Universidade do Estado do Pará
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

IZAIAS PINHEIRO DE SOUZA JUNIOR

# O Ensino de Frações para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a resolução de problemas a partir da visão de Vergnaud

Belém
2019

IZAIAS PINHEIRO DE SOUZA JUNIOR

# O Ensino de Frações para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a resolução de problemas a partir da visão de Vergnaud

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva.

Belém
2019

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)

Souza Junior, Izaias Pinheiro de, 1990-
O Ensino de frações para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a resolução de problemas a partir da visão de Vergnaud / Izaias Pinheiro de Souza Junior.Belém: UEPA/PMPEM, 2019.

153 f.: il.; 29 cm
Inclui bibliografias

Orientador: Francisco Hermes Santos da Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, Centro de Ciências Sociais e Educação, Departamento de Matemática, Estatística e Informática, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, 2019.

1. Frações. 2. Campos conceituais. 3. Resolução de problemas. I. Silva, Francisco Hermes Santos da, orientador. II. Título.

CDD 22 ed.: 513.26

Elaborado por Maria do Socorro B. Albuquerque CRB$_2$-871

IZAIAS PINHEIRO DE SOUZA JUNIOR

# O Ensino de Frações para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a resolução de problemas a partir da visão de Vergnaud

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Data de Aprovação: _____/_____/________

Banca examinadora

___________________________________ - Orientador
Prof. Francisco Hermes Santos da Silva
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal do Pará

__________________________________- Examinador (Interno)
Prof. Roberto Paulo Bibas Fialho
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

__________________________________- Examinador (Externo)
Prof. José Messildo Viana Nunes
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal do Pará

Em primeiro lugar dedico este trabalho a Deus que me proporcionou oportunidade, força e sabedoria para cumpri-lo.

Dedico também a minha esposa Kelly de Souza que me incentivou e apoiou em diversos momentos.

Por último ao meu filho Samuel e meus familiares, pai (Izaias), mãe (Luciene), irmãos e demais familiares.

## AGRADECIMENTOS

A **Deus**, que como grande autor e consumador da minha fé olhou carinhosamente para mim e me proporcionou oportunidade, força e sabedoria para cumprir está tão grande missão.

A Kelly, minha amada esposa que muito acreditou em mim e em minha capacidade, sonhando juntamente comigo este e demais projetos de nossa família.

Ao Professor Dr. Francisco Hermes Santos da Silva, que tanto me auxiliou durante o processo de construção deste trabalho, abrindo tão generosamente sua casa para me receber ao longo das orientações.

Ao Professor Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho pelo grande auxilio e valiosas orientações para a construção e aperfeiçoamento desta pesquisa e desenvolvimento do mesmo.

Ao Professor Dr. José Messildo Viana Nunes pelo grande auxilio e valiosas orientações para a construção e melhora deste trabalho.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática que muito colaboraram com a minha formação e tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de sala de aula que dividiram este precioso tempo de formação e aperfeiçoamento, com a grande expectativa de melhor formação para o mercado de trabalho. E que a amizade construída durante estes anos perdure, para todo o sempre, mesmo com a distância que possa vir a nos separar.

**SUMÁRIO**

## RESUMO

Este trabalho buscou por meio da Engenharia Didática a produção de uma sequência didática construída à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993, 1996), além de usar em sua construção a resolução de problemas aditivos propostos por Vergnaud(1981, 1983, 2009). Para esta pesquisa  foi desenvolvida uma sequência didática construída para o alargamento do campo conceitual dos alunos do 6 ano do Ensino Fundamental no âmbito do campo conceitual aditivo das frações e depois construiu-se um instrumento de avaliação dos pré e pós testes realizados pelos alunos para a verificação da aprendizagem dos mesmos. A sequência de aulas esteve abrangendo a conceptualização das frações até as operações de adição e subtração, seja ela com denominadores iguais ou diferentes. Nesta o professor buscou assumir o papel de orientador, trabalhando a solução de problemas com os alunos por meio de orientações e intervenções, para que ao final de cada ciclo de aprendizagem o professor faça apenas as formalizações e assim analisar os invariantes operatórios que estão sendo desenvolvidos pelos alunos durante o processo de aprendizagem destes. Portanto é fundamental ressaltar que verificou-se um alargamento do campo conceitual aditivo dentro do conteúdo de frações com os alunos que participaram da pesquisa no valor superior a 50% dos alunos que tiveram uma movimentação cognitiva, entendendo-se que estes são os alunos que não compreendiam o conteúdo antes da sequência e passaram a compreende-lo após a mesma.

**Palavras-chave:** Campos Conceituais. Resolução de Problemas. Frações - Estudo e ensino.

## ABSTRACT

This work sought through Didactic Engineering to produce a didactic sequence constructed in the light of Vergnaud's Conceptual Field Theory (1993, 1996), and to use in its construction the solution of additive problems proposed by Vergnaud (1981, 1983 , 2009). For this research was developed a didactic sequence built for the extension of the conceptual field of the 6 year elementary school students in the scope of the additive conceptual field of the fractions and then built an instrument for evaluation of the pre and post tests performed by the students for the learning. The sequence of classes has been covering the conceptualization of fractions to addition and subtraction operations, whether they have the same or different denominators. In this the teacher sought to assume the role of guiding, working the solution of problems with the students through orientations and interventions, so that at the end of each learning cycle the teacher only make the formalizations and thus analyze the operative invariants being developed students during the learning process. Therefore, it is important to note that there was a widening of the additive conceptual field within the fractions content with the students who participated in the research in the value of more than 50% of the students who had a cognitive movement, being understood that these are the students who did not understood the content before the sequence and began to understand it after the sequence.

**Keywords**: Conceptual Fields. Problem-solving. Fractions - Study and teaching.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE ESQUEMA

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE TABELAS

## 1 INTRODUÇÃO

O desafio do processo de ensino-aprendizagem de frações ainda se mantém evidente entre os professores que precisam ensinar este conteúdo, haja visto que os professores têm grandes dificuldades com o processo de ensino de modo que este culmine em aprendizagem e, para os estudantes, esse conhecimento é considerado complexo porque pode trazer dificuldades para a aprendizagem deste e de outros conteúdos de matemática no prosseguimento dos estudos. (ALVES e MARTEM, 2011).

Esses autores vão mais além e revelam haver dificuldades com a compreensão dos conceitos que envolvem as frações até entre alunos do ensino médio e superior, revelando a dificuldade destes em relação a alguns aspectos relevantes do conceito de número racional. Essas dificuldades podem ser advindas do fato de que

> O trabalho em sala de aula com o ensino de frações tem complicadores porque nem sempre quem ensina tem clareza dos conceitos fundamentais e não dispõe de conhecimentos didático-metodológicos suficientes para abordá-lo adequadamente e, por sua vez, quem aprende não consegue compreender significativamente o conceito envolvendo o conteúdo de fração. (CASTRO, 2018, p. 2)

Corroborando com Alves e Martem (2011), Santos (2007, p. 190), afirma ter observado que, em atividades com frações sem o uso de material didático pedagógico, há professores que recorrem a conceitos e estratégias enraizados do seu tempo de estudante da educação básica, o que para nós se constitui em obstáculo didático do professor influenciando de forma negativa na aprendizagem do aluno.“[...] parece haver uma lacuna entre o conhecimento do professor, conteúdo a ser ensinado e a forma como ele pode ser aprendido”. (SANTOS, 2007, p. 112).

Diante disto, Santos (2007) defende que é preciso investir na formação inicial com enfoques didático-pedagógicos com o objetivo de promover aprendizagem significativa do conceito de frações.

Neste sentido, Lima e Brito (2005, p. 115) defendem que “Para desenvolver corretamente o conceito de fração, a criança precisa ser solicitada a refletir sobre as seguintes questões: Qual é o todo? Quantos pedaços há no todo? São pedaços do mesmo tamanho?”

Em continuação ao tema abordado nos trabalhos citados, este trabalho busca desenvolver a temática do Ensino de Frações para o 6º ano do Ensino Fundamental por meio da Resolução de Problemas, sob a ótica de Gerard Vergnaud(1981, 1983, 1993a, 1993b, 1996; 2009).

Por que escolher o Ensino de Frações? E por quê para o 6º ano? Esta escolha se dá em grande parte devido à minha experiência como educador para o Ensino Fundamental. Ao longo dos anos, tenho observado que muitos alunos sentem grande dificuldade quando chegam ao 6º ano e têm que lidar com o conteúdo de frações. Nas séries anteriores, os alunos, por vezes apresentam ideias equivocadas sobre o assunto e por outras vezes os professores que ministram o conteúdo no Fundamental 1 tem dificuldades quanto a conceptualização e operatoriedade das frações como podemos ver em Magina e Campos(2008).

Teremos como questionamento norteador: É possível desenvolver uma sequência didática sobre o conceito de frações que possibilite sensibilizar o sistema cognitivo dos alunos para o desenvolvimento deste conceito, uma vez que eles já tiveram algumas experiências didáticas sobre o assunto?

De modo que é importante deixar claro o que compreendemos por sensibilizar o sistema cognitivo do aluno, entendemos que ao estar em contato com um novo conteúdo o aluno pode ser sensibilizado ou não por ele, criar as conexões necessárias para que este novo conteúdo seja integrado ao seu arcabouço de conhecimento prévio, deste modo quando há esta relação e o aluno consegue fixar este aluno consegue assimilar as relações e propriedades deste novo conhecimento com tudo que ele aprendeu anteriormente ele foi então sensibilizado.

Como objetivo geral buscaremos: Desenvolver uma sequência didática que sensibilize ao máximo o sistema cognitivo dos alunos para a obtenção do conceito de frações.

E como objetivos específicos:

- Verificar se a sequência didática desenvolvida e aplicada surtiu o efeito desejado sobre a movimentação cognitiva dos alunos em relação ao campo aditivo em N e Q.

- Verificar, se possível, o grau de dificuldade dos problemas dos pré e pós testes com o objetivo de futuros estudos sobre superação destas dificuldades.

Nossa hipótese é que após o desenvolvimento da sequência didática, os alunos demonstrem ter alargado o campo conceitual aditivo revelando melhores performances através da resolução de problemas envolvendo o conjunto do números naturais e o conjunto de números racionais.

A metodologia a ser utilizada como base para a elaboração e desenvolvimento desta pesquisa será a Engenharia Didática, lembrando que esta é uma metodologia com diferentes épocas e períodos de desenvolvimento, como abordaremos melhor posteriormente. Também envolverá o Ensino por meio da resolução de problemas tomando por teórico Vergnaud, o qual será melhor detalhado posteriormente.

De modo mais especifico, nosso primeiro passo foi a elaboração da sequência didática, depois a realização dos pré-testes com os alunos da turma para a verificação do grau de aprendizado e sensibilização apresentado pelos alunos. Após a realização do pré-teste foi o momento de aplicar a sequência didática, a qual foi realizada em 10 horas-aulas numa turma de 6º ano de uma escola privada no município de Ananindeua – Pará. Ao finalizar a aplicação da sequência foram feitos por parte dos alunos os pós-testes e assim iniciou-se o processo de verificação dos dados colhidos.

No próximo capítulo estaremos apresentando o referencial teórico utilizado para a elaboração desta pesquisa ressaltando nossa abordagem da Engenharia Didática que foi utilizada como base para a elaboração da sequência didática que compõe esta pesquisa e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Em nosso terceiro capitulo será apresentada uma revisão de literatura abordando trabalhos diagnósticos e experimentais, destes buscou-se dar preferência a aqueles desenvolvidos por meio de sequencias didáticas.

No quarto capitulo foi apresentado o plano de desenvolvimento do trabalho, assim como o detalhamento da metodologia empregada na pesquisa e análise da mesma.

Por fim temos a análise e conclusões da pesquisa.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Como referencial teórico, temos a considerar duas teorias. A engenharia didática que nos dará suporte metodológico para o desenvolvimento didático de nosso experimento bem como a construção de nosso produto resultante desta dissertação e a Teoria dos Campos conceituais de Vergnaud, que nos dará a necessária compreensão do desenvolvimento dos conceitos que envolvem a aprendizagem das frações, por intermédio da resolução de problemas aditivos.

## 2.1 Engenharia Didática

A metodologia da Engenharia Didática surgiu em decorrência da vertente conhecida como Didática da Matemática no início dos anos 1980 com Yves Chevallare e Guy Brousseau. Posteriormente, já no final desta década houveram as contribuições de Michèle Artigue. (ALMOLUD e SILVA, 2012)

Douady (1985) define a Didática da Matemática como a área da Educação Matemática que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática. Porém, a Didática da Matemática, segundo Douady (1985), não se reduz a pesquisar uma boa maneira ou modelo de ensinar uma determinada noção ou conceito particular. (POMMER, 2013)

A Engenharia Didática surgiu no transcorrer das discussões desenvolvidas no IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), na França, ao final da década de 1960. Em um primeiro momento, o IREM desenvolvia uma complementação na formação de professores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula, com uma maior ênfase ao desenvolvimento de jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos. (POMMER, 2013).

Guy Brousseau analisou posteriormente a validade das ações desenvolvidas, de modo a propor um "[...] estudo das condições nas quais são constituídos os conhecimentos; o controle destas condições permitiria reproduzir e otimizar os processos de aquisição de conhecimento escolar" (apud GÁLVEZ, 1996, p.26).

Segundo esta perspectiva de Brousseau, a Didática da Matemática deveria centrar-se nas atividades didáticas que tem como objetivo o ensino naquilo que tem de específico: os saberes matemáticos. Portanto, dentro desta concepção, a Didática da Matemática deve oferecer explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os modos de comunicação do saber. (POMMER, 2013)

D'Amore (2007) complementa como objetivo da Didática da Matemática "[...] a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito" (D'AMORE, 2007, p. 3). No contexto da época, as discussões no IREM sobre o ensino da Matemática se dirigiram para a "[...] produção de conhecimento para controlar e coordenar [...] ações sobre o ensino" (GÁLVEZ, 1996, p. 26). Neste momento, houve consenso por parte dos pesquisadores da corrente da Didática da Matemática para tomar como objeto de estudo as situações didáticas, proposta que estava sendo desenvolvida por Guy Brousseau.

Brousseau, foi um dos pesquisadores deste grupo, o qual contribuiu com o desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas. No momento histórico desta proposta, a visão dominante no campo da Educação era essencialmente cognitivo, devido a Piaget e colaboradores, que evidenciou o papel central da ação, a originalidade do pensamento matemático e as etapas de seu desenvolvimento nas crianças. (POMMER, 2013).

Brousseau (1996) considerava que as situações didáticas deveriam se situar na proposta construtivista e contemplar os processos adaptativos e de "equilibração" descritos na obra de Piaget. Porém, Brousseau (1996) considera que Piaget não observou a particularidade da aprendizagem de cada conhecimento matemático ao considerar a estrutura formal e a função da lógica como fundamentais, ideias defendidas por alguns matemáticos formalistas da Matemática Moderna.

Para transpor estes impedimentos, Brousseau (1996) propôs uma retomada do contexto de origem dos saberes e a importância do valor funcional das etapas que o saber percorre para ser elaborado, o que equivale a resgatar a gênese epistemológico-cultural do saber. Neste ponto Brousseau "[...] coloca que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares" (GÁLVEZ, 1996, p. 32).

> Segundo Brousseau (1986), as principais características das situações didáticas são:(a) os alunos aceitam se responsabilizar pelo fazer e pela organização da situação-problema, como um projeto pessoal;(b) ela é elaborada para se obter certo conhecimento que é parcial ou totalmente possível de ser alcançado pelo aluno;(c) espera-se que o aluno tome decisões, teste-as e modifique-as quando necessário para adequá-la à busca da resposta correta;(d) existe uma estratégia de base disponibilizada pelo repertório de conhecimento dos alunos que permita uma solução local ou uma solução parcial que inicie o desenvolvimento da atividade;(e) a eficácia e a viabilidade dependem das variáveis didáticas de comando que o professor convenientemente deve escolher e utilizar na concepção das atividades;(f) envolvem uma socialização que pode ocorrer de três modos; comunicação e negociação entre pares, com o jogo/problema e, eventualmente, em caso de extrema necessidade, com o professor;(g) é elaborada para que o aluno perceba que o novo conhecimento almejado é o meio mais eficaz para encaminhar e resolver a situação;(h) permite a construção do conhecimento, o que equivale à formação de sentido para o aluno.(apud POMMER, 2013, p.12)

Ao propor um repensar na didática do ensino da matemática por meio das situações didáticas, Brousseau buscou caracterizar os papéis do aluno, do professor e do saber frente às situações de aprendizagem em matemática.

Para modelar a teoria das Situações Didáticas, Brousseau propõe o sistema didático *stricto sensu* ou triângulo didático, que comporta três elementos - o aluno, o professor e o saber, partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa, a relação didática, que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber(elemento não-humano), que determina a forma como tais relações irão se desenvolver.(POMMER, 2013).

Segundo Pommer os autores Menezes e Lessa relatam em seu trabalho de 2006, que o professor e o aluno possuem uma relação assimétrica em relação ao saber. Deste modo, o que se espera da relação didática é mudar este quadro inicial do aluno face ao saber. E isto confere ao professor um papel fundamental nessa relação didática: iniciar o aluno no novo saber científico, que Brousseau postula como possível de se viabilizar através de situações de ensino.(POMMER, 2013)

> Segundo a Didática da Matemática, cabe ao professor fazer um duplo papel cíclico:(a) procurar situações de aprendizagem onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pela ação do próprio aluno;(b) ajudar os alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, de modo análogo como fazem os matemáticos, o que conduz a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis em outras situações e contextos.(POMMER, 2013, p.12).

Ainda, Brousseau (1996) afirma que a resposta inicial baseada em conhecimentos anteriores permitirá ao aluno responder, mesmo que em parte, a questão proposta. Ocorre, portanto, um desequilíbrio, que impulsionará o aluno a buscar modificações na estratégia inicial através de acomodações em seu sistema de conhecimentos, de modo que estas modificações provocadas pela situação a qual será o motor de sua nova aprendizagem. Sendo assim, o trabalho do professor é “[...] propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor”. (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Este modelo propõe uma quebra com o padrão de aula com papéis estáticos, onde o professor é encarregado da aula construída baseado na exposição dos conteúdos, esperando que o aluno assista o conhecimento lhe ser “repassado”, processe e assimile de modo passivo o conhecimento que foi desenvolvido unilateralmente pelo discurso do “educador”.

Como um investigador dos saberes matemáticos e dos processos didáticos do ensino da matemática, Brousseau (1996) postula que o professor deverá ter sua autoria, efetuando as transposições didáticas necessárias para a aprendizagem ativa do aluno, recontextualizando e repersonalizando os saberes matemáticos ao propor perguntas, jogos e situações-problema que promovam a adaptação do aluno às atividades propostas, ato que corresponde a recriar, estimular um ambiente de pesquisa, como se o aluno participasse de uma micro sociedade científica. (POMMER, 2013)

Em síntese, o papel do professor é oferecer um conjunto de boas situações de ensino, de modo a aperfeiçoar a ação autônoma do aluno. Estas sequências de atividades devem permitir que o aluno atue sobre a situação, com a mínima interferência explícita ou condução do professor.

Na situação didática proposta por Brousseau (1996), o aluno se defronta com situações intencionalmente elaboradas pelo professor, situadas em um ambiente propício de jogos e problemas, contexto este que deve propiciar o estímulo necessário e convidar os alunos a tomar a iniciativa para a busca de conhecimento. Porém, os alunos inicialmente não devem perceber os pressupostos didáticos envolvidos no objeto de estudo, portanto o que está sendo ensinado e o que se pretende que ele deva conhecer não deve estar explicito para o aluno antes dele concluir a atividade, de modo que sua compreensão momentânea é que sua tarefa foi bem sucedida.

Para Brousseau (1996), a resposta do aluno à situação didática é uma condição fundamental. Esta resposta chamada de devolução pelo autor, significa o aceite do aluno pela responsabilidade na busca da solução do jogo ou problema proposto, assim como pelo entendimento que o professor elaborou uma situação passível de ser resolvida, pelo menos em parte, de acordo com os conhecimentos anteriores que ele possuiu. Assim, feita a devolução, a situação proposta se converte no problema do aluno, o que situa uma condição essencial para que o aluno aprenda: o papel ativo e compromissado do aluno diante de uma situação de aprendizagem.

Brousseau (1996) coloca como ideia básica aproximar o trabalho do aluno num viés similar ao modo como é produzida a atividade científica verdadeira, valorizando-se a proposição de situações-problema desafiadoras. Neste contexto de desafio, a gênese proporcionada pela situação didática permite que o aluno percorra algumas etapas desenvolvidas por um pesquisador.

Essas etapas elaboradas pelo professor pesquisador são percorridas em sua Sequência Didática, a qual é fruto os procedimentos da engenharia didática descritos por Michèle Artigue em 1989, os quais tem como semelhança:

> [...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1996, p. 193).

Estes procedimentos podem parecer extensos e demorados, principalmente se aplica-los a pratica em sala de aula, que muitas vezes não é diária como nas disciplinas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, mas assim como poderemos observar no próximo capítulo que trará alguns trabalhos experimentas construídos sobre esta metodologia.

Pommer (2013) faz uma interessante descrição da Engenharia Didática, ressaltando que a mesma se enquadra na perspectiva da pesquisa qualitativa, ou seja, uma pesquisa que está muito mais interessada no processo, como a pesquisa é feita, a relação pesquisador-objeto pesquisado, na observação *in loco* da pesquisa.

Quanto a estrutura da Engenharia Didática ela é dividida segundo Artiguè (1996) em Análise preliminar, Concepções e analise a priori, Experimentação e Análises a posteriori com a validação.

O primeiro momento é a análise preliminar, a qual se consiste em uma visão geral do quadro teórico didático geral e dos conhecimentos adquiridos sobre o assunto a ser trabalhado, "incluindo a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática" (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p.26).

Na análise preliminar deve ser feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes dentro dos diversos níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, ou pelo menos em ambientes análogos, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino. (POMMER, 2013).

Sendo, portanto fundamental ressaltar que o ponto base das análises preliminares "[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções" (ARTIGUE, 1996, p. 202).

No segundo momento temos as Concepções e análises a priori, onde o pesquisador deve conjecturar acerca do comportamento, dúvidas e compreensão dos alunos, neste momento também será formulada a experimentação, próximo passo a ser tomado, levando em conta todo o referencial teórico e a contextualização feita dos alunos aos quais será aplicada a sequência didática.

Neste momento devem-se delimitar as variáveis microdidáticas (ou locais) e macrodidáticas (ou globais) pertinentes ao Sistema Didático (professor/aluno/saber) que podem ser consideradas pelo pesquisador/professor para que sejam abordadas as várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática. (POMMER, 2013)

Portanto Artigue descreve que o objetivo desta segunda fase da Engenharia Didática é:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 205).

No terceiro momento tem-se a Experimentação, a qual consiste na aplicação da sequência didática, sem esquecer a observação e registro mais preciso possível das inter-relações dos alunos e do aplicador.

Para Pommer (2013) a experiência de Brousseau revela que no contrato didático é essencial a consciência da não-interferência explícita de conhecimentos, de modo a evitar explicações ou 'dicas' que venham facilitar as resoluções dos alunos, proporcionando assim condições que permitam a mobilização do aluno em enfrentar o problema e em resolvê-lo, pelo menos em parte, através da lógica interna e dos conhecimentos anteriores. Assim, o entendimento mútuo dos papéis - da não-intervenção do pesquisador e da ação independente do aluno, e o respeito a estas condições, garantem condições para se caracterizar o contrato didático na pesquisa.

Por fim tem-se a Análise a posteriori e validação, a qual consiste em uma análise do conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, levando em conta tudo que foi produzido seja a produção dos alunos (pré-teste, atividades e pós-teste), registros de observadores e registro em áudio e vídeo, se possível. Então confrontando todos os dados colhidos com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

## 2.2 Teoria dos Campos Conceituais

Trataremos agora sobre a Teoria de Vergnaud sobre os Campos Conceituais, a qual servirá de arcabouço para as análises das produções dos alunos durante a terceira fase da Engenharia Didática.

### 2.2.1 Histórico

A teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica que se refere ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, de modo mais especifico à aprendizagem de competências complexas, na escola e no trabalho, sendo, portanto, ampla, não estando restrita ao desenvolvimento educacional da criança, mas sim, ao cognitivo do ser humano, independente da faixa etária que esteja. Esta teoria foi desenvolvida na década de 1980 com o psicólogo, matemático, filosofo e pesquisador francês Gérard Vergnaud, na época orientando de doutorado de Jean Piaget. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014)

De acordo com Vergnaud (1981), Piaget não indicava em suas obras interesse pela didática. Como exemplo, ele menciona que apesar de Piaget ter realizado amplo estudo sobre a noção de espaço, tempo e velocidade, ele não apresentou propostas didáticas para estes conceitos.

No entanto, Vergnaud (1981) considera que determinadas ideias teóricas e científicas presentes nas obras de Piaget são essenciais para a pesquisa em didática. Dentre essas ideias, Vergnaud (1981) destaca: o conceito de invariante operatório, a função simbólica, o interacionismo e a noção de equilíbrio. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014).

Portanto, foi inspirado nas ideias de Piaget, nas décadas de 1970 e 1980 que Vergnaud inicia suas pesquisas voltadas para o contexto escolar, indicando a necessidade de aproximação cognitivista e genética com métodos que dessem diferentes visões do objeto a ser pesquisado tais como entrevistas, experiências planejadas, experiências didáticas, estudos de livros didáticos, entre outros. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014).

Segundo o próprio Vergnaud a Teoria dos Campos Conceituais é “uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceptualização do real que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista do seu conteúdo conceitual” (VERGNAUD, 1993b, p.1).

Para Guimarães(2005) Vergnaud justifica a necessidade de estudar Campos Conceituais por considerar que há uma reciprocidade muito grande entre Conceito e Situação, uma vez que um conceito remete a muitas situações e uma situação remete a muitos conceitos. Na realidade, o desenvolvimento dos conhecimentos de uma criança se faz por meio de um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existe parentesco, como é o caso da adição/subtração e da multiplicação/divisão.

Gonçalves (2008) diz que um argumento fundamental em prol do estudo de campos conceituais é: um conceito ganha sentido em situações de grande variedade, mais do que conceitos meramente isolados; portanto não se analisa uma situação graças a um conceito único, mas graças a um conjunto deles; e que os mesmos aspectos de um conceito não são necessariamente adequados para tratar diferentes situações ou para realizar diferentes procedimentos de tratamento (GONÇALVES, 2008).

Moreira (2002) complementa a ideia base de Vergnaud acerca da teoria dos campos conceituais. Isto se torna aparente na importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização no progressivo domínio de um campo conceitual pelos alunos. Quanto ao professor, a tarefa mais difícil é a de prover oportunidades aos alunos para que desenvolvam seus esquemas na zona de desenvolvimento proximal.

### 2.2.2 Conceitos Base

A teoria de Vergnaud apresenta quatro conceitos básicos para a sua construção sendo eles interligados dois a dois, são eles: esquemas e conceitos, invariantes e campos conceituais.

Para Vergnaud(1996, p.157), o esquema é “a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações”, admitindo assim que a interação social também contribui para a formação dos esquemas. Portanto, para Vergnaud (1996), é nos esquemas que se deve procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória.

Deste modo, o esquema é um conceito amplo, que se refere à organização das ações do dia-a-dia e daquelas relacionadas ao trabalho, à organização das formas linguísticas e enunciativas do diálogo ou às operações mentais que permitem tratar problemas científicos ou técnicos decerto campo do conhecimento. O que não muda nestas relações é a organização da conduta e não a conduta em si. Por outras palavras, “um esquema não é um estereótipo, e um mesmo esquema pode gerar conduções relativamente diferentes em função das situações singulares às quais é conduzido a dirigir” (VERGNAUD, 1996,p. 283).

O esquema funciona como um todo e, segundo Vergnaud (1993a), é uma totalidade dinâmica funcional, uma espécie de módulo finalizado pela intenção do sujeito e organizado pelos meios que este emprega para alcançar seu objetivo.

Vergnaud (1993a, p.78) considera que o esquema é composto de quatro elementos indispensáveis:

> a) Os *invariantes operatórios* (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que são os instrumentos de conceitualização de situações de referências do domínio considerado. Eles dirigem o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação, e a recolha de informação sobre a situação a tratar; b) *Inferências,* que tomam a forma de operações e que permitem "avaliar" as regras e antecipações a partir de informações fornecidas pelas situações e a partir das qualidades operatórias dos invariantes; c) As *regras de ação*, do tipo se... então..., que permitem decidir sobre as ações que se tem que pôr em prática e que, ao mesmo tempo, resultam das "operações" inferenciais. São as regras de ação que engendram o seguimento das ações; d) As *antecipações* do objetivo a atingir que dizem respeito ao efeito que se deseja obter incluindo as etapas intermediárias, e que resultam igualmente das "operações" inferenciais.

Gonçalves (2008) usa como exemplo um esquema citado por Vergnaud, no qual ele descreve a organização do movimento do corpo do atleta no momento do salto em altura que, o mesmo, representa um conjunto impressionante de conhecimentos espaciais e mecânicos. A conduta do saltador pode sofrer determinadas variações, mas a análise dos seus ensaios sucessivos coloca em evidência numerosos elementos comuns. A organização perceptivo-motora pressupõe, pois, categorias de ordem espacial, de ordem temporal e de ordem mecânica (orientações no espaço, distância mínima, sucessão e duração, força, aceleração e velocidade...), bem como conhecimentos-em-ato que, se fossem explicitados, poderiam assumir a forma de teoremas de geometria e de mecânica.

A partir desta análise de Vergnaud, podemos concluir que a maioria das tarefas realizadas pelo homem podem ser colocadas do ponto de vista matemático, pois são realizadas por meio de esquemas e/ou processos automatizados, estes que Gonçalves (2008) sob a ótica de Vergnaud ressalta que a automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições nas quais determinada operação é ou não apropriada. A automatização é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação. No entanto, uma sequência de decisões conscientes também pode ser igualmente objeto de uma organização invariante para uma classe de situações dadas. Como exemplo o algoritmo da adição, em numeração decimal; a sua execução está praticamente automatizada para a maioria das crianças no final do primeiro segmento do Ensino Fundamental. Contudo, as crianças são capazes de apresentar uma sequência de ações diferentes em função das características da situação; resto ou não, zero intercalar ou não, decimal ou não. De fato, todas as nossas condutas comportam uma parte automatizada e uma parte de decisão consciente.

Gonçalves (2008) fala sobre uma constatação feita por Vergnaud de que os algoritmos são esquemas, ou ainda, que os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos: falta-lhes eventualmente a efetividade, isto é, a propriedade de chegar ao fim com segurança num número finito de passos. Os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efetivos.

### 2.2.3. Campo conceitual

Para Nogueira e Rezende (2014), Vergnaud defende que para o estudo de um conceito são indispensáveis diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades e teoremas interligados. Assim, para o pesquisador, não é possível examinar ou aprender isoladamente um conceito, são necessárias diversas situações para compreendê-lo. E, igualmente, uma única situação pode estar ligada a diversos outros conceitos. Sendo esta, portanto, uma das justificativas da ideia de campo conceitual.

Para ajudar a esclarecer quais seriam as ideias de Vergnaud sobre campo conceitual vamos ver dois destaques feitos por Moreira (2002). O Campo conceitual é, para Vergnaud, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. (MOREIRA, 2002).

Porém Vergnaud também define Campo conceitual como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados. (MOREIRA, 2002).

Moreira reforça que em outros trabalhos Vergnaud traz uma visão complementar às anteriormente descritas, definindo campo conceitual como sendo um conjunto de situações cujo controle requer a compreensão de vários conceitos de naturezas distintas. Por exemplo, o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações. (MOREIRA, 2002).

Três argumentos principais levaram Vergnaud (1983, p. 393) ao conceito de campo conceitual:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Vergnaud atribui muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas ações dos sujeitos, as que estão relacionadas a conhecimentos implícitos falsos ou verdadeiros, por ele denominados de invariantes operatórios, classificados em duas categorias - <u>*teoremas em ação* e *conceitos em ação*</u>, os quais serão mais bem abordados mais à frente. Segundo o pesquisador, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo pelo qual eles resolvem e, principalmente, os invariantes operatórios que os alunos mobilizam ao resolver um problema. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014)

De acordo com Vergnaud (2009), é difícil para uma criança explicar e justificar seus conhecimentos, utilizados na ação, em palavras. E, apesar de certa experiência em determinadas situações, muitos adultos também não conseguem explicitar verbalmente parte dos conhecimentos que utilizam na ação. Partindo destas diferenças entre a forma operatória do conhecimento e sua forma predicativa é que o pesquisador introduz, no sentido psicológico, o conceito de invariante operatório. Vergnaud toma de Piaget essa ideia de invariante operatório como base de sustentação da ação incorporando-a como um dos pontos do tripé que compõe um campo conceitual. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014).

A ênfase que Vergnaud (1993a) atribui às situações para a compreensão de um dado conceito é tão significativa, que ele afirma que a primeira entrada de um campo conceitual é um conjunto de situações. Entretanto, juntamente com as situações estão os conceitos, pois “[...] a teoria dos campos conceituais surge, sobretudo, como uma psicologia dos conceitos” (VERGNAUD, 1993a, p. 9). Desse modo, o pesquisador esclarece que, do ponto de vista psicológico, um conceito, portanto, um campo conceitual é necessariamente definido por três conjuntos, representado por C = (S, *I*, s):

- O conjunto *S é o conjunto das situações* que dão sentido ao conceito.

> - *I é o conjunto dos invariantes operatórios* em que se baseia a operacionalidade dos esquemas. Cada conjunto de situação evoca operações de pensamentos precisas que se referem aos invariantes operatórios, não necessariamente explícitos, que tentam modelizar uma situação e tratam de extrair propriedades, relações ou aplicar um teorema.
> - *s é o conjunto das formas de linguagem* que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações, os processos de tratamento. Segundo Vergnaud (1985), não é possível falar de conceito sem considerar os termos emprestados da linguagem natural ou de sistemas simbólicos, pois, caso contrário, não seria possível sua definição. Este conjunto é denominado de *significantes*. (VERGNAUD et al, 1993, p. 9).

"Segundo o pesquisador, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo pelo qual eles resolvem e, principalmente, os invariantes operatórios que os alunos mobilizam ao resolver um problema". (NOGUEIRA e REZENDE, 2014, p.50)

De acordo com Vergnaud (2009), os invariantes operatórios são modelos preciosos para se descrever a conduta do sujeito, e os diferencia em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação: "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação" (VERGNAUD, 2009, p.23). Os conceitos em ação e os teoremas em ação são de naturezas distintas. Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014).

Para Vergnaud, a desestabilização de invariantes operatórios falsos proporciona momentos de aprendizagens aos alunos. Guardadas as diferenças de termos, essa também é uma ideia eminentemente piagetiana, recorrentemente discutida pelo mestre genebrino quando ele aborda conceitos como equilibração majorante ou abstração reflexionante, por exemplo. Ou seja, ao desestabilizar seus conhecimentos falsos, vivenciando momentos de desequilíbrios, hesitações e conflitos, entendemos que os alunos passam de um nível de conhecimento para outro mais elaborado, podendo realizar, portanto, em linguagem piagetiana, uma abstração reflexionante. (NOGUEIRA e REZENDE, 2014).

Vergnaud diferencia dois tipos de cálculo, o *cálculo numérico* e o *cálculo relacional*. O cálculo numérico é usado em situações habituais de adição, subtração, multiplicação, divisão etc. O cálculo relacional diz respeito às operações do pensamento que são necessárias ao tratamento das relações dentro de cada situação sendo que nem sempre as crianças as explicitam. Na verdade estas operações constituem os teoremas-em-ação. (GONÇALVES, 2008).

*2.2.3.1. Campo Aditivo*

O campo conceitual das estruturas aditivas (VERGNAUD, 1996) é constituído pelo conjunto das situações cuja abordagem implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem considerar essas situações como tarefas matemáticas. Desta forma, constituem as estruturas aditivas os conceitos de cardinal e de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (receber ou gastar 8 reais), de relação de comparação quantificada (ter mais 5 balas que), de composição binária de medidas (quantos são no total?), de composição de transformações e de relações, de número natural e de número relativo, de abscissa, de deslocação orientada e quantificada etc. (GONÇALVES, 2008).

Vergnaud (1996), reconhece a importância de um trabalho de classificação sistemática dentro das ciências, devendo tal classificação inclusive ultrapassar o quadro limitado das situações cotidianas. Deste modo, Vergnaud estabelece as relações aditivas de base a partir das quais é possível tratar todos os problemas de adição e de subtração da aritmética elementar. (GONÇALVES, 2008, p.102).

São seis as relações na estrutura aditiva obtidas a partir de Vergnaud (1996). Para representar as relações aditivas o autor utilizou os seguintes símbolos:

□ : medida ou grandeza, geralmente explicitada por uma quantidade.

◯ : transformação ou relação.

→ a seta dá o sentido, do estado inicial para o estado final nas relações de transformação, do referido para o referente nas relações de comparação + e - : esses sinais associados às medidas e relações representam ganhos (+)ou perdas (-).

Segundo Gonçalves, Vergnaud afirma que o simbolismo dos diagramas utilizando quadrados, círculos, setas e chaves é particularmente eficaz para ressaltar a transformação das categorias do pensamento em objetos do pensamento. Para exprimir as transformações, não é conceitualmente equivalente utilizar o verbo “pagou” no passado, falar da “despesa” (nominalização), ou designar todas as transformações através de um único sinal. (GONÇALVES, 2008, p.103).

Vamos demonstrar por meio de exemplos as relações aditivas de base:

**a) Composição de duas medidas numa terceira**

Nessa classe de problemas estão envolvidas as situações que envolvem parte e todo: subtrair uma parte do todo para obter a outra parte ou juntar uma parte com outra para obter o todo.

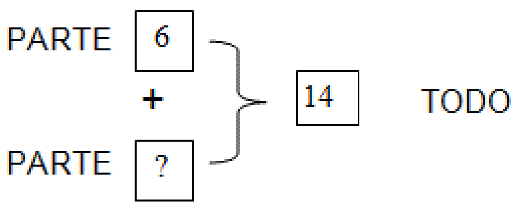
O significado de composição para Vergnaud aparece em problemas que juntam dois estados para obter um terceiro. Tratam de situações em que basta “juntar”, ou “tirar”, sem que haja nenhuma transformação no ambiente. (CURI, 2011)

O autor considera três estados: Estado Inicial (Ei), Estado Intermediário (I) e o Estado Final (Ef). Dados dois deles, obtém-se o terceiro estado. Os exemplos de problemas a seguir envolvem a ideia de composição. (CURI, 2011).

Exemplo: No aniversário de Augusto há 14 colegas entre os quais 6 são meninos. Qual o número de meninas?

Representação: Composição de duas medidas numa terceira (VERGNAUD, 2009)

Esquema 1 - Composição de duas medidas numa terceira




Fonte: Vergnaud(2009)

**b) Transformação de uma medida inicial numa medida final**

Esses problemas envolvem uma transformação numa sequência temporal onde há um acréscimo ou decréscimo numa quantidade inicial resultando em outra quantidade final. A incógnita pode ser qualquer um dos componentes da relação.

Vergnaud defende que o significado de transformação envolve uma ação ocorrida a partir da situação, de forma direta ou indireta, causando aumento ou diminuição. O estado inicial da situação sofre uma transformação aditiva (ou subtrativa) para obter o resultado. Essa transformação é uma ação decorrente de verbos que fazem a transformação ser acrescida ou reduzida. (CURI, 2011).

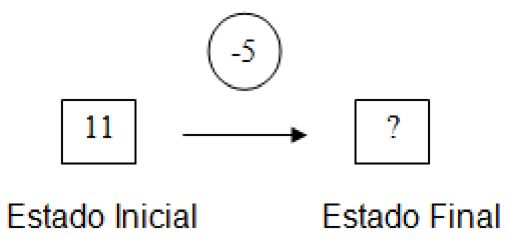
O autor afirma que as crianças, mesmo antes da educação formal, já constroem um pensamento intuitivo de adição e subtração, relacionando espontaneamente o "ganho" e a "perda" vivenciadas em sua rotina diária. (CURI, 2011).

O raciocínio de transformação é caracterizado por uma situação dada por um Estado Inicial (Ei), geralmente correspondente a números que indicam medidas (quantidades, grandezas ou valores), que sofrem uma transformação (T), que produz mudanças em relação ao Estado Inicial, levando a um Estado Final (Ef). (CURI, 2011).

Exemplo: Lucas tinha 11 jujubas e deu 5 jujubas para seu irmão. Com quantas jujubas ele ficou?

Representação:

Esquema 2 - Transformação de uma medida inicial numa medida final




Fonte: Vergnaud(2009)

**c) Relação de comparação entre duas medidas**

Nessa categoria estão os problemas que comparam duas quantidades, o *referente* e o *referido*. O referente é tomado como a referência a partir da qual se determina a outra quantidade, o referido, obtido através da relação estabelecida entre as quantidades.

Nesse caso, as quantidades são comparadas entre duas partes, no sentido de relacionar essas partes. Vergnaud esclarece que, no raciocínio de comparação, os valores não se transformam, apenas se estabelece a ideia de uma comparação entre dois estados. Curi (2011, p.6), resume o significado de comparação em três proposições envolvendo as operações de adição ou subtração, apresentadas a seguir:

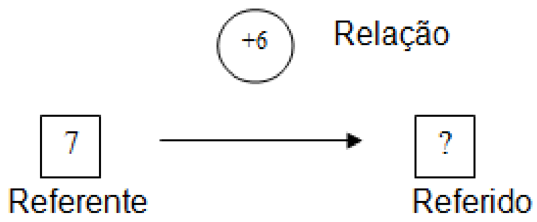
1) O valor de referência é conhecido e busca-se o referido a partir da relação dada.
2) Busca-se o valor de referência a partir do referido pela relação dada.
3) O valor de referência é conhecido, assim como o referido e busca-se a relação.

Segundo Vergnaud, para a criança, é difícil discernir o valor de referência do referido, as relações existentes entre dois grupos e todas as combinações possíveis de obter com o significado de comparação.(apud CURI, 2011).

Exemplo: Daniel tem 6 bombons a mais do que Ligia. Ligia tem 7bombons.Quantos bombons tem Daniel?

Representação:

Esquema 3 - Relação de comparação entre duas medidas




Fonte: Vergnaud(2009)

Os problemas a seguir seguem a concepção de Magina, Campos, Nunes e Gitirana(2001), caracterizando-os como tendo uma maior complexidade, pois envolvem mais de um raciocínio aditivo simultaneamente. Devido a essa maior dificuldade, os autores denominam estes como *problemas mistos*. Os exemplos descritos abaixo não esgotam as possibilidades de situações para os raciocínios aditivos nessa categoria de problemas, mas servem de auxílio para a compreensão das possibilidades.

**d) Composição de duas transformações**

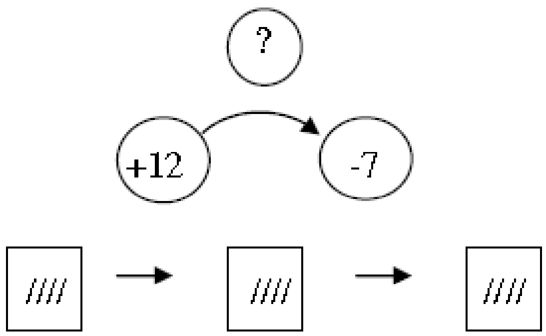
Neste tipo de composição podem ser incógnitas os estados inicial, intermediário ou final, assim como as transformações ocorridas. Os estados inicial e final podem permanecer desconhecidos pois estes dados podem não ser relevantes para a solução do problema. Nesse tipo de problema pode ocorrer mais de uma pergunta, cada uma relativa a uma parte do mesmo.

Exemplo: No início de uma partida, Marcos tinha uma certa quantia de pontos.

No decorrer do jogo ele ganhou 12 pontos e, em seguida, perdeu 7 pontos. O que aconteceu com seus pontos no final do jogo?

Representação:

Esquema 4 - Composição de duas transformações



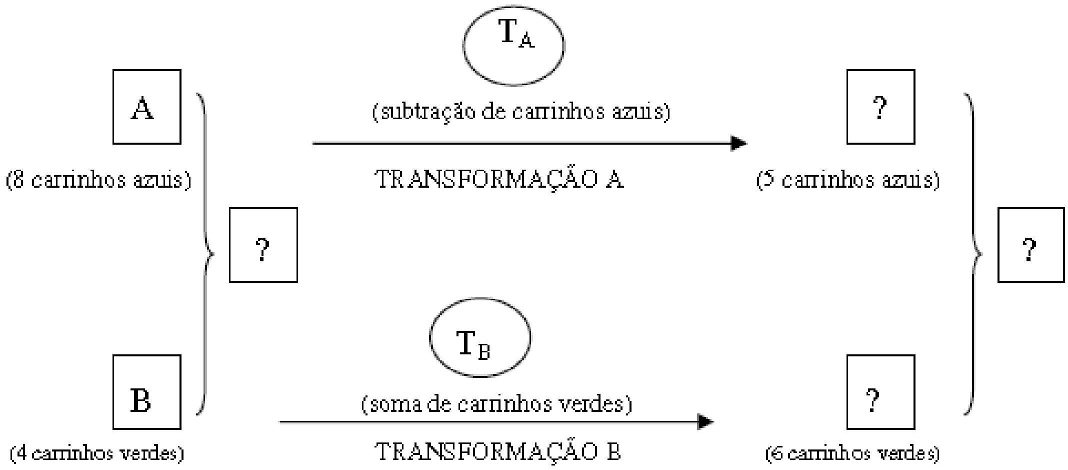

Fonte: Vergnaud(2009)

**e) Transformação de uma relação**

Os problemas desse tipo envolvem transformações e composições. No exemplo abordado abaixo, houve a transformação de uma composição.

Representação:

Esquema 5 - Transformação de uma relação




Fonte: Vergnaud(2009)

Exemplo: Na estante de Daniel havia 8 carrinhos azuis e 4 carrinhos verdes. Daniel deu para seu irmão 3 carrinhos azuis e ganhou de seu pai 2 carrinhos verdes. Com quantos carrinhos ficou Daniel depois de dar os carrinhos a seu irmão e ganhar outros de seu pai?

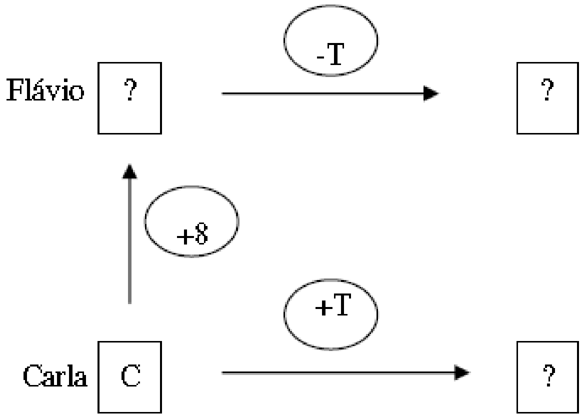
**f) Composição de duas relações**

Neste caso o problema se constrói a partir de duas relações, o que o torna mais complexo, pois requer que a criança o resolva em etapas com distintos procedimentos. O texto do problema se torna mais complexo, pois a quantidade de dados e as relações entre eles são maiores. Podem ocorrer variações como, por exemplo, o aumento do número de personagens.

Exemplo: Flávio e Carla estão num jogo onde se compra e vende objetos fictícios. Numa etapa do jogo Carla tem 6 reais e Flávio tem 8 reais a mais que Carla. Na etapa seguinte do jogo, que é a última, Flávio perde 3 reais e Carla ganha 4 reais. Com quantos reais cada um termina o jogo?

Representação:

Esquema 6 - Composição de duas relações




Fonte: Vergnaud(2009)

A classificação apresentada acima para os problemas aditivos foi elaborada a partir de considerações de caráter psicológico e matemático (VERGNAUD, 1996):

- dificuldade muito desigual entre problemas de estruturas diferentes que, apesar disso, se resolvem através da mesma operação matemática;

- distância ontogenética de êxito nas diferentes classes de problemas que podem ser engendrados a partir de uma mesma relação; distância ontogenética de procedimentos utilizados, bem como de simbolizações matemáticas acessíveis à criança;

- importância dos conceitos de transformação temporal e de relação no processo de apropriação das situações de adição e de subtração. A tomada em consideração destes conceitos tem grandes consequências teóricas: conduz, por um lado, à introdução, ao lado do modelo da lei binária interna, do modelo da operação unitária externa, e por outro lado, ao recurso aos números relativos para caracterizar determinadas operações de pensamento das crianças pequenas.

Vergnaud (1996) acrescenta que cada uma das classes de problemas definidas acima pode, por sua vez, ser subdividida em subclasses, em função dos valores numéricos utilizados e do domínio de experiência ao qual se faz referência: “aos 8 anos, não se compreende da mesma maneira a transformação de uma quantidade de bolas de gude, de uma soma de dinheiro, de uma massa, de um volume ou de uma posição”. (GONÇALVES, 2008, p.106).

Deste modo buscou-se fazer neste capítulo uma abordagem mais especifica das teorias principais para a elaboração desta pesquisa as quais serão fundamentais para a construção da sequência didática e da avaliação da mesma.

## 3 REVISÃO DE LITERATURA

O presente capítulo tem por objetivo fazer um levantamento bibliográfico dos trabalhos que abordam o ensino de frações, destacando os trabalhos que desenvolveram este tema por meio da Engenharia Didática ou sequências de ensino.

Para isto vamos dividir este em duas partes, na primeira abordando os trabalhos diagnósticos, os quais têm ênfase em verificar e diagnosticar o nível de conhecimento, aprendizagem, o trabalho desenvolvido pelos professores assim como o nível de domínio destes do conteúdo de frações que é ministrado. Em um segundo momento, serão analisados os trabalhos experimentais, que são resultados de experimentos realizados em sala de aula com alunos, turmas ou professores.

Na análise feita, cada um dos trabalhos terá destacado alguns pontos como: objetivos, questão motivadora, metodologia abordada e os principais resultados obtidos por cada autor, para que assim se possa ter uma perspectiva geral da pesquisa e conclusões obtidas com as mesmas, para, desta forma, situar nossa pesquisa no âmbito cientifico atual de modo que a mesma seja relevante e complemente o que já vem sendo pesquisado no país.

### 3.1 Trabalhos Diagnósticos

Nesta sessão a ênfase está sobre os trabalhos que tem como finalidade verificar o nível de conhecimento, aprendizagem e informações que os alunos recebem sobre o conteúdo de frações de modo mais geral, levando em consideração também trabalhos que tem o foco nos professores e como eles estão ensinando e avaliando a aprendizagem dos seus alunos.

Silva (2007) teve por objetivo analisar os diferentes fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores do Ensino Fundamental I, ou 1º ao 5º ano, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados, uma vez que as frações são introduzidas nestas séries em especial no 5º ano, mas sem o rigor e complexidade a qual será apresentada nas séries subsequentes.

A questão da pesquisa da autora foi, quais os fatores que influenciam o desenvolvimento profissional de professores do Ensino Fundamental num processo de formação na própria escola sobre o ensino da representação fracionária do número racional, onde lhes sejam garantidos espaços para estudar e refletir sobre conhecimentos historicamente produzidos e sobre sua prática?

A fim de responder sua questão Silva (2007) utilizou uma metodologia qualitativa, onde buscou analisar diferentes aspectos do desenvolvimento profissional de um grupo de professores, tomando como base suas observações e reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações. O material utilizado neste estudo foi elaborado a partir de dados diagnósticos retirados de uma pesquisa de campo, diagnostico este, feito nas três primeiras sessões com os professores pesquisados, e ao final do processo de formação ela procurou observar e analisar também a influência da intervenção sobre a prática docente daqueles profissionais.

De modo geral, Silva (2007) percebeu a partir da análise das informações obtidas que é possível identificar alguns fatores que podem exercer influência sobre o processo de desenvolvimento profissional dos docentes. Um deles tem relação com as dificuldades relativas ao conhecimento matemático do professor. Sua conclusão é que há necessidade de um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, complementado pela análise dos diferentes significados de sua representação fracionária tanto em cursos de graduação em pedagogia como outros de formação continuada.

A autora conclui que para romper crenças e concepções dos professores sobre ensino e aprendizagem da Matemática e em específico do objeto matemático frações, é necessária uma constante reflexão sobre a prática, sobretudo em ambientes que propiciem um trabalho colaborativo.

Segundo as avaliações de Silva (2007),os professores que estão ensinando os primeiros passos aos alunos no campo dos números racionais, de modo mais especifico as frações, demonstraram uma grande dificuldade conceitual em relação a este assunto.

Silva (2007, p.269) diz que:

> [...]foi possível verificar que os professores dotados de maior compreensão sobre a representação fracionária de números racionais conseguiram aprofundar a reflexão sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Conclui-se que um dos motivos para os alunos enfrentarem tantas dificuldades com a aprendizagem de frações, é porque provavelmente seus professores também tem dificuldades com este assunto.

Santos (2005) teve por objetivo identificar o nível de compreensão e as concepções acerca do conceito de fração, para professores que atuam no Ensino Fundamental, sendo estes professores somente os que atuam do 1º ao 9º anos. Além de buscar contribuir com um material teórico que auxilie na formação de professores.

A questão que o autor se propôs a responder foi: “é possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração? ”Fazendo as seguintes inferências a respeito desta, se sim, quais? Se não, pôr que? (SANTOS, 2005, p.24).

Para responder aos seus questionamentos Santos (2005) utilizou um estudo diagnóstico com 67 professores do Ensino Fundamental, os quais atuavam em sete escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. Estes professores foram divididos em três grupos (G1, G2 e G3). Todos os grupos realizaram as mesmas tarefas as quais ficaram divididas em dois momentos: o primeiro onde foi solicitado aos professores a elaboração de seis problemas, envolvendo o conceito de fração, e no segundo momento, ele pediu para que os mesmos resolvessem os próprios problemas elaborados.

Os resultados obtidos por Santos(2005) mostram uma tendência, entre os professores das séries inicias e também com os licenciados em matemática, em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração dos problemas. Quanto à resolução dos problemas há uma valorização dos aspectos procedimentais. Estas evidências levaram-no a concluir que não existe diferença significativa entre a concepção dos professores de 1º ao 5º ano e especialistas, seja na elaboração, ou na resolução de problemas de fração em seus diferentes significados. Sendo uma proposição do autor de que é provável, que as concepções desses professores carreguem fortes influência daquelas construídas no seu período de Educação Básica.

Merlini (2005) teve por objetivo investigar as estratégias que os alunos, de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003).

A questão que a autora se propôs a responder foi: “Quais estratégias de resolução, alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?” (MERLINI, 2005, p.12).

A fim de responder a esta questão Merlini (2005) utilizou na metodologia aspectos qualitativos e quantitativos. A investigação foi realizada com 120 alunos, destes, 60 foram de 5ª série e 60, da 6ª série do Ensino Fundamental, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. No segundo momento, foram realizadas entrevistas com 12% da amostra, de modo a verificar qualitativamente a pesquisa.

A autora constatou que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração. Portanto, alguns significados tiveram um desempenho muito ruim como o de Número e outros um pouco melhor como o significado Parte-todo que obteve média de 33,75% de acertos, o que, mesmo sendo o resultado mais positivo; está ainda abaixo de 50% que significaria pelo menos em metade de acertos por parte dos alunos participantes da pesquisa.

Quanto às estratégias de resolução dos problemas não houve uma regularidade. Em outras palavras, para um mesmo significado foram encontradas diferentes estratégias de resolução. Estes resultados levaram Merlini (2005) a concluir que a abordagem que se faz do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito e, portanto, deve-se fazer uma intervenção no modo que este conteúdo é abordado.

Como sugestões de intervenção no ensino de frações a autora propôs: desenvolver uma sequência para o início do ensino de fração para a 3ª série do Ensino Fundamental, que abordaria três dos cinco significados da fração (NUNES et al., 2003). Quociente, Parte-todo e Medida. Em segundo lugar desenvolver uma sequência de ensino destinada a alunos de 6º ano. E em terceiro lugar trabalhar com professores do 4º e 5º ano, pois é nessa fase que se inicia o ensino de fração.

É importante que os professores tenham clareza de que a fração, esse tão complexo conceito matemático, poderá ser construído pelos alunos se explorado seus diferentes significados nos diversos contextos, sobretudo, nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Teixeira (2008, p.10) teve por objetivo traçar um diagnóstico das competências e concepções de professores do 2º Ciclo do Ensino Fundamental da cidade de Itabuna na Bahia, a respeito do conceito de fração. Para cumprir com este objetivo o mesmo se propôs a responder à seguinte questão: “Quais as concepções e competências apresentadas por professores que atuam no 2º ciclo do Ensino Fundamental, sobre o conceito de fração e seu ensino?”

O autor verificou que os professores pesquisados apresentam forte tendência a valorizar a fração com o significado operador multiplicativo e parte-todo. Quanto à competência, Teixeira (2008) constatou que esta aparece fortemente ligada ao significado parte-todo, estando em segundo e terceiro lugar respectivamente os significados, medida e quociente. Em sua análise diz que, de modo geral os professores apresentaram desempenho baixo na resolução dos problemas de fração, o que o levou a concluir ser necessário ampliar o conhecimento matemático desses docentes, bem como realizar trabalhos que ajudem a expandir suas concepções a respeito do conceito de fração e de seu ensino.

Além disso, a partir dos dados coletados o autor buscou verificar os livros didáticos escolhidos pelos professores e se eram abordados os cinco significados de frações e se há ou não a presença de ícones; quais variáveis (contínuas ou discretas) aparecem e se ainda os invariantes (equivalência e ordem) são trabalhados. Observar se a forma como o assunto é introduzido, garante ao aluno sua compreensão, em relação à coerência e à articulação da parte teórica, exemplos e exercícios propostos.

Para a realização da análise, Teixeira (2008) pôs como referências teóricas o estudo proposto por Nunes et al. (2003).

Teixeira (2008) retrata que os professores apresentaram concepções restritas ao significado operador multiplicativo em quantidade discreta e não icônica e no significado parte-todo em quantidade contínua e icônica. Os significados foram explicitamente diagnosticados nos problemas elaborados pelos professores.

Por fim uma das conclusões de Teixeira (2008) é que para esse grupo de professores, o conceito de fração não é difícil de ser ensinado, entretanto estes professores precisam adquirir conhecimento mais amplo sobre o conceito de fração. Embasando, portanto a proposta de que deve ser feito um esforço para o oferecimento e realização de um estudo complementar ou formação continuada para os professores principalmente devido a formação deficitária oriunda das licenciaturas.

Canova (2006, p.24) teve por objetivo identificar e analisar as crenças, concepções e competências dos professores que atuavam no 1º e 2º ciclos no Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração, utilizando para isso a classificação feita por Nunes et al. (2003). Para isso o estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: “Qual é o entendimento que os professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental apresentam em relação ao conceito de fração?”.

De modo a complementar o entendimento da questão de pesquisa principal, Canova (2006) elaborou mais dois questionamentos, sendo eles: 1) Quais as crenças e concepções que esses professores têm a respeito da fração? (visando trazer luz ao entendimento que os professores pesquisados têm sobre o ensino de frações).2) Quais as competências desses professores nas resoluções das questões envolvendo o conceito de fração? (com o objetivo de revelar o entendimento dos professores quanto às competências que precisavam ser ensinadas de frações).

A pesquisa foi realizada com 51 professores que atuam nas séries iniciais do Ensino Fundamental (1º e 2º ciclos), de três diferentes escolas da rede municipal da cidade de Osasco, visando alcançar os quatro tópicos básicos da pesquisa em relação aos professores, (1) perfil, (2) crenças, (3) concepções e (4) competências. Canova (2006) dividiu sua pesquisa em aplicação dos cadernos de respostas e entrevistas com 10% da amostra pesquisada.

Quanto às concepções, Canova (2006) descreve que os professores apresentaram comportamentos distintos. Alguns apresentaram uma concepção restrita no significado parte-todo com quantidade contínua não icônico. Já outros, a concepção abrangeu os significados no operador multiplicativo em quantidade discreta não icônica e no significado quociente nas quantidades contínuas não icônicas. Encerrando com as palavras de Canova (2006, p. 206).

> [...] temos a convicção de que, o processo para um melhor conhecimento e competência profissional desses professores, no que refere à fração, já se encontra nos primeiros degraus e sua chegada ao topo exige que continuemos realizando pesquisas e formação continuada com os professores.

Menotti (2014) tem como objetivo principal apresentar uma proposta didática por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e orientada pela Resolução de Problemas, visando o ensino de Números Racionais, em especial, os números fracionários, com foco em algumas das relações existente entre estes números. Teve como questão norteadora, se é possível por meio de uma proposta didática utilizando a resolução de problemas e a metodologia THA para melhorar a aprendizagem dos alunos de números racionais na representação fracionada com enfoque principal na equivalência de frações e as operações de adição e subtração, com denominadores iguais ou diferentes e também as operações de multiplicação e divisão envolvendo frações.

Em seu trabalho a autora propôs uma sugestão de ensino com tarefas para trabalhar com alunos de 7º ano/6ª série que possuíssem noções sobre as frações. O objetivo das tarefas foi melhorar a aprendizagem dos alunos em uma perspectiva construtivista. Ela apresentou e propôs sete tarefas que seriam aplicadas em uma sequência de aulas com uma mesma turma, as quais tiveram como objetivos: estabelecer relações entre frações equivalentes, identificar e realizar simplificações; conhecer os processos que envolvem operações de adição e subtração de frações com mesmo denominador e denominadores diferentes; compreender, resolver e conhecer os processos presentes nas operações de multiplicação e divisão de frações, em diferentes contextos e em situações problema.

Uma de suas conclusões é a necessidade de formular as questões mais de uma vez em alguns casos, para que a situação provoque reflexão no aluno e possa levá-lo a formalizar seu conhecimento, pois se uma questão não ficar clara para o entendimento do aluno, toda a proposta de trabalho elaborada pode vir a ser um fracasso. Para isto é fundamental o preparo do professor para possíveis intervenções que surgirem.

Em todo momento o aluno deve ser orientado a tentar resolver as situações propostas, pois só assim é possível ao professor compreender o que o aluno realmente sabe ou não, quais e como são os seus erros e como é possível enfrentá-los. O professor deve instigar os alunos para resolver da forma que sabem, qualquer que seja só assim saberá como auxiliá-los em suas resoluções.

Andar pela sala de aula permite ao professor conhecer um pouco mais sobre os seus alunos, suas dificuldades e ansiedades. O lugar do professor não é somente na frente da sala, caminhar permite observar e contribuir para o desenvolvimento dos alunos. Há casos em que o aluno tem vergonha ou medo de perguntar diante da sala de aula, mas quando o professor vai até ele, este pode enfrentar sua vergonha e se abrir para o conhecimento.

### 3.2 Trabalhos Experimentais

Nesta sessão serão abordados os trabalhos que tem como finalidade experimentar novas técnicas de ensino ou avaliar as técnicas que já estão sendo utilizadas e comparar com as experiências de novas possibilidades.

Silva e Lins (2011), tiveram por objetivo comparar os desempenhos dos alunos do 1° ano do Ensino Médio, obtidos ao resolverem questões que abordavam o conceito de fração, com os do 8° ano do Ensino Fundamental da escola estadual de Taquarana/Al, pesquisados por Nunes e Silva (2009). Para cumprir com este objetivo as mesmas se propuseram, a responder à seguinte questão:

> Os alunos do 1° ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Taquarana/Al, evoluíram na aprendizagem do conceito de fração em relação aos alunos do 8° ano, desta mesma escola, pesquisados por Nunes e Silva". (SILVA;LINS, 2011, p.2).

Segundo os dados apresentados por Silva e Lins (2011) acerca da pesquisa de Nunes e Silva (2009) o desempenho dos alunos do 8º ano sobre as questões de frações foi muito baixo uma vez que eles tiveram um índice de 22,96% de acertos em relação ao total.

As autoras realizaram um estudo diagnóstico, quantitativo e qualitativo, com 15 alunos da escola estadual de Taquarana/Al, os quais já haviam sido pesquisados por Nunes e Silva (2009) enquanto eram alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, elas usaram o mesmo questionário utilizado por Nunes e Silva em 2009. A pesquisa desenvolvida por estes, ocorreu em duas escolas públicas da cidade de Taquarana/Al, sendo uma municipal e outra estadual, com o objetivo de traçar as estratégias utilizadas por eles ao resolverem questões que abordavam o conceito de fração, de acordo com a classificação proposta por Nunes.

Para a análise quantitativa Silva e Lins (2011) tiveram como referência 18 itens de questões que abordam os significados da fração: parte-todo, medida, número, operador multiplicativo, e quociente; as variáveis: quantidade - contínua e discreta; e representação – icônica e não icônica. Foram utilizados mais quatro itens de questões que abordam os invariantes da fração: ordem e equivalência.

Os alunos poderiam obter no máximo 270 respostas corretas. Verificou-se, portanto que houve um baixo nível de acertos dos alunos do 1° ano do Ensino Médio, sendo 95 respostas corretas de um total de 270, correspondendo a um percentual de 35,18% que comparados aos dos alunos do 8°ano do Fundamental II que tiveram um índice de acertos de 22,96%, apresenta uma diferença de apenas 12,22%. De onde poderíamos dizer que houve um avanço, entretanto não significativo, podendo se dizer até preocupante, uma vez que se tratando de alunos do ensino médio que estão se preparando para prestar provas de vestibular e buscar conseguir uma vaga na universidade.

A análise qualitativa teve por objetivo verificar as estratégias que resultaram em erro, pois o percentual geral de acerto foi muito baixo; e compará-las às encontradas por Nunes e Silva (2009), demonstra ser fundamental para tentar compreender melhor as possíveis causas deste desempenho.

As autoras concluíram que entre os alunos do 1° ano do Ensino Médio não existe regularidade nas estratégias utilizadas para questões que envolvem um mesmo significado.

Quando comparadas as respostas encontradas na pesquisa com as dos alunos do 8° ano do Ensino Fundamental (NUNES; SILVA, 2009), conclui-se que os alunos não avançaram quanto às estratégias utilizadas por estes, permanecendo sem apresentar uma regularidade de estratégias que permitam resolver problemas que envolvam um mesmo significado de fração.

Bonotto (2011) teve o objetivo de desenvolver o conteúdo de frações de forma contextualizada, mostrando-lhes a relação teoria/prática.

Como princípio metodológico, a autora utilizou a Engenharia Didática como aporte teórico metodológico para seu estudo, realizando um teste de sondagem em uma turma da 6ª série (7º ano), a qual contava com 24 alunos, os quais responderam sem auxílio do professor ou colegas e individualmente.

As perguntas estavam abordando os seguintes tópicos de frações, a primeira questão abordava a representação geométrica (através de figuras), na segunda questão se pedia para escrever a fração correspondente às figuras, na terceira questão se pedia a leitura de algumas frações, na quarta questão abordava à comparação de frações e a quinta pergunta buscava a resolução de operações com frações.

O uso dado por Bonotto (2011) a Engenharia Didática aconteceu na Disciplina de Matemática abordando o estudo de frações e a sua aplicação no dia a dia, buscando encerrar com a compreensão e utilização da adição e subtração de frações. Os alunos contemplados foram de uma turma da 5ª série (6º ano), de uma Escola Municipal de Ensino Fundamental no município de Rosário do Sul - RS. A turma era composta por 30 alunos, com idades entre 10 e 13 anos, e a mesma se realizou no mês de junho de 2010, durante 18 horas aulas.

Com esta pesquisa Bonotto (2011) conseguiu constatar que o trabalho realizado seguindo os princípios da Engenharia didática, contribuiu para atingir os objetivos no intuito de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem dos educandos, considerando não só os seus conhecimentos prévios, mas dando-lhes condições para transpor as fronteiras do conhecimento matemático para o conhecimento informal?, que é um fator importante para o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula.

Além disso, possibilitou ao professor uma visão maior dos saberes que ensina, um melhor entendimento e compreensão de sua prática, tornando assim a Engenharia Didática, ao ser aplicada em sala de aula, um agente facilitador do processo de aprendizagem, pois permitiu ao educando a construção do conhecimento via reflexões realizadas sobre os objetos estudados.

Essa construção do conhecimento leva o educando ao desenvolvimento do raciocínio e do pensamento crítico, possibilitando-lhe a resolução de situações-problema, que envolvam conteúdos de várias disciplinas trabalhadas em sala de aula. E quanto ao ensino de frações é necessário torná-lo significativo e relacioná-lo, à realidade do educando.

Sendo a pesquisa de Bonotto (2011) de grande relevância para a elaboração deste referencial teórico uma vez que ela utilizou a mesma metodologia, Engenharia Didática, e sequencia didática pretendida em nosso trabalho.

Bezerra (2001) teve o objetivo de investigar uma abordagem para o ensino dos números fracionários, com ênfase na aquisição do conceito deste e de suas representações com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras para o aluno. O autor teve como questão motivadora “Como abordar os conteúdos relacionados ao número fracionário de forma que o aluno compreenda seu conceito e estabeleça a relação entre o número e sua representação" (BEZERRA, 2001, p.3).

O autor tem sua aplicação composta por pré-teste, sequência de ensino e pós-teste. O grupo pesquisado foi formado por alunos da 3ª série (hoje 4º ano) de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, onde foram escolhidas duas turmas: a primeira com 19 alunos a qual foi denominada de grupo experimental (GE) e a segunda com 20 alunos denominada de grupo de controle (GC).

No grupo experimental, a aplicação do experimento pelo pesquisador foi realizada no horário normal de aula, de acordo com o programa estabelecido pela escola. A professora da sala atuou como observadora. O experimento compreendeu um total de 12 encontros, sendo o primeiro e o último, dedicados à aplicação dos instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) e os dez restantes à sequência de ensino. Estes dez encontros usados para a sequência de ensino, ocorreram em duas horas-aulas, totalizando 20 horas. Dos 30 alunos da turma, somente 19 foram considerados na amostra, pois estavam na faixa etária de 8 a 10 anos, a qual havia sido colocada pelo pesquisador como padrão, não tinham repetido a 3ª série e participaram dos dois testes.

Já no grupo de controle não houve qualquer tipo de contato com o tema sobre frações. A atuação da professora da turma seguiu, normalmente, sem qualquer interferência do pesquisador. O conteúdo sobre as frações foi abordado somente depois das aplicações dos dois testes, considerados, portanto sem nenhum estudo especifico do assunto. Nesta classe, dos 28 alunos matriculados, somente 20 atenderam aos critérios pré-estabelecidos, ou seja, apresentavam idade entre 8 e 10 anos, não repetiram a 3ª série e participaram dos dois testes.

Para a sequência de ensino Bezerra (2001) utilizou resolução de problemas contextualizados, teatro com os alunos onde eles eram os personagens e deveriam fazer compras e vendas de elementos fracionados, manipulação de objetos concretos (botões, bolinhas de gude, figurinhas, palitos de picolé e outros), confecção de cartazes pelos alunos para representar as frações estudadas e também diversos jogos. Demonstrando assim uma sequência rica em materiais diferenciados e manipulativos.

Acredito ser de grande relevância colocar o quadro que expressa a quantidade de acertos comparados entre pré-teste e pós-teste.

Por fim, destacamos a conclusão de Bezerra (2001, p. 174):

> Tomando-se como base as análises dos dados realizados, podemos afirmar que uma sequência de ensino que interfere no contexto cultural e social da criança (Nunes, 1998) e (Vygotsky, 1984) e privilegia a situação-problema como Vergnaud (1988, 1990) propõe, apresentando atividades significativas e desafiadoras para as crianças (Nunes & Bryant, 1997), de fato influencia efetivamente na formação do conceito de número fracionário e sua representação.

Rodrigues (2005, p.7) tem por objetivo identificar aspectos do conceito de fração, relativos aos significados parte-todo e quociente, que permanecem não apropriados por alunos em fase de escolarização posterior ao ensino formal desses números. Tendo, portanto como questão de pesquisa: “Que aspectos do conceito de fração nos significados parte-todo e quociente permanecem sem ser apropriados por alunos de oitava série do Ensino Fundamental, terceira série do Ensino Médio e Ensino Superior na área de exatas?”, a qual o levou a uma segunda questão: “Que ligações existem entre essas dificuldades e as deficiências, já apontadas por outras pesquisas, da prática pedagógica?”.

Como metodologia de pesquisa qualitativa e quantitativa Rodrigues elaborou um teste contendo 48 questões divididas em três níveis de dificuldade (fácil, médio e difícil), separadas em dois significados, dentre os quais são os mais abordados segundo o autor para ensinar frações, parte-todo e quociente e por fim distribuídas em quatro conceitos, icônico contínuo, não icônico contínuo, icônico discreto e não icônico discreto. Onde todos os campos abordados possuíam as mesmas quantidades de questões nos mesmos níveis de dificuldade e abordagem.

Visando contemplar as questões da pesquisa foram pesquisados três grupos diferentes sendo eles: 29 alunos de Ensino Superior, com 24 de Licenciatura em Matemática e 05 de outros cursos da área de exatas, em duas Universidades, sendo uma em São Paulo e outra em Campinas. 31 alunos de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola profissionalizante da cidade de Campinas, que seleciona seus alunos segundo um concurso de admissão de caráter nacional. 13 alunos de oitava série de uma escola particular de Campinas.

Esta escolha segundo Rodrigues (2005) não foi aleatória, uma vez que ele queria submeter indivíduos que tiveram acesso a uma educação considerada de boa qualidade e que conseguiram ser aprovados em testes de seleção rigorosos e concorridos. Os alunos de oitava série da escola selecionada estudam em condições consideradas muito boas, com professores experientes, poucos alunos por série e um projeto pedagógico que incentiva a busca da autonomia.

Com os resultados obtidos constatou-se que, mesmo nos níveis de escolaridade pesquisados (8ª série, último ano do Ensino Médio profissionalizante e nível superior em cursos de exatas), os alunos ainda apresentam dificuldades significativas sob três pontos de vista: da compreensão do papel da unidade nos problemas envolvendo frações; das peculiaridades das situações envolvendo grandezas discretas; e de aspectos mais abstratos da construção dos números racionais, como a inclusão dos inteiros e a explicitação de soluções em termos de operações com frações.

Sendo, portanto de extrema relevância esta conclusão, pois nos auxilia a considerar que se o ensino de frações no tempo certo não for significativo para o aluno e bem apresentado pelo professor, este continuará a ser deficitário ao longo da vida do indivíduo mesmo que ele se especialize ou estude com maior ênfase matemática.

Vaz (2013) teve por objetivo em seu trabalho, investigar o desempenho de alunos do sétimo ano do ensino fundamental em aulas de revisão de frações, nas quais ele utilizou uma metodologia de ensino baseada em análise de soluções. Metodologia esta que segundo o autor está baseada nas pesquisas de Rafaella Borasi e Helena Cury.

Vaz (2013)buscou solucionar duas questões principais: 1) De que forma uma metodologia de ensino baseada na análise de soluções pode contribuir para o ensino de frações? 2) Qual é a evolução observável nos resultados de um teste aplicado antes e após uma sequência didática para revisão de frações baseada na análise de soluções?

A metodologia apresentada pelo autor, a qual ele denominou de Metodologia Didática de Análise de Soluções, consiste na aplicação de exercícios inseridos em uma sequência de aulas, que se utilizam dos erros cometidos pelos próprios alunos para a reconstrução de significados. Portanto os alunos trabalham, em pequenos grupos, para resolver questões que envolvem a correção e a análise de soluções produzidas por eles mesmos em aulas anteriores.

Além das soluções recolhidas dos alunos durante as aulas, foi aplicado um teste duas vezes: uma antes do início das aulas e outra após o encerramento das aulas, visando fornecer material suplementar para analisar o desempenho dos alunos ao serem expostos a essa metodologia. A comparação a priori dos resultados por Vaz (2013) desses testes mostrou que há benefícios na metodologia didática construída.

Vaz (2013) concluiu que os alunos passaram por um progresso intelectual significativo, de modo que desenvolveram habilidades como comparar soluções, sintetizar ideias e construir justificativas. Se levar em consideração a comparação dos resultados dos testes aplicados confirma uma evolução no percentual de acertos em todas as questões aplicadas

Diante dos trabalhos analisados, é notória a preocupação que o conteúdo de frações desperta nos professores do ensino fundamental, sendo também claro que algumas propostas já foram elaboradas e como destacamos algumas até envolvendo a Engenharia Didática, assim como faremos em nosso trabalho, ressaltando que o assunto ainda não foi esgotado, ainda existe muitas contribuições possíveis e muitas lacunas que podem ser preenchidas, principalmente quando se olha para as comunidades tradicionais, alunos com déficits de aprendizagem, alunos que não tem noções de assuntos básicos como adição e subtração e tantas outras situações, sendo portanto este, um dos nossos objetivos com a elaboração de uma sequência de aulas sobre o ensino de frações, contribuir para a aprendizagem dos alunos e fornecer mais um material útil e acessível para os professores de matemática.

# 4 PLANO DE DESENVOLVIMENTO

O desenvolvimento desta pesquisa foi construído a partir do seguinte plano de trabalho:

## 4.1 Questionamento norteador

Como professor do ensino fundamental e médio, nossa preocupação é sempre pela forma mais eficaz de promover o aprendizado de nossos alunos e a aprendizagem de frações é uma dessas preocupações haja visto que a própria literatura tem demonstrado que desenvolvimento deste conceito é deveras muito difícil e complexo. Por este motivo nós fizemos o seguinte questionamento: É possível desenvolver uma sequência didática sobre o conceito de frações que possibilite sensibilizar o sistema cognitivo dos alunos para o desenvolvimento deste conceito, uma vez que eles já tiveram algumas experiências didáticas sobre o assunto?

## 4.2 Objetivo Geral

Para o desenvolvimento desta sequência temos como objetivo geral Desenvolver uma sequência didática que sensibilize ao máximo o sistema cognitivo dos alunos para a obtenção do conceito de frações.

## 4.3 Objetivos específicos

- Verificar se a sequência didática desenvolvida e aplicada surtiu o efeito desejado sobre a movimentação cognitiva dos alunos em relação ao campo aditivo em N e Q.
- Verificar, se possível, o grau de dificuldade dos problemas dos pré e pós testes com o objetivo de futuros estudos sobre superação destas dificuldades.

## 4.4 Hipótese de alcance

Nossa hipótese é que após o desenvolvimento da sequência didática, os alunos demonstrem ter alargado o campo conceitual aditivo revelando melhores performances através da resolução de problemas envolvendo o conjunto do números naturais e o conjunto de números racionais.

### 4.5 Lócus do trabalho executado

A sequência didática foi realizada na Escola Sesi Ananindeua localizada na Avenida Cláudio Sanders nº1500, a escola é privada e está vinculada ao Serviço Social da Industria Departamento Regional – PA. A mesma funciona nos três turnos, manhã, tarde e noite, sendo que pela manhã funciona o Ensino Fundamental I e II e o Ensino Médio, a tarde o Ensino Fundamental I e II e o retorno do Ensino Médio e no turno da noite o EJA Ensino Fundamental II e EJA Ensino Médio na modalidade a distância, turmas estas que são gratuitas para os funcionários das indústrias e seus dependentes, além de oferecer ensino gratuito a comunidade que tenha indicação de alguma indústria. No ano letivo de 2018 a escola tinha mais de 600 alunos no ensino regular e mais de 300 alunos matriculados nas turmas de EJA.

### 4.6 Sujeitos envolvidos

O experimento contou com a participação de 36 sujeitos, porém como alguns alunos faltaram em alguns dias da aplicação e da verificação foi necessário eliminar 6 indivíduos do processo, ficando assim com 30 alunos da Escola Sesi Ananindeua do ensino fundamental no 6º ano do turno da tarde do professor de Matemática Izaias Pinheiro de Souza Junior, autor deste trabalho, licenciado em Matemática.

### 4.7 Instrumentos desenvolvidos

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram desenvolvidos os seguintes instrumentos:

- Um teste contendo 17 problemas do campo aditivo segundo a teoria de Vergnaud, problemas estes montados de acordo com o conceito de número natural como pode-se observar no Apêndice A;
- Um teste contendo 17 problemas do campo aditivo segundo a teoria de Vergnaud, desta vez reproduzindo os mesmos enunciados do teste anterior, porém com dados relativos aos números racionais, como pode-se observar no Apêndice B.

Os dois testes desenvolvidos foram utilizados para efeito de controle da aprendizagem supostamente ocorrida no decorrer da sequência didática, na forma de pré-teste e pós-teste.

- Um instrumento de avaliação dos resultados obtidos na intenção de comprovar o grau de dificuldades dos problemas dos pré e pós testes sobre o campo aditivo nos naturais e nos racionais. Tais problemas não foram instrumento didático das aulas propostas com a sequência didática. O instrumento segue abaixo:

### 4.8 Critérios de Avaliação para efetivar o grau de dificuldades dos problemas propostos nos pré e pós testes em N e Q

1. Em cada conjunto numérico foi dado o valor zero se o aluno errou o problema e o valor um se ele acertou;
2. Segundo a análise da pontuação dos alunos, definiu-se seis categorias a saber:
    - Sem movimentação (operatório): sujeitos 1,1 em N e Q;
    - Sem movimento (não operatório): sujeitos 0,0 em N e Q;
    - Sem movimentação (operatório e não operatório) sujeitos 1,1 e 0,0 em N ou em Q;
    - Com movimentação regressivo: sujeitos que acertam e depois erram em N ou Q;
    - Misto (s/ mov. e mov. regressivo -op. e ñ op.); sujeitos 1,1 e 1,0 ou 1,0 e 0,0;
    - As demais movimentações que caracterizam aprendizagem.
3. Montou-se uma tabela progressiva de percentuais da categoria 1 comparada dos percentuais da categoria 6.
4. Foi extraído o menor e o maior valor entre as duas categorias da tabela do item 3, sendo 6,67% no mínimo e 87,5% no máximo. Em seguida foi calculado a soma destes dois valores (94,17%) e dividido o resultado por 3 para se encontrar três intervalos.
5. foi montado uma nova tabela colocando o percentual de cada categoria nos intervalos correspondentes da tabela anterior, isto é: entre o valor mínimo e primeira faixa de corte em 31,39%(faixa 1), entre a primeira faixa de corte 31,39% e a

segunda faixa de corte 62,78% (faixa 2) e por fim de 62,78% até o valor máximo (faixa 3).

6. Cada um desses intervalos foi categorizado com os valores 1(faixa 1),2 (faixa 2),3 (faixa 3). De modo que os resultado em operatoriedade e sensibilidade fossem devidamente alocados de acordo com as faixas correspondentes.

7. Foram somados os valores de posição de cada resultado quanto a sua operatoriedade e sensibilidade, para que desta forma ao ser feito o cálculo da média para cada questão, os resultados possíveis seriam: 1; 1,5; 2; 2,5; 3.

8. Os problemas foram classificado conforme as categoria numeradas do item 7.

9. Definiu-se então o grau de dificuldade de cada problema, como segue:

1: Problema muito difícil: Não ocorreu nenhum tipo de problema;

1,5: Problema difícil: 1, 12, 8 e 17

2: Problemas de grau médio:16, 14, 13, 11, 9, 2, 6, 5 e 4.

2,5: Problema fácil: 3, 7, 10 e 15

3: Problema muito fácil: Não ocorreu nenhum tipo de problema;

## 4.9 Plano de análise dos dados recolhidos

Para analisar os dados com o objetivo de comprovar nossa hipótese de alcance didático bem como verificar se nossos objetivos foram atingidos, procedemos à seguinte metodologia de análise:

- Montagem de uma tabela de dados brutos recolhidos diretamente dos protocolos dos alunos contendo acertos, erros e os não feitos dos pré e pós-testes em N e Q de cada problema.

Exemplo:

Tabela 1 - Dados relativos à questão 6: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 19 - 63,3% | 10 – 33,3% | 1 – 3,4% |
| | | E | 21 – 70% | 8 – 26,6% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 20 – 66,6% | 9 – 30% | 1 – 3,4% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | E | 20 – 66,6% | 9 – 30% | 1 – 3,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |
| | | E | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |
| | Pós-teste | S | 16 – 50% | 15 – 46,8% | 1 – 3,2% |
| | | E | 16 – 50% | 15 – 46,8% | 1 – 3,2% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

- Montagem de um quadro de movimentação cognitiva em que mostra a mudança dos sujeitos em termos de operatoriedade ou não operatoriedade em relação aos campos conceituais em N e Q. Os valores da tabela são: 1 quando o sujeito for operatório, isto é acertou o problema e 2 quando não acertou o problema, isto é não operatório.

- As cores do quadro representarão: **Amarelo** sem movimento cognitivo com operatoriedade, **Laranja** sem movimento cognitivo sem operatoriedade ou seja sujeitos que erraram tudo, **Azul** regressão, **Verde** sem movimento cognitivo com, operatoriedade em N ou Q e sem operatoriedade no outro, **Vermelho** com movimentação mistas sem operatoriedade e regressão, **Roxo** movimentação cognitiva positiva.

Exemplo:

Quadro 1 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 17

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 14 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 23 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 30 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 8 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 10 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 15 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 29 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 26 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

- De posse do quadro de movimentação cognitiva, construímos um conjunto de categorias segundo a movimentação dos pré para os pós-testes em N e Q. Foram um total de 6 categorias, a saber:

Sem movimento operatório - 2 (sujeitos 1,1 em N e Q)
Sem movimento não operatório - 4 (sujeitos 0,0 em N e Q)
Sem movimento op e não op. - 5 (sujeitos 1,1 ou 0,0 em N ou Q)
Com movimento regressivo - 6 (sujeitos 1,0 em N e Q)
Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2 (sujeitos 1,1 e 1,0 ou 0,0 e 1,0 em N e Q
Com movimentos variados - 11 (sujeitos com as demais configurações que demonstram mudança cognitiva positiva)

- Montamos uma tabela de percentuais das categorias acima descritas.
- Finalmente construímos uma tabela para determinar o grau de dificuldades dos problemas considerando os **Critérios de Avaliação para efetivar o grau de dificuldades dos problemas propostos nos pré e pós testes em N e Q**

Todos estes instrumentos permitiram a efetiva avaliação tanto da sequência didática por nós desenvolvida como os instrumentos de avaliação dessa sequência didática.

## 4.10 SEQUENCIA DIDÁTICA

A divisão das atividades será proposta de acordo com o quadro abaixo, o qual exemplifica quais serão os momentos da sequência didática, o tempo aproximado para a realização de cada atividade e os objetivos específicos de cada atividade.

Tabela 22 - Quadro explicativo das aulas da Sequência didática

| Aula | Descrição da Aula | Tempo | Objetivo |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | Pré-Teste | 1 aula | Verificar o nível de conhecimento dos alunos |
| 2 | Atividade 1 | 2 aula | Entender o que é uma fração e Representar frações |
| 3 | Atividade 2 | 2aula | Reconhecer frações equivalentes |
| 4 | Atividade 3 | 2 aula | Comparar frações |
| 5 | Atividade 4 | 2 aulas | Somar frações |
| 6 | Atividade 5 | 2 aulas | Subtrair frações |
| 7 | Pós-Teste | 1 aulas | Verificar o nível de aprendizado dos alunos |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

**Atividade 1**

Título: A Compreensão inicial

Objetivo da aula: Compreender o conceito de fração e sua representação algébrica

Orientação para o professor:

O professor deve dividir os alunos da turma em equipes de 4 a 5 alunos para que assim o desenvolvimento não seja atrapalhado pelo grande número de alunos em um mesmo grupo. Estes grupos permaneceram preferencialmente até o final da sequência didática.

No segundo momento o professor irá entregar o material impresso para cada equipe contendo as situações problemas e as atividades que necessitam das imagens. Sendo uma atividade por equipe.

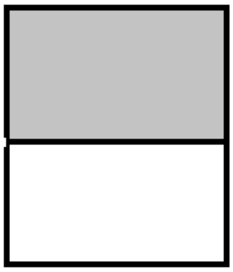
Propor as equipes quatro situações problemas, para que pela análise das mesmas eles possam conceituar fração.

- Maria comprou uma barra de chocolate para dividir entre seus dois filhos, ela disse para eles: "Uma metade para cada!". Explique como vai acontecer essa divisão.
- Paulo ouviu alguém dizer que "o otimista sempre vê o copo meio cheio". Ajude Paulo a visualizar o que ele ouviu fazendo um desenho deste copo.
- Um pai está dividindo um terreno de herança para seus dois filhos e uma filha. Se a filha ficar com o dobro da parte que os rapazes vão receber. Ajude-os fazendo um desenho representando esta divisão. (SÁ,2016)
- Como repartir uma fatia de bolo para três crianças?

BOLO

Após o aluno demonstrar a compreensão da fração segundo o conceito Parte-Todo (Nunes et.al. 2003), caso isto não tenha sido possível o professor fará o compartilhamento de mais algumas situações semelhantes tentando cada vez mais se aproximar da realidade dos alunos, a qual já terá sido observada pelo professor. Em seguida o professor irá propor aos alunos as seguintes imagens desenhadas no quadro para que cada aluno possa fazer a identificação das perguntas: "Quantas partes estão pintadas?" e "Em quantas partes está dividida a figura?", caso os exemplos descritos neste não sejam suficientes para a participação de toda a turma o professor irá propor outras figuras semelhantes até que todos tenham participado ao menos uma vez. Para que desta forma o professor possa avaliar a compreensão e entendimento dos alunos.

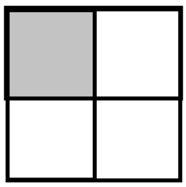
Exemplo:



Quantas partes → estão pintadas? 1

Em quantas partes → está dividida a figura? 2

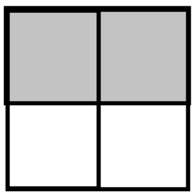
Questão 1



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

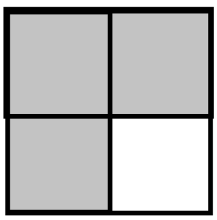
Questão 2



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

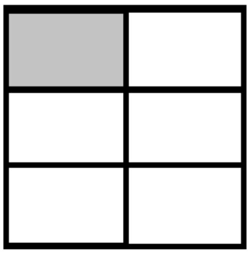
Questão 3



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

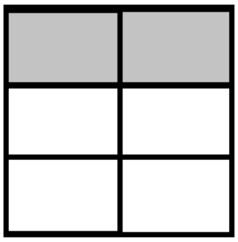
Questão 4



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

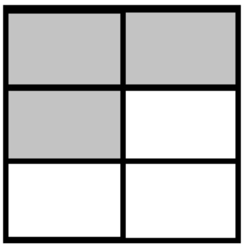
Questão 5



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

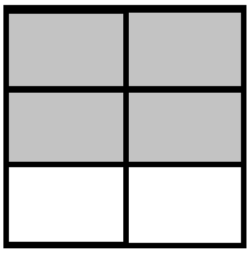
Questão 6



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

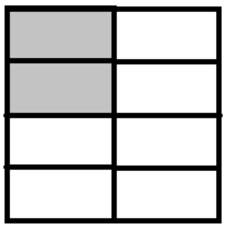
Questão 7



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

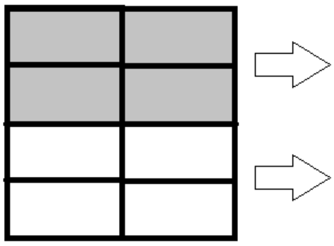
Questão 8



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

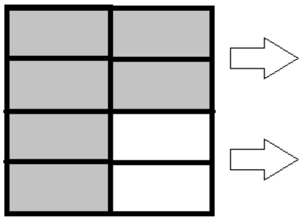
Questão 9



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

Questão 10



Quantas partes estão pintadas?

Em quantas partes está dividida a figura?

- Ao final deste momento o professor irá formalizar a forma convencional utilizada para expressar as frações:

  Considerando dois números Naturais ***a*** e ***b*** diferentes de zero temos:

$$\frac{a}{b}$$

Na formalização o professor deve tratar como números naturais, pois os alunos são do 6 ano e ainda não trabalharam o conjunto dos Inteiros, conforme a propriedade correta das frações.

**Atividades de Fixação**

O Professor deve propor algumas atividades de fixação.

1. O professor de Língua Portuguesa propôs como tarefa avaliativa a leitura de um livro. Rita está lendo um livro com 120 páginas e já leu 40 páginas. Alexandre está lendo um com 228 páginas, e já leu 57.

   a) Qual é a fração do livro lida por Rita?

   b) Qual é a fração do livro lida por Alexandre?

2. Mara levou um bolo para comemorar seu aniversário na escola. Na turma dela há 24 alunos, sendo que a terça parte dos alunos são meninos. O bolo foi divido em fatias do mesmo tamanho, e foi suficiente para que todos os alunos e a professora comessem apenas um pedaço cada um. Não sobrou nenhum pedaço de bolo. Apenas 4 dos alunos não gostaram do bolo.

   a) Qual a fração do total do bolo que cada pessoa comeu?

   b) Qual o número de meninos da sala de Mara?

   c) Qual a razão entre o número de alunos que não gostaram do bolo e o total de pessoas que comeram ele?

**Atividade 2**

<u>Título</u>: Desenvolvendo a ideia de equivalência

<u>Objetivo</u>: Observar a existência de frações equivalentes.

Construir e identificar frações equivalentes

<u>Material necessário</u>: Lousa e pinceis para lousa ou projetor multimídia.

<u>Orientações para o Professor:</u>

No primeiro momento o professor fará a divisão das equipes que foram formuladas na primeira, as quais permaneceram até o final da sequência de aulas.

O professor irá desenhar no quadro ou mostrar utilizando recursos multimídia as três imagens presentes no Exemplo 1 e assim propor as seguintes questões de discussão com os alunos.

Neste momento o professor deve orientar os alunos a discutirem as perguntas propostas na folha de atividades entregue a cada equipe.

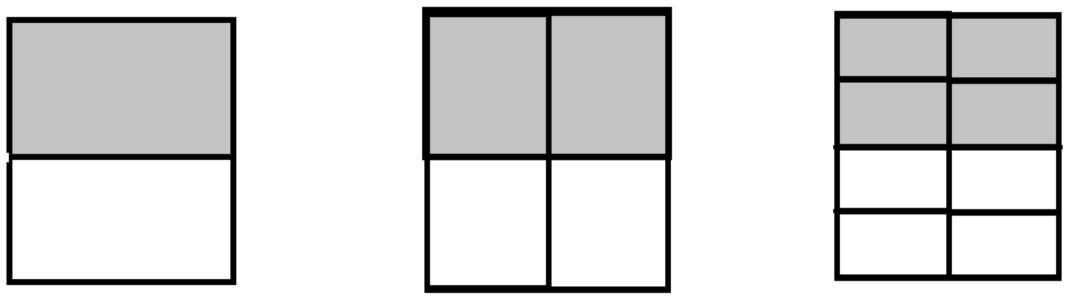
As questões para discussão nas equipes são as abaixo listadas:

- Quantas partes pintadas tem cada figura?
- Quantas partes totais tem cada figura?

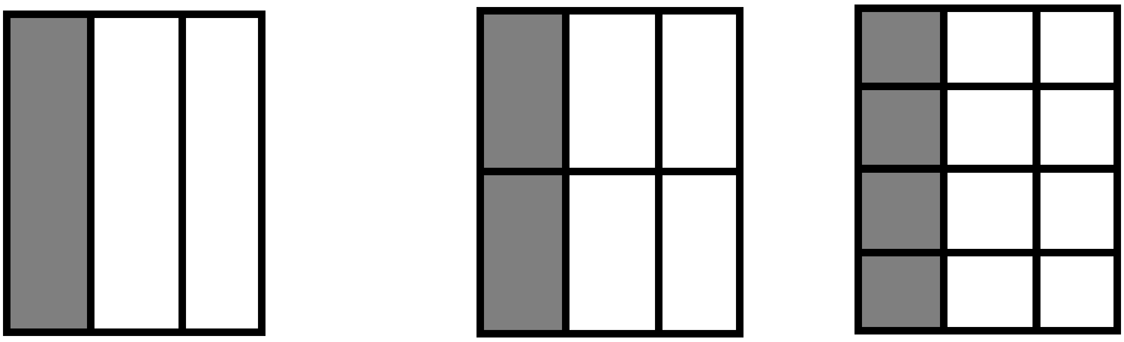
- Existe alguma semelhança entre elas?
- O que acontece se eu dividir a parte pintada e a não pintada da figura 1 ao meio?
- O que acontece se eu dividir a parte pintada e a não pintada da figura 2 ao meio?
- O que eu precisei fazer para transformar a primeira figura na segunda? E a segunda na terceira? Isso pode acontecer com outras figuras?

Ao final da resposta dos alunos para a última pergunta o professor deverá repetir o processo orientando os alunos a responder as perguntas para o Exemplo 2 e para o Exemplo 3, as quais estarão contidas em suas folhas de atividades.

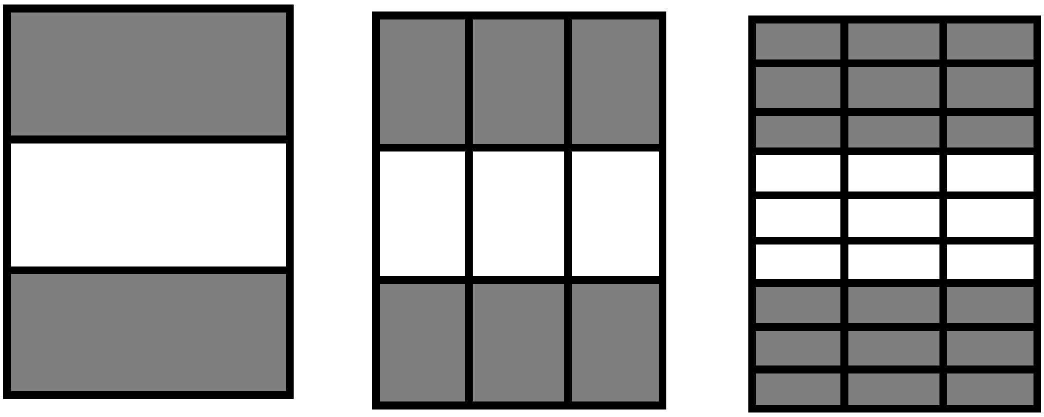
Exemplo 1



Exemplo 2:



Exemplo 3:



Ao final do processo de perguntas e respostas feito com os alunos em relação aos exemplos, as equipes devem agora formular um exemplo colocando-o no espaço designado em suas folhas de atividades e explicar por qual motivo isto ocorre.

Ao final deste processo o professor poderá fazer a formalização do conteúdo explicando que dados dois números, a, b e c, de modo que a, b e c≠ 0 e a≠ b tem-se

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$$

**Atividades de Fixação**

Como atividade de fixação os alunos deverão preencher o quadro abaixo em equipe. Este quadro deve estar contido no material referente a Atividade 2 descrito como “Atividade de Fixação”, o qual deve ser entregue pelo professor.

No quadro escreva se as frações são equivalentes (SIM) ou quais não são equivalentes (NÃO).

| Fração | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | | | | | |
| $\frac{2}{4}$ | | | | | |
| $\frac{2}{5}$ | | | | | |
| $\frac{2}{6}$ | | | | | |
| $\frac{3}{4}$ | | | | | |
| $\frac{3}{5}$ | | | | | |
| $\frac{2}{6}$ | | | | | |
| $\frac{2}{8}$ | | | | | |
| $\frac{2}{10}$ | | | | | |
| $\frac{2}{12}$ | | | | | |

**Atividade 3**

Antes da realização da atividade o professor deve dedicar ao menos 15 minutos para relembrar aos alunos o significado dos símbolos que serão utilizados **<** e **>**, para que assim ao verem este na atividade não seja gasto tempo explicando a cada aluno ou grupo.

**Título: Comparando frações**

Objetivo para o professor: Observar a existência de frações com numeradores iguais, mas que expressam valores diferentes.

Objetivo para o aluno: Compreender a comparação de frações.

Utilizar a calculadora para verificar quais frações são maiores ou menores.

Material necessário: Calculadoras

Orientações para o Professor:

Utilizando a calculadora o aluno será orientado a dividir as frações encontrado os números decimais e assim verificar quais frações são maiores ou menores. Depois o professor fará dois quadros na lousa um para aquelas frações que receberam o símbolo < e outro para as que receberam o símbolo >. Após o preenchimento da tabela os alunos deverão compartilhar com a turma suas conclusões e se existe alguma regularidade.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

Preencher as relações retratando se as frações são > ou <.

a. $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{4}$ ____ $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{5}$ ____ $\frac{1}{4}$

e. $\frac{2}{3}$ ____ $\frac{2}{4}$

f. $\frac{2}{5}$ ____ $\frac{2}{3}$

g. $\frac{2}{5}$ ____ $\frac{2}{4}$

h. $\frac{2}{4}$ ____ $\frac{2}{6}$

i. $\frac{3}{4}$ ____ $\frac{3}{5}$

j. $\frac{3}{6}$ ____ $\frac{3}{4}$

k. $\frac{3}{5}$ ____ $\frac{3}{6}$

l. $\frac{3}{4}$ ____ $\frac{3}{7}$

## Atividade 4

Título: Somando frações

Objetivo: Compreender como é realizada a operação de adição de frações com denominadores iguais e diferentes.

Orientações: O professor irá propor aos alunos as seguintes situações problemas, que estarão presentes nos matérias das equipes referentes a “Atividade 4”, e aguardar que eles respondam.

Depois de um período de tempo apropriado para que todas as equipes tentem responder a todas as perguntas o professor irá recolher as anotações dos alunos e assim propor a solução gráfica de cada problema.

- Numa fazenda em Castanhal, $\frac{1}{2}$ da área total foi destinada para a plantação de milho, enquanto $\frac{1}{3}$ da área total foi destinada para o cultivo de frutas regionais. Qual é a fração da área total da fazenda que está ocupada com o cultivo de frutas e milho?

- Uma escola dispõe apenas de um campo de futebol para as aulas de Educação Física, no momento de recreação ao final da aula uma parte dos alunos queria jogar futebol, outra queimada e o restante vôlei. Se a divisão do campo foi a seguinte: $\frac{1}{2}$ do campo para futebol, $\frac{1}{4}$ do campo para queimada e $\frac{1}{4}$ do campo para vôlei. Que fração do total foi ocupada pelo vôlei e queimada juntos?

- Uma empresa vai construir uma nova sede, ela vai destinar $\frac{1}{3}$ do terreno paraestacionamento, $\frac{3}{5}$ do terreno para construção do prédio e o restante para área verde. Qual é a fração do total do terreno a ser ocupado pelo estacionamento e construção do prédio juntos?
- João irá receber um *tablet* em seu aniversário, como presente de seu pai e avós. Sabendo que seu pai pagará $\frac{2}{3}$do valor e seus avós $\frac{1}{5}$e o restante sairá do seu cofrinho, qual é a fração que representa o valor pago pelo pai e avós do menino juntos?

- Enfim o professor fará a formalização do conteúdo, demonstrando que para se realizar a soma de frações é necessário que elas estejam em um denominador comum. Quando os valores dos denominadores das frações não forem iguais os alunos poderão utilizar um processo análogo ao da equivalência de frações.

Dados os números, **a**, **b**, **c** e **d** de modo que **a**, **b,c** e **d** ≠ 0 e b ≠ d tem-se

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{b}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

**Atividade 5** (Adaptada de Bonotto (2011))

Título: Subtraindo frações

Objetivo: Compreender como é realizada a operação de subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.

Orientações: O professor irá propor aos alunos as seguintes situações problemas, que estarão presentes nos matérias das equipes referentes a "Atividade 5", e aguardar que eles respondam.

- De uma caixa de bombons, foi distribuído $\frac{1}{2}$ dos bombons para Carlos e Fabiana. Carlos recebeu $\frac{1}{4}$. Com que fração da caixa de bombons Fabiana ficou?

- José foi pintar um quarto com $\frac{3}{4}$ de tinta que tinha em um galão de tinta, usou $\frac{2}{3}$ deste galão. Quanto de tinta sobrou?

- O professor fará a formalização do conteúdo, demonstrando que para se realizar a subtração de frações é necessário que elas estejam em um denominador comum. Quando os valores dos denominadores das frações não forem iguais os alunos poderão utilizar um processo análogo ao da equivalência de frações.

Dados os números, **a**, **b**, **c** e **d** de modo que **a**, **b,c** e **d** ≠ 0 e b ≠ d tem-se

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{d} - \frac{b}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

## 5 ANÁLISE

A análise que será feita é a comparação dos percentuais das duas listas de exercícios sobre as estruturas aditivas de Vergnaud, quando estas estruturas são aplicadas no conjunto dos números naturais e no conjunto dos números racionais.

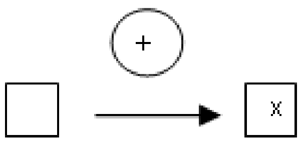
Nesta análise levanta-se a hipótese a ser comprovada de que os alunos têm possibilidades de transferência das estruturas de pensamento que envolvem os dois conjuntos, mas a solução no conjunto dos números racionais será mais complicada do que a solução dos números naturais, dado que os alunos já dominam em grande parte, as situações problemas do campo aditivo nos naturais, mas lhes falta conhecimento das operações aditivas no campo dos racionais.

A análise se dará em relação a cada um dos problemas aditivos de Vergnaud, haja visto que cada problema envolve uma estrutura matemática específica que encerra em si um cálculo aritmético e um cálculo relacional.

### Analise da Questão 1

Na questão 1, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 1- Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Meu irmão tem 38 goiabas. Se eu comer 16 das minhas goiabas, terei tantas goiabas quanto meu irmão. Quantas goiabas eu tenho?

**Problema em Q:**Meu irmão comeu $\frac{7}{12}$ de uma barra pequena de chocolate. Se eu comer $\frac{3}{12}$ da minha barra de chocolate de mesmo tamanho, terei comido a mesma fração de uma barra que meu irmão. Que fração da minha barra de chocolate eu já comi?

**Análise quantitativa**

A tabela 1, mostra os resultados brutos obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

Tabela 3 - Dados relativos à questão 1- Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 19 – 63,3% | 11 – 36,6% | 0 |
| | | E | 18 – 60% | 12 – 40% | 0 |
| | Pós-teste | S | 19 – 63,3% | 9 – 30% | 2- 6,6% |
| | | E | 22 – 73,3% | 6 – 20% | 2- 6,6% |
| Racionais | Pré-teste | S | 9 – 28,1% | 23 – 71,8% | 0 |
| | | E | 14 – 43% | 18 – 56% | 0 |
| | Pós-teste | S | 12 – 37,5% | 20 – 62,5% | 0 |
| | | E | 14 – 43% | 18 – 56% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Comparando o pré-teste com o pós-teste da solução “S” do problema no conjunto N, percebe-se que não houve alteração nos acertos, o que significa dizer que os alunos não demonstram ter melhorado a compreensão do problema.

Mas comparando-se o pré com o pós-teste sobre a estrutura “E” do mesmo problema, percebe-se uma melhora na compreensão do problema que salta de 60% para 73%. Isto significa que a intervenção pode ter ajudado a compreender melhor o problema do conjunto N, mas não foi possível os alunos executarem os cálculos de forma correta.

Portanto é possível levantar a hipótese de que alguns alunos compreendem os problemas a ponto de traduzi-los da linguagem materna para a linguagem matemática, mas apresentam dificuldades lacunares em relação ao ferramental simbólico-algorítmico para resolvê-los.

Comparando o pré e o pós-teste da solução “S” do problema no conjunto Q, percebe-se uma diferença de 9,4% a favor do pós-teste, significando que houve uma melhora na solução do problema no campo do conjunto Q.

Mas comparando-se o pré com o pós-teste sobre a estrutura “E” do mesmo problema, observa-se que não houve alteração nos resultados obtidos. Isto significa dizer que embora os alunos não tenham melhorado a compreensão dos problemas, mas alguns dos que haviam acertado a estrutura e errado a solução, desta vez conseguiram fazer as duas coisas, isto é, compreender o problema e encontrar corretamente sua solução.

Observa-se portanto, que é possível aventar que a sequência didática sobre o estudo das frações, ajudou a melhorar a compreensão dos problemas no campo aditivo dos Naturais e facilitou no desempenho dos cálculos no conjunto dos números racionais, considerando os problemas com o uso da estrutura vergnaudiana em questão.

**Análise qualitativa**

Na análise qualitativa, optamos por montar um quadro que chamamos de movimentação cognitiva dos alunos em relação à mudança de solução e de estrutura dos problemas no conjunto dos naturais e no conjunto dos racionais de forma a mostrar a movimentação dos sujeitos do pré para o pós teste tanto em N como em Q. A análise segue

Quadro 2 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 1

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 14 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| 1 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| 2 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| 21 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | S/movimento |
| 5 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 17 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| 15 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | S/movimento |
| 13 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 4 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 10 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 16 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 20 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 9 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 6 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 30 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |

**Legenda: 1 representa ausência de solução; 2 representa presença de solução**

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Do quadro acima foi possível extrair seis categorias quanto à movimentação cognitiva dos alunos em relação à aquisição do conceito de campo aditivo no conjunto dos naturais e campo aditivo no conjunto dos racionais, quais sejam:

> Sem movimento operatório - 2 (sujeitos 1,1 em N e Q)
> Sem movimento não operatório - 4 (sujeitos 0,0 em N e Q)
> Sem movimento op e não op. - 5 (sujeitos 1,1 ou 0,0 em N ou Q)
> Com movimento regressivo - 6 (sujeitos 1,0 em N e Q)
> Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2 (sujeitos 1,1 e 1,0 ou 0,0 e 1,0 em N e Q
> Com movimentos variados - 11 (sujeitos com as demais configurações que demonstram mudança cognitiva positiva)

Neste problema apenas 2 sujeitos foram operatórios, o que significa dizer que eles não poderiam sofrer influência da sequência didática (3 e 19). Os demais 28 teriam oportunidade de serem influenciados pela sequência didática. Mas 4 continuaram não operatórios (1,2,14,21); 5 permaneceram sem movimento nas condições operatório e não operatório (5,15,17,23 e 29); 6 com movimentação regressiva (4,12,13,25,26 e 28); 2 apresentaram-se com comportamento misto entre sem movimento e regressivo (10,16) e 11 sofreram movimentação positiva da sequência didática. A tabela 2 resume o quadro de movimentação cognitiva em termos percentuais.

Tabela 4 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 6,67% (2 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 14,29% (4 em 28) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 17,86% (5 em 28) |
| 4 | Com movimento regressivo | 21,43% (6 em 28) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 7,14% (2 em 28) |
| 6 | Com movimentações variadas | 39,29% (11 em 28) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

A categoria 1 é a única que demonstra que os sujeitos não poderiam sofrer influência da sequência didática proposta, pois eles mostraram-se operatórios no pré-teste e mantiveram-se operatórios no pós-teste tanto em N quanto em Q.Por esta razão o cálculo de percentual foi em relação ao grupo amostral. Já os demais cálculos de percentual foram feitos excluindo-se os sujeitos da categoria 1.

Como se pode ver, as categorias 1,2,3,4 e 5 indicam que a sequência didática não influenciou os sujeitos destas categorias. A categoria 6 é a única que demonstra influência da sequência didática no problema 1, o que permite aventarmos que a sequência didática teve baixa influência no problema 1.

Os dados portanto mostram que a sequência didática proposta para desenvolver o conceito de fração nos alunos do sexto ano apresenta-se satisfatória, haja visto que se houve movimentação cognitiva é por que o sistema cognitivo movimentou-se em direção a uma solução do problema, mesmo que alguns não tenham ainda logrado êxito.

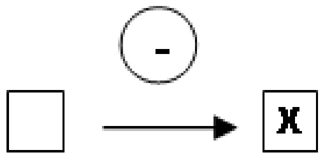
Isso está de acordo com as pesquisas de Piaget, ao defender que o desenvolvimento e a aprendizagem se dão por construção e, sendo assim, existem pelo menos três níveis de compreensão a saber: o nível da não compreensão, o nível intermediário e o nível da compreensão total. Nossa pesquisa demonstra que a quantidade de intervenção por intermédio da sequência didática sobre os números racionais, não foi capaz de provocar grandes mudanças cognitivas positivas nos conjuntos N e Q, mas foi possível observar um início de movimentação cognitiva positiva no grupo amostral observado para este tipo de estrutura do problema 1. Isto também está de acordo com Vergnaud, ao afirmar que um campo conceitual não se desenvolve de forma plena, levando até décadas para completar este desenvolvimento.(FERRACIOLI, 1999).

Por fim, percebe-se que o problema 1 é relativamente difícil, pois não só teve baixa frequência de sujeitos operatórios como teve baixa frequência de movimentação cognitiva positiva.

**Analise da Questão 2**

Na questão 2, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 2 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)



Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Carlos tem 46 petecas (bolas de gude) e João tem 23 a menos que Carlos. Quantos petecas (bolas de gude) tem João?

**Problema em Q:** Carlos tem $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate pequena e João tem $\frac{3}{12}$ a menos que Carlos de uma barra de mesmo tamanho. Que fração de uma barra de chocolate tem João?

**Análise quantitativa**

A tabela 2, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

A tabela 2 indica uma situação bastante curiosa. O problema dois parece ser um daqueles problemas que Vergnaud chama de problema tipo, pois quase todos os sujeitos demonstraram conhecer o problema em N, tanto do ponto de vista da solução como da estrutura.

No pré teste em N o percentual foi de 90% no que diz respeito à solução e de 96,6% em relação à estrutura. Já no pré teste do conjunto Q, a solução obteve 75% e a estrutura obteve 87,5%%.

Tabela 5 - Dados relativos à questão 2 Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 27- 90% | 3 – 10% | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | E | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| | Pós-teste | S | 24 – 80% | 4 – 13,3% | 2 – 6,7% |
| | | E | 25 – 83,3% | 3 – 10% | 2 - 6,6% |
| Racionais | Pré-teste | S | 24 - 75% | 7 – 21,8% | 1 – 3,1% |
| | | E | 28 – 87,5% | 3 – 9,3% | 1 – 3,1% |
| | Pós-teste | S | 23 – 71,8% | 8 – 25% | 1 – 3,1% |
| | | E | 26 – 81,2% | 5 – 15,6% | 1 – 3,1% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Estes resultados indicam novamente que os sujeitos estão mais familiarizados com o conjunto dos naturais do que com o conjunto dos racionais, bem como os sujeitos tendem a compreender os problemas mais do que resolvê-los por meio dos algoritmos.

Quanto ao pós teste, os resultados são mais curiosos, pois há a aparente idéia de que os sujeitos regrediram em relação ao pré teste. Nos naturais, o percentual é de 80% para a solução (10% a menos que no pré-teste) e de 83,3% para a estrutura (uma queda de 13,3% em relação ao pré teste). Já no conjunto dos racionais, temos 71,8% para a solução (queda de 3,2% em relação ao pré-teste) e de 81,2% para a estrutura (queda de 6,3% em relação ao pré teste).

Embora de fato tenha ocorrido algumas regressões, o que de fato contribuiu para tal redução foram os sujeitos que não fizeram o pós teste. Vamos agora nos deter à análise qualitativa destes dados, procurando compreender a movimentação cognitiva dos sujeitos neste tipo de problema.

**Análise Qualitativa**

O quadro dois mostra a movimentação cognitiva dos sujeitos quando diante do problema com a estrutura citada acima.

Quadro 3 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 2

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 1 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | S/movimento |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | S/movimento |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 28 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 7 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 14 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressão |
| 2 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 15 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 24 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Neste segundo problema, obteve-se os seguintes valores:

Sem movimento operatório -15

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 4

Com movimento regressivo - 4

Misto s/mov. com regressão Op. e não op. - 3

Com movimentos variados - 5

Com tais valores construímos a tabela 5:

Tabela 6 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 50% (15 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 15) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 26,67% (4 em 15) |
| 4 | Com movimento regressivo | 26,67% (4 em 15) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 20% (3 em 15) |
| 6 | Com movimentações variadas | 33,33% (5 em 15) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Nota-se pela tabela 4 que o problema dois parece bem mais fácil do que o problema 1, pois houve 50% dos sujeitos operatórios em N e Q, restando apenas 50 % de sujeitos que poderiam ser influenciados pela sequência didática. Destes, apenas 33,33% sofreram de fato influência da sequência planejada para a aprendizagem de frações.

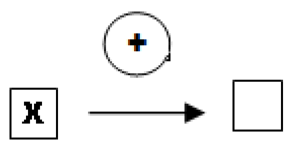
Para Vergnaud isso é perfeitamente explicável pois segundo este autor, há conteúdos (conceitos) que levam anos e às vezes décadas para serem assimilados pelos alunos.

Podemos concluir portanto que este tipo de problema pode ser considerado para este grupo de alunos, um problema tipo, segundo Vergnaud, como também é possível levantar-se a hipótese de que quando há um alto índice de alunos operatórios em N, é possível existir um alto índice de operatoriedade também em Q.

**Analise da Questão 3**

Na questão 3, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 3 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Aurora tem uma quantidade de figurinhas. Alice lhe dá mais 33. Agora Aurora tem 65 figurinhas. Quantas ela tinha no começo?

**Problema em Q:** Aurora tem uma fração de uma dúzia de bananas (12 unidades). Alice dá-lhe $\frac{3}{12}$ de uma dúzia de bananas. Agora Aurora tem $\frac{10}{12}$de uma dúzia. Que fração de uma dúzia ela tinha no começo?

**Análise quantitativa**

A tabela 5, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

Tabela 7 - Dados relativos à questão 3 Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 22 – 73,3% | 8 - 26,7% | 0 |
| | | E | 22 – 73,3% | 8 - 26,7% | 0 |
| | Pós-teste | S | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| | | E | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 19 – 59,3% | 13 - 40,7% | 0 |
| | | E | 20 – 62,5% | 12 – 37,5% | 0 |
| | Pós-teste | S | 24 – 75% | 7 – 21,8% | 1 - 3,2% |
| | | E | 26 – 81,2% | 5 – 15,6% | 1 – 3,2% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Observando os dados sobre o problema 3 em relação ao conjunto dos Naturais, conclui-se que os sujeitos apresentam compreensão da estrutura do problema na mesma proporção em que resolvem-no, dado que os percentuais foram os mesmos tanto para a estrutura como para a solução no pré-teste, como também no pós-teste. Mas houve maior concentração de acertos no pós-teste, que saltou de 73,3% para 90%, indicando que a sequência didática trabalhada permitiu uma melhora na compreensão dos sujeitos sobre o problema proposto em N.

Com relação aos dados do mesmo problema observados em Q, temos que os índices de acerto são menores do que em N, mas também a sequência didática ofereceu melhora na compreensão tanto da solução como da estrutura do problema 3, quase na mesma proporção de N.

Conclui-se portanto que em relação ao problema 3, a sequência didática foi capaz de movimentar a estrutura cognitiva de alguns dos alunos tanto no conjunto N quanto no conjunto Q

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 3, concluímos que há 36,67% de alunos que não sofreram alteração em seu sistema cognitivo em função da exposição à sequência didática sobre o estudo das frações. Há também 10,52% de alunos que apresentam uma espécie de regressão. Preferimos interpretar esse resultado como sendo ou erro ou acerto fortuito.

Quadro 4 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 3

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 6 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 2 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 1 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão em Q |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão em Q |
| 20 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão em N |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão em N |
| 8 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 24 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 27 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 9 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 15 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 17 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 29 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 11
Sem movimento não operatório - 0
Sem movimento op e não op. - 2
Com movimento regressivo - 2
Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2
Com movimentos variados - 13

Tabela 8 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 36,67% (11 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 19) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 10,52% (2 em 19) |
| 4 | Com movimento regressivo | 10,52% (2 em 19) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 10,52% (2 em 19) |
| 6 | Com movimentações variadas | 68,42% (13 em 19) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

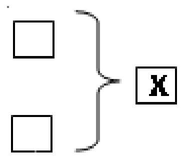
Mas também revelou-se um problema de fácil aprendizado pelos alunos, pois houve um percentual expressivo de sujeitos que conseguiram sofrer influência da sequência didática, revelado pelo percentual de 68,42%.

Vergnaud declara que há problemas que os sujeitos sabem até antes de entrar na escola e que normalmente são estes que os professores insistem em ensinar. Não é o caso do problema 3, pois apenas um terço dos sujeitos pesquisados demonstrou sabê-lo e dois terços dos que não sabiam, apresentaram-se sensíveis à aprendizagem. Pelos critérios de grau de dificuldade, o problema 3 foi classificado como um problema de média facilidade com grau 2,5 de dificuldade.

## Analise da Questão 4

Na questão 4, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 4 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Ana tem 47 figurinhas e Roberta, 31. Quantas figurinhas as duas têm?

**Problema em Q:** Ana tem $\frac{7}{10}$ de uma barra de chocolate pequena e Roberta, $\frac{3}{10}$ de uma barra idêntica. Que fração de uma barra de chocolate as duas tem juntas

**Análise quantitativa**

A tabela 4, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes do problema 4, lembrando que esta análise é relativa aos acertos e erros quanto aos testes no conjunto natural e racional quanto a solução e estrutura em Vergnaud.

Tabela 9 - Dados relativos à questão 4: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 28 – 93,3% | 2 – 6,7% | 0 |
| | | E | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| | Pós-teste | S | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| | | E | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 23 – 71,8% | 9 – 8,2% | 0 |
| | | E | 29 – 90,6% | 3 – 9,3% | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Pós-teste | S | 25 – 78,1% | 7 – 1,8% | 0 |
| | | E | 28 – 87,5% | 4 – 2,5% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Considerando os alunos que realizaram o Pré e Pós-teste dos Naturais, pode-se observar que o número de alunos que acertam a solução tem uma ligeira queda, mas a quantidade dos que acertaram a estrutura se mantém.

Um movimento semelhante pode ser observado nos testes de Q, pois o número de alunos que acerta a estrutura caí em um e a solução aumenta em dois acertos. No entanto, permanece a questão de que no conjunto N os alunos acertam mais tanto a solução quanto a estrutura, mas no conjunto Q, por falta de domínio do algoritmo, a solução tende a ser menor do que no conjunto N e as estruturas tendem a ser mantidas na mesma proporção, o que indica que os alunos sabem interpretar os problemas em N e Q, mas erram mais a solução em Q.

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 4, temos um total de 60% dos alunos que fizeram os testes e acertaram tudo quanto a estrutura e solução em ambos os testes enquanto que 41,63% mantiveram-se em movimentação cognitiva positiva

Quadro 5 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 4

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 1 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 7 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 24 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 30 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 2 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 23 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 18 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |

| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 18

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 4

Com movimento regressivo - 1

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2

Com movimentos variados - 5

Tabela 10 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 60,0% ( 18 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 12) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 33,33% (4 em 12) |
| 4 | Com movimento regressivo | 8,33% (1 em 12) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 16,67% (2 em 12) |
| 6 | Com movimentações variadas | 41,67% (5 em 12) |

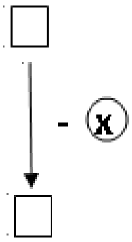
Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quanto ao grau de dificuldade do problema 4, temos que este se apresenta com grau 2,5, o que permite afirmar que é de grau medianamente fácil.

**Analise da Questão 5**

Na questão 5, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 5 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Pedro tem 59 carrinhos de brinquedo e Paulo tem 28. Quantos carrinhos de brinquedo Paulo tem a menos que Pedro?

**Problema em Q:** Pedro tem $\frac{7}{12}$ de um conjunto de blocos de montar e Paulo tem $\frac{3}{12}$ de um conjunto idêntico. Qual fração de um conjunto de blocos de montar Paulo tem a menos que Pedro?

**Análise quantitativa**

A tabela 5, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes do problema 5, lembrando que esta análise é relativa aos acertos e erros quanto aos testes no conjunto natural e racional quanto a solução e estrutura em Vergnaud.

Tabela 11 - Dados relativos à questão 5: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 26 – 86,6% | 4 – 13,4% | 0 |
| | | E | 26 – 86,6% | 4 – 13,4% | 0 |
| | Pós-teste | S | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| | | E | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 24 – 75% | 8 – 25% | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | E | 27 – 84,3% | 5 – 15,6% | 0 |
| | Pós-teste | S | 24 – 75% | 8 – 25% | 0 |
| | | E | 25 – 78,1% | 7 – 21,8% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Considerando os alunos que realizaram a questão 5 no Pré e Pós-teste dos Naturais, pode-se observar que o número de alunos que acertam a solução e a estrutura é o mesmo em ambos os testes, o que nos ajuda a afirmar que todos os alunos que compreenderam a estrutura em Vergnaud desta questão também compreenderam o cálculo que era necessário para realizá-la.

Já nos Pré e Pós-testes no conjunto Q observamos que quanto a solução o número de alunos não altera, ficando em 24 acertos, mas quanto a estrutura o número de alunos que consegue construir a resolução do problema corretamente de acordo com Vergnaud diminui de 27 para 25 alunos.

Porém, confirma-se mais uma vez que os alunos parecem compreender os problemas de frações, mas falta-lhes o uso correto do algoritmo, pois os índices indicam que no conjunto natural vai tudo bem, mas no conjunto racional, os alunos tendem a compreender os problemas, mas cai o número de soluções.

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 5, encontramos 60% de alunos sem movimentação cognitiva por serem operatórios.

Quadro 6 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 5

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 1 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 30 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 8 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 24 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 2 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 26 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressão |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório -18

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 4

Com movimento regressivo - 2

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2

Com movimentos variados - 4

Tabela 32 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 60,0% ( 18 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 12) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 33,33% (4 em 12) |
| 4 | Com movimento regressivo | 16,67% (2 em 12) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 16,67% (2 em 12) |
| 6 | Com movimentações variadas | 33,33% (4 em 12) |

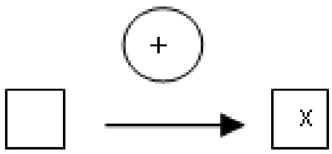
Fonte: Elaboração do autor (2019)

Os dados da tabela 10 nos mostram novamente um problema de mediana facilidade, haja visto que 60% foram operatórios. Os demais distribuem-se em quatro categorias onde a única que demonstra movimentação cognitiva tem apenas 33,33% de sujeitos sensíveis à sequência didática proposta para desenvolver o conceito de frações. O grau de dificuldade do problema 5 é 2,5.

**Analise da Questão 6**

Na questão 6, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 6 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** João tem 23 papagaios (pipas) e Marcos tem 17 a mais que João. Quantos papagaios tem Marcos?

**Problema em Q:** João tem $\frac{3}{12}$de uma pizza e Marcos tem $\frac{7}{12}$ a mais que João. Que fração da pizza tem Marcos?

**Análise quantitativa**

A tabela 6, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

Tabela 43 - Dados relativos à questão 6: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| | | E | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| | Pós-teste | S | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| | | E | 29 – 96,6% | 1 – 3,4% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 22 – 68,75% | 10 – 1,25% | 0 |
| | | E | 25 – 78,1% | 7 - 21,9% | 0 |
| | Pós-teste | S | 25 – 78,1% | 7 - 21,9% | 0 |
| | | E | 26 – 81,2% | 6 – 18,7% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Considerando os alunos que realizaram a questão 6 no Pré e Pós-teste dos Naturais, pode-se observar que o número de alunos que acertam a solução e a estrutura é o mesmo em ambos os testes, o que nos ajuda a afirmar que todos os alunos que compreenderam a estrutura em Vergnaud desta questão também compreenderam o cálculo que era necessário para realizar a 6ª questão.

Quanto ao conjunto Q, mais uma vez, os índices confirmam que os alunos tendem a diminuir o número de soluções em relação a N, mas neste problema as estruturas também foram em menor número, embora, haja mais estruturas do que soluções, o que confirma o fato de que há alunos que compreendem o problema em Q mas não dispõe de ferramental apropriado para solucioná-lo.

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 6, encontramos 56,67% de alunos sem movimentação cognitiva por serem operatórios em relação ao problema 6.Dos restantes temos que sete, ou seja,53,85% sofreram algum tipo de influência da sequência didática.

Quadro 7 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 6

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 1 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 7 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 30 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 2 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 8 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 14 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressão |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressão |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 17

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 3

Com movimento regressivo - 2

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 1

Com movimentos variados - 7

Tabela 54 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| Nº | Categorias de movimentação cognitiva | |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 56,67% ( 17 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 13) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 23,08% ( 3 em 13) |
| 4 | Com movimento regressivo | 15,36% (2 em 13) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 7,69% (1 em 13) |
| 6 | Com movimentações variadas | 53,85% (7 em 13) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

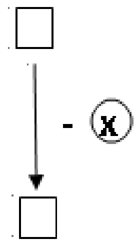
Observamos que o problema 6 é considerado fácil dado que existem mais de 50% dos sujeitos do experimento que são operatórios em N e Q. Dos restantes, também existem 53,85% que foram sensíveis à aplicação da sequência didática sobre frações.

Disto se conclui que a sequência didática foi eficaz na aprendizagem do problema seis, pois a maioria dos alunos que poderiam ser sensíveis à sequência didática, responderam positivamente à proposta de ensino. Mas também não se pode deixar de salientar que o grau de dificuldade do problema (3) facilitou esta compreensão.

**Analise da Questão 7**

Na questão 7, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 7 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)



Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Doralice tem 37 lápis de cor e sua irmã tem 25. Quantos lápis de cor Doralice tem que perder para ter a mesma quantidade de lápis de cor que sua irmã?

**Problema em Q:** Doralice tem $\frac{10}{12}$de um pacote de lápis de cor e sua irmã tem $\frac{3}{12}$. Qual fração do pacote de lápis de cor Doralice tem que perder para ter a mesma quantidade de lápis de cor que sua irmã?

**Análise quantitativa**

A tabela 13, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

Tabela 65 - Dados relativos à questão 7: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 23 – 76,6% | 7 – 23,4% | 0 |
| | | E | 26 - 86,6% | 4 – 13,3% | 0 |
| | Pós-teste | S | 29 – 96,6% | 0 | 1 – 3,4% |
| | | E | 29 – 96,6% | 0 | 1 – 3,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 20 – 62,5% | 12 – 37,5% | 0 |
| | | E | 22 – 68,7% | 10 – 31,2% | 0 |
| | Pós-teste | S | 26 – 81,25% | 6 – 18,75% | 0 |
| | | E | 28 – 87,5% | 4 – 12,5% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Considerando os alunos que realizaram a questão 7 no Pré e Pós-teste dos Naturais, pode-se observar que o número de alunos que acertam a solução e a estrutura é o mesmo no pós-teste no caso 29 alunos correspondendo a 96,6% dos alunos que responderam os testes, já quanto ao pré-teste em N vemos que há 23 alunos acertando a solução e 26 a estrutura, demonstrando um aumento de 10% da solução para a estrutura. Outra analise possível é o crescimento no número de respostas corretas do pré para o pós-teste. Um aumento de 6 alunos quanto a solução e 3 quanto á estrutura.

Já nos Pré e Pós-testes no conjunto Q observamos que quanto a solução o número de alunos cresce em seis, saindo de 20 no pré solução para 26 no pós, o mesmo acontece quanto à estrutura, pois o número de alunos sai de 22 acertos no pré para 28 no pós. Se analisarmos apenas pré e pós, comparando suas soluções com as respectivas estruturas temos sempre uma diferença positiva de dois alunos da estrutura para a solução, o que nos permite dizer que para a questão 7 o número de alunos que compreende a estrutura é sempre maior dos que conseguem realizar corretamente as operações, o que nos leva à conclusão de que os alunos compreendem os problemas mas nem todos dispõem de ferramental para solucioná-lo.

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 7, 14 alunos sem movimentação cognitiva por serem operatórios em N e Q correspondendo a 46,7% dos alunos que fizeram os testes.

Quadro 8 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 7

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 14 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 30 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 26 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 6 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 8 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 9 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 25 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 14

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op.- 1

Com movimento regressivo - 1

Misto s/mov com regressão Op. e não op. -0

Com movimentos variados - 14

Tabela 76 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 46,7%% ( 14 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 16) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 6,25% (1 em 16) |
| 4 | Com movimento regressivo | 6,25% (1 em 16) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 0% (0 em 16) |
| 6 | Com movimentações variadas | 87,5% (14 em 16) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

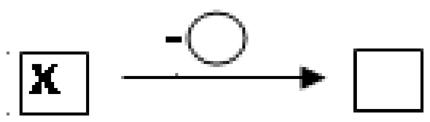
O problema 7 foi considerado um problema fácil, haja vista que 46,7% dos alunos da pesquisa foram operatórios em N e Q. Dos 16 alunos restantes, temos 87,5% de sujeitos que foram sensíveis à sequência didática, o que equivale a dizer que para este problema a sequência didática foi excelente. O grau de dificuldade medido pelos nossos critérios, para este problema foi de valor 3.

Portanto, os resultados indicam que entre os sujeitos que poderiam sofrer algum tipo de movimentação cognitiva em função da sequência aplicada, há uma significativa maioria que o fez. Mas há de se considerar que o problema mostrou-se fácil aos alunos do experimento.

**Analise da Questão 8**

Na questão 8, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 8 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Benedito tem 17 chicletes. Se Benedito tem 8 chicletes a menos que Marta. Quantos chicletes Marta tem?

**Problema em Q:** Benedito tem $\frac{8}{15}$de um pacote de biscoito. Benedito tem $\frac{6}{15}$ a menos de um pacote de biscoito que Marta. Qual fração de um pacote de biscoito tem Marta?

**Análise quantitativa**

A tabela 15, mostra os resultados obtidos nos pré e pós-testes destes dois problemas, para efeito de comparação, considerando a sequência didática sobre o estudo das frações.

Tabela 87 - Dados relativos à questão 8: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 20 – 66,6% | 10 – 33,4% | 0 |
| | | E | 20 – 66,6% | 10 – 33,4% | 0 |
| | Pós-teste | S | 21 – 70% | 9 – 30% | 0 |
| | | E | 23 – 76,6% | 7 – 23,3% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 15 – 46,8% | 17 – 53,2% | 0 |
| | | E | 16 – 50% | 16 – 50% | 0 |
| | Pós-teste | S | 17 – 53,2% | 15 – 46,8% | 0 |
| | | E | 19 – 59,3% | 13 – 40,6% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Os dados da tabela 15, indicam que com relação ao pré teste do conjunto N os alunos não diferiram em relação à solução e à estrutura, i8ndicando que quando o aluno interpreta o problema, também sabe resolvê-lo. Quanto ao pós-teste do mesmo conjunto, os dados indicam que houve uma pequena melhora tanto na solução quanto na estrutura.

Quanto ao conjunto Q os resultados mostram semelhanças entre os valores da solução e da estrutura, mas há uma queda significativa do pré para o pós teste, o qual confirma mais uma vez que os alunos têm conhecimento da estrutura do problema, mas quando a solução exige o ferramental específico das operações no conjunto Q, há lacunas no aprendizado dos alunos que os impedem de solucionar o problema.

Porém existe na literatura um fenômeno chamado “décalage” em que um sujeito pode ser operatório em dado conteúdo e não em outro, embora a estrutura seja a mesma para os dois tipos de conteúdo ( PIAGET, 1952).

**Análise qualitativa**

Observando o quadro de movimentação cognitiva dos alunos em relação à solução e estrutura do problema 8, 26,67% dos alunos que participaram do experimento, mostraram-se operatórios em N e Q. Já dos que poderiam ser sensíveis à sequência didática, 50% demonstraram esta sensibilidade.

Quadro 9 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 8

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 1 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 14 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 16 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 24 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 29 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 30 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 20 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 8 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 13 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 18 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| 23 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 8

Sem movimento não operatório - 3

Sem movimento op e não op. - 2

Com movimento regressivo - 4

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2

Com movimentos variados - 11

Tabela 98 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 26,67%% ( 8 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 13,64% (3 em 22) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 9,09% (2 em 22) |
| 4 | Com movimento  regressivo | 18,18% (4 em 22) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 13,64% (2 em 22) |
| 6 | Com movimentações variadas | 50,00% (11 em 22) |

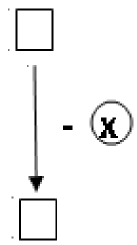
Fonte: Elaboração do autor (2019)

Ao observarmos a tabela 17constatamos que há um grande número de alunos com movimentação cognitiva nesta questão, 50% para ser mais exato, fato este que consolida os objetivos deste trabalho.

**Analise da Questão 9**

Na questão 9, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 9 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**Roberta tem 78 figurinhas e Cláudia tem 53. Quantas figurinhas Roberta tem a mais que Cláudia?

**Problema em Q:**Roberta tem $\frac{10}{12}$ de uma dúzia de bananas (12 unidades) e Cláudia tem $\frac{7}{12}$. Que fração de uma dúzia de bananas Roberta tem a mais de Cláudia?

**Análise quantitativa**

Os dados do problema 9 expostos na tabela 17 nos mostram pela primeira vez um fato inusitado. Parece haver o fato de que os sujeitos apresentam mais soluções corretas do que estruturas no pré teste dos Naturais. Na verdade a diferença entre os dados é de um sujeito que deve ter apresentado uma estrutura destoante do algoritmo que resolveu o problema, o que nos permite interpretar que o sujeito em pauta apresenta duas estruturas, sendo uma certa e outra errada. Felizmente o algoritmo estando correto revela a estrutura correta.

Quanto ao pós teste, tudo indica que o aparente erro no pré teste foi sanado, tendo ainda um pequeno aumento no número de acertos na solução e na estrutura.

Tabela 109 - Dados relativos à questão 9: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 24 – 80% | 5 – 16,6% | 1 – 3,4% |
| | | E | 23 – 76,6% | 6 – 20% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 25 – 83,3% | 3 – 10% | 2 – 6,7% |
| | | E | 25 – 83,3% | 3 – 10% | 2 – 6,7% |
| Racionais | Pré-teste | S | 20 –62,5% | 12 – 37,5% | 0 |
| | | E | 20 –62,5% | 12 – 37,5% | 0 |
| | Pós-teste | S | 22 – 68,75% | 10 – 31,25% | 0 |
| | | E | 25 – 78,1% | 7 - 21,9% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quanto ao conjunto dos racionais, os dados mostram que no pré-teste os valores são iguais para soluções e estruturas, mas no pós teste há um aumento tanto na solução quanto na estrutura. Mas é bom lembrar que do conjunto natural para o raciona, a diferença é negativa, isto é, há menos soluções no pré-teste dos racionais em relação aos naturais mas que no pós-teste tendem a se igualar.

## Análise Qualitativa

O quadro nove nos mostra que o problema 9 apresenta um percentual de 43,33% de sujeitos do experimento na condição operatório em N e Q. Quanto aos demais, os resultados mostram que houve uma razoável sensibilidade para a aprendizagem proposta pela sequência didática haja visto que 41,18% dos sujeitos foram sensíveis à sequência.

Quadro 10 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 9

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 14 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 6 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 7 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 8 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 2 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 16 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| 21 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressivo |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 13

Sem movimento não operatório - 1

Sem movimento op e não op. - 3

Com movimento regressivo - 4

Misto s/mov com regressão Op. e não op. 1

Com movimentos variados - 8

Quanto ao grau de dificuldade, o problema 9 apresenta um grau igual a 2,5, que o coloca entre os problemas de média facilidade.

Tabela 110 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

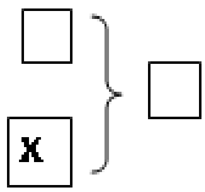
| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 43,33% ( 13 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 5,88% (1 em 17) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 17,64% (3 em 17) |
| 4 | Com movimento regressivo | 23,52%(4 em 17) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 5,88% (1 em 17) |
| 6 | Com movimentações variadas | 47,05% (8 em 17) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

**Analise da Questão 10**

Na questão 10, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 10 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**Cristina tem 32 bolas. Fátima também tem algumas. As duas têm 57 bolas. Quantas bolas tem Fátima?

**Problema em Q:**Cristina tem $\frac{7}{12}$de pacote de biscoito. Fátima também tem uma fração de pacote de biscoito. As duas têm $\frac{10}{12}$de pacote de biscoito. Qual fração de pacote de biscoito tem Fátima?

Tabela 121 - Dados relativos à questão 10: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 27 – 90% | 2 – 6,6% | 1 – 3,4% |
| | | E | 25 – 83,3% | 4 – 13,3% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 25 – 83,3% | 4 – 13,3% | 1 – 3,4% |
| | | E | 27 – 90% | 2 – 6,6% | 1 – 3,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 19 – 59,4% | 11 – 34,4% | 2 – 6,2% |
| | | E | 21 – 65,6 % | 9 – 28,1% | 2 – 6,2% |
| | Pós-teste | S | 26 – 81,25% | 5 – 15,6% | 1 – 3,15% |
| | | E | 26 – 81,25% | 5 – 15,6% | 1 – 3,15% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 11 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 10

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| 1 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 2 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 9 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 15

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 2

Com movimento regressivo - 1

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 2

Com movimentos variados - 10

Tabela 132 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

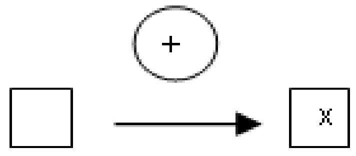
| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 50% (15 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em15) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 13,33% (2 em 15) |
| 4 | Com movimento regressivo | 6,66%(1 em 15) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 13,33% (2 em 15) |
| 6 | Com movimentações variadas | 66,66% (10 em 15) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

## Analise da Questão 11

Na questão 11, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 11 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**Juca tem 23 goiabas. Se apanhar mais 17 goiabas, terá o mesmo que seu irmão. Quantas goiabas tem seu irmão?

**Problema em Q:** Juca comeu $\frac{3}{12}$ de bolo. Se ele comer mais $\frac{7}{12}$ de bolo, terá o mesmo que seu irmão. Que fração de bolo comeu seu irmão?

Tabela 143 - Dados relativos à questão 11: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conj. Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 30 – 100% | 0 | 0 |
| | | E | 30 – 100% | 0 | 0 |
| | Pós-teste | S | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| | | E | 30 – 100% | 0 | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 19 – 59,3% | 12 -37,5% | 1 – 3,2% |
| | | E | 21 – 65,6 % | 10 – 31,2% | 1 – 3,2% |
| | Pós-teste | S | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |
| | | E | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 12 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 11

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **s/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **s/movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **s/movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 7 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 16 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 19 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 8 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 2 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 20 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | **Regressão** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | **Regressão** |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | **Regressão** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | **Regressão** |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório- 12

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 5

Com movimento regressivo - 2

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 5

Com movimentos variados - 6

Tabela 154 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 40% (12 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 18 ) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 27,78% (5 em 18) |
| 4 | Com movimento regressivo | 11,11%(2 em 18) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 27,78% (5 em 18) |
| 6 | Com movimentações variadas | 33,33% (6 em 18) |

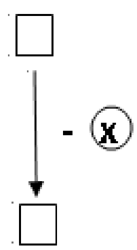
Fonte: Elaboração do autor (2019)

O problema 11 parece ser um problema difícil pois apenas 40% dos sujeitos confirmaram ser operatórios em N e Q. Dos 18 demais, somente 33,33% foram sensíveis à sequência didática proposta.

**Analise da Questão 12**

Na questão 12, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 12 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:** Paulo tem 63 petecas e João tem 49. Quantas petecas João precisa ganhar para ter a mesma quantidade de Paulo?

**Problema em Q:** Paulo comeu $\frac{10}{12}$ de uma pizza e João comeu $\frac{3}{12}$ de outra pizza. Que fração de pizza João precisa comer para ter comido a mesma quantidade de Paulo?

Tabela 165 - Dados relativos à questão 12: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 18 – 60% | 11 – 36,6% | 1 – 3,4% |
| | | E | 21 – 70% | 8 – 26,6% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 18 – 60% | 12 – 40% | 0 |
| | | E | 26 – 86,6% | 4 – 13,3% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 24 – 75% | 7 - 21,8% | 1 – 3,2% |
| | | E | 25 – 78,1% | 6 – 18,7% | 1 – 3,2% |
| | Pós-teste | S | 24 – 75% | 8 – 25% | 0 |
| | | E | 24 – 75% | 8 – 25% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 13 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 12

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | **S/ movimento** |
| 20 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 15 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | **S/ movimento** |
| 6 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 2 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| 14 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 23 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 28 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 9 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 29 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 6

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 3

Com movimento regressivo - 4

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 4

Com movimentos variados - 13

Tabela 176 -Movimentação cognitiva em função da sequência didática

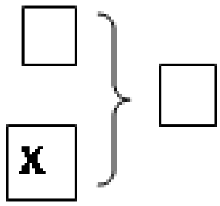
| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 20% (6 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 24) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 12,5% (3 em 24) |
| 4 | Com movimento regressivo | 16,66%( 4 em 24 ) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 54,16% 4 em 24) |
| 6 | Com movimentações variadas | 45,83% (13 em 24) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

**Analise da Questão 13**

Na questão 13, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 13 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)



Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**13. Aurora tem 77 figurinhas. Quantas necessita para ter 114 figurinhas?

**Problema em Q:**13. Aurora tem $\frac{7}{12}$de uma dúzia de bananas (12 unidades). Quantas necessita para ter $\frac{10}{12}$de uma dúzia?

Tabela 187 - Dados relativos à questão 13: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conj. Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 20 – 66,6% | 7 – 23,4% | 3 – 10% |
| | | E | 22 – 73,3% | 5 – 16,6% | 3 – 10% |
| | Pós-teste | S | 17 – 56,6% | 9 – 30% | 4 – 13,4% |
| | | E | 19 – 63,3% | 7 – 23,4% | 4 – 13,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 18 – 56,2% | 13 – 40,6% | 1 -3,2% |
| | | E | 21 – 65,6 % | 10 – 31,2% | 1 -3,2% |
| | Pós-teste | S | 23 – 71,8% | 9 – 28,2% | 0 |
| | | E | 23 – 71,8% | 9 – 28,2% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 14 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 13

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 26 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 8 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 7 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 20 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 14 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressão |
| 16 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| 11 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | Regressão |
| 21 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| 23 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | Regressão |
| 28 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | Regressão |
| 30 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | Regressão |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | Regressão |
| 1 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 10 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 15 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 24 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 10

Sem movimento não operatório - 1

Sem movimento op e não op. - 5

Com movimento regressivo - 7

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 0

Com movimentos variados - 7

Tabela 198 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

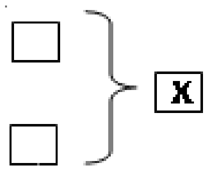
| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 33,33% ( 10 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 5% (1 em 20) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 25% (5 em 20) |
| 4 | Com movimento regressivo | 35%(7 em 20 ) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 0% (0 em 20) |
| 6 | Com movimentações variadas | 35% (7 em 20) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

**Analise da Questão 14**

Na questão 14, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

*Figura 14*- Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)



Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**14. Aurora tem 76 figurinhas. Alice dá à Aurora 43 figurinhas. Quantas figurinhas Aurora tem agora?

**Problema em Q:**14. Aurora tem $\frac{7}{12}$de uma dúzia de bananas (12 unidades). Alice dá à Aurora $\frac{3}{12}$de uma dúzia. Que fração de uma dúzia Aurora tem agora?

Tabela 209 - Dados relativos à questão 14: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 18 – 60% | 11 – 36,6% | 1 – 3,4% |
| | | E | 20 – 66,6% | 9 – 30% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 27 – 90% | 3 – 10% | 0 |
| | | E | 28 – 93,3% | 2 – 6,6% | 0 |
| Racionais | Pré-teste | S | 21 – 65,6% | 10 – 31,2% | 1 – 3,1% |
| | | E | 22 – 68,7% | 9 – 28,1% | 1 – 3,1% |
| | Pós-teste | S | 27 – 84,4% | 5 - 15,6% | 0 |
| | | E | 27 – 84,4% | 5 - 15,6% | 0 |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 155 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 14

| SUJEITO | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|
| | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 9 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 21 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 29 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 8 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 11 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 19 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 20 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 15 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 10 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 26 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 8

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 2

Com movimento regressivo - 5

Misto s/mov com regressão Op. e não op. 0

Com movimentos variados - 15

Tabela 210 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 26,67% (8 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 22 ) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 9,1% (2 em 22) |
| 4 | Com movimento regressivo | 22,73%(5 em 22 ) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 0% (0 em 22) |
| 6 | Com movimentações variadas | 68,18% (15 em 22) |

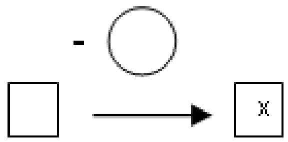
Fonte: Elaboração do autor (2019)

O problema 14 se mostra muito difícil, pois apenas 26,67% dos sujeitos se mantiveram operatórios em N e Q. Dos demais 22 sujeitos, 68,18% se mostraram sensíveis à sequência didática, o que permite aventar que os sujeitos foram muito sensíveis à sequência didática para este problema.

**Analise da Questão 15**

Na questão 15, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 15 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




*Fonte: Vergnaud (1996)*

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**Eu tenho 37 bananas. Se dou12 para o meu primo, eu terei a mesma quantidade de bananas que meu primo. Quantas bananas tem meu primo?

**Problema em Q:**Eu tenho $\frac{10}{12}$de uma barra de chocolate pequena. Se dou$\frac{3}{12}$ da minha barra de chocolate para o meu primo, eu terei a mesma fração de uma barra de chocolate que meu primo. Que fração de uma barra de chocolate tem meu primo?

Tabela 221 - Dados relativos à questão 15: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 22 -73,4% | 6 – 20% | 2 – 6,6% |
| | | E | 25 – 83,3% | 3 – 9,3% | 2 – 6,6% |
| | Pós-teste | S | 26 – 86,6% | 3 – 9,3% | 1 - 3,3% |
| | | E | 26– 86,6% | 3 – 9,3% | 1 - 3,3% |
| Racionais | Pré-teste | S | 20 – 62,5% | 11– 34,3% | 1 – 3,2% |
| | | E | 22 – 68,7% | 9 – 28,1% | 1 – 3,1% |
| | Pós-teste | S | 20 – 62,5% | 10 – 31,25% | 2 - 6,25% |
| | | E | 20 – 62,5% | 10 – 31,25% | 2 - 6,25% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 166 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 15

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 2 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 14 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 23 | S | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 8 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 15 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 29 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 9 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 11 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 24 | S | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 26 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 30 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 13

Sem movimento não operatório - 0

Sem movimento op e não op. - 3

Com movimento regressivo - 3

Misto s/mov com regressão Op. e não op. 0

Com movimentos variados - 11

Tabela 232 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

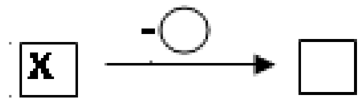
| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 43,33% (13 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 0% (0 em 17 ) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 17,65% (3 em 17) |
| 4 | Com movimento regressivo | 17,65%(3 em 17 ) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 0% (0 em 17) |
| 6 | Com movimentações variadas | 64,71% (11 em 17) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

**Analise da Questão 16**

Na questão 16, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 16 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**16. Meu irmão José tem 45jogos de vídeo game. Se meu irmão Raimundo perde 16, terá a mesma quantidade que José. Quantas jogos de vídeo game Raimundo tem?

**Problema em Q:**16. Meu irmão José tem $\frac{6}{15}$dos carros de brinquedo de uma coleção. Se meu irmão Raimundo perde $\frac{3}{15}$da sua coleção que é idêntica à de José, terá a mesma quantidade que José. Que fração representa a coleção de Raimundo?

Tabela 243 -Dados relativos à questão 16: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 16 - 53,3% | 13 – 43,3% | 1 – 3,4% |
| | | E | 17–56,6% | 12 – 40% | 1 – 3,4% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Pós-teste | S | 19 – 63,3% | 10 – 33,3% | 1 – 3,4% |
| | | E | 19 – 63,3% | 10 – 33,3% | 1 – 3,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 12 – 37,5% | 19 – 59,3% | 1 – 3,2% |
| | | E | 12 – 37,5% | 19 – 59,3% | 1 – 3,2% |
| | Pós-teste | S | 19 – 59,3% | 12 – 37,5% | 1 – 3,2% |
| | | E | 19 – 59,3% | 12 – 37,5% | 1 – 3,2% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro17 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 16

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 5 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 30 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 15 | S | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 8 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 9 | S | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 12 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 6 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 7 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 13 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 14 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 16 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 18 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 20 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 23 | S | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 26 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 28 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 29 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 4

Sem movimento não operatório - 2

Sem movimento op e não op. - 1

Com movimento regressivo - 0

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 6

Com movimentos variados - 17

Tabela 254 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 13,33% (4 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 7,69% (2 em 26 ) |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 3,84% (1 em 26) |
| 4 | Com movimento  regressivo | 0%(0 em 26) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 23,08% (6 em 26) |
| 6 | Com movimentações variadas | 65,38% (17 em 26) |

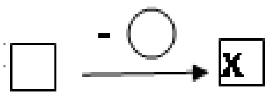
Fonte: Elaboração do autor (2019)

Os resultados do problema 16 nos indicam um problema muito difícil, haja vista que temos apenas 13,33% dos sujeitos operatórios em N e Q. Os demais dados nos mostram que a sequência didática foi eficaz na sensibilização dos sujeitos para a mudança de condição operatória.

**Analise da Questão 17**

Na questão 17, procuramos construir um problema aditivo que se identificasse pela estrutura vergnaudiana abaixo.

Figura 17 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

Essa estrutura foi mantida tanto para o problema aditivo em N como para o problema aditivo em Q, como segue:

**Problema em N:**17. Valter tem 58 pirulitos. Valter tem 25 pirulitos a mais que André. Quantos pirulitos tem André?

**Problema em Q:**17. Valter tem $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate. Valter tem $\frac{3}{12}$de chocolate a mais que André. Que fraçãode uma barra de chocolate tem André?

Tabela 265 – Dados relativos à questão 17: Teste Naturais e Racionais: Pré-teste e pós-teste

| Conjuntos Numéricos | Testes | | Acertos (N/%) | Erros (N/%) | Não fez (N/%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Naturais | Pré-teste | S | 19 - 63,3% | 10 – 33,3% | 1 – 3,4% |
| | | E | 21 – 70% | 8 – 26,6% | 1 – 3,4% |
| | Pós-teste | S | 20 – 66,6% | 9 – 30% | 1 – 3,4% |
| | | E | 20 – 66,6% | 9 – 30% | 1 – 3,4% |
| Racionais | Pré-teste | S | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |
| | | E | 20 – 62,5% | 11 – 34,3% | 1 – 3,2% |
| | Pós-teste | S | 16 – 50% | 15 – 46,8% | 1 – 3,2% |
| | | E | 18 – 56,25% | 13 – 40,62% | 1 – 3,2% |

Legenda: S – Solução; E – Estrutura em Vergnaud

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Quadro 17 - Movimentação cognitiva dos sujeitos em relação ao problema 17

| SUJEITO | | CONJUNTO N | | CONJUNTO Q | | Análise |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PRÉ | PÓS | PRÉ | PÓS | |
| 3 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 4 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 17 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 18 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 19 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 20 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 27 | S | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 14 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 23 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 30 | S | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| 8 | S | 1 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| 10 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 13 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 1 | S | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 0 | 0 | 1 | 0 | Regressivo |
| 15 | S | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 0 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 16 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 24 | S | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 1 | 1 | Regressivo |
| 28 | S | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| | E | 1 | 1 | 1 | 0 | Regressivo |
| 29 | S | 1 | 0 | 0 | 1 | Regressivo |
| | E | 1 | 0 | 0 | 1 | Regressivo |
| 7 | S | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 21 | S | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | E | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 22 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 26 | S | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| | E | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Sem movimento operatório - 10

Sem movimento não operatório - 6

Sem movimento op e não op. - 0

Com movimento regressivo - 10

Misto s/mov com regressão Op. e não op. - 0

Com movimentos variados - 4

Tabela 276 - Movimentação cognitiva em função da sequência didática

| n | Categorias de movimentação cognitiva | % |
|---|---|---|
| 1 | S/ movimentação operatório | 33,33% (10 em 30) |
| 2 | S/ movimentação não operatório | 30% (6 em 20) |
| 3 | S/movimentação operatório e não operatório | 0% (0 em 20) |
| 4 | Com movimento regressivo | 50%(10 em 20) |
| 5 | Misto s/movimento e mov. regressivo (op. e ñ op.) | 0% (0 em 20) |
| 6 | Com movimentações variadas | 20% (4 em 20) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Os resultados do problema 17 nos dizem que o problema é difícil e que a sensibilidade à sequência didática foi extremamente baixa.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para nossa conclusão precisamos mostrar a tabela 35 que resume todos os resultados dos 17 problemas de Vernaud tanto no conjunto N quanto no conjunto Q, observando as categorias 1 e 6, descritas no tópico 4, sendo a categoria 1 referente a operatoriedade nos pré e pós-testes em Ne Q, já a categoria 6 remete as movimentações cognitivas de algum tipo, sejam elas somente em N ou somente em Q ou em ambos.

Observa-se que a disposição da tabela está feita levando em consideração a ordem crescente da porcentagem de alunos na coluna de “Operatoriedade em N e Q” e quando há valores iguais nesta coluna observa-se a coluna lateral denominada “Sensibilidade em N e Q”.

É notório destacar que os valores máximo e mínimo na coluna “Operatoriedade em N e Q” são respectivamente, 60% nas questões 4 e 5, e 6,67% na questão 1. Já na coluna “Sensibilidade em N e Q” tem-se os valores máximo e mínimo respectivos a 87,5% na 7 questão e 20% na 17 questão. Ao observar atentamente a estes dados podemos perceber que a diferença entre os valores máximos e mínimos é menor na primeira coluna e quase 15% maior na segunda coluna, levando-nos a inferir que a movimentação cognitiva dos alunos foi maior que a proficiência prévia que eles demonstraram ao longo dos testes.

Sendo esta uma inferência bastante positiva para nossa sequência didática, pois permite-nos afirmar que ela sensibilizou um número superior de alunos aos que já tinham proficiência.

Falando na sequência é fundamental relembrar sua estrutura e etapas, ela está dividida em cinco aulas de duas horas aulas cada e mais duas horas aulas para a realização dos pré-testes em N e Q e pós-testes feitos de forma individual pelos alunos, totalizando doze horas aulas. Esta sequência aborda do conceito introdutório da fração ao campo aditivo, compreendendo as operações de adição e subtração de denominadores iguais e diferentes, sendo construída principalmente sobre a resolução de problemas, os quais eram propostos aos alunos que estavam divididos em equipes. A aplicação da sequência didática foi feita no período de 6 a 17 de agosto de 2018.

Sobre as observações das aulas é pertinente destacar que alguns alunos tiveram dificuldades com a interpretação de alguns problemas como por exemplo o problema de "Maria e seus filhos" na primeira aula da sequência, conforme Apêndice I, o que foi facilmente sanado com o auxílio do professor na interpretação textual, além disso um grupo de alunos apresentou dificuldades na transposição epistemológica da representação gráfica da fração para a representação numérica exigindo algum tempo para re-explicações e uma rápida reformulação da explicação usando desenhos, os quais eram mais fáceis para estes alunos.

Tabela 287 - Resumo de dados relativos às categorias 1 e 6. Pré-teste e pós-teste

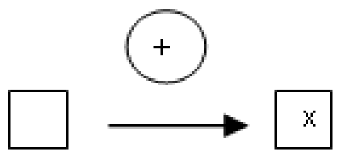
| **Problema** | **Movimentação** | |
|---|---|---|
| | Operatoriedade em N e Q | Sensibilidade em N ou Q |
| 1 | 6,67% (2 em 30) | 39,29% (11 em 28) |
| 16 | 13,33% (4 em 30) | 65,38% (17 em 26) |
| 12 | 20% (6 em 30) | 45,83% (11 em 24) |
| 8 | 26,67% (8 de 30 ) | 50% (11 de 22) |
| 14 | 26,67% (8 em 30) | 68,18% (15 em 22) |
| 17 | 33,33% (10 em 30) | 20% (4 em 20) |
| 13 | 33,33% ( 10 em 30) | 35% (7 em 20) |
| 3 | 36,67% (11 de 30) | 68,42% (13 de 19 ) |
| 11 | 40% (12 em 30) | 33,33% (6 de 18) |
| 9 | 43,33% ( 13 em 30) | 47,05% (8 de 17) |
| 15 | 43,33% (13 em 30) | 64,71% (11 em 17) |
| 7 | 46,7% ( 14 em 30) | 87,5% (14 em 16) |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 50% (15 em 30) | 33,33% (5 de 15) |
| 10 | 50% (15  em 30) | 66,66% (10 de 15) |
| 6 | 56,67% ( 17 em 30) | 53,85% (7 em 13) |
| 5 | 60,0% ( 18 em 30) | 33,33% (4 em 12) |
| 4 | 60,0% ( 18 em 30) | 41,67% (5 em 12) |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Nosso objetivo geral de sensibilizar o sistema cognitivo do máximo de alunos com esta sequência didática foi alcançado, pois como podemos ver pela tabela anterior a média de alunos sensibilizados foi de 50,2% aproximadamente, lembrando que cada questão dos testes foi construída a partir de uma das seis relações na estrutura aditiva propostas por Vergnaud (1996) e que as questões de mesma numeração no teste do conjunto dos Naturais e Racionais correspondiam a mesma estrutura. Como podemos observar abaixo no exemplo da questão 1, onde está sendo apresentada a estrutura segundo Vergnaud (1996) e as perguntas elaboradas a partir desta.

Figura 18 - Estrutura de problemas aditivos proposta por Vergnaud (1996)




Fonte: Vergnaud (1996)

**Problema em N:** Meu irmão tem 38 goiabas. Se eu comer 16 das minhas goiabas, terei tantas goiabas quanto meu irmão. Quantas goiabas eu tenho?

**Problema em Q:**Meu irmão comeu $\frac{7}{12}$ de um bolo. Se eu comer $\frac{3}{12}$ de meu bolo, terei a mesma fração de bolo que meu irmão. Que fração de bolo eu tenho?

A tabela de grau de dificuldades, a seguir, elaborada segundo proposto no ponto 4.8 deste, com esta podemos dividir as questões em três pontuações 1, 2 e 3 onde a nota mais baixa seria dada a questão que obteve a menor porcentagem de alunos no grupo e a nota mais alta para aquela questão que teve a maior porcentagem de alunos no grupo.

Tabela 298 - Tabelas de Grau de Dificuldade analise 1

| **Intervalos** | **1** (6,67% - 31,39%) | **2** (31,39% - 62,78%) | **3** (62,78% – 87,5%) |
|---|---|---|---|
| **Categoria 1** | **1, 16, 12, 8, 14** | **10, 17, 13, 3, 11, 9, 15, 7, 2, 6, 5, 4** | |
| **Categoria 6** | **17** | **1, 12, 8, 13, 11, 9, 2, 6, 5, 4** | **16, 14, 3, 15, 7, 10** |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

Tabela 309 - Tabelas de Grau de Dificuldade analise 2

| **Dados Tabela** | **1** | **1,5** | **2** | **2,5** | **3** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | | **1, 12, 8, 17** | **16, 14, 13, 11, 9, 2, 6 5, 4** | **3, 7, 10, 15** | |

Fonte: Elaboração do autor (2019)

A tabela de grau de dificuldades analise 1, construída anteriormente, demonstra um fato interessante obtido pela nossa escolha de análise, a qual se constituiu em comparar o grupo de alunos que demonstrou operatoriedade em todos os testes em cada questão com o grupo que teve alguma movimentação cognitiva em cada questão, fazendo portanto o recorte explicado anteriormente no ponto 4.8.

Após as notas serem dadas para cada situação, operatoriedade e movimentação cognitiva, foi tirada a média na nota da questão e colocada a questão como: muito difícil nota 1, difícil com nota 1,5, média com nota 2, fácil com nota 2,5 e por fim muito fácil com nota 3. Sendo relevante destacar que 4 questões ficaram caracterizadas como fáceis e 4 como difíceis e as demais como medianas, o que corrobora as análises feitas pelos sistemas de avaliação da Educação Básica como: Prova Brasil, dedicada a avaliação de alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental, o Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SisPAE) e Avaliação

Nacional da Alfabetização (ANA), os quais dividem as questões em fáceis, médias e difíceis após aplicações em grupos de alunos.

Acreditamos, portanto que este tipo de análise auxiliará o professor que ao ler esta dissertação ou o produto didático oriundo da mesma, a ter uma base de cálculo segura para a verificação das movimentações cognitivas de seus alunos, cumprindo assim com um de nossos objetivos propostos na elaboração deste.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ad. SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia Didática: evolução e diversidade. **R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações**: uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18487/1/dissertacao_francisco_bezerra.pdf. Acesso em: 14 jan. 2018.

BOERO, Paolo; PEDEMONTE, Bettina; ROBOTTI, Elisabetta. **Approaching the oretical knowled gethrough voices and echoes**: a Vygotskian perspective. Disponível em: http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/BOERO%26C,PME_XXI.pdf. Acesso em: 25 mar. 2017

BONOTTO, Diana Moor. **Estratégias de ensino-aprendizagem de frações**. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31600/000782632.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 25 fev. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC; Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CANOVA, Raquel Factori. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11093/1/EDM%20-%20Raquel%20F%20Canova.pdf. Acesso em: 23 jun. 2018.

CASTRO, Francine Lacerda. Ensino de frações com o uso do Scratch para crianças em situação de vulnerabilidade social. **Redin-Revista Educacional Interdisciplinar**, v. 7, n. 1, 2018.

COSTA, Nivia Maria Vieira. **A resolução de problemas aditivos e sua complexidade: a previsão dos professores e a realidade dos alunos**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

CURI, Edda. Contribuições de avaliações externas à pratica pedagógica do professor que ensina Matemática para crianças de 6 a 10 anos. In: **Actas do Encontro de professores de Matemática**. Lisboa: PROFMAT, 2011.

D'AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Bolema**, v.20, n. 28, 2007.

DE CARVALHO JÚNIOR, Gabriel Dias; DE AGUIAR JUNIOR, Orlando Gomes. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 25, n. 2, p. 207-227, 2008.

DIAS, Josete Leal. **Compreensão de professores de matemática sobre números fracionários**. 2012. Tese (Doutorado em Educação em Ciências Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica,Universidade Federal do Pará, Belém, 2012. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3797/1/Tese_CompreensaoProfessoresMatematica.pdf. Acesso em: 04 abr. 2017.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996.

GONÇALVES, Heitor Antônio. **Educação matemática e cálculo mental**: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. 2008. Tese (Doutorado em Ciências, Sociedade e Educação) - Universidade Federal Fluminense,Niterói, 2008. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=121479. Acesso em: 11 nov. 2017.

GOYOS, Celso; ELIAS, N. C.; RIBEIRO, D. M. Desenvolvimento de um programa informatizado para o ensino de LIBRAS. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO ESPECIAL, 2.; ENCONTRO DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO ESPECIAL, 2.,São Carlos, 2005.

GUIMARÃES, S. D. A resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3 a série do ensino fundamental**. Reunião Anual da ANPED, 28**. Disponível em: 28reuniao.anped.org.br/textos/gt19/gt191044int.rtf. Acesso em: 12 out. 2017.

HERMÍNIO, Paulo Henrique. **Matemática financeira**: um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem.2008.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista–Rio Claro, São Paulo, 2008.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. Repensando adição e subtração: Contribuições da teoria dos campos conceituais.São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, 2008.

MEDEIROS, Cleide Farias de. Por uma educação matemática como instrumento intersubjetividade. In: BICUDO, Maria Aparecida V. (Org.). **Educação matemática**. São Paulo: Moraes, 1988.

MENOTTI, Rogéria Malacrida. **Frações e suas operações:** Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2014. Dissertação

(Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MONTEIRO, Cecília; PINTO, Hélia; FIGUEIREDO, Nisa. As fracções ee o desenvolvimento do sentido do número racional. **Educação e Matemática**, n. 84, p. 47-51, set. 2005.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências,**Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, jan./mar. 2002.

NOGUEIRA, Cléia Maria Ignatius. REZENDE, Veridiana. A Teoria dos Campos Conceituais no Ensno de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática. **SCHÈME: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas,** v. 6,n. 1,jan./jul. 2014.

NUNES, M. F.; SILVA, F. A. F. **Os significados do conceito de fração**: um estudo diagnóstico com alunos do 8° ano do ensino fundamental. 2009. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Alagoas, Arapiraca, 2009.

NUNES, T.;BRYANT, P.;PRETZLIK, U.; HURRY, J.**The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no Encontro da British Society for Research on the Leaming of Mathematics.Oxford: June, 2003.

NUNES, T.; MAGINA, T. S.; BRYANT, P. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

PIAGET, Jean; COOK, Margaret. **The origins of intelligence in children**. New York: International Universities Press, 1952.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia didática em sala de aula**: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares. [São Paulo: s. n., 2013].

RODRIGUES, Wilson Roberto. **Números racionais**: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, Aparecido dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, Josiel Almeida. FRANÇA, Kleber Vieira. SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. Dificuldades no Ensino de Matemática. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em: 25 fev. 2017.

SIDMAN, M.; TAILBY, W. Conditional discrimination vs. Matching to sample: an expansion of the testing paradigm. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 35, n. 1, p. 5-22, jan. 1982. Disponível em: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1333115/pdf/jeabehav00072-0007.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

SILVA, Angélica da Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente**: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11276/1/Angelica%20da%20Fontoura%20Garcia%20Silva.pdf. Acesso em: 05 out. 2017.

SILVA, Fernanda Andréa Fernandes; LINS, Mônica. A construção do conceito de fração: um estudo comparativo entre alunos do 1 ano do ensino médio e alunos do 8 ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, Recife, 2011.

TEIXEIRA, Alexis Martins. **O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo**. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) -Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11288/1/Alexis%20Martins%20Teixeira.pdf. Acesso em: 23 ago. 2017.

TULON, Andreia da Silva. **Ensino de frações e equivalência de estímulos**: um estudo com uso de software educativo. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/16462/1/Andreia%20da%20Silva%20Tulon.pdf. Acesso em: 26 set. 2018.

VAZ, Rafael Filipe Nova. **Metodologia Didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/54%20Rafael%20Vaz.pdf. Acesso em: 26 set. 2019.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In BRUN, J. ***Didácticada matemáticas***. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 280 p.

VERGNAUD, G. Piaget e Vigotsky: convergências e controvérsias. **Revista do Geempa**, Porto Alegre, n. 2, p.77-83, nov. 1993.

VERGNAUD, G. Quel ques problèmes theóriques de la didactique apropos d'unexample: les structures additives. **Atelier International d'Eté: Réchercheen**

**Didactique de la Physique**. La Londeles Maures, França, 26 de junho a 13 de julho. 1983

VERGNAUD, Gerard et al. Teoria dos campos conceituais. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., Rio de Janeiro. **Anais do ...**Rio de Janeiro: [s.n.], 1993.

VERGNAUD, Gérard. **L'enfant, la mathématique et la réalité**: problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. P. Lang, 1981.

VYGOTSKY, Lev Semyonovich. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

FERRACIOLI, Laércio. Aspectos da construção do conhecimento e da aprendizagem na obra de Piaget. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 16, n. 2, p. 180-194, 1999.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A -LISTA DE PROBLEMAS ADITIVOS NOS NATURAIS

1. Meu irmão tem 38 goiabas. Se eu comer 16 das minhas goiabas, terei tantas goiabas quanto meu irmão. Quantas goiabas eu tenho?

2. Carlos tem 46 papagaios (pipas) e João tem 23 a menos que Carlos. Quantos papagaios tem João?

3. Aurora tem algumas figurinhas. Alice dá-lhe 33. Agora Aurora tem 65 figurinhas. Quantas tinha no começo?

4. Ana tem 47 figurinhas e Roberta, 31. Quantas figurinhas as duas têm?

5. Pedro tem 59 carrinhos de brinquedo e Paulo tem 28. Quantos carrinhos de brinquedo Paulo tem a menos que Pedro?

6. João tem 23 papagaios (pipas) e Marcos tem 17 a mais que João. Quantos papagaios tem Marcos?

7. Doralice tem 37 lápis de cor e sua irmã tem 25. Quantos lápis de cor Doralice tem que perder para ter a mesma quantidade de lápis de cor que sua irmã?

8. Benedito tem 17 picolés. Benedito tem 8 picolés a menos que Marta. Quantos picolés tem Marta?

9. Roberta tem 78 figurinhas e Cláudia tem 53. Quantas figurinhas Roberta tem a mais que Cláudia?

10. Cristina tem 32 bolas. Fátima também tem algumas. As duas têm 57 bolas. Quantas bolas tem Fátima?

11. Juca tem 23 goiabas. Se apanhar mais 17 goiabas, terá o mesmo que seu irmão. Quantas goiabas tem seu irmão?

12. Paulo tem 63 petecas e João tem 49. Quantas petecas João precisa ganhar para ter a mesma quantidade de Paulo?

13. Aurora tem 77 figurinhas. Quantas necessita para ter 114 figurinhas?

14. Aurora tem 76 figurinhas. Alice dá à Aurora 43 figurinhas. Quantas figurinhas Aurora tem agora?

15. Eu tenho 37 bananas. Se dou12 para o meu primo, eu terei a mesma quantidade de bananas que meu primo. Quantas bananas tem meu primo?

16. Meu irmão José tem 45jogos de vídeo game. Se meu irmão Raimundo perde 16, terá a mesma quantidade que José. Quantas jogos de vídeo game Raimundo tem?

17. Valter tem 58 pirulitos. Valter tem 25 pirulitos a mais que André. Quantos pirulitos tem André?

## APÊNDICE B - LISTA DE PROBLEMAS ADITIVOS NOS RACIONAIS

1. Meu irmão comeu $\frac{7}{12}$ de um bolo. Se eu comer $\frac{3}{12}$ de meu bolo, terei a mesma fração de bolo que meu irmão. Que fração de bolo eu tenho?

2. Carlos tem $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate e João tem $\frac{3}{12}$ a menos que Carlos. Que fração de uma barra de chocolate tem João?

3. Aurora tem uma fração de uma penca de bananas (12 unidades). Alice dá-lhe $\frac{3}{12}$ de uma penca de bananas. Agora Aurora tem $\frac{10}{12}$ de uma penca. Que fração ela tinha no começo?

4. Ana tem $\frac{7}{10}$ de uma barra de chocolate e Roberta, $\frac{3}{10}$. Que fração da barra de chocolate as duas tem juntas?

5. Pedro tem $\frac{7}{12}$ de um quebra-cabeça e Paulo tem $\frac{3}{12}$ do mesmo. Qual fração do quebra-cabeça Paulo tem a menos que Pedro?

6. João tem $\frac{3}{12}$ de uma pizza e Marcos tem $\frac{7}{12}$ a mais que João. Que fração da pizza tem Marcos?

7. Doralice tem $\frac{10}{12}$ de um pacote de lápis de cor e sua irmã tem $\frac{3}{12}$. Qual fração do pacote de lápis de cor Doralice tem que perder para ter a mesma quantidade de lápis de cor que sua irmã?

8. Benedito tem $\frac{8}{15}$ de um pote de sorvete. Benedito tem $\frac{6}{15}$ a menos que Marta. Qual fração de um pote de sorvete tem Marta?

9. Roberta tem $\frac{10}{12}$ de uma penca de bananas (12 unidades) e Cláudia tem $\frac{7}{12}$. Que fração de uma penca de bananas Roberta tem a mais de Cláudia?

10. Cristina tem $\frac{7}{12}$ de um metro de tecido. Fátima também tem uma fração de um metro de tecido. As duas têm $\frac{10}{12}$ de um metro de tecido. Qual fração de tecido tem Fátima?

11. Juca comeu $\frac{3}{12}$ de bolo. Se ele comer mais $\frac{7}{12}$ de bolo, terá o mesmo que seu irmão. Que fração de bolo comeu seu irmão?

12. Paulo comeu $\frac{10}{12}$ de uma pizza e João comeu $\frac{3}{12}$ de outra pizza. Que fração de pizza João precisa comer para ter comido a mesma quantidade de Paulo?

13. Aurora tem $\frac{7}{12}$de uma penca de bananas (12 unidades). Quantas necessita para ter $\frac{10}{12}$de uma penca?

14. Aurora tem $\frac{7}{12}$de uma penca de bananas (12 unidades). Alice dá à Aurora $\frac{3}{12}$de uma penca. Que fração de uma penca Aurora tem agora?

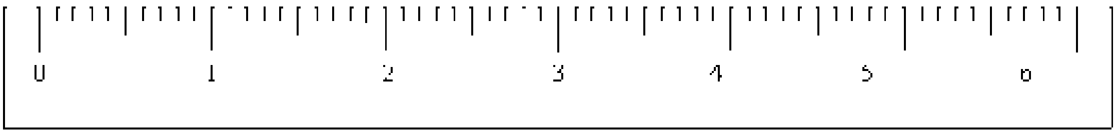
15. Eu tenho $\frac{10}{12}$de um saco de petecas. Se dou $\frac{3}{12}$de um saco de petecas para o meu primo, eu terei a mesma fração de um saco de petecas que meu primo. Que fração de um saco de petecas tem meu primo?

16. Meu irmão José tem $\frac{6}{15}$dos carros de brinquedo de uma coleção. Se meu irmão Raimundo perde $\frac{3}{15}$da sua coleção que é idêntica à de José, terá a mesma quantidade que José. Que fração representa a coleção de Raimundo?

17. Valter tem $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate. Valter tem $\frac{3}{12}$de chocolate a mais que André. Que fração de uma barra de chocolate tem André?

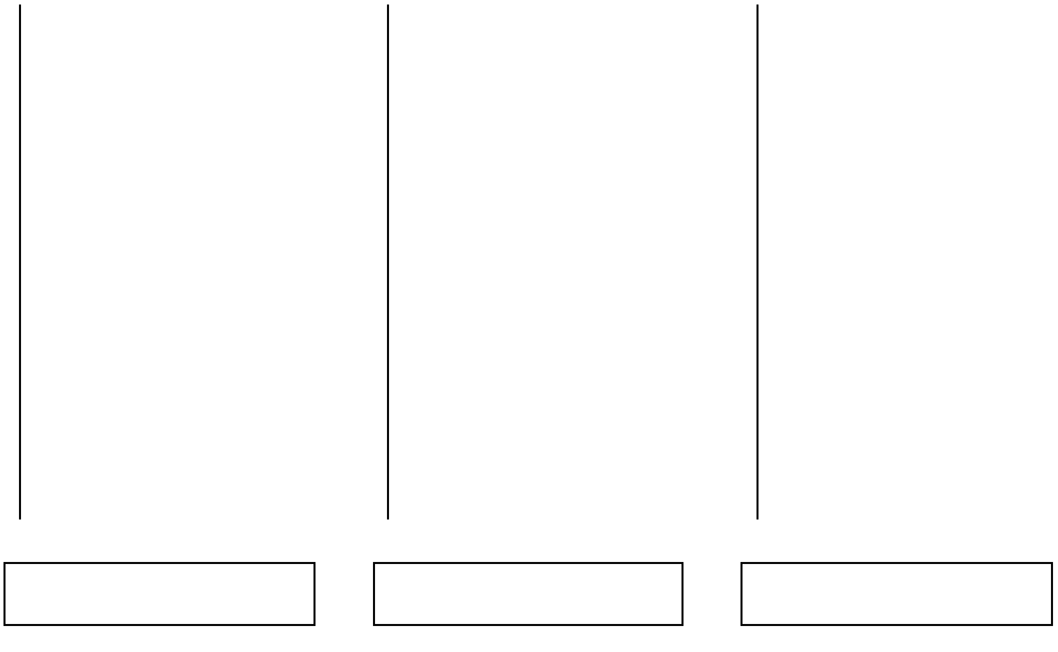
## APENDICE C - LISTA DE PROBLEMAS ADITIVOS ENVOLVENDO OS 7 SIGNIFICADOS DE FRAÇÕES

1. Pedro foi desafiado por um colega a descobrir qual das frações a seguir não pode ser representada neste pedaço de régua, $\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{4}$; $\frac{3}{12}$; $5\frac{16}{12}$. Qual é a resposta correta?




2. O professor de Matemática fez um desafio para a turma de quem conseguiria representar o número 0,75 pela menor fração possível. Qual seria essa representação que o professor deseja?

3.Numa família, há três irmãos: Carlos com 7 anos, Caio com 5 anos e Cícero com 3 anos. O mais velho mede um metro de altura. O do meio mede três quartos do mais velho e o mais novo mede a metade do mais velho. Marque a altura de cada um dos irmãos, escrevendo seus nomes nos quadradinhos.



4.Antônio e Carlos são irmãos. Eles foram da escola até sua casa a pé. Antônio caminhou a metade do caminho e Carlos andou a metade da metade do caminho. Quem está mais próximo de casa? Represente por meio de um desenho.

5. Um motorista depois de percorrer $\frac{1}{5}$ de uma estrada de 180 quilômetros, fez uma parada. Quantos quilômetros ele percorreu? Quantos quilômetros restam percorrer?

6. Julia adora bombom de morango. Para sua festa de aniversário, Julia encomendou 60 bombons de morango. Foram consumidos $\frac{4}{5}$ dessa quantidade. Quantos bombons de morango foram consumidos?

7. Pedro comeu três partes das quatro que seu chocolate tem. Qual fração representa a parte que ele já comeu?

8. Carlos pagou 6 prestações das 36 prestações de seu carro. Qual fração representa as prestações pagas em relação ao total?

9.Ana comprou 12 bombons e quer dividir entre os seus 4 amigos. Quantos Bombons cada amigo receberá?

10. Pedro foi a pizzaria com seus três amigos e compram duas pizzas e dividiram elas igualmente. Qual fração representa a quantidade de pizzas que cada um comeu?

11. Se jogarmos um dado qual a chance de tirarmos um número par? Que fração representa essa probabilidade

12.João foi ao Petshop escolher um cãozinho, na loja tinham três filhotes machos e quatro fêmeas. Qual fração representa a chance de ele pegar aleatoriamente um macho?

13.Em uma sala de aula, temos 12 meninas e 14 meninos. Qual é a razão entre o total de alunos e o número de meninos? Represente em formato de fração.

14.Segundo uma rápida pesquisa entre os alunos do 6º ano de uma escola, 23 deles responderam que assistem series e filmes via internet e 9 disseram que não assistem. Qual é a razão entre o total de alunos e o número de alunos que não assistem filmes e series via internet? Represente em formato de fração.