das três situações que relacionaram grandezas diretamente proporcionais. Logo, as hipóteses levantadas para essas situações podem ser consideraras como positivas.

Já com relação à situação 4, conjecturamos que os alunos perceberiam que as quantidades envolvidas nessa situação não eram diretamente proporcionais, bem como apresentariam uma justificativa válida com base nas constatações observadas na situação 1 sobre a proporcionalidade direta. As informações produzidas revelaram que 44% das equipes (Equipes: A, B, D, H) construíram respostas válidas e 56% delas (Equipes: C, E, F, G, I) apresentaram respostas parcialmente válidas, sendo que nenhuma equipe trouxe resposta não válida. Frente a esses dados podemos dizer que a análise a priori realizada para a situação 4 foi positiva.

Quanto a análise a priori sobre as sentenças que trataram da relação proporcional direta entre duas grandezas sem a presença de valores numéricos ao final da atividade 1, podemos afirma que as nossas hipótese se confirmaram também, haja vista que o desempenho das equipes nos contextos propostos foi igual ou superior a 70% de aproveitamento.

Diante do exposto sobre as análises a priori para as cinco situações e sobre os contextos com grandezas diretamente proporcionais que compuseram a atividade 1 e coadunadas com os percentuais mostrados sobre sua validade, podemos afirmar que tais análises foram positivas e coerentes para a referida atividade.

6.3. ANÁLISE A POSTERIORI DA TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO

A terceira sessão de ensino aconteceu no dia 26 de outubro de 2017, na ocasião aplicamos a atividade 2, que tinha como objetivo conduzir os alunos a construírem o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Nas análises a priori para a atividade 2, conjecturamos que as equipes construiriam observações válidas acerca do comportamento das grandezas envolvidas na situação 1, isto é, conseguiriam perceber que as quantidades estavam relacionadas de forma inversa, e as razões entre os seus valores eram diferentes, e também perceberiam que o produto entre os valores dessas quantidades era igual.

As informações produzidas nesta sessão de ensino revelaram que 89% das equipes (equipes: A, B, C, D, E, G, H, I), Quadro 24, construíram observações válidas para a situação 1, sendo que somente a equipe F composta dos alunos (S_{10}, S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{26}) trouxe observações não válidas, representando, assim, um percentual de 11%. De posse desses dados, podemos afirmar que a análise a priori construída foi válida para a referida situação, uma vez que os alunos identificaram os princípios que norteiam o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Quanto as demais situações, 2, 3 e 5, que abordaram contextos também sobre grandezas inversamente proporcionais, previmos que os alunos conseguiriam preencher corretamente os quadros dessas situações utilizando o mesmo raciocínio empregado na situação 1 da atividade 2, e também conseguiriam construir uma justificativa acertada sobre a relação proporcional inversa, levando em consideração as constatações acerca da variação inversa entre as grandezas e/ou da igualdade dos produtos entre os valores dessas quantidades. As informações produzidas por meio da produção dos alunos revelaram que 56% das equipes (equipes: A, B, D, H, I) apresentaram respostas válidas para a situação 2; 67% delas (equipes: A, B, C, D, H, I) construíram respostas válidas para a situação 3 e 34% dessas equipes (equipe: C, D, I) apresentaram respostas válidas para a situação 5. Diante desse cenário, onde o percentual de respostas válidas foi majoritário em duas das três situações analisadas, podemos dizer que a nossa análise a priori para essas situações foi válida e coerente, pois os alunos mostraram indícios e princípios que corroboram a compreensão da relação proporcional inversa, ainda que superficial, entre as quantidades envolvidas nos contextos.

Com relação à situação 4, a qual trouxe a relação não proporcional entre duas grandezas envolvidas num dado contexto, previmos na análise a priori da atividade 2 que os discentes não apresentariam dificuldade em identificar a relação não proporcional inversa existente entre as quantidades envolvidas naquela situação, pois perceberiam que o produto entre os valores das grandezas não era constante. As produções dos alunos revelaram que as nossas hipóteses foram confirmadas a respeito da situação 4, pois 56% das equipes (equipes: A, B, D, H, I) construíram respostas válidas para a referida situação. Desse modo, podemos considerar como válida e coerente a análise a priori da situação 4, uma vez que os alunos apresentaram indícios e princípios que indicaram a compreensão da relação proporcional inversa ao negarem que as quantidades envolvidas na situação mencionada não eram grandezas inversamente proporcionais.

Ainda na análise a priori da atividade 2, previmos também que os alunos poderiam apresentar um bom desempenho nas sentenças, ao final dessa atividade, sobre grandezas inversamente proporcionais, entretanto, encontrariam, provavelmente, dificuldades em determinar os pares de grandezas inversamente proporcionais, pois cada uma das sentenças não trazia valores numéricos. As informações coletadas indicaram que apenas três equipes, A, E, F, tiveram um certo igual ou maior que 60% ao identificarem os pares de grandezas inversamente proporcionais. Já a equipe H teve um aproveitamento de 50% nas sentenças, enquanto que as equipes B, C, D e I obtiveram apenas 40% de acerto. Somente a equipe G teve um aproveito de insuficiente, 0%, porque deixou em branco todas as sentenças propostas.

Esse cenário revelou que as nossas suspeitas foram confirmadas, pois as equipes apresentaram dificuldades em apontar as sentenças com pares de grandezas inversamente proporcionais, ainda que algumas equipes demonstraram um bom desempenho na tarefa. Desse modo, podemos afirmar que a análise a priori proposta para as sentenças sobre grandezas inversamente proporcionais foi válida e coerente, uma vez que as dificuldades dos alunos estiveram relacionadas, quase sempre, com a falta de valores numéricos nas sentenças, que auxiliassem na realização da análise das grandezas envolvidas em cada contexto.

Diante do exposto sobre as análises a priori para as cinco situações e sobre os contextos com grandezas inversamente proporcionais que compuseram a atividade 2 e coadunadas com os percentuais mostrados sobre sua validade, podemos afirmar que tais análises foram positivas e coerentes para a referida atividade.

6.4. ANÁLISE A POSTERIORI DA QUARTA SESSÃO DE ENSINO

Esta quarta sessão de ensino tratou da execução de questões de aprofundamento sobre grandezas inversamente proporcionais, e ocorreu no dia 31 de outubro de 2017 para 26 alunos presentes.

Devido à ausência de alguns alunos, tivemos equipes com apenas dois integrantes, mas isso não dificultou o desenrolar do trabalho.

Observamos que o desempenho dos alunos nas questões de aprofundamentos foi satisfatório, pois constatamos que os discentes avançaram nas resoluções das questões recorrendo aos conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores e, quase sempre, sem nenhuma intervenção do professor pesquisador. Esse fato nos levou a presumir que os conceitos foram compreendidos, ainda que superficialmente, sobre as grandezas direta e inversamente proporcionais, e também pelos acertos acontecidos em questões nas quais o discente precisava fazer a diferenciação entre esses dois conceitos. No entanto, cabe ressaltar que os alunos sentiram dificuldade em responder corretamente a *questão 6* da atividade de aprofundamento, devido terem feito uma análise equivocada da situação posta, pois esta não relacionava proporcionalmente as grandezas envolvidas. Essa constatação foi propícia para haver uma discussão muito proveitosa sobre a relação proporcional das grandezas em questão, que resultou num olhar diferente do inicial. Com isso, as equipes que se manifestaram de forma equivocada, conseguiram erradicar a dúvida momentânea e, assim, responderam corretamente a questão.

Em última análise, concluímos que as questões de aprofundamento para a atividade 2 foram eficazes para reforçar e aprimorar os conhecimentos dos alunos acerca das grandezas proporcionais (direta e inversa), tão necessários para a aplicação da técnica das regras de três, a qual foi apresentada na sessão de ensino seguinte.

6.5. ANÁLISE A POSTERIORI DA QUINTA SESSÃO DE ENSINO

No dia 07 de novembro de 2017, ocorreu a sessão de ensino em que apresentamos à técnica da regra de três simples para 26 alunos presentes. A nossa intenção nesta sessão foi de oportunizar os discentes a terem em mãos uma ferramenta matemática eficiente para resolver questões que abordem grandezas proporcionais (direta ou inversa).

A princípio, apresentamos a regra de três simples aplicada às grandezas diretamente proporcionais, e demonstramos como utilizar os procedimentos de resolução da regra. Em seguida, aplicamos os referidos procedimentos da regra em contextos com grandezas inversamente proporcionais, com um diferencial, isto é, ao invés de igualar as razões das grandezas (sendo que uma delas deve estar invertida), igualamos o produto dos valores das grandezas de naturezas diferentes.

Após essa apresentação inicial e com as resoluções das questões modelos para grandezas direta e inversamente proporcionais, os alunos foram encorajados a resolver outras questões via regra de três simples, e, assim, colocar em prática o que tinha sido ensinado, sobretudo, retomar os conhecimentos sobre grandezas proporcionais.

Ao afinal, avaliamos como positivo a participação dos alunos na utilização da regra de três simples, pois percebemos que não houve dificuldade em aplicar a técnica na resolução de questões pela maioria dos discentes, tanto para grandezas diretamente proporcionais como para as grandezas inversamente proporcionais. Com essas constatações, confirmamos a nossa analise a priori para esta sessão de ensino, que tratou da apresentação da regra de três simples, e também respondemos parcialmente a nossa questão de pesquisa que, em linhas gerais, buscou investigar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de regra de três provoca na participação dos alunos na aula de matemática e na resolução de questões desse conteúdo.

6.6. ANÁLISE A POSTERIORI DA SEXTA SESSÃO DE ENSINO

A referida sessão de ensino ocorreu no dia 09 de novembro de 2017, cuja intenção era reforçar os ensinamentos sobre regra de três simples ocorridos na aula anterior e erradicar possíveis dúvidas remanescentes dos alunos; para tanto, propomos aos discentes que tentassem resolver dez questões com contextos que traziam relações proporcionais entre grandezas, e que ao final seriam comentadas e resolvidas pelo professor pesquisador.

Após o encerramento da sessão de ensino, que durou os três horários de aula, corroboramos a nossa intenção inicial, pois as resoluções dos alunos indicaram que eles conseguiram aplicar a técnica da regra de três simples de maneira eficiente, na maioria dos casos, para resolver as questões propostas, tanto para grandezas diretamente proporcionais como para as grandezas inversamente proporcionais. Esses feitos sinalizaram que os alunos compreenderam o funcionamento da regra, quando aplicado em situações com grandezas proporcionais.

6.7. ANÁLISE A POSTERIORI DA SÉTIMA SESSÃO DE ENSINO

Esta sétima sessão de ensino aconteceu no dia 14 de novembro de 2017. Naquela oportunidade aplicamos a atividade 3, cujo objetivo era conduzir os alunos a perceberem os princípios que norteiam o conceito da proporcionalidade composta direta entre três grandezas.

Em nossa análise a priori para a atividade 3, conjecturamos que os alunos conseguiriam identificar as relações proporcionais diretas existentes entre as grandezas envolvidas nas situações 1, 2 e 3 e também construiriam justificativas válidas sobre tais relações, recorrendo aos conhecimentos adquiridos na atividade 1 acerca das grandezas diretamente proporcionais. Também supomos que os discentes identificariam que a situação 4 da referida atividade não trazia a relação proporcional direta entre as grandezas do contexto desse situação. Cabe ressaltar que consideramos como respostas válidas as produções que trouxeram os princípios do conceito da relação proporcional direta entre as grandezas envolvidas em cada uma das situações citadas. Sobre isso, as informações produzidas no experimento revelaram que a equipe B apresentou nas quatro situações da terceira atividade 83% de respostas válidas; a equipe C conseguiu 92% de respostas válidas; a equipe D 67%; a equipe E 92% e as equipes G, H, I produziram 67% de respostas válidas cada uma. Somente, a equipe F teve um desempenho insuficiente em todas as quatro situações da atividade 3, ou seja, obteve 100% de respostas não válidas.

Diante desses números, podemos afirmar que as nossas análises a priori foram válidas e coerentes para as situações mencionadas no parágrafo anterior da atividade 3, pois os alunos apresentaram em suas respostas saberes que indicaram os princípios da relação proporcional composta direta entre três grandezas.

Ainda na análise a priori da terceira atividade, previmos que os alunos conseguiriam construir suas observações e conclusões a respeito da relação proporcional composta direta entre três grandezas, tendendo como parâmetro o quadro síntese da relação proporcional direta e não proporcional ao final desta atividade. As informações produzidas mostraram, entretanto, que apenas três equipes, C, G, H, das oito participantes redigiram observações válidas e, apenas, a equipe G apresentou uma conclusão válida. Apesar disso, consideramos que a análise a priori para atividade 3 foi válida na maior parte do experimento, pois foi contemplada nas quatro situações abordadas nessa atividade, porém não foi válida, para a maioria das equipes, com relação às construções de observação e conclusão ao final da atividade; talvez, a falta de prática dos alunos com a escrita tenha contribuído para esse desfecho.

Ainda que a maioria das equipes não tenha apresentado observações e conclusões empíricas sobre a proporcionalidade composta direta entre as grandezas na atividade 3, podemos considerar que as situações vivenciadas pelos alunos nesta sessão de ensino contribuíram para formação de saberes que serão retomados durante a apresentação da regra de três composta, contribuindo dessa forma para o aprendizado dessa técnica de maneira funcional, pois, quase sempre, é utilizada mecanicamente pelos discentes nas aulas de matemática.

6.8. ANÁLISE A POSTERIORI DA OITAVA SESSÃO DE ENSINO

No dia 21 de novembro de 2017, aconteceu a oitava sessão de ensino para 26 alunos presentes, cuja intenção era apresentar a técnica da regra de três composta, no que tange os procedimentos a serem seguidos aos aplicar a regra.

Em nossas hipóteses para a regra de três composta na análise a priori, supomos que os discentes encontrariam dificuldades em identificar as grandezas envolvidas na situação, realizar a análise proporcional das grandezas e também em montar a proporcionalidade composta, quando pelo menos uma das grandezas for inversamente proporcional, pois poderia acontecer a não inversão da(s) razão(ões).

Conforme o que havíamos previsto na análise a priori a respeito da apresentação da regra de três composta, podemos dizer que as nossas hipóteses se confirmaram parcialmente, uma vez que no decorrer da oitava sessão de ensino os alunos apresentaram dificuldades em determinar quais as grandezas estavam envolvidas no problema, pois, quase sempre, conseguiam detectar apenas duas grandezas ao invés de três; entretanto, não apresentaram maiores dificuldades em realizar a análise das grandezas quanto à proporcionalidade, o que interpretamos como uma aquisição dos conceitos acerca da proporcionalidade direta e inversa, apresentados anteriormente nas atividades 1 e 2, respectivamente. Também as nossas hipóteses se confirmaram com ralação à proporção composta, porque alguns alunos ao arrumarem os valores das grandezas em proporção não fizeram a inversão da razão ou das razões desses valores ao resolverem a regra de três composta. No entanto, com as intervenções realizadas em sala de aula e com a resolução de mais questões essas dificuldades pontuais e inerentes ao conhecimento novo foram sendo minoradas em boa parte dos alunos que estavam com dificuldades. Assim, podemos afirmar que a execução da oitava sessão de ensino direcionada à apresentação da regra de três composta obteve êxito, mesmo com as dificuldades de início, pois as construções apresentadas de alguns alunos, S_{14}, S_{27}, S_{32}, S_{33} e S_{34}, sinalizaram uma compreensão dos procedimentos da regra, ainda que superficialmente. Com isso, acreditamos que as dificuldades remanescentes possam ser atenuadas ou erradicadas à medida que a regra seja retomada nas sessões de ensino seguintes, onde os alunos poderão corrigir os erros e preencher as lacunas de compreensão a respeito do aprendizado da regra de três composta.

6.9. ANÁLISE A POSTERIORI DA NONA SESSÃO DE ENSINO

A referida sessão de ensino ocorreu no dia 23 novembro de 2017, e teve o propósito de reforçar os ensinamentos sobre a regra de três composta para os 27 alunos presentes, para tanto utilizamos os três horários de aula de matemática disponíveis.

De posse dos acontecimentos em sala de aula e das constatações sobre as construções dos alunos acerca da regra de três composta, podemos afirma que as dificuldades em aplicar a regra foram sendo amenizadas nesta sessão de ensino para a maioria dos alunos, como havíamos previsto na análise a priori. Com isso, reforça-se a ideia que a utilização de questões de aprofundamento ao final de uma sessão de ensino é um recurso pedagógico viável para a consolidação de princípios, conceitos e procedimentos matemáticos sobre o conteúdo que se pretende ensinar. Além do mais, atenua as dificuldades remanesces dos alunos sobre o objeto matemático estudado, permitindo a esses avançar no processo de ensino e aprendizagem.

Diante dos fatos podemos considerar que a execução da nova sessão de ensino surtiu o efeito esperado, haja vista que a turma, em sua maioria, apresentou um desempenho satisfatório frente às questões de aprofundamento da regra de três composta. Como exemplo, podemos citar os alunos S_{11}, S_{14}, S_{19}, S_{30}, S_{32} entre outros que aplicaram essa regra de maneira eficiente na resolução dos problemas.

6.10. ANÁLISE A POSTERIORI DA DÉCIMA SESSÃO DE ENSINO

Esta sessão de ensino aconteceu no dia 28 de novembro de 2017. No ensejo, estavam presentes 30 alunos que participaram da revisão de estudo sobre a regra de três simples e composta. A referida sessão serviu como apanhado dos ensinamentos sobre o objeto de estudo, regras de três, com o propósito de erradicar as dúvidas, reforçar o aprendizado e, assim, preparar os alunos para o pós-teste, considerado a última fase do nosso experimento.

Os episódios desta sessão de ensino mostraram a maturidade dos discentes acerca da aprendizagem dos conteúdos grandezas diretamente e inversamente proporcionais, regra de três simples e regra de três composta, ministrados ao longo das oito sessões de ensino, uma vez que as questões propostas do material foram resolvidas pelos alunos com poucas intervenções do professor pesquisador, o que demonstrou que os ensinamentos mencionados estavam consolidados na maior parte da amostra. Além do mais, presenciamos várias cenas em que os alunos se mostraram confiantes nas tomadas de decisões sobre as relações proporcionais entre as grandezas do problema, tanto na regra de três simples como na regra de três composta, fatos relevantes e indicativos da aquisição de conhecimento. Ainda sobre esse pensar, cabe destacar, apoiado na ideia de Sá e Costa (2014), que a compreensão da regra de maneira significativa depende de fato do entendimento dos conceitos de grandezas proporcionais (direta e inversa), caso contrário à aplicação da regra ocorre, quase sempre, de maneira mecânica e sem a devida percepção, ficando, assim, fadada ao erro.

Diante desse cenário, podemos presumir que a proposta engendrada de sequência didática para o ensino de regra de três surtiu efeito positivo na maioria dos alunos participantes do experimento e, consequentemente, nas aulas de matemática. E, se assim for, passamos a responder, ainda que empiricamente, a nossa questão pesquisa, que pretendia saber quais os efeitos da sequência supracitada provoca sobre a participação em aulas de matemática e no desempenho dos alunos na resolução de questões envolvendo regras de três.

Por fim, acreditamos que a décima sessão de ensino atendeu as nossas expectativas sobre o aprendizado das regras de três, cuja hipótese inicial na análise a priori era de que os alunos apresentariam um desempenho satisfatório frente às questões propostas sobre as regras de três, o que de fato aconteceu para a maioria dos alunos.

6.11. ANÁLISE A POSTERIORI DA DÉCIMA PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

A última sessão de ensino ocorreu em 05 de dezembro de 2017, com aplicação do pós-teste para um grupo de 29 alunos presentes. O tempo de execução dessa sessão durou os três horários de aula disponíveis, sendo cada um de 45 minutos. Cabe ressaltar, que as questões desse teste foram as mesmas do pré-teste, e teve como objetivo verificar o desempenho dos discentes acerca da regra de três, após serem submetidos ao ensino desse conteúdo por meio de atividades.

O desenrolar desta sessão aconteceu dentro da normalidade, com os alunos empenhados em resolver as questões sobre regras de três simples e composta do pós-teste, e a quantidade de acertos e erros por questão está disposta no quadro a seguir, inclusive a quantidade de questões em branco.

Quadro 44 − Desempenho no pós-teste por questão

Questões	Quantidade de acerto	%	Quantidade de erro	%	Quantidade em branco	%
A	28	96,6	1	3,4	0	0
B	26	89,7	3	10,3	0	0
C	24	82,8	5	17,2	0	0
D	21	72,4	8	27,6	0	0
E	23	79,3	6	20,7	0	0
F	19	65,5	9	31	1	3,5
G	22	79,3	6	17,3	1	3,4
H	17	62,1	12	37,9	0	0
I	13	44,8	14	48,3	2	6,9
J	18	62,1	9	31	2	6,9

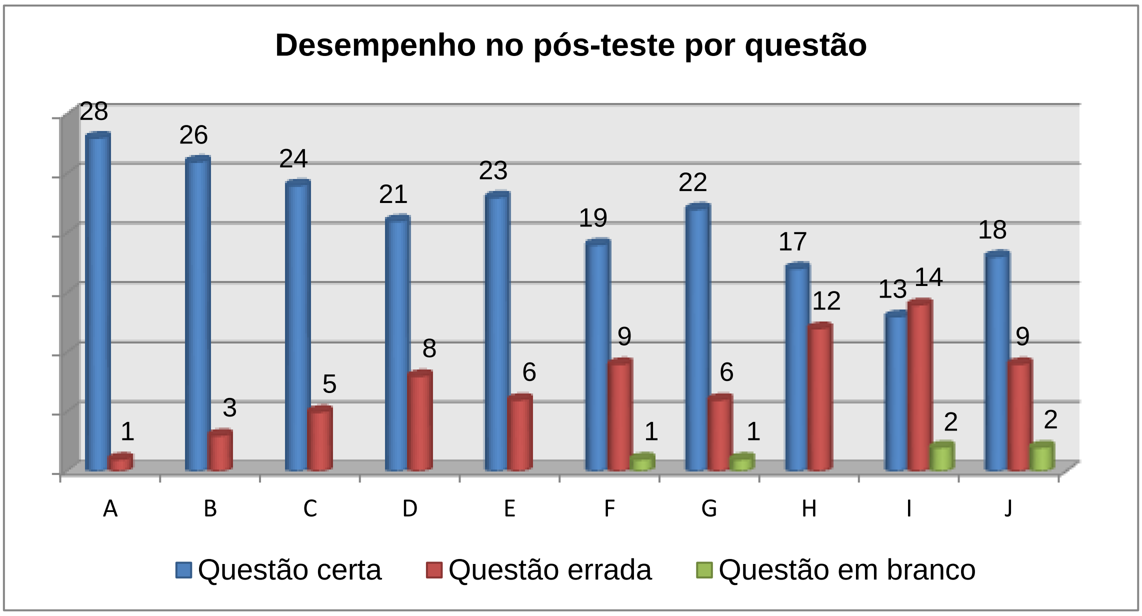
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Conforme o exposto no quadro acima, podemos observar que a quantidade de acertos por questão foi superior a de erros, chegando a um percentual de 90% de aproveitamento, o que consideramos um desempenho satisfatório, e ficou dentro do esperado em nossa análise a priori, em que havíamos previsto uma quantidade de acertos de pelo menos de 80% das questões do teste final.

Sobre a *questão I* do pós-teste em que a quantidade de erros foi superior a de acertos, convém ressaltar, no entanto, que a parcela de questões em branco foi reduzida nesse teste se comparada com o pré-teste, da mesma forma o percentual de erros, passamos de 55,2% para 48,3%; já com relação ao percentual de acerto, saltamos de 0% no teste inicial para 44,8% no pós-teste. Apesar desses números, consideramos que o desempenho dos alunos não foi satisfatório, e ficou abaixo do que esperávamos para a referida questão.

No gráfico adiante apresentamos os valores absolutos obtidos nas questões do pós-testes, distribuídos nas categorias *Questão certa*, *Questão errada* e *Questão em branco.*

Gráfico 11 − Desempenho dos discentes no pós-teste por questão



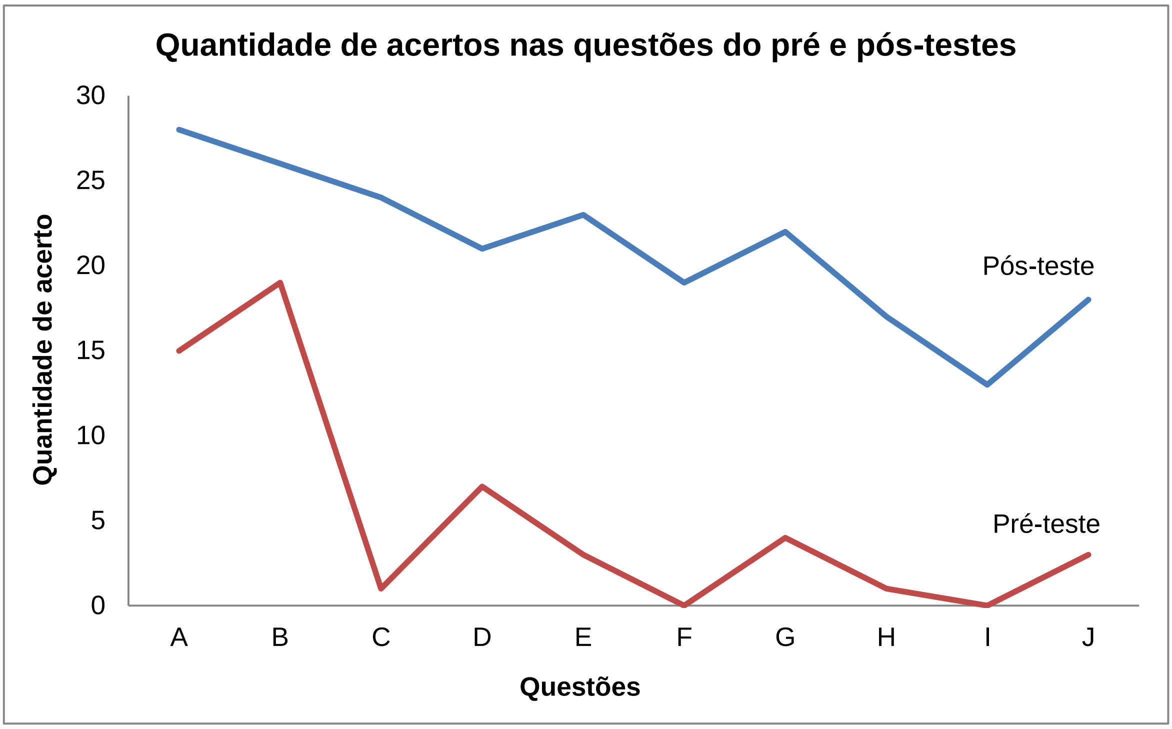
Fonte: Experimento (2017)

Os valores do gráfico supracitado revelaram que a quantidade maior de acertos se concentrou em quatro das cinco primeiras questões, A, B, C, E, respectivamente; além do mais, nenhum dos 29 participantes deixou alguma dessas questões em branco. É importante ressaltar, que as questões mencionadas traziam contextos que relacionaram apenas duas grandezas proporcionais, e foram resolvidas por meio da aplicação da regra de três simples.

Sobre as outras cinco questões, observamos que a quantidade de acertos superou a de erros, com exceção da questão “I”, e a quantidade de questões em branco foi reduzida se comparada com o teste inicial. Esses acertos revelaram uma compreensão por parte dos alunos pesquisados no fazer da regra de três composta, uma vez que as questões mencionadas abordaram contextos que relacionaram três grandezas proporcionalmente.

Diante dessas informações que indicaram uma melhora no desempenho dos alunos pesquisados com relação à resolução das regras de três, após serem submetidos as sessões de ensino da sequência didática, cabe compararmos tal desempenho por questão nos dois testes realizados durante o experimento, para tanto apresentamos o gráfico adiante, que mostra a quantidade absoluta de acerto no pré e pós-testes.

Gráfico 12 − Quantidade de acertos nas questões do pré e pós-testes



Fonte: Experimento (2017)

O comportamento do gráfico supracitado revela o quão à quantidade de questões certas no pós-teste foi superior a do pré-teste, contexto sintomático de que a aplicação da sequência didática fomentada nas sessões de ensino do experimento e direcionada aos alunos do 7º ano do ensino fundamental trouxe resultados positivos nas aulas de matemática, e, em especial, para o aprendizado do conteúdo das regras de três.

Essa constatação na melhora do aprendizado dos alunos na resolução das regras de três mostrada no Gráfico 12 reforça a ideia de que o ensino desse conteúdo deve ocorrer por meio de metodologias alternativas, que levem o aluno a participar de forma ativa no processo de construção dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais, pois uma vez consolidados esses conceitos a utilização das regras acontece de maneira consciente e funcional em contextos com grandezas proporcionais, além do mais os erros na execução do algoritmo da regra são minorados, o que implicada numa melhora no ensino e aprendizado do assunto regra de três.

Ainda que os acertos superaram os erros na maioria da amostrada analisada, no que tange à resolução de questões de regras de três, como mostramos anteriormente, cabe categorizarmos esses erros dos alunos na execução das regras, com intuito de apontarmos possíveis caminhos metodológicos que venham a ser fomentados para minimizar as dificuldades dos alunos na resolução da regra de três. Desse modo, apresentamos no quadro adiante os erros por categorias e as suas respectivas descrições.

Quadro 45 – Categorias de erros cometidos na resolução das regras de três

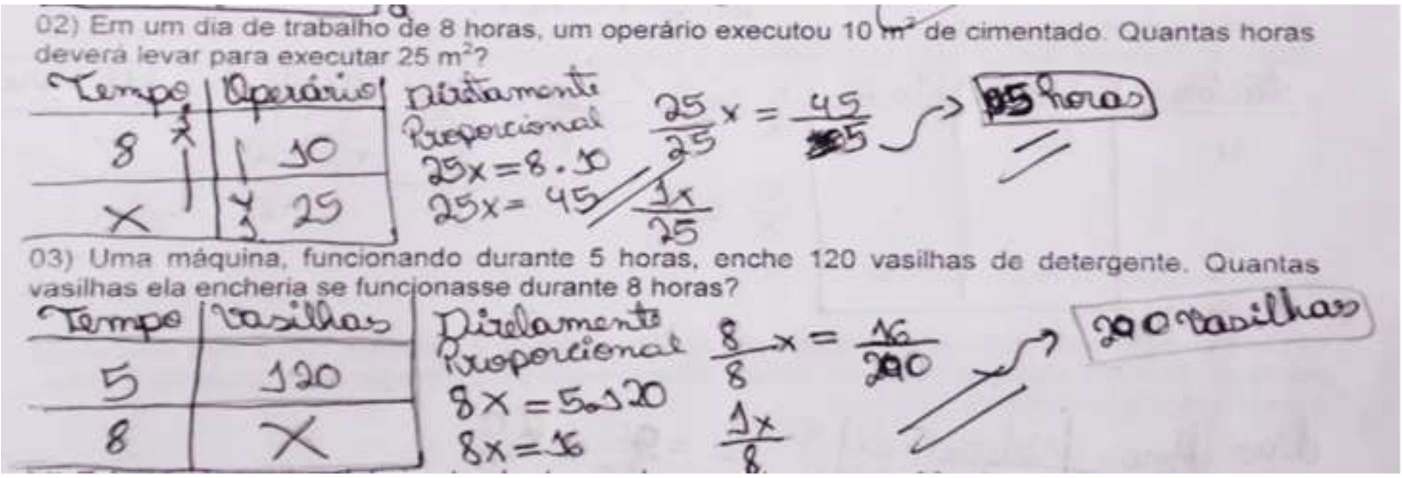
Tipo de regra	Categoria	Descrição
Regra de três simples	(1ª) Erro no resultado da operação matemática.	Apresentar o resultado da operação (multiplicação e/ou divisão) incorreto.
	(2ª) Erro quanto a determinação das grandezas do problema	Não representar todas as grandezas do problema
	(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.	Classificar de forma errada a relação proporcional entre as grandezas.
	(4ª) Erro de aplicação da regra.	Aplicar a regra inadequada à relação proporcional.
	(5ª) Erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema.	Apresentar valor(es) que não está(ão) no problema.
Regra de três composta	(1ª) Erro no resultado da operação matemática.	Apresentar o resultado da operação (multiplicação e/ou divisão) incorreto.
	(2ª) Erro quanto a determinação das grandezas do problema	Não representar todas as grandezas do problema.
	(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.	Classificar de forma errada a relação proporcional entre as grandezas.
	(4ª) Erro de aplicação da regra.	Aplicar a regra inadequada à relação proporcional.
	(5ª) Erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema.	Apresentar valor(es) que não está(ão) no problema.
	(6ª) Erro em montar a regra	Dispor os valores na proporção composta de maneira errada.

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Com base nas informações do Quadro 45, vamos classificar os erros cometidos por alguns alunos, mostrados nas imagens abaixo, ao resolverem as questões de regras de três do pós-teste.

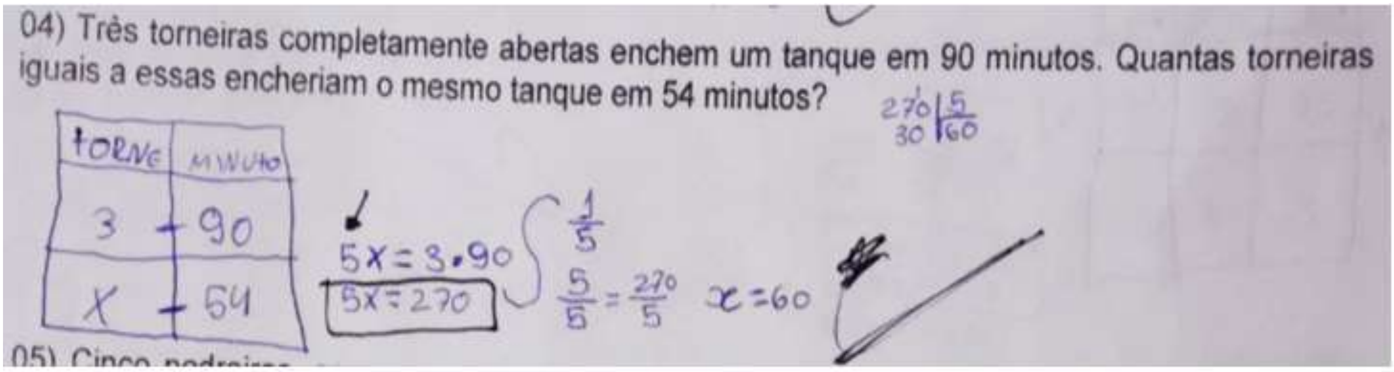
Imagem 150 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três simples

Resolução do aluno S_5



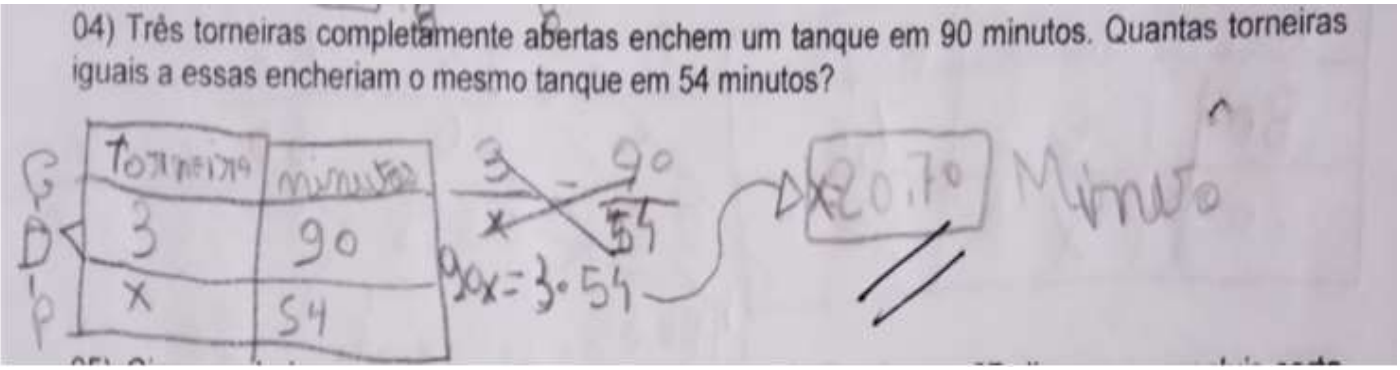
Categoria(s): *(4ª) Erro de aplicação da regra.*

Resolução do aluno S_{19}



Categoria(s): *(5ª) Erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema.*

Resolução do aluno S_{17}

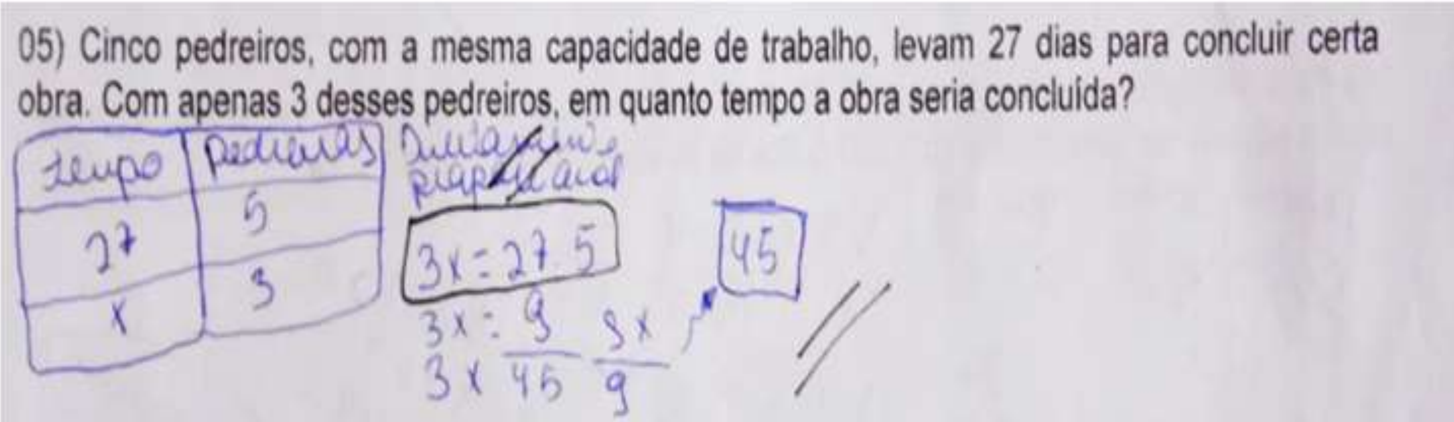


Categoria(s): *(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Fonte: Pós-teste (2017)

Imagem 151 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três simples

Resolução do aluno S_{29}



Categoria(s): *(1ª) Erro no resultado da operação matemática; (3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais; (4ª) Erro de aplicação da regra.*

Fonte: Pós-teste (2017)

De posse das informações produzidas no pós-teste, podemos afirmar que os erros cometidos pela aluna S_5 se enquadram na quarta categoria, isto é, ela analisou as grandezas do problema de maneira correta quanto à proporcionalidade, entretanto, procedeu de forma equivocada ao aplicar a regra de três simples, pois a aluna resolveu as duas questões pelo método aplicado às grandezas inversamente proporcionais, isto é, igualou os produtos das grandezas, ao invés de igualar as razões dessas grandezas. Presumimos que tal equívoco, seja resultado da falta de atenção nas atividades de ensino sobre os procedimentos da regra de três simples para as grandezas direta e inversamente proporcionais, já que enfatizamos bastante nas aulas a diferença de aplicação da regra quanto à proporcionalidade.

Quanto ao erro do aluno S_{19}, podemos afirmar, com base em sua resolução, que foi cometido por falta de atenção ao resolver a questão, pois ao aplicar a regra de três simples para as grandezas inversamente proporcionais, envolvidas no contexto do problema, ele escreveu o valor 5 ao invés de 54 para a grandeza tempo, o que resultou na perda da questão. Esse erro se enquadrou na quinta categoria, ou seja, *erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema.* Todavia, cabe ressaltar que a produção fomentada pelo aluno revelou uma compreensão do conceito de grandezas inversamente proporcionais e também da regra de três simples, e o erro cometido não recaiu sobre tais compreensões, o que não compromete a aquisição do conhecimento adquirido nas atividades de ensino sobre grandezas proporcionais.

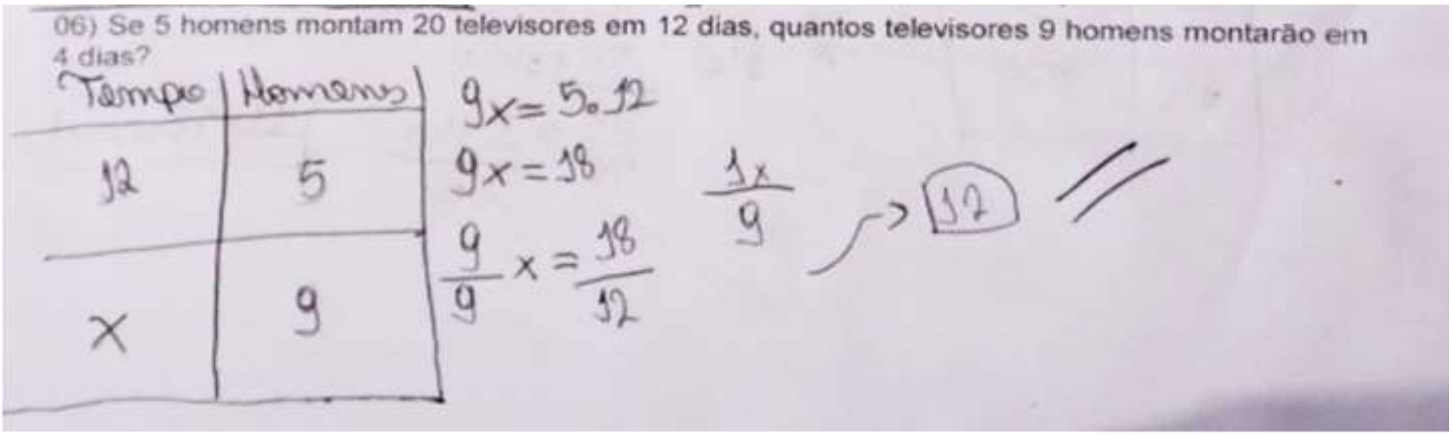
Com relação ao erro do aluno S_{17}, da terceira categoria, esse recaiu sobre a análise das grandezas proporcionais, pois considerou que as grandezas do problema eram diretamente proporcionais, quando na verdade se tratavam de grandezas inversamente proporcionais. Tal tomada de posição sobre a proporcionalidade das grandezas acarretou na aplicação da regra de três simples conforme a análise feita, o que levou a perda da questão no teste final, já que a mesma não continha grandezas diretamente proporcionais.

A respeito do realizado pela aluna S_{29}, observamos que os erros cometidos, primeira, terceira e quarta categorias, estiveram relacionados com a análise da proporcionalidade entre as grandezas e também com a aplicação da regra de três simples. Quanto ao primeiro, podemos afirmar que a aluna realizou uma análise equivocada sobre a proporcionalidade das grandezas do problema, uma vez que considerou que as quantidades relacionadas eram diretamente proporcionais, quando de fato era um contexto com grandezas inversamente proporcionais. No caso do segundo, observamos que o método aplicado da regra de três simples não estava de acordo com a análise feita sobre a proporcionalidade, apesar de errada, isto é, a discente igualou os produtos das grandezas ao invés de igualar as razões dessas grandezas, algo peculiar para as grandezas diretamente proporcionais. Outro agravante foi o cálculo errado do produto para determinar o valor do termo desconhecido. Talvez ao explorarmos mais contextos que relacionem duas grandezas proporcionais, essas dificuldades podem ser minimizadas ou quiçá erradicadas, e com isso resultar numa aplicação eficiente da regra de três simples.

Ainda sobre os erros cometidos no pós-teste, apresentamos a seguir as produções dos alunos ao tentarem resolver as questões de regra de três composta.

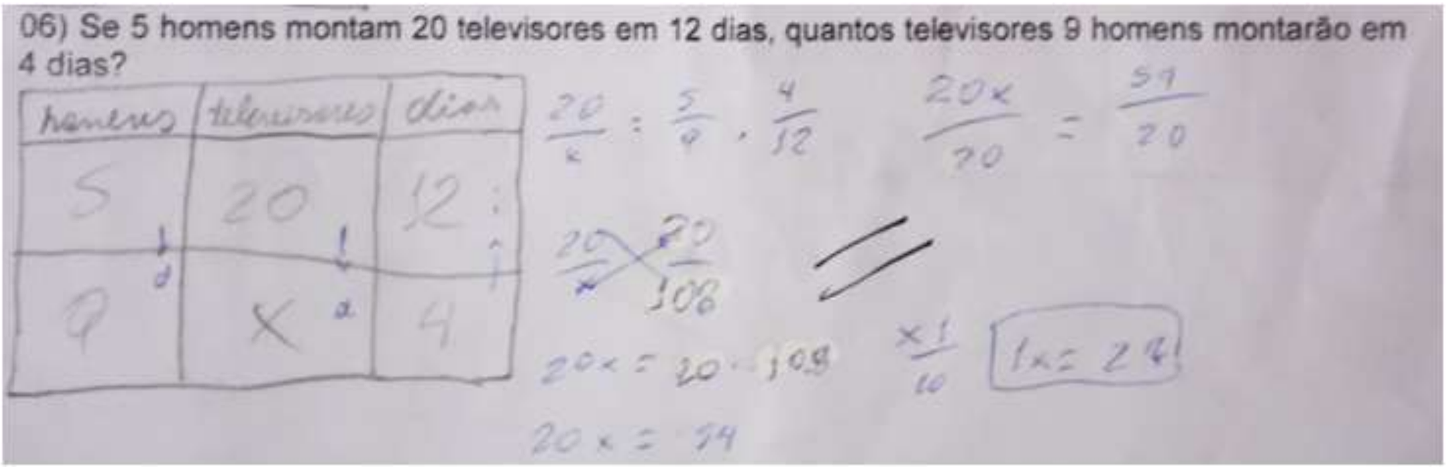
Imagem 152 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_5



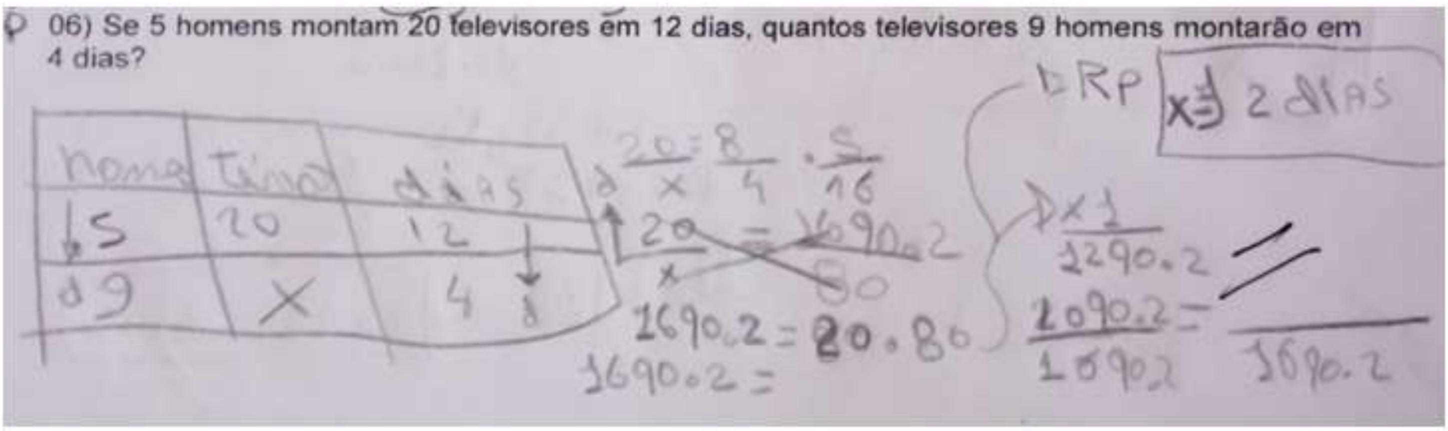
Categoria(s): *(2ª) Erro quanto a determinação das grandezas do problema.*

Resolução do aluno S_{24}



Categoria(s): *(1ª) Erro no resultado da operação matemática; (3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Resolução do aluno S_{17}

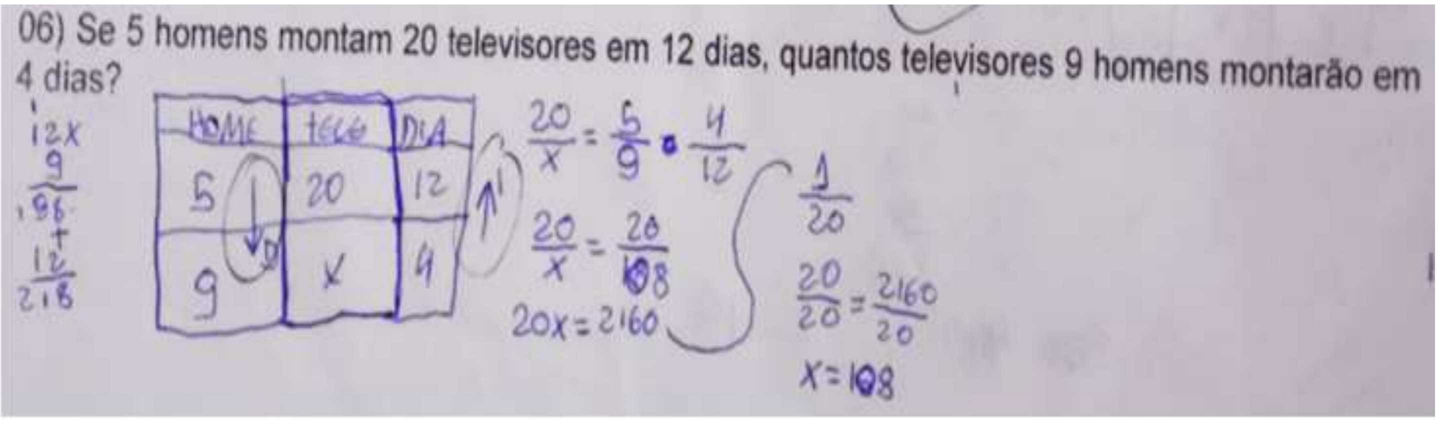


Categoria(s): *(1ª) Erro no resultado da operação matemática; (5ª) Erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema.*

Fonte: Pós-teste (2017)

Imagem 153 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_{19}



Categoria(s): *(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Fonte: Pós-teste (2017)

A respeito do realizado pela aluna S_5, podemos presumir que a dificuldade apresentada esteve em determinar todas as grandezas envolvidas na questão, erro da segunda categoria, o que fez com que a aluna relacionasse apenas duas grandezas ao invés de três, assim, tratou o problema proposto como sendo de proporção simples, e não de proporcionalidade composta. Talvez, tal modo de pensar foi causa de distração, pois ao ler o contexto da situação posta não percebeu que havia três grandezas relacionadas, ou ainda por imaginar que o modelo de questão era igual as demais que antecederam, onde estavam relacionadas apenas duas grandezas proporcionais.

Quanto aos erros do aluno S_{24}, de primeira e terceira categorias, podemos presumir que este entendeu que as grandezas quantidade de dias e de televisores se relacionavam inversamente proporcionais, como o indicado na imagem pelo aluno, quando na verdade eram diretamente proporcionais. Essa tomada de posição quanto à proporcionalidade levou o discente a executar a regra de três composta de forma equivocada, além do mais, esse aluno cometeu erro na operação de multiplicação. Devido a esses equívocos a solução encontrada não era a correta para o problema. Apesar dos erros cometidos, a produção do discente indicou uma compreensão da técnica da regra de três composta. Portanto, os erros revelados certamente é fruto de pouca experiência com a proporcionalidade composta, que, em nossa análise, pode ser corrigido com as questões de aprofundamento sobre a regra de três composta.

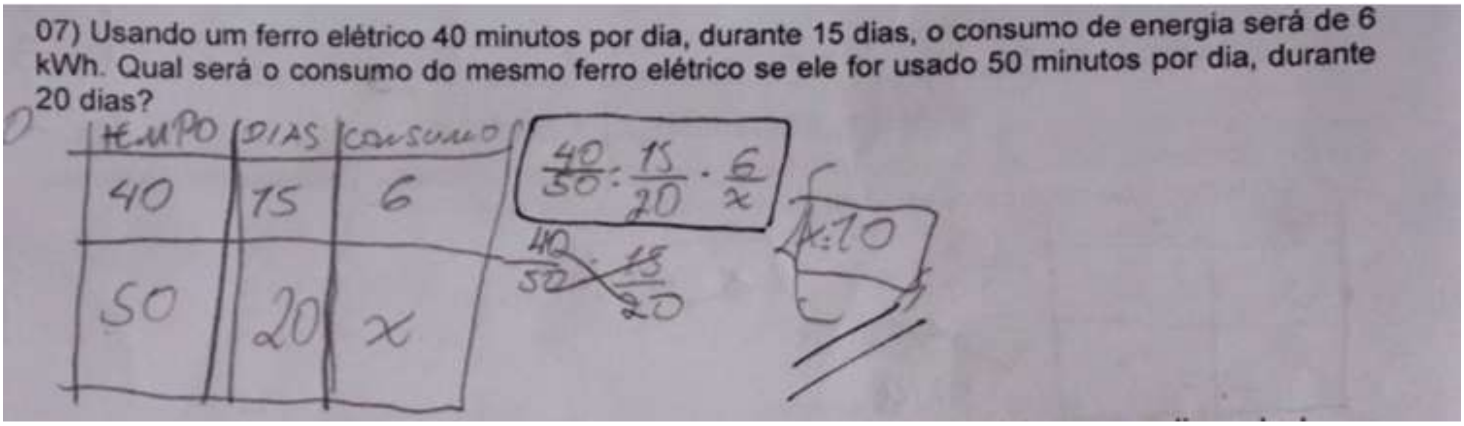
Com relação à produção do aluno S_{17}, esta indicou uma compreensão da identificação das grandezas e também da análise proporcional das mesmas. Entretanto, ao aplicar a regra de três composta utilizou de valores contrários ao contexto da questão posta, erro da quinta categoria, além disso o aluno apresentou cálculos equivocados ao realizar a multiplicação dos valores, erro da primeira categoria. Devido a esses equívocos, a solução encontrada não era adequada para a questão. É provável que esse aluno tenha se distraído no instante de transcrever os dados do problema para o algoritmo da regra, por isso o erro foi inevitável.

Sobre o erro do aluno S_{19}, da terceira categoria, podemos afirmar que ele procedeu da mesma forma que o discente S_{24}, isto é, considerou que as grandezas dias e televisores como sendo grandezas inversamente proporcionais, e, em seguida, aplicou a regra de três composta de acordo com essa interpretação, o que ocasionou a perda da questão. Como dito antes, esse erro é sintomático e pode ser erradicado por meio de mais experiências com a proporcionalidade composta.

Acerca das outras questões do pós-teste, apresentamos a seguir os erros nas produções dos alunos ao tentarem resolver essas questões por meio da regra de três composta.

Imagem 154 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_{22}


07) Usando um ferro elétrico 40 minutos por dia, durante 15 dias, o consumo de energia será de 6 kWh. Qual será o consumo do mesmo ferro elétrico se ele for usado 50 minutos por dia, durante 20 dias?

TEMPO	DIAS	CONSUMO
40	15	6
50	20	x

$\boxed{\frac{40}{50} : \frac{15}{20} \cdot \frac{6}{x}}$

$\frac{40}{50}$ $\frac{15}{20}$

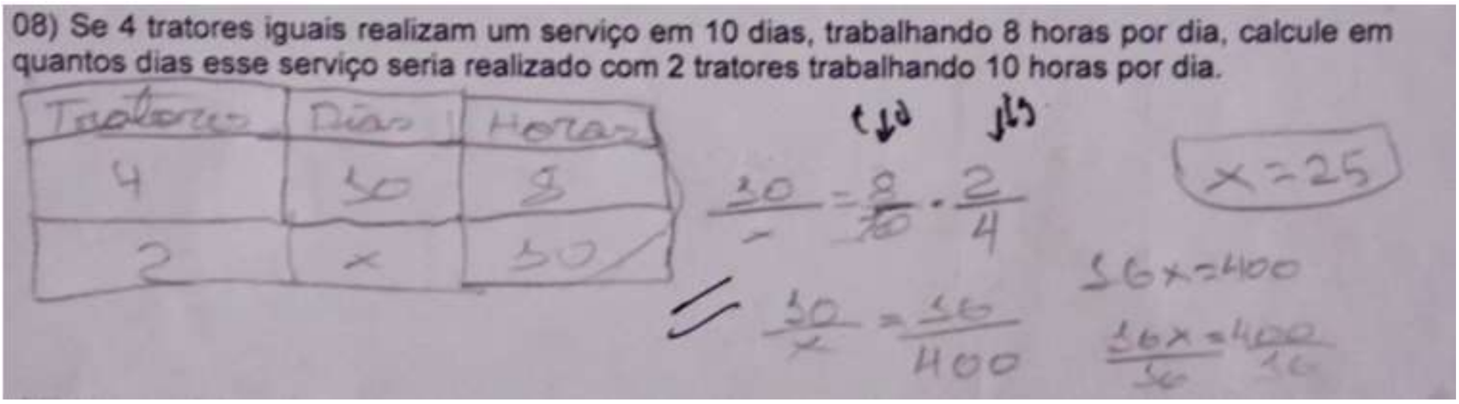
$\boxed{x = 10}$

Categoria(s): *Erro no resultado da operação matemática; (6ª) Erro em montar a regra.*

Fonte: Pós-teste (2017)

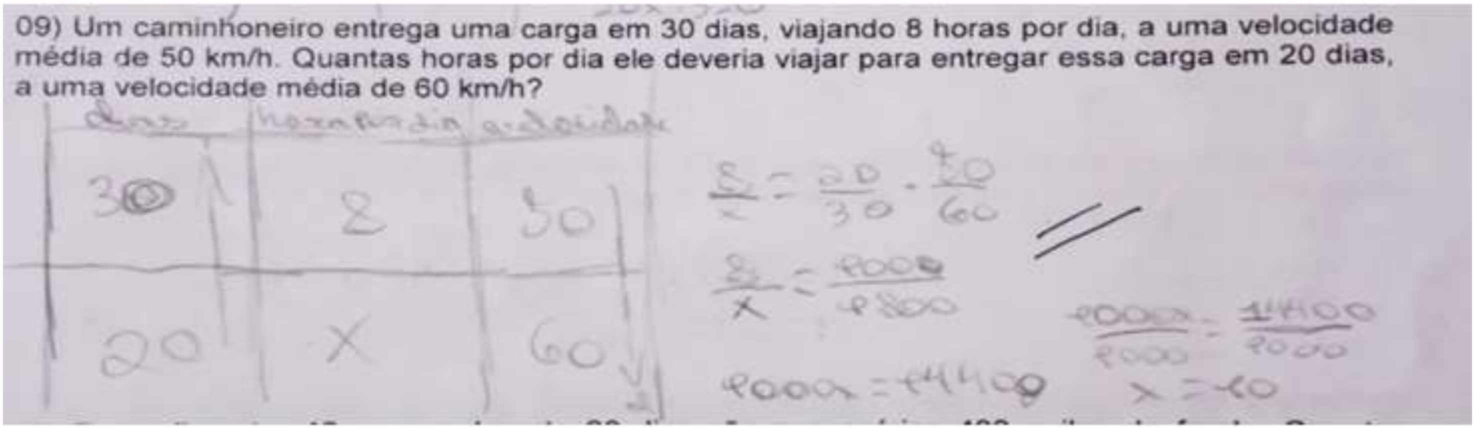
Imagem 155 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_1



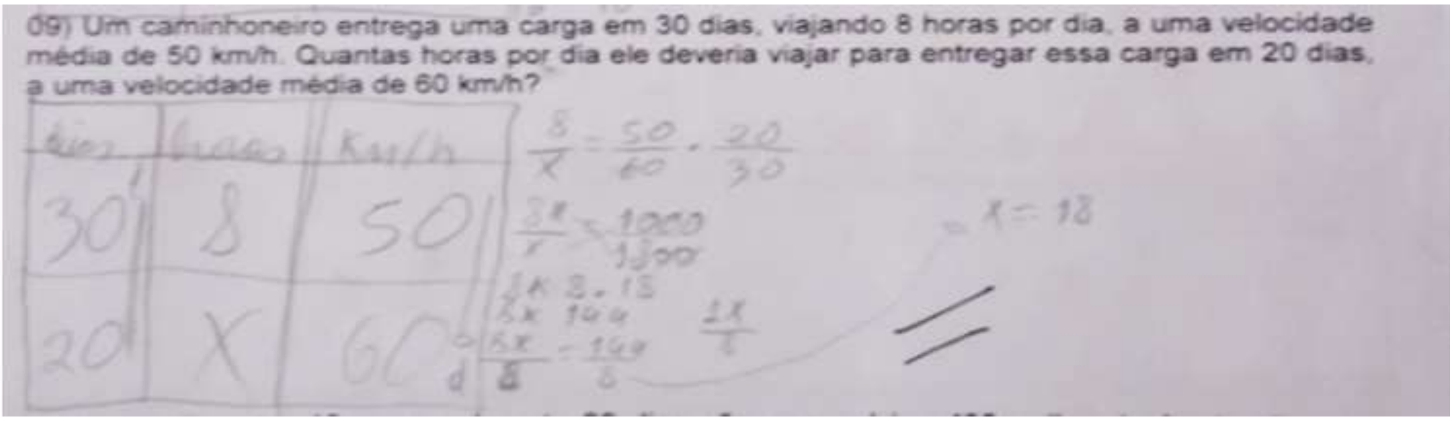
Categoria(s): *(1ª) Erro no resultado da operação matemática; (3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Resolução do aluno S_{13}



Categoria(s): *(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Resolução do aluno S_{16}

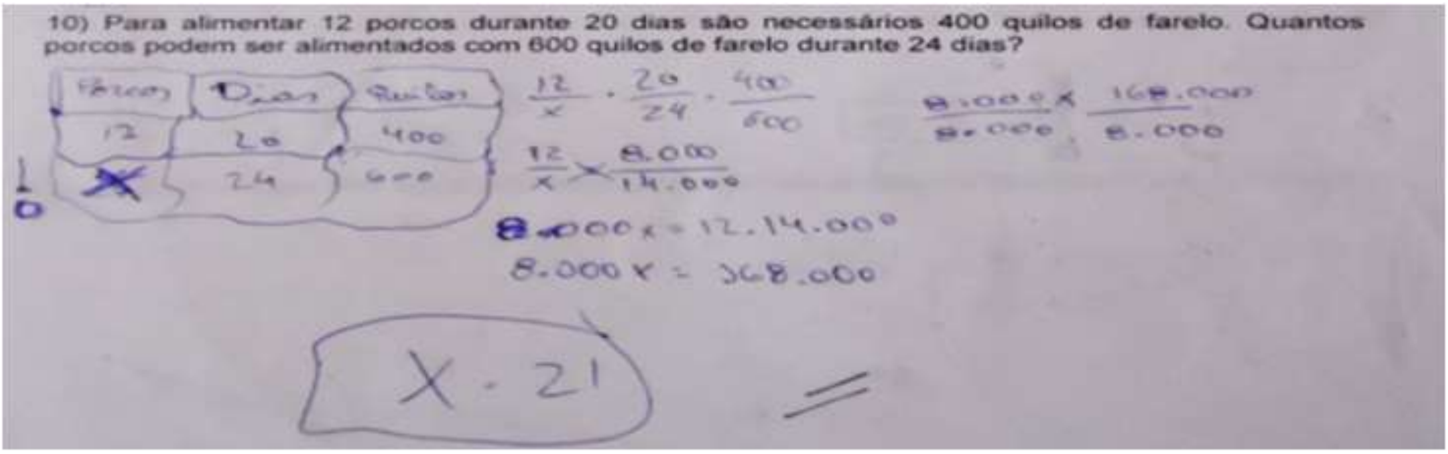


Categoria(s): *(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.*

Fonte: Pós-teste (2017)

Imagem 156 – Erros cometidos no pós-teste na regra de três composta

Resolução do aluno S_9



Categoria(s): *(1ª) Erro no resultado da operação matemática; (3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais*

Fonte: Pós-teste (2017)

Com base nas informações produzidas no pós-teste, podemos avaliar que o desempenho do aluno S_{22}, na questão 7, ficou abaixo do esperado, pois não conseguiu aplicar eficientemente a regra de três composta para encontrar a solução do problema, mesmo com uma aparente compreensão das grandezas envolvidas no contexto, e nem fez a análise da proporcionalidade entre as quantidades envolvidas na situação. Tais dificuldades se enquadram na primeira e sexta categorias de erros. Essas dificuldades, no entanto, são resultados de uma participação não efetiva nas sessões de ensino, em que buscamos apresentar de forma detalhada os procedimentos da regra de três composta, já que o referido aluno preferia passar a maior parte do tempo das aulas em conversas paralelas ao tema abordado em sala. Logo, seria pouco provável que o discente apresentasse um desempenho satisfatório na aplicação da rega de três composta.

Quanto ao feito do aluno S_1, observamos que os erros cometidos dizem respeito a primeira e a terceira categorias. Esse aluno considerou, pressupomos, que apenas uma das quantidades era diretamente proporcional e outra era inversamente proporcional, conforme a proporção composta apresenta na questão, quando na verdade eram grandezas inversamente proporcionais. Além do mais, o aluno não calculou corretamente o produto entre os termos das razões, o que gerou ainda mais erro na questão. Aqui cabe ressaltar, que o aluno mencionado apresentou um comportamento indisciplinar durante as sessões de ensino, pois, quase sempre, não se interessou em resolver as atividades propostas nas aulas sobre a regra de três, assim, o baixo desempenho apresentado por ele já era esperado.

Já o erro cometido pelo aluno S_{13}, terceira categoria, na questão do pós-teste foi devido a uma análise equivocada da proporcionalidade, pois ele considerou que as grandezas ‘horas por dia’ e ‘velocidade’ eram diretamente proporcionais, ao invés de inversamente proporcionais. Com essa tomada de posição errada, o resultado gerado ao aplicar a regra de três composta também foi errado. Acreditamos que erro dessa natureza esteja atrelado a pouca vivência do aluno em situações com proporcionalidade composta, e não por falta de compreensão dos conceitos acerca da proporcionalidade direta e inversa. Nesse pensar, propor situações variadas que abordem contexto com proporcionalidade composta, tendem a auxiliar na erradicação desses equívocos nas análises das grandezas proporcionais, e, assim, contribuir para uma aplicação eficiente da regra de três composta.

Com relação aos erros do aluno S_{16}, primeira e terceira categorias, observamos que ele apresentou o mesmo equívoco do aluno mencionado no parágrafo anterior a respeito da análise proporcional entre as grandezas, ou seja, classificou uma das grandezas de forma errônea, além do mais, fez uma simplificação também errada, o que comprometeu, de fato, a aplicação da regra de três composta e também a solução do problema. Todavia, pressupomos que erro desse tipo é causado devido a pouca experiência do aluno com a proporcionalidade composta, já que se trata de um assunto novo para o discente, mas que pode ser erradicado a partir da vivência com outras situações que retratem a relação proporcional entre três ou mais grandezas.

Por último, os erros cometidos pela aluna S_9, primeira e terceira categorias, que recaem sobre a análise das grandezas quanto à proporcionalidade e a operação de multiplicação. Conforme o apresentado na resolução, podemos perceber que a discente considerou que todas as grandezas eram diretamente proporcionais, e aplicou a regra de três composta, como se o problema possuísse apenas relações proporcionais direta, além disso realizou a multiplicação dos denominadores das frações na proporção composta de forma errada; logo, a solução construída não representava de fato o contexto do problema.

De posse das constatações desses erros, quase sempre, semelhantes nas questões de regra de três composta, nos fazem conjecturar que esses alunos ainda não adquiriram a maturidade necessária em analisar as relações proporcionais entre três grandezas envolvidas no problema, tampouco seguir os procedimentos arrolados para aplicação da regra na resolução de questões, além da dificuldade em realizar as operações de multiplica e divisão de maneira correta. Tudo isso, contribuiu para que os discentes mencionados não obtivessem um bom desempenho nas questões do pós-teste. Além dessas constatações, acreditamos também que o baixo aproveitamento de certos alunos foi devido à indisciplina durante as sessões de ensino, que, certamente, comprometeu o aprendizado dos conteúdos e princípios matemáticos ministrados na sequência didática para o ensino da regra de três.

Com o intuito de mostrarmos quais as categorias de erros na resolução das regras três no pós-teste apresentaram a maior concentração de discentes, trazemos o quadro a seguir que distribui esses alunos por categorias de erros.

Quadro 46 − Categorias de erros cometidos no pós-teste

Tipo de regra	Categoria	Discente
Regra de três simples	(1ª) Erro no resultado da operação matemática.	S_2, S_5, S_{17}, S_{29}
	(2ª) Erro quanto a determinação das grandezas do problema	**Nenhum**
	(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais.	S_1, S_2, S_5, S_{17}, S_{29}, S_{18}
	(4ª)Erro de aplicação da regra	S_2, S_5, S_8, S_{29}
	(5ª) Erro por utilizar valor que não correspondia ao dado do problema	S_{19}, S_{29}
Regra de três composta	(1ª) Erro de operação matemática	S_1, S_2, S_5, S_9, S_{16}, S_{17}, S_{19}, S_{22}, S_{24}
	(2ª) Erro quanto a determinação das grandezas do problema	S_2, S_5, S_{29}
	(3ª) Erro de análise das grandezas proporcionais	S_1, S_2, S_3, S_5, S_8, S_9, S_{13}, S_{16}, S_{17}, S_{19}, S_{24}, S_{12}, S_{18}, S_{28}
	(4ª) Erro de aplicação da regra	S_2, S_3, S_5, S_8, S_{17}, S_{22}, S_{29}, S_{12}, S_{18}
	(5ª) Erro por utilizar valores que não correspondiam aos dados do problema	S_{17}
	(6ª) Erro em montar a regra	S_3, S_{22}

Fonte: Experimento (2017)

De posse das informações contidas no quadro mencionado, percebemos que a maior concentração de erros na regra de três simples esteve na terceira categoria, *Erro de análise das grandezas proporcionais*, seguida das categorias (1ª) e (4ª), *Erro de operação matemática e Erro de aplicação da regra,* respectivamente, sendo que estas últimas continham a mesma quantidade de erros. Quanto à regra de três composta, notamos que os erros dos alunos estiveram concentrados nas categorias (3ª) e (4ª), *Erro de análise das grandezas proporcionais e Erro de aplicação da regra,* nessa ordem, e este em menor quantidade em relação ao primeiro.

Ainda sobre as informações do quadro citado anteriormente, cabe destacar que nenhum discente cometeu erro em determinar as grandezas do problema na regra de três simples. Entretanto, erros dessa natureza foram cometidos na regra de três composta pelos alunos S_2, S_5, S_{29}. Também na aplicação desta regra, notamos que a quantidade de erros na operação matemática foi maior do que na regra de três simples, e foram cometidos pelos discentes S_2, S_5, S_{16}, S_{17}, S_{19}, S_{22}.

As informações produzidas mostraram que alguns alunos cometeram erros na realização do teste final que abrangeram, praticamente, todas as categorias estabelecidas de erros para as regras de três, a exemplo citamos os discentes S_2, S_5, S_{17} e S_{29}. E como consequência desses erros, estes alunos obtiveram um desempenho igual ou inferior a 40% no referido teste.

Quanto ao erro de análise proporcional das grandezas nas regras de três, observamos que nem sempre esse tipo de erro implica em executar o algoritmo da regra também de forma errada, haja vista que as informações produzidas no Quadro 48 mostram alunos que cometeram erro na análise proporcional das grandezas, aplicaram corretamente o algoritmo da regra conforme a análise realizada, o que sinaliza uma compreensão da técnica da regra de três, entretanto, a análise da relação proporcional entre as grandezas precisa ser esmerada com a realização de questões de aprofundamento, para que essa dificuldade seja minorada ou erradicada no aplicar das regras de três.

Apesar dos erros citados anteriormente que, quase sempre, geraram desempenhos abaixo do esperado para os discentes que cometeram tais erros, cabe ressaltar outra parcela de alunos que obteve resultados satisfatórios no teste final, como é mostrado no quadro a seguir.

Quadro 47− Desempenho por aluno no pós-teste

Aluno (a)	Questões certas	%	Questões erradas	%	Questões em branco	%
S_1	6	60	2	20	2	20
S_2	0	0	10	100	0	0
S_3	5	50	5	50	0	0
S_4	10	100	0	0	0	0
S_5	**4**	40	6	60	0	0
S_7	10	100	0	0	0	0
S_8	6	60	4	40	0	0
S_9	7	70	3	30	0	0
S_{11}	10	100	0	0	0	0
S_{12}	9	90	1	10	0	0
S_{13}	9	90	1	10	0	0
S_{14}	10	100	0	0	0	0
S_{16}	8	80	2	20	0	0
S_{17}	**3**	30	6	60	1	10
S_{18}	**4**	40	6	60	0	0
S_{19}	8	80	2	20	0	0
S_{21}	10	100	0	0	0	0
S_{22}	7	70	3	30	0	0
S_{24}	6	60	4	40	0	0
S_{26}	10	100	0	0	0	0
S_{27}	8	80	0	0	2	20
S_{28}	7	70	2	20	1	10
S_{29}	**4**	40	6	60	0	0
S_{30}	10	100	0	0	0	0
S_{31}	10	100	0	0	0	0
S_{32}	10	100	0	0	0	0
S_{33}	10	100	0	0	0	0
S_{34}	10	100	0	0	0	0
S_{36}	**3**	30	7	70	0	0

Fonte: Experimento (2017)

De posse das informações do Quadro 47, é relevante destacarmos o desempenho positivo do aluno S_{12} no pós-teste, ainda que não tenha participado do pré-teste, pois o aproveitamento desse discente foi de 90% nas questões do teste final, o que sinalizou uma assimilação dos conceitos e princípios matemáticos ensinados nas sessões de ensino por meio das atividades da sequência didática. É importante ressaltar que esse bom resultado seja atribuído também à efetiva participação do aluno nas dez sessões de ensino em que esteve presente.

O mesmo não ocorreu com o aluno S_{36}, cujo desempenho no teste final foi insuficiente frente às questões de regra de três simples e composta. Todavia, cabe frisar que esse aluno chegou à turma pesquisada no final do mês de novembro de 2017, transferido de uma instituição de ensino particular para a escola pública estadual onde aplicamos o experimento. Diante desse fato, era pouco provável que esse discente obtivesse um rendimento satisfatório no referido teste, haja vista que ele só participou da última sessão de ensino, quando revisávamos o estudo da regra de três simples e composta para a realização do pós-teste.

Ainda sobre um rendimento insuficiente no pós-teste, podemos citar também os alunos S_2, S_5, S_{17}, S_{18} e S_{29}, cujo desempenho alcançado por eles ficou abaixo dos 50% do total de questões do teste final.

Nesse pensar sobre os rendimentos dos alunos, mostramos no quadro a seguir os percentuais de acerto, erro e branco, quantificados nos dois testes, realizados antes e depois da aplicação da sequência didática para o ensino das regras de três.

Quadro 48 − Percentuais de desempenho dos alunos no pré e pós-testes

Aluno (a)	**Percentual de acerto (%)**		**Percentual de erro (%)**		**Percentual de branco (%)**	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
S_1	20%	60%	10%	20%	70%	20%
S_2	0%	**0%**	10%	100%	90%	0%
S_3	10%	50%	90%	50%	0%	0%
S_4	40%	100%	60%	0%	0%	0%
S_5	10%	**40%**	40%	60%	50%	0%
S_7	20%	100%	80%	0%	0%	0%
S_8	10%	60%	90%	40%	0%	0%
S_9	50%	70%	50%	30%	0%	0%
S_{11}	40%	100%	50%	0%	10%	0%
S_{13}	20%	90%	80%	10%	0%	0%
S_{14}	30%	100%	60%	0%	10%	0%
S_{16}	20%	80%	80%	20%	0%	0%
S_{17}	10%	**30%**	90%	60%	0%	10%
S_{19}	0%	80%	100%	20%	0%	0%
S_{21}	20%	100%	10%	0%	70%	0%
S_{22}	40%	70%	50%	30%	10%	0%
S_{24}	0%	60%	100%	40%	0%	0%
S_{26}	20%	100%	10%	0%	70%	0%
S_{27}	10%	80%	80%	0%	10%	20%
S_{28}	0%	70%	10%	20%	90%	10%
S_{29}	10%	**40%**	40%	60%	50%	0%
S_{30}	0%	100%	40%	0%	60%	0%
S_{31}	10%	100%	40%	0%	50%	0%
S_{32}	30%	100%	70%	0%	0%	0%
S_{33}	50%	100%	30%	0%	20%	0%
S_{34}	30%	100%	70%	0%	0%	0%

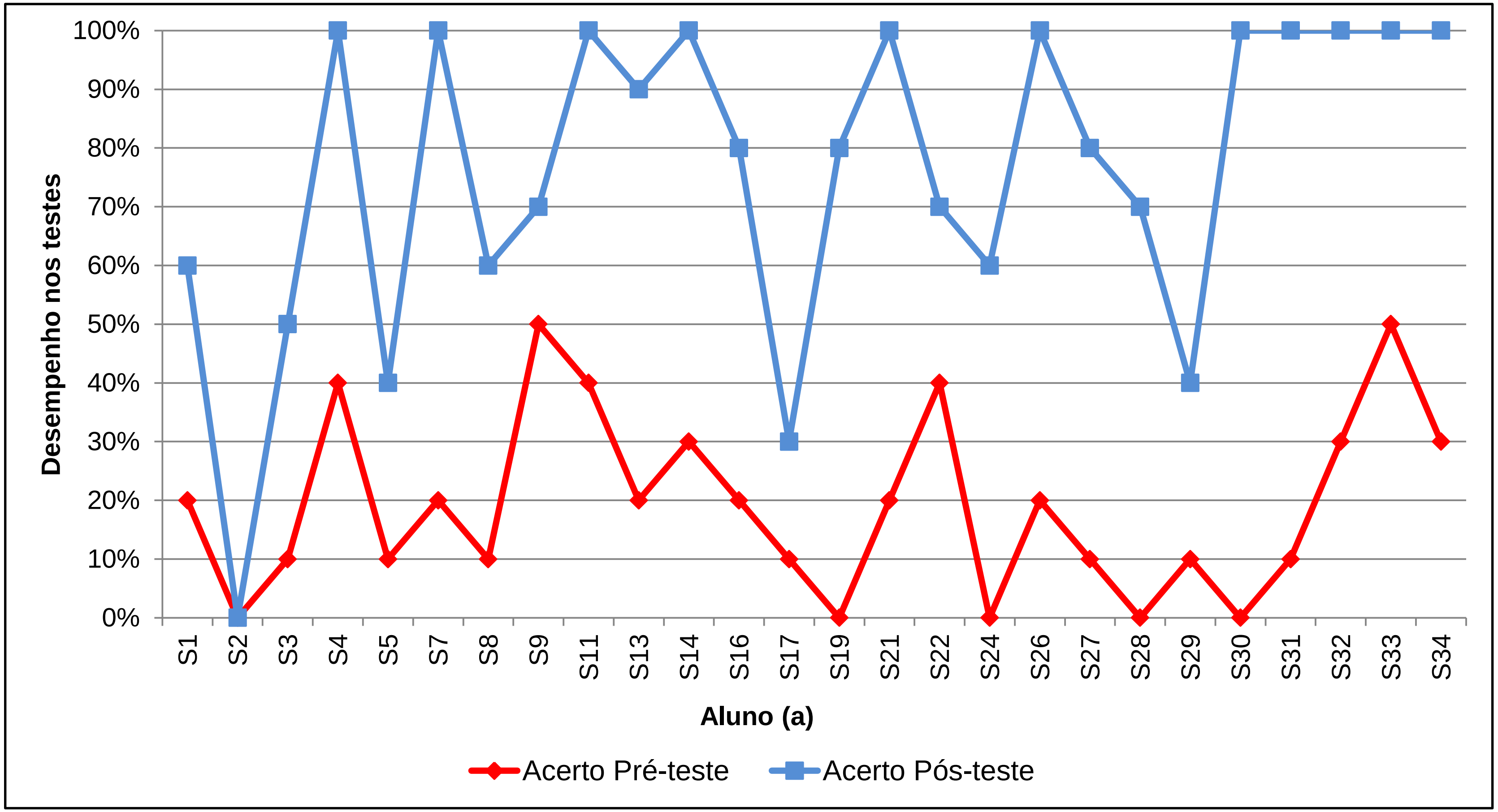
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Conforme as informações organizadas no Quadro 48, é perceptível que houve uma melhora considerável no desempenho da maioria dos alunos após a aplicação das sessões de ensino da sequência didática para o ensino e aprendizado das regras de três, pois dos 26 educandos que participaram dos dois testes, somente 4 desses permaneceram com desempenho abaixo dos 50% nas duas provas, e isso representou aproximadamente apenas 15% dos alunos analisados; entretanto, os 85% dos alunos restantes obtiveram nota igual ou superior a 50% no pós-teste, e mais, 42% dos alunos pesquisados alcançaram 100% de aproveitamento no teste final, como foi o caso dos alunos S_4, S_7, S_{11}, S_{14}, S_{21}, S_{26}, S_{30}, S_{31}, S_{32}, S_{33} e S_{34}.

Por esses resultados positivos, podemos presumir que a utilização de metodologias alternativas nas aulas de matemática, como por exemplo o ensino por atividades, podem contribuir para um ensino e aprendizado de qualidade nessa disciplina, sobretudo no ensino das regras de três, pois proporcionam uma participação ativa do aluno no processo de construção do conhecimento, já que envolve o discente em atividades que estimulam o raciocínio, a interpretação, a interação, a utilização de conhecimentos prévios e também a análise de determinadas situações inerentes ao objeto de aprendizagem. Desse modo, acreditamos que o ensino de matemática por esse viés minimiza as dificuldades do aluno com a matemática, e, assim, os princípios, conceitos e métodos inerentes dos conteúdos dessa disciplina tendem a ser mais facilmente assimilados durante as aulas.

Ainda como forma de reforçarmos as nossas suspeitas sobre eficácia da aplicação da sequência didática para o ensino das regras de três junto a amostra pesquisada, trazemos o gráfico comparativo adiante, que mostra, em valores percentuais, o desempenho individual dos alunos pesquisados nos dois testes realizados no experimento, que ocorreram antes e depois da aplicação da referida sequência didática.

Gráfico 13 − Desempenho individual dos alunos nos dois testes do experimento



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

De acordo com as informações apresentadas no gráfico mencionado que trouxe a comparação dos desempenhos de cada aluno nos dois testes do experimento, podemos pressupor que as atividades realizadas nas sessões de ensino da sequência didática para o ensino das regras de três contribuíram para o aprendizado desse conteúdo, uma vez que é perceptível que o rendimento dos discentes melhorou no pós-teste quando comparado com pré-teste na maioria da amostra em estudo. Sendo que essa melhora no rendimento esteve num patamar igual ou acima de 50% para aproximadamente 85% dos alunos pesquisados.

Outra análise comparativa foi realizada também, em termos percentuais, com relação ao desempenho dos alunos em cada uma das dez questões do pré e pós-testes, cujas informações produzidas estão no quadro adiante.

Quadro 49 − Percentual de desempenho por questão do pré e pós-testes

Questões	Percentual de acerto (%)		Percentual de erro (%)		Percentual de branco (%)	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
A	51,7%	96,6%	48,3%	3,4%	0%	0%
B	65,5%	89,7%	24,1%	10,3%	10,4%	0%
C	3,4%	82,8%	93,2%	17,2%	3,4%	0%
D	24,2%	72,4%	58,6%	27,6%	17,2%	0%
E	10,3%	79,3%	69,0%	20,7%	20,7%	0%
F	0%	65,5%	58,6%	31%	41,4%	3,5%
G	13,8%	79,3%	58,6%	17,3%	27,6%	3,4%
H	3,4%	62,1%	62,1%	37,9%	34,5%	0%
I	0%	44,8%	65,5%	48,3%	34,5%	6,9%
J	10,3%	62,1%	55,2%	31%	34,5%	6,9%

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

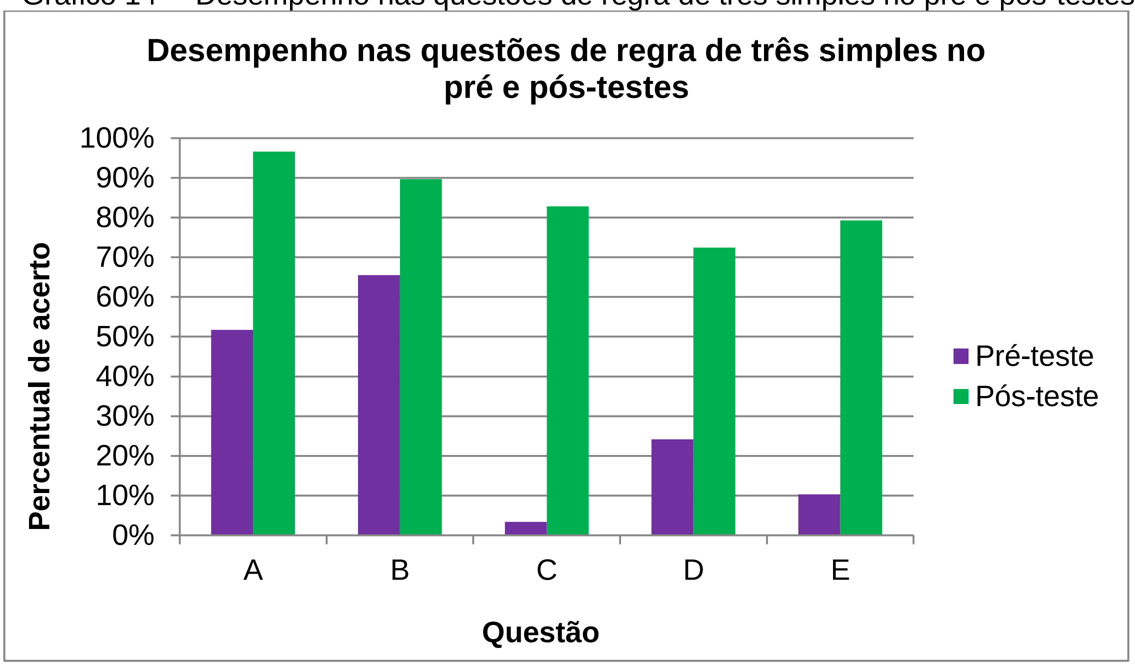
De acordo com os dados do Quadro 49, percebemos que após os alunos serem submetidos às sessões de ensino para o aprendizado das regras de três, o percentual de acertos nas questões no pós-teste foi superior a do pré-teste, chegando a passar de 60% em praticamente todas as dez questões com exceção da “I”, em que o percentual de acerto para essa questão não alcançou 50% dos alunos pesquisados.

Por outro lado, o percentual de erro na referida questão reduziu de 65,5% para 48,3%, e também a quantidade de questões em branco caiu de 34,5% para 6,9%.

A variação dos dados no quadro supracitado a respeito das questões do pré e pós-testes, nos faz conjecturar que os resultados alcançados positivamente no segundo teste, não são produtos da casualidade, e sim de uma intervenção pedagógica adequada que viabilizou o ensino de matemática e, em especial, o ensino das regras de três para os alunos do 7º ano do ensino fundamental, que até então desconheciam esse conteúdo antes da aplicação da sequência didática.

Nos dois gráficos a seguir fazemos um comparativo do desempenho dos discentes nos dois testes mencionados anteriormente, levando em consideração o percentual de acerto nas questões de regra de três simples e composta, respectivamente, antes e depois da aplicação da sequência didática.

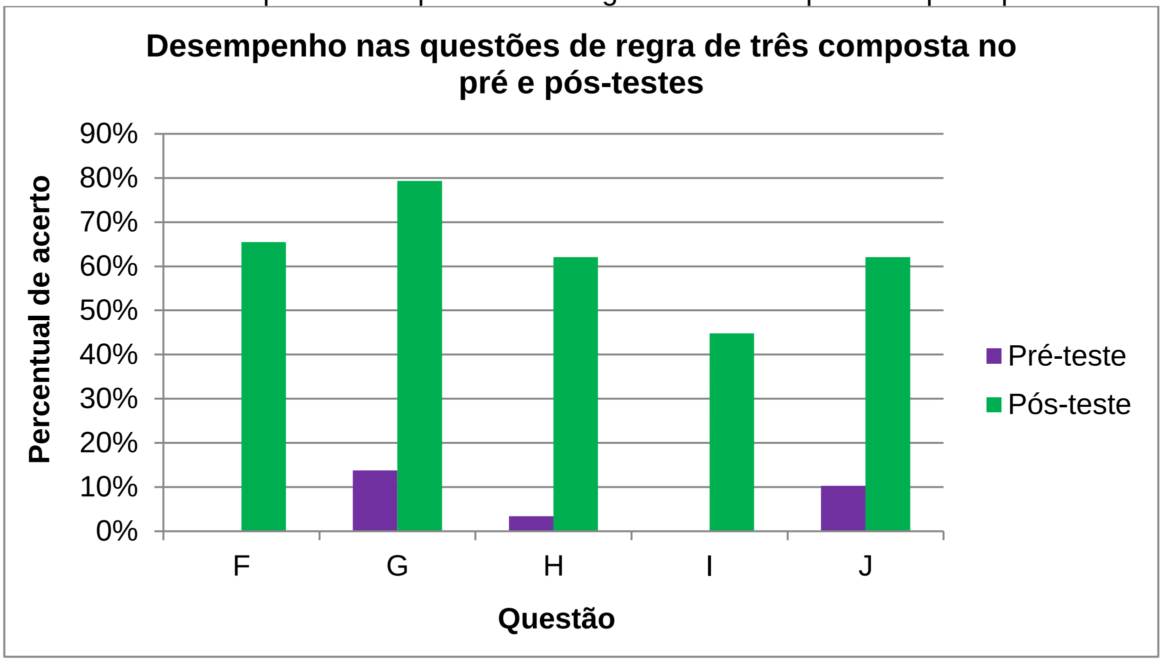
Gráfico 14 – Desempenho nas questões de regra de três simples no pré e pós-testes



Fonte: Experimento (2017)

Conforme os dados do gráfico acima, podemos afirmar que houve uma melhora no desempenho dos alunos nas questões de regra de três simples, acima dos 70%, com a aplicação da sequência didática para o ensino e aprendizado desse conteúdo. Situação semelhante a essa aconteceu também nas questões da regra de três composta, como podemos observar no segundo gráfico adiante.

Gráfico 15– Desempenho nas questões de regra de três composta no pré e pós-testes



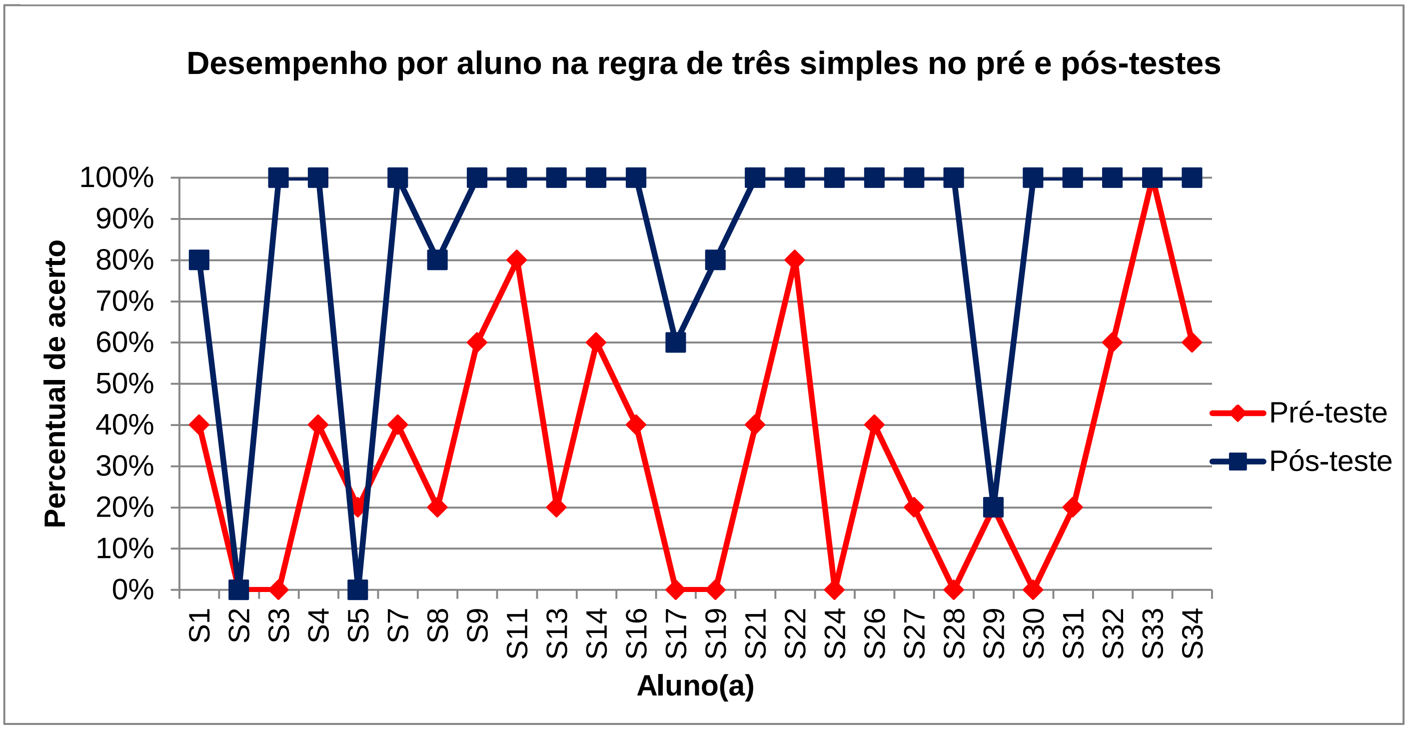
Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações do gráfico supracitado revelaram que o desempenho dos discentes melhorou consideravelmente nas questões de regra de três composta no pós-teste quando comparado com o realizado no pré-teste, após esses alunos serem submetidos as sessões de ensino da sequência didática.

Com base nas informações produzidas nesse gráfico, apenas a questão ‘I’ teve uma quantidade de acerto inferir a 50%, sendo que as demais foram superior a 60%, todavia, essa questão não obteve nenhum acerto por parte da amostra analisada no primeiro teste, o que faz do numero de acertos alcançado no segundo teste ser representativo, haja vista que saímos de 0% para quase 45% de aproveitamento.

Ainda com o propósito de mostrar a eficácia da proposta de sequência didática para o ensino das regras de três por meio da comparação dos desempenhos dos alunos nos dois testes do experimento, apresentamos a seguir os gráficos que mostram o rendimento por aluno nas questões de regras de três simples e composta, nessa ordem, nos dois testes do experimento.

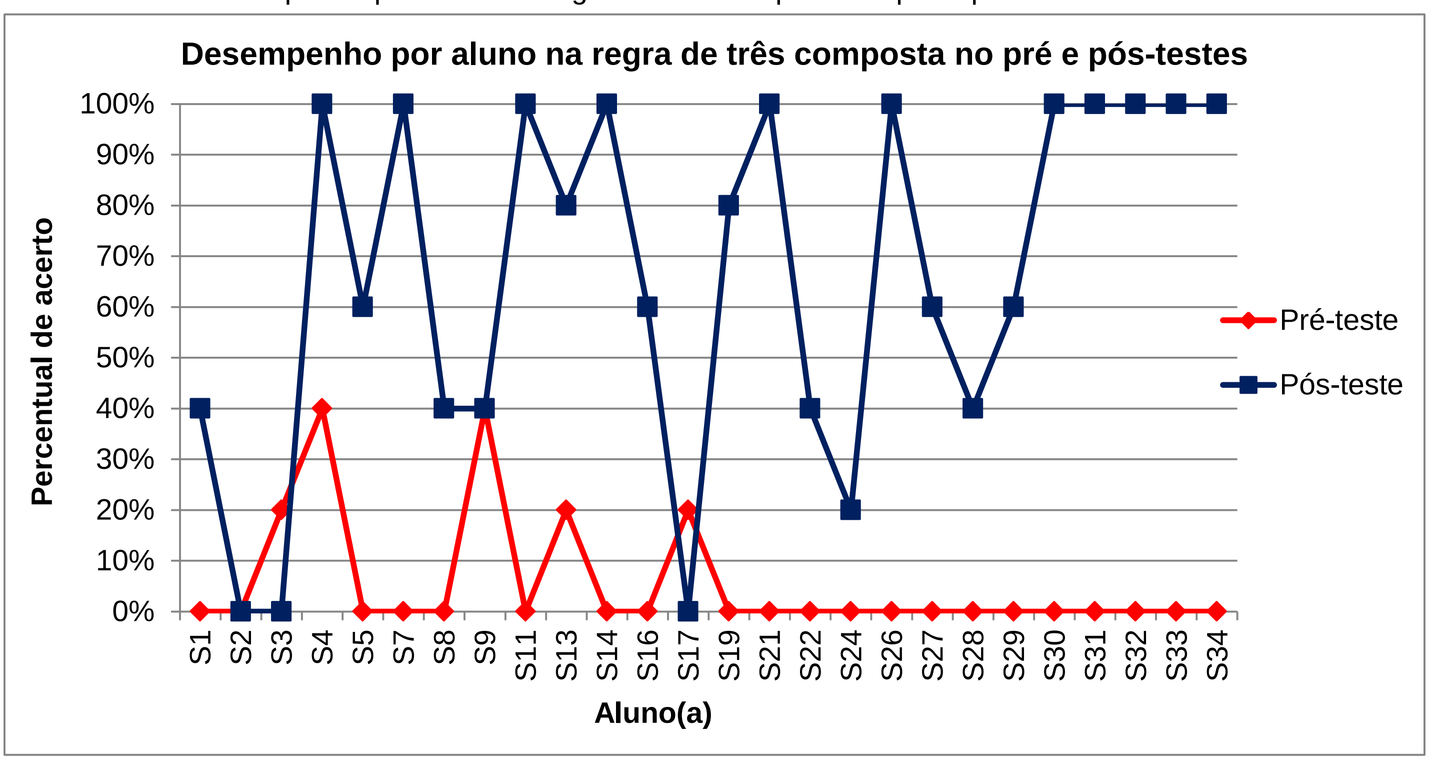
Gráfico 16 − Desempenho por aluno na regra de três simples no pré e pós-testes



Fonte: Experimento (2017)

Adiante mostramos no Gráfico 17 sobre o desempenho dos alunos nas cinco questões de regra de três composta nos dois testes do experimento.

Gráfico 17− Desempenho por aluno na regra de três composta no pré e pós-testes



Fonte: Experimento (2017)

Com base no Gráfico 16, observamos que o desempenho dos alunos nas questões de regra de três simples melhorou consideravelmente após a aplicação da sequência didática, haja vista que 73% dos alunos obtiveram 100% de acerto nas cinco questões de regra de simples no pós-teste. Um indicativo de que o ensino e aprendizado do conteúdo regra de três simples ocorreram de maneira satisfatória na maioria da amostra pesquisada. Da mesma forma, tivemos resultados positivos na regra de três composta após a execução da sequência didática, pois as informações produzidas no Gráfico 17 mostraram que o desempenho dos alunos no pós-teste melhorou quando comparado com o do pré-teste. De acordo com observado nesse gráfico, a quantidade de zeros do primeiro teste foi reduzida consideravelmente no segundo teste, isto é, passou de 81% para 12% apenas. E a quantidade de alunos que resolveram as cinco questões de regra de três composta foi de aproximadamente 42%, ou seja, esses alunos tiveram um aproveitamento de 100% na aplicação da regra, um dado sintomático de que a técnica da regra foi assimilada.

Essas constatações nos fazem pressupor que as sessões de ensino da sequência didática para as regras três se mostraram eficiente no ensino e aprendizado desse conteúdo, portanto, tal proposta de ensino é viável e eficaz nas aulas de matemática.

De posse das constatações apresentadas anteriormente sobre o desempenho dos alunos quando comparado nos dois testes, podemos presumir que a proposta de sequência didática para o ensino das regras de três teve papel fundamental no rendimento positivo dos alunos no pós-teste. Assim, reiteramos que o ensino de matemática por atividades é uma possibilidade viável em apresentar os conteúdos matemáticos nas aulas de forma mais prazerosa, dinâmica, interativa e produtiva, além de respeitar o ritmo de aprendizagem dos alunos disponíveis em aprender, o que, na maioria das vezes, não acontece com a metodologia da aula tradicional.

Essas nossas suspeitas ao analisarmos os quadros e os gráficos, apresentados anteriormente, sobre a eficácia da implementação da proposta de sequência didática para o ensino das regras de três podem ser corroboradas ou refutadas, mediante a aplicação de testes estatísticos que julgam as hipóteses levantadas acerca do comportamento dos dados da pesquisa do objeto de estudo.

Um desses testes estatísticos utilizados em nosso estudo foi o Teste t para dados pareados, em que buscamos avaliar a eficiente da nossa sequência didática por meio da diferença das notas dos alunos obtidas nos dois testes aplicados. Nesse pensar, apresentamos a seguir o Quadro 50 com os valores das notas dos alunos (acertos) em cada teste e a diferença dessas notas, bem como o passo a passo para a obtenção do Teste *t* também as hipóteses levantadas sobre os dados da pesquisa, e por meio do resultado desse teste estatístico vamos verificar se aceitamos a hipótese nula ou a hipótese alternativa, a qual será adotada como a hipótese de pesquisa.

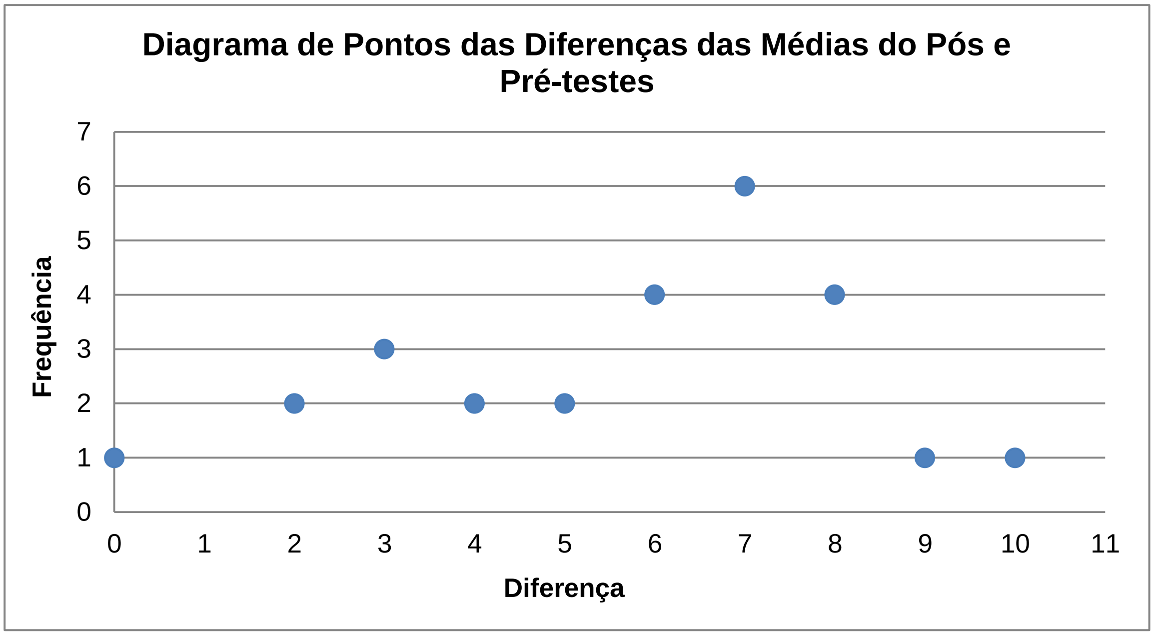
Quadro 50 − Diferença das notas no pré e pós-testes por aluno

Aluno (a)	**Testes**		
	Pré-teste (T_1)	**Pós-teste (T_2)**	**Diferença ($D = T_2 – T_1$)**
S_1	2,0	6,0	4
S_2	0,0	0,0	0
S_3	1,0	5,0	4
S_4	4,0	10,0	6
S_5	1,0	4,0	3
S_7	2,0	10,0	8
S_8	1,0	6,0	5
S_9	5,0	7,0	2
S_{11}	4,0	10,0	6
S_{13}	2,0	9,0	7
S_{14}	3,0	10,0	7
S_{16}	2,0	8,0	6
S_{17}	1,0	3,0	2
S_{19}	0,0	8,0	8
S_{21}	2,0	10,0	8
S_{22}	4,0	7,0	3
S_{24}	0,0	6,0	6
S_{26}	2,0	10,0	8
S_{27}	1,0	8,0	7
S_{28}	0,0	7,0	7
S_{29}	1,0	4,0	3
S_{30}	0,0	10,0	10
S_{31}	1,0	10,0	9
S_{32}	3,0	10,0	7
S_{33}	5,0	10,0	5
S_{34}	3,0	10,0	7

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A última coluna do quadro citado acima traz os valores da diferença das notas entre o pós e o pré-testes. Esses valores são apresentados no gráfico adiante que traz a frequência dessas diferenças.

Gráfico 18 − Frequência das diferenças entre as notas do pós e pré-testes



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações do gráfico acima da amostra pesquisada mostraram que a diferença entre os valores das notas obtidas nos dois testes tende a ser positiva, isto é, os valores alcançados no pós-teste foram maiores que os do pré-teste, com exceção da diferença das notas do aluno S_2 que foi nula.

Essa constatação na melhora do desempenho dos alunos em relação aos testes em que foram submetidos, também pode ser corroborada pela aplicação do método estatístico conhecido como *Teste t*, comentado anteriormente, para dados pareados, o qual é adequado, segundo Barbetta (2017, p. 201), para realizar comparações entre dois conjuntos de dados quantitativos.

Para esse autor a estatística do teste é baseada nos valores da variável diferença. Além do mais, *Teste t* é o que apresenta a maior probabilidade de detectar diferenças em uma amostra, quando de fato existirem.

O modelo matemático do *Teste t* é uma função da média das diferenças, mas também estão relacionadas outras variáveis como o tamanho da amostra e o desvio padrão da diferença. A seguir apresentamos a fórmula para obter o valor de *t*.

$$t = \frac{\bar{D} \cdot \sqrt{n}}{S_d} \qquad \begin{cases} \bar{D} \rightarrow \text{média das diferenças} \\ n \rightarrow \text{Tamanho da amostra} \\ S_d \rightarrow \text{Desvio padrão das diferenças} \end{cases}$$

Na aplicação do *Teste t,* é necessária a escolha de duas hipóteses, isto é, a hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1). Nesse caso, a nossa hipótese nula adotada é que o desempenho médio dos alunos não se altera com a aplicação da sequência didática; e a hipótese alternativa é que o desempenho médio dos alunos aumenta com a aplicação da sequência didática. Assim, temos as representações:

$$H_0 = \mu_{\text{pós-teste}} = \mu_{\text{pré-teste}}$$

$$H_1 = \mu_{\text{pós-teste}} > \mu_{\text{pré-teste}}$$

$\mu_{\text{pré-teste}}$: Desempenho médio dos alunos antes da sequência didática.

$\mu_{\text{pós-teste}}$: Desempenho médio dos alunos depois da sequência didática.

Como o Gráfico 18, de frequência das diferenças das notas, não trouxe pontos discrepantes e nem assimetria acentuada entre os valores, podemos presumir que esses valores seguem a distribuição normal, logo, não há comprometimento na aplicação do teste estatístico *t* para a amostra observada.

A seguir apresentamos o cálculo do teste *t* para os valores da diferença das médias do pós e pré-testes mencionados anteriormente no Quadro 50.

Dados

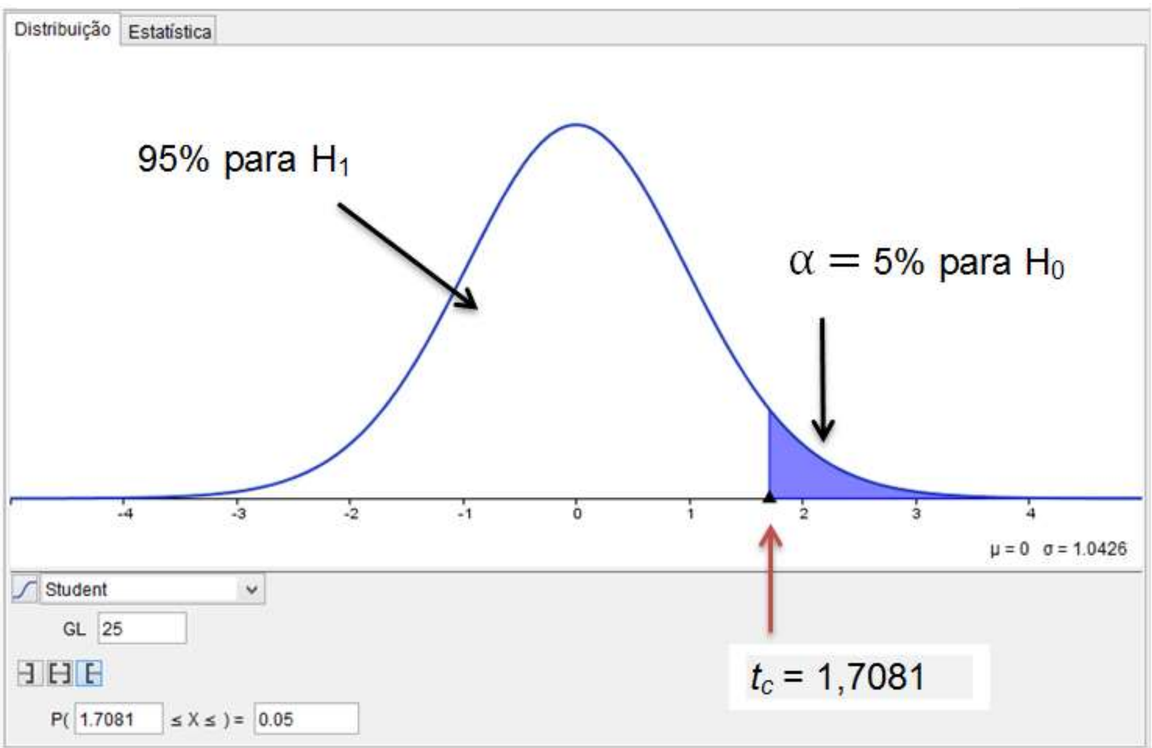
$$\begin{cases} \bar{D} = 5{,}62 \\ n = 26 \\ S_d = 2{,}43 \end{cases} \Rightarrow \ t = \frac{5{,}69.\sqrt{26}}{2{,}45} \ \Rightarrow \ t = 11{,}84$$

De posse do valor de *t*, é necessário estabelecermos um nível de significância para a hipótese nula (H_0), aceita como verdadeira, dessa forma adotamos o valor de 5% (α = 0,05) para que aconteça. Caso isso não ocorra, H_0 será rejeitada, e, então, adotaremos a hipótese alternativa (H_1). Também para efeito de cálculo precisamos encontrar o grau de liberdade (gl) da nossa amostra (n) e o *t-crítico.* Este é determinado pelo cruzamento do grau de liberdade e o nível de significância, e representa um ponto na distribuição estatística do teste, que delimita um conjunto de valores para recusar a hipótese nula, tal conjunto de pontos é chamado de região crítica ou de rejeição. A seguir apresentamos os valores mencionados e como são encontrados.

$$gl = n - 1 = 26 - 1 \Rightarrow gl = 25$$

De posse do valor do grau de liberdade (gl), vamos encontrar o *t-crítico* com um nível de significância de 0.05 ou 5%, para tanto recorremos ao uso da calculadora de probabilidade do GeoGebra.

Gráfico 19 − Distribuição estatística t de Student



Fonte: Experimento (2017)

Com base nas informações da distribuição *t* de *Student,* podemos afirmar que o valor do teste *t*, 11,84, se encontra dentro da região de rejeição, pois *t* > 1,7801, ou seja, com um nível de significância de 5% e um grau de liberdade de 25, podemos afirmar que a hipótese nula deve ser rejeitada, e devemos adotar a hipótese alternativa como hipótese de pesquisa. Logo, a aplicação da sequência didática melhorou, em média, o desempenho dos alunos no pós-teste a respeito do ensino de regra de três.

Diante dessa constatação, corroboramos as nossas suspeitas levantadas sobre a eficácia da proposta de sequência didática para o ensino das regras de três junto a amostra analisada, alunos do 7º ano do ensino fundamental, e também, respondemos parcialmente ao questionamento de pesquisa que indagou sobre os efeitos causados pela aplicação da sequência didática em uma turma do 7° ano do ensino fundamental nas aulas de matemática e no desempenho desses alunos com relação à resolução de questões utilizando as regras de três.

Ainda sobre a luz da análise estatística, buscamos avaliar se há alguma correlação entre as notas dos alunos no pós-teste e a frequência desses discentes nas sessões de ensino sobre as regras de três. Nesse pensar, mostramos o Quadro 51 adiante com as notas de cada aluno no teste final e sua respectiva frequência nas aulas da sequência didática.

Quadro 51 – Desempenho no pós-teste por aluno e o percentual de frequência nas sessões de ensino

(continua)

Aluno (a)	Desempenho no pós-teste	Frequência nas sessões de ensino
S_1	6,0	9
S_2	0,0	6
S_3	5,0	9
S_4	10,0	9
S_5	4,0	8
S_7	10,0	8
S_8	6,0	8
S_9	7,0	9
S_{11}	10,0	7
S_{12}	9,0	9
S_{13}	9,0	8
S_{14}	10,0	8
S_{16}	8,0	9
S_{17}	3,0	9
S_{18}	4,0	8

Quadro 51 – Desempenho no pós-teste por aluno e o percentual de frequência nas sessões de ensino
(conclusão)

Aluno (a)	Desempenho no pós-teste	Frequência nas sessões de ensino
S_{19}	8,0	6
S_{21}	10,0	9
S_{22}	7,0	9
S_{24}	6,0	9
S_{26}	10,0	6
S_{27}	8,0	9
S_{28}	7,0	8
S_{29}	4,0	6
S_{30}	10,0	7
S_{31}	10,0	7
S_{32}	10,0	8
S_{33}	10,0	7
S_{34}	10,0	7

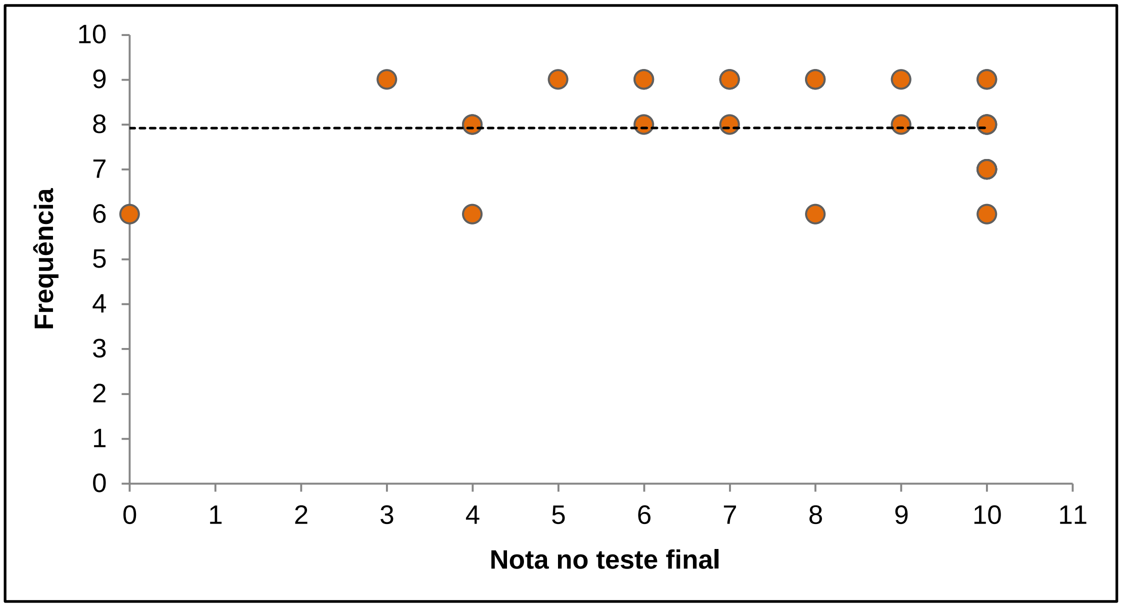
Fonte: Experimento (2017)

De acordo com a disposição dos dados do quadro supracitado, apresentamos a seguir o gráfico de dispersão e o coeficiente de correlação linear de Pearson, que indica se ocorre ou não a interdependência entre as quantidades observadas. Nesse pensar, vamos escolher as seguintes hipóteses a respeito dos dados:

::Hipótese nula → H_0: Não existe correlação linear entre a nota do aluno no pós-teste e a frequência nas sessões de ensino da sequência didática.

::Hipótese alternativa → H_1: Existe correlação positiva entre a nota do aluno no pós-teste e a frequência nas sessões de ensino da sequência didática.

Gráfico 20 – Correlação entre as notas dos alunos no pós-teste e suas respectivas frequências nas sessões de ensino da sequência didática



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Conforme a dispersão dos dados no gráfico acima, podemos supor que não aconteceu a correlação linear entre as notas dos alunos no pós-teste e a frequência dos mesmos nas sessões de ensino da sequência didática, haja vista que o valor encontrado do coeficiente correlação linear de Pearson (**r**) foi muito próximo de zero, **r** = 0,000893, o que, para Barbetta (2017, p. 258), acusa a inexistência de correlação linear entre as quantidades observadas. Assim, devemos aceitar a hipótese nula e rejeitar a hipótese alternativa, isto é, *Não existe correlação linear entre a nota do aluno no pós-teste e a frequência nas sessões de ensino da sequência didática.*

Aqui cabe ressaltar, que na situação posta só haveria correlação linear significativa entre as variáveis analisadas, se o valor mínimo de **r** fosse igual a 0,317 com um nível de significância usual de 5% para a amostra pesquisada (n= 28), conforme a tabela do coeficiente de correlação linear de Pearson apresentada por Barbetta (2017, p. 302). Logo, não existe evidência estatística suficiente de interdependência entre variáveis apontadas no Quadro 51. Dessa forma, a frequência do aluno nas sessões de ensino por si só, sem uma efetiva participação nas aulas, não é garantia de aquisição de conhecimento e, consequentemente, de obter um bom desempenho no teste final. Como exemplos, podemos citar os alunos S_5, S_{17} e S_{18}, cuja frequência nas sessões de ensino foram 89%,100% e 89%, respectivamente, mesmo assim esses discentes não alcançaram um desempenho satisfatório no referido teste. Além de outros alunos, que tiveram frequências acima de 60% nas aulas, e apresentaram, entretanto, rendimentos insuficientes no teste final.

Na contramão desses dados, temos os alunos S_{26}, S_{30}, S_{31}, S_{32}, S_{33} e S_{34}, que não tiveram 100% de frequência nas sessões de ensino, todavia alcançaram rendimentos máximos no pós-teste. Atribuímos a isso, uma participação ativa desses alunos nas atividades desenvolvidas da sequência didática para o ensino das regras de três.

Ainda sobre a perspectiva da correlação linear, buscamos analisar os dados de duas variáveis, desempenho no pós-teste e dificuldade em aprender matemática, com o intuito de verificar a se há ocorrência da correlação linear entras essas variáveis, e, assim, inferir se o resultado do pós-teste foi influenciado ou não pela segunda variável.

Como pretendemos relacionar uma variável quantitativa com uma qualitativa, precisamos parametrizar as categorias desta última. Para tanto utilizamos os valores 1, 2 e 3 no lugar das classes ***Não, Um pouco*** e ***Muita***. Tal procedimento é apresentado na Tabela 5 a seguir.

Tabela 5 − Parametrização da variável qualitativa dificuldade em aprender matemática

Dificuldade em aprender matemática	**Parâmetros**
Não	1
Um pouco	2
Muita	3

Fonte: Elaborado pelo autor

De posse da parametrização da variável dificuldade em aprender matemática, mostramos a seguir o Quadro 52, onde relacionamos essa variável com as notas do pós-teste de cada aluno. Em seguida, apresentamos o Gráfico 21 de dispersão dos valores das variáveis mencionadas e o valor do coeficiente de correlação linear de Pearson, afim de constatar a veracidade da hipótese nula (H_0) ou da hipótese alternativa (H_1) descritas a seguir.

::H_0: As variáveis desempenho no pós-teste e dificuldade em aprender matemática não estão correlacionadas.

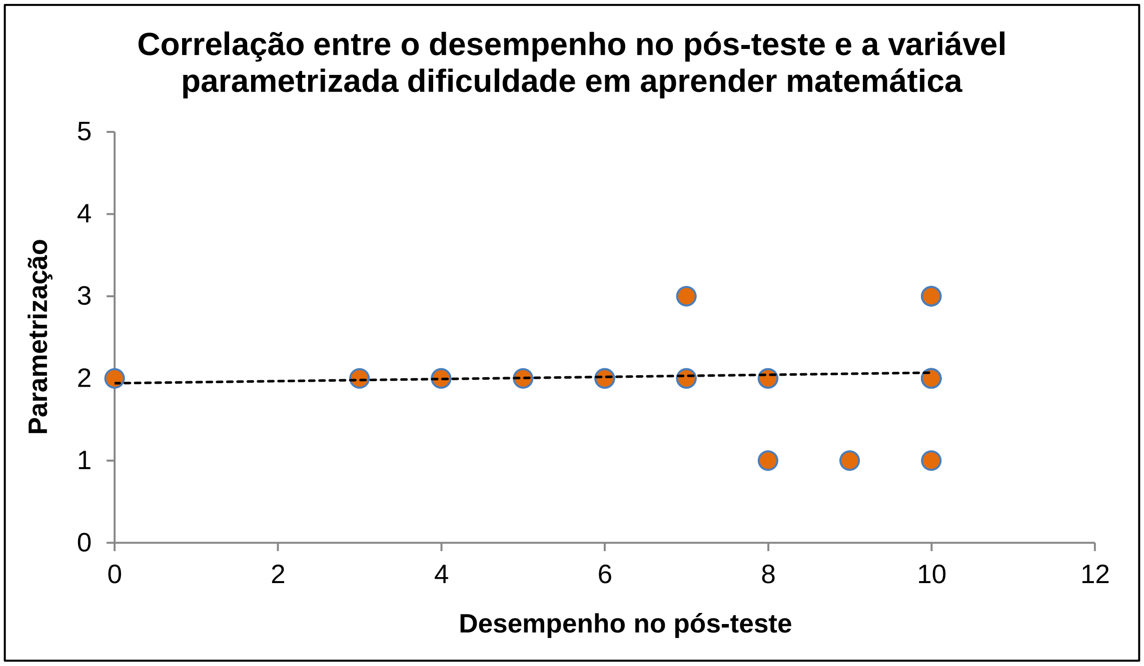
::H_1: As variáveis desempenho no pós-teste e dificuldade em aprender matemática estão correlacionadas positivamente.

Quadro 52 − Relação entre as notas do pós-teste e a variável parametrizada dificuldade em aprender matemática

Aluno (a)	Desempenho no pós-teste	Parametrização
S_1	6,0	2
S_2	0,0	2
S_3	5,0	2
S_4	10,0	3
S_5	4,0	2
S_7	10,0	2
S_8	6,0	2
S_9	7,0	2
S_{11}	10,0	2
S_{13}	9,0	1
S_{14}	10,0	2
S_{16}	8,0	2
S_{17}	3,0	2
S_{19}	8,0	1
S_{21}	10,0	2
S_{22}	7,0	2
S_{24}	6,0	2
S_{26}	10,0	2
S_{27}	8,0	2
S_{28}	7,0	3
S_{29}	4,0	2
S_{30}	10,0	3
S_{31}	10,0	3
S_{32}	10,0	1
S_{33}	10,0	2
S_{34}	10,0	2

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Gráfico 21 − Correlação entre o desempenho no pós-teste e a variável parametrizada



Fonte: Experimento (2017)

De acordo com o comportamento do gráfico da dispersão mencionado, é perceptível que a disposição da maioria dos dados encontra-se sobre a linha de tendência em uma posição praticamente horizontal, o que é sintomático para a não ocorrência da correlação linear forte e positiva entre as variáveis observadas.

Pelo cálculo do coeficiente de correlação linear de Pearson, a suspeita do parágrafo anterior é confirmada, pois com o valor de **r** ≅ 0,066 temos evidências de que as variáveis *desempenho no pós-teste* e *dificuldade em aprender matemática* não estão correlacionadas, com isso aceitamos a hipótese nula levantada e refutamos a hipótese alternativa.

Para ignorarmos a hipótese nula citada anteriormente, seria necessário que o valor mínimo do coeficiente de Pearson fosse igual a 0,330 para a amostra analisada (n = 26), conforme a tabela desse coeficiente disponível em Barbetta (2017, p. 302). Entretanto, o valor encontrado de **r** é bem menor do que o mínimo para rejeitar a hipótese nula com um nível de significância de 5%. Assim, podemos afirmar, com base nessas constatações, que a variável categórica *dificuldade em aprender matemática* não interferiu no resultado do pós-teste, sendo este influenciado positivamente pelas atividades desenvolvidas da sequência didática para o ensino do conteúdo regras de três.

Doravante, buscamos verificar, ainda na perspectiva da correlação linear, se ocorreu à interdependência entre o *desempenho no pós-teste* e a *afinidade por matemática* descrita no questionário socioeconômico, com o propósito de analisar se as notas dos alunos no referido teste sofreram alguma interferência da segunda variável; caso contrário, podemos pressupor que o desempenho positivo alcançado no pós-teste foi influenciado unicamente pela aplicação da sequência didática.

A seguir apresentamos a Tabela 6 de parametrização da variável qualitativa afinidade por matemática, o Quadro 53 e o Gráfico 22 da dispersão dos dados das variáveis do parágrafo anterior, e também o valor do coeficiente de correlação linear de Pearson, para julgar a ocorrência ou não da interdependência das várias analisadas e a veracidade da hipótese nula ou da hipótese alternativa, descritas abaixo.

∷Hipótese nula (H_0): As variáveis desempenho no pós-teste e afinidade por matemática não estão correlacionadas.

∷Hipótese alternativa (H_1): As variáveis desempenho no pós-teste e afinidade por matemática estão correlacionadas positivamente.

Tabela 6 − Parametrização da variável qualitativa afinidade por matemática

Afinidade por matemática	**Parâmetros**
Não gosto	1
Um pouco	2
Sim, gosto	3
Sim, gosto bastante	4

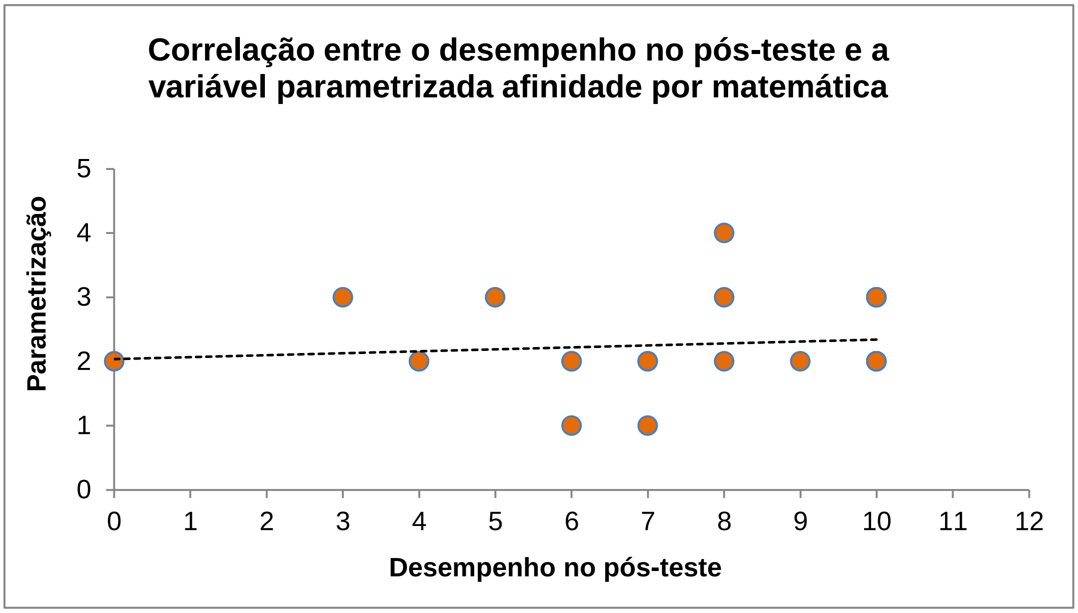
Fonte: Organizado pelo autor (2017)

Quadro 53 − Relação entre o desempenho no pós-teste e a variável parametrizada afinidade por matemática

Aluno (a)	Desempenho no pós-teste	Parametrização
S_1	6,0	1
S_2	0,0	2
S_3	5,0	3
S_4	10,0	2
S_5	4,0	2
S_7	10,0	2
S_8	6,0	2
S_9	7,0	2
S_{11}	10,0	2
S_{13}	9,0	2
S_{14}	10,0	3
S_{16}	8,0	3
S_{17}	3,0	3
S_{19}	8,0	4
S_{21}	10,0	3
S_{22}	7,0	2
S_{24}	6,0	2
S_{26}	10,0	2
S_{27}	8,0	2
S_{28}	7,0	1
S_{29}	4,0	2
S_{30}	10,0	2
S_{31}	10,0	2
S_{32}	10,0	3
S_{33}	10,0	2
S_{34}	10,0	3

Fonte: Experimento (2017)

Gráfico 22 − Correlação entre o desempenho no pós-teste e a variável parametrizada afinidade por matemática



Fonte: Experimento (2017)

Conforme o exposto no gráfico supracitado da dispersão e no valor calculado do coeficiente de correlação linear de Pearson (**r** = 0,125) dos dados observados, temos evidências para afirmar que a correlação entre as variáveis analisadas é fraca, ou seja, não existe uma interdependência forte entre elas de tal modo que os valores de uma variável interfiram no comportamento da outra. Logo, devemos aceitar a hipótese nula e rejeitar a hipótese alternativa, até mesmo porque para a o tamanho da amostra pesquisada (n = 26) o valor mínimo de Pearson para rejeitar H_0, com 5% de significância, deveria ser igual a 0,330, como dito anteriormente, o que não aconteceu. Com isso, podemos corroborar a possibilidade levantada antes, de que o desempenho satisfatório dos alunos no pós-teste foi influenciado unicamente pela aplicação da sequência didática para o ensino da regra de três.

De posse das análises realizadas a respeito do coeficiente de correlação linear de Pearson apresentamos a seguir o Quadro 54 que traz uma síntese sobre os tipos de correlações encontradas entre as variáveis em estudo.

Quadro 54 − Correlação linear entre o desempenho individual dos alunos no pós-teste e as variáveis categóricas

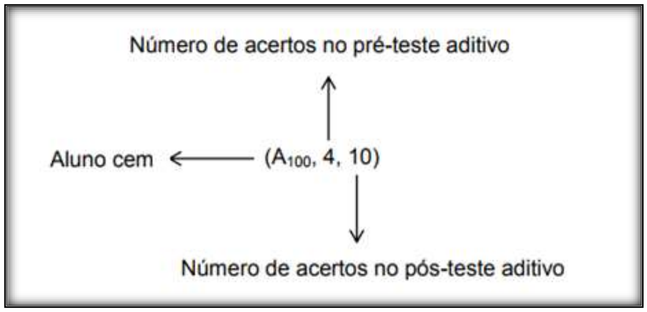
Variável categórica	Coeficiente de Pearson encontrado	Tipo de correlação	Valor mínimo de Pearson para ocorrer a correlação ($\alpha = 5\%$)
Frequência nas aulas da SD[27]	0,000893	Ausência	0,317
Dificuldade em aprender matemática	0,066	Fraca	0,330
Afinidade por matemática	0,125	Fraca	0,330

Fonte: BARBETTA (2017)

Essas informações organizadas no quadro acima retratam que as variáveis categorias analisadas não influenciaram diretamente no resultado do teste final, uma vez que os coeficientes de Pearson encontrados indicaram que a correlação existente entre essas variáveis e as notas dos alunos no pós-teste ficou aquém do mínimo necessário para haver uma relação significativa que viesse a influenciar no resultado do referido teste. Assim, mais uma vez, podemos concluir que o único instrumento pedagógico que influenciou de fato no resultado satisfatório do pós-teste, na maioria da amostrada analisada, foi à aplicação da sequência didática.

A partir daqui, faremos outras análises sobre as variáveis categóricas do questionário socioeconômico juntamente com as notas dos alunos nos testes realizados, mas sem recorrer ao coeficiente de correlação linear de Pearson. Para essa análise, utilizamos a ideia de Santos (2017, p. 256), que relacionou as informações acerca do discente com suas notas do pré e pós-teste, por meio de uma trinca de dados, como é mostrado no modelo a seguir.

[27] Sequência Didática



Fonte: SANTOS (2017)

Conforme o exposto, apresentamos no quadro adiante a relação entre as variáveis *dificuldade em aprender matemática e gênero*, afim de averiguarmos se os obstáculos com a disciplina matemática são inerentes ao sexo, e se esses obstáculos interviram negativamente no desempenho dos alunos no teste final depois da aplicação da sequência didática para o ensino das regras de três.

Quadro 55 – Dificuldade em matemática de acordo com o gênero

Dificuldade em aprender matemática	Gênero		
	Masculino	**Feminino**	**Total**
Não	(S_{32},3,10); (S_{19},0,8); (S_{13},2,9)		3
Um pouco	(S_{7},2,10); (S_{14},3,10); (S_{22},4,7); (S_{17},1,3); (S_{8},1,6); (S_{16},2,8); (S_{27},1,8); (S_{11},4,10); (S_{24},0,6); (S_{3},1,5); (S_{1},2,6)	(S_{2},0,0); (S_{5},1,3); (S_{9},5,7); (S_{21},2,10); (S_{33},5,10);(S_{26},2,10); (S_{34},3,10); (S_{29},1,4)	20
Muita	(S_{31},1,10); (S_{28},2,7)	(S_{30},0,10); (S_{4},4,10)	3
Total	16	10	26

Fonte: Experimento (2017)

As informações apresentadas no quadro mencionado revelaram que dos 16 estudantes do sexo masculino 69% deles têm *um pouco* de dificuldade com a matemática, dois alunos indicaram ter *muita* dificuldade com a disciplina, algo em torno de 13% dos pesquisados do sexo masculino, e três desses alunos, 19%, afirmaram *não* apresentar dificuldade para aprender matemática. Desse universo, percebemos que praticamente todos os pesquisados do sexo masculino tiveram aproveitamento igual ou superior a 50% no pós-teste, com exceção do discente S_{17} que obteve um aproveitamento abaixo de 40%. Dentre esses alunos que tiveram rendimento positivo no teste final, cabe ressaltar o aluno S_{31}, o qual respondeu no questionário socioeconômico apresentar muita dificuldade em aprender matemática, entretanto sua nota no teste inicial saltou de um para dez no teste final, situação sintomática de que esse aluno conseguiu assimilar os conhecimentos ministrados nas sessões de ensino acerca das regras de três, com isso as dificuldades apontas inicialmente a respeito do aprender matemática foram minimizadas com a implementação da sequência didática. Logo, podemos presumir que o uso de atividades no ensino de matemática é um recurso pedagógico viável ao ensino e aprendizagem dos alunos nessa disciplina, e, em especial, no ensino das regras de três.

Quanto aos pesquisados do sexo feminino, 80% delas afirmaram ter *um pouco* de dificuldade no aprendizado da matemática, 20% disseram ter muita dificuldade com a disciplina e nenhuma dessas alunas sinalizou *não* apresentar dificuldade em aprender matemática.

De acordo com as informações produzidas, percebemos que apenas três alunas não obtiveram rendimento satisfatório no teste final ($\geq$ 50%), isso representou 30% da amostra pesquisada do sexo feminino, que ficaram com aproveitamento abaixo do esperado. No entanto, as alunas que alcançaram desempenho satisfatório, representaram 70% da mesma amostrada.

Nesse contexto, observamos que a quantidade de alunas que responderam ter “um pouco” e “muita” dificuldade em aprender matemática foi superior a de alunos, em termos percentuais. Isto é, 80% das alunas sinalizaram pela primeira dificuldade, enquanto que 69% dos alunos apresentavam essa dificuldade. Já com relação à segunda dificuldade, 20% das alunas afirmaram ter essa dificuldade, contra apenas 13% dos alunos. No entanto, esses números podem representar apenas casualidade dos fatos, dessa forma a dificuldade em matemática não é inerente ao sexo, mas pode estar relacionada com a metodologia empregada nas aulas de matemática.

Ainda comparando os gêneros sobre o aspecto matemático, percebemos que o aproveitamento das alunas no pós-teste foi superior ao dos alunos, visto que elas obtiveram notas nesse teste igual ou superior a 70%, enquanto que os alunos tiveram rendimentos igual ou superior a 50%. Além dos mais, as alunas conseguiram obter mais notas dez do que os alunos, ou seja, de um total de onze notas dez da amostra analisada, seis pertencem ao gênero feminino.

Esses dados analisados corresponderam aos discentes que realizaram os dois testes do experimento, pois tínhamos o interesse de saber se as dificuldades apontadas por esses alunos influenciariam na aplicação da sequência didática e no resultado do teste final. O que de fato não aconteceu na íntegra, pois praticamente 85% desses alunos ficaram com notas igual ou superior a 50% no referido teste, após aplicarmos a sequência didática. Logo, pressupomos que essas dificuldades apontadas em aprender matemática são consequências do processo metodológico empregado nas aulas da disciplina, e que podem ser minimizadas ou erradicadas com a utilização de metodologias alternativas de ensino, como por exemplo, a sequência didática, distinta da tradicional, como a que empregamos em nosso experimento e gerou resultados satisfatórios no ensino de matemática, sobretudo, para o ensino das regras de três.

Outra análise realizada foi a respeito das variáveis categóricas, “*costume de estudar matemática”* e “*quem ajuda o aluno nas tarefas de matemática?”*, para verificarmos se as informações produzidas por essas variáveis influenciaram de alguma forma no desempenho dos alunos no teste final, ou se foi apenas a aplicação da sequência didática que interferiu no resultado desse teste. Essas variáveis e os respectivos dados estão dispostos no quadro adiante.

Quadro 56 − Relação entre variáveis categóricas e o desempenho dos alunos no pré e pós-testes

		Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática?					
		Professor particular	**Pai ou responsável (masculino)**	**Mãe ou responsável (feminino)**	**Irmão**	**Costumo estudar sozinho(a)**	**Outros**
Costume de estudar matemática fora da escola	**Todos os dias**	(S_{14},3,10)				(S_{19},0,8)	
	Mais de três vezes por semana	(S_{31},1,10); (S_{17},1,3)				(S_{13},2,9); (S_{3},1,5); (S_{34},3,10)	
	Costumo estudar três vezes ou menos por semana	(S_{9},5,7)	(S_{26},2,10)			(S_{32},3,10); (S_{30},0,10)	
	Só no período de prova	(S_{8},1,6); (S_{33},5,10)	(S_{11},4,10); (S_{7},2,10)	(S_{28},0,7); (S_{16},2,8)	(S_{24},0,6); (S_{21},2,10)	(S_{1},2,6); (S_{29},1,4); (S_{5},1,3); (S_{4},4,10); (S_{2},0,0)	(S_{27},1,8)
	Não costumo estudar fora da escola					(S_{22},4,7)	

Fonte: Experimento (2017)

De acordo com as informações produzidas pelo cruzamento das variáveis "*costume de estudar matemática*" e "*quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática?*", observamos que a concentração maior de discentes esteve nas categorias "só no período de prova" e "costumo estudar sozinho(a)" com um percentual de 19% da amostra analisada, sendo que desse grupo apenas os alunos S_1 e S_4 alcançaram rendimento acima de 50% no teste final. Entretanto, ao relacionarmos a primeira categoria com as outras da segunda variável, "*quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática?*", temos que todos os alunos ficaram com desempenho igual ou maior que 50%. Observamos também, que os discentes que estudam sozinhos a matemática, e que dedicam parte do seu tempo ao estudo dessa disciplina, ficaram todos com desempenho igual ou superior a 50% no pós-teste. Esse dado mostra que destinar um tempo ao estudo da matemática pode trazer rendimentos positivos e consistentes nessa disciplina, mesmo sem o auxílio de outrem.

Aqui cabe destacar o rendimento do aluno S_{22} que respondeu no questionário socioeconômico "*não costumo estudar fora da escola*" e "*costumo estudar* *sozinho (a)"*, pois esse discente acertou 70% do teste final, após a aplicação da sequência didática para o ensino das regras de três, algo sintomático da eficiência dessa intervenção pedagógica no ensino do conteúdo matemático, diferente da abordagem tradicional. Logo, presumimos que o desempenho positivo desse aluno não foi casual, mas sim devido ao ensino do conteúdo matemático ter ocorrido por meio de atividades estruturadas e organizadas em sessões de ensino, que compuseram a nossa sequência didática.

Ainda nesse pensar em comparar variáveis categóricas do questionário socioeconômico com o desempenho dos alunos no pré e pós-testes, apresentamos o Quadro 57 a seguir onde estão relacionadas às variáveis "*você tem dificuldade em aprender matemática?"* e "*você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de matemática?"* juntamente com as notas dos alunos nos dois testes do experimento, cuja nossa intenção é encontrar indícios que possam apontar a eficácia ou não da aplicação da sequência didática para o ensino e aprendizagem das regras de três.

Quadro 57 − Relação entre variáveis categóricas e o desempenho dos alunos no pré e pós-testes

Você tem dificuldade em aprender matemática?	**Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de matemática?**			
	Sempre	**Quase sempre**	**Poucas vezes**	**Nunca compreendo**
Não	(S_{19},0,8); (S_{32},3,10)	(S_{13},2,9)		
Um pouco	(S_{17},1,3); (S_{8},1,6); (S_{7},2,10)	(S_{34},3,10);(S_{26},2,10); (S_{21},2,10); (S_{22},4,7); (S_{14},3,10); (S_{11},4,10)	(S_{33},5,10);(S_{29},1,4); (S_{9},5,7); (S_{5},1,3); (S_{2},0,0); (S_{27},1,8); (S_{24},0,6); (S_{16},2,8); (S_{3},1,5); (S_{1},2,6)	
Muita		(S_{30},0,10)	(S_{31},1,10); (S_{34},3,10)	(S_{4},4,10); (S_{28},0,7)

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Conforme as informações do quadro supracitado, notamos uma concentração maior de alunos sobre as variáveis analisadas no cruzamento das categorias "um pouco" e "poucas vezes", algo em torno de 39% da amostra pesquisada, seguida de 23%, aproximadamente, do cruzamento de "um pouco" e "quase sempre". A respeito do maior percentual, 39%, podemos pressupor que esses alunos encontram dificuldade em assimilar os conhecimentos matemáticos transmitidos pelo professor, pelo fato de apresentarem dificuldade em matemática. Talvez, esse índice expressivo seja resultado da metodologia empregada em sala para apresentar o conteúdo matemático, que utilizou, na maioria das vezes, o método tradicional de ensino, como revelaram as respostas de aproximadamente 76% dos alunos pesquisados no questionário aplicado. Contudo, esses alunos obtiveram um bom desempenho no pós-teste, pois ficaram com nota igual ou superior a 50%, com exceção dos discentes S_2, S_5 e S_{29} que tiveram um rendimento insuficiente ($\leq$ 40%). Esse fato é um indicativo de que a metodologia empregada por meio da utilização de atividades para o ensino do conteúdo matemático, neste caso as regras de três, em que priorizou a participação ativa do aluno nas aulas de matemática, é uma proposta de ensino viável e eficaz para o aprendizado dos discentes.

Adiante trazemos um quadro síntese com o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori realizadas anteriormente. Esse quadro tem o propósito de mostrar sucintamente a validação das hipóteses construídas acerca do processo de ensino e aprendizado das regras de três que ocorreu por meio da utilização de atividades planejadas.

Quadro 58 – Confronto entre as análises a priori e a posteriori

(continua)

ATIVIDADE		EXCERTO	VALIDAÇÃO
Atividade 1 Construir o conceito de grandezas diretamente proporcionais	Análise a priori	**<u>Situação 1</u>** Esperamos que os alunos consigam relacionar as grandezas envolvidas no contexto da situação 1 e percebam que as razões entre os valores dessas grandezas são sempre constante e que os produtos não seguem o mesmo padrão, ou seja, são sempre diferentes. [...]pressupomos que os alunos conseguirão construir observações acerca do comportamento dos valores das grandezas envolvidas na referida situação. **<u>Situações 2, 3, 4, 5</u>** Acreditamos que os alunos conseguirão preencher os quadros dessas situações corretamente relacionando seus valores por meio da multiplicação, e perceberão que as quantidades envolvidas nessas situações estão relacionadas de maneira diretamente proporcional. Já com relação à situação 4, presumimos que os alunos perceberão que a relação entre as grandezas dessa situação não representa uma relação proporcional direta [...].	

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 58 – Confronto entre as análises a priori e a posteriori

(continuação)

ATIVIDADE		EXCERTO	VALIDAÇÃO
Atividade 1 Construir o conceito de grandezas diretamente proporcionais	Análise a posteriori	**Situação 1** [...] As informações produzidas revelaram que das noves equipes **56%** delas (equipes: A, C, E, G, H) conseguiram construir observações válidas para a referida situação [...] **Situações 2, 3, 4, 5** [...] As produções dos alunos revelaram que **78%** das equipes (Equipes: A, B, C, D, E, F, G) apresentaram respostas válidas na situação 2; **56%** dessas equipes (Equipes: A, B, C, E, F) construíram respostas válidas na situação 3 e **44%** delas (Equipes: A, B, C, E) apresentaram respostas válidas para a situação 5. Já com relação à situação 4 [...]. As informações produzidas revelaram que **44%** das equipes (Equipes: A, B, D, H) construíram respostas válidas [...]	**POSITIVA**
Atividade 2 Construir o conceito de grandezas inversamente proporcionais	Análise a priori	**Situação 1** Esperamos que discentes percebam que os valores das grandezas na situação 1 se relacionam de maneira inversa[...]. Além disso, esperamos também que os alunos notem que as razões entre os valores das grandezas são diferentes, enquanto que o produto deles é sempre igual. Com essas constatações, pressupomos que os discentes conseguirão redigir observações sobre esses fatos inerentes a situação 1. **Situações 2, 3, 4, 5** Presumimos que os alunos utilizarão o mesmo raciocínio da situação anterior para preencher os espações em branco dos quadros dessas situações, recorrendo aos seus conhecimentos prévios sobre multiplicação e divisão; quanto a análise da relação entre as grandezas, os discentes a farão com base no realizado na situação 1, isto é, observarão se as grandezas apresentam razões diferentes e/ou produtos iguais, para classifica-las como grandezas inversamente proporcionais ou não proporcionais. Pressupomos também que a maioria dos alunos não encontrará dificuldade em identificar a relação não proporcional na situação 4, ao verificar que o produto entre os valores das grandezas não é constante.	

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 58 – Confronto entre as análises a priori e a posteriori

(continuação)

ATIVIDADE		EXCERTO	VALIDAÇÃO
Atividade 2 Construir o conceito de grandezas inversamente proporcionais	Análise a posteriori	**Situação 1** As informações produzidas [...] revelaram que **89%** das equipes (equipes: A, B, C, D, E, G, H, I) construíram observações válidas para a situação 1 [...]. **Situações 2, 3, 4, 5** As informações produzidas por meio da produção dos alunos revelaram que **56%** das equipes (equipes: A, B, D, H, I) apresentaram respostas válidas para a situação 2; **67%** delas (equipes: A, B, C, D, H, I) construíram respostas válidas para a situação 3 e **34%** dessas equipes (equipe: C, D, I) apresentaram respostas válidas para a situação 5 [...].As produções dos alunos revelaram que as nossas hipóteses foram confirmadas a respeito da situação 4, pois **56%** das equipes (equipes: A, B, D, H, I) construíram respostas válidas para a referida situação [...].	**POSITIVA**
Atividade 3 Descobrir uma relação entre grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza	Análise a priori	A nossa expectativa é para que alunos percebam a relação proporcional direta existente entre as três grandezas nas situações construídas para esse fim (**situações 1, 2 e 3**). Dessa maneira, os alunos deverão recorrer ao conhecimento adquirido na atividade 1 sobre grandezas diretamente proporcionais, para serem aplicados na análise das situações propostas e também na justificativa de suas respostas para essas situações. Da mesma forma, utilizar esse conhecimento sobre a relação proporcional direta para identificar na **situação 4** a não ocorrência da proporcionalidade. Ao final desta atividade, esperamos que alunos consigam sistematizar suas observações e conclusões a respeito da relação proporcional composta direta entre três grandezas [...].	

Fonte: Experimento (2017)

Quadro 58 – Confronto entre as análises a priori e a posteriori

(conclusão)

ATIVIDADE		EXCERTO	VALIDAÇÃO
Atividade 3 Descobrir uma relação entre grandezas que são diretamente proporcionais a uma mesma grandeza	Análise a posteriori	[...] as informações produzidas no experimento revelaram que a equipe B apresentou nas quatro situações da terceira atividade **83%** de respostas válidas; a equipe C conseguiu **92%** de respostas válidas; a equipe D **67%**; a equipe E **92%** e as equipes G, H, I produziram **67%** de respostas válidas cada uma [...]. As informações produzidas mostraram, entretanto, que apenas três equipes, C, G, H, das oito participantes redigiram observações válidas e, apenas, a equipe G apresentou uma conclusão válida.	**POSITIVA**

Fonte: Experimento (2017)

O confronto apresentado no Quadro 58 acima entre as análises a priori e a posteriori com validação positiva reforça a funcionalidade, utilidade e eficácia da sequência didática planejada para o ensino das regras de três. Desse modo, acreditamos que o ensino de matemática por meio de atividades pode ser um caminho viável e exequível para minorar as dificuldades dos alunos com relação aos conteúdos dessa disciplina. Além do mais, essa metodologia possibilita o discente participar ativamente do processo de construção do conhecimento, assumindo uma postura autônoma, crítica e reflexiva no trabalho com matemática.

A seguir apresentamos as nossas considerações acerca do estudo fomentado a respeito do ensino das regras de três por meio da utilização de atividades didáticas, que buscou responder o questionamento de pesquisa e também verificar se objetivo pretendido foi alcançado ou não para o ensino da matemática.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa teve por objetivo ***Avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Regra de Três têm sobre a participação dos alunos de uma escola pública do ensino fundamental do 7º ano nas aulas de matemática e sobre o desempenho da resolução de questões envolvendo Regra de Três.***

Nesse pensar recorremos à Engenharia de Didática como metodologia de pesquisa que se caracteriza como um esquema experimental em ambiente de sala de aula, por meio do uso de sequências de atividades didáticas para o ensino; neste caso particular, o ensino das regras de três. Desse modo, sistematizamos nosso estudo conforme as fases dessa metodologia. Assim, nas análises prévias buscamos apresentar os documentos oficiais da educação básica brasileira que abordaram no ensino de matemática o conteúdo regras de três, a saber, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental (1998), que indicam nos objetivos de Matemática para o quarto ciclo o uso das regras de três como uma das estratégias na resolução de problemas que envolvam a variação proporcional direta e inversa entre grandezas. Outros documentos oficiais de educação que trazem as regras de três como conteúdo de matemática a ser utilizado na resolução de problemas ligados a variação proporcional entre quantidades são as matrizes de matemática da Prova Brasil e do SisPAE[28]. Já a Base Nacional Comum Curricular (2018), entretanto, não sugere como habilidade o uso das regras de três no 7º ano do ensino fundamental para resolver problemas sobre a variação proporcional, mas sim a utilização de sentenças algébricas. Além do mais, esse documento retoma o assunto variação proporcional direta e inversa entre grandezas no 8º ano do referido nível de ensino, mas não deixa claro o uso das regras de três, pois recomenda como habilidades o emprego de estratégias diversas, o que podemos pressupor que a regra a regra de três possa está incluída nessas estratégias.

A pertinência das regras de três entre os conteúdos de matemática a serem ensinados não ocorreu por casualidade, pois a História da Matemática revelou que as

[28] Sistema Paraense de Avaliação Educacional

civilizações antigas utilizavam à regra na resolução de problemas práticos, geralmente, ligados ao comércio, não práticos e de ensino. Nesse cenário, a regra, em sua essência, foi utilizada a princípio pelos povos babilônios em contextos envolvendo tabelas logarítmicas. Também foram encontrados resquícios da regra de três nos trabalhos dos egípcios, que relacionavam três quantidades entre si para determinar o valor de uma quarta quantidade. Problemas desse tipo foram encontrados no documento egípcio chamado Papiro de Ahmes (ou Rhind), escrito por volta de 1650 a. C. Registros históricos mostraram da mesma forma que a regra de três foi utilizada por povos da Ásia, em particular, os chineses. Estes resolviam problemas ligados à Geometria e a Álgebra recorrendo a regras de três. Indícios dessa prática foram encontrados no livro chinês chamado Chui Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, obra datada de aproximadamente 300 a. C a 200 d. C. Outros povos como os Hindus e Árabes também utilizaram a regra de três na resolução de problemas práticos e não práticos, sendo que esses últimos apresentaram a regra envolvida em contextos com a proporcionalidade e também no âmbito do ensino.

Esses fatos mostraram importância histórica da regra de três como ferramenta matemática útil na resolução de problemas com grandezas proporcionais, tanto no contexto utilitário como no ensino. Sobre este último, cabe ressaltar que o uso consciente da regra oportuniza o aluno a praticar a ideia da proporcionalidade entre duas ou mais grandezas envolvidas em situações do contexto escolar não apenas na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento, inclusive em situações da realidade do discente.

Ainda nas análises prévias, abordamos as pesquisadas fomentadas sobre as regras de três, e observamos que apenas um dos trabalhos analisados, Sá e Costa (2014), tratou esse assunto por meio de experimento, o que faz do nosso estudo uma proposta viável e relevante para o ensino de matemática, levando em consideração os resultados alcançados, e também para as pesquisas na área de Educação Matemática que busquem estudar a temática das regras de três, haja vista que propostas de ensino desse conteúdo por meio de atividades são parcas.

Outro tópico abordado foi com relação à fundamentação matemática das regras de três; para tanto, nos apoiamos nas ideias de Fragoso (1999), Lima et al.

(2013) e Marcondes (1969), que apresentaram os princípios matemáticos que norteiam o funcionamento das regras. Além do mais, mostramos cinco métodos de resolução das regras de três, o que oportuniza esse conteúdo ser abordado em sala de aula por mais um método, com isso, é possível o professor escolher o modo mais conveniente de aprendizado das regras para os alunos.

Sobre a compreensão dos alunos a respeito das regras de três, a pesquisa realizada com 100 (cem) alunos egressos do 8° ano do ensino fundamental apontou que esses discentes apresentaram dificuldades no aprendizado das regras aplicadas em contextos diversos, e que essa dificuldade também esteve atrelada à falta de clareza dos conceitos de grandezas direta e inversa proporcionais, o que dificultou a aplicação correta das regras de três nas situações propostas.

De posse das informações levantadas nas análises prévias acerca do nosso objeto de estudo, partimos para a fase seguinte da Engenharia Didática, Concepção e análise a priori, onde engendramos uma proposta de sequência didática para o ensino das regras de três por meio de três atividades, sendo que as duas primeiras eram compostas de cinco situações que retravam a relação proporcional simples direta e inversa, respectivamente, e a terceira atividade era constituída de quatro situações que abordavam a proporcionalidade composta direta entre três grandezas. Aliás, cabe ressaltar que em cada uma dessas atividades da referida sequência didática, apresentamos uma atividade que não trazia a relação proporcional entre duas grandezas e nem a proporcionalidade composta direta entre três grandezas. A sequência didática continha ainda questões de aprofundamento sobre grandezas direta e inversamente proporcionais e de regras de três. Além do mais, elaboramos um teste que serviu como abalizador do conhecimento dos alunos participantes da pesquisa, e que seria aplicado antes e depois de ministrarmos as sessões de ensino da sequência didática.

A penúltima fase da Engenharia didática, a experimentação, aconteceu em uma escola pública estadual de ensino fundamental e médio localizada no bairro do Guamá na cidade de Belém-PA, com alunos do 7º ano do ensino fundamental que participaram das onze sessões de ensino da sequência didática.

No desenrolar dessa fase, percebemos que os alunos não sabiam como proceder diante das atividades, certamente porque a proposta de ensino da matemática era diferenciada do modelo clássico que estavam habituados, cuja postura é, quase sempre, passiva no processo de ensino. Entretanto, com o caminhar das sessões de ensino, notamos que esses alunos passaram a assumir outra postura frente ao ensino da matemática, pois sinalizaram com atitudes e respostas à compreensão dos conteúdos abordados nas aulas. Também notamos uma profícua interação e uma troca de saberes entre os membros das equipes, que buscaram, muita das vezes, resolver as situações propostas sobre grandezas direta e inversamente proporcionais.

Nesse cenário, presenciamos ainda discussões produtivas entre membros de equipes diferentes sobre a aplicação do tipo de regra de três simples conforme a relação proporcional das grandezas envolvidas no problema; também testemunhamos argumentos acertados de alguns alunos a respeito dos contextos ligados às regras de três composta, o que nos fez pressupor que a proposta pensada para o ensino das regras de três por meio de atividades tinha surtido efeito positivo na maioria dos alunos pesquisados durante as aulas de matemática, pois esses alunos passaram a participar ativamente do processo de ensino e aprendizado do conteúdo matemático, diferente de como acontece na aluna tradicional, cujo discente é apenas um ouvinte no processo.

Quanto à eficácia das atividades, podemos dizer que as duas primeiras corresponderam as nossas expectativas a respeito do ensino de grandezas direta e inversamente proporcionais, uma vez que auxiliaram os alunos na compreensão desses conceitos. Já a atividade três, percebemos que esta necessita de ajuste na sua configuração, pois a quantidade de situações propostas deixou a atividade cansativa e prolixa, o que, certamente, contribuiu para que a maioria dos alunos pesquisados não a concluísse. Apesar desse ponto negativo da atividade três, que pode ser ajustado, a intenção de ensino dessa atividade é relevante, pois oportuniza o aluno a perceber por meio do experimento a relação proporcional composta direta entre três grandezas, ainda que empiricamente, e pode auxiliar também na compreensão do fazer justificado do algoritmo da regra de três composta, sobretudo com relação ao uso da multiplicação.

Com relação às análises a posteriori e validação, nos propomos apresentar o confronto entre as análises a priori elaboradas para as atividades da sequência didática com os resultados do experimento, com o intuito de confirmar ou refutar as nossas hipóteses acerca do processo de ensino e aprendizado das regras de três. Assim, percebemos que as nossas previsões foram confirmadas na maioria dos casos, o que faz dessas hipóteses serem consideradas válidas e coerentes com o propósito da sequência didática, que era ensinar o conteúdo regras de três.

Quanto ao ensino das regras, podemos afirmar, com base nas informações produzidas no experimento, que foi eficaz por meio de atividades, uma vez que 85% dos alunos pesquisados alcançaram um aproveitamento satisfatório, igual ou superior a 50%, na resolução das questões de regras de três no pós-teste, sendo que desses alunos observamos que aproximadamente 42% obtiveram nota máxima nesse teste. Essas constatações juntamente com os fatos observados durante o experimento que indicaram uma participação ativa do alunos nas aulas de matemática e o bom desempenho na resolução de questões de regras de três pela maioria da turma respondem a nosso questão de pesquisa que procurou investigar ***Que efeitos o desenvolvimento de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino da Regra de Três, em uma turma do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual, provoca sobre a participação em aulas de matemática e no desempenho da resolução de questões envolvendo Regra de Três?***

Da mesma forma podemos afirmar, que o objetivo da pesquisa que era ***Avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Regra de Três têm sobre a participação dos alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública nas aulas de matemática e sobre o desempenho na resolução de questões envolvendo Regra de Três*** foi alcançado, pois, como dito antes, a maioria dos alunos, 85%, obteve um aproveitamento positivo no teste final, um indicativo de que o ensino e aprendizado da regra de três foram assimilados por esses alunos. Esse fato corrobora a eficácia da proposta de sequência didática para o ensino desse conteúdo, uma vez que contribuiu para que os alunos obtivessem um desempenho satisfatório nas resoluções de questões sobre regra de três.

Em última análise, temos a afirmar que todo o estudo desenvolvido sobre as regras de três neste trabalho foi construído percorrendo um longo caminho e recorrendo a várias fontes, só para citar algumas, Berlinghoff e Gouvêa (2010), Boyer (2010), Contador (2006), Carrera (2009), Eves (2011), Fragoso (1999), Datta e Singh (1962), Smith (1925) entre outros, que nos fizeram perceber a relevância dessa ferramenta matemática nos contextos histórico, social, cultural e do ensino tanto nas civilizações antigas como para os dias atuais. Esse conhecer da regra foi fundamental para ampliarmos nossos horizontes sobre esse assunto e também contribuiu para a nossa formação como professor de matemática e futuro pesquisador. Também queremos ressaltar que o ensino das regras por meio de atividades de uma sequência didática distinta da tradicional nos oportunizou vivenciar uma experiência única no ensino de matemática com alunos do 7º ano do ensino fundamental que antes não conhecíamos, e tal experiência ajudou a mudar nosso paradigma de como ministrar aulas de matemática, pois pensávamos que apenas por meio da aula expositiva o aluno seria capaz de aprender a matemática, e outros métodos de ensino seriam inviáveis para tal fim. Todavia, o experimento fomentado neste trabalho com as regras de três mostrou que tal afirmação não era totalmente verdadeira, e nos mostrou também que os alunos conseguem aprender por meio de tentativas e buscas de regularidades, tornando, assim, o ensino dos conteúdos matemáticos dinâmico, atrativo e funcionais a compreensão dos discentes, despertando neles o interesse em aprender esses conteúdos, que no nosso caso, foram as regras de três.

A pesquisa apresenta aqui não esgota o tema regra de três, pois entendemos que nosso estudo trouxe apenas um dos métodos de ensino desse conteúdo no 7° ano do ensino fundamental, o método das flechas. Desse modo, é necessário que outros estudos venham a ser fomentados sobre o ensino das regras de três recorrendo aos outros métodos de resolução com a ambição de melhorar e viabilizar o aprendizado de alunos e alunas sobre esse conteúdo, que, quase sempre, é ensinado de maneira mecânica nas aulas de matemática, levando esses discentes a memorizar as regras sem a compreensão devida de seu funcionamento.

Uma dificuldade encontrada nesta pesquisa foi com relação a produção de trabalhos sobre o ensino das regras de três, haja vista que encontramos poucas publicações sobre o tema, quando realizamos a busca tanto no portal de periódicos da CAPES como em outras fontes, artigos de revistas e publicações em eventos. Essa constatação nos faz acreditar que o trabalho aqui desenvolvido se mostra relevante para as próximas pesquisas no âmbito da Educação Matemática que abordem o tema regra de três. Além do mais, esperamos que as informações produzidas nesta pesquisa, sirvam também de fontes de estudo para seminários, pesquisa bibliográfica, formação de professores e instrução de outros que se interessam pelo tema.

Já com relação as atividades engendradas para a sequência didática, aspiramos que possam contribuir com o ensino das regras de três na educação básica, e que professores e alunos utilizem essas atividades como recurso pedagógico nas aulas de matemática, pois as mesmas foram elaboradas e testadas para esse fim.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

ALVES, Gabriel; VERSOLATO, Mariana. O ensino de matemática no Brasil é catastrófico, diz o novo diretor do impa. **Folha de São Paulo,** 28 jan. 2016. Disponível em: < http://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2016/01/1734373-ensino-de-matematica-no-brasil-e-catastrofico-diz-novo-diretor-do-impa.shtml>. Acesso em: 23 abr. 2107.

ARAÚJO, Glausirée Dettman de. **Práticas educativas fora da sala de aula:** um estudo das experiências com alunos em distorção idade-série. 2014. 207 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário UNA, Programa Gestão Social, Educação e Desenvolvimento Local Pós-Graduação em Inovações sociais e desenvolvimento local, Belo Horizonte.

ARTIGUE, Michele. Engenharia didática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didática das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBETA, Pedro Alberto. **Estatística aplicada às ciências sociais.** 9. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2017. 315 p.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas**.** Traduzido por Elza Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática.** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 3. ed. São Paulo: Blucer, 2010.

BRAGA, Denise Bértoli. **Ambientes digitais:** reflexões teóricas e práticas. São Paulo: Cortez, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Terceira versão. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2018.

______. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: **Prova Brasil**: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p.

______. Ministério da Educação. LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9.394 de 20/12/1996. Diário Oficial da União, Brasília, 23 dez. 1996.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:
MEC/SEF, 1998. 148 p.

BUENO, Simone; ALENCAR, Edvonete Souza de; MILLONES, Teresa Sofía Oviedo. Reflexões e desafios da resolução de problemas nas aulas de matemática: um ensaio teórico. **Educação matemática debate,** Montes Claros, v. 1, n. 1, p. 9-27, jan./ abr. 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v1n12017a01>. Acesso em: 09 maio 2017.

BURAK, Dionísio. Critérios norteadores para a adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário. **Zetetiké**, Campinas, v. 2, n. 2, p. 47-60, mar. 1994. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2545/2290>. Acesso em: 23 maio 2017.

CARRERA, Josep Pla i. **Liu hui:** nueve capítulos de la matemática china. España: NIVOLA libros y ediciones, S. L., 2009.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática:** teoria e contexto, 7º ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica.** 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** v. 1., 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

COSTA, Wanderleya Nara Golçalves; BORBA, Marcelo de Carvalho. O porquê da etnomatemática na educação indígena. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 87-95, jul/dez. 1996. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2666/2407>. Acesso em: 27 maio 2017.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** Da teoria à prática. 16. ed. Campinas-SP: Papirus, 1996.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática.** Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática.** 12. ed. São Paulo: Ática, 2003.

______. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadresh Narayan. **History of hindu mathematics.** ASI Publishing House, Bombay, 1962.

ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez. A solução de problemas em matemática. In: POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

EDUCAÇÃO. Só 9,3% dos alunos do ensino médio sabem o esperado em matemática. **G1,** 23 dez. 2014. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/12/so-93-dos-alunos-do-ensino-medio-sabem-o-esperado-em-matematica.html>. Acesso em: 23 abr. 2017.

ENTRE jovens 1ª série do ensino médio: guia do tutor matemática. São Paulo: Instituto Unibanco/CAEd, 2013. 362 p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2011.

EXERCÍCIOS sobre regra de três composta. Disponível em: <http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-tres-composta.htm>. Acesso em: 06 jun. 2017.

FARIA, Caroline. **Terceiro mundo.** Disponível em:<http://www.infoescola.com/geografia/terceiro-mundo/>. Acesso em: 29 maio 2017.

FIOREZI, Leandra Anversa. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. 2010. 203 f. + Apêndices. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço de. **Tendências em educação matemática.** 2. ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2005. 87 p.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Aprendendo e ensinado regra de três.** Ijuí: Sedigraf, 1999. 104 p.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GHEDIN, Evandro; FRANCO, Maria Amélia Santoro. **Questões de método na construção de pesquisa em educação.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JÚNIOR; José Ruy. **A conquista da matemática:** a + nova. São Paulo: FTD, 2002.

______. **A conquista da matemática, 7° ano.** Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GONÇALVES, Maria José Santana Vieira. **Raciocínio proporcional:** estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade. 2010. 193 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande.

GREBOGGI, Vanessa; AGRANIONIH, Neila Tonin. A resolução de problemas como metodologia de ensino em escolas do município de são José dos Pinhais – PR. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Comunicação Científica.** São Paulo: SBEM, 2016.

GUERRA, Renato Borges; SILVA, Denivaldo Pantoja da. As práticas sociais da regra de Três. In: MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas socioculturais e educação matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

______. **Temas e problemas elementares.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 335 p.

MACÊDO, Elaine de Souza de. **Uma sequência didática para o ensino da resolução da equação do 2º grau:** adequação para o uso com professores. 2011. 140 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal-RN.

MACHADO, Nilson José. Ensino de matemática: das concepções às ações docentes. In: ARANTES, Valéria Amorim (Org.). **Ensino de matemática:** pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2014.

MARCONDES, Oswaldo. **Aritmética.** São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1969.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MATRIZES SISPAE matemática – ensino fundamental. Disponível em: <https://sispae.vunesp.com.br/matriz/MAT_EnsinoFundamental.pdf >. Acesso em: 06 jun. 2017.

MEIRA, Janeisi de Lima. **Labirintos da compreensão de regras em matemática:** um estudo a partir da regra de três. 2012. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém-PA.

MENDES; Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática.** Belém: EdUFPA, 2008.

______. In: MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir (Org.). **Práticas socioculturais e educação matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

______. CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professor. Belém: SBHMat, 2016. 124 p.

MIRON, Tatiele Fátima. **Metodologia de resolução de problemas:** ensino e aprendizagem de conceitos de matemática financeira no EJA. 2013.73 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão Área de Ciências Tecnológicas, Santa Maria (RS).

MORAES, Franciele Rodrigues de. **Um estudo sobre erros na resolução de equações do 1º grau com o software aplusix** 2013. 108 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de PósGraduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande (MS).

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. **Regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais.** Disponível em: <http://alunosonline.uol.com.br/matematica/regra-tres-simples-com-grandezas-diretamente-proporcionais.html>. Acesso em: 24 jun. 2017.

OLIVEIRIA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. 136 p.

PILETTI, Nelson. **Aprendizagem:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2013.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimp. Rio de Janeiro: interciência, 1995. 196 p.

PREVÊ, Deison Teixeira; SHENECKEMBERG, Cleder Marcos; MUNHOZ, Regina Helena. Lúdico no ensino de frações. **BoEM,** Joinville, v. 2, n. 2, p. 88-99, jan./jul. 2014. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/issue/view/314/showToc>. Acesso em: 15 maio 2017.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática:** história, antropologia e epistemologia. Tradução de Bernadete Moraes, Iran Abreu Mendes, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

REGRA de três simples direta. Disponível em: <https://www.regradetres.com.br/regra-de-tres-simples.html>. Acesso em: 06 jun. 2017.

REGRA de três composta. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/fundam/regra3c.php>. Acesso em: 06 jun. 2017.

SÁ, Pedro Franco de et al. Uso da redescoberta para o ensino de figuras planas. **Cocar**, Belém-Pa, v. 2, n. 3, p. 83-92, jan./jun. 2008. Disponível em: <https://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/123/101>. Acesso em: 06 jun. 2017.

______. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

______. COSTA, Ana Rita Silva. O ensino de matemática por atividade: uma experiência com regra de três. In: SÁ, Pedro Franco; JUCÁ, Rosineide de Sousa (Org.). **Matemática por atividades:** experiências didáticas bem-sucedidas. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014. p. 97-112.

______. et al. Ensino de números relativos por meio de atividades com calculadoras e jogos de regras. In: SÁ, Pedro Franco; JUCÁ, Rosineide de Sousa (Org.). **Matemática por atividades:** experiências didáticas bem-sucedidas. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014. p. 67- 84.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino de matemática hoje:** enfoques, sentidos e desafios. Tradução de Antônio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2010.

SANTOS, Robério Valente. **Ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais.** 2017. 393 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Belém.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três:** prática escolar de modelagem matemática. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém.

SILVA, Eolália Artifon. **Pensamento proporcional e regra de três:** estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas. 2008. 208 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Matemática financeira.** Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/regra-tres-composta.htm>. Acesso em: 06 jun. 2017.

SILVA NETO, Oscar. A regra de três nos currículos ao longo da história. In: SIMPÓSIO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM DEBATE, 1., 2014, Joinville. **Anais...** Joinville: UDESC, 2014. p. 105-119.

SMITH, David Eugene. **History of mathematics.** v. 2. Dover publications, New York, 1925.

SODRÉ, Gleison de Jesus Marinho. **Modelagem matemática crítica como atividade de ensino e investigação.** 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 7° ano.** São Paulo: FTD, 2009.

______. **Vontade de saber matemática, 7° ano.** 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

TAPSON, Frank. **Dicionário Oxford de matemática essencial.** Tradução Fábio Pelicano Borges Vieira. São Paulo: Oxford University Press, 2012.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário dos alunos egressos do 8º ano

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

01. Idade: ________ 02. Série: ________
03. Gênero: (   ) Masculino (   ) Feminino
04. Tipo de escola
(   ) Pública Municipal
(   ) Pública Estadual
(   ) Pública Federal
05. Qual a escolaridade do seu **Pai** ou **responsável Masculino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
(   ) Nenhum
(   ) Fundamental incompleto
(   ) Fundamental completo
(   ) Ensino Médio incompleto
(   ) Ensino Médio completo
(   )Ensino Superior completo
(   ) Pós-Graduação completo
06. Qual a escolaridade da sua **Mãe** ou **responsável Feminino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
(   ) Nenhum
(   ) Fundamental incompleto
(   ) Fundamental completo
(   ) Ensino Médio incompleto
(   ) Ensino Médio completo
(   ) Ensino Superior completo
(   ) Pós-Graduação completo
07. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino?
____
08. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino?
____
09. Você está ou já esteve em dependência em Matemática?
(   ) Sim, Estou (atualmente) em dependência em Matemática
(   ) Sim, já estive (no passado) em dependência em Matemática
(   )Não. Nunca fiquei de dependência em Matemática
10. Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola?
(   ) Todos os dias
(   ) Mais de 3 vezes por semana
(   ) Costumo estudar 3 vezes ou menos por semana
(   ) Só no período de prova
(   )Não costumo estudar fora da escola
11. Você gosta de Matemática?
(   ) Não gosto
(   ) Um Pouco
(   ) Sim. Gosto
(   ) Sim. Gosto bastante
12. Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática? (Marque mais de uma opção, se necessário)
(   ) Professor particular
(   ) Pai ou Responsável (Masc)
(   ) Mãe ou Responsável (Fem)
(   ) Irmão
(   )Costumo estudar sozinho
(   )Outro:________________
13. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?
(   ) Sempre
(   )Quase sempre
(   ) Poucas vezes
(   ) Nunca compreendo
14. Quais as principais formas de avaliação o (a) professor (a) de matemática costuma solicitar a você?(Marque mais de uma opção, se necessário)
(   ) Prova oral
(   ) Prova escrita
(   ) Auto avaliação
(   ) Fichas de observação
(   ) Produções no caderno
(   ) Outros.
Qual:_________________________
15. Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação em Matemática? (Marque no máximo 2 opções)
(   ) Entusiasmado (   ) Tranquilo
(   ) Com Medo (   ) Preocupado

( ) Com raiva ( ) Sinto calafrios
Outros:______________________________

16. Quando você estudou o assunto **Regra de Três**, a maioria das aulas foi:
( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios.
( ) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto.
( ) Criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos.
( ) Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas.
( ) Outra metodologia:____________________________

17. Para fixar o conteúdo estudado de **Regra de Três**, o seu professor (a):
( ) Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) Apresentava jogos envolvendo o assunto
( ) Mandava resolver os exercícios do livro didático
( ) Não propunha questões de fixação
( ) Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.
( ) Propunha a resolução de questões por meio de softwares.

18. Como você gostaria de aprender o assunto **Regra de Três**?

Assunto	Frequência de utilização				
	Sempre	Quase sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
Através de aulas expositivas e consulta ao livro didático					
Através de situação problema para introduzir o assunto					
Através de experimentações práticas do dia-a-dia					
Através de Jogos para depois sistematizar os conceitos					
Através de Software para resolução de **Regra de Três**					
Através de aplicativos para smartphone					

19. No que se refere o grau de dificuldade em aprender o assunto **Regra de Três**, preencha o quadro abaixo (Marque com um X)

Assunto	Grau de dificuldade para aprender				
	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Conceito de proporção.					
Realizar multiplicação de frações					
Propriedade fundamental da proporção.					
Determinar o valor desconhecido x em proporção da forma: $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$					
Conceito de grandeza					
O significado de grandezas diretamente proporcionais					
Determinar quando uma grandeza é diretamente proporcional à outra grandeza					
O significado de grandezas inversamente proporcionais					
Determinar quando uma grandeza é inversamente proporcional à outra grandeza					
Determinar quando duas grandezas não são proporcionais					
Armar a regra de três simples com base no enunciado					
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo somente grandezas diretamente proporcionais					
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo somente grandezas inversamente proporcionais					
Resolver problemas de regra de três simples quando uma das grandezas for o tempo representado em horas e minutos.					
Resolver problemas de regra de três simples quando é necessário fazer transformações de unidades (Quilômetro para metro, litro para mililitro, quilograma					

para grama e vice-versa)					
Resolver problemas de regra de três simples com números decimais (números com vírgula)					
Resolver problemas de regra de três simples envolvendo porcentagem (%)					
Armar a regra de três composta com base no enunciado					
Resolver problemas de regra de três composta envolvendo somente grandezas diretamente proporcionais.					
Resolver problemas de regra de três composta somente com grandezas inversamente proporcionais.					
Resolver problemas de regra de três composta envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais.					
Resolver problemas de regra de três composta quando uma das grandezas é um número fracionário (número em forma de fração) .					
Resolver problemas de regra de três em que é necessário adaptar as informações apresentadas no enunciado.					
Resolver problemas de regra de três em que o resultado obtido é a resposta da questão.					
Resolver problemas de regra de três em que o resultado obtido não é a resposta da questão.					
Resolver problemas de regra de três em que basta dispor as informações diretamente do enunciado.					

20. Você possui acesso à internet?
(   ) Não possuo
(   ) Sim, somente em casa
(   ) Sim, somente pelo celular
(   ) Sim, pelo celular e tenho WiFi em casa

21. Quanto ao uso de recursos tecnológicos, quais dos seguintes equipamentos você costuma utilizar?

Assunto	Frequência de utilização				
	Sempre	Quase sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
Você utiliza o computador pessoal para fazer suas atividades escolares.					
Você faz pesquisas na internet através do computador.					
Você acessa internet no celular pessoal para fazer atividades escolares.					
Você utiliza redes sociais de relacionamento no celular					
Você utiliza aplicativos de Mensagens instantâneas					
Você tira dúvidas com o professor através de mensagens por celular					
Você utiliza calculadora científica para estudar matemática					

APÊNDICE B – Questionário dos alunos do 7º ano

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

01. Idade: _______ 02. Série:__________
03. Gênero: ( ) Masculino ( )Feminino
04. Qual a escolaridade do seu **Pai** ou **responsável Masculino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
( ) Nenhum
( ) Fundamental incompleto
( )Fundamental completo
( ) Ensino Médio incompleto
( ) Ensino Médio completo
( ) Ensino Superior completo
( ) Pós-Graduação completo
05**.** Qual a escolaridade da sua **Mãe** ou **responsável Feminino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
( ) Nenhum
( ) Fundamental incompleto
( ) Fundamental completo
( ) Ensino Médio incompleto
( ) Ensino Médio completo
( )Ensino Superior completo
( )Pós-Graduação completo
06. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino?
____
07. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino?
____
08. Você está ou já esteve em dependência em Matemática?
( ) Sim, Estou (atualmente) em dependência em Matemática
( ) Sim, já estive (no passado) em dependência em Matemática
( ) Não. Nunca fiquei de dependência em Matemática
09. Com que frequência você costuma estudar Matemática fora da escola?
( ) Todos os dias
( ) Mais de 3 vezes por semana
( ) Costumo estudar 3 vezes ou menos por semana
( ) Só no período de prova
( ) Não costumo estudar fora da escola
10. Você gosta de Matemática?
( ) Não gosto
( ) Um Pouco
( ) Sim. Gosto
( ) Sim. Gosto bastante
11. Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática? (Marque mais de uma opção, se necessário)
( ) Professor particular
( ) Pai ou Responsável (Masc)
( ) Mãe ou Responsável (Fem)
( ) Irmão
( ) Costumo estudar sozinho
( ) Outro:________________
12. Você tem dificuldade para aprender Matemática?
( ) Não
( ) Um pouco
( ) Muita
13. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?
( ) Sempre
( ) Quase sempre
( ) Poucas vezes
( ) Nunca compreendo
14. A maioria das aulas de matemática é desenvolvida:
( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios
( ) Começando uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) Começando com um experimento para chegar ao conceito
( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos
( ) Outro:__________________________
15. Para fixar o conteúdo, o seu professor costuma:
( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos.
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto.
( ) Solicitar que você resolvesse os exercícios do livro didático.
( ) Solicitar que você procurasse questões sobre o assunto para resolver em outras fontes (internet, outros livros)
( ) Não propor questões de fixação.
( ) Outro: __________________________
16. Você participou de algum experimento nas aulas de matemática?
( ) Sim
( ) Não

APÊNDICE C – Questões para apresentação da regra de três simples

Procedimentos para o uso da regra de três simples
I- Identificar as grandezas no problema;
II- Montar o quadro com as grandezas e seus respectivos valores;
III- Classificar as grandezas em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais;
IV- Determinar o valor de 'x' por meio da proporção simples (para as grandezas diretamente proporcionais) ou por meio da igualdade de produtos (para as grandezas inversamente proporcionais).

01) Para construir um muro de 17 m^2 são necessários 3 trabalhadores. Quantos trabalhadores serão necessários para construir um muro de 51 m^2?[29]

02) Um automóvel com velocidade de 80 km/h gasta 15 minutos em certo percurso. Se a velocidade for reduzida para 60 km/h, que tempo, em minutos, será gasto no mesmo percurso?

03) Uma moto percorre 240 km utilizando 20 litros de gasolina. Quantos litros ela precisa para percorrer 360 km?

04) Uma padaria produz 100 pães a cada quatro horas. Sabendo que ela fica aberta durante 16 horas, quantos pães ela produz durante um dia?

05) Duas torneiras (totalmente abertas) enchem um tanque de água em 50 minutos. Se forem utilizadas 5 torneiras, quantos minutos serão necessários para encher o mesmo tanque?

06) Uma empresa consegue colocar 420 doces dentro de 6 caixas. Quantos doces cabem em 10 caixas?

07) De acordo com o site Dieta Saudável, uma porção de 25 g de fígado de galinha tem 35 kcal (quilocalorias) de energia, então quantas quilocalorias terá uma porção de 5 g de fígado de galinha?

08) Um certo volume de medicação demora 6 horas para ser ministrado em um gotejamento de 12 gotas por minuto. Se o número de gotas por minuto fosse 18 gotas, quanto tempo teria demorado a aplicação desta mesma medicação?

09) Utilizando copos descartáveis de 175 ml, eu consigo servir 12 pessoas. Se eu utilizar copos de 150 ml, quantas pessoas eu conseguirei servir o mesmo volume de bebida?

10) Com 6 pedreiros construíram um muro em 18 dias de trabalho, com apenas 4 pedreiros, de mesma capacidade dos primeiros, o muro seria construído em quanto tempo?

[29] Disponível em: <https://www.regradetres.com.br/regra-de-tres-simples.html/>. Acesso em: 06 jun. 2017.

APÊNDICE D – Questões de aprofundamento da regra de três simples

Procedimentos para o uso da regra de três simples
I- Identificar as grandezas no problema;
II- Montar o quadro com as grandezas e seus respectivos valores;
III- Classificar as grandezas em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais;
IV- Determinar o valor de 'x' por meio da proporção simples (para as grandezas diretamente proporcionais) ou por meio da igualdade de produtos (para as grandezas inversamente proporcionais).

01) Um pintor utilizou 18 litros de tinta para pintar 60 m^2. Quantos litros de tinta serão necessários para pintar 450 m^2, da mesma forma como foram pintados os 60 m^2?

02) Márcia leu um livro em 4 dias, lendo 15 páginas por dia. Se tivesse lido 6 páginas por dias, em quantos dias ela teria lido o mesmo livro?

03) Quatro carros transportam 20 pessoas. Para transportar 700 pessoas, quantos carros iguais a esses seriam necessários?

04) Um galpão pode ser construído em 48 dias por 7 pedreiros que trabalham num certo ritmo. Como ele deve ser construído em 2 semanas, no mesmo ritmo de trabalho, quantos pedreiros serão necessários?

05) Dez máquinas escavam um buraco em 2 dias. Quantas máquinas idênticas as primeiras serão necessárias para escavar esse buraco em cinco dias?

06) Daniel possui em aquário com 8 peixes e eles consomem 30g de ração por dia. Se ele puser mais 2 peixes semelhantes aos que já tem, quanta ração será consumida por dia?

07) Um enfeite de Natal pisca 8 vezes a cada 20 segundos. Quantas vezes este enfeite pisca em 240 segundos?

08) Para realizar um determinado serviço, uma gráfica demora 9 dias, utilizando 5 máquinas, todas com a mesma capacidade de produção. Com apenas 3 dessas máquinas, o número de dias necessários para realizar esse mesmo serviço será?

09) Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levarão para engarrafar 4000 refrigerantes?

10) Seis pintores pintam um casa em 48 horas. Quanto tempo levarão 8 pintores, de mesma capacidade dos primeiros, para realizar o mesmo serviço?

APÊNDICE E – Questões para apresentação da regra de três composta

Procedimentos para aplicar a regra de três composta I) Montar o quadro com as grandezas e os seus respectivos valores; II) Analisar se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais em relação à grandeza que contém o termo desconhecido ‘x’; III) Indicar a grandeza diretamente proporcional pela seta (ou flecha) $\underset{d}{\downarrow}$ e a grandeza inversamente proporcional pela seta (ou flecha) $\overset{i}{\uparrow}$ em relação à grandeza que contém o valor de ‘x’; IV) Montar a proporção de acordo com a propriedade das grandezas compostas; V) Determinar o valor de ‘x’.

1) Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?[30]

2) Para pintar um muro de 12 metros de comprimento e 3 metros de altura são gastos 4 baldes de tinta. Quantos baldes de tinta serão necessários para pintar um muro de 18 metros de comprimento e 5 metros de altura?

3) Três caminhões, com a mesma capacidade de transporte, transportam 180 caixas do mesmo tipo em 5 dias, trabalhando um período por dia. Quantas caixas desse tipo serão transportadas por 5 caminhões, como os primeiros, em 8 dias, trabalhando no mesmo ritmo?

4) Três faxineiros levam 8 dias para limpar um prédio, trabalhando 5 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 4 faxineiros, com o mesmo ritmo de trabalho dos anteriores, para limparem o prédio em 10 dias?

5) Uma casa é construída por 40 operários trabalhando 9 horas por dia durante 6 dias. Em quantos dias 24 operários poderiam construir a mesma casa, trabalhando 5 horas por dia?

6) Uma turma de 20 pessoas foi acampar, levando alimentos suficientes para 21 dias, com 3 refeições diárias. Chegando ao local, encontraram mais 15 pessoas. Por quanto dias terão alimentos, se fizerem apenas 2 refeições diárias?

7) Considere que 2 cães farejadores consigam cobrir uma área de 15 m^2 em 10 minutos. Quanto tempo seria necessário para que 3 cães cobrissem uma área de 27 m^2?

8) Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?[31]

---

[30] Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/fundam/regra3c.php>. Acesso em: 06 jun. 2017.

[31] Disponível em:

APÊNDICE F – Questões de aprofundamento da regra de três composta

1) Usando um ferro elétrico 1 hora (60 minutos) por dia, durante 20 dias, o consumo de energia será de 10 kw/h. Se o mesmo ferro elétrico for usado 110 minutos por dia durante 30 dias, qual o será consumo?[32]

2) Três caminhões, com a mesma capacidade de transporte, transportam 180 caixas do mesmo tipo em 5 dias, trabalhando um período por dia. Quantas caixas desse tipo serão transportadas por 5 caminhões, como os primeiros, em 8 dias, trabalhando no mesmo ritmo?

3) Numa fábrica de sapatos trabalham 16 operários e produzem em 8 horas de serviço diário 120 pares de calçados. Desejando ampliar as instalações para produzir 300 pares por dia, quantos operários são necessários para assegurar essa produção com 10 horas de trabalho diário?

4) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m³?

5) Seis torneiras despejam 10.000 litros de água em uma caixa em 10 horas. Em quanto tempo 12 torneiras despejarão 12.000 litros de água?

6) Uma viagem entre duas cidades foi feita de carro, em 4 dias, a velocidade de 75 km por hora, viajando-se 6 horas por dia. Viajando a 80 km por hora durante 5 horas por dia, em quantos dias iríamos de uma cidade a outra?

<http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-tres-composta.htm>. Acesso em: 06 jun. 2017.

[32] [Questão adaptada] Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/regra-tres-composta.htm>. Acesso em: 06 jun. 2017.

APÊNDICE G – questões de revisão das regras de três simples e composta

Com base nos conhecimentos adquiridos nas sessões de ensino sobre grandezas proporcionais, verifique quais das situações a seguir podem ser resolvidas pelo uso da regra de três simples.

Classificação	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4
Sim				
Não				

Situação 1
Três torneiras enchem um reservatório em 12 horas. Quantas torneiras seriam necessárias para encher o mesmo reservatório em 4 horas?

Situação 2
Um carro mantendo sempre a mesma velocidade percorreu em 2 horas uma distância de 150 km. Qual seria a distância percorrida pelo carro, nas mesmas condições, se o tempo de percurso fosse de 3 horas?

Situação 3
Um ciclista com velocidade média de 18 km/h completou um circuito em 60 minutos. Se tivesse desenvolvido a velocidade média de 20 km/h, teria feito o mesmo percurso em quantos minutos?

Situação 4
Com base nos padrões dos calçados brasileiros, uma criança do sexo feminino com 10 anos de idade tem o número do seu calçado igual a 24 cm. Ao completar 20 anos idade, qual será o número do seu calçado?

Situação 5
Um fazendeiro alimenta seus 8 cavalos durante 24 dias com 160 kg de ração. Quantos cavalos poderiam ser alimentados em 30 dias, se fossem utilizados 240 kg de ração?

Situação 6
Um pintor levou 8 horas para pintar uma área de 40 m^2 utilizando 4 litros de tinta. Quanto tempo esse pintor levará para pintar uma área de 80 m^2, se ele utilizar 8 litros de tinta?

Situação 7
Um obra é construída por 3 operários durante 6 dias trabalhando 8 horas por dia. Quantos operários seriam necessários se essa mesma obra fosse feita em 4 dias, trabalhando 6 horas por dia?

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem