UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Cristina Maria Lima Guimarães Junqueira

Ensino de Conjuntos por Atividades

Belém - PA

2018

Cristina Maria Lima Guimarães Junqueira

Ensino de Conjuntos por Atividades

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira.
Co-orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém – PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Junqueira, Cristina Maria Lima Guimarães

Ensino de conjuntos por atividades / Cristina Maria Lima Guimarães Junqueira; orientador Ducival Carvalho Pereira; coorientador Pedro Franco de Sá, 2019

Acompanha produto com o título “Produto educacional : ensino de conjuntos por atividades.2018.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Aprendizagem 3. Métodos de ensino. I. Pereira, Ducival Carvalho (orient.). II. Sá, Pedro Franco de

CDD. 23º ed. 511.3

Cristina Maria Lima Guimarães Junqueira

Ensino de Conjuntos por Atividades

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira.
Co-orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da Avaliação: 06/12/2018

Banca Examinadora

Pereira
_______________________________. Orientadora
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Doutor em Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Universidade do Estado do Pará

Pedro Sá
_______________________________. Examinador (Interno)
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará

Marcos Antonio Ferreira de Araújo
_______________________________. Examinador (Externo)
Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
Doutor em Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Universidade Federal do Pará

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por me fortalecer e sempre me mostrar o melhor caminho.

A todos os meus familiares, em especial, a minha mãe Sofia Lima Guimarães, pelo apoio através de suas palavras confortadoras e as orações que acalmava meu coração.

Aos meus filhos Lucas e Beatriz pelo simples fato de existirem, meus filhos minha razão de viver.

Ao meu esposo, Liomar de Lima Junqueira, pelo incentivo para a realização de meu sonho, e a paciência pelos meses em que fiquei distante.

Aos meus amigos de turma, que me ajudaram de alguma forma, me incentivando ou me ajudando para sanar alguma dificuldade encontrada nas disciplinas.

Aos professores do programa de mestrado por ter partilhados as experiências.

À escola que abriu suas portas para que realizássemos nossa pesquisa.

As minhas amigas Mayara Maximino e Carmina Santis, pelas dicas e contribuições valiosas durante a minha pesquisa.

Ao meu orientador, professor doutor Ducival Carvalho Pereira, por sua dedicação e paciência na orientação deste e de todos os outros trabalhos durante o curso.

Ao meu coorientador professor Dr. Pedro Franco de Sá, uma pessoa humana e sensível, que me acompanhou de todo o processo de pesquisa.

“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas”.

(Albert Einstein)

RESUMO

JUNQUEIRA, C.M.L.G. **Ensino de Conjuntos por Atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve o objetivo de investigar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de conjuntos por meio de atividades. A metodologia adotada foi a Engenharia Didática, a qual consiste nas seguintes fases: Análises Prévias, Concepção e Análise a priori, Experimentação e Análise a posteriori e validação. Nas Análises Prévias são apresentadas considerações históricas sobre conjuntos; uma revisão de estudos sobre o processo de ensino-aprendizagem de conjuntos; resultados de uma pesquisa por questionário para investigar as experiências no processo de ensino aprendizagem de conjuntos de alunos egressos do 2º ano do Ensino Médio. Na Concepção e Análise a priori, são apresentadas atividades que constituem uma sequência didática para o ensino de conjuntos, elaboradas segundo o Ensino de Matemática por Atividades, que prevê a construção do conhecimento pelo aluno. A experimentação foi realizada em uma escola pública estadual no Município de Marabá no Estado do Pará, com vinte e nove alunos do 3º ano do Ensino Médio, na qual destacamos na íntegra como foram desenvolvidos os encontros, e para tanto, foram registrados com o auxílio de um bloco de anotações, todos os questionamentos, registos de conclusão, e atitudes dos alunos perante o ato da aplicação das atividades. Nas Análises a Posteriori e Validação relatamos as coletas e observação dos dados obtidos para validar nossa sequência didática. E finalizamos, com nossas considerações, em que respondemos o seguinte questionamento: Como o ensino de conjuntos por meio de atividades, pode favorecer a construção do conhecimento dos alunos do 3º ano do Ensino Médio?

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino por Atividades. Ensino de Conjuntos

ABSTRACT

JUNQUEIRA,C.M.L.G. The Teaching of Sets by Activities. Master dissertation : Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

This paper presents the results of a research wich had the objective of investigate the effects of the application of a didatic sequence for teaching number sets by using activities. The adopted methodology was didatic engineering, wich consists of the following phases: Previous Analysis, Conception, Prior Analysis, Experimentation, Post-analysis and Validation. In previous analysis historical considerations about number sets are presented; a review of studies about the process of teaching and learning number sets; results of researches done by a quis to investigate the experiences in the process of learning number sets by gratuates students of 2º year of High School. In Conception and Prior analysis, activities composed with didatic sequences for the teaching of number sets, developed in accordance to the Teaching math by activities, wich predicts the construction of knowledge by the student. The experimentation was done in a public school in the city of Marabá in the state of Pará, with tweny nine students of the 3º year of High School, where we highlight how the meetings were developed and, for that purpose, all the questions, completion records and students behavior before the application of said activities were writen on a notepad. In Post-analysis and Validation, we report the gatherings and observations of the data obtained to validate our didatic sequence. And ending, with our considerations, where we answer the following question: How can the teaching of number sets, by using activites, favor the construction of knowledge by students of 3º of High School?

Keywords: Mathematics education. Teaching by activities. Teaching of number sets.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo investigar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Conjuntos por meio de atividades para uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola estadual do Município de Marabá no Estado do Pará.

Nossa investigação é norteada pelo seguinte questionamento: É possível uma sequência didática oportunizar o processo educativo aos alunos sobre o tema conjunto? Por conseguinte, o objetivo geral consiste em investigar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Conjuntos por meio de atividades a fim de oportunizar o processo educativo. Os objetivos específicos são:

a) Traçar o perfil do aluno em relação ao contexto socio econômico e a abordagem dos conteúdos de matemática.
b) Construir a sequência didática para investigar o processo educativo do aluno.
c) Analisar a percepção dos alunos em relação à sequência didática e o processo educativo.
d) Contribuir para o ensino de conjuntos em sala de aula.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio dizem que os alunos devem reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações. Devem ainda expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando ideias, solucionando problemas. Por isso a importância de trabalhar Conjunto, pois sua linguagem é muito utilizada em vários ramos da matemática (BRASIL, 2006).

Para o desenvolvimento desta pesquisa, adotamos a Engenharia Didática como metodologia de investigação, pois ela permite avaliar os progressos e as dificuldades encontradas nas resoluções de questões de conjuntos. Tal metodologia se divide em quatro fases: Análises prévias; Concepção e Análise a Priori; Experimentação e Concepção e Análise a Posteriori.

No capítulo 1, caracterizamos a Engenharia Didática, ressaltamos e descrevemos como as fases foram articuladas com as técnicas de pesquisa elegidas.

No capítulo 2, apresentamos as Análises prévias, que contemplam os seguintes tópicos: considerações históricas sobre conjuntos a partir de uma pesquisa bibliográfica; fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem de conjuntos por meio de um levantamento bibliográfico e experiências de alunos no processo de ensino-aprendizagem de conjuntos por meio de uma pesquisa por questionário.

No capítulo 3, intitulado *Concepção e Análise a Priori*, descrevemos a metodologia do Ensino de Matemática por Atividades e apresentamos a sequência didática construída para o ensino de conjuntos.

No capítulo 4, realizamos uma descrição da aplicação das atividades, denominada Experimentação.

No capítulo 5, propomos a investigação dos efeitos da aplicação da sequência didática para o ensino de conjuntos, a partir dos resultados advindos da Experimentação. Para finalizar, tecemos as considerações finais.

1. ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática (Artigue, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções.

Segundo Carneiro (2005), a origem desta teoria está na preocupação com uma certa “ideologia da inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino. Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

Carneiro (2005) diz que a Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) a questão das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) a questão do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula.

Nessa linha, de acordo com Carneiro (2005), prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise a posteriori e validação da experiência.

A primeira etapa da Engenharia, segundo Carneiro (2005), a etapa das análises prévias, é estruturada com o objetivo de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. A tradição é vista como um estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema dinâmico, que tem falhas. A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório.

A fase da Análise a priori, segundo Artigue (1996), comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando, no âmbito global, mais amplo e mais geral, e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

Almouloud e Coutinho (2008) dizem que a fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação.

Durante a experimentação, segundo Carneiro (2005), coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação.

Carneiro (2005) narra que a fase de análise a posteriori se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

A análise a posteriori, segundo Carneiro (2005), de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa.

Assim, segundo Almouloud e Coutinho (2008) a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático) utilizadas, com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. A meta é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

2. ANÁLISES PRÉVIAS

2.1. ENSINO DE MATEMÁTICA

De acordo com Luiz e Col (2013), olhar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na perspectiva da Educação Matemática é relevante, pois ressalta um compromisso com a capacidade criativa do aluno.

No âmbito escolar, de acordo com Santo, Santos e Aragão (2013), o ensino da Matemática é visto como uma linguagem capaz de traduzir a realidade, estabelecer suas diferenças. A aplicação em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercício, a exemplo de: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo.

A Matemática ainda é considerada por muitos indivíduos, de acordo com Santos, Santos e Aragão (2013), como uma disciplina com resultados precisos e procedimentos infalíveis, que possui como elementos fundamentais as operações aritméticas, procedimentos algébricos, definições e teoremas geométricos. Pode-se perceber que a metodologia tradicional empregada com frequência ainda hoje no ensino da matemática, não acompanha o desenvolvimento tecnológico da sociedade, exigindo dos alunos excesso de técnicas operatórias sem justificativas destas.

Segundo Santos, Santos e Aragão (2013), cabe ao professor planejar situações problemas e escolher materiais que sirvam de apoio para o trabalho que eles realizarão nas aulas. Atividades que propiciem a sua manifestação sobre dados disponíveis e possíveis soluções para os problemas que desencadeiam suas atividades intelectuais. Nas situações voltadas para o saber matemático, ao aluno é solicitado a pensar – fazer o que observa, a formular hipóteses; não, necessariamente, a encontrar uma resposta correta.

Então, Santos, Santos e Aragão (2013) dizem que, só é possível deflagrar ideias matemáticas na cabeça de alguém, se esse alguém é colocado diante de uma situação envolvente que lhes seja provocadora, interessante, desafiante, e ao mesmo tempo, que seja capaz de estimular a aprendizagem. Não é uma situação lida em livros, não é uma situação apenas explicada oralmente, descrita ou exposta no quadro negro pelo professor.

Santos, Santos e Aragão (2013) narram que a matemática apresentada em sala de aula só será entendida quando esta traz uma significação para o aluno. A significação é função da realidade do sujeito de conhecimento. Logo, o educador, enquanto articulador da construção desse conhecimento deve conhecer a realidade com a qual vai trabalhar isso significa que inicialmente ele tem que aprender com seus alunos.

Santos, Santos e Aragão (2013) perceberam que todos os fundamentos da aprendizagem significativa e de ensino construtivista chegam a um ponto comum: é impossível ao professor ensinar ao seu aluno sem resgatar os saberes e valores que estes trazem de casa. Para que este ato se concretize é indispensável ao professor escutar seus alunos, e é indispensável ao aluno que fale ao seu professor e a seus colegas. Mas, a construção desse conhecimento pelos alunos ainda está muito longe porque a prática desenvolvida por muitos professores é tradicional, não leva seus alunos a construírem uma aprendizagem voltada para a realidade na qual seus alunos participam.

O ensino da matemática precisa ser atrativo e prazeroso, segundo Luiz e Col (2013), neste sentido, a ação docente se torna desafiadora, uma vez que deve atender as expectativas dos educandos e fundamentar o conhecimento científico. Cabe ao professor buscar alternativas didáticas capazes de atrair a atenção, despertar o interesse, apreciar o ensino, mostrando a utilidade dos conceitos matemáticos numa relação teoria x prática.

Luiz e Col (2013) narram que uma das finalidades da Matemática é seu caráter prático, ou seja, ela permite resolver problemas do cotidiano das pessoas, portanto, ajudá-las a exercer sua cidadania. No entanto a Matemática não deve reduzir-se aos problemas da vida prática. Deve também contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, da lógica, da coerência, transcendendo assim os aspectos práticos dessa área do conhecimento.

Para Luiz e Col (2013), a aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios.

Segundo Luiz e Col (2013), há uma luta incessante para evitar a repetição mecânica de conceitos e uma busca para que os estudantes incorporem o raciocínio, o emprego da lógica, a análise das situações para a resolução das mais diferentes problematizações, que envolvem cálculos de qualquer gênero ou situação, aplicações de fórmulas ou conceitos matemáticos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), a Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades, a exemplo nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizados em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes. (PCN, 1997, p.30 e 31)

Segundo Santos, Santos e Aragão (2013), infelizmente o ensino da matemática, em muitas escolas e por muitos professores, ainda está direcionado para atuar como um instrumento disciplinador e excludente. Um grande número de professores tem como único objetivo ensinar Matemática sem se preocuparem em repassar para o aluno um conhecimento significativo, mesmo por que sentem muita dificuldade em relacionar o conteúdo apresentado teoricamente com a prática educacional, visto que os programas de formação em sua grande maioria não incorporam situações práticas durante todo o processo de formação deixando uma vasta lacuna na formação do educador.

A matemática está impregnada em todo o entorno social do ser humano (SANTOS; SANTOS; ARAGÃO, 2013), e se evidencia a cada nova aprendizagem. Todas as profissões da atualidade se apropriam do conhecimento matemático para criar, manter e sustentar regras, fórmulas, condutas etc.

O pedreiro, a costureira, o cozinheiro, o engenheiro, o técnico e todos os demais profissionais dominam algum conhecimento matemático, mas nem sempre aprenderam nos bancos escolares, pois a transmissão do saber era hierarquizada e fria, embora muitos decorassem as regras, poucos conseguiam fazer uma ponte entre o que a escola ensinava e o saber promissor do mercado de trabalho.

De acordo com Santos, Santos e Aragão (2013), é importante que os professores procurem refletir de forma equilibrada os diferentes tipos de capacidades e dimensões dos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais influenciadas pela e na escola, e em especial a disciplina de matemática é que geram mudanças significativas, interferindo assim em seu convívio e desenvolvimento físico, emocional e psicológico e refletindo na afetividade, sexualidade e necessidade de liberdade.

É obvio que o gosto é despertado pela curiosidade. O professor curioso estimula seu aluno a esse exercício e o exercício uma vez aderido provoca a emoção, a inquietação que só se satisfaz depois do achado, analisado e resolvido. Nesse sentido podemos perceber que a matemática não está isolada, que ela está presente em todas as áreas do conhecimento, assim, precisamos mostrar aos nossos alunos a importância da aplicabilidade da matemática como um transformador de comportamento, e de aprendizagem eficaz.

2.2. ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE CONJUNTOS

A evolução histórica da Teoria dos Conjuntos começou quando os estudiosos sentiram a necessidade de compreender e de utilizar as noções de parte e de todo na Grécia até a sua construção axiomática no século XIX. Foram necessários quase 2500 anos para que os números reais pudessem ser construídos. Cabe ressaltar que neste intervalo temporal, outros fatores foram extremamente importantes para o desenvolvimento histórico da Teoria dos Conjuntos.

Segundo Dieudonné (1990), a ideia de reunir objetos da mesma natureza numa coleção é sem dúvida tão antiga como a linguagem, passando-se o mesmo para a noção de parte de um todo que pode ser uma coleção de objetos ou uma extensão como o plano ou o espaço. A necessidade de compreender e de utilizar essas noções aparece, no início das matemáticas gregas, na famosa "*Noção comum*" de Euclides, enunciando que "o todo é maior do que a parte"; ele invoca-a saciedade nos seus elementos, para comparar dois comprimentos, dois ângulos ou duas áreas.

Dieudonné (1990) narrou que os matemáticos de todos os tempos se referiram aos conjuntos formados pelos objetos que eles consideram, e as partes desses conjuntos, sob vários nomes: lugares geométricos de pontos do plano que satisfaçam a uma dada propriedade; “classes” de números ou de formas quadráticas em Euler e Gauss; “subgrupos” para Cauchy e Galois; “Mannigfaltigkeiten” (“multiplicidades”) de qualquer dimensão em Riemann; “set” (“conjuntos”) de símbolos em Cayley; os autores alemães utilizam também “Gesamtheit”(“totalidade”), “Inbegriff”("Epitome"), “System”(“sistema”), “Gebiet” (“território”); a palavra “Menge”(“lote”), já utilizada por Bolzano, só se tornará predominante com Cantor.

Até cerca de 1870, segundo Dieudonné (1990), entendia-se por conjuntos uma coleção de objetos matemáticos, tais como números, figuras geométricas, funções, etc.; mas a partir dos últimos anos do século XIX, os conjuntos e seus elementos eram considerados como objetos primitivos de uma teoria axiomática.

Dieudonné (1990) contou que, Cantor e Dedekind, sentem a necessidade de definir o que é um conjunto. Cantor defini conjunto como “Um agrupamento num todo de objetos bem distintos da nossa intuição ou do nosso pensamento”. Essa definição mostra que a palavra conjunto já não designa um objeto matemático.

Segundo Carvalho (2012), Zenão de Eléia (495 – 435 a.C.) ficou muito conhecido pelo paradoxo do movimento, baseado na bissecção (Aquiles e a tartaruga). Desse Paradoxo o filosofo inferiu que o movimento é impossível quando se pressupõe que o espaço e tempo podem ser subdivididos muitas vezes infinitamente.

Para Aczel (2003), outro paradoxo conhecido de Zenão é uma pessoa não pode sair do cômodo em que está nesse momento. Primeiro, percorre-se metade da distância até a porta, depois metade da distância remanescente, metade do que resta do lugar onde se está até a porta, e assim por diante. Com esse paradoxo, Zenão argumentou que, a divisibilidade infinita do espaço e do tempo, o movimento não poderá começar.

Esses paradoxos, segundo Aczel (2003), são os exemplos mais primitivos da aplicação do conceito de infinito na história. O surpreendente resultado de que um número infinito de etapas pode ter soma finita é chamado “convergência”. E os paradoxos parecem antecipar certos dilemas da teoria dos conjuntos.

Em 1843, segundo Eves (2011), Bolzano (1781 – 1848) construiu uma função contínua num intervalo que, surpreendentemente, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo. Essa função não se tornou conhecida e credita-se a Weierstrass, cerca de 40 anos mais tarde, o primeiro exemplo dessa espécie. Há um teorema famoso, conhecido pelo nome desses dois matemáticos, o teorema de Bolzano-Weierstrass, cujo enunciado afirma que todo conjunto de pontos, infinito e limitado, tem um ponto de acumulação.

2.2.1. A Teoria Ingênua dos Conjuntos

Segundo Halmos (2001), a teoria dos conjuntos seria melhor descrita por teoria axiomática dos conjuntos sob um ponto de vista ingênuo. É axiomático no sentido que alguns axiomas são estabelecidos e usados como suporte para todas as provas subsequentes. É ingênua no que diz respeito à linguagem e notação usual da matemática informal.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), segundo Pena e Miranda (2006), nasceu no dia 3 de março de 1845 em Saint Petersburg, Rússia, e morreu no dia 6 de janeiro de 1918 em Halle, Alemanha, em uma família cristã de origem judaica, terminou o doutorado em 1867, com uma tese publicada em 1869 e dedicada à teoria dos números, área que certamente contribui para estimular a sua teoria dos conjuntos.

Pena e Miranda (2006) dizem que a teoria dos conjuntos nasceu na tentativa da resposta a uma questão da análise matemática: “Poderá qualquer função ser representada por uma função trigonométrica? Será única essa representação?”. Heine (1821-1881) já conseguira em 1870 resolver esta questão, a resposta é positiva, desde que verificadas certas condições: continuidade da função e convergência uniforme da série.

Contudo, segundo Pena e Miranda (2006), o propósito de Cantor era eliminar tais restrições e estabelecer o teorema da existência e unicidade em termos mais gerais. Com vista a apresentar uma conclusão final e respectiva demonstração, de modo o mais simples e rigoroso possível, sentiu necessidade de aprofundar o estudo dos números reais. Assim, Cantor passou da teoria dos números ao estudo das séries trigonométricas e, em 1872, publicou os resultados dos seus novos trabalhos, onde aparecem as primeiras ideias da novel teoria dos conjuntos.

De acordo com Pena e Miranda (2006), Cantor, no desenvolvimento do seu estudo, confrontou-se com o paradoxo que havia inquietado Galileu: “Os inteiros e os seus quadrados”. Ele próprio havia notado que entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais se podia estabelecer uma correspondência biunívoca e, consequentemente, ambos os conjuntos teriam de ter o mesmo número de elementos. Estes resultados são puramente paradoxais, pois espera-se que os conjuntos infinitos se comportem de uma maneira análoga aos conjuntos finitos. Contudo, isso não acontece, pois, todo conjunto infinito pode estar em correspondência biunívoca com uma das suas partes próprias.

Para Dieudonné (1990 p. 148), Dedekind definiu os conjuntos infinitos e os inteiros na sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen* (O que são e quais são os números), publicada em 1888, mas redigida já em 1878, na qual introduziu uma linguagem muito rigorosa. A necessidade de adotar uma linguagem semelhante e uniforme em todas as partes da matemática impôs-se aos poucos no início do século XX. Com algumas adições posteriores a Dedekind, tornou-se aquilo que se podia chamar a teoria dos conjuntos, universalmente utilizada hoje, e da qual os matemáticos já não poderiam prescindir.

Dieudonné(1990) disse, que Dedekind não sentiu necessidade de apresentar esta linguagem de uma forma axiomática; visivelmente, para ele como para os seus contemporâneos, as definições e resultados elementares que ele enumerou exprimem “verdades de bom senso”, foi ainda deste modo que os matemáticos atuais utilizaram esta linguagem, e o que é importante para eles é que ela permitia exprimir as suas ideias sem ambiguidade. Dieudonné(1990) apontava que, Dedekind não dava uma verdadeira definição de conjuntos nem de um elemento deste conjunto; a relação fundamental era a pertença de um elemento x a um conjunto E. A primeira noção que definiu foi a de parte (ou subconjunto). Dedekind passou rapidamente pelas operações de reunião e de intersecção, conhecidas desde há muito nos seus casos particulares e que tinha sido codificadas por Boole em conexão com a lógica formal: sublinhou apenas que estas operações podia ser aplicada a uma família qualquer de partes de um conjunto.

Segundo Dieudonné(1990), aquilo que era novo e foi essencial para toda a matemática, a concepção completamente geral de função, ou, como preferimos dizer hoje, de aplicação. Em vez de ficar, como nas concepções anteriores, pelas funções reais (ou complexas) de uma ou várias variáveis reais, Dedekind foi de uma só vez até ao fim da generalização: sendo dados dois conjuntos quaisquer E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder a qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor em x que foi notado de modo geral por $f(x)$.

Dieudonné(1990) narrou, que falta ainda à exposição de Dedekind uma noção de uso constante, introduzida apenas por Cantor um pouco mais tarde, a de produto (ou «produto cartesiano») E x F de dois conjuntos quaisquer: é o conjunto de pares (x, y) para todos os elementos x de E e todos os elementos y de F, generalização natural e indispensável das coordenadas cartesianas. Pode ligar-se a noção de aplicação $f: E \rightarrow F$ à de parte do produto E x F: o grafo Γ_f de f é a parte de E x F formada pelos pares $(x,\ f(x))$ para todos os elementos x de E, generalização evidente do gráfico clássico de uma função real de uma variável real.

Para Pena e Miranda (2006), foi exatamente o estudo da cardinalidade dos conjuntos que iniciou em 1873 a correspondência entre Cantor e Dedekind. Estes documentos foram considerados como dos mais importantes na história da Matemática do século XIX.

Pena e Miranda (2006) narraram que foi nos finais de 1873, que Cantor apresentou a Dedekind uma questão que lhe surgiu no decurso da construção dos números irracionais que então fizera:

"Será possível fazer corresponder biunívocamente a coleção de todos os números naturais com a dos números reais?"

Pena e Miranda (2006) disseram que Cantor imaginou a resposta como negativa, mas não conseguiu logo obter a justificação do que tinha em mente, esperando que Dedekind encontrasse uma prova simples ao problema formulado. Contudo, precisamente no dia 12 de Dezembro de 1873, Cantor envia uma carta a Dedekind, onde referia ter encontrado a resposta à questão formulada:

"O conjunto de todos os números reais não pode pôr-se em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais". Por outras palavras, o conjunto dos números reais não é numerável.

Tendo Cantor descoberto, segundo Pena e Miranda (2006), em 1883, que o conjunto dos números algébricos é um conjunto numerável e sendo o conjunto dos números reais não numerável, fica claro que existem neste conjunto outros elementos constituindo uma infinidade igualmente não numerável. Estes elementos não são mais que os números irracionais transcendentes.

Pena e Miranda (2006) disseram que Cantor prova ainda a existência de um número infinito de números transcendentes em qualquer intervalo de números reais. Neste contexto, Cantor publica num artigo:

“Este teorema mostra que alguns conjuntos de números reais (por exemplo, a totalidade dos números maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 1) não se podem pôr em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais. Deste modo encontramos a diferença clara entre um chamado contínuo e um conjunto do tipo ‘a totalidade dos números algébricos’ ”.

Pode assim afirmar:

“A potência do continuo é superior à do numerável.”

Pena e Miranda(2006) narraram que após o conhecimento da não numerabilidade dos números reais, Cantor tentou passar ao segundo degrau na escala dos transfinitos, procurando outros cardinais infinitos iguais ou maiores do que a potência dos números naturais. E novamente propõe, por carta a Dedekind, em 1874, o seguinte problema: “Será possível estabelecer uma bijeção entre os pontos de uma reta e os de um plano, ou entre os pontos de um segmento unitário e os de um quadrado construído com esse segmento por lado?”.

Tal pergunta, de resposta aparentemente negativa, aparecia ridícula aos olhos dos matemáticos a quem Cantor a formulou. Durante três anos Cantor trabalhou arduamente para conseguir a resposta. Finalmente, em 1877, escreveu a Dedekind participando-lhe que, contra todas as opiniões apresentadas por outros matemáticos, não era impossível encontrar a tão “absurda” correspondência. A esta descoberta está associada uma das frases mais conhecidas de Cantor: “Vejo-a, mas não acredito nela”.

Pena e Miranda(2006) disseram que várias demonstrações daquela afirmação foram apresentadas por diversos matemáticos, mas a primeira que é considerada completamente satisfatória deve-se ao matemático holandês Luiken Jan Brouwer(1881-1966) e já publicada em 1911, na obra *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.* (A prova da invariância da dimensionalidade).

Para Pena e Miranda (2006) esta conclusão foi surpreendente, pois contradizia completamente o que os outros matemáticos haviam acreditado durante largo tempo. Este resultado é dos mais importantes em toda a correspondência mantida entre Cantor e Dedekind, e à custa dele surgiram novos elementos para a construção da teoria dos conjuntos.

Pena e Miranda (2006) disseram que Dedekind nada escreveu sobre temas cantorianos, e se bem que nunca tivesse contribuído diretamente para a teoria dos conjuntos transfinitos, o seu trabalho no nascimento e crescimento da mesma foi fundamental. Veja-se o seu estudo com Friedrich Gottlob Frege (1848-1925) que, definindo os números naturais em termos de conjuntos, permitiram uma forte contribuição para a teoria dos conjuntos.

Com o objetivo de aritmetização da análise ambicionada por matemáticos do século XIX, segundo Pena e Miranda (2006), Cantor empenhou-se fortemente nesta tarefa. Definiu os números reais a partir dos números racionais, estes a partir dos números inteiros e finalmente estes por meio dos números naturais.

Pena e Miranda (2006) narraram que a teoria dos conjuntos proposta por Cantor, nomeadamente na concepção do infinito foi alvo de diversas e severas críticas.

Pena e Miranda (2006) contaram que uma outra questão que inquietou Cantor foi a existência ou não de cardinais arbitrariamente grandes. A sua preocupação residia, sem dúvida, no seguinte: partindo do conhecimento de que se podem comparar cardinais de conjuntos finitos, poder-se-á encontrar conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades, isto é, sabendo que a potência do continuo é superior à potência do numerável, poder-se-á construir conjuntos com potencias cada vez mais elevadas? Existirá uma escala crescente de potências infinitas? Em 1882, Cantor introduziu os ordinais transfinitos, que representam o tipo de ordem de conjuntos bem ordenados, permitindo, em 1895, completar a teoria das cardinalidades infinitas. Todos os resultados aí apresentados assentam no teorema que levou o nome do seu criador.

Para todo conjunto E, o cardinal das partes de E é superior ao cardinal de E é igual a 2^{cardE}.

Segundo Pena e Miranda (2006), o processo de construção em causa consistiu em, partindo do conjunto dos números reais, de potência mínima, organizar uma escala de potencias crescentes, utilizando sucessivamente as partes de um conjunto. Mas, uma vez mais, Cantor sentiu-se particularmente inquietado com a resolução de uma questão fundamental:

Será que existe um cardinal maior que o cardinal do conjunto dos números naturais, mas menor do que o cardinal do conjunto das partes do mesmo?

Pena e Miranda (2006) narraram que Cantor não conseguiu encontra-lo e expressou essa conjectura na tão conhecida Hipótese do Contínuo.

De acordo com Bicudo (2003), Hilbert depois de explanar o conceito de número cardinal de um conjunto, como introduzido por Cantor, afiança que "as investigações de Cantor de tais agregados de pontos sugere um teorema muito plausível, que, no entanto, apesar dos ingentes esforços, ninguém foi bem sucedido em prová-lo. Eis o teorema:

"Todo sistema de infinitos números reais, isto é, todo agregado de números (ou pontos) é ou equivalente ao agregado dos números naturais, 1, 2, 3, ..., ou ao agregado de todos os números reais e, portanto, ao contínuo, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito à equivalência, há, portanto, somente dois agregados de números, o agregado enumerável e o contínuo.

Desse teorema seguiria, imediatamente, que o contínuo tem o número cardinal seguinte àquele do agregado enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o agregado enumerável e o continuo".

Pena e Miranda (2006) disseram que a última publicação de Cantor, intitulada *Beitrage Zur Begriindung der transfiniten Mengenlehre* (Contribuições para a teoria dos conjuntos transfinito), foi editada em duas partes, uma em 1895 e a segunda em 1897. O seu texto não apresentava resultados inovadores, apresentando sim, de um modo mais ou menos detalhado, demonstrações e conclusões anteriormente concebidas. É aí que aparece não só a notação para os cardinais transfinitos como também a definição já considerada como clássica (embora ultrapassada) de conjunto. O interesse despertado por esta obra foi tal que, quase simultaneamente à sua publicação original, apareceu traduzida em italiano e em francês.

Pena e Miranda (2006) narraram que esta obra foi violentamente criticada por Gottlob Frege, que entendia que os conceitos eram apresentados de forma vaga e pouco rigorosa. Se bem que os resultados da teoria dos conjuntos transfinitos estivessem basicamente corretos, os seus fundamentos exigiriam uma análise bem cuidada. Apesar de todas as críticas que recebeu, Cantor sempre defendeu vigorosamente a sua teoria, pensando que seria reconhecido o valor da mesma e a sua utilidade na construção e fundamentação da matemática. Cantor estava certo da importância que a sua teoria iria desempenhar nos fundamentos de diferentes ramos da matemática, nomeadamente na aritmética.

2.2.2. A Teoria Axiomática de Conjuntos

Pena e Miranda(2006) narraram que para que se tenha um sistema axiomático, deve-se escolher os termos que vão ser utilizados, separando aqueles que serão considerados primitivos (não definidos) dos restantes, as definições. Posteriormente, pensar na totalidade das leis que devem ser expressas a partir dos termos primitivos, selecionando algumas para que, figurando como pressupostos não demonstrados, os axiomas, sejam utilizados na prova de teoremas.

Pena e Miranda(2006) disseram, que inúmeros matemáticos se dedicaram à fundamentação da matemática, mas nenhum como Frege (1848-1925). Apresentou em todos os seus trabalhos uma exigência de rigor nunca antes atingida, sendo sua obra tida como a maior realização alguma vez alcançada na história da lógica. É exatamente neste ramo que concebe o primeiro sistema axiomático, bem como a apresentação de uma nova linguagem simbólica.

Para Pena e Miranda(2006), em 1879, na obra *Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (uma fórmula de linguagem modelada aritmética do pensamento puro), Frege apresenta regras para uma formalização rigorosa das demonstrações dos teoremas. Frege, tal como Dedekind, ainda que de modos diferentes, tentou representar toda aritmética utilizando exclusivamente noções da lógica. Frege sendo, sem dúvida, um lógico puro e convicto, tentou provar que estes dois ramos eram idênticos, tendo trabalhado afincadamente com o intuito de apresentar uma demonstração rigorosa que mostrasse tal identidade.

Pena e Miranda(2006) disseram que por volta de 1900, Russel (1872-1970), publicara um excepcional estudo intitulado *The principles of Mathematics* (os princípios da matemática), no qual além de demonstrar a identidade entre a matemática e a lógica formal defende igualmente o princípio de que os conceitos matemáticos podem ser deduzidos através de um número muito reduzido de simples axiomas da lógica. E Whitehead (1861-1947) escreveu a obra *Treatise on Universal Algebra* (Tratado da Álgebra Universal), que estabelece uma ligação entre a lógica e a álgebra.

Pena e Miranda (2006) narraram que Russell estudando a obra de Frege, constatou que a teoria dos conjuntos era inconsistente, mas com sua atitude otimista acreditava que a teoria dos conjuntos poderia voltar a ser consistente, para assim continuar adequada aos propósitos dos matemáticos. Tanto Russel como Whitehead tentaram restringir os axiomas relativos aos conjuntos de tal modo que os paradoxos ficassem eliminados.

De acordo com Pena e Miranda (2006), uma forma de evitar os paradoxos foi proposta em 1908 por Zermelo (1871-1953), e com base nesta outra foi apresentada por Fraenkel e Skolem em 1922. Zermelo dedicou-se intensamente à teoria dos conjuntos, trabalhando na resolução do problema da hipótese do contínuo. Em 1904, apresentou a demonstração do célebre Teorema de Zermelo.

Segundo Pena e Miranda (2006), Zermelo e Fraenkel não impuseram quaisquer restrições aos axiomas que deveriam ser considerados, como o haviam feito Russell e Whitehead, nem abandonaram as leis tradicionais da lógica. Rejeitaram, sim, o principio segundo o qual toda condição corresponde um conjunto cujos elementos seriam os objetos que satisfazem a condição. Tal rejeição possibilitou a ambos eliminarem os paradoxos de Cantor e de Russell.

Para Pena e Miranda (2006), a ideia de Zermelo era considerar uma coleção de axiomas que assegurassem a impossibilidade de existência de conjuntos que tivessem um comportamento problemático e a possibilidade de demonstração do maior número possível de teoremas relativos aos conjuntos. Apresentou em 1905 um conjunto de sete axiomas para uma teoria geral dos conjuntos, que publicou em 1908.

Pena e Miranda (2006) disseram que Neumann (1903-1937) é considerado um dos matemáticos mais criativos e versáteis do século XX. Apresentou na sua tese de doutoramento um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos alternativos à axiomática ZF. Em vez de restringir a existência de conjuntos, introduziu a ideia de que nem todas as entidades podem ser admitidas como elementos de conjuntos. Distribuiu as entidades em duas classes: elementos e não elementos. Somente as primeiras poderiam pertencer a conjuntos. Consequentemente, Neumann evita os paradoxos, cerceando as hipóteses relativas à possibilidade de algo ser considerado elemento de um conjunto.

Pena e Miranda (2006) narraram que a descoberta dos paradoxos da teoria dos conjuntos evidenciou que mesmo os princípios aparentemente simples e obviamente corretos podem esconder contradições. Este fato obrigou que matemáticos voltassem a dar atenção ao problema da consistência.

Dentre eles, segundo Pena e Miranda (2006), Hilbert (1862-1943) interessou-se por tal tema, e seu objetivo era formalizar a matemática, isto é, traduzir todos os seus enunciados numa série de símbolos, imaginando que graças a tal procedimento todos os problemas matemáticos seriam resolvidos.

De acordo com Pena e Miranda (2006), Hilbert propôs um novo método para investigar questões como a consistência, método este conhecido por Metamatemática. Tal proposta requer para o exame dos sistemas dedutivos a interpretação da matemática de um ponto de vista puramente abstrato.

Para Pena e Miranda (2006), este desejo de Hilbert era completamente razoável. Na vida corrente e em todos os atos em que a matemática intervém, basta reconhecer os símbolos e operar com eles. Está-se, pois a lidar com entidades matemáticas totalmente separadas da realidade física das mesmas.

Hilbert foi um admirador das ideias de Cantor, segundo Aczel (2003), descrevendo a aritmética transfinita como “o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível”. Hilbert, na conferência que deu a 4 de Junho de 1925, por ocasião do congresso organizado pela Sociedade Matemática de Westfália, em Münster, afirmou que “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

Segundo Pena e Miranda (2006), Godel demonstra que um sistema aritmético coerente e não contraditório contém enunciados acerca dos quais nunca se pode dizer se são verdadeiros ou falsos. Assim sendo, não se poderá construir um sistema completo – restarão sempre proposições por demonstrar. Esta é a razão por que o resultado é conhecido por teorema da incompletude.

Pena e Miranda (2006) disseram que em 1964, Paul Cohen completaria o trabalho de Godel, ficando provado que a hipótese do continuo não podia ser demonstrada a partir dos axiomas ZF e de Neumann. Assim, ficava estabelecido que o problema do continuo não pode ser resolvido com base nos axiomas até agora formulados. Isto é, a hipótese do continuo é independente destes dois sistemas axiomáticos.

Para Pena e Miranda (2006), com o axioma da separação enunciado em ZF é possível obter subconjuntos de um dado conjunto: “Para toda a classe de conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, existe pelo menos um conjunto que inclui um elemento exatamente de cada membro dessa classe."

Pena e Miranda (2006) narraram que foi apresentado, em 1904, por Zermelo e é o axioma da matemática mais discutido depois do quinto postulado de Euclides. A sua utilização é origem de numerosas controvérsias, mas as discussões por ele provocadas contribuíram largamente para o desenvolvimento da Matemática, nomeadamente na teoria dos conjuntos.

Então, segundo Dieudonné (1990), Zermelo pensou que para sair de controvérsias vãs o melhor meio era de voltar a dar à noção de conjuntos o seu caráter de objetos matemáticos (no sentido de platão) definindo-o através de um sistema de axiomas como Pasch e Hilbert tinham feito para os objetos geométricos. Zermelo retoma então as operações da linguagem de conjuntos "ingênua" de Cantor e Dedekind e enuncia sob forma de axiomas as propriedades que eles utilizavam. Antes do mais o axioma de extensão já enunciado por Boole e Dedekind; o fato de a relação « $X \subset Y$ e $Y \subset X$» implicar $X = Y$; em seguida uma série de axiomas afirmando a existência do conjunto vazio Ø, do conjunto do par ordenado $\{x, y\}$ cujos elementos são dois objetos quaisquer x e y, do conjunto das partes $\rho(x)$ de um conjunto X. Acrescenta-lhe o axioma da escolha, e o axioma do infinito, afirmando a existência de um conjunto infinito.

De acordo com Dieudonné (1990), faltava enunciar um último axioma, o mais importante, já que é aquele que introduz os conjuntos nos raciocínios matemáticos; este afirma que uma propriedade qualquer P define um conjunto cujos elementos são exatamente todos os objetos que possuam a propriedade P. Ele era usado implicitamente desde a antiguidade e tinha sido explicitado por Frege sob o nome de axioma da compreensão. Mas antes de poder ser incorporado numa teoria axiomática, iria levantar sérias dificuldades em virtude da imprecisão da noção de "propriedade"; elas aparecem sob a forma daquilo a que chamaram os "paradoxos" da teoria dos conjuntos.

Dieudonné (1990) disse que a solução proposta por Fraenkel e Skolem em 1922 consiste em eliminar a linguagem corrente no enunciado das relações matemáticas, substituindo-a por uma linguagem artificial, formada por combinações de sinais tomados numa lista fixa e submetidos a uma sintaxe inflexível, evitando todas as ambiguidades das línguas usuais. Tais linguagens tinham sido descritas no século XIX pelos fundadores da lógica matemática, e são conhecidas pelo nome de linguagens formais. Nunca ninguém formulou nesta linguagem uma propriedade que desse lugar a um “paradoxo”.

No entanto, para Dieudonné (1990), os raciocínios matemáticos expressos, nesta linguagem, seriam de um tamanho proibitivo; foi necessário introduzir numerosas abreviações para chegar à maneira como estão descritas as obras matemáticas atuais.

Os axiomas que compõem a teoria de Zermelo-Fraenkel segundo Hein e Dadam(2009) são:

1. *Axioma da Extensão*

Dados dois conjuntos x e y, se para todo elemento z é satisfeita a condição de que z pertente a x se e somente se z pertence (também) a y, então os conjuntos x e y são iguais.

$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

2. *Axioma do Conjunto Vazio*

Existe um conjunto X para o qual não há elementos pertencentes. Tal conjunto é denominado conjunto vazio e é designado por $\emptyset$.

$\exists X\, \forall y\, (\sim y \in X)$

3. *Axioma do Par (não-ordenado)*

Sejam x, y e z conjuntos quaisquer (que podem ser iguais). Então existe um conjunto w tal que x $\in$ w e y $\in$ w .

$\forall x, y\, \exists z\, \forall w(w \in z \ \leftrightarrow w = x\ \vee\ w = y)$

4. *Axioma do Conjunto União*

Dados dois conjuntos x e y, existe um conjunto z tal que t pertence a z se e somente se t pertence a x ou t pertence a y.

$\forall x\, \exists y\, \forall z\big(\exists t(t \in z \leftrightarrow t \in x\ \vee\ t \epsilon\ y)\big)$

5. *Axioma do Infinito*

Existe um conjunto X tal que vazio pertence a X e, para todo conjunto Y, se Y pertence a X então a união de Y com {Y} também pertence a X.

$\exists X\, \big(\emptyset \in X \wedge \forall Y(Y \in X \rightarrow Y \cup \{Y\} \epsilon X)\big)$

6. *Axioma da Substituição*

Fixando os parâmetros $t_1 \dots t_k$, a fórmula de n-ésima ordem $A_n(x, y;\ t_i)$ define y como uma função de x, ou seja, y = φ(x), então para cada u a amplitude de φ em u é um conjunto

$$\forall t_1 \dots t_k \left(\forall x\ \exists!\, y\ A_n(x,y;\ t_1 \dots t_k) \rightarrow \forall u\ \exists v\ B(u,v)\right),$$

$$B(u,v) \leftrightarrow\ \forall r\ \left(r \in v\ \leftrightarrow\ \exists s\ \left(s \in u\ \wedge\ A_n(x,y;\ t_1 \dots t_k)\right)\right)$$

7. *Axioma do Conjunto Potência*

Para todo conjunto x existe um conjunto y que tem como elementos todos os subconjuntos de x.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

8. *Axioma da Escolha*

Para qualquer conjunto x existe uma função f tal que para qualquer α ⊂ x não vazio f (α) ∈ α.

$$\forall \alpha \in x, \alpha \rightarrow A_\alpha \neq \emptyset \Longrightarrow \forall \alpha \in x, f(\alpha) \in A_\alpha$$

9. *Axioma da Regularidade*

Se um conjunto A não é vazio, então existe um x tal que x pertence a A e para todo y, se y pertence a x então y não pertence a A.

$A \neq \emptyset \rightarrow (\exists\ x)[x \in A \wedge (\forall\ y)\ (y \in x \rightarrow y \notin A)]$

Os nove axiomas listados, segundo Hein e Dadam(2009), correspondem a generalização da teoria clássica de conjuntos.

2.2.3.Teoria de Conjuntos Não Cantoriana

Hein e Dadam(2009) disseram que a constatação de que a natureza dos fenômenos físicos não é determinística, aliada à busca pela compreensão do pensamento humano, mostrou que a matemática clássica, pela sua rigidez, se mostrava inadequada como instrumento para a representação das situações que surgiam.

Na década de 60, o professor Lotfi Zadeh propôs uma ideia inusitada ao criar o conceito de conjunto difuso, o qual implica que associado a cada elemento de um conjunto há um valor indicativo do grau com que esse elemento pertence àquele conjunto, isto é, existe uma possibilidade do elemento pertencer ao conjunto ao invés da certeza da pertinência presente na teoria clássica de conjuntos.

Para Thé (2001), a ideia inicial de desenvolver um sistema inteligente utilizando-se a Lógica Difusa, foi introduzida por Lotfi A. Zadeh, professor da Universidade da Califórnia- Berkely em 1965. Têm sido hoje uma das mais sucedidas técnicas para o desenvolvimento de sistemas de controle sofisticado. A Lógica Difusa direciona tal aplicação perfeitamente como a semelhante decisão humana fazendo com habilidade a generalização de soluções precisas através de informações certas ou mesmo aproximadas.

O professor ToshiroTerano da University de Hosei, inspirado pelo trabalho de Zadeh's, introduziu a ideia na comunidade de pesquisas japonesas mais ou menos em 1972. Talvez porque a cultura japonesa veja a natureza humana em sentido vago, foram imediatamente entusiasmados com a ideia. Começaram então, as primeiras aplicações em grande escala no processo de eletromecânica, como em sistemas de metrô e elevadores.

A Lógica Difusa no Japão, segundo Thé (2001), está sendo um exemplo de aplicações. Hoje os japoneses usam-na para fabricação de câmeras e no processo industrial de controle. Essa técnica é mais fácil de desenhar, e também, mais barata de se produzir. No Japão há uma produção das mais altas tecnologias do mundo, eles estão utilizando a Lógica Difusa na maioria de seus produtos onde uma das maiores é a automação de trem em Sendai.

Thé (2001) narrou que, em 1974, Abe Mamdani, desenvolveu um laboratório Fuzzy de controle de locomoltiva a vapor. A primeira aplicação comercial fuzzy foi em 1980, de um forno de cimento para a produção de papel.

Em 1989, segundo Thé(2001), o instituto chamado LIFE (Laboratório Internacional de Engenharia Fuzzy), começou a operar no início de 1990 sobre a liderança do Professor Toshiro Terano da Universidade de Hosei. Tiveram três focos principais para esse programa: suporte de decisão, que incluía ambos os trabalhos em mediação humana e sistemas de total controle automático; inteligência de robôs, que incluíram trabalhos em falar e entendimentos de imagens assim como planejamento de robôs e computação fuzzy, que direcionou a produção de hardware e software de computadores necessários para total implementação dos sistemas.

Estima-se que há pelo menos 200 sistemas de controle fuzzy usados totalmente nesta área e há mais de 2000 engenheiros na sociedade japonesa de fuzzy control. As aplicações hoje são encontradas em uma variedade de aplicações de controle incluindo micro-ondas, robôs, automatização em geral, aviões, elevadores (controle de passageiros), sinais de trânsito (trafic lights), metrôs, processos de controle químico, fabricações de máquinas de lavar, vídeos câmeras e automóveis, sistemas de controle de mini submarinos, controle de mudanças de engrenagem automática, sistemas de suspensão e freio de carro, aplicações domésticas e armas.

Para Hein e Dadam (2009), o conjunto difuso A, contido nesse universo, é a coleção de elementos x ∈ X juntamente com uma função $\mu_A\colon\ X \to L$, que associa um valor $\mu_A(x)$ para cada membro do universo. A função μ_A é chamada função de pertinência e o conjunto L no qual X é mapeado, o conjunto de valoração. A imagem de um elemento x através da função μ_A é denominada grau de pertinência $\mu_A(x)$ e indica a possibilidade de x pertencer a A. Em símbolos,

$$A = \{(x, \mu_A(x))/x \in X\}, \quad \mu_A : X \to L$$

Originalmente, segundo Hein e Dadam (2009), os conjuntos difusos foram definidos para L = [0, 1]. O motivo de tal escolha é que o intervalo [0, 1] nos fornece uma visão mais intuitiva da elasticidade na relação de pertinência, pois apresenta um grau mínimo, zero, representando a não pertinência, um grau máximo, um, significando a absoluta certeza da pertinência e uma gradação contínua entre os dois extremos (lembramos que o intervalo [0, 1] é não-enumerável e, portanto, possui a potência do contínuo.

Hein e Dadam (2009) narraram que a adoção do intervalo [0, 1] como conjunto de valoração se justifica por ser apropriado às aplicações em sistemas de decisão humana; no entanto, é necessário lembrar que a natureza nem sempre é contínua, certas grandezas possuem uma variação quântica e, portanto, a utilização de um conjunto de valoração enumerável seria mais adequada nesses casos. Assim, em vista da generalidade, não se dará preferência a conjuntos de valoração específicos. A única restrição ao conjunto L é que ele seja parcialmente ordenado a fim de que a valoração tenha sentido.

Seja $A = \{(x, \mu_A(x))/x \in X\}, \quad \mu_A : X \to L\ e\ \alpha \in L$. O nível - α do conjunto difuso A é designado por

$$A_\alpha = \{x \in X/\mu_A(x) \geq \alpha\},$$

E representa o conjunto (não-difuso) de elementos que pertencem a A com grau ou superior a α. O nível - α estrito é designado por

$$A'_\alpha = \{x \in X/\mu_A(x) > \alpha\}.$$

Seja 0 o ínfimo de L, designativo da não-pertinência, e A um conjunto difuso do universo X. O suporte de A é definido como

$S(A) = \{x \in X/\mu_A(x) > 0\}$

Ou, equivalentemente,

$S(A) = A'_0$.

Pelo que foi exposto por Hein e Dadam (2009), pode-se perceber que o conjunto difuso consiste em uma extensão do conceito de conjunto da teoria clássica. Mais ainda, um conjunto não-difuso pode ser representado como um conjunto difuso A cuja função de pertinência efetua um mapeamento do universo X no conjunto de valoração L = {0,1}, ou seja,

$A = \{(x, \mu_A(x))/x \in X\}$,

$\mu_A(x) = 0$, se $x \notin A$;

$\mu_A(x) = 1$, se $x \in A$.

Nesse caso, a função $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$ é denominada função característica do conjunto A.

Pela notação acima, o conjunto universo *X* pode então ser definido como

$X = \{x/\mu_x(x) = 1\}$

E o conjunto vazio como

$\emptyset = \{x/\mu_\emptyset(x) = 0\}$

De acordo com Hein e Dadam (2009), para dois conjuntos difusos A e B apresentarem a mesma extensão é necessário que ambos possuam os mesmos elementos com o mesmo grau de confiança.

2.2.4. A Teoria de Chapin

Hein e Dadam (2009) narraram que Chapin observou que a teoria dos conjuntos difusos consistia em uma extensão do caso clássico; da mesma forma, ele desenvolveu a extensão dos axiomas de Zermelo-Fraenkel, para obter um sistema formal compatível com os conjuntos difusos.

A ideia principal utilizada por Chapin, segundo Hein e Dadam (2009), com o intuito de generalizar o sistema para englobar os conjuntos difusos, é considerar que a relação de pertinência é uma relação ternária do tipo $\in (x, y, z)$, a qual significa: x pertence a y com grau de no máximo z, ao invés da pertinência binária do caso clássico. Além disso, o autor considera que os símbolos x, y, z representam conjuntos, de modo que não limita o conjunto de valoração a um reticulado distributivo, possibilitando maior generalidade para a teoria.

Outra característica da relação ternaria $\in (x, y, z)$ criada por Chapin é que ela não é funcional na medida em que o grau de pertinência de x em y, expresso pela relação, não é exatamente z, mas qualquer grau inferior ou igual a z, embora a relação de ordem entre os conjuntos que servem de valoração não seja necessariamente linear.

O sistema formal desenvolvido por Chapin, segundo Hein e Dadam (2009), será exposto e comentado a seguir.

1. *Axioma da Extensão*

$$\forall x\, \forall y \big[\forall z\, \forall w \big(\in (z, x, w) \leftrightarrow \epsilon(z, y, w)\big) \rightarrow x = y\big]$$

Os dois conjuntos x e y são iguais se cada elemento z, pertencente a x com grau w, também pertencer a y com mesmo grau.

2. *Axioma Relacional*

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall w[(\in (z, x, w)\ \wedge w\ \subseteq z) \rightarrow \in (x, y, w)]$$

Se x é um elemento de y com grau de no máximo z e w é o menor do que z, então x também é elemento de y com grau de no máximo w.

3. *Axioma do Conjunto Vazio*

$$\exists x \big[\forall y\, \forall z (\in (y, x, z)\ \rightarrow x = z) \wedge \forall \mathrm{v}\, \forall w \big(\in (\mathrm{v}, w, x)\big)\big]$$

O axioma garante a existência de um conjunto x que serve de grau mínimo para o qual qualquer conjunto pode pertencer a outro conjunto. Se y pertence ao conjunto mínimo x com grau de no máximo z, então z é o grau mínimo e, além disso, todo conjunto v pode pertencer a outro conjunto arbitrário w com um grau de pertinência de no máximo x. O conjunto mínimo x se identifica com o conjunto vazio e é designado por $\emptyset$.

4. *Axioma da não-trivialidade*

$$\exists x[D(x) \wedge \sim (x = \emptyset)], \qquad D(x) \leftrightarrow\ \exists y\, \exists z \big(\in (y, z, x)\big)$$

A expressão D(x), que se lê x é um grau, significa que x é o terceiro argumento da relação de pertinência. O axioma da não- trivialidade revela que $\emptyset$ não se constitui na única opção para grau de pertinência e, obviamente, não deriva de nenhum axioma d teoria clássica.

5. *Axioma do par (forma forte)*

$$\forall x\, \forall y\, \exists z \Big[\forall \mathrm{v}\, \forall w\big[\big(\in (w,z,\mathrm{v}) \wedge \sim(\mathrm{v}=\emptyset)\big) \rightarrow\ (w = x\ \vee w = y)\big] \wedge \forall \mathrm{v}'\big[D(\mathrm{v}') \rightarrow\ \big(\in (x,z,\mathrm{v}') \wedge \in (y,z,\mathrm{v}')\big)\big]\Big]$$

.

Para cada x e y, existe um z cujos únicos elementos com graus de pertinência não-vazios são x e y. Além disso, se v' é um grau, então ambos x e y pertencem a z com grau de no máximo v'. O conjunto z com essa propriedade é denominado par forte e designado por {x, y}, onde x e y pertencem ao par com o mesmo grau de pertinência.

6. *Axioma do par (forma fraca)*

$$\forall x\, \forall y\, \forall \mathrm{v}'\, \forall w'\big[\big(D(\mathrm{v}') \wedge D(w')\big) \rightarrow \big(\exists z\, \forall \mathrm{v}\, \forall w\, \big[\big(\in (w,z,\mathrm{v}) \wedge \sim(\mathrm{v}=\emptyset)\big) \rightarrow (w = x\ \vee w = y)\big] \wedge [\in (x,z,\mathrm{v}') \wedge \in (y,z,w')] \wedge \big[\mathrm{v}'' w''\big(\in (x,z,\mathrm{v}'') \wedge \in (y,z,w'')\big) \rightarrow (\mathrm{v}'' \subseteq \mathrm{v}' \wedge\ w'' \subseteq w')\big]\big)\big]$$

A forma fraca do par afirma que, dados dois conjuntos, x e y, e dois graus de pertinência, v' e w', há um conjunto z que satisfaz as seguintes condições:

i) x e y são os únicos elementos de z com graus não-vazios;

ii) x pertence a z com grau até v' e y pertence a z com grau até w';

iii) se x também pertence a z com grau até v' e y pertence a z com grau de até w', então v''é menor ou igual a v' $(\mathrm{v}'' \subseteq \mathrm{v}')$ e w'' é menor ou igual a $w'(\mathrm{w}'' \subseteq \mathrm{w}')$.

O conjunto z assim definido é denominado par fraco e designado por $\{x, y\}\mathrm{v}'\mathrm{w}'$.

7. *Axioma do Conjunto União*

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, \forall w\, [\in (z,y,w)\ \leftrightarrow\ \exists t\, \exists t'\, \exists t''(\in (z,t,t') \wedge \in (t,x,t'') \wedge\ w \subseteq t' \wedge\ w \subseteq t'')\,]$$

O conjunto y corresponde ao conjunto união dos elementos de x, isto é, cada elemento z de y é antes de tudo um elemento pertencente a um subconjunto t de x com grau t' e tal subconjunto pertence a x com grau t'', de modo que z deve pertencer a y com um grau inferior a t' e t''. Caso o elemento z pertença a vários subconjuntos t, em cada um com grau diferente, o elemento z terá todos os graus assinalados para os diversos t.

8. *Axioma do infinito*

$$\exists x \left[\exists t \left(\in (\emptyset, x, t) \wedge \sim (t = \emptyset)\right) \wedge \forall y \, \forall t' \left[\left(\in (y, x, t') \wedge \sim (t' = \emptyset)\right) \rightarrow \exists t'' \left(\in (y \cup \{y\}, x, t'') \wedge \sim (t'' = \emptyset)\right)\right]\right]$$

.

A extensão do axioma de Zermelo-Fraenkel para os conjuntos difusos implica na construção de um conjunto infinito x que contém $\emptyset$ em grau não-nulo e que possui a seguinte propriedade: se y pertence a x com grau t, então o sucessor $y \cup \{y\}$ também pertencerá ao mesmo conjunto com grau t.

9. *Axioma da Substituição I*

$$\forall t_1, t_2, \ldots, t_k \left[\forall x \, \exists y \, A_n(x, y; t_1, t_2, \ldots, t_k) \rightarrow \forall \mathrm{u} \, \exists \mathrm{v} \left[\exists \mathrm{w} \, \forall \mathrm{r} \left[\sim (w = \emptyset) \rightarrow \left[\in (\mathrm{r}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) \leftrightarrow \exists \mathrm{s}\left(\in (\mathrm{s}, \mathrm{u}, \mathrm{w}) \wedge A_n(\mathrm{s}, \mathrm{r}; t_1, t_2, \ldots, t_k)\right)\right]\right]\right]\right]$$

.

Uma fórmula que fornece a amplitude v para o domínio u. Entretanto, é preciso definir o grau com que r pertence a v: se $A_n(\mathrm{s}, \mathrm{r}; t_i)$ é verdadeira para s em u. O mesmo acontece quando r é amplitude de vários conjuntos s diferentes.

10. *Axioma da Substituição II*

$$\exists f \left[Funct(f) \rightarrow \forall \mathrm{u} \, \exists \mathrm{v} \, \forall \mathrm{r} \, \forall \mathrm{w}\left[\left(\sim(\mathrm{w} = \emptyset) \rightarrow \in (\mathrm{r}, \mathrm{v}, \mathrm{w})\right) \leftrightarrow \exists x \, \exists \mathrm{w}' \mathrm{w}'' \left(\in (\mathrm{s}, \mathrm{u}, \mathrm{w}') \wedge \in \left((\mathrm{s}, \mathrm{r}), f, \mathrm{w}''\right) \wedge \mathrm{w} \subseteq \mathrm{w}' \wedge \mathrm{w} \subseteq \mathrm{w}''\right)\right]\right]$$

Seja a função f, existe um conjunto-amplitude v, construído a partir de f, cujos elementos têm um grau de pertinência inferior aos correspondentes elementos do domínio de f e ao próprio par ordenado que compõe f.

11. *Axioma do conjunto Potência*

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \left[\exists w \left(\in (z, y, w) \wedge \sim (w = \emptyset)\right) \leftrightarrow z \subseteq x\right]$$

Esse axioma garante a existência de um conjunto y contendo todos os subconjuntos de x, em graus não-nulos.

12. *Axioma do Produto Cartesiano*

$$\forall x \, \forall y \, \exists \mathrm{z} \, \forall \mathrm{w} \left[\exists \mathrm{w}'\left(\in (\mathrm{w}, \mathrm{z}, \mathrm{w}') \wedge \sim (\mathrm{w}' = \emptyset)\right) \leftrightarrow \exists x' \, \exists y' \, \exists v' \, \exists \mathrm{v}'' [\in (x', x, v') \wedge \in (y', y, \mathrm{v}'') \wedge \sim(\mathrm{v}' = \emptyset) \wedge \sim(\mathrm{v}'' = \emptyset) \wedge \mathrm{w} = (x', y')]\right]$$

.

Para todo x e y podemos obter um conjunto z, denominado produto cartesiano de x e y, que contém pares ordenados, com graus não-nulos, formados por elementos de x e y.

13. *Axioma da Regularidade*

$$\forall x\ \exists y\ [x = \emptyset\ \vee \exists w\ (\sim(w = \emptyset) \wedge \in (y, x, w)\ \wedge\ \forall z\ \forall w' [(\in (z, x, w') \wedge\ \sim(w' = \emptyset)) \rightarrow \forall w''(\in (z, y, w'') \rightarrow\ w'' = \emptyset)])]$$

Esse axioma assegura que x é um elemento dele próprio somente em grau $\emptyset$, evitando a presença de cadeias descendentes infinitas com respeito a $\in$.

14. *Axioma da Escolha*

$$\forall x\ \forall f\ \Big[[Funct(f) \wedge \mathrm{x} \subseteq \mathrm{Dom}(f) \wedge\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ \forall \mathrm{w}\ \forall w'\ [\in (y, x, z) \wedge\ \sim(z = \emptyset) \wedge \in ((y, w), f, w') \wedge\ \sim(w' = \emptyset)] \rightarrow \sim(w =\ \emptyset)] \rightarrow\ \Big[\exists g\ \Big(Funct(g) \wedge \mathrm{x} \subseteq \mathrm{Dom}(g) \wedge \forall x'\ \forall x''\ \forall v'\ \forall v''\ \forall t\ \forall t' [(\in (x', x, v') \wedge\ \sim(v' = \emptyset))\ \wedge \in ((x', x''), f, v'') \wedge \in ((x', t), g, t') \wedge\ \sim(v'' = \emptyset) \wedge \sim(t = \emptyset)] \rightarrow\ \exists t''(\sim(t'' = \emptyset) \wedge \in (t, x'', t''))\Big)\Big]\Big]$$

.

Esse axioma nos fornece um elemento de cada conjunto não-vazio, mas um elemento sobre o qual podemos apenas afirmar que possui um grau de pertinência diferente de $\emptyset$. Aqui, g é a função de escolha: assumindo-se que f é uma função com x como subconjunto de seu domínio e de modo que a amplitude de f restrita a u consista de conjuntos não-vazios w, então g é uma função com domínio incluindo x, de forma que se x' é um elemento de x, então a imagem de x' por g(t) é um elemento da imagem de x' por f (x'')com grau de pertinência não-nulo (t'').

A unicidade das definições de conjunto potência e de produto cartesiano, bem como a simplificação da operação de união e do conjunto infinito, podem ser obtidas da teoria de Chapin para os conjuntos difusos através da introdução do conceito de conjunto-padrão.

$$Std(x) \leftrightarrow\ \forall y\ [\exists z\ (\in (z, x, w) \wedge\ \sim(w =\ \emptyset)) \rightarrow\ \forall z'\ (D(z') \rightarrow \in (z, x, z'))]$$

Um conjunto-padrão x é aquele possuidor da propriedade de que se algum z pertence a x com grau diferente de $\emptyset$, então z pertence a x em qualquer grau. Dessa forma Chapin constrói conjuntos difusos com uma uniformidade nos graus de pertinência. Algumas relações podem ser desenvolvidas exclusivamente para conjuntos difusos:

- União-padrão

$$\forall x\ \left[Std(x)\ \rightarrow\ \exists y\ \forall z\ \forall w\ \left(\in(z,y,w) \leftrightarrow \exists t\ \exists t'\ \left(\in(z,t,w) \wedge \left(\in(t,x,t')\ \wedge\ \sim(t' = \emptyset)\right)\right)\right)\right]$$

- Conjunto infinito-padrão

$$\exists x\ \left[Std(x) \wedge\ \exists \mathrm{t}\left(\sim(t =\ \emptyset) \wedge \in(\emptyset,x,t)\right)\ \wedge\ \forall \mathrm{y}\left(\in(y,x,t) \rightarrow \in(y\ \cup\ \{y\},x,t)\right)\right]$$

- Conjunto potência-padrão

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \forall w\ (\in(z,y,w) \leftrightarrow\ (\mathrm{D}(w)\ \wedge \mathrm{z} \subseteq \mathrm{x})\ \vee\ w =\ \emptyset)$$

- Produto Cartesiano-padrão

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ \forall w'\left[\left(\in(w,z,w') \wedge \sim(w' =\ \emptyset)\right) \leftrightarrow\ \exists x'\ \exists y'\ \exists v'\ \exists v''\ \left(\in(x',x,v') \wedge \in(y',y,v'')\ \wedge\ \sim(v' =\ \emptyset)\ \wedge\ \mathrm{w} =\ (x',y')\ \wedge\ \mathrm{D}(w')\ \wedge\ \sim(W' = \emptyset)\right)\right]$$

As definições acima possuem todas as propriedades da unicidade.

Hein e Dadam (2009) disseram que a teoria de Chapin consiste nos catorze axiomas aqui listados juntamente com as definições acima. Com base nessas sentenças, Chapin pôde desenvolver toda a teoria elementar dos conjuntos difusos estabelecendo a interseção, o complemento, a diferença simétrica, as propriedades comuns a um reticulado booleano para conjuntos-padrão, relação de ordem, relações binárias, composição e combinação convexa de conjuntos difusos.

De acordo com Hein e Dadam (2009), a teoria de Chapin possui como pontos positivos a ideia de generalização da relação de pertinência (que pode ser expandida para tantos argumentos quanto se queira, correspondendo aos tipos mais complexos de conjuntos difusos) e o seu caráter não-funcional, permitindo sempre um contínuo de valores possíveis em vez de um grau de pertinência preciso, o que torna a própria relação de pertinência passível de uma interpretação difusa.

Entretanto, Chapin restringe demais a teoria ao criar o conceito artificial de conjunto-padrão e seus derivados em favor da unicidade das definições. O problema da unicidade de alguns conceitos da teoria generalizada dos conjuntos, ainda está em aberto, mas talvez um caminho seja considerar os pares, ordenados ou não, como intrinsecamente difusos, influenciando assim os conjuntos por eles formados.

Este estudo teve por objetivo apresentar uma trajetória histórica da Teoria dos Conjuntos, cuja realização permitiu o resgate do desenvolvimento histórico desde a necessidade de compreender e de utilizar as noções de parte e de todo, no início das matemáticas gregas até a sua construção axiomáticas no século XIX.

Consideramos que o conhecimento da história da Teoria dos Conjuntos é importante para conhecermos as contribuições de Cantor na construção dos conjuntos numéricos, de como essa teoria fazia parte dos fundamentos de diferentes ramos da matemática, nomeada de aritmética. E que a descoberta dos paradoxos fez com que os matemáticos sentissem a necessidade de usar uma linguagem mais rigorosa. Dessa forma, eliminar as dúvidas que possam aparecer em ambientes escolares e acadêmicos.

2.3. ESTUDO DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONJUNTOS

Considerando que o tema dessa pesquisa se relaciona com as dificuldades que os professores têm de ensinar a teoria de conjuntos na educação básica, foi realizada uma análise e investigação de trabalhos desenvolvidos na área de educação acerca deste tema. Com a intenção de caracterizar a problemática, destacam-se alguns trabalhos que servirão de embasamento para esta pesquisa.

O objetivo desta secção, é apresentar os resultados de um estudo sobre o ensino da Teoria de Conjuntos, no qual buscamos contribuições de vários autores, que têm dedicado seus estudos a pesquisa em matemática sobre este tema.

Nesse momento apresentaremos o estudo bibliográfico sobre o ensino de Conjuntos, realizado com vista a obter informações necessárias ao desenvolvimento e construção da pesquisa, foram utilizadas publicações no período de 1976 a 2016. Para tanto, foram catalogados e analisados vinte estudos, um livro, uma tese (doutorado), oito dissertações (mestrado) e dez artigos científicos. A seguir apresentaremos os resultados das publicações categorizadas em: Estudos de livro didático, teóricos/investigativos, diagnósticos, experimentais, bibliográficos e propostas de ações.

2.3.1. Livros didáticos

Nesse tipo de pesquisa são feitas analise sobre as formas de abordagem do conteúdo de Conjuntos em livros didáticos.

A pesquisa de Macedo(2008) teve como objetivo, investigar sobre a inserção da Teoria dos Conjuntos nos livros didáticos no Ensino Secundário no período do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, compreendido principalmente nas décadas de 1960 e 1970, com o objetivo de entender como esse saber matemático passou a fazer parte dos livros didáticos, considerando especificamente as obras que veicularam a Teoria dos Conjuntos no Brasil.

A metodologia utilizada por Macedo(2008), para a realização da pesquisa, perpassa pela análise de livros. As fontes de informação foram os livros da coleção de Osvaldo Sangiorgi intitulada “*Matemática Curso moderno*” volume 1 em duas edições: a primeira de 1963 e a 11ª de 1968 onde já ocorreram modificações, principalmente na Teoria dos Conjuntos; “*Matemática Curso moderno*” volume 4, de 1967, cuja edição não é citada.

Os volumes 2 e 3 que não foi analisada trazem a Teoria dos Conjuntos de forma muito semelhante ao primeiro volume, sendo desnecessária uma apresentação repetitiva, apenas mostrando os conteúdos.

O primeiro ponto que o autor destacou como resultado de sua análise dos livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi é a inserção da Teoria dos Conjuntos de uma forma diferente da que se propunha no ideário do MMM, onde a mesma seria utilizada como linguagem. Nos livros de Osvaldo Sangiorgi, essa Teoria aparece mais como um capítulo isolado do que como uma linguagem unificadora dos ramos da matemática.

No primeiro volume da coleção de Sangiorgi, o autor observou que houve modificações entre a primeira e a 11ª edições, publicadas respectivamente em 1963 e 1968, porém, essas modificações não alteraram a essencia do que consideramos como um isolamento da Teoria dos Conjuntos. Em ambas as edições, a Teoria se concentra no primeiro capítulo, sendo mais explorada na 11ª edição, porém nos capítulos seguintes ela aparece de maneira tímida, sem enfase, ou nem aparece.

Segundo o autor, o mesmo aconteceu no quarto volume dessa mesma coleção didática, isto é, ao isolamento da Teoria dos Conjuntos em apenas um capitulo, que é o que trata das funções. A ênfase dada à Teoria dos Conjuntos foi tanta que destoa dos outros dois capítulos, parecendo que foi iniciada a leitura de outro livro, diferente daquele que se estava lendo inicialmente.

Essas considerações feitas pelo autor, fortaleceram a ideia de que a Teoria dos Conjuntos não foi utilizada como linguagem para o Ensino Secundário, como era proposto, mas foi utilizada como capítulo isolado nos livros didáticos dessa coleção de Sangiorgi.

Macedo(2008) narrou que a inserção da Teoria dos Conjuntos nos livros didáticos não se deu apenas com uma absorção que Sangiorgi fez da Teoria como era apresentada no Ensino Superior, a adequando ao Ensino Secundário, mas a própria cultura escolar influenciou nessa inserção. Essa influência da cultura escolar foi observada na pesquisa do autor em dois tópicos: o uso de diagramas irregulares e diferentes dos diagramas de Euler/Venn e o uso de uma representação figural para a apresentação do conceito de função, onde Sangiorgi(1963) utilizava diagramas semelhantes aos de Euler/Venn, porém, com algumas flechas que servem para representar a função

Nessa análise, Macedo(2008) concluiu que nem todos os conteúdo dessa teoria que fazem parte dos livros didáticos e, portanto, do currículo escolar, são provenientes de uma absorção e adequação de conteúdos ora ensinados no Ensino Superior, mas também tem sua criação própria da cultura escolar.

Na investigação de Macedo(2008) existiam algumas questões que suscitam novas pesquisas, como: Por que determinados conteúdos são rechaçados e praticamente banidos do currículo? Que influências um movimento internacional pode ter sobre uma renovação curricular? Como os livros didáticos podem influenciar na propagação de um ideário e de que maneira são absorvidas essas ideias pelos autores dos livros? Estas questões são formuladas a partir da reflexão do autor sobre o que aconteceu com os conteúdos relativos à Teoria dos Conjuntos: alguns pontos aqui levantados nos provocam novos questionamentos ainda sobre a Teoria dos Conjuntos e, de forma mais abrangente, com outros conteúdos da Matemática.

A pesquisa de Souza (2014) teve por objetivo principal, verificar como a Teoria dos Conjuntos foi inserida em livros didáticos de Matemática do Brasil.

A metodologia utilizada por Souza (2014), para a realização da pesquisa, baseou-se nas análises feitas nos livros de Lima e Vila (1972), Sangiorgi (1968), Dante (2012), Caderno do Professor de Matemática e no Currículo do Estado de São Paulo.

Souza (2014) escolheu estes livros justamente por contemplarem tópicos direcionados à Teoria dos Conjuntos. O de Sangiorgi (1968) por ter se tornado um best-seller durante o MMM e o de Lima e Vila (1972), por ser um livro do início da década de 1970, ou seja, período no qual o MMM já estava em declínio. Ainda, o fato do conteúdo do livro de Lima e Vila (1972) ser praticamente voltado para a Teoria dos Conjuntos, incentivou para fazer uma análise do mesmo.

Os resultados da pesquisa revelaram que o livro "Matemática: Curso Ginasial 1º série", de Sangiorgi (1954), que antecede o Movimento da Matemática Moderna, encontrava-se totalmente de acordo com a Portaria de 1951. Nesse sentido, o autor não apresentou tópicos da Teoria dos Conjuntos ou adotou a linguagem dessa Teoria em sua obra.

Souza(2014) observou que, tanto o livro de Sangiorgi (1968) como o livro de Lima e Vila (1972), seguiram o currículo escolar que contemplava a Teoria dos Conjuntos. Quanto ao livro de Sangiorgi (1968), "Matemática: Curso Moderno" destinado aos alunos que cursavam a antiga 5ª série do Ginásio, ele notou que se mostra totalmente envolvido com as recomendações do MMM. O autor adotou a linguagem da Teoria dos Conjuntos para trabalhar os conteúdos matemáticos, com exceção ao capítulo referente aos sistemas de medidas. Apresentou diversas ilustrações, fazendo uso principalmente dos diagramas de Venn.

A análise elaborada no Caderno do Professor de Matemática e no Currículo do Estado de São Paulo permitia verificar que os conteúdos enfatizados por essa proposta, estão próximos dos conteúdos que atualmente são propostos para o professor no livro "Matemática" de autoria de Dante (2012).

Em relação ao Currículo de Matemática, Souza (2014) percebeu que os três blocos temáticos (Números, Geometria, Relações) citados pela Secretaria Estadual de Educação (2010), os "Números" são o que mais se aproximavam das análises feitas à Teoria dos Conjuntos, por envolver noções de contagem e representação simbólica, considerando os conteúdos matemáticos trabalhados nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental escolhidos para análise de Souza(2014). Do mesmo modo como no livro de Dante (2012) não encontraram comentários sobre a história da Teoria dos Conjuntos no Caderno do Professor de Matemática e no Currículo do Estado de São Paulo.

Diante desse fato, Souza (2014) concluiu que a Teoria dos Conjuntos foi amplamente utilizada nos livros didáticos de Matemática, durante as décadas de 1960 e 1970, época em que o Movimento da Matemática Moderna estava no auge.

Souza (2014) verificou ainda, que tanto nos livros de Sangiorgi (1968) e no de Lima e Vila (1972) os autores interagiram com o estudante por meio da linguagem da Teoria dos Conjuntos em situações do cotidiano. Entretanto, não encontrou evidências do uso da história da Teoria dos Conjuntos no desenvolvimento dos conteúdos para serem trabalhados em sala de aula, com exceção em algumas notas de rodapé expressas no livro de Sangiorgi (1968).

Os resultados que foram obtidos neste estudo de Souza(2014) necessitavam de aprofundamento, uma vez que esta pesquisa privilegiou o 6º ano do Ensino Fundamental. Desse modo, considera-se interessante dar continuidade ao trabalho, analisando outros livros didáticos, em outros anos escolares, para que se possa obter uma visão mais ampla sobre como ocorreu a inserção da Teoria dos Conjuntos na Educação básica.

2.3.2. Estudos teóricos/investigativo

Os estudos teórico/investigativos apresentam um processo de investigação a fim de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Teoria dos Conjuntos.

O livro de Kline (1976) teve como objetivo, mostrar se o novo currículo, verdadeiramente, tem melhorado o ensino da matemática e se realmente tornou esta matéria mais acessível ao estudante.

A metodologia utilizada pelo autor apresentava um estudo crítico sobre as mudanças advindas da Matemática Moderna, motivo de divergência de opiniões entre matemáticos profissionais e professores, quanto aos méritos das inovações que estavam ocorrendo nas escolas elementares e secundárias estadunidenses, oportunizando significativas reflexões. São focos da atenção do autor, exageros cometidos, o currículo tradicional, a origem do Movimento, a abordagem dedutiva da Matemática, o rigor, a linguagem da Matemática, a Matemática pelo que ela representa, o conteúdo da nova Matemática, o testemunho dos testes, as razões mais profundas para a nova Matemática e as diretrizes apropriadas para a reforma.

Como resultado, Kline (1976) mostrou que o currículo tradicional é falho em certos aspectos, e que o novo currículo de matemática certamente não remedia os defeitos do currículo tradicional.

Kline (1976) salienta que deve apresentar a matemática como parte integrante de uma educação liberal. Igualmente vital é outro principio que deve guiar a apresentação da própria matemática, um princípio desconsiderado pelo currículo tradicional e mais ainda pelo curriculo de matemática moderna.

De acordo com Kline (1976), professores em todos os níveis deveriam ter reconhecido a deplorável falta de motivação, e, ao invés de se voltarem para novas abordagens, a matéria antiga e a matéria nova, deveriam ter atacado o problema de motivação. Todo tópico de matemática deve ser motivador, mas o professor é obrigado a seguir um currículo que lhe é traçado. Poderia fazer algo para inspirar os estudantes, mas em geral fica limitado ao tempo para fazê-lo.

Ao negligenciar-se da motivação e aplicação, segundo o autor, os pedagogos fizeram com que o ensino de matemática sofresse. Parte dos mais medíocres ensinos de matemática é encontrada em professores que tratam desta matéria como se ela não tivesse nenhuma relação com qualquer coisa além de seus limites técnicos. O que é especialmente doloroso, pois, no tocante ao ensino de matemática, tradicional ou nova, não é que os professores não saibam o que estão ensinando, mas que não sabem e, portanto, não podem mostrar aos alunos por que a matemática é vital.

Kline (1976) narra que a asserção comumente aceita de que a matemática ensina as pessoas a pensar não tem sido testada. O ensino de matemática, antigo e novo, não se destinou a ensinar as pessoas a pensar, porém a seguir o guia: o professor. No currículo tradicional, ensinava-se aos estudantes a seguirem processos e repetirem provas. Hoje, segundo a nova matemática, os estudantes decoram definições e provas. De fato, são forçados a decorar porque o nível do material está além deles.

Na visão do autor, a compreensão se consegue intuitivamente e a apresentação lógica é, quando muito, uma ajuda subordinada e suplementar à aprendizagem e, na pior das hipóteses, decididamente um obstáculo. Por conseguinte, ao invés de apresentar a matemática tão rigorosa quanto possível deveria apresenta-la tão intuitivamente quanto possível. Mas para Kline (1976), não existem provas rigorosas finais. Nem todo o simbolismo da lógica simbólica moderna, da álgebra de Boole, da teoria de conjuntos e dos métodos axiomáticos fez ou pode fazer que a matemática seja perfeitamente rigorosa.

Kline (1976) conclui que a teoria de conjuntos é para a matemática elementar um formalismo oco que dificulta idéias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente. A tentativa de envolve-la é quase ridicula e uma grosseira imitação de pedagogia. A teoria de conjuntos não provou ser o elixir da pedagogia matemática.

Segundo Kline (1976), o currículo tradicional foi preparado por matemáticos relativamente não esclarecidos, sem “insight” pedagógico. O currículo de matemática moderna foi preparado conjuntamente por tais pessoas e por acanhados pesquisadores em matemática pura dotados de pouco “insight” pedagógico. As pessoas que precisamos terão de saber o quanto os jovens podem manipular de abstrações e provas.

Kline (1976) narra que, treinar matemáticos que tivesse a amplitude e competência de tratar de problemas pedagogicos das escolas elementares e escolas secundárias requer um afastamento ainda mais largo dos programas orientados para pesquisas, e os professores atuais não estão preparados para dirigir tal treinamento e, na realidade, nem querem.

Kline (1976) declara, que entende que a matemática tenha sobrevivido, graças a um pequeno número de professores criteriosos, maduros e dedicados que, com seu cuidado em escolher o que devem enfatizar e com seu encanto pessoal e magnetismo, atraíram alguns estudantes para a matemática. Estas almas nobres nos salvaram do desastre.

A dissertação de Soares(2001) relatou o que foi o movimento da Matemática moderna, como foi desenvolvida e implantada no Brasil. A metodologia utilizada pela autora foi uma pesquisa histórica investigativa, onde realizou 10 entrevistas semiestruturadas, gravadas em fitas cassete, entre os meses de abril e dezembro de 2000. Para as entrevistas foram escolhidas pessoas que tiveram algum tipo de envolvimento com o Movimento da Matemática Moderna no Rio de Janeiro.

As outras fontes que Soares(2001) utilizou na sua pesquisa foram: artigos de revistas e jornais brasileiros publicados nas décadas de 60 e 70, artigos de periódicos brasileiros das áreas de matemática e Educação, artigos de periódicos estrangeiros da área de matemática, livros brasileiros e estrangeiros enfocando o Movimento da Matemática Moderna e temas correlatos, Anais de congressos, Anuários, Documentos oficiais publicados por organismos internacionais como a Unesco e a OEA, Teses e Dissertações na área de Educação Matemática.

A maior parte do material consultado, pela autora em sua pesquisa foi encontrada na Biblioteca Nacional, na biblioteca do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), nas bibliotecas da PUC-RJ, nas bibliotecas do Centro de Filosofia e Ciências Humanas(CFCH) e do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Como resultado Soares (2001) narra que no Brasil a implantação da Matemática Moderna como parte do currículo escolar não se mostrou eficaz no combate aos problemas que o ensino tradicional já apresentava. Sua adoção foi feita sem o planejamento necessário e sem a devida preparação dos professores. O ensino da teoria dos conjuntos tornou-se excessivamente abstrato e exagerado e as propostas originais que o Movimento apresentava acabaram se perdendo ou nunca se realizando por completo.

Sendo assim, de acordo com a autora, as opiniões gerais tendem a considerar que o Movimento fracassou, pois não atingiu as metas que era de unificar o ensino da Matemática, democratizar o ensino e torna-lo mais acessível. A Matemática ainda carrega alguns dos mesmos mitos que sempre a cercaram e permanece sendo uma disciplina considerada difícil para a maioria das pessoas.

Segundo Soares (2001), os livros didáticos permaneceram por muito tempo (e ainda existem muitos assim) seguindo os passos tanto do ensino tradicional quanto da Matemática Moderna, sem apresentar nenhuma visão nova dos conteúdos, apenas uma nova roupagem. Somente há alguns anos vem se tentando modificar essa situação através das avaliações feitas pelo Ministério da Educação e por outras iniciativas como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental e médio.

Assim, segundo Soares (2001), a época da Matemática Moderna foi uma fase de grande mobilização dos professores empenhados num objetivo único: melhorar o ensino de Matemática. Mesmo que esse objetivo não tenha sido alcançado, o Movimento fez com que os professores começassem a refletir mais sobre sua prática docente e sobre os verdadeiros propósitos do ensino de Matemática.

A autora mostra que alternativas para o ensino de Matemática e o reconhecimento da importância de se reavaliar os seus objetivos também estiveram presentes nesta última década com a divulgação dos Parâmetros Curriculares

Nacionais (PCN's). A partir da experiência mal sucedida com a Matemática Moderna, os Parâmetros Curriculares Nacionais não propõem soluções milagrosas e rápidas para o ensino, contudo representam mais uma fonte ao alcance dos professores na busca de orientações para melhorar a prática docente.

Soares (2001) conclui que a renovação dos currículos e na maneira de ensinar é necessária, e que essa mudança não se realiza facilmente. Ela deve ser lenta, progressiva e que deve ser elaborada visando as condições dos alunos brasileiros, da escola brasileira e, a que consideramos mais importante, a do professor brasileiro. Partes dos problemas referentes ao ensino da Matemática Moderna estavam relacionadas à falta de formação adequada dos professores. Se alguma reforma deve ser realizada ela deve passar em primeiro lugar pelos cursos de Licenciatura de nossas universidades e pelos cursos de formação continuada de professores. Do contrário não seremos capazes de fazer uma análise crítica de novas propostas que possam surgir e sofreremos mais uma vez os equívocos e as distorções da adoção precipitada de reformas iniciadas em outros países.

O objetivo da pesquisa de Soares (2007) foi apresentar mais uma perspectiva para aqueles que investigam o Movimento da Matemática Moderna tendo em vista os questionamentos, referentes ao nome atribuído a esse movimento.

A metodologia utilizada na pesquisa de Soares(2007) foi a técnica de pesquisa bibliográfica. As fontes escolhidas para tornar os argumentos da autora mais claros e justificá-los, ela se apoio, inicialmente, em dois trabalhos que considerou significativo: um deles é o livro *O Fracasso da Matemática Moderna*, do autor Morris Kline (1976), onde supôs ser possível perceber fragmentos da apropriação e representação do MMM, feitas pelo autor, e por considerar o referido livro como um marco na trajetória desse movimento; o outro é a Dissertação de Mestrado de Flávia Soares (2001), intitulada *Movimento da Matemática Moderna no Brasil*: avanço ou retrocesso? Esta, por considerar que foi uma das pesquisas sobre o MMM que trouxe um número considerável de informações sobre o espaço que ganhou no Brasil esse processo de modernização internacional do ensino da Matemática.

Como resultado, Soares (2007) disse que o termo “moderna” para a matemática, relaciona-se aos avanços que essa ciência teve no final do século XIX, com a descoberta e desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, e, em nível escolar, com os reflexos dessa teoria sobre o conceito de número, até então vinculado às medidas de grandezas. Dessa forma, a autora entendeu que o Movimento de renovação do ensino da Matemática recebeu o título de Movimento da Matemática Moderna pelo fato desse movimento propor mudanças curriculares, principalmente no que diz respeito à “inclusão de conteúdos” decorrentes ou alinhados a essa moderna teoria, depositária da unidade pretendida no ensino dessa ciência.

Soares (2007) conclui que, assim, com essa forma de ler o termo “moderna” tanto para a ciência como para a disciplina Matemática, que não é a melhor nem a pior, mas que é apenas mais uma representação que pode ser analisada e discutida, pensou estar contribuindo para a realimentação das discussões daqueles que se interessam pelo Movimento da Matemática Moderna e pelas práticas culturais.

O objeto de estudo do trabalho de Arruda(2008) foi investigar como a instauração de uma linguagem simbólica – a teoria dos conjuntos - no antigo ensino primário foi sendo criada, apropriada, representada e (trans)formada em modelos atuais de ensino e aprendizagem para a matemática dos anos iniciais do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina. Ou seja, que pressupostos teóricos, metodológicos e científicos o Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina (CA/UFSC) abarcou para a instauração dessa linguagem da matemática moderna, visando o ensino primário da época.

A metodologia utilizada no estudo da autora caracteriza-se em uma perspectiva histórica, apoiada na problemática das novas formas de representação, apropriação e organização de uma linguagem específica para o ensino primário, a teoria dos conjuntos, produzida culturalmente para ensinar matemática.

Arruda (2008) fez uma pesquisa bibliográfica utilizando a proposta curricular, livros didáticos, cadernos das crianças e de professoras(es), provas e documentos de avaliações, especificamente desenvolvidas no ensino primário no Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina. A pesquisa foi feita em três etapas: Etapa da coleta de dados por meio da pesquisa documental, etapa da coleta de dados por meio da história oral e etapa da leitura e da escrita por meio de um diálogo entre o passado e o presente.

Arruda (2008) buscou conhecer historicamente as circunstâncias e modos específicos de produção, apropriação, circulação da ‘nova’ linguagem matemática pensada para o ensino primário no CA/UFSC, com ênfase na teoria dos conjuntos, a partir do ano de sua implantação em 1980 até 1990.

Como resultado, a autora narrou que o conjunto desses documentos, traços do passado e fontes orais – protagonistas constituem o material para análise de como a nova linguagem moderna da matemática no ensino primário foi instaurada.

Arruda (2008) ressaltou que uma pesquisa (re)construindo os fatos historicamente delineados, é diferente de apenas narrá-los como verdades indissolúveis ou possíveis fontes oficiais, é uma tarefa que exige um observador (pesquisador) atento e, ao mesmo tempo, desprovido de generalizações.

A autora concluiu que retomar ao ideário do MMM por meio da análise e problematização da inserção da linguagem dos conjuntos no ensino primário, não significa pensar a história da matemática como um fim de um processo, ou então, como se fosse constituída de modo cumulativo por meio da soma de partes justapostas e coerentes. Significa interrogar as interpretações, feitos e lugares produzidos historicamente no contexto de produção dessa história da educação matemática.

2.3.3. Estudos Diagnósticos

Os estudos caracterizados como diagnósticos, tem como objetivo encontrar algumas dificuldades dos alunos no ensino da Teoria dos Conjuntos e, então saná-las durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

A pesquisa de Ribeiro, Barbosa e Bortoloti (2010), teve como objetivo analisar as respostas dadas pelos acadêmicos da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB nos campi Jequié e Vitória da Conquista do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática ao responder uma questão de Conjuntos.

Os autores produziram os dados, aplicando um teste investigativo composto por seis questões abertas, a 28 alunos do 6º semestre que tivessem matriculados e ainda que não estivessem semestralizados, sendo 15 de Jequié e 13 de Vitória da Conquista.

Os autores analisaram a questão três do teste que tem por enunciado: (adaptada do Vestibular UESB 2007) - Um professor de Literatura sugeriu a uma de suas classes à leitura da revista A e da revista B. Vinte alunos leram a revista A, quinze leram apenas a revista B, dez leram as duas revistas e quinze não leram nenhuma delas. Considerando-se que x alunos dessa classe leram, pelo menos, uma das revistas, determine o valor de x.

A partir da análise dessa questão, foi obtido o seguinte resultado:

QUADRO 1 – Quantificação das respostas referentes a questão de conjuntos Jequié e Vitória da Conquista

Respostas corretas		Respostas Erradas		Total de testes	
Jequié	Vitória da Conquista	Jequié	Vitória da Conquista	Jequié	Vitória da Conquista
8	6	7	7	15	13
Total 14		Total 14		Total Geral 28	
50%		50%		100%	

Fonte: Ribeiro, Barbosa e Bortoloti (2010)

Os autores perceberam que todos os alunos tentaram responder as questões, então não foi registrado respostas em branco.

As respostas foram classificadas da seguinte forma: Classe A (correspondem as respostas corretas): Todos fizeram o diagrama de Venn corretamente com exceção de um aluno, que não o fez, mas descreveu os dados do problema e o resolveu; Classe B (correspondem as respostas erradas): Devido à diversidade dos tipos de resoluções e respostas erradas, agruparam-nas de modo que essas subdivisões apresentaram maior semelhança no descuido ou falha em algum procedimento da resolução.

A partir da produção escrita dos sujeitos, os autores, conseguiram categorizar os tipos de erros, mesmo sendo em campos diferentes há erros semelhantes e elementares e só na amostra de Jequié foi encontrada uma resposta a qual o sujeito utilizou outros conteúdos para tentar responder à questão analisada. Os autores afirmaram que os sujeitos de ambos os campos apresentaram dificuldades similares na interpretação e na forma de manipular os dados colocados na representação pictórica.

Os autores concluíram que os erros encontrados são elementares, tornando-se preocupantes, pois essa amostra pesquisada são alunos que estavam em formação profissional quase entrando no mercado de trabalho, ou já inserido, vivenciando a fase de estágio nas escolas da Educação Básica. Os autores perguntaram: como estarão estes alunos “ensinando” os conceitos tratados nesta questão?

2.3.4. Estudos Experimentais

Estudos que apresentaram propostas metodológicas para o ensino da Teoria de Conjuntos a partir de resultados de experiências didáticas em sala de aula.

A pesquisa de Campos (2014) teve por objetivo, explorar alternativas didáticas para conceitos da Teoria dos Conjuntos por meio de análises de obras musicais de Villa-Lobos e observar o quanto de racionalidade matemática existe nessa obra musical.

A metodologia utilizada pelo autor foi promover oficinas interdisciplinares junto a alunos e professores dessas áreas em que puderam debater, confrontar, ideias e realizar alguns experimentos que tinham a Matemática e a Música e suas respectivas histórias como base. Por meio da história da relação Matemática/Música basearam a trajetória para as oficinas.

Os resultados da pesquisa de Campos (2014) apontaram que a proposta defendida é viável para ser realizada em sala de aula. As atividades desenvolvidas podem ser uma alternativa para os conceitos abordados no trabalho, elevando o nível de motivação, afetividade e interesse do aluno, fazendo aluno e professor trabalharem diversos tipos de inteligências simultaneamente e contribuindo para um melhor ensino e aprendizado.

As Oficinas mostraram ser um importante meio de ressignificação na prática pedagógica e na forma de apresentação dos conteúdos envolvidos no trabalho de Campos (2014). Para a área musical, serviram para compreender as estruturas da Música através da Matemática, aproximando campos do conhecimento considerados distantes. Para área Lógico-Matemática, tiveram a oportunidade de perceber novas formas de apresentação de conteúdo.

No trabalho do autor, os dados foram obtidos e analisados por meio de gravações em áudio e videoteipe, por relatórios feitos pelo pesquisador e observadores e ainda por questionários respondidos ao final de cada Oficina.

As análises dos dados mostraram que a proposta do autor, favorece a afetividade, nos termos de Henri Wallon, autor que foi adotado no recorte teórico do trabalho de Campos (2014), e facilitou o ensino/aprendizagem de alguns dos conceitos abordados. Para Wallon (2007), a afetividade e a cognição estão intimamente ligadas e uma atua na outra, ou seja, o desenvolvimento afetivo ocorre simultaneamente com o desenvolvimento cognitivo, e vice versa.

Do ponto de vista educacional, o trabalho de Campos(2014) trouxe contribuições para o licenciando e para o professor, na medida em que ofereceu uma prática de reflexão e de possível ressignificação dos conceitos mencionados, e que permitiu transgredir esses limites ampliando essa prática a outras categorias relacionadas (para um aspecto rítmico, matrizes, determinantes, vetores, etc.) e plenamente possíveis de também serem contempladas numa perspectiva analógica, mas que não foram incluídas no trabalho do autor. Os planos de aula do autor têm o objetivo de proporcionar um vasto campo de trocas de experiências entre alunos de Matemática e de Música, os quais poderão se apropriar de novos conhecimentos proporcionados pela convivência interáreas.

O autor concluiu que a tese possa servir de incentivo à constituição de projetos transdisciplinares e criação de propostas flexíveis, que contribuam para o desenvolvimento e trânsito em várias linguagens, visto que ainda são raros. Nesse sentido, que as análises e analogias utilizadas possam ser um convite para que alunos, professores e pesquisadores ampliem o diálogo entre Música e Matemática.

O trabalho de Braga (2015) teve como objetivo relatar uma experiência vivida, durante o estágio do Programa de Iniciação à Docência (PIBID), referente ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

A metodologia utilizada pelo autor foi aplicar uma atividade didática que buscou introduzir a noção de lógica matemática e teoria dos conjuntos, por meio de atividades interativas, utilizando materiais didáticos e tecnológicos, tendo como contexto situações ligadas aos temas transversais. Direcionado para alunos do Sexto Ano do Ensino Fundamental, o autor procurou desenvolver formas mais dinâmicas de ensino e, assim, levar o aluno a assumir o papel de agente ativo na construção do seu próprio conhecimento, tendo como partida conhecimentos que lhes são familiares e cabendo ao professor o papel de organizador do ambiente de aprendizagem e intermediador entre o conhecimento já dominado pelo aluno e o conhecimento novo a ser apreendido.

Braga (2015) percebeu que houve grande entrosamento da turma. Todos ficaram entusiasmados com as atividades desenvolvidas e o professor de matemática pode notar a diferença em suas aulas. Foi muito proveitoso o trabalho por revelar aos alunos outra face da matemática. Uma visão menos tradicional, na qual o jogo e a brincadeira os induzem a pensar e refletir sobre suas ações, ao mesmo tempo em que os possibilita um aprendizado imensurável.

O objetivo do autor foi alcançado ao trabalhar na perspectiva de um ensino novo, em que o aluno participasse da aula e que fosse um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento e o professor um agente mediador do processo de ensino-aprendizagem

Neste relato de experiência, o autor apresentou formas e recursos didáticos que são usados em aulas de matemática no ensino fundamental e os resultados obtidos por estas. A partir desta experiência o autor concluiu a importância do professor oportunizar aos alunos meios de participarem das aulas para que se sintam motivados em resolverem situações problemas de forma contextualizada, desenvolvendo conhecimentos, habilidades e competências demandadas pela sociedade contemporânea.

2.3.5. Estudos Bibliográficos

Esse tipo de pesquisa tem por finalidade investigar as diferentes contribuições científicas sobre a Teoria de Conjuntos.

A pesquisa de Borges (2005), teve como objetivo estudar o Movimento da Matemática Moderna (MMM) sob um novo ângulo, o das obras do professor D'Ambrósio relativas ao ensino de Matemática no secundário brasileiro, escritas e publicadas em 1957,1959 e 1961

A metodologia utilizada para alcançar os objetivos propostos, na dissertação de Borges(2005), foi efetivado um estudo das principais dissertações de autoras brasileiras que estudaram o MMM, como também em artigos de autoria do professor D'Ambrósio relativos ao ensino secundário de Matemática. Além disso, como parte complementar desses estudos, foi realizada diversas entrevistas com o professor D'Ambrósio, com a finalidade de obter uma reflexão sobre sua participação no MMM, baseada em sua história de vida.

Como resultado, Borges(2005) narrou que o MMM, visto por meio dos depoimentos concedidos pelo professor D'Ambrósio, foi uma experiência que teve seus pontos positivos e negativos em toda sua extensão. Conseguiu realizar algumas mudanças benéficas no ensino, tanto que D'Ambrósio o considerou excelente. O que desencadeou em seu fracasso foi o fato de ter sido mal conduzido.

Não se repensaram os objetivos do ensino e houve a tentativa de imposição de um currículo que universalizasse a Matemática Moderna não considerando a realidade de cada local. Isso produziu efeitos contraditórios àqueles que eram realmente esperados.

Na maioria das vezes, segundo Borges(2005), transpareceu nas entrevistas e em seus artigos que estava em uma região definida dos modelos pedagógicos que deveriam ser implantados no ensino de matemática no Brasil. D'Ambrósio defendeu um ensino experimental, em que o conteúdo fosse visto como meio para que os alunos desenvolvessem as capacidades em uma metodologia que lhes permitisse produzir e usufruir dos bens culturais, sociais e econômicos. Para ele, o volume de conteúdos ensinados em sala de aula não era o diferencial pedagógico de qualidade do ensino e da preparação escolar do aluno para o mundo do trabalho. Pela sua proposta de se ensinar a matemática experimental poderia ser facilitada a compreensão do aluno referente aos conteúdos Matemáticos então estudados, fazendo com que esse aluno pudesse notar que existia uma relação entre a Matemática ensinada na escola e a matemática necessária em sua vida cotidiana. Era um modo de o aluno tomar gosto pelo concreto, podendo então conseguir estabelecer relação com o abstrato que teria que assimilar posteriormente.

Borges (2005) concluiu que ao efetuar a comparação de tudo que foi exposto nos artigos e entrevistas e ainda com o que tomou ciência por meio dos trabalhos referentes ao MMM, constatou que o professor D'Ambrósio apresentou coerência de ideias, embora tenha se passado todo esse tempo. Ele repensou as metodologias e os objetivos, preocupando-se com todos os aspectos que envolviam esse ensino. Seu pensamento era futurista a ponto de ser criticado. Mas o próprio tempo mostrou que D'Ambrósio estava coberto de razão em tudo que criticou e sugeriu. O MMM veio confirmar que suas propostas feitas em 1957 eram necessárias ao ensino. E embora o MMM tenha chegado ao esvaziamento, tudo indica que D'Ambrósio foi o primeiro a propor um currículo de uma Matemática Moderna no Brasil e realizar experiências de seu ensino. Embora outros trabalhos sobre o MMM não o tenham apontado como pioneiro das ideias de uma matemática moderna, seu mérito tem que ser reconhecido.

Para Borges (2005) surgiu o seguinte questionamento: será que mesmo o MMM tendo seguido a proposta hegemônica do Grupo de Estudos do Ensino da

Matemática (GEEM), os rumos e consequências não poderiam ter sido diferentes se as alternativas tivessem levado em conta as propostas de D'Ambrósio?

O trabalho de Souza (2005) teve como objetivo analisar e discutir a relevância e comparar os aspectos relacionados com a Teoria dos Conjuntos.

A metodologia utilizada por Souza (2005), para a realização da pesquisa, perpassa pela escolha do tema, revisão bibliográfica, análises preliminares e analise conclusiva. As fontes de informação foram livros e relato de uma professora da Universidade Católica de Brasília.

O autor fez uma abordagem histórica, entrelaçando o ensino da teoria dos conjuntos em três diferentes etapas da Matemática, pré-moderna, moderna e pós-moderna.

Os resultados da pesquisa de Souza (2005), dizem que hoje não é encontrado nos livros de matemática do ensino fundamental, o ensino de Teoria dos Conjuntos. Os estudos de conjuntos passaram por grandes reformulações da matemática moderna para a pós-moderna. O autor percebeu que no ensino pós-moderno é dado ênfase ao estudo dos conjuntos numéricos distribuídos nas séries de 5ª a 8ª séries. O ensino médio é que aborda propriedades, teorias, axiomas e demonstrações, ou seja, a teoria dos conjuntos ficou restrita a outro grau de instrução.

Segundo Souza (2005), a história do ensino da Teoria dos Conjuntos não ficou restrita somente a uma nova tendência de ensino devido a uma reformulação curricular, como muitos professores e alunos de matemática imaginam, más há também toda uma história de choques ideológicos, políticos e culturais. Estão relacionados também tópicos como a guerra fria, a competição em busca de um desenvolvimento espacial cada vez maior e a disputa entre potências mundiais em termos de ciências e tecnologia.

O autor concluiu que a ideia de conjunto denso e não denso, discreto, limitado, onde é trabalhado os intervalos, foi abandonado ao longo da história do ensino da matemática. Esses conjuntos que hoje foram eliminados do currículo tinham um papel fundamental para fazer o aluno entender, por exemplo, o salto que acontece do conjunto dos números inteiros para os racionais.

Souza (2005) considerou que mesmo reformulando o ensino da matemática por meio dos mesmos objetivos é necessário que exista um consenso de professores, pais e profissionais sobre as mudanças que se fazem necessárias. "É preciso que identifique e valorizem os processos que são naturais para o desenvolvimento da criança e rejeitem os inadequados, que agridem a lógica e os sentimentos do aluno” Bertoni (1985).

O trabalho de Oliveira (2006) teve como objetivo levantar questionamentos sobre a formação de professores de Matemática durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

A metodologia utilizada por Oliveira (2006) foi uma pesquisa bibliográfica feitas com dissertações produzidas no Brasil a respeito desse movimento, a autora formulou uma hipótese de que a proposta foi apresentada aos professores das escolas primárias e secundárias de forma bastante “acabada”, na medida em que estes eram “treinados” pelos divulgadores do movimento, como Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), em São Paulo, para levar para sala de aula os novos conteúdos e a nova proposta de trabalho.

Entre as recomendações aprovadas em cada um dos 5 congressos, há sempre indicações sobre a formação inicial ou continuada dos professores de Matemática. O que motivou a autora querer investigar a repercussão de tais recomendações dentre os professores que efetivamente estavam em sala de aula nos ensinos primário e secundário.

Oliveira (2006) acreditava que “muito pouca voz” foi dada aos que realmente levaram a cabo o ensino segundo os ideais da Matemática Moderna. E ela colocou algumas questões: os professores não entenderam a proposta do MMM? Não foram “bem preparados”? Ou houve resistência às mudanças propostas por desconsiderarem e até mesmo negarem um saber advindo da prática construída por esses professores?

A autora concluiu que muitas indagações precisam ser investigadas com maior profundidade. As histórias contadas sobre o Movimento da Matemática Moderna no que diz respeito à formação de professores e sua atuação nesse movimento contam muito pouco dos professores que estavam nas escolas e passaram ou não por cursos de aperfeiçoamento (como costumavam chamar na época) e de suas práticas. Esse movimento, que foi uma iniciativa internacional de mudança no ensino de Matemática, ainda deixa marcas nas práticas dos professores atualmente? Que heranças são essas?

A pesquisa de Claras e Pinto (2008) teve como objetivo, analisar a trajetória histórica da modernização da matemática escolar no Brasil e as primeiras ações voltadas à formação dos professores para o ensino da Matemática Moderna.

O trabalho dos autores foi desenvolvido a partir da pesquisa histórico-bibliográfica, utilizando aportes de pesquisas recentes da história da Educação Matemática: Miorim (1998), Valente (2006), Pinto (2005), Burigo(1989), dentre outros.

Claras e Pinto (2008) descreveram e analisaram as primeiras manifestações de modernização iniciadas na Europa, a partir do final do século XIX e suas repercussões no Brasil. Na análise da segunda fase do movimento, iniciada a partir de 1960, o estudo destaca o papel dos grupos criados para estudar a proposta de modernização da Matemática, como o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), em São Paulo, e o Núcleo de Ensino e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), no Paraná, bem como as iniciativas e ações dos representantes do movimento voltadas para a implementação da reforma nas escolas, em especial, as primeiras experiências de formação de professores para o ensino da Matemática Moderna, desenvolvidas pelo GEEM, em São Paulo.

O estudo dos autores levantaram novas questões acerca do MMM tendo em vista contribuir para o avanço da pesquisa histórica do movimento que pretendia revolucionar a matemática escolar adequando-a às transformações científicas e tecnológicas que marcaram o período.

Claras e Pinto (2008) afirmaram que o Movimento da Matemática Moderna ocorrido no Brasil, com suas particularidades, estava entre os momentos mais importantes da história da educação do país. Mesmo não havendo ainda um montante expressivo de pesquisas sobre o tema, as que estão disponíveis evidenciam a contribuição do movimento para o desenvolvimento e estruturação da Educação Matemática, ratificando a dimensão das reflexões e influências que este momento provocou e ainda provoca nas discussões relativas à matemática escolar.

O mais relevante desse período talvez, segundo os autores, consista no fato de ter sido um movimento que motivou os professores de Matemática a prosseguir seus estudos e organizarem-se em grupos, num momento da história do país em que as políticas eram contrárias a qualquer mudança que não estivesse de acordo com as ideias dos dirigentes políticos.

Assim como os educadores, segundo Claras e Pinto (2008), também se envolveram pais, lideranças políticas e intelectuais importantes da época. Foi um momento em que todas as mídias abriram espaços para a divulgação e discussão sobre o tema. Isto é importantíssimo, pois além de contrariar toda a história dos movimentos e reformas educacionais ocorridas antes e depois deste período no Brasil, provocou nas pessoas a necessidade de que se tivesse uma opinião sobre o assunto. Mexeu com toda a sociedade da época, fazendo com todos de alguma forma tivessem um conceito sobre a Matemática Moderna.

Os autores concluíram que as pesquisas sobre o MMM devem ser investigadas com mais profundidade as ações desencadeadas no país para a formação de professores para o ensino da Matemática Moderna. Algumas das questões que foram apontadas nesse texto, como por exemplo, quais as relações (se elas existem) que há entre as ideias na primeira e na segunda fase do movimento; se houver, quais seriam as relações do movimento com os problemas econômicos, políticos e sociais que o Brasil enfrentava na época? Quais foram as diferenças na concepção e implantação das novas ideias matemáticas em cada região do Brasil? De onde vieram as ideias que influenciaram o movimento em cada Estado? Tais questões apontam para a complexidade da reforma que pretendia revolucionar o ensino da matemática escolar em nível mundial.

A pesquisa de Claras (2010) teve por objetivo, analisar como a teoria dos conjuntos foi proposta pelo Núcleo de Ensino e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM) e apropriada por professores e alunos da 1ª série do curso ginasial na década de 1960, inícios da década de 1970.

A metodologia utilizada na pesquisa em questão foi a técnica de pesquisa bibliográfica. As fontes escolhidas pelo autor foram: o primeiro volume da coleção didática “Ensino Moderno da Matemática” produzida pelo NEDEM, um Diário de classe, três Provas de Segunda Época, duas entrevistas realizadas com protagonistas do MMM, além de materiais produzidos pelo NEDEM, como os Planos de Curso de Matemática, elaborados a partir do documento denominado “Um Programa Moderno de Matemática para o Curso Secundário”, e duas entrevistas com protagonistas do Movimento da Matemática Moderna do Paraná.

Durante o desenvolvimento da pesquisa o autor constatou evidências das importantes contribuições do trabalho desenvolvido pelo Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM) para educação matemática paranaense, no período em que esteve ativo do início da década de 1960 até meados de 1970. Por outro lado, as fontes também apontaram em vários momentos indicativos de dificuldades e/ou resistências manifestadas por professores e alunos a quem a Matemática Moderna foi apresentada.

Para analisar as fontes o autor utilizou estudos de pesquisadores como Chervel (1982) que aponta instrumentos de como fazer história e Chartier (1990) que discute a ideia de apropriação. Seus conceitos ajudaram a refazer o caminho percorrido pelo grupo paranaense durante o período delimitado pela investigação de Claras(2010).

Os resultados da pesquisa do autor evidenciaram o comprometimento do trabalho do NEDEM no Paraná e sua importância para que a Matemática Moderna fosse implementada no Estado. As investigações indicaram que a produção do primeiro volume da coleção didática “Ensino Moderno da Matemática” foi importante para a consolidação da nova proposta. Porém, o esforço do grupo para elaborar uma proposta original e todo o trabalho de treinar os professores sob a nova proposta parece não ter sido suficiente para dar conta de prepara-los de maneira que compreendessem a nova forma de ensinar e aprender Matemática e assim utilizassem o livro didático produzido pelo grupo.

O autor concluiu que é necessária a investigação dos motivos que levaram à dissolução do grupo paranaense, em meados da década de 1970, e também apontar quais teriam sido os motivos do abandono da Matemática Moderna pelos professores paranaenses. Outra sugestão seria a de investigar porque mesmo escolhendo utilizar o livro de Sangiorgi os professores paranaenses encontraram dificuldades. E por fim, qual teria sido o verdadeiro motivo para essas “falhas” dos professores e alunos constatados nas fontes investigadas. Seriam dificuldades de compreensão dos conceitos e símbolos que fundamentavam a Teoria dos Conjuntos ou uma resistência à nova proposta por entenderem que não atendia às necessidades da escola daquele momento? O autor acredita que estas sejam averiguações que podem revelar elementos importantes da História da Educação Matemática do Paraná.

A pesquisa de Nery e Batistela (2013) apresentou reflexões sobre a busca de fundamentos para a matemática na transição para o século passado e explicitar o espaço e a importância da teoria dos conjuntos na estrutura dessa ciência.

A metodologia utilizada pelos autores foi uma pesquisa bibliográfica, onde trazem o solo histórico dos acontecimentos ao final do século XIX os quais foram pano de fundo para o surgimento da teoria dos conjuntos. Assim, eles apresentam as correntes filosóficas que tentavam fundamentar a matemática, mostrando as diferentes concepções do que vem a ser a matemática e seus empreendimentos na tentativa de livrá-la de contradições e chegam ao surgimento da teoria dos conjuntos proposta por Cantor que tem um papel de extrema relevância na fundamentação da matemática com o seu tratamento rigoroso do infinito. E a posterior descoberta de antinomias nessa teoria causando grande descontentamento entre os matemáticos, os quais sabiam que a teoria dos conjuntos havia se tornado indispensável à sua ciência.

Como resultado, os autores mostraram que a transição do século XIX para o século passado foi o ápice da busca por fundamentos para a matemática, fundamentos estes que teriam a missão de livrá-la de contradições. Isso fica explícito com os esforços das correntes - logicista, intuicionista e formalista - que tentaram fundamentar a matemática a partir de suas concepções do que vem a ser essa ciência. E apesar da matemática técnica atual sobreviver muito bem sem essas especulações filosóficas, elas são interessantes aos que desejam refletir sobre o que é a matemática e os seus objetos.

Nery e Batistela (2013) narraram que a teoria dos conjuntos de Cantor emerge no momento dessa incansável busca por fundamentos e, se estabelece com o tratamento matemático do infinito como o alicerce para a matemática. Com a fundamentação dessa ciência e dando suporte ao desenvolvimento dos novos ramos da matemática. Contudo, essa teoria é marcada posteriormente pela descoberta de antinomias em seu bojo, o que é remediado pela sua axiomatização.

Os autores concluem que a teoria cantoriana foi e é de extrema importância para a matemática e o seu desenvolvimento. Uma vez que traz luz ao conceito matemático de infinito, que durante toda a história da humanidade foi tido como paradoxal.

O objetivo da dissertação de Aguiar (2015) foi traçar e discutir os principais pontos relacionados à Teoria de Conjuntos.

A metodologia utilizada na pesquisa de Aguiar (2015) foi uma releitura dos principais tópicos ligados à Teoria de Conjuntos do ensino médio, ao mesmo tempo em que fez uma ponte entre estes e outros pontos não menos importantes, tratando conjuntos em uma linguagem mais acadêmica. Foi abordado desde as propriedades e teoremas relacionados a conjuntos finitos, até a sua generalização para conjuntos infinitos, culminando com o Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn. Para tanto, o autor realizou pesquisas bibliográficas em fontes variadas.

Como resultado o autor verificou que é possível uma sistematização dos aspectos relacionados à teoria de conjuntos, de forma que a noção intuitiva de conjuntos seja substituída por uma abordagem mais consistente e rigorosa, dando um aspecto matemático aos tópicos tratados.

Por meio da relação de ordem, segundo Aguiar (2015), conceitos como limite superior, limite inferior, elemento máximo, elemento mínimo, etc. puderam ser agregados ao estudo da teoria de conjuntos, de modo que foi possível estabelecer, pelo Lema de Zorn, que todo conjunto não vazio que possui subconjuntos totalmente ordenados, possui pelo menos um elemento maximal.

Os estudos de Cantor trouxeram à teoria de conjuntos diversas contribuições, de modo que, para sua melhor formalização, surgiu a necessidade de uma melhor sistematização, por meio da qual fosse possível fugir da abordagem intuitiva que era dada por Cantor. Assim é que foram desenvolvidos os axiomas de ZFC, tão bem tratados no trabalho acadêmico do autor.

Dos estudos de Cantor referentes aos conjuntos infinitos, segundo Aguiar (2015), bem como da definição de cardinalidade e enumerabilidade, ficou demonstrado que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos. Ou seja, há infinitos maiores que outros.

Aguiar (2015) narrou que a Hipótese Generalizada do Contínuo é indecidível na Matemática, de modo que a mesma não pode ser aceita como uma verdade infalível, mas também que não pode ser refutada. No entanto, trabalhos de Paul Cohen provaram que a sua aceitação ou a sua negação não causam contradição em relação aos axiomas de ZFC.

O Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein vem afirmar que, segundo Aguiar (2015), dados dois conjuntos A e B, se pudermos estabelecer injeções entre A e um subconjunto de B, e entre B e um subconjunto de A, então A e B têm a mesma cardinalidade.

O autor concluiu que é possível uma sistematização dos aspectos relacionados à teoria de conjuntos, de forma que a noção intuitiva de conjuntos seja substituída por uma abordagem mais consistente e rigorosa, dando um aspecto matemático aos tópicos tratados.

A pesquisa de Nunes (2015) introduziu de forma simplificada os princípios do método axiomático, bem como a forma organizada de pensar e argumentar, ambos aplicados à Teoria dos Conjuntos.

A metodologia utilizada por Nunes (2015), para a realização da pesquisa, perpassa pela escolha do tema, revisão bibliográfica, análises preliminares e analise conclusiva. As fontes de informação foram livros, da qual extraiu as ideias mais interessantes e aplicáveis ao Ensino Médio acerca do tema desenvolvido.

Os resultados da pesquisa de Nunes (2015) foi desenvolver os conceitos básicos de lógica, usando como ponto de partida a linguagem desenvolvida nas operações com conjuntos para a compreensão dos conectivos lógicos apresentados.

A proposta de Nunes (2015) foi que os conceitos de tabelas verdade sejam trabalhados conjuntamente com a tradicional abordagem de operações com conjuntos que antecede o estudo das funções de primeiro e segundo grau no primeiro ano do Ensino Médio.

Nunes (2015) concluiu que embora o conceito de funções seja bem trabalhado no Ensino Médio para modelagem de situações - problema parece fazer falta o desenvolvimento da utilidade em Matemática pura, das correspondências biunívocas como entes de comparação do “tamanho” de dois conjuntos infinitos. Tais aplicações levam a resultados que podem ser apreciados pelos alunos, mesmo que causando estranheza. Além disso, estabelecer bijeções entre conjuntos infinitos exigem do aluno uma postura construtiva e mais ativa do que a assumida simplesmente na análise de funções apresentadas prontas.

O autor ressaltou ainda a nova característica que seja percebida pelos discentes acerca da infinitude dos conjuntos numéricos: Na comparação do conjunto dos números naturais, inteiros e racionais com o conjunto dos irracionais e reais que, tem em comum o fato de serem infinitos, mas com cardinais diferentes. Espera-se que essa nova característica enriqueça a forma como os alunos visualizam esses conjuntos, contribuindo para sua formação matemática.

2.3.6. Estudos Propostos

Esse tipo de pesquisa tem por finalidade propor ações para serem desenvolvidas pelos professores para tornar a aprendizagem eficaz da Teoria de Conjuntos.

O trabalho de Grijó (2010) teve por objetivo, mostrar o desenvolvimento de uma ferramenta educacional para o ensino da matemática.

A metodologia do trabalho do autor, estava baseada no uso de um software de computação numérica (ou algébrica) chamado Octave. Apoiada teoricamente por trabalho de Valente (1999) e Gravina (1996). As atividades descritas no trabalho do autor destinaram-se aos alunos da primeira série do ensino médio.

Grijó (2010) priorizou a aquisição de conhecimento matemático, de maneira significativa, a partir da utilização do software não contemplando, por conseguinte, o aprendizado de sua utilização.

Grijó (2010) salientou que a utilização do software Octave, auxiliará o professor a construir o pensamento e a aprendizagem dos alunos de forma criativa, ao mesmo tempo que lhes permitam uma alfabetização tecnológica.

O uso da tecnologia nas escolas brasileiras, segundo o autor, tem se expandido por meio do uso de computadores com apoio de projetos governamentais e de iniciativa privada. Com a introdução do computador no ensino, o professor tem à sua disposição uma importante ferramenta para a qual deve buscar a melhor forma de utilização.

A transição do método tradicional de ensino para o ensino auxiliado por computador pode afetar não só o professor, mas também o aluno. Devido às possibilidades de experimentação e outros pontos positivos já citados no trabalho do autor, os softwares incentivam a maior participação do aluno em seu próprio aprendizado.

Grijó (2010) concluiu que é importante ressaltar que a uso de tecnologias educacionais não será o “milagre” que mudará radicalmente o ensino da matemática. A utilização de tecnologias envolve mudança de mentalidade, e isso não ocorre imediatamente.

A pesquisa de Pieper, Lauz, Marques e Coutinho (2013) investigou formas alternativas do ensino da Matemática.

A metodologia utilizada por Pieper, Lauz, Marques e Coutinho (2013) foi uma pesquisa com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, os quais eram bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, financiado pela CAPES, sendo um total de 16 estudantes de graduação que formavam este grupo. Todavia, esta atividade foi pensada e é possível de ser aplicada com alunos da Educação de Jovens e Adultos – EJA, das escolas que atuavam neste Programa.

Os autores aplicaram um questionário antes da realização da oficina, para que se tivesse uma ideia de como os sujeitos da oficina veem a matemática em seu cotidiano.

Num primeiro momento, foi realizada uma atividade na forma de oficina, onde o objetivo principal era verificar se os alunos compreendiam os principais conceitos da teoria dos conjuntos.

Após a apresentação do conteúdo a ser abordado, os autores realizaram algumas atividades.

No intuito de aperfeiçoar o ensino da teoria de conjuntos numéricos, os autores buscaram afirmar a ideia deste trabalho também na teoria cognitivista. O cognitivismo enfatiza como o ser humano conhece o mundo. Os cognitivistas também investigam os processos mentais do ser humano de forma científica, tais como a percepção, o processamento de informação e a compreensão.

Os autores acharam necessário a utilização de novos métodos ao ensinar, não somente conjuntos numéricos, mas toda a matemática e disseram que como a oficina ainda não foi realizada nas escolas atuantes no Programa, os resultados serão apresentados no evento.

Pieper, Lauz, Marques e Coutinho (2013) concluíram que todo e qualquer conteúdo possui uma aplicação prática, e a aprendizagem é muito favorecida se esta aplicação for exposta aos alunos de forma eficiente. A proposta de ensinar conjuntos numéricos com aplicação prática em uma área de produção rural visa exatamente isso, beneficiar o aluno, fazer com que ele aprenda de uma forma mais agradável, prática e acessível.

A pesquisa de Tomaz (2016) propôs uma ação pedagógica interdisciplinar para trabalhar a teoria dos conjuntos e a Taxonomia que são assuntos da matemática e biologia, respectivamente, estudados nas escolas do Ensino Médio.

A metodologia utilizada na pesquisa do autor, valeu-se da contribuição de estudiosos que tratam acerca da Interdisciplinaridade no âmbito da Educação, sendo utilizada, com base em Godoy (1995), o método de pesquisa qualitativa com característica documental se dando através de leituras de livros didáticos, artigos científicos, pareceres e boletins, dentre outros parâmetros referentes ao Ministério da Educação, coletando-se, também, dados, de diferentes autores, referente ao estudo da Teoria dos Conjuntos, Taxonomia Biológica e da Interdisciplinaridade. Após a coleta, leitura e seleção do material, foi feita uma consulta a Oliveira (2015), Co orientador, que vem a ser nossa referência no segmento Taxonomia Biológica deste trabalho.

Tomaz (2016) narrou, que a ideia foi trabalhar com um professor de biologia, onde ele apresentava a base conceitual da biologia, ou seja, da taxonomia e buscaram, a partir, daí, introduzir a teoria dos conjuntos mostrando que a classificação dos seres nada mais é que um estudo de conjuntos que os separa de acordo com as suas características. Os conceitos de conjunto universo, união, intersecção, conjunto disjuntos e conjuntos das partes de um conjunto são estudos com base na taxonomia biológica e principalmente no que tange a parte vegetal

O resultado obtido por Tomaz (2016), com o uso da interdisciplinaridade, foi um material didático, alternativo, para ser utilizado em sala de aula por professores de matemática do Ensino Médio, especificamente, nas aulas de Teoria dos Conjuntos. Aplicada a Teoria dos Conjuntos a Taxonomia, um ramo da Biologia.

A Teoria dos Conjuntos foi utilizada na classificação de seres vivos, sendo este o foco principal da obra de Tomaz (2016). Para isto, envolveu o profissional da área de Biologia, Prof. Odacir Fernandes Oliveira, um estudioso da Taxonomia, que foi extremamente importante para fazer conhecer os conceitos da área em consócio.

Tomaz (2016) ao disponibilizar este material a professores de matemática do Ensino Médio, a intenção era fazer com que o mesmo compreenda as ideias básicas da Matemática em consócio com a Biologia e, quando necessário, saiba aplica-las na resolução de problemas do mundo real, motivando assim os seus discentes.

Tomaz (2016) espera que este material venha a contribuir de maneira positiva no trabalho do professor em sala de aula e também no processo de ensino-aprendizagem dos discentes, que é o público alvo, solidificando, aprofundando e ampliando seus conhecimentos na Matemática.

Tomaz (2016) concluiu que para um trabalho futuro, ele propõe a aplicação desta metodologia por parte do professor, observando se realmente este material foi motivador e alcançou melhores resultados por parte dos discentes, ou seja, realmente trouxe elementos de motivação e consequentemente melhora no desempenho dos alunos. É importante saber se o discente se convenceu, de fato, da aplicação da Matemática a outras ciências, aqui exploramos a Biologia, mas outras matérias podem ser aplicadas para o tema da interdisciplinaridade.

2.3.7. Conclusões sobre o estudo

Os resultados encontrados a partir da revisão dos estudos nos proporcionaram uma visão geral do campo educacional no qual nosso objeto de pesquisa está inserido. A variedade de objetivos nos trabalhados revisados nos permitiram refletir sobre os temas considerados e que poderiam contribuir para o desenvolvimento de nossa investigação.

A grande maioria dos trabalhos pesquisados investiga o movimento da Matemática Moderna, mostrando que o movimento não foi eficaz, mas mostrou os avanços que essa ciência teve no final do século XIX, que os livros didáticos deveriam usar a teoria dos conjuntos como linguagem e não como mais um conteúdo isolado.

Os estudos experimentais encontrados foram publicados em 2014 e 2015 e pareceram ser importantes para a investigação em sala de aula a partir de metodologias de ensino alternativas pouco exploradas como outras formas de conduzir o processo de ensino-aprendizagem de Conjuntos, para que os alunos se sintam motivados em resolverem situações problemas de forma contextualizada, desenvolvendo conhecimentos, habilidades e competências demandadas pela sociedade contemporânea. Consideramos que este estudo pode nos ajudar para a elaboração de nossa sequência didática.

2.4 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Para o desenvolvimento da fundamentação matemática, adotaremos como suporte teórico a obra Teoria Elementar dos Conjuntos, de Alencar Filho (1990).

2.4.1. Noção de conjunto

Segundo Alencar Filho(1990) a noção de conjuntos não é suscetível de definição, é uma noção primitiva.

Intuitivamente, sob a designação de conjuntos entende-se por toda coleção bem definida de objetos, não importa de que natureza, considerados globalmente.

São exemplos de conjuntos: conjuntos dos livros de uma biblioteca, das letras da palavra Matemática, das vogais.

2.4.2. Notação dos conjuntos

Um conjunto designa-se geralmente por uma letra latina maiúscula: *A, B, C, ..., X, Y, Z;* Os objetos que constituem um conjunto denominam-se elementos do conjunto, e representam-se habitualmente pelas letras latinas minúsculas: *a, b, c, ..., x, y, z;* O conjunto *A* cujos elementos são *a, b, c,* ... representam-se pela notação: $A = \{a, b, c, ...\}$ Que se lê: "*A* é o conjunto cujos elementos são *a, b, c*, ...". Observe-se que os elementos estão separados por vírgulas e incluídos entre chaves.

Para a Matemática, vários conjuntos de números são importantes:

- O conjunto dos números naturais representado por $\mathbb{N}$;
- O conjunto dos números inteiros representado por $\mathbb{Z}$;
- O conjunto dos números inteiros não negativos representado por $\mathbb{Z}_+$;
- O conjunto dos números inteiros não positivos representado por $\mathbb{Z}_-$;
- O conjunto dos números racionais representado por $\mathbb{Q}$;
- O conjunto dos números reais representado por $\mathbb{R}$;
- O conjunto dos números complexos representado por $\mathbb{C}$;

2.4.3. Relação de Pertinência

Para indicar que um elemento *x* pertence ao conjunto *A*, escreve-se: $x \in A$ e lê: "*x* pertence a *A*". Se um elemento *y* não pertence ao conjunto *A*, escreve-se: $y \notin A$, que se lê: "*y* não pertence a *A*".

Exemplo: Seja A = {a, e, i, o, u}.

Temos:

$a \in A$, $b \notin A$, $e \in A$, $f \notin A$, $i, o, u \in A$

2.4.4. Família de conjuntos

Um conjunto cujos elementos também são conjuntos diz-se uma família de conjuntos ou uma coleção de conjuntos.

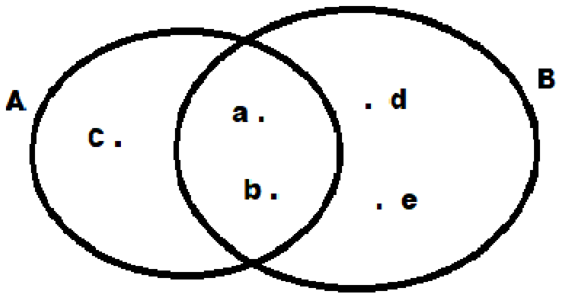
Exemplo: O conjunto F = {{2,3}, {2}, {5,6}} é uma família de conjuntos, cujos elementos são {2,3}, {2}, {5,6}.

2.4.5. Diagramas de Venn

A representação de um conjunto por um recinto plano delimitado por uma linha fechada qualquer não entrelaçada, recebe o nome de diagrama de Venn.

Num diagrama de Venn, os elementos do conjunto indicam-se por pontos internos ao recinto, e elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos externos ao mesmo recinto.

Exemplo: A figura a seguir é o diagrama de Venn dos conjuntos A = {a, b, c} e B = {a, b, d, e}



2.4.6. Conjunto Universo

Chama-se conjunto universo ou apenas universo de uma teoria, o conjunto de todos os entes que são sempre considerados como elementos nessa teoria.

Assim por exemplo, em aritmética, o universo é o conjunto de todos os números inteiros não negativos {0, 1, 2, 3, 4, ...}; e em geometria o universo é o conjuntos de todos os pontos, ou seja, o espaço, etc. O universo também é por vezes chamado conjunto fundamental da teoria e representa-se sempre pela letra U.

Num diagrama de Venn, os elementos do universo U são geralmente representados por pontos internos a um quadrado (ou retângulo) e os demais conjuntos por círculos contidos no quadrado (ou retângulo).

Assim por exemplo, a figura a seguir é o diagrama de Venn do universo:

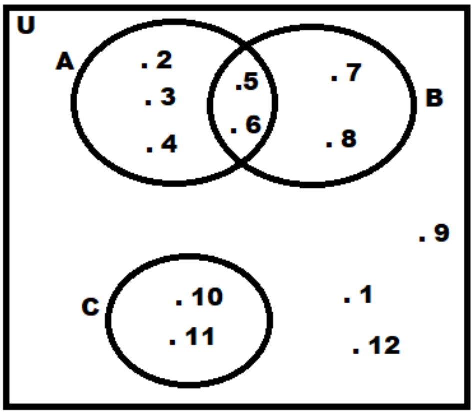
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

e dos três conjuntos:

A = {2, 3, 4, 5, 6}

B = {5, 6, 7, 8}

C = {10,11}



2.4.7. Dar ou definir um conjunto

De modo geral, diz-se que um conjunto *A* é dado ou definido num universo, quando se conhece um critério que permita sempre, a respeito de qualquer elemento *a*, saber se *a* pertence a *A* ($a \in A$) ou se *b* não pertence a *A* ($b \notin A$), devendo verificar-se uma e uma só destas duas hipóteses.

2.4.8. Maneiras de definir um conjunto

São duas as maneiras usuais de dar ou definir um conjunto num determinado universo, a saber:

1. Enumerando individualmente todos os elementos que pertencem ao conjunto.

Exemplos:

1) A = {=, +, %, &, 1}

2) B = {-, x, ?, @, #}

3) C = {Terra, Sol, Lua}

Diz-se, neste caso, que o conjunto está definido por numeração ou extensão ou ainda dado na forma analítica ou forma tabular. Num conjunto definido por enumeração, a ordem dos elementos é indiferente, mas, cada elemento deve figurar somente uma vez.

2. Enunciando um critério de pertinência que é satisfeito por todos os elementos do conjunto e somente por esses elementos.

Este critério de pertinência diz a norma de definição do conjunto e, em geral, consiste em diversas condições (ou propriedades). No universo U, o conjunto *A* dos elementos *x* que verificam a condição *p(x)* (ou possuem a propriedade *p(x)*), indica-se pela notação:

$A = \{x|\ x \in U \text{ e } p(x)\}$

Ou

$A = \{x \in U|\ p(x)\}$

No mesmo universo U, o conjunto *A* dos elementos *x* que verificam as condições *p(x)* e *q(x)* (ou possuem as propriedades *p(x)* e *q(x)*), indica-se pela notação:

$A = \{x \in U|\ p(x) \text{ e } q(x)\}$

Suprime-se, por vezes, nestas notações, a indicação do universo U, e escreve-se mais simplesmente:

$A = \{x \mid p(x)\}$

$A = \{x|\ p(x) \text{ e } q(x)\}$

Desde que nenhuma ambiguidade daí resulte quanto aos elementos que constituem o conjunto.

Exemplos:

1) A = {x ∈ $\mathbb{N}$ | x é par}

2) B = {x ∈ $\mathbb{Z}$| x é divisível por 5}

3) C = {y ∈ $\mathbb{Z}$ | y é primo e y < 8}

Diz-se, neste caso, que o conjunto está definido por compreensão ou dado na forma sintética ou forma construtiva.

2.4.9. Conjunto Unitário

Chama-se conjunto unitário todo conjunto *A* constituído de um único elemento, *a*. Escreve-se: *A* = *{a},* e diz-se que *A* é o conjunto unitário determinado pelo elemento *a*.

Importa notar que uma coisa é um conjunto unitário e outra coisa é o elemento que o determina. Assim temos:

3 ∈ {3} mas não 3 = {3}

2.4.10. Conjunto vazio

Por comodidade de linguagem, convenciona-se dizer que o conjunto de elementos que verificam uma condição impossível é o conjunto vazio (ou conjunto sem elementos).

O conjunto vazio em um determinado universo designa-se pelo símbolo Ø. Assim, no universo R:

$\{x \mid \mathrm{x} + 1 = \mathrm{x}\} = \emptyset$

$\{x \mid x^2 < 0\} = \emptyset$

$\{x \mid \mathrm{x} \neq \mathrm{x}\} = \emptyset$

$\{x \mid 0.\mathrm{x} = 5\} = \emptyset$

2.4.11. Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos

Diz-se que um conjunto *A* é finito e contem *n* elementos quando existe um número natural *n* tal que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos:

A e {1, 2, 3, ..., n}

Um conjunto que não é finito diz-se infinito. O conjunto vazio é considerado finito e com zero elemento. O número de elementos de um conjunto finito *A* designa-se pelo símbolo *n(A)*. Se *A* é vazio, tem-se *n(A)* = 0, e se *A* não é vazio, tem-se *n(A)* ∈ $\mathbb{N}$.

Para indicar por enumeração um conjunto finito com um número não determinado de elementos, usam-se pontos suspensivos intercalados, como, por exemplo:

$\{a, b, c, \ldots, m\}$

E para indicar que há n elementos (n número natural qualquer) escreve-se, por exemplo:

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Exemplos:

a) O conjunto dos dias da semana é finito e contem 7 elementos

b) O conjunto P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} dos números naturais primos é infinito, porque, depois de um número natural primo, há sempre outro número natural primo.

2.4.12. Igualdade de dois conjuntos

Dois ou mais conjuntos são iguais quando apresentam os mesmos elementos, em qualquer ordem. Ou ainda dois conjuntos *A* e *B* dizem-se iguais se e somente se todo elemento que pertence a um deles também pertence ao outro.

Simbolicamente a igualdade entre conjuntos fica definida como:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$

Exemplos:

1) {5, 6, 7} = {7, 6, 5} = {5, 5, 6, 6, 7}
2) $\{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 9, x \neq 7\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 9, x \text{ é par}\}$
3) {triângulos equiláteros} = {triângulos equiângulos}

2.4.13. Propriedade da igualdade de conjuntos

A igualdade de conjuntos possui as seguintes propriedades:

- P_1) Reflexiva: $A = A$

Demonstração:

$Seja, \forall x, \exists x \in A, então\ x \in A, isto\ é, A = A$

- P_2) Simétrica: $A = B \implies B = A$

Demonstração:

$Se\ A = B, então\ \forall x, \exists x \in A\ , se\ e\ só\ se\ x \in B, então\ \ se\ x \in B\ so\ se\ x \in A.$

$Portanto\ B = A.$

- P_3) Transitiva: $A = B\ e\ B = C \Longrightarrow\ A = C$

Demonstração:

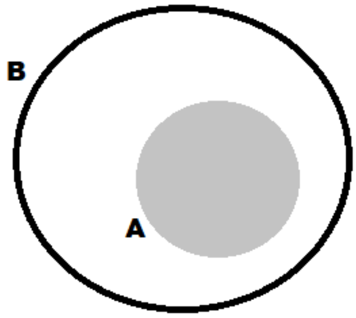
$Se\ A = B\ e\ B = C, então\ \forall x, \exists\ x \in A\ e\ x \in B, e\ se\ x \in B\ e\ x \in C\ então\ x \in A\ e$

$x \in C. Portanto\ A = C.$

2.4.14. Relação de Inclusão

Diz-se que um conjunto *A* está contido num conjunto *B* se e somente se todo elemento de *A* é um elemento de *B*.

Indica-se que *A* está contido em *B* pela notação *A* ⊂ *B*, que se lê: "*A* está contido em *B*". Simbolicamente: $A \subset\ B\ \ \Leftrightarrow\ (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$



A ⊂ B

Quando *A* está contido em *B* também se diz que *B* contém *A*, o que se indica pela notação $B \supset A$, que se lê: "*B* contém *A*".

A negação de $A \subset\ B$ indica-se pela notação $A \not\subset B$, que se lê: "*A* não está contido em *B*". É evidente que $A \not\subset B$ se e somente se existe ao menos um elemento de *A* que não é elemento de *B*, isto é, simbolicamente:

$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A\ e\ x \notin B)$

Com o mesmo significado de $A \not\subset B$, escreve-se $B \not\supset A$, que se lê: "*B* não contém *A*".

Exemplos:

1) $\{1,2\}\ \subset \{1,2,5\}\ ;\ \{1,5,7\}\ \subset\ \{7,1,5\}$

2) O conjunto P dos números naturais pares está contido no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais: $P \subset \mathbb{N}$.

3) O conjunto A dos números naturais terminados por 5 está contido no conjunto B dos números naturais divisíveis por 5: $A \subset B$.

4) Sejam os conjuntos: A dos quadrados, B dos retângulos e C dos paralelogramos. Temos: $A \subset B, A \subset C \; e \; B \subset C$.

2.4.15. Propriedades da relação de inclusão

A relação de inclusão possui as seguintes propriedades:

- *P*$_1$) Reflexiva: $A \subset A$

Demonstração: com efeito, obviamente:

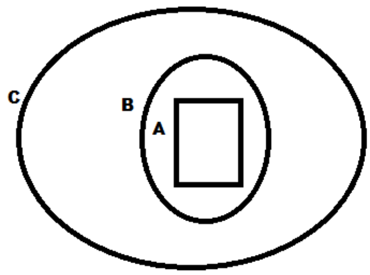
$(\forall x) \; (x \in A \;\; \Rightarrow x \in A), isto \; é, A \subset A$

A inclusão não exclui, pois a igualdade. Se $A \subset B \; e \; A \neq B$, diz-se que a inclusão é estrita e que A está contido estritamente em B.

- *P*$_2$) Transitiva: $A \subset B \; e \; B \subset C \;\; \Rightarrow A \subset C$

Demonstração: Com efeito

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \qquad\qquad\qquad e \\ B \subset C \Rightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C) \end{cases}$$



Logo, pela propriedade transitiva da implicação:

$A \subset B \; e \; B \subset C \;\; \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$

- *P*$_3$) Antissimétrica: $A \subset B \; e \; B \subset A \;\; \Rightarrow A = B$

Demonstração: Com efeito:

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \qquad\qquad\qquad e \\ B \subset A \Rightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) \end{cases}$$

Portanto:

$A \subset B \; e \; B \subset A \;\; \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

Reciprocamente, é obvio:

$A = B \Rightarrow A \subset B \; e \; B \subset A$

- P_4) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto *A*, isto é, $(\forall A)\ (\emptyset \subset A)$.

Demonstração:

Suponhamos que $\emptyset \not\subset A$. Então, existe x tal que $x \in \emptyset\ e\ x \notin A$. Mas, qualquer que seja $x, x \notin \emptyset$. Assim sendo, temos a contradição: $x \in \emptyset$ e $x \notin \emptyset$. Logo $\emptyset \subset A$.

P_5) Qualquer que seja o conjunto *A* num universo U, *A* está contido em U, isto é, $(\forall A)\ (A \subset U)$.

Demonstração:

Com efeito, obviamente:

$(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in U), isto\ é, A \subset U$

2.4.16. Conjuntos comparáveis

Dois conjuntos *A* e *B* dizem-se comparáveis se $A \subset B$ ou $B \subset A$, isto é, se um dos conjuntos está contido no outro.

Portanto, *A* e *B* não são comparáveis se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$. Neste caso, *A* contém ao menos um elemento que não pertence a *B*, e vice versa, *B* contém ao menos um elemento que não pertence a *A*.

Exemplos:

1) Os conjuntos A = {a, b} e B = {a, b, c} são comparáveis, pois A está contido em B: $A \subset B$

2) Os conjuntos C = {1,2} e D = {2, 3, 4} não são comparáveis, pois 1$\in$ C e 1$\notin$ D, 3 $\notin$ C e 3 $\in$ D, isto é, $C \not\subset D$ e $D \not\subset C$.

2.4.17. Subconjunto

Definição – Todo conjunto *A* que está contido num conjunto *B* $(A \subset B)$, diz-se subconjunto ou parte de *B*. Como *B* está contido em si mesmo $(B \subset B)$, *B* é parte de *B*: é a parte cheia de *B*. O conjunto vazio $\emptyset$ também está contido em *B* $(\emptyset \subset B)$, ou seja, $\emptyset$ é parte de *B*: é a parte vazia de *B*. A parte cheia e a parte vazia de um conjunto dizem-se as partes triviais desse conjunto.

Se, em particular, $A \subset B$ e, além disso, *A* não é vazio e é diferente de *B* ($A \neq \emptyset$ e $A \neq B$), e, então se diz que *A* é subconjunto próprio de *B* ou que *A* é parte própria de *B*. Neste caso, todo elemento de *A* é elemento de *B* e existe ao menos um elemento de *B* que não pertence a *A*.

Exemplos:

1) O conjunto A = {1, 2, 3} é subconjunto próprio do conjunto B = {1, 2, 3, 5, 7}.

2) Todo número natural que é múltiplo de 6 (p. ex.,6, 12, 18, ...) também é múltiplo de 3, mas há números naturais múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6 (p. ex.,3, 9, 15, ...). Logo, o conjunto M(6) dos números naturais múltiplos de 6 é subconjunto próprio do conjunto M(3) dos números naturais múltiplos de 3.

2.4.18. Subconjuntos de um conjunto finito

Dado um conjunto finito com *n* elementos, os seus subconjuntos são todos finitos e encerram, quando muito, *n* elementos. Para achar todos esses subconjuntos, quando *n* não é muito grande, pode-se, por exemplo, começar pelo subconjunto vazio, formar depois os subconjuntos com um só elemento (subconjuntos unitários), em seguida formar os subconjuntos com dois elementos, e assim por diante, até chegar ao subconjunto com o número máximo *n* de elementos.

Exemplo: Todos os subconjuntos do conjunto {1, 2, 3} são:

$\emptyset$, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

Observe que o conjunto {1, 2, 3}, com três elementos, tem exatamente $8 = 2^3$ subconjuntos, dos quais $2^3 - 2 = 6$ são subconjuntos próprios.

Teorema: Todo conjunto finito com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Demonstração:

Com efeito, há: $1 = \binom{n}{0}$ subconjunto com zero elemento (subconjuntos vazios), $n = \binom{n}{1}$ subconjuntos com um elemento (subconjuntos unitários), $\binom{n}{2}$ subconjuntos com dois elementos, ..., e finalmente $1 = \binom{n}{n}$ subconjuntos com n elementos. Logo, o número total de subconjuntos é dado pela soma:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Conforme é sabido pala análise combinatória.

2.4.19. Conjunto das partes de um conjunto

Chama-se conjunto das partes de um conjunto *E* o conjunto cujos elementos são todas as partes de *E*, inclusive a parte cheia *E* e a parte vazia $\emptyset$ (partes triviais de *E*).

O conjunto das partes de *E* representa-se por *P(E)* e, por definição, os seus elementos são todos os conjuntos *X* tais que $X \subset E$, isto é, simbolicamente:

$P(E) = \{X \mid X \subset E\}$

Subsistem, pois, as propriedades:

$X \subset E \Leftrightarrow X \in P(E)$

$a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset P(E)$

E as relações:

$\emptyset \in P(E), E \in P(E)$

Consoante o teorema anterior, se *E* é um conjunto finito com n elementos, então *P(E)* também é um conjunto finito com 2^n elementos.

Exemplos:

1) P({a}) = {$\emptyset$, {a}}

2) P({a, b}) = {$\emptyset$, {a}, {b}, {a, b}}

3) P($\emptyset$) = {$\emptyset$}; P({$\emptyset$}) = {$\emptyset$, {$\emptyset$}}

Teorema – Quaisquer que sejam os conjuntos E e F, tem-se:

$E \subset F \ \Leftrightarrow P(E) \subset P(F)$

Demonstração:

Suponha $E \subset F$. Então:

$X \in P(E) \Longrightarrow X \subset E \Longrightarrow X \subset F \Longrightarrow X \in P(F)$

Logo, $P(E) \subset P(F)$.

Suponha, agora, $P(E) \subset P(F)$, como $E \in P(E)$, segue-se que $E \in P(F)$ e, portanto, $E \subset F$.

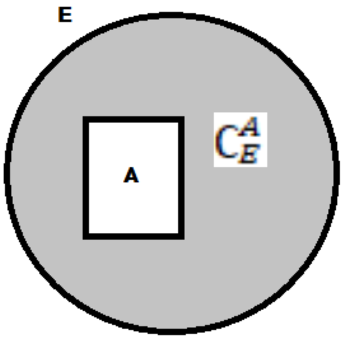
2.4.20. Complementar de um subconjunto

Seja A uma parte de um conjunto $E (A \subset E)$.

Definição: Chama-se complementar de *A* em relação a *E* ou complemento de *A* em relação a *E*, o conjunto de todos os elementos de *E* que não pertencem a *A*.

O complementar de *A* em relação a *E* representa-se por $\complement_E^A$. Portanto, simbolicamente:

$\complement_E^A = \{x \mid x \in E \text{ e } x \notin A\}$



O complementar de *A* em relação a *E* é, pela sua definição, um subconjunto de *E* ($\complement_E^A \subset E$).

O conjunto *E* em relação, em relação ao qual se determina o complementar, chama-se conjunto de referência ou referencial. Considerado, pois a mudança deste implica modificação no complementar de *A*.

Num dado Universo U, pode-se falar simplesmente em complementar de um conjunto *A*, ficando subentendido que se trata do complementar em relação a U, e representa-lo pela notação usual *A*' (*A*' = $\complement_U^A$).

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} A = {2, 4, 6, 8}

B = {1, 3, 5, 7, 9} C = {2, 3, 5, 7}

Temos:

$\complement_E^A = B$; $\complement_E^B = A$; $\complement_E^C = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

2) Seja E o conjunto dos números naturais divisíveis por 5 e A o conjunto dos números naturais terminados em 5.

E = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...} e A = {5, 15, 25, 35, 45, ...}

$\complement_E^A$ = {10, 20, 30, 40, ...}

$\complement_E^A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ termina por } 0\}$

3) Os complementares respectivos do conjunto unitário {0} em relação aos conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ e\ \mathbb{R}$ são os conjuntos $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*\ e\ \ \mathbb{R}^*$.

2.4.21. Propriedades do complementar

Sejam *A* e *B* partes de um conjunto *E* (*A*, $B \subset E$).

- *P*1) $\complement_E^{\emptyset} = E$

Dem.: Com efeito:

$\complement_E^{\emptyset} = \{x / x \in E\ e\ x \in \emptyset\} = \{x /\ x \in E\} = E$

Conclusão: O complementar em relação a *E* da parte vazia de *E* é a parte cheia de *E*.

- *P*2) $\complement_E^{E} =\ \emptyset$

Dem.: Com efeito:

$\complement_E^{E} = \{x / x \in E\ e\ x \notin E\} =\ \emptyset$

Conclusão: O complementar em relação a *E* da parte cheia de *E* é a parte vazia de *E*.

- *P*3) $\complement_E^{(\complement_E^A)} = A$

Dem.: Com efeito:

$\complement_E^{(\complement_E^A)} = \{x / x \in E\ e\ x \notin \complement_E^A\} =\ \{x / x \in E\ e\ x \in A\} =\ \{x / x \in A\} = A$

- *P*4) $A \subset B\ \iff\ \complement_E^A \supset \complement_E^B$

Dem.:

i) Suponhamos $A \subset B$. Então:

$x \epsilon \complement_E^B \Longrightarrow\ x \epsilon E\ e\ x \notin B\ \ \Longrightarrow x \epsilon E\ \ e\ x \notin A\ \ \Longrightarrow\ x \epsilon \complement_E^A$

Portanto, $\complement_E^B \subset \complement_E^A, isto\ é, \complement_E^A \supset \complement_E^B$.

ii) Suponhamos, agora $\complement_E^A \supset \complement_E^B$. Então:

$x \in A \Longrightarrow\ \ x \notin\ \complement_E^A \Longrightarrow x \notin \complement_E^B \Longrightarrow x \in B$

Portanto, $A \subset B$.

Conclusão: A complementação transforma a inclusão ⊂ na inclusão oposta ⊃, isto é, muda o sentido da inclusão.

2.4.22. Interseção de dois Conjuntos

Chama-se *interseção* de dois conjuntos $A\ e\ B$ ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a $A\ e\ a\ B$.

Esse conjunto indica-se pela notação $A \cap B$. Simbolicamente, temos:

$A \cap B = \{x: x \in A\ e\ x \in B\}$

Exemplos:

1) $\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,4\}$.

2) $\{x \in \mathbb{N}: x \leq 7\} \cap \{x \in \mathbb{N}: x > 4\} = \{5,6,7\}$.

3) $\{x \in \mathbb{N}: x \leq 8\} \cap \{x \in \mathbb{N}: x > 3\} = \{x \in \mathbb{N}: 3 < x \leq 8\}$.

4) $\{3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \emptyset$.

5) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$

6) Sejam, respectivamente, R, L e Q o conjunto dos retângulos, o conjunto dos losangos e o conjunto dos quadrados.

Então Q = R ∩ L, o que significa que os quadrados são os retângulos que também são losangos.

2.4.23. Conjuntos Disjuntos

Dois conjuntos $A\ e\ B$ dizem-se *disjuntos* se, e somente, se não tem elementos comuns. Portanto, $A\ e\ B$ são disjuntos se, e somente se, a interseção de $A\ e\ B$ é o conjunto vazio, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

Exemplos.

1) $\{x \in \mathbb{N}: x\ é\ par\}\ e\ \{x \in \mathbb{N}: x\ é\ impar\}$ são disjuntos.

2) O conjunto dos triângulos retângulos e o conjunto dos triângulos equiláteros são disjuntos.

3) Os conjuntos $A = \{1,2,3\}\ e\ B = \{5,6\}$ são disjuntos.

2.4.24. Propriedades da Intersecção

- *P*1) $A \cap B \subset A\ e\ A \cap B \subset B$

Demonstração:

Com efeito,

$x \in A \cap B \iff x \in A \; e \; x \in B \Longrightarrow x \in A \; \therefore A \cap B \subset A$

e,

$x \in A \cap B \iff x \in A \; e \; x \in B \Longrightarrow x \in B \; \therefore A \cap B \subset B$

Assim, a interseção de dois conjuntos está contida em cada um dos conjuntos.

- *P*$_2$) $A \subset B \iff A \cap B = A$

Demonstração:

Suponhamos $A \subset B$. Então:

$x \in A \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in B \iff x \in A \cap B \therefore A \subset A \cap B.$

Como $A \cap B \subset A$ (propriedade P$_1$), segue-se que $A \cap B = A$.

Suponhamos, agora, $A \cap B = A$. Temos que $A \cap B \subset B$ (propriedade *P*$_1$) e, portanto, $A \subset B$. Assim, um conjunto está contido num outro se, e somente se, a interseção de ambos coincide com o primeiro conjunto.

- *P*$_3$) $C \subset A \; e \; C \subset B \iff C \subset A \cap B.$

Demonstração:

Suponhamos $C \subset A \; e \; C \subset B$. Então:

$x \in C \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in B \iff x \in A \cap B \therefore C \subset A \cap B.$

Suponhamos, agora, $C \subset A \cap B$. Então, pela propriedade *P*$_1$,

$C \subset A \cap B \; e \; A \cap B \subset A \Longrightarrow C \subset A$

$C \subset A \cap B \; e \; A \cap B \subset B \Longrightarrow C \subset B$

Assim, um conjunto está contido em dois outros se, e somente se, está contido na interseção de ambos.

- *P*$_4$) $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$

Demonstração:

Com efeito, se $A \subset B$ então, se $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Logo,

$x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in C \Longrightarrow x \in B \; e \; x \in C \Longrightarrow x \in B \cap C \therefore A \cap C \subset B \cap C$.

Assim, se um conjunto está contido num outro, então a interseção do primeiro com um terceiro conjunto está contido na interseção do segundo com o terceiro conjunto.

- *P*$_5$) Interseção com o conjunto vazio: $\emptyset \cap A = \emptyset$

Demonstração:

Com efeito, $\emptyset \subset A \Longrightarrow \emptyset \cap A = \emptyset$.

- P_6) Interseção com o universo: Se U é o conjunto universo então, $A \cap U = A$.

Demonstração:

Com efeito, $A \subset U \Longrightarrow A \cap U = A$.

- P_7) Idempotente: $A \cap A = A$

Demonstração:

Com efeito, $A \subset A \Longrightarrow A \cap A = A$.

- P_8) Comutativa: $A \cap B = B \cap A$

Demonstração:

Com efeito,

$A \cap B = \{x: x \in A \ e \ x \in B\} = \{x: x \in B \ e \ x \in A\} = B \cap A$

- P_9) Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Demonstração:

Com efeito,

$(A \cap B) \cap C = \{x: x \in A \cap B \ e \ x \in C\} = \{x: x \in A \, , x \in B \ e \ x \in C\}$

$= \{x: x \in A \ e \ x \in B \cap C\} = A \cap (B \cap C)$

2.4.25. Interseção de vários conjuntos

A noção de interseção, definida para dois conjuntos, estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos.

Chama-se interseção dos n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos esses n conjuntos. Representa-se esse conjunto pelas notações:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \, ou \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Portanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x: x \in A_1, x \in A_2, x \in A_3 \ e \ldots e \ x \in A_n\} = \{x: x \in A_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemplos.

1) Sejam os conjuntos:

$A_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $A_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}, \ldots, A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

Temos que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$

2) As retas são conjuntos de pontos. A interseção de todas as retas que passam por um ponto P e são paralelas a um plano π é $\{P\}$.

3) A interseção de todas as retas que são ortogonais a um plano e o interceptam em pontos de uma circunferência é o conjunto vazio.

2.4.26. Reunião de dois Conjuntos

Chama-se reunião (ou união) de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A ou a B.

Esse conjunto indica-se pela notação $A \cup B$. Simbolicamente, temos:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Se os conjuntos A e B não forem disjuntos, os seus elementos comuns figuram uma só vez em $A \cup B$.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

3) $\{1, 2\} \cup \{1, \{1, 2\}\} = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

4) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} : 10 < y < 5\}$.

Temos que:

$A \cup B = \{z \in \mathbb{N} : z < 5 \text{ ou } 10 < z < 13\} = \{1, 2, 3, 4, 11, 12\}$

5) Sejam os conjuntos

$C = \{x \in \mathbb{Z}_+ : x \text{ termina em } 0\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Z}_+ : x \text{ termina em } 5\}$.

Temos que:

$C \cup D = \{x \in \mathbb{Z}_+ : x \text{ termina por } 0 \text{ ou por } 5\}$

$= \{x \in \mathbb{Z}_+ : x \text{ é divisível por } 5\} = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

2.4.27. Propriedades da Reunião

- $P_1)\ A \subset A \cup B\ e\ B \subset A \cup B$

Dem.: Com efeito,

$x \in A \Rightarrow x \in A\ ou\ x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \therefore A \subset A \cup B$

e,

$x \in B \Rightarrow x \in A\ ou\ x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \therefore B \subset A \cup B$

Assim, a reunião de dois conjuntos contém cada um dos conjuntos.

- $P_2)\ A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Dem.: Suponhamos $A \subset B$. Então:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A\ ou\ x \in B \Leftrightarrow x \in B \therefore A \cup B \subset B$

Como $B \subset A \cup B$ (propriedade P_1), segue-se que $A \cup B = B$

Suponhamos, agora, $A \cup B = B$. Temos que $A \subset A \cup B$(propriedade P_1) então, $A \subset B$.

Assim, um conjunto está contido num outro se, e somente se, a reunião de ambos coincide com o segundo conjunto.

- $P_3)\ A \subset C\ e\ B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$.

Dem.: Suponhamos $A \subset C\ e\ B \subset C$. Então:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A\ ou\ x \in B \Rightarrow x \in C\ ou\ x \in C \Rightarrow x \in C \therefore A \cup B \subset C$.

Suponhamos, agora, $A \cup B \subset C$. Então, pela propriedade P_1,

$A \subset A \cup B\ e\ A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C A \subset A \cup B\ e\ A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$B \subset A \cup B\ e\ A \cup B \subset C \Rightarrow B \subset C$

Assim, dois conjuntos estão contidos num terceiro se, e somente se, a reunião dos dois primeiros está contido no terceiro.

- $P_4)\ A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$

Dem.: Com efeito, se $A \subset B$ então, se $x \in A \Rightarrow x \in B$. Logo,

$x \in A \cup C \Rightarrow x \in A\ ou\ x \in C \Rightarrow x \in B\ ou\ x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \therefore A \cup C \subset B \cup C$.

Assim, se um conjunto está contido num outro, então a reunião do primeiro com um terceiro conjunto está contido na reunião do segundo com o terceiro conjunto.

- $P_5)$ Reunião com o conjunto vazio: $\emptyset \cup A = A$

Dem.: Com efeito, $\emptyset \subset A \Rightarrow \emptyset \cup A = A$.

- P_6) Reunião com o universo: Se U é o conjunto universo então, $A \cup U = U$.

Dem.: Com efeito, $A \subset U \Longrightarrow A \cup U = U$.

- P_7) Idempotente: $A \cup A = A$

Prova. Com efeito, $A \subset A \Longrightarrow A \cup A = A$.

- P_8) Comutativa: $A \cup B = B \cup A$.

Dem.: Com efeito,

$A \cup B = \{x: x \in A \ ou \ x \in B\} = \{x: x \in B \ ou \ x \in A\} = B \cup A$

- P_9) Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Dem.: Com efeito,

$(A \cup B) \cup C = \{x: x \in A \cup B \ ou \ x \in C\} = \{x: x \in A \ ou \ x \in B \ ou \ x \in C\}$

$= \{x: x \in A \ ou \ x \in B \cup C\} = A \cup (B \cup C)$

- P_{10}) Leis de absorção: $A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$

Prova. Com efeito,

$A \subset (A \cup B) \ \therefore \ A \cap (A \cup B) = A$

e

$(A \cap B) \subset A \therefore \ A \cup (A \cap B) = A$

- P_{11}) Distributividade da interseção com relação à reunião:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dem.:

$A \cap (B \cup C) = \{x: x \in A \ e \ x \in B \cup C\} = \{x: x \in A \ e \ (x \in B \ ou \ x \in C)\}$

$= \{x: (x \in A \ e \ x \in B) \ ou (x \in A \ e \ x \in C)\} = \{x: x \in A \cap B \ oux \in A \cap C\}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- P_{12}) Distributividade da reunião com relação à interseção:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dem.:

$A \cup (B \cap C) = \{x: x \in A \ ou \ x \in B \cap C\} = \{x: x \in A \ ou \ (x \in B \ e \ x \in C)\}$

$= \{x: (x \in A \ ou \ x \in B) \ e \ (x \in A \ ou \ x \in C)\} = \{x: x \in A \cup B \ e \ x \in A \cup C\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- P_{13}) Leis de DE MORGAN: $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Dem.: Com efeito,

$(A \cap B)' = \{x: x \in U \ e \ x \notin (A \cap B)\} = \{x: x \in U \ e \ (x \notin A \ ou \ x \notin B)\}$

$= \{x: (x \in U \ e \ x \notin A) \ ou \ (x \in U \ e \ x \notin B)\} = \{x: x \in A' ou \ x \in B'\} = A' \cup B'$

e

$$(A \cup B)' = \{x : x \in U \ e \ x \notin (A \cup B)\} = \{x : x \in U \ e \ (x \notin A \ e \ x \notin B)\}$$
$$= \{x : (x \in U \ e \ x \notin A) \ e \ (x \in U \ e \ x \notin B)\} = \{x : x \in A' e \ x \in B'\} = A' \cap B'$$

2.4.28. Reunião de vários conjunto

A noção de reunião, definida para dois conjuntos, estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos.

Chama-se reunião dos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ao conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um desses n conjuntos.

Representa-se esse conjunto pelas notações:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \ ou \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Portanto,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 ou \ x \in A_2 ou \ldots ou \ x \in A_n\} = \{x : \exists A_i, i = 1, 2, \ldots, n \ com \ x \in A_i\}.$$

Exemplos.

1) Sejam os conjuntos:

$$\mathrm{A}_1 = \{1, 2\}, \mathrm{A}_2 = \{2, 3\}, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n} = \{n, n+1\}.$$

Temos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}.$$

2) As retas são conjuntos de pontos. A reunião de todas as retas que passam por um ponto P e são paralelas a um plano π é o plano que passa por P e é paralelo a π .

3) A reunião de todas as retas que são ortogonais a um plano e o interceptam em pontos de uma circunferência é uma superfície cilíndrica de revolução.

2.4.29. Diferença de Conjuntos

Chama-se *diferença* entre os conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Esse conjunto indica-se pela notação $A - B$.

Simbolicamente, temos:

$A - B = \{x : x \in A \; e \; x \notin B\}$.

Observações:

1) Se os conjuntos A e B forem disjuntos então $A - B = A$.

2) $x \in A - B \Longrightarrow x \in A$ e isto significa que a diferença entre A e B é um subconjunto de A isto é, $A - B \subset A$.

3) $A - B \neq B - A$, isto é a diferença de conjuntos não é comutativa.

Exemplos.

i) Sejam os conjuntos $\mathrm{A} = \{1, 3, 4, 5, 7\}, \mathrm{B} = \{1, 3, 4, 5\}$ e $\mathrm{C} = \{3, 5, 8, 9\}$.

Temos:

$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{7\}, \mathrm{B} - \mathrm{A} = \emptyset, \mathrm{B} - \mathrm{C} = \{1, 4\}$ e $\mathrm{C} - \mathrm{B} = \{8, 9\}$.

ii) Sejam os conjuntos $\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : \mathrm{x}\ \text{é múltiplo de}\ 5\}$ e $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : \mathrm{x}\ \text{é par}\}$.

Temos:

$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : \mathrm{x}\ \text{termina por}\ 5\}$.

iii) A diferença entre o conjunto dos triângulos e o conjunto dos polígonos que tem pelo menos, um par de lados desiguais, é o conjunto dos triângulos equiláteros.

2.4.30. Propriedades da diferença

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U.

- $P_1)$ $A - \emptyset = A \; e \; \emptyset - A = \emptyset$

Dem.: Com efeito,

$A - \emptyset = A \cap \emptyset' = A \cap U = A$

$\emptyset - A = \emptyset \cap A' = \emptyset$

- $P_2)$ $A - U = \emptyset \quad e \quad U - A = A'$

Dem. Com efeito,

$A - U = A \cap U' = A \cap \emptyset = \emptyset$

$U - A = U \cap A' = A'$

- $P_3)$ $A - A = \emptyset$

Dem.: Com efeito,

$A - A = A \cap A' = \emptyset$

- $P_4)$ $A - A' = A$

Dem.: Com efeito,

$A - A' = A \cap (A')' = A \cap A = A.$

- $P_5)$ $(A - B)' = A' \cup B$

Dem.: Com efeito,

$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$

- $P_6)$ $A - B = B' - A'$

Dem.: Com efeito,

$A - B = A \cap B' = B' \cap (A')' = B' - A'$

- $P_7)$

$a)$ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

$b)$ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

Dem.: Com efeito,

a) $(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$

$$b) \; A - (B - C) = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) \\ = (A - B) \cup (A \cap C)$$

- $P_8)$

$a)$ $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

$b)$ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Dem.: Com efeito,

$$\text{a) } A \cup (B - C) = A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C') = (A \cup B) \cap (C \cap A')' \\ = (A \cup B) - (C \cap A') = (A \cup B) - (C - A)$$

$$b) \; A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \\ = (A \cap B) \cap (A' \cup C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) - (A \cap C)$$

Observação. A propriedade P_8, *b)* nos diz que a interseção é distributiva em relação à diferença.

- $P_9)$

$a)$ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$b)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Dem.: Com efeito,

$$\text{a) } A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap (A \cap C') \\ = (A - B) \cap (A - C)$$

$$b) \; A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') \\ = (A - B) \cup (A - C)$$

- $P_{10})$

a) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

b) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

Dem.: Com efeito,

$a)$ $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C') = (A - C) \cup (B - C)$

$b)$ $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C' = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A - C) \cap (B - C)$

- $P_{11})$

$a)$ $\mathrm{A} - (A - B) = A \cap B$

b) $(A - B) - B = A - B$

Dem.: Com efeito,

a) $\mathrm{A} - (A - B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B)$
$= A \cap B$

b) $(A - B) - B = (A \cap B') \cap B' = A \cap (B' \cap B') = A \cap B' = A - B$

2.4.31. Diferença simétrica

Chama-se *diferença simétrica* dos conjuntos $A\ e\ B$ ao conjunto de todos os elementos que pertencem a um e somente a um dos conjuntos $A\ e\ B$.

Esse conjunto indica-se pela notação $A \,\Delta\, B$

Simbolicamente, temos:

$A \,\Delta\, B = \{x: (x \in A\ e\ x \notin B) ou (x \in B\ e\ x \notin A)\}$.

Pela definição de diferença de dois conjuntos temos:

$x \in A\ e\ x \notin B \Longrightarrow x \in (A - B)$

$x \in B\ e\ x \notin A \Longrightarrow x \in\ (B - A)$

Logo,

$A \,\Delta\, B = \{x: x \in A - B\ ou\ x \in B - A\}$.

Portanto,

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$.

Observação.

$A \,\Delta\, B = \{x: x \in A \cup B\ e\ x \notin A \cap B\}$

ou seja,

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Exemplos:

1) $\{1, 2, 3, 4\} \,\Delta\, \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$

2) $\{2,4,6\}\,\Delta\,\{2,4,6,8,10\} = \{8,10\}$

3) $\mathbb{Z}\,\Delta\,\mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+\,\Delta\,\mathbb{N} = \{0\}$, $\mathbb{Z}_+\,\Delta\,\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}^*$

2.4.32. Propriedades da diferença simétrica

Sejam $A, B\ e\ C$ conjuntos quaisquer num universo U.

- $P_1)\ A\,\Delta\,\emptyset = A$

Dem.: Com efeito,

$A\,\Delta\,\emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$

- $P_2)\ A\,\Delta\,U = A'$

Dem.: Com efeito,

$A\,\Delta\,U = (A - U) \cup (U - A) = \emptyset \cup A' = A'$

- $P_3)\ A\,\Delta\,A' = U$

Dem.: Com efeito,

$A\,\Delta\,A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = U$

- $P_4)\ A\,\Delta\,A = \emptyset$

Dem.: Com efeito,

$A\,\Delta\,A' = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset.$

- $P_5)$ Comutativa: $A\,\Delta\,B = B\,\Delta\,A$

Dem.: Com efeito,

$A\,\Delta\,B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B\,\Delta\,A.$

- $P_6)\ (A\,\Delta\,B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

Dem.: Com efeito,

$$\begin{aligned}(A\,\Delta\,B)' = [(A - B) \cup (B - A)]' &= (A - B)' \cap (B - A)' = (A \cap B')' \cap (B \cap A')' \\ &= (A' \cup B) \cap (B' \cup A) = [(A' \cup B) \cap B'] \cup [(A' \cup B) \cap A] \\ &= [(A' \cap B') \cup (B \cap B')] \cup [(A' \cap A) \cup (B \cap A)] \\ &= [(A' \cap B') \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (B \cap A)] = (A \cap B) \cup (A' \cap B')\end{aligned}$$

- $P_7)$ Associativa: $(A\,\Delta\,B)\Delta\,C = A\,\Delta(B\,\Delta\,C)$

Dem. Com efeito, um elemento $x \in (A\,\Delta\,B)\Delta\,C$ somente nos dois seguintes casos:

$x \in A\,\Delta\,B\ e\ x \notin C$

$x \notin A\,\Delta\,B\ e\ x \in C$

ou seja, somente nos quatro seguintes casos:

$i)\ x \in A, x \notin B\ e\ x \notin C$

$ii)\ x \notin A, x \in B\ e\ x \notin C$

$iii)\ x \in A, x \in B\ e\ x \in C$

$iv)\ x \notin A, x \notin B\ e\ x \in C$

Assim sendo, $(A \,\Delta\, B) \Delta\, C$ é o conjunto de todos os elementos x para os quais são verdadeiras as três relações $x \in A, x \in B\ e\ x \in C$ ou somente uma delas.

Analogamente, um elemento $x \in A\, \Delta (B \,\Delta\, C)$ somente nos dois seguintes casos:

$x \in A\ \ e\ x \notin\ B\Delta C$

$x \notin A\ \ e\ x \in B\Delta C$

ou seja, somente nos quatro seguintes casos:

$i)\ x \in A, x \in B\ e\ x \in C$

$ii)\ x \in A, x \notin B\ e\ x \notin C$

$iii)\ x \notin A, x \in B\ e\ x \notin C$

$iv)\ x \notin A, x \notin B\ e\ x \in C$

Assim sendo, $A\Delta(B \,\Delta\, C)$ é o conjunto de todos os elementos x para os quais são verdadeiras as três relações $x \in A, x \in B\ e\ x \in C$ ou somente uma delas. Portanto, subsiste a igualdade $(A \,\Delta\, B) \Delta\, C = A\ \Delta(B \,\Delta\, C)$.

- $P_8)$ Distributividade da interseção em relação à diferença simétrica:

$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

Dem.: Com efeito,

$$\begin{aligned} A \cap (B\Delta C) &= A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)] = [A \cap (B \cup C) - A \cap (B \cap C)] \\ &= [A \cap (B \cup C)] \cap [A \cap (B \cap C)]' = [A \cap (B \cup C)] \cap [A' \cup (B' \cup C')] \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A' \cup B')] \cup (A' \cup C') \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [(A \cap B) \cap (A \cap C)]' \\ &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [(A \cap B) \cap (A \cap C)] = (A \cap B)\Delta(A \cap C) \end{aligned}$$

- $P_9)\ A \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C)$

Dem.: Com efeito

$$\begin{aligned} A \cup (B\Delta C) &= A \cup [(B \cup C) - (B \cap C)] = A \cup (B \cup C) - [(B \cap C) - A] \\ &= [A \cup (B \cup C)] - [(B \cap C) \cap A'] = (A \cup B \cup C) - (A' \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- $P_{10})\ a)\ (A\Delta B) - C = (A \cap C')\Delta(B \cap C')$

  $b)\ A - (B\Delta C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$

Dem.: Com efeito,

$$a)\ (A\Delta B) - C = (A\Delta B) \cap C' = (A \cap C')\Delta(B \cap C')$$

$$b)\ A - (B\Delta C) = A \cap (B\Delta C)' = A \cap [(B \cap C) \cup (B' \cap C')]$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C')$$

Dando continuidade no desenvolvimento das análises prévias sobre o ensino de Conjuntos, elaboramos um diagnóstico que investiga sobre o ensino de Conjuntos na visão dos alunos egressos do 2° ano do Ensino Médio da rede pública do Estado do Pará.

2.5. Experiências de alunos no processo de ensino-aprendizagem de conjuntos

O objetivo desta subseção é apresentar os resultados de uma pesquisa realizada a partir de levantamento de dificuldades no ensino de Conjuntos, a mesma foi desenvolvida com a participação de 100 alunos, do 2º ano do Ensino Médio de escolas públicas estaduais dos municípios de Marabá e Belém (Pará), no período de abril a junho de 2017.

O instrumento utilizado foi um questionário fechado contendo itens sobre dados pessoais, escolaridade dos pais e como ele se comporta frente as dificuldades na disciplina de Matemática.

A pesquisa possui uma abordagem bibliográfica, documental e questionário, pois está sendo feito uma investigação a partir de trabalhos e estudos realizados por outras pessoas e se concentra em dados obtidos a partir de documentos que registram fatos de uma determinada época.

É importante ressaltar que o questionário foi respondido em tempo e escolas diferentes. O entrevistador apenas solicitou que os alunos respondessem as perguntas do referido instrumento, logo em nenhum momento foi feita intervenção durante o processo de preenchimento do questionário. Após o preenchimento de todos os questionários, partimos para a etapa da análise dos dados produzidos.

Os alunos investigados são de escolas públicas estaduais do Pará, Com base nesta pesquisa, constatamos que 62% dos estudantes são do sexo feminino e 38% são do sexo masculino.

QUADRO 2 – Distribuição por gênero dos alunos egressos, segundo a idade

Idade	Masc.	Fem.	FR
14	1%	-	1%
15	5%	9%	14%
16	22%	47%	69%
17	8%	5%	13%
18	1%	1%	2%
19	1%	-	1%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

Podemos perceber que a maior parte dos alunos tem idade de 16 anos (69%), cuja distribuição para o gênero masculino é de 22% e 47% para o gênero feminino, este último sendo o maior percentual de acordo com a tabela. O segundo maior percentual em relação à idade, são alunos com 15 anos (14%), em que 9% são meninas.

O quadro 3 apresenta o nível de escolaridade dos responsáveis dos alunos.

QUADRO 3 – Nível de Escolaridade dos responsáveis dos alunos

Nível de escolaridade	Responsável Masculino	Responsável Feminino
Nenhum	1%	0%
Fundamental incompleto	25%	23%
Fundamental completo	10%	13%
Ensino Médio incompleto	16%	9%
Ensino Médio completo	36%	40%
Ensino Superior completo	5%	7%
Pós-Graduação completo	7%	8%
Total	100%	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

Em relação à escolaridade dos pais a análise indicou que a maioria dos responsáveis possui o ensino médio completo, 36% para responsáveis masculinos e 40% para responsáveis femininos.

De acordo com Nascimento (2011), “Mesmo pais com pouca escolaridade podem ajudar os filhos a ter boas notas se demonstrarem interesse pela vida escolar da criança e participem das atividades do colégio”. Podemos dizer que os pais não precisam saber o conteúdo para participar da vida escolar de seus filhos, basta que se interessem pelo cotidiano escolar, isso tem um impacto muito positivo.

O quadro 4 apresenta o hábito de estudo da Matemática fora da escola pelos alunos.

QUADRO 4 – Hábito de estudo da Matemática fora da escola

Hábito de estudo da Matemática fora da escola	%
Todos os dias	13%
Somente nos finais de semana	23%
Somente no período de prova	32%
Somente na véspera da prova.	20%
Nunca	12%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

Os estudos apontam que 32% estudam somente no período de prova. Realidade contraria onde 12% dos alunos não costumam estudar fora da escola. Esse dado é preocupante, pois isso demonstra que os mesmos não tem o costume de estudar frequentemente para almejar um bom aprendizado, pois são nesses momentos que surgem as dúvidas e podem ser sanadas com o professor durante as aulas de matemática, e com isso melhorar o desempenho escolar.

QUADRO 5 – Apresenta o gosto dos alunos egressos pela matemática

Gosta de Matemática	%
Não gosto	20%
Um Pouco	48%
Sim. Gosto	23%
Sim. Gosto bastante	9%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

A análise indicou que 48% gostam apenas um pouco de matemática, e 20% não gostam nenhum pouco dessa ciência. Por esse motivo, acreditamos serem indispensáveis os estudos que melhorem essa situação.

Segundo Tatto e Scapin (2004),após realizar diversas leituras, entrevistas e análises, pôde-se concluir e constatar que as causas da rejeição à Matemática são ou estão relacionadas à ideia pré-concebida de que a Matemática é difícil pelas experiências negativas passadas, à falta de interesse e a uma autoimagem negativa que o aluno tem de si, à falta de apoio familiar, à falta de motivação devido aos conteúdos não terem uma aplicação prática, à falta de incentivos de alguns professores e à formação não específica, ao relacionamento humano em conflito, ao condicionamento, à passividade e ao uso da memória em detrimento do raciocínio, podendo estas causas ser extrínsecas ou intrínsecas aos alunos.

O quadro 6 apresenta a compreensão dos alunos na matemática.

QUADRO 6 - Compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática

Compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática	**%**
Sempre	11%
Quase sempre	45%
Poucas vezes	41%
Nunca compreendo	3%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

Em relação a compreender as explicações dadas nas aulas de matemática. Quarenta e cinco por cento compreende quase sempre e 3% nunca compreende.

O professor deve tentar explicar o conteúdo utilizando uma linguagem simples, para que se faça entender pelos alunos, e dar abertura para que os mesmos possam perguntar e tirar suas dúvidas.

O quadro 7 apresenta a forma de avaliação aplicada pelos professores de matemática.

QUADRO 7 - Forma de avaliação aplicada pelos professores de matemática

Formas de avaliação	**%**
Prova oral	2%
Prova escrita	48%
Auto avaliação	6%
Fichas de observação	0%
Produções no caderno	19%
Outros	0%
Combinações das anteriores	25%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Quanto às formas de avaliação, 48% dos professores aplicam prova escrita, 19% produções no caderno e 25% combinações das formas anteriores. Por não ver a aplicação do conteúdo em sua vida diária, os alunos se desinteressam e logo mostram a insatisfação de estudar matemática. A avaliação nessa amostra, tem sido tradicional, mas sabemos que a avaliação deve ser contínua, devemos valorizar todas as possíveis técnicas para que aconteça a melhora do desempenho escolar.

QUADRO 8 – Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática

Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática	**%**
Professor particular	2%
Responsável Masculino	9%
Responsável Feminino	12%
Irmão	10%
Ninguém	52%
Outro	9%
Combinações das anteriores	6%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

De acordo como o quadro 8 quanto ao auxílio na atividade extraclasse os alunos responderam ao seguinte questionamento: quem mais lhe ajuda nas tarefas de casa? Os resultados apresentam que 52% estudam sozinhos e apenas 12% com o seu responsável Feminino. Segundo Vygotsky (1991) a aprendizagem acontece por meio de uma zona de desenvolvimento proximal que pode ser definida da seguinte forma:

> “A zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. O nível real exprime o desempenho da criança ao realizar suas tarefas sem ajuda de ninguém, e o nível potencial representa aquelas tarefas que a criança só consegue realizar com ajuda de alguém” (VYGOTSKY, 1991, p. 97).

Podemos perceber que a maioria dos alunos dessa amostra está sozinho nesse processo, o que acarreta um fracasso escolar e um desinteresse em estudar.

QUADRO 9 – Como se sente quando está sendo avaliado

Como se sente quando está sendo avaliado	**%**
Entusiasmado	6%
Tranquilo	19%
Com Medo	4%
Preocupado	22%
Com Raiva	2%
Sinto Calafrios	4%
Outros: nervoso e muito calmo	1%
Combinações das anteriores	42%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

O quadro 9 apresenta como o aluno se sente quando está sendo avaliado em Matemática. Diante dos resultados, percebe-se que 22% dos alunos se sentem preocupados e 19% se sentem tranquilos. Quando o aluno está sendo avaliado, uns ficam preocupados e outros tranquilos, os que ficam preocupados sabem que não se prepararam o suficiente para que seu desempenho seja satisfatório. E os que ficam tranquilos ou se preparam ou não se preparam e se acomodam com seu fracasso.

QUADRO 10 – Modo como os professores ensinaram conjuntos

Modo como os professores ensinaram conjuntos	**%**
Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios.	76%
Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto.	12%
Criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.	8%
Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos.	2%
Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas.	0%
Outra metodologia:	2%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

O quadro 10 apresenta o modo como os professores ensinaram Conjuntos. Em relação ao processo da didática utilizada no ensino-aprendizagem de Conjuntos, perguntamos “Quando você estudou o assunto Conjuntos a maioria das aulas foi?”. Assim obtivemos 76% das respostas, começando pela definição seguida de exemplos e exercícios, confirmando a metodologia tradicional, já 12% dos alunos afirmam que os docentes iniciam as aulas com uma situação problema para depois introduzir o assunto. As aulas de matemática estão desinteressantes e desmotivadoras, temos que encontrar meios de torná-las interessantes e desafiadoras.

O quadro 11 apresenta os recursos didáticos para fixação do assunto de Conjuntos.

QUADRO 11 – Recursos didáticos para fixação do assunto de Conjuntos

Para fixar o conteúdo de Conjuntos, o seu professor (a):	**%**
Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos	72%
Apresentava jogos envolvendo o assunto	1%
Mandava resolver os exercícios do livro didático	19%
Não propunha questões de fixação	3%
Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.	3%
Propunha a resolução de questões por meio de softwares	2%
Total	100%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

Em relação à fixação de conteúdo foi questionado o seguinte: para fixar o conteúdo estudado de Conjuntos o seu professor: 72% dos alunos afirmaram que o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos e 19% mandava resolver exercícios no livro didático.

A primeira ferramenta tecnológica a ser usada no processo ensino-aprendizagem, segundo Miranda e Laudares (2007), é o livro didático, onde o professor cria atividades a serem trabalhadas pela leitura do livro didático ou de outros relacionados na bibliografia, mas é preciso sair dos antigos moldes de ensinar Matemática, nos quais a exposição oral e a resolução de exercícios eram praticamente os únicos meios empregados e lograr espaço às tendências de ensino da Educação Matemática, como jogos, investigações matemáticas, uso de materiais manipuláveis, mídias tecnológicas e resolução de problemas, entre outras.

No que se refere ao grau de dificuldade em aprender Conjuntos foi montado um quadro com as respostas de cada item pedido no questionário. Em seguida a análise de cada questão para confrontar as informações do quadro de assuntos e seu respectivo desempenho.

QUADRO 12 – Grau de dificuldade de aprendizagem de Conjuntos na opinião dos alunos egressos

Conteúdo	**Você lembra de ter estudado?**		**Grau de dificuldade para aprender**				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Muito difícil	Difícil
Noção de Conjuntos	56%	44%	5%	10%	37%	2%	2%
Noção de elemento	33%	67%	3%	6%	21%	0%	3%
Relação de pertinência	20%	80%	2%	4%	11%	1%	2%
Conjunto Vazio	40%	60%	8%	8%	23%	0%	1%
Conjunto Unitário	34%	66%	5%	5%	20%	0%	4%
Subconjuntos	52%	48%	7%	11%	24%	2%	8%
Relação de Inclusão	27%	73%	2%	5%	15%	1%	4%
União de Conjuntos	49%	51%	7%	7%	27%	2%	6%
Propriedades da União	35%	65%	3%	7%	22%	2%	1%
Intersecção de Conjuntos	35%	65%	5%	8%	18%	2%	2%
Propriedades da Intersecção	31%	69%	3%	6%	20%	0%	2%
Diferença de Conjuntos	2%	48%	2%	11%	29%	2%	8%
Propriedades da diferença	40%	60%	2%	10%	24%	2%	2%
Complementar de um Conjunto	33%	67%	4%	5%	19%	2%	3%
Propriedades do Complementar	31%	69%	2%	5%	19%	2%	3%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da União de dois conjuntos.	45%	55%	3%	2%	29%	2%	9%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da intersecção de dois conjuntos.	43%	57%	3%	7%	28%	2%	3%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos que estão em somente um dos dois conjuntos.	48%	52%	5%	9%	25%	2%	7%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos do complementar da união de dois conjuntos.	42%	58%	5%	8%	24%	2%	3%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da União de três conjuntos.	33%	67%	3%	3%	23%	1%	3%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da intersecção de três conjuntos.	35%	65%	4%	1%	25%	2%	3%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos que estão em somente um dos três conjuntos.	36%	64%	5%	1%	25%	3%	2%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos do complementar da união de três conjuntos.	35%	65%	5%	4%	24%	1%	1%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017).

A maioria dos alunos não se lembram de ter estudado quase nada de conjuntos, esse conteúdo que está relacionado a linguagem simbólica e que não está se dando a devida importância.

Quando se fala em noção de conjuntos a maioria dos alunos dessa amostra teve um grau de dificuldade regular no que diz respeito a aprendizagem, o que nos mostra que devemos utilizar a linguagem matemática para introduzir a noção de Conjunto, pois os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) dizem que uma das habilidades e competências que devemos desenvolver no aluno, é que ele se expresse com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

Com relação a noção de elemento, apenas 33% disse que estudou este conteúdo, 21% acharam regular e apenas 6% acharam fácil. Percebemos dessa forma que a definição eles entendem, mas por não conhecerem os símbolos, eles não conseguem completar de forma correta as sentenças.

As operações e propriedades de conjuntos a maioria não se lembra de ter estudado, com exceção a diferença de conjuntos onde 52% dos alunos dizem ter estudado e desses 29% acharam regular o grau de dificuldade.

Na resolução de problemas contextualizados, verificamos que a grande maioria que lembra de ter estudado esse tópico, de 24% a 28% acharam regular o grau de dificuldade para aprender. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM(2006), percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Por medo do inesperado, eles se sentem inseguros, ficam desmotivados a reagir e mostrar que são capazes de resolver qualquer problema.

O quadro 13 apresenta o desempenho geral dos alunos no teste de avaliação diagnóstica.

QUADRO 13 – Desempenho geral dos alunos no teste de avaliação diagnóstica

Assunto	Acertos	Erros	Em branco
Relação de Pertinência	44%	39%	17%
Relação de Pertinência e Relação de inclusão	21%	69%	10%
União e Intersecção de conjuntos	7%	25%	68%
Complementar de conjuntos	1%	21%	78%
Diferença e Intersecção de Conjuntos	0%	18%	82%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da intersecção de três conjuntos.	22%	44%	34%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos da união de dois conjuntos	6%	68%	26%
Problemas contextualizados que calcule o número de elementos do complementar de dois conjuntos	20%	49%	31%

(continua)

(continuação)

Assunto	Acertos	Erros	Em branco
Problemas contextualizados que calcula o número de elementos que estão em somente um dos três conjuntos	20%	41%	39%
Problema contextualizado que calcule o número de elementos que conjuntos estão em somente um dos três conjuntos	6%	61%	33%

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

O maior percentual de acertos foi na relação de pertinência (44%), seguido da intersecção de conjuntos (22%), relação de pertinência e relação de inclusão (21%).

As questões de relação de pertinência e relação de inclusão (69%), problema contextualizado que calcule o número de elementos da união de dois conjuntos (68%) e problema contextualizado que calcule o número de elementos que conjuntos estão em somente um dos três conjuntos (61%) não pareceram fáceis na visão dos alunos, ao ter em vista os erros nas referidas questões.

Nas questões de relação de pertinência (15%), problemas contextualizado que calcule o número de elementos da intersecção de três conjuntos (21%), problema contextualizado que calcula o número de elementos que estão em somente um dos três conjuntos (18%), houve alunos que acertaram a metade da questão, o raciocínio foi correto, mas erraram a resposta. Por exemplo, acertam a união e erram a intersecção, acertaram quais elementos estavam nos três conjuntos, mas no momento de descobrir quantos, erraram, acertam quais elementos estão em somente um dos três conjuntos, mas não somaram para descobrir quantos no total estavam nos mesmos.

Em 90% das questões do teste, o percentual de erros foi maior que os acertos. Será que o conteúdo de conjuntos não está sendo trabalhado em sala de aula? Ou não está se dando a devida importância a esse conteúdo? Os erros mais comuns nos problemas contextualizados é que os alunos somaram todos os elementos que foram disponibilizados no enunciado.

Em 30% das questões do teste, o percentual de questões em branco foi maior que os números de acertos e o de erros, e foram justamente nas operações com conjuntos.

3. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI / SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Souza (2014), o termo Sequência Didática surgiu no Brasil nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais como "projetos" e "atividades sequenciadas". Atualmente, as sequências didáticas estão vinculadas ao estudo do gênero textual, porém quando surgiram eram abertas a diferentes objetos do conhecimento.

Para Barbosa (2011), uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, que decompõe as atividades mais complexas, que os estudantes ainda não são capazes de produzir sozinhos, para que possam estudar, um a um, os componentes que se mostrarem como obstáculos à aprendizagem.

Barbosa (2011) narrou que a sequência didática funciona como instrumento de orientação ao trabalho docente, pois direciona a atuação do professor rumo à sistematização do ensino, oferecendo etapas de organização do processo educacional.

Para Sá (2009), o ensino da matemática por atividades, somado a outros saberes tem um papel relevante na formação de um homem cada vez mais dinâmico e reflexivo, consciente de sua capacidade de intervenção na realidade que o circunda e da importância de seu desenvolvimento intelectual para o mundo contemporâneo.

Segundo Sá (2009), utilizando essa metodologia, o aluno passa de mero observador para um criador de suas próprias conclusões, participando, compreendendo e questionando o próprio conhecimento. Para isso os professores devem perceber a necessidade de inserir em suas aulas, uma dinâmica experimental como fator formativo na aprendizagem dos alunos e fazê-los sentir a importância da Matemática na compreensão e transformação do mundo.

Sá (2009) disse que, o professor deve propor situações que conduzam o aluno à descoberta do conhecimento por meio do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados e pela realização de explorações, espera-se que os alunos desenvolvam sua criatividade e criticidade para construir sua aprendizagem.

O referido autor mostrou ainda a necessidade de repensar a maneira como a matemática é ensinada, e como os alunos podem se apropriar desses conhecimentos de modo a favorecê-los tanto na vida acadêmica, quanto na profissional. Para que isso ocorra, torna-se fundamental que os professores busquem a formação continuada e a troca de experiências com seus pares, não descartando inclusive, correr o risco e testar novas intervenções pedagógicas em suas salas de aulas.

Desse modo, os professores poderão oferecer aos estudantes atividades que possam suprir suas necessidades, que envolvam suas habilidades cognitivas e psicomotoras, nas quais eles sejam capazes de manusear materiais e, posteriormente, passar ao domínio cognitivo, concretizando o ato de aprender porque sabem interpretar, manusear e resolver problemas.

Para tanto, cabe-nos propor, e criar estratégias que despertem a atenção dos alunos, trabalhando com exemplos práticos e concretos, sempre aproveitando seus conhecimentos partir da realidade que os circunda e chamando a atenção dos discentes para a importância da aquisição desses saberes.

3.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES

A atividade 01, apresentada a seguir, tem o objetivo de introduzir a definição de conjunto e elemento de um conjunto.

Atividade 01

Título: Os conjuntos

Objetivo: apresentar a noção de conjunto

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha

Procedimento:

1) Enumere os números pares de 1 a 10. ________________________

2) Enumere as fases da lua. ___________________________________

3) Enumere os dias da semana. _______________________________

4) Enumere os meses do ano que começam com a letra M.________

5) Enumere as regiões do Brasil. ______________________________

Os números pares de um a dez, as fases da lua, os dias da semana, os meses do ano que começam com a letra M e as regiões do Brasil são exemplos de conjuntos.

6) Apresente cinco exemplos de conjuntos

Conjunto 1: ____

Conjunto 2: ____

Conjunto 3: ____

Conjunto 4: ____

Conjunto 5: ____

Em matemática os conjuntos são representados por letras latinas maiúsculas e os componentes, quando possível, são escritos entre chaves.

7) Enumere os componentes dos conjuntos a seguir:

a) Conjunto A formado pelos múltiplos de 2 menores que 11.

b) Conjunto B formado pelos números primos menores que 8.

c) Conjunto C formado pelas regiões do Brasil.

d) Conjunto D formado pelas cores primárias.

e) Conjunto E formado pelas letras da palavra CAMELO.

Cada componente do conjunto é chamado de elemento.

8) Enumere os elementos dos conjuntos a seguir

a) conjunto das vogais. ____

b) conjunto dos números ímpares de cinco a doze. ________________

c) conjunto dos números pares menores que sete. ________________

d) conjunto das cores da bandeira do Brasil. ______________________

e) conjunto dos dias da semana que começam com a letra S. ______

Análise a priori da Atividade 01: Esperamos que os alunos possam conceituar conjuntos e identificar corretamente os elementos a partir das indagações feitas nessa atividade.

A atividade 02 foi construída de modo a permitir que os alunos identifiquem relações entre elemento e conjunto.

Atividade 02

Título: Relação de pertinência

Objetivo: Apresentar a relação de pertinência

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

1) Dado o conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Responda

a) o número 1 faz parte do conjunto A?

b) o número 2 pertence ao conjunto A?

c) o número 9 faz parte do conjunto A?

d) o número -3 pertence ao conjunto A?

e) o número 6 faz parte do conjunto A?

2) Usando as expressões faz parte ou não faz parte, para torne as frases verdadeiras:

a) A região norte ..... da região do Brasil.

b) O número dois .... dos números pares.

c) A cor azul ... das frutas.

d) Vermelho ... das cores.

e) O verão ... as estações do ano.

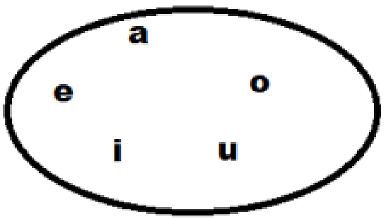
Quando estamos relacionando elemento e conjunto, e o elemento x faz parte do conjunto A, dizemos que x pertence ao conjunto A e representamos por $x \in A$.

3) Use o símbolo $\in$.

a) João --- {João, Maria}

b) 2 --- {1, 2, 3}

c) a ---



d) laranja --- conjunto das frutas.

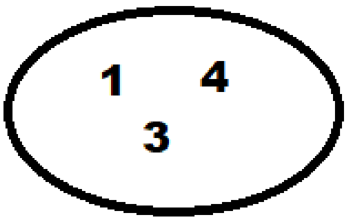
e) 4 --- conjunto dos números pares.

Quando o elemento x não faz parte do conjunto A, dizemos que x não pertence ao conjunto A e representamos por $x \notin A$

4) Use o símbolo $\notin$.

a) João --- {Pedro, Maria}

b) 2 ---



c) a --- {b, e, i, o}

d) laranja --- conjunto dos legumes.

e) 6 --- conjunto dos números ímpares.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO.

1) De acordo com a observação dada anteriormente, use os símbolos $\in$ ou $\notin$:

a) 1 ___ A   b) 2 ___ A   c) 9 ___ A

d) – 3 ___ A   e) 6 ___ A

2) Dados os conjuntos A = {1, 9, 8}, B = {1, 5, 0} e C = {2, 4, 5, 6, 8}, classifique em V(verdadeira) ou F(falso):

a) 1∈ A ( )	b) 1∉ B ( )	c) 1∈ C ( )
d) 8 ∉ A ( )	e) 8 ∈ B ( )	f) 8 ∉ C ( )
g) 0 ∈ A ( )	h) 0 ∈ B ( )	i) 0 ∈ C ( )
j) 2 ∉ A ( )		

3) Observe o mapa dos estados da região Centro-Oeste.

Fonte: Matemática para todos, 2015

De acordo com o mapa analise as informações:

I. Os Estados da Região Centro-Oeste forma um conjunto;

II. O Estado de Goiás pertence à região Centro-Oeste;

III. O Estado de Minas Gerais pertence à região Centro-Oeste;

IV. A Capital do Brasil, Brasília, não pertence à região Centro-Oeste.

V. O Estado do Pará não pertence à região Centro-Oeste.

Quais das afirmações acima são verdadeiras:

a) I, II e III. b) I, II e IV. c) II, III e IV.

d) I, II e V e) III, IV e V

4) Dados os conjuntos *A* = {-1, 0, 1, 2} e *B* = {1, 2, 3, 4...} é incorreto afirmar:

a) *A* e *B*, representam conjuntos;

b) O número 2 ∈ A e 0 ∉ B;

c) O número 1 ∈ A e 1 ∉ B;

d) O número 5 ∈ *B*.

Análise a priori da Atividade 2: Esperamos que na atividade 02, os alunos possam compreender a relação de pertinência. Acreditamos que os alunos não terão dificuldades nessa atividade.

A atividade 03 permite apresentar a noção de subconjunto e a relação de inclusão.

Atividade 03

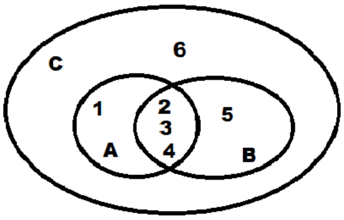
Título: subconjunto

Objetivo: apresentar a noção de subconjunto

Material: Roteiro de atividade, lápis e borracha.

Procedimento:

1) Os conjuntos A= {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 4, 5} e C = {1, 2, 3, 4, 5, 6} foram colocados em um diagrama e temos a seguinte representação:



Use as expressões pertencem e não pertencem

a) 1, 2, 3, 4 ------------------------ ao conjunto C;

b) 1, 2, 3, 4 ------------------------ ao conjunto B;

c) 2, 3, 4, 5 ------------------------ ao conjunto C;

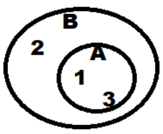
d) 2, 3, 4, 5 ------------------------ ao conjunto A;

Quando todos os elementos de um conjunto A pertencem a um outro conjunto B, dizemos que o conjunto A é subconjunto de B.

2) Use as expressões é subconjunto e não é subconjunto.

a) a região norte é ---------------- do Brasil.

b)



Então A ------------- B

c) {rosa, batata} ---------- {cores}

d) 1º ano ---------- do ensino médio.

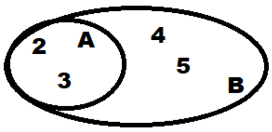
e) {0,2} ------- {1, 2, 7}

Quando o conjunto A é subconjunto de B, dizemos que A está contido no conjunto B e representamos por A C B.

3) Use o símbolo C:

a) Considere os conjuntos L = {c, e, l, i, a} e o conjunto S = {l, e, i}, podemos dizer que S --- L.

b)



Então podemos afirmar que A --- B

c) {azul, marrom} --------{cores}

d) {tulipa, rosa} ------------- {flores}

e) {2, 3, 5, 7} -------- {números primos}

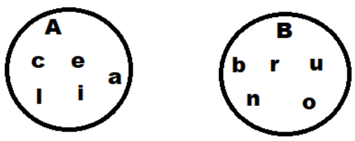
Quando o conjunto A não é subconjunto de B, dizemos que A não está contido no conjunto B e representamos por A ⊄ B.

4) Use o símbolo ⊄:

a) Considere os conjuntos L = {c, e, l, i, a} e o conjunto S = {e, l, i, e, t, e}, podemos dizer que L --- S.

b) {2, 3} --------- {2, 4, 5}

c)



Então podemos dizer que A --- B

d) {roxo, rosa} ------------- {flores}

e) {2, 3, 5, 7} -------- {números ímpares}

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO.

1) Dados os conjuntos A = {1,2,3}, B = {2, 3, 4}, C = {números pares} e D = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Responda:

a) todos os elementos do conjunto A estão no conjunto B?

b) todos os elementos do conjunto A estão no conjunto C?

c) todos os elementos do conjunto A estão no conjunto D?

d) todos os elementos do conjunto B estão no conjunto C?

e) todos os elementos do conjunto B estão no conjunto D?

f) todos os elementos do conjunto D estão no conjunto C?

2) De acordo com os conjuntos da primeira questão, complete com os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$:

a) A ___ B   b) A ___ C   c) A ___ D

d) B ___ C   e) B ___ D   f) D ___ C

3) Sendo os conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 6} e C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Classifique cada item em V ou F:

a) $A \subset B$ ( )   b) $B \subset C$ ( )   c) $C \subset A$ ( )

d) $A \subset C$ ( )   e) $A \not\subset C$ ( )   f) $B \not\subset A$ ( )

g) $A \not\subset B$ ( )   h) $B \not\subset C$ ( )

4) Com base nos conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {5, 6, 7} e C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, preencha o campo abaixo com a simbologia adequada, $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

a) 3___A   b) 7___C   c) A___B

d) B___C   e) C___A   f) C___B

Análise a priori da Atividade 03: Esperamos que os alunos possam compreender a definição de subconjuntos, e usar de forma correta a relação de inclusão. Avaliamos o surgimento de dificuldades em utilizar as relações de pertinência e de inclusão, mas que podem ser amenizadas se retomarmos os conceitos de elemento e conjunto.

A atividade 04 permite que os alunos possam descobrir a união de conjuntos.

Atividade 04

Título: União de conjuntos

Objetivo: Apresentar a união de conjuntos.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para cada par de conjuntos dados, forme o conjunto C juntando os elementos do conjunto A com os do conjunto B:

A	B	C
1) {1, 2, 3, 4, 5}	{6, 7}	
2) {1, 2, 3, 4, 5, 6}	{6, 7}	
3) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}	{5, 6, 7}	
4) {2, 3, 5, 6, 8, 7}	{6, 8, 7}	
5) {1, 2, 3}	{5, 8}	
6) {-1, 0, 1, 2}	{0, 3, 4, 5}	
7) {2, 3, 4, 5}	{2, 4, 6, 7}	
8) {2, 3, 4, 5}	{3, 5, 6, 7, 8}	
9) {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	{2, 4, 5, 6, 9}	
10) {2, 4, 5, 6, 9}	{0, 3, 6, 9, 10}	

Observação:

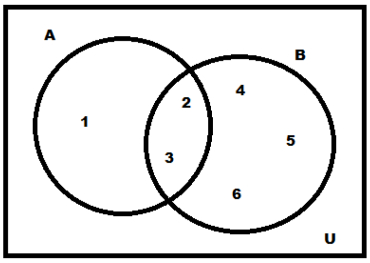
Conclusão:

Quando formamos o conjunto C, utilizando os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B, estamos determinando a união entre conjuntos, e representamos simbolicamente por A U B = {x / x ∈ A ou x ∈ B}.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO.

1) Determine a união entre os conjuntos:

a)



A = ___________________________

B = ___________________________

A U B = _________________________

b) A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 3, 4, 5}

A U B = ___________________________

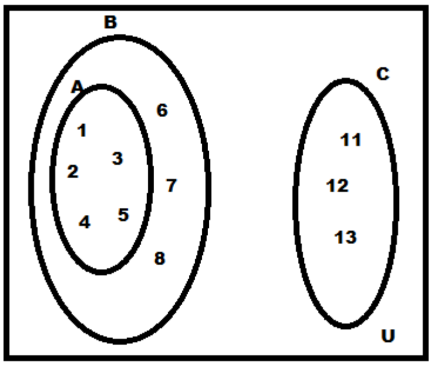
c) A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 3}

A U B = ___________________________

d) A = {2, 3, 4, 5, 6} e B = {-1, 0, 1, 2, 3}

A U B = ___________________________

e)



A = ______________________________ B = __________________________

C = ______________________________ AUB = __________________________

AUC = __________________________ BUC = _________________________

Análise a priori da Atividade 04: Esperamos que os alunos possam determinar a união entre dois conjuntos. Acreditamos que os mesmos não terão dificuldades para executar a operação.

A atividade 05, apresentada a seguir, tem o objetivo de calcular a intersecção entre dois conjuntos.

Atividade 05

Título: Intersecção de conjuntos

Objetivo: Apresentar a intersecção de conjuntos.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

1) Para cada par de conjuntos dados, forme o conjunto C utilizando os elementos que aparecem nos dois conjuntos:

A	B	C
1) {1, 2, 3, 4, 5}	{6, 7}	
2) {0, 1, 2, 3, 4, 5}	{5, 6, 7}	
3) {2, 3, 5, 6, 8}	{6,8}	
4) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	{5, 6, 7}	
5) {1, 2, 3}	{5, 8}	
6) {1, 2, 3, 4}	{2, 4, 6, 8}	
7) {1, 2, 3, 4, 5}	{1, 2, 4}	
8) {-1, 0, 1, 2, 3}	{-3, -2, -1, 0, 1, 2}	
9) {1, 2, 3, 4, 5}	{4, 6, 8}	
10) {1, 2, 3, 4, 5}	{2, 4, 5}	

Observação:

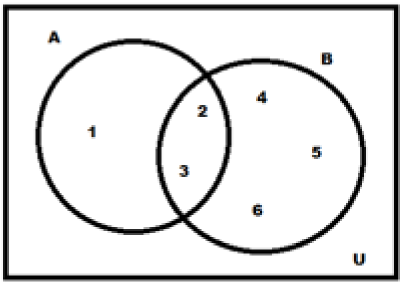
Conclusão:

O conjunto C formado pelos elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B é denominado de conjunto intersecção entre os conjuntos A e B, e representamos simbolicamente por $A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO

1) Determine a intersecção entre os conjuntos:

a)



A = ____________________________

B = ____________________________

A ∩ B = ________________________

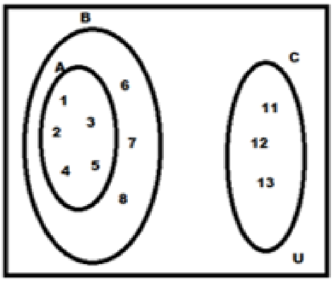
b) A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 3, 4, 5}

A ∩ B = ___________________

c) A = {2, 3, 4, 5, 6} e B = {-1, 0, 1, 2, 3}

A ∩ B = ________________________________

d)



A = ________________________

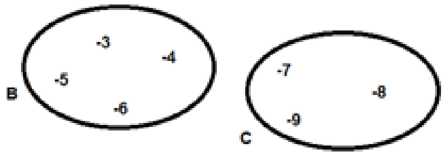
B = ________________________

C = ________________________

A∩B = ___________________ A∩C = ___________________

B∩C = ___________________

e)



B = ____________________________

C = ____________________________

B ∩ C = ________________________

Análise a priori da Atividade 05: Esperamos que os alunos possam determinar a intersecção entre dois conjuntos sem dificuldades. Nossa expectativa para o desenvolvimento desta atividade é a redução do tempo de aplicação em relação a atividade anterior, ao ter similaridade entre as atividades.

A atividade 06, que permite descobrir o conjunto vazio, é apresentada a seguir.

Atividade 06

Título: Conjunto Especial

Objetivo: Apresentar o conjunto vazio.

Material: Roteiro de atividade, lápis e borracha.

Procedimento.

Para os conjuntos A e B, determine A∩B. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	**B**	**A∩B**
1) {0,6}	{1, 2, 3, 4}	
2) {1, 2, 3}	{4, 5, 6}	
3) {a, e, i}	{b, c, d}	
4) {-1, 0, 2}	{-2, 1, 3}	
5) {2, 3, 4, 5, 6}	{0, 1, 7}	
6) {1, 2, 3, 4, 5}	{-1, -3}	
7) {4, 6, 8}	1, 2, 3}	
8) {1, 2, 3, 5}	{4, 6, 8}	
9) {-1, 0, 2}	{4, 6, 8}	
10) {2, 3, 4, 5,6}	{-1, 0}	

Observação:

Conclusão:

O conjunto vazio não possui nenhum elemento, a sua representação pode ser feita utilizando duas simbologias: { } ou Ø.

1) Dados os conjuntos A = {0,2,4,6}, B = {2, 4, 8, 10}, C = {2, 4, 6} e D = {3, 5,7}, determine:

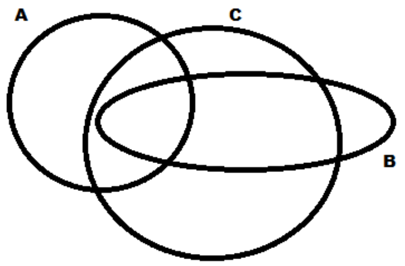
a) A∩D b) B∩D c) C∩D

2) Se A e B são conjuntos quaisquer, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira(V) ou falsa(F):

a) A U Ø = A b) B∩ Ø = Ø c) (A∩B) C B

d) (BUA) C B e) (A∩B) C (AUB) f) Ø ⊄ (A∩B)

3) Na figura a seguir tem-se a representação dos conjuntos A,B e C, não vazios.



Relativamente a esses conjuntos, quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

a) (BUC) C A b) (B∩C) C (AUC)

c) (A∩B) C (B∩C) d) (A∩B) U B = Ø

Análise a priori da Atividade 06: Esperamos que os alunos possam concluir que quando calculamos a intersecção entre dois conjuntos, podemos não ter nenhum elemento comum e com isso teremos o conjunto vazio. Acreditamos que os alunos não terão grandes dificuldades para realizar essa atividade.

A atividade 07 inicia o momento da sequência didática em que começamos a apresentar as propriedades de conjuntos.

Atividade 7

Título: Propriedade da União

Objetivo: Apresentar a propriedade da União.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A e B, determine AUB. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	AUB
1) {1, 2, 3, 4}	∅	
2) {0, 1, 2}	∅	
3) {1, 3, 5, 7}	∅	
4) ∅	{1, 2, 3, 4}	
5) {1, 2, 3}	∅	
6) ∅	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	
7) ∅	{1, 3, 5, 7}	
8) ∅	{b, c, d}	
9) {0, 1, 2, 3, 4}	∅	
10) ∅	{a, e, i, o, u}	

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 07: Esperamos que os alunos possam construir regras válidas para fazer a união entre o conjunto vazio e um outro conjunto qualquer.

A atividade 08 propõe a descoberta da propriedade comutativa da união de conjuntos.

Atividade 08

Título: Propriedade da união

Objetivo: Apresentar propriedade da União.

Material: Roteiro de atividade, lápis e borracha.

Procedimento.

Para os conjuntos A e B, determine AUB e BUA e preencha o quadro a seguir:

A	B	AUB	A∩B
1) {0, 2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4}		
2) {1, 2, 3}	{2, 3, 4, 5, 6}		
3) {a, e, i}	{b, c, d}		
4) {-1, 0, 2}	{-2, 1, 3}		
5) {2, 3, 4, 5, 6}	{0, 1, 2, 3, 7}		
6) {1, 2, 3, 4, 5}	{1, 2, 3}		
7) {4, 6, 8}	{1, 2, 3}		
8) {1, 2, 3, 4, 5}	{4, 6, 8}		
9) {-1, 0, 2}	{4, 6, 8}		
10) {2, 3, 4, 5, 6}	{-1, 0, 2}		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 08: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade comutativa da união entre conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 09 propõe a descoberta da propriedade associativa da união de conjuntos.

Atividade 09

Título: Propriedade da União

Objetivo: Apresentar propriedade da União.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A, B e C, determine (AUB)UC e AU(BUC). Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	C	(AUB)UC	AU(BUC)
1) {1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2}	{-1, -2, 3, 4}		
2) {0, 1, 2}	{0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5}		
3) {0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5, 7}	{0, 1, 2}		
4) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{3, 4, 5, 6, 7}		
5) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}		
6) {1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	{0, 1, 2}		
7) {0,1,2,3,4}	{1,3,5,7}	{1,3,5}		
8) {a, e, i, o, u}	{b, c, d}	{a, b, c}		
9) {0,1,2,3,4}	{1, 2, 4, 8}	{2, 3, 5, 7}		
10) {a, b, c, d, e}	{a, e, i, o, u}	{a, e, i}		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 09: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade associativa da união entre conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 10 propõe a descoberta da intersecção do conjunto vazio com um conjunto qualquer.

Atividade 10

Título: Propriedade da Intersecção

Objetivo: Apresentar propriedade da Intersecção.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A e B, determine A∩B e com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	A∩B
1) {1,2,3,4}	Ø	
2) {0,1,2}	Ø	
3) {1,3,5,7}	Ø	
4) Ø	{1, 2, 3, 4}	
5) {1, 2, 3}	Ø	
6) Ø	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	
7) Ø	{1,3,5,7}	
8) Ø	{b, c, d}	
9) {0,1,2,3,4}	Ø	
10) Ø	{a, e, i, o, u}	

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 10: Esperamos que os alunos possam construir regras válidas para fazer a intersecção entre o conjunto vazio e um outro conjunto qualquer.

A atividade 11, a seguir, propõe a descoberta da propriedade comutativa da intersecção de conjuntos.

Atividade 11

Título: Propriedade da Intersecção

Objetivo: Apresentar propriedade da Intersecção.

Material: Roteiro de atividade, lápis e borracha.

Procedimento.

Para os conjuntos A e B, determine A∩B e B∩A. Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	A∩B	B∩A
1) {0,2,4,6}	{1,2,3,4}		
2) {1, 2, 3}	{2, 3, 4, 5, 6}		
3) {a, e, i}	{b, c, d}		
4) {-1, 0, 2}	{ -2, 1, 3}		
5) {2, 3, 4, 5 6}	{0, 1, 2, 3,7}		
6) {1, 2, 3, 4,5}	{1, 2, 3}		
7) {4, 6, 8}	{1, 2, 3}		
8) {1, 2, 3, 4,5}	{4, 6, 8}		
9) {-1, 0,2}	{4, 6, 8}		
10) {2, 3, 4, 5, 6}	{-1, 0, 2}		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 11: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade comutativa da intersecção entre conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 12 propõe a descoberta da propriedade associativa da intersecção de conjuntos.

Atividade 12

Título: Propriedade da Intersecção

Objetivo: Apresentar propriedade da Intersecção.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A, B e C, determine $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$, e com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	**B**	**C**	**$(A \cap B) \cap C$**	**$A \cap (B \cap C)$**
1) {1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2}	{-1, -2, 3, 4}		
2) {0, 1, 2}	{0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5}		
3) {0,1,2,3,4}	{1, 3, 5, 7}	{0, 1, 2}		
4) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{3, 4, 5, 6, 7}		
5) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{1,2,3,4,5,6}		
6) {1, 2, 3, 4}	{1,2,3,4,5,6,7}	{0,1, 2}		
7){0,1,2,3,4,5}	{1, 3, 5, 7}	{1, 3, 5}		
8) {a, e, i, o, u}	{b, c, d}	{a, b, c}		
9) {0,1, 2, 3, 4}	{1, 2, 4, 8}	{2, 3, 5, 7}		
10) {a, b, c, d, e}	{a, e, i, o, u}	{a, e, i}		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 12: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade associativa da intersecção entre conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 13 propõe a descoberta da propriedade distributiva da união em relação a intersecção de conjuntos.

Atividade 13

Título: Propriedade da Intersecção e da União

Objetivo: Apresentar propriedade da Intersecção e da União.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A, B e C, determine AU(B∩C) e (AUB)∩(AUC), e com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	C	AU(B∩C)	(AUB)∩(AUC)
1) {1,2,3,4}	{0,1,2}	{-1,-2,3,4}		
2) {0,1,2}	{0,1,2,3,4}	{1,3,5}		
3) {0,1,2,3,4}	{1,3,5,7}	{0,1,2}		
4) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{3, 4, 5, 6, 7}		
5) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}		
6) {1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5,6}	{0,1,2}		
7) {0,1,2,3,4}	{1,3,5,7}	{1,3,5}		
8) {a, e, i, o, u}	{b, c, d}	{a, b, c}		
9) {0,1,2,3,4}	{1, 2, 4, 8}	{2, 3, 5, 7}		
10) {a, b, c, d, e}	{a, e, i, o, u}	{a, e, i}		

Observação:

Conclusão:

Análise a priori da Atividade 13: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade distributiva da união em relação a intersecção de conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 14 propõe a descoberta da propriedade distributiva da intersecção em relação a união de conjuntos.

Atividade 14

Título: Propriedade da Intersecção e da União

Objetivo: Apresentar propriedade da Intersecção e da União.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para os conjuntos A, B e C, determine A∩(BUC) e (A∩B)U(A∩C) e com as informações obtidas preencha o quadro a seguir:

A	B	C	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1) {1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2}	{-1, -2, 3, 4}		
2) {0, 1, 2}	{0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5}		
3) {0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5, 7}	{0, 1, 2}		
4) { 1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{3, 4, 5, 6, 7}		
5) { 1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}		
6) { 1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	{0, 1, 2}		
7) {0, 1, 2, 3, 4}	{1, 3, 5, 7}	{1, 3, 5}		
8) {a, e, i, o, u}	{b, c, d}	{a, b, c}		
9) {0, 1, 2, 3, 4}	{1, 2, 4, 8}	{2, 3, 5, 7}		
10) {a, b, c, d, e}	{a, e, i, o, u}	{a, e, i}		

Observação:

Conclusão:

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO DAS PROPRIEDADES

1) Sendo A e B conjuntos quaisquer, determine:

a) A ∩ Ø b) A U Ø

c) A ∩ (BU Ø) d) A ∩ (B∩ Ø)

e) A U (B ∩ Ø) f) (A ∩ Ø) U (B U Ø)

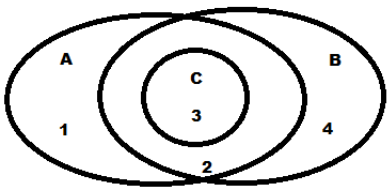
2) Classifique em verdadeiro ou falso, supondo A e B conjuntos quaisquer:

a) A ⊂ (AUB) b) B ⊂ (AUB)

c) (A∩B) ⊂ A d) (A∩B) ⊂ B

e) (A∩B) ⊂ (AUB)

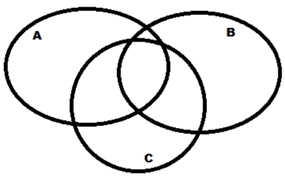
3) Diga que região ou regiões (1, 2, 3 ou 4) devemos sombrear no diagrama a seguir para indicar:

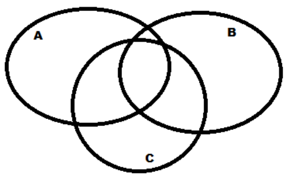


a) A ∩ B ∩ C b) (A∩B) U C c) A – B

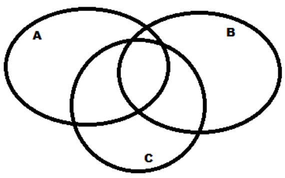
4) Sombreie o conjunto pedido em cada diagrama a seguir:

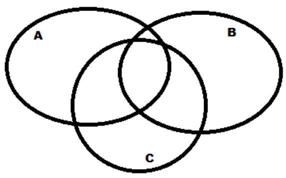
a) (A ∩ C) U (B ∩ C) b) (A U B) ∩ C





c) A - (B ∩ C) d) A - (B U C)





Análise a priori da Atividade 14: Esperamos que os alunos possam comparar os resultados da propriedade distributiva da intersecção em relação a união de conjuntos, sem nenhuma dificuldade.

A atividade 15 propõe a descoberta da diferença de conjuntos.

Atividade 15

Título: Diferença de conjuntos

Objetivo: Apresentar diferença de conjuntos.

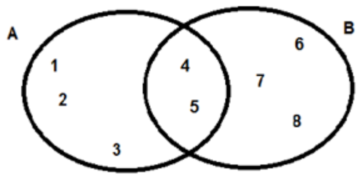
Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

Para cada conjunto dado, forme o conjunto C utilizando os elementos que estão no conjunto A e não estão no conjunto B:

A	B	C
1) {1,2,3,4,5}	{3,4,5,6,7}	
2) {1,2,3,4,5}	{8,9,10}	
3) {1,2,3}	{1,2,3,4,5}	
3) {1,2,3,4,5,6}	{5,6}	
3) {3,4,5,6,7}	{1,2,3,4,5}	

6)

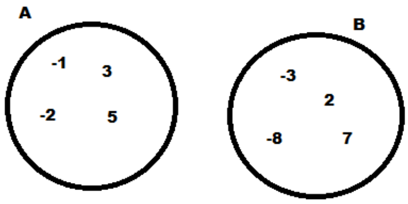


A = ______________________________

B = ______________________________

C = ______________________________

7)



A = ______________________________

B = ______________________________

C = ______________________________

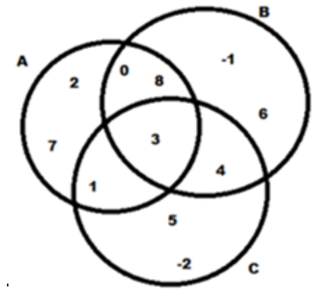
Observação:

Conclusão

Quando formamos o conjunto C utilizando os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertence ao conjunto B, estamos determinando a diferença entre conjuntos, e representamos simbolicamente por $A – B = \{x/ x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO.

1) Dados os conjuntos A, B e C, determine:



a) A∩B b) A∩C

c) B∩C d) A∩B∩C

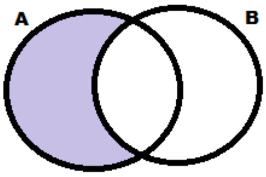
e) A – B f) B – A

g) B – C h) A – C

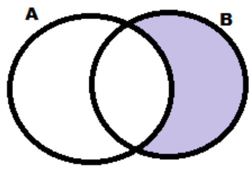
i) C – B j) C - A

2) Qual a operação que representa a parte pintada:

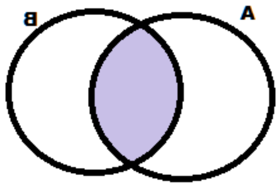
a)



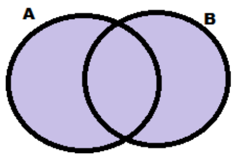
b)



c)



d)



Análise a priori da Atividade 15: Esperamos que os alunos possam determinar a diferença entre dois conjuntos. Acreditamos que os mesmos não terão dificuldades para executar a operação.

A atividade 16 propõe a descoberta do complementar de um conjunto.

Atividade 16

Título: Complementar de um conjunto

Objetivo: Apresentar o complementar de um conjunto.

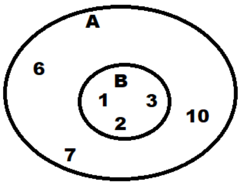
Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

1) Para cada conjunto dado, forme um conjunto C, utilizando os elementos que faltam no conjunto A para que ele fique igual ao conjunto B:

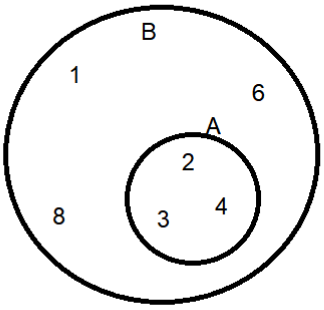
A	B	C
1) {1, 2, 3}	{1, 2, 3, 4, 5}	
2) {a, e, i}	{a, e, i, o, u}	
3) {2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	
4) {2,4}	{0, 2, 4, 6}	
5) {p, n, t}	{p, i, n, t, a, r}	

6)



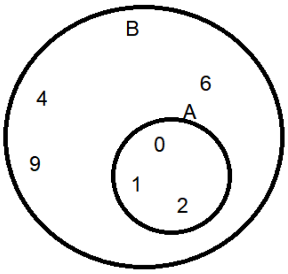
Então o conjunto C = -------------------

7)



Então o conjunto C = -------------------

8)



Então o conjunto C = -------------------

Observação:

Conclusão:

Quando A é subconjunto de B, o conjunto C formado pelos elementos que faltam ao conjunto A para que ele fique igual ao conjunto B é denominado de conjunto complementar do conjunto A em relação ao conjunto B, e representamos simbolicamente por $C_B A$= B – A, sendo A C B.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO

1) Dados A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4, 5} e C = {2, 3}, determine:

a) $C_B A$ b) $C_B C$ c) $C_A c$

2) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e os subconjuntos B= {2, 3, 5, 7} e C = {1, 3, 5, 7, 9}. Determine:

a) $C_A B$ b) $C_A C$

c) $C_A B \cap C$ d) $C_A B \cup C$

3) Dados A = {a, e, i, o}, B = {a, e, i} e C = {a, e, i, o, u}, obtenha os seguintes conjuntos:

a) $C_A B$ b) $C_C B$ c) $C_C A$

Análise a priori da Atividade 16: Esperamos que os alunos possam determinar o complementar de um conjunto. Acreditamos que os mesmos não terão dificuldades para executar a operação.

A atividade 17 propõe a resolução de problemas envolvendo as operações entre conjuntos.

Atividade 17

Título: Problemas com operações de conjuntos.

Objetivo: Apresentar problemas de conjuntos.

Material: Roteiro de atividades, lápis e borracha.

Procedimento:

I) Resolva os problemas a seguir:

1) Num grupo de pessoas pesquisadas todas assinalavam pelo menos um dos dois jornais A e B: 50 assinalavam o jornal A; 80 o jornal B e 30 assinavam A e B. Qual o total de assinantes?

2) Numa escola 150 alunos estudam matemática, 20 estudam Português e Matemática e os 30 restantes estudam outras disciplinas. Qual o total de alunos dessa escola?

3) Num clube exatamente 30% dos sócios praticam futebol, 80% vôlei. Se todos os sócios praticam pelo menos um dos dois esportes, qual é o percentual de praticantes dos dois?

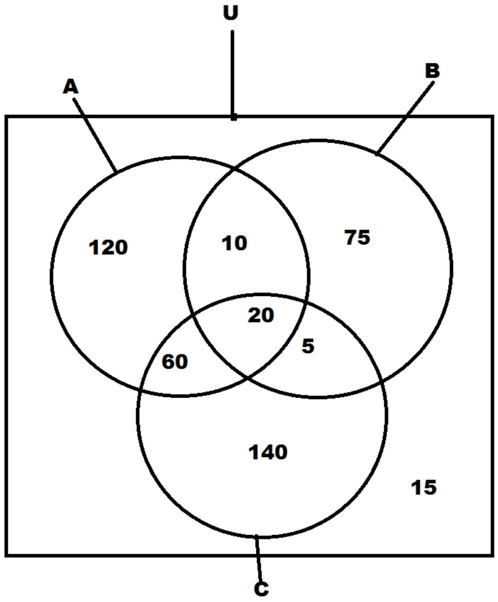
4) Em um condomínio de 600 famílias, 315 possuem carro, 240 famílias possuem TV e 182 não possuem nem carro nem TV. Pergunta-se:

a) Quantas possuem carro ou TV?

b) Quantas possuem carro e TV?

c) Quantas possuem carro e não possuem TV?

5) Considere o diagrama.



Determine:

a) O número de elementos que pertencem exclusivamente a cada conjunto.

b) O número de elementos que pertencem a cada conjunto.

c) O número de elementos que pertencem aos conjunto A e B, B e C e A e C.

d) O número de elementos que pertencem aos três conjuntos.

e) O número de elementos que pertencem ao conjunto AUBUC.

f) O número de elementos do conjunto universo.

g) O número de elementos que não pertencem a nenhum dos três conjunto.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO.

1) Dos 36 alunos da primeira série do ensino médio de certa escola, sabe-se que 16 jogam futebol, 12 jogam voleibol e 5 jogam futebol e voleibol. Quantos alunos dessa classe não jogam futebol ou voleibol?

2) No dia 17 de maio próximo passado, houve uma campanha de doação de sangue em uma Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, podemos afirmar que o número de alunos cujo sangue tem o antígeno O é:

a) 20 alunos
b) 26 alunos
c) 34 alunos
d) 35 alunos
e) 36 alunos

3) Numa prova de matemática de duas questões, 35 alunos acertaram somente uma

questão, 31 acertaram a primeira, 8 acertaram as duas e 40 erraram a segunda questão. Então, o número de alunos que fizeram essa prova foi:

a) 43 b) 48 c) 52 d) 56 e) 60

4) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus n alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente, $A \cap B = \emptyset$. Concluímos que o número n de alunos dessa turma é

a) 49. b) 50. c) 47. d) 45. e) 46.

5) Uma escola realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus alunos. Alguns resultados dessa pesquisa foram:

- 82% do total de entrevistados gostam de chocolate;
- 78% do total de entrevistados gostam de pizza; e
- 75% do total de entrevistados gostam de batata frita.

Então, é CORRETO afirmar que, no total de alunos entrevistados, a porcentagem dos que gostam, ao mesmo tempo, de chocolate, de pizza e de batata frita é, pelo menos, de:

a) 25%. b) 30%. c) 35%. d) 40%. e) 45%

Análise a priori da Atividade 17: Esperamos que os alunos consigam resolver problemas que envolvam as operações entre conjuntos. Acreditamos que no início, os mesmos terão dificuldades, que serão sanadas no decorre da atividade.

4. EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção vamos descrever como foi a experimentação. O local da pesquisa foi em uma escola pública estadual no bairro da Velha Marabá, no Município de Marabá, no Estado do Pará. Os fatores que influenciaram a escolha da instituição de ensino para realização da pesquisa foram a facilidade de acesso à escola, pois a pesquisadora mora nesse município e a identificação com o ambiente escolar, uma vez que a mesma trabalha nesta escola. Os sujeitos foram 29 alunos de uma turma de 3º ano do período matutino.

O primeiro contato da pesquisadora com a escola ocorreu no dia 19 de março de 2018. Conversamos com o diretor, para que ele permitisse que realizássemos a pesquisa no período matutino.

No dia 20 de março conversamos com os alunos e dissemos a eles que escolhemos a turma deles para participar de nossa pesquisa, e que para isso precisaríamos que eles participassem de forma adequada e não se envolvessem em conversas paralelas, pois precisamos otimizar as aplicações das atividades.

Segundo o que consta nos registros da escola, a turma de 3º ano era composta por 43 alunos em situação regular. Para efeitos de análise, uma amostra de 29 alunos foi selecionada, pois estes estavam presentes na aplicação dos testes avaliativos. Como forma de garantir o anonimato dos participantes, denominamos os alunos de “A1”, “A2”, “A3”... “A29”.

O trabalho experimental foi organizado em 11 sessões, em que uma, duas, quatro ou cinco atividades da sequência didática foram aplicadas. Para o desenvolvimento de cada atividade, foram utilizadas duplas nas dez primeiras atividade e trios nas sete últimas.

Para iniciar a aplicação de atividade, os alunos deveriam estar, preferencialmente, organizados em grupos, a fim de facilitar a troca de conhecimento. Após entregar o roteiro, socializamos com os alunos o objetivo da atividade para que eles entendessem o que estaríamos estudando naquele momento.

As orientações para o desenvolvimento da atividade constituem o momento em que apresentamos aos alunos os procedimentos operacionais necessários para resolução. A socialização das informações deve ser realizada a partir das produções textuais (conclusões) de alunos que queiram compartilhá-las com a turma, escrevendo-as no quadro branco da sala de aula. A partir dos resultados apresentados pelos alunos, podemos formalizar o assunto matemático.

A sequência didática foi aplicada em 11 sessões, sendo duas para aplicação do pré-teste e do pós-teste e 09 para aplicação das atividades, conforme o cronograma a seguir.

QUADRO 14 – Cronograma das sessões de ensino

Sessão	Data	Atividade	Tempo de duração da aplicação	Alunos presentes
1ª	27/03/2018	Questionário	25 minutos	37
	27/03/2018	Pré teste	45 minutos	37
2ª	03/04/2018	01:Os conjuntos	45 minutos	32
	03/04/2018	02: Relação de pertinência	45 minutos	32
3ª	09/04/2018	03:subconjunto	45 minutos	32
4ª	10/04/2018	04: União de conjuntos	30 minutos	33
5ª	17/04/2018	05: Intersecção de conjuntos	30 minutos	21
6ª	07/05/2018	06: Conjunto vazio	40 minutos	19
	07/05/2018	07:Propriedade da União	40 minutos	19
	07/05/2018	08:Propriedade da União	30 minutos	19
	07/05/2018	09:Propriedade da União	30 minutos	19
	07/05/2018	10:Propriedade da Intersecção	30 minutos	19
7ª	08/05/2018	11:Propriedade da Intersecção	45 minutos	23
	08/05/2018	12:Propriedade da Intersecção	45 minutos	23
	08/05/2018	13:Propriedade da Intersecção e da União	30 minutos	23
	08/05/2018	14:Propriedade da Intersecção e da União	30 minutos	23
8ª	14/05/2018	15:Diferença de conjuntos	45 minutos	34
9ª	15/05/2018	16:Complementar de um conjunto	20 minutos	28
10ª	28/05/2018	17:Problemas com operações de conjuntos.	50 minutos	29
11ª	04/06/2018	Pós teste	45 minutos	34

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

O desenvolvimento da experimentação foi realizado com uma, duas, quatro e cinco atividades por sessão de ensino. Ressaltamos que as informações produzidas nas sessões de ensino foram registradas em um diário de campo.

4.1 PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

Na primeira sessão de ensino, ocorrida em 27/03/2018, apresentamo-nos aos alunos como uma professora que realizava uma pesquisa científica e que a mesma fazia parte do trabalho de dissertação, falamos sobre a importância da participação dos alunos na pesquisa tanto para eles quanto para a pesquisadora.

Explicamos aos alunos que um questionário socioeconômico e um teste (cf. apêndice C) seriam aplicados naquele momento e que não precisariam se preocupar se não haviam estudado, pois o teste era para avaliar os conhecimentos que eles detinham no assunto e que não contaria para a avaliação escolar, mas que era preciso empenho para responder às perguntas.

Pedimos aos alunos que fossem os mais honestos possíveis, sobre as informações prestadas e que resolvessem as questões do teste da maneira como eles sabiam. O tempo de preenchimento do questionário foi de 25 minutos e de resolução do pré-teste foi de 45 minutos. As informações produzidas na aplicação do instrumento são apresentadas na sessão da Análise a posteriori e validação.

4.2 SEGUNDA SESSÃO DE ENSINO

A aplicação das atividades com os alunos começou no dia 03/04/2018. A segunda sessão de ensino teve o objetivo de aplicar a Atividade 01 e 02 para introduzir o tema Conjuntos. Estavam presentes 32 alunos, os quais organizados em dupla desenvolveram as atividades em 45 minutos cada uma. A atividade 01 procurou instigar os alunos a entenderem os conceitos de conjunto assim como elemento de um conjunto e a 02, a entender quando e onde usar a relação de pertinência.

A atividade 01 era constituída de algumas perguntas que incitaram os alunos a escrever os conjuntos pedidos em cada questão. Percebemos que os alunos não tiveram dificuldades em escrever esses conjuntos. Em seguida, foram pedidos exemplos de conjuntos; nesse momento ou os alunos copiaram os conjuntos que foram dados na atividade ou deixaram em branco a questão. No final da atividade foram propostas algumas questões que pediam os componentes de cada conjunto dado, para que ele notasse que componente e elemento representam a mesma coisa.

A atividade 02 era constituída de questionamentos do tipo faz parte e não faz parte do conjunto, para que os alunos entendessem a relação de pertinência, e usassem a simbologia correta em cada situação. Não foi verificada nenhuma dificuldade de entender essas situações. Entretanto, uma determinada aluna disse que se achava “retardada” fazendo essas atividades.

4.3 TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO

A terceira sessão de ensino foi aplicada no dia 09/04/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 03, que apresenta a noção de subconjunto e a utilização da relação de Inclusão. Estavam presentes 32 alunos, que organizados em duplas, desenvolveram a atividade em 45 minutos. Essa atividade procurou instigar os alunos a entenderem o que é um subconjunto e entender quando e onde usar a relação de inclusão.

Os alunos não querem ler enunciados, tem dificuldade de usar símbolos e expressões, querem preencher de qualquer jeito. Conversei bastante com os alunos sobre a necessidade de interpretar o enunciado e entender o uso da simbologia.

Os alunos sentiram dificuldades quando foi proposto uma questão que era para ser usado os símbolos da relação de pertinência e de inclusão.

4.4 QUARTA SESSÃO DE ENSINO

A quarta sessão de ensino foi aplicada no dia 10/04/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 04, que apresenta a união de conjuntos. Estavam presentes 33 alunos, que organizados em duplas, desenvolveram a atividade em 30 minutos. Essa atividade procurou instigar os alunos a determinar a união de dois ou mais conjuntos. Só a partir daí é que se pediu aos alunos que fizessem observação e conclusão, o que foi feito com muita dificuldade.

As conclusões são apresentadas no quadro 15.

Quadro 15 – Conclusões dos alunos na atividade 04 (União de conjuntos)

Conclusão	**Alunos**	**Validade da conclusão**
Esse assunto é bom por ter essas linguagens de conteúdo, que é muito importante.	A_{13} e A_{17}	Inválida
Há mas os conjuntos que não pertencem do que pertencem ao juntar eles, se torna um conjunto.	A_{14}	Inválida
A União faz a força.	A_7 e A_{28}	Inválida
É formar um conjunto	A_2 e A_6	Inválida
O novo conjunto formado, pelos anteriores, segue a ordem em que estão e não são reorganizados.	A_{22}	Inválida
A atividade é fácil e bem explicada	A_{11}	Inválida

(continua)

(continuação)

Conclusão	**Alunos**	**Validade da conclusão**
Concluímos que números que estão nos conjuntos A e B também estão no C	A_3	Inválida
A formação do conjunto C, depende dos elementos do conjunto AUB.	A_{18}	Parcialmente válida
Podemos concluir que ao juntar os 2 conjuntos formamos o conjunto C	A_5 e A_{25}	Parcialmente válida
Ao juntarmos os conjuntos A e B, formamos o conjunto C	A_9 e A_{29}	Parcialmente válida
A união de dois conjuntos formando um só.	A_{12} e A_{27}	Parcialmente válida
Concluímos que, o grupo C foi formado a partir do grupo A e B	A_8 e A_{21}	Parcialmente válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

As duplas formadas pelos alunos A_1, A_{19}, A_{20}, A_{23} e A_{24}, deixaram a conclusão em branco, pois apesar de todas as orientações dadas, não conseguiram escrevê-la.

Com relação a união de conjuntos nenhum aluno conseguiu escrever uma conclusão válida, já que os alunos não se sentiam à vontade para ir ao quadro, então fomos perguntando como deveríamos escrever uma definição válida. Formalizamos a seguinte operação:

A união dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos pertencentes ao conjunto A ou ao conjunto B, ou seja: $A \cup B = \{x /\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

4.5 QUINTA SESSÃO DE ENSINO

A quinta sessão de ensino foi aplicada no dia 17/04/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 05, que apresenta a Intersecção de conjuntos. Estavam presentes 21 alunos, que organizados em duplas, desenvolveram a atividade em 30 minutos. Essa atividade procurou instigar os alunos a determinar a Intersecção de dois conjuntos.

Nessa sessão muitos alunos faltaram, e alguns estavam participando pela primeira vez, isso ocasionou muitas discussões, pois eles não queriam ler e entender o enunciado, queriam que eu dissesse a eles o que era pra fazer, mas no início da aplicação de cada atividade explicávamos o objetivo e o procedimento.

Portanto, percebemos a má vontade dos alunos em participar da nossa pesquisa. Tivemos então que entrar com um processo de convencimento, e mostrando o quanto eles iriam ganhar de conhecimento, sabendo que o conteúdo faz parte do pré-requisito da prova do Enem.

As conclusões são apresentadas no quadro 16.

Quadro 16 – Conclusões dos alunos na atividade 05 (Intersecção de conjuntos).

Categorias de conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Conclui-se que intersecção de conjuntos nada mais é que a repetição dos números em ambos os conjuntos.	A_{12}	Parcialmente válida
Concluímos que ao utilizar os elementos que aparecem nos conjuntos formam o conjunto C	A_9 e A_{29}	Parcialmente válida
Quando são conjuntos disjuntos a intersecção é o vazio	A_{22}	Parcialmente válida
O conjunto C é formado pelos números que repetem nos conjuntos A e B	A_5 e A_{25}	Válida
Intersecção é o número que está entre os círculos.	A_3 e A_{24}	Válida
Conclui que o conjunto C é interessante porque uns formam conjuntos e outros não.	A_{19}	Inválida
A e B formam o conjunto C	A_2 e A_6	Inválida
Concluímos que nem sempre o conjunto A e B formaram um conjunto C.	A_{18} e A_{27}	Inválida
Concluímos que a maior parte dos elementos encontrados em B pertencem a A e por consequência pertencem a C.	A_{10}	Inválida
Concluímos que juntando os dois conjuntos A e B forma o C.	A_{16}	Inválida

Fonte: Pesquisa de campo (2018).

A dupla formada pelos alunos A_{11} e A_{26}, deixou a conclusão em branco, pois apesar de todas as orientações dadas, não conseguiram escreve-la.

A conclusão dos alunos $A_{18,}$ A_{19} e A_{27}, foi que nem sempre os conjuntos A e B tem elementos repetidos.

Com relação a Intersecção de conjuntos somente duas duplas conseguiram escrever conclusões válidas. Como os alunos não se sentiam à vontade para ir ao quadro, então fomos perguntando como deveríamos escrever uma definição válida. Formalizamos a seguinte operação:

A Intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B, ou seja: $A \cap B = \{x /\ x \in A \text{ e } x \in B\}$.

4.6 SEXTA SESSÃO DE ENSINO

A sexta sessão de ensino foi aplicada no dia 07/05/2018, teve como objetivo aplicar as Atividades 06, 07, 08, 09 e 10, que apresentam o conjunto vazio, propriedades comutativa e associativa da união e uma propriedade da intersecção. Estavam presentes 19 alunos, que organizados em duplas, desenvolveram as duas primeiras atividades em 40 minutos e as três últimas em 30 minutos.

Neste dia os professores da escola aderiram ao movimento de greve, então decidimos ficar com os alunos, para acelerar a aplicação sequência didática.

Os alunos sentiram ainda muita dificuldade em escrever as observações e conclusões, então fomos conversar e dar exemplos do que é observação e o que é conclusão, quando eles tiraram todas as dúvidas e entenderam o procedimento, tudo fluiu mais facilmente. Foi uma manhã de muito aprendizado para eles e para nós também.

As conclusões são apresentadas no quadro 17.

QUADRO 17 – Conclusões dos alunos na atividade 06 (conjunto vazio)

Conclusão	**Alunos**	**Validade Da Conclusão**
Concluímos que não há intersecção entre os conjuntos A e B.	A_{11}, A_{15}, A_{18} e A_{22}	Parcialmente válida
Concluímos que os conjuntos A e B não tem nenhum elemento que se repete.	A_{5}, A_{12} e A_{25}	Parcialmente válida
Concluímos que se os números não se repetem a intersecção é vazia.	A_{13}, A_{17} e A_{23}	Válida
Concluímos que todo conjunto A é diferente do conjunto B	A_{1}, A_{3} e A_{24}	Inválida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Os alunos A_{11}, A_{15}, A_{18} e A_{22} concluíram que não há intersecção entre os conjuntos A e B, mas na verdade eles chegaram à conclusão que não havia nenhum elemento repetido nos dois conjuntos, logo não há intersecção.

Conseguimos que três alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e escrevemos a definição de conjunto vazio. Formalizamos da seguinte forma:

Dados os conjuntos A e B, se determinarmos a Intersecção desses conjuntos e não tiver nenhum elemento que aparece simultaneamente nos dois conjuntos, então o resultado vai ser o conjunto vazio.

Após ter formalizado o conjunto vazio, demos inícios a atividade 07 que tinha como objetivo entender o que acontece quando calculamos a união de um conjunto qualquer com o conjunto vazio.

As conclusões são apresentadas no quadro 18.

QUADRO 18 – Conclusões dos alunos na atividade 07 (propriedade da união)

Conclusão	**Alunos**	**Validade da conclusão**
Concluímos que permanecerá o conjunto que contém elementos, pois é predominante em relação ao vazio.	A_{5} e A_{25}	Parcialmente válida
Concluímos que a união se repete os elementos do conjunto A.	A_{18}	Parcialmente válida
Concluímos que ao juntar um conjunto com elementos e um conjunto sem elementos, o resultado será apenas o do conjunto com elementos.	A_{1} e A_{11}	Válida
Concluímos que vai ficar o conjunto que com elementos, por que o outro está vazio.	A_{12}, A_{13}, A_{17} e A_{23}	Válida

(continua)

(continuação)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que a união é o próprio conjunto não vazio.	A_{15} e A_{22}	Válida
Concluímos que os números não se repetem.	A_3 e A_{24}	Inválida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que quatro alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos do seguinte modo a propriedade da união:

Dados os conjuntos A e B, onde um deles é vazio, se determinarmos a União desses conjuntos, o resultado vai ser o conjunto não vazio.

Na conclusão dos alunos A_5 e A_{25}, acreditamos que eles queriam escrever que como um dos conjuntos é vazio, o resultado só poderia ser o outro conjunto.

Após a formalização da atividade 07, fizemos um intervalo e logo em seguida começamos a atividade 08, que tinha como objetivo entender a propriedade comutativa da união.

As conclusões são apresentadas no quadro 19.

QUADRO 19 – Conclusões dos alunos na atividade 08 (propriedade comutativa da união)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que independente da ordem, os elementos serão os mesmos nos conjuntos AUB e BUA	A_5, A_{12} e A_{25}	Válida
Concluímos que AUB e BUA resultam no mesmo, por não ter uma ordem pré estabelecida.	A_{15} e A_{22}	Válida
Concluímos que os resultados de AUB e BUA são iguais.	A_1, A_3, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{18}, A_{23} e A_{24}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que quatro alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte maneira a propriedade da comutativa da união :

Dados os conjuntos A e B, se determinarmos AUB e BUA, os resultados são iguais.

Após ter formalizado a propriedade comutativa da união, demos início a atividade 09 que tinha como objetivo entender a propriedade associativa da união.

As conclusões são apresentadas no quadro 20.

QUADRO 20 – Conclusões dos alunos na atividade 09 (propriedade associativa da união)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que os conjuntos (AUB)UC e AU(BUC) tem os mesmos resultados.	A_{13}, A_{17} e A_{23}	Válida
Concluímos que (AUB)UC e AU(BUC) resultam no mesmo, por não ter uma ordem pré estabelecida.	A_{15} e A_{22}	Válida
Concluímos que os resultados de (AUB)UC e AU(BUC) são iguais.	A_1, A_3, A_5, A_{11}, A_{12}, A_{18}, A_{24} e A_{25}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que cinco alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte forma a propriedade da comutativa da união :

Dados os conjuntos A, B e C, se determinarmos (AUB)UC e AU(BUC), os resultados são iguais.

Após ter formalizado a propriedade Associativa da união, demos início a atividade 10 que tinha como objetivo entender o que acontece quando calcula a intersecção de um conjunto qualquer com o conjunto vazio.

As conclusões são apresentadas no quadro 21.

QUADRO 21 – Conclusões dos alunos na atividade 10 (propriedade da Intersecção)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que a intersecção é vazia, pois se tem um conjunto com elementos e outro vazio.	A_1, A_{11}, A_{13}, A_{15}, A_{17} A_{22}, A_{23} e A_{24}	Parcialmente válida
Concluímos que é vazio, pois não há elementos repetidos nos conjuntos.	A_5, A_{12}, A_{18}, e A_{25}	Válida
Concluímos que a intersecção é vazia, pois todos os conjuntos são completos.	A_3	Inválida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que quatro alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte maneira a propriedade da Intersecção:

Dados os conjuntos A e B, onde um deles é vazio, se determinarmos a Intersecção entre eles, o resultado é o conjunto vazio.

Após ter formalizado a propriedade da Intersecção, resolvemos continuar a sequência no dia seguinte, pois os alunos estavam cansados e sem paciência.

4.7 SÉTIMA SESSÃO DE ENSINO

A sétima sessão de ensino foi aplicada no dia 08/05/2018, teve como objetivo aplicar as Atividades 11, 12, 13 e 14, que apresentam as propriedades comutativa e associativa da intersecção, e duas propriedades da união e da intersecção. Estavam presentes 23 alunos, que organizados em trios, desenvolveram as duas primeiras atividades em 45 minutos e as duas últimas em 30 minutos.

Professores em greve, conversamos com os alunos para ficarem a manhã inteira para agilizar nossa sequência didática, preparamos lanche e trouxemos alguns doces pra aliviar a tensão.

Antes de aplicarmos a atividade 11 fizemos a retomada do conceito de intersecção, foi muito tranquilo, os alunos sem dificuldade de fazer a atividade, mas ainda dúvidas em fazer conclusão.

A atividade 11 procurou instigar os alunos a entender a propriedade comutativa da intersecção.

As conclusões são apresentadas no quadro 22.

QUADRO 22 – Conclusões dos alunos na atividade 11 (propriedade comutativa da Intersecção)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que $\mathbf{A \cap B}$ é igual a $\mathbf{B \cap A}$.	A_1, A_2, A_3, A_6, A_{11} A_{12}, A_{13}, A_{15} A_{17}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26} e A_{27}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018).

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte forma a propriedade comutativa da Intersecção:

Dados os conjuntos A e B, se determinarmos $A \cap B$ e $B \cap A$, os resultados são iguais.

Após ter formalizado a propriedade comutativa da Intersecção, demos início a atividade 12 que tinha como objetivo entender a propriedade associativa da intersecção.

As conclusões são apresentadas no quadro 23.

QUADRO 23 – Conclusões dos alunos na atividade 12 (propriedade associativa da Intersecção)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que $(\mathbf{A \cap B}) \cap \mathbf{C}$ é igual a $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B \cap C})$.	A_2, A_3, A_6, A_{11} A_{12}, A_{13}, A_{15}, A_{17}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26} e A_{27}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte modo a propriedade associativa da Intersecção:

Dados os conjuntos A, B e C, se determinarmos $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$, os resultados são iguais.

Na Atividade 12, os alunos estavam agitados por somente eles permanecerem na escola e demonstravam-se muito insatisfeitos. Fizemos um intervalo, eles voltaram com mais vontade.

Após ter formalizado a propriedade Associativa da Intersecção, demos início a atividade 13 que tinha como objetivo entender a propriedade distributiva da União em relação a intersecção.

As conclusões são apresentadas no quadro 24.

QUADRO 24 – Conclusões dos alunos na atividade 13
(propriedade distributiva da União em relação a Intersecção)

Conclusão	**Alunos**	**Validade da conclusão**
Concluímos que os elementos de A sempre se repetem por completo.	A_{15}	Inválida
Concluímos que ao juntarmos, obtivemos a resposta	A_2, A_6 e A_{29}	Inválida
Concluímos que temos que apresentar propriedade da Intersecção e da União assim chegamos a tal resultado.	A_{19} e A_{27}	Inválida
Concluímos que o processo da União e Intersecção foi o causador de novos grupos.	A_8, A_{14} e A_{21}	Inválida
Concluímos que os números de mesmo valor que aparecem em ambas as colunas (B e C) fazem a intersecção. Enquanto A faz a União com ambas (B e C).	A_{10}, e A_{28}	Inválida
Concluímos que $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ tem resultados diferentes.	A_4, e A_{16}	Inválida
Concluímos que $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ tem resultados iguais.	A_5, A_{11}, A_{12}, A_{13} A_{17}, A_{18}, A_{22}, A_{24} e A_{25}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte maneira a propriedade distributiva da União em relação a Intersecção :

Dados os conjuntos A, B e C, se determinarmos $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, os resultados são iguais.

Após ter formalizado a propriedade distributiva da União em relação a Intersecção, demos início a atividade 14 que tinha como objetivo entender a propriedade distributiva da Intersecção em relação a União.

As conclusões são apresentadas no quadro 25.

QUADRO 25 – Conclusões dos alunos na atividade 14 (propriedade distributiva da Intersecção em relação a União)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que novos grupos foram formados.	A_8, A_{14} e A_{21}	Inválida
Concluímos que ao unirmos os conjuntos A, B e C vamos obter um resultado.	A_9, e A_{16}	Inválida
Concluímos que o cálculo está errado.	A_4	Inválida
Concluímos que os resultados de $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	A_5, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{15}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{22}, A_{24}, A_{25}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos do seguinte modo a propriedade distributiva da Intersecção em relação a União :

Dados os conjuntos A, B e C, se determinarmos $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, os resultados são iguais.

Na atividade 14, apareceu a dúvida, o que fazer primeiro em $A \cap (B \cup C)$, percebemos que os alunos estavam cansados e não estavam produzindo o esperado, então em comum acordo resolvemos parar e continuar nossa sequência em outra aula.

4.8 OITAVA SESSÃO DE ENSINO

A oitava sessão de ensino foi aplicada no dia 14/05/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 15, que apresenta a diferença de conjuntos. Estavam presentes 34 alunos, que organizados em trios, desenvolveram a atividade em 45 minutos, procurou instigar os alunos a determinar a diferença de dois conjuntos.

As conclusões são apresentadas no quadro 26.

QUADRO 26 – Conclusões dos alunos na atividade 15 (Diferença de conjuntos)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que é o resultado de $A \cup B$	A_{13}, A_{17} e A_{23}	Inválida
Concluímos que a diferença entre os números são os resultados, que formam outro conjunto.	A_2, e A_6	Inválida
Concluímos que o conjunto C é formado por elementos que contem no conjunto B.	A_{25}	Parcialmente válida
Concluímos que o conjunto C representa a diferença entre A e B, isto é são os elementos pertencem a A e não pertence a B	A_1, A_3, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{22}, A_{24}, A_{26} e A_{27}	Válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018).

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte forma a diferença de dois conjuntos:

A diferença entre conjuntos A e B é formada pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B, ou seja: $A - B = \{x /\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

4.9 NONA SESSÃO DE ENSINO

A nona sessão de ensino foi aplicada no dia 15/05/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 16, que apresenta o complementar de um conjunto. Estavam presentes 28 alunos, que organizados em trios, desenvolveram a atividade em 20 minutos. Antes de a aplicarmos, fizemos uma retomada de como calcular a diferença de conjuntos. Essa atividade procurou instigar os alunos a determinar o complementar de um conjunto

As conclusões são apresentadas no quadro 27.

QUADRO 27 – Conclusões dos alunos na atividade 16 (Complementar de um conjunto)

Conclusão	Alunos	Validade da conclusão
Concluímos que os conjuntos A e B não são iguais.	A_1, A_3 e A_{24}	Inválida
Concluímos que o conjunto C é o resultado de A – B.	A_{11}, A_{12}, A_{15} e A_{26}	Parcialmente válida
Concluímos que o complementar é o que falta para que eles se tornem iguais.	A_2, A_6, A_{22} e A_{27}	Parcialmente válida

Fonte: Pesquisa de campo (2018).

Os alunos A_{13}, A_{17} e A_{23} deixaram a conclusão em branco.

Conseguimos que vários alunos fossem ao quadro e escrevessem a conclusão de seus grupos, então fomos dialogando e formalizamos da seguinte forma o complementar de um conjunto :

Dados os conjuntos A e B, e B C A, o complementar de B em relação a A, é o conjunto formado por todos os elementos de A que não pertencem a B, ou seja $C_A B = \{x/x \in\ A \ e \ x \notin B\}$.

4.10 DÉCIMA SESSÃO DE ENSINO

A décima sessão de ensino foi aplicada no dia 28/05/2018, teve como objetivo aplicar a Atividade 17, que apresenta problemas com operações de conjuntos.

Estavam presentes 29 alunos, que organizados em trios, desenvolveram a atividade em 50 minutos, procurou instigar os alunos a resolver problemas com operações de conjuntos.

Os alunos sentiram muita dificuldade em realizar essa atividade, tivemos que retomar o que era União, Intersecção e diferença entre conjuntos, mostrei vários exemplos utilizando diagramas para que eles visualizassem cada operação, alguns alunos se zangaram por que não conseguiam resolver a atividade, outros simplesmente desistiram logo na primeira, então conversei com eles e tudo voltou para a tranquilidade, expliquei bastante até que as dúvidas foram sendo sanadas. Após esse momento de desespero, eles se tranquilizaram e realizaram a atividade com êxito.

4.11 DÉCIMA PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

A décima primeira sessão de ensino foi aplicada no dia 04/06/2018, teve como objetivo aplicar o pós teste para verificar a aprendizagem dos alunos, que apresentava questões envolvendo relação de pertinência, de inclusão e operações com conjuntos. Estavam presentes 34 alunos, que desenvolveram a atividade, de forma individual em 45 minutos.

5. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

A Análise a posteriori tem como objetivo a socialização dos resultados obtidos nos testes avaliativos, assim como na comparação das notas dos alunos no pré teste e no pós-teste da aplicação da sequência didática. Mostrando as dificuldades e obstáculos que os alunos encontraram no momento da execução das atividades.

Utilizaremos a frequência dos alunos quanto à participação nas atividades, relacionado sempre com o seu desempenho, uma vez que acreditamos ser um fator importante no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Neste momento, faremos alusão com as análises prévias, e assim verificar se podemos validar nossa sequência de atividades sobre o ensino de conjuntos. Verificaremos também como os alunos realizaram suas resoluções das atividades e os erros obtidos para dessa forma, conseguir encontrar as principais dificuldades.

5.1 PERFIL DOS ALUNOS

Com o objetivo de identificarmos o perfil socioeconômico dos discentes da turma em que ocorreu o experimento e a relação destes com a matemática e o assunto abordado, aplicamos um questionário para 36 estudantes da referida turma. Faremos uma breve descrição para que possamos conhecer o perfil dos sujeitos dessa pesquisa.

Quando chegamos a escola para aplicar nossa sequência que era pra ser em uma turma de 1º ano, a professora já tinha ministrado o assunto de conjuntos, então decidimos aplicá-la em uma turma de 3º ano, pois sabíamos que eles tinham estudado, mas não lembravam do mesmo.

Os alunos investigados são de uma escola pública estadual do Pará, com base nesta pesquisa, constatamos que 58,33% dos estudantes são do sexo feminino e 41,67% são do sexo masculino.

O quadro a seguir mostra a idade e gênero dos alunos.

QUADRO 28 – A idade e gênero dos alunos

Idade	Masculino	Feminino	Total
16	1 2,78%	3 8,33%	11,11%
17	11 30,55%	17 47,22%	77,77%
18	1 2,78%	1 2,78%	5,56%
20	2 5,56%	0	5,56%

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Podemos perceber que a maior parte dos alunos tem idade de 17 anos (77,77%), cuja distribuição para o gênero masculino é de 30,55% e 47,22% para o gênero feminino, este último sendo o maior percentual de acordo com o quadro.

QUADRO 29 – A escolaridade do responsável dos alunos

Escolaridade dos responsáveis	**Masculino**		**Feminino**	
Nenhum	2	5,56%	1	2,78%
Fundamental incompleto	9	25%	7	19,44%
Fundamental completo	3	8,33%	3	8,33%
Ensino Médio incompleto	5	13,89%	7	19,44%
Ensino Médio completo	12	33,33%	11	30,56%
Ensino Superior completo	4	11,11%	3	8,33%
Pós-Graduação completo	1	2,78%	4	11,11%

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Em relação a escolaridade dos pais a análise indicou que a maioria dos responsáveis possui o ensino médio completo, 33,33% para responsáveis masculinos e 30,56% para responsáveis femininos.

QUADRO 30 – Frequência com que estuda fora da escola

Frequência	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
Todos os dias	2	5,56%
Somente nos finais de semana	12	33,33%
Somente no período de prova	9	25%
Somente na véspera da prova.	9	25%
Nunca	4	11,11%

Fonte: Pesquisa de campo (2018).

Os estudos apontam que 33,33% estudam somente nos finais de semana. Realidade contraria onde 11,11% dos alunos não costumam estudar fora da escola.

QUADRO 31 – Quanto você gosta de Matemática?

Você gosta de Matemática?	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
Não gosto	7	19,44%
Um Pouco	17	47,22%
Sim. Gosto	10	27,78%
Sim. Gosto bastante	2	5,56%

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

A análise indicou que 47,22% gostam apenas um pouco de matemática, e 19,44% não gostam nenhum pouco dessa ciência.

QUADRO 32 – Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

	Frequência absoluta	**Frequência relativa**
Professor particular	2	5,56%
Responsável Masculino	3	8,33%
Responsável Feminino	4	11,11%
Irmão	1	2,78%
Ninguém	21	58,33%
Outro:	5	13,89%

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Quem mais lhe ajuda nas tarefas de casa? 58,33% estudam sozinho e apenas 11,11% com o seu responsável Feminino.

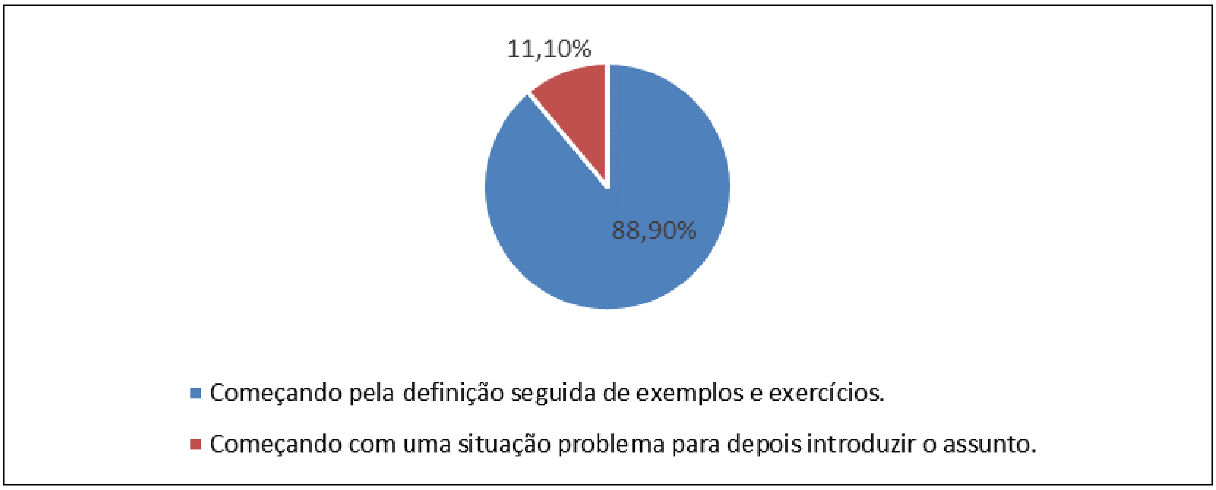
QUADRO 33 – Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?

	Frequência absoluta	**Frequência relativa**
Sempre	6	16,67%
Quase sempre	18	50%
Poucas vezes	12	33,33%
Nunca compreendo	0	0%

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Em relação a compreender as explicações dadas nas aulas de matemática. Cinquenta por cento compreende quase sempre e 33,33% poucas vezes compreende.

GRÁFICO 1 – Experiências dos alunos quanto aos métodos de introdução de assuntos matemáticos

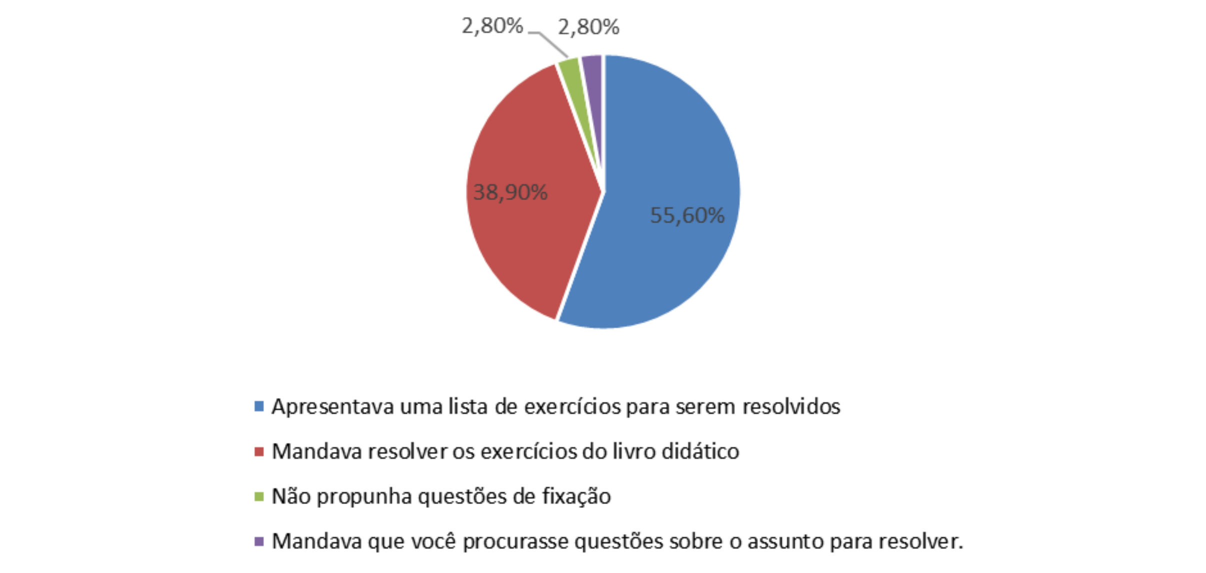


Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Assim obtivemos 88,90% das respostas, começando pela definição seguida de exemplos e exercícios, confirmando a metodologia tradicional, já 11,10% dos alunos afirmam que os docentes iniciam as aulas começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto.

As experiências dos alunos quanto aos métodos de ensino da matemática remetem apenas ao ensino clássico e ao uso de situações-problema. O uso de situações-problema foi na amostra (11,10%), em detrimento do uso método clássico de ensino: definição, seguida de exemplos e exercícios (88,90%).

GRÁFICO 2 – Para fixar o conteúdo estudado de Conjuntos, o seu professor



Fonte: Pesquisa de campo (2018)

A experiência dos alunos em relação à fixação de conteúdo foi 55,60% dos alunos afirmaram que o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos e 38,90% mandava resolver exercícios no livro didático.

Como já traçamos o perfil dos alunos em relação ao contexto socio econômico e abordagem do conteúdo de conjuntos, vamos analisar os resultados do pré teste e do pós teste.

5.2 RESULTADO GERAL DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

Para ajudar em nossas analises, iremos fazer um quadro que nos mostrará, por estudante e por questão, o acerto (C), o erro (E) e a questões deixadas em branco (B) no pré-teste e no pós-teste com intuito de aferir o conhecimento do aluno sobre conjuntos.

Nos quadros a seguir encontramos a relação por alunos e seus acertos, erros e as questões deixadas em branco no pré-teste e pós-teste. Para efeitos de análise, uma amostra de 29 alunos foi selecionada, pois estes estavam presentes na aplicação dos testes avaliativos. Como forma de garantir o anonimato dos participantes, denominamos os alunos de “A1”, “A2”, “A3”... “A29”.

O quadro 34 refere-se ao pré-teste e percebemos que na turma de 29 alunos, tiveram 15% de acerto, 46% de erro e 39% deixou em branco, percebemos que os alunos não tinham domínio do conteúdo.

QUADRO 34 – Visão geral das questões corretas, erradas e deixadas em branco no pré-teste

Aluno	Questões																				
	1				2				3		4		5			6		7	8	9	10
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	A	B	A	B	C	A	B				
A1	E	C	C	C	E	C	E	C	B	B	B	B	E	E	E	B	B	E	B	C	E
A2	E	E	E	C	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	B	B	E	B	E	E
A3	C	E	E	C	E	E	E	C	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	C	E
A4	C	E	C	E	E	E	E	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	B	B
A5	E	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	B	E	E
A6	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	B	B	B	B	B	B	E	B	B	E
A7	E	E	E	E	E	E	E	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B
A8	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	C	E	C	C	C	E	E	E	E
A9	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A10	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A11	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	B	B	B	B	B	B	B	C	E
A12	E	C	C	E	E	E	E	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	C	E
A13	E	E	E	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	B	B	B	B	C	E
A14	E	E	E	E	E	E	C	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A15	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E	C	C	C	E	C	B	B	E	E	E	B
A16	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A17	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	B	B	E	B	E	E
A18	C	C	E	C	E	E	C	E	E	E	E	E	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A19	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	B	E
A20	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A21	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E	C	C	C	E	C	E	E	E	E	C	E
A22	B	B	B	B	B	B	B	B	E	E	C	C	C	E	C	E	B	B	B	E	C
A23	C	E	E	E	E	E	C	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	C	E
A24	E	C	C	C	E	E	C	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A25	E	E	E	E	E	E	C	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	C	E
A26	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	B	C	E	C	B	B	B	B	B	E
A27	E	E	E	E	E	E	E	E	C	C	C	C	C	E	C	B	B	E	B	E	C
A28	E	E	C	E	E	E	C	E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	E	B	E	E
A29	B	B	B	B	B	B	B	B	E	E	E	E	E	B	E	B	B	E	B	E	C

Fonte: Pesquisa de campo 2018.

O quadro 35 refere-se ao pós-teste e percebemos, que a turma teve 45% de acerto, 53,4% de erro e 1,6% deixou em branco, percebemos que os alunos não tiveram uma melhora significativa.

QUADRO 35 – Visão geral das questões corretas, erradas e deixadas em branco no pós-teste

Aluno	Questões																				
	1				2				3		4		5			6		7	8	9	10
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	A	B	A	B	C	A	B				
A1	E	E	E	E	C	C	C	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	E
A2	E	E	C	E	C	E	E	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	E	C
A3	C	C	C	E	C	C	E	E	C	C	E	E	E	E	E	E	B	E	B	E	E
A4	E	E	C	E	E	E	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A5	E	E	C	E	E	C	C	C	C	C	E	C	C	E	E	E	E	E	B	E	E
A6	C	E	C	E	C	C	E	E	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E
A7	E	C	E	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A8	C	E	C	E	C	C	C	C	C	C	E	C	C	E	C	C	C	E	C	E	E
A9	E	E	E	E	C	C	E	E	C	C	E	E	C	C	C	E	E	E	E	E	C
A10	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	C	C	E	E	E	E	E	E	B	E	E
A11	C	E	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	E
A12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E
A13	C	E	E	E	C	E	C	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A14	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	C	E	E	C	E	E	E	E	E	E
A15	C	E	C	C	E	E	C	C	C	C	E	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E
A16	E	E	E	E	E	E	C	C	E	E	E	E	C	C	C	B	B	E	E	E	E
A17	E	C	E	E	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A18	C	C	C	C	E	E	E	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E
A19	E	E	E	C	C	E	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E	B	E	E	E	E
A20	C	C	C	C	E	C	E	C	C	C	E	E	C	E	C	E	E	E	B	C	E
A21	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E	E	C	E	C
A22	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E	C
A23	C	C	E	E	C	C	E	E	C	C	E	E	C	E	C	C	E	E	B	C	E
A24	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	C	C	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A25	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	C	C
A26	E	C	E	E	C	C	C	C	E	E	E	E	C	E	C	E	C	E	E	E	E
A27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	C
A28	E	E	E	E	E	C	E	C	C	E	E	C	E	E	E	E	E	E	B	E	E
A29	C	C	E	E	E	E	E	E	C	C	C	C	C	E	C	E	E	E	E	E	E

Fonte: Pesquisa de campo 2018

O quadro 36 refere-se a porcentagem do número de acertos, erros e em brancos por questão, podemos perceber que a questão que teve maior acerto no pré-teste foi a de número 1-c e no pós-teste foram a 3-a e 3-b, e a que teve o maior erro no pré-teste foi a 7 e no pós-teste foi a 9.

QUADRO 36 – Desempenho nos pré- e pós-testes por questão

Questão	Acertos(%)		Erros(%)		Em branco(%)	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
1-a	27,6	58,6	48,3	41,4	24,1	0
1-b	27,6	48,3	48,3	51,7	24,1	0

(continua)

(continuação)

Questão	Acertos(%)		Erros(%)		Em branco(%)	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
1-c	31	55,2	44,8	41,4	24,1	0
1-d	27,6	37,9	48,3	62,1	24,1	0
2-a	3,4	62,1	72,4	37,9	24,1	0
2-b	6,9	65,5	69	34,5	24,1	0
2-c	27,6	58,6	48,3	41,4	24,1	0
2-d	10,3	55,2	65,5	44,8	24,1	0
3-a	20,7	69	37,9	31	41,4	0
3-b	10,3	69	44,8	31	44,8	0
4-a	17,2	44,8	37,9	55,2	44,8	0
4-b	17,2	62,1	31	37,9	51,7	0
5-a	20,7	65,5	27,6	34,5	51,7	0
5-b	0	37,9	44,8	62,1	55,2	0
5-c	20,7	62,1	24,1	37,9	55,2	0
6-a	3,4	24,1	17,2	72,4	79,3	3,4
6-b	3,4	17,2	13,8	72,4	82,8	10,3
7	0	6,9	86,2	93,1	13,8	0
8	0	17,2	17,2	62,1	82,8	20,7
9	27,6	13,8	58,6	86,2	13,8	0
10	10,3	20,7	79,3	79,3	10,3	0

Fonte: Pesquisa de campo 2018

5.3 DESEMPENHO NAS QUESTÕES

A seguir apresentaremos o desempenho dos alunos em relação as questões do pré-teste e do pós-teste. O desempenho dos alunos será mostrado de um por um em porcentagem de acertos e erros em relação as questões através de um quadro geral e depois por um gráfico que mostrará a mesma relação.

QUADRO 37 – Desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste

Aluno	Acertos		Erros		Branco	
	Pré teste	Pós teste	Pré teste	Pós teste	Pré teste	Pós teste
A1	28,6%	19%	38%	81%	33,3%	0%
A2	9,5%	52,4%	76,2%	47,6%	14,3%	0%
A3	19%	33,3%	31,3%	57,1%	47,6%	9,5%
A4	9,5%	33,3%	33,3%	66,7%	57,1%	0%
A5	9,5%	38%	85,7%	57,1%	4,8%	4,8%
A6	0%	52,4%	19%	47,6%	81%	0%
A7	9,5%	23,8%	85,7%	76,2%	4,8%	0%
A8	23,8%	66,7%	76,2%	33,3%	0%	0%
A9	4,8%	38%	14,3%	61,9%	81%	0%
A10	9,5%	47,6%	52,4%	47,6%	38%	4,8%
A11	47,6%	66,7%	19%	33,3%	33,3%	0%
A12	14,3%	85,7%	38%	14,3%	47,6%	0%
A13	9,5%	23,8%	71,4%	76,2%	19%	0%
A14	4,8%	14,3%	47,6%	85,7%	47,6%	0%
A15	38,1%	52,4%	47,6%	47,6%	14,3%	0%
A16	0%	23,8%	14,3%	66,7%	85,7%	9,5%
A17	0%	9,5%	81%	90,5%	19%	0%
A18	19%	71,4%	52,4%	28,6%	28,6%	0%

(continua)

(continuação)

Aluno	Acertos		Erros		Branco	
	Pré teste	Pós teste	Pré teste	Pós teste	Pré teste	Pós teste
A19	0%	14,3%	9,5%	81%	90,5%	4,8%
A20	0%	52,4%	14,3%	42,9%	85,7%	4,8%
A21	42,9%	76,2%	57,1%	23,8%	0%	0%
A22	23,8%	85,7%	23,8%	14,3%	52,4%	0%
A23	14,3%	47,6%	38%	47,6%	47,6%	4,8%
A24	28,6%	14,3%	71,4%	85,7%	0%	0%
A25	9,5%	85,7%	42,9%	14,3%	47,6%	0%
A26	9,5%	38%	57,1%	61,9%	33,3%	0%
A27	33,3%	90,5%	52,4%	9,5%	14,3%	0%
A28	9,5%	19%	42,9%	76,2%	47,6%	4,8%
A29	4,8%	38%	38%	61,9%	57,1%	0%

Fonte: Pesquisa de campo2018

Pelo quadro 37 podemos ter uma visão geral do comportamento dos 29 alunos nas questões que compunham os testes. Observamos que as questões que obtiveram o maior índice de erros, no pós teste, foram as questões 6, 7, 8, 9 e 10. Julgamos positivo o saldo de apenas 6 alunos deixarem de fazer a oitava questão e três alunos deixaram a questão seis em branco.

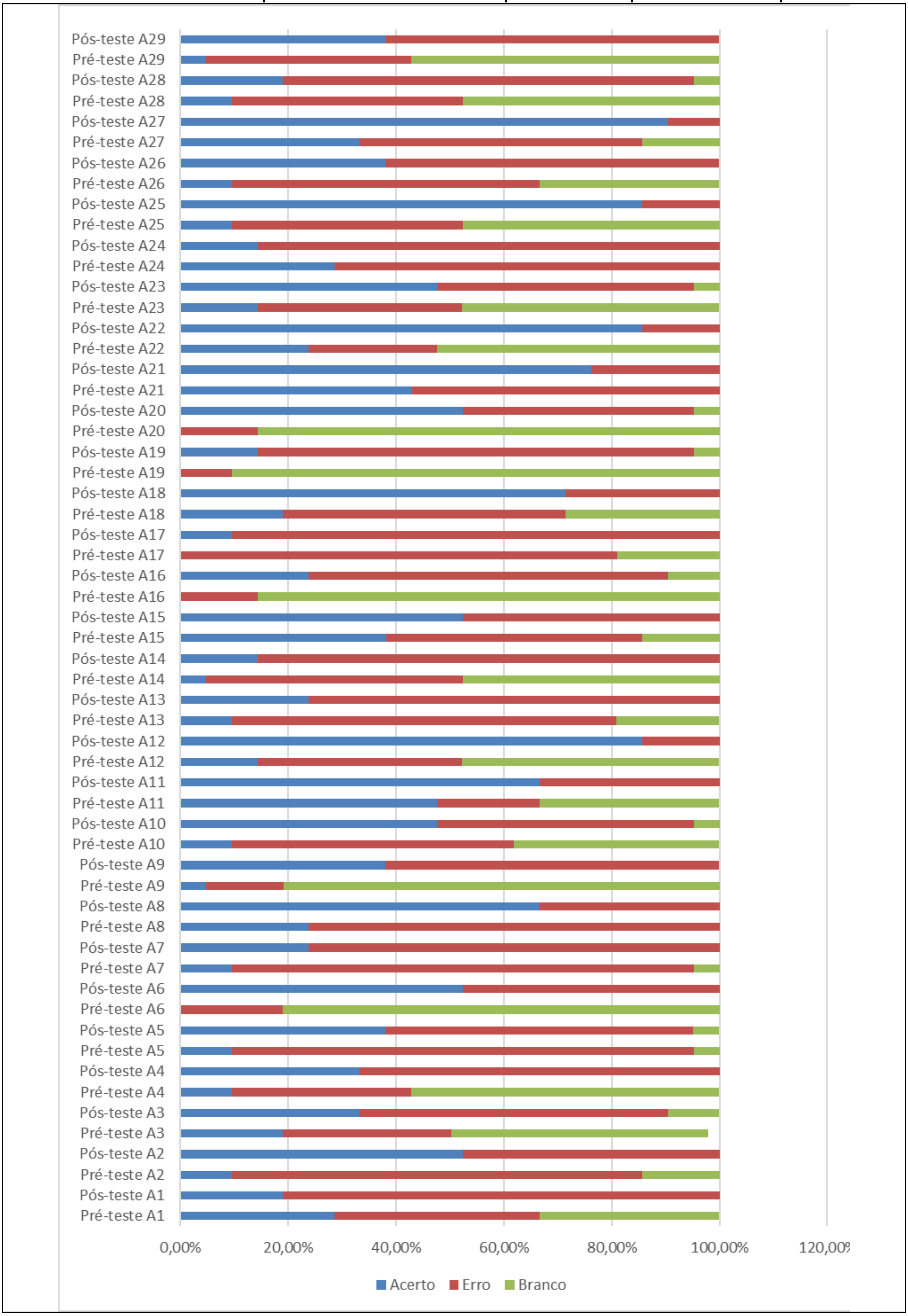
As questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6, utilizamos itens como a, b, c e d, portanto no momento de calcular a porcentagem contamos cada item como se fosse uma questão, então estamos levando em consideração os testes com 21 questões.

Ao realizar uma comparação entre o desempenho por questão no pré-teste e no pós-teste, percebemos, em geral, o quão satisfatório foi o resultado alcançado após a aplicação das atividades. Apesar de ter estudado o assunto de conjunto, podemos observar que o desempenho dos alunos no pré-teste teve baixo rendimento, pois nenhum aluno acertou 50% ou mais das questões. Mais da metade dos alunos acertou menos que 10% das questões.

Muito interessante é o resultado do desempenho dos alunos A1 e A24 que em vez de melhorarem, eles pioraram, deve ser por não terem participado com muita frequência das atividades de nossa sequência. De modo geral, com exceção dos alunos A1 e A24, todos melhoraram em seu desempenho.

O aluno A20 acertou 0% do pré-teste e no pós-teste teve um desempenho de mais de 50%, então podemos observar que se for usado a redescoberta, podemos alcançar uma melhora no processo ensino-aprendizagem. Ressalta-se que houve a necessidade de construir uma atividade para o ensino de problemas com operações de conjunto mais detalhada, a fim de que os próprios alunos pudessem compreender o conteúdo, até então pouco explorado nas atividades de fixação da sequência didática, o que pode ter contribuído para os resultados obtidos.

GRÁFICO 3 – Desempenho dos alunos nas questões do pré teste e do pós teste

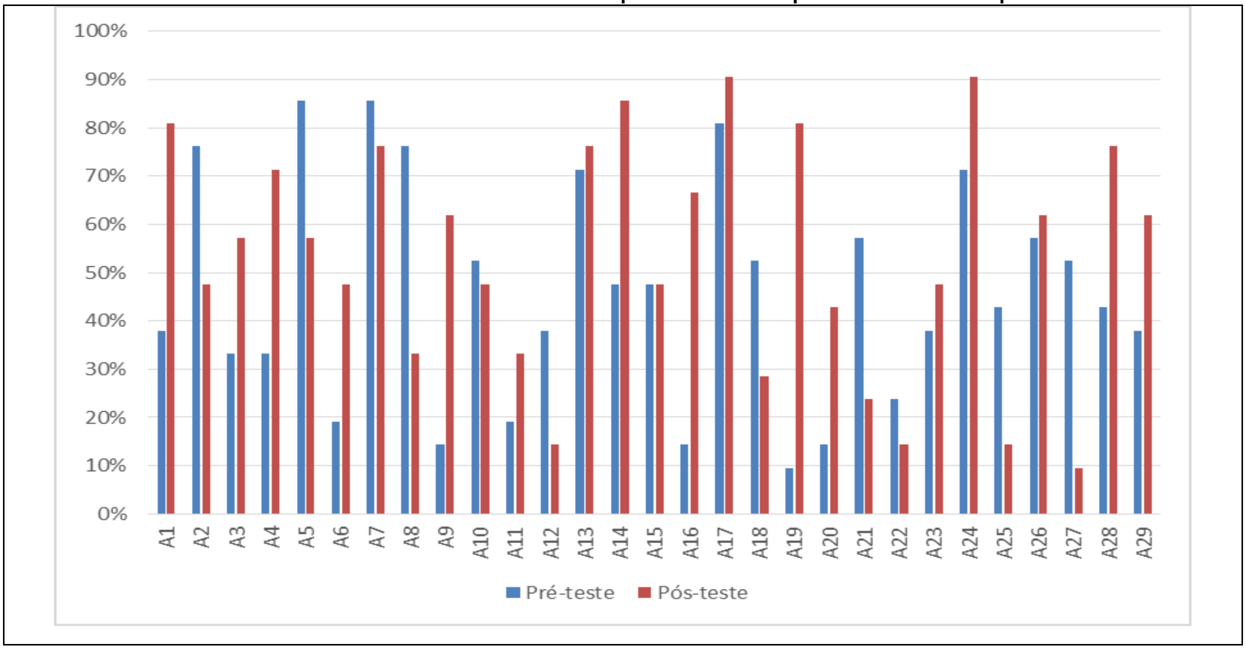


Fonte: Pesquisa de campo 2018

Como analisamos o desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste no quadro e no gráfico acima, no qual enfatizamos as questões corretas dos alunos, vamos considerar neste momento as questões erradas e as deixadas em branco pelos alunos, mesmo após a aplicação de nossa sequência didática.

As questões erradas ou deixadas em branco pelos alunos no pré-teste e no pós-teste serão consideradas, no gráfico 5, como questões erradas.

GRÁFICO 4 – Erro dos alunos nas questões do pré-teste e do pós- teste



Fonte: Pesquisa de campo2018

O gráfico 4 apresenta que as questões erradas e ou deixadas em branco diminuíram muito do pré-teste para o pós-teste. Para nós, isso é sinal que os alunos melhoraram sua aprendizagem e se sentiram mais confiantes para realizarem as questões do teste, depois da aplicação da nossa sequência didática.

Dentre as questões erradas ou deixadas em branco, observa-se que o pré-teste representou 85,2% dessas questões, chamamos atenção especial, para as questões 6, 7 e 8 que tiveram um percentual de 96,6%, 100% e 100%, após a aplicação de nossa sequencia didática esse percentual diminuiu para 55% com exceção das questões 6, 7, 8, 9 e 10 que tiveram 79,3%, 93,1%, 82,8%, 86,2% e 79,3% respectivamente. Com esses dados observamos que a porcentagem de questões deixadas em branco no pré-teste foi 39,2% e no pós-teste apenas 1,6%.

A seguir veremos detalhadamente essa evolução na aprendizagem dos alunos, pois analisaremos questão por questão, de modo a observar os erros e avanço dos alunos nas questões que compunham os testes.

5.4 ANÁLISE DOS ERROS

Segundo Sousa e Sousa (2012), na medida em que o professor percebe o erro como uma ferramenta importante para a avaliação da sua práxis, consegue ajudar seu aluno numa melhor compreensão e interiorização do que foi ensinado, percebendo no erro aquilo que o mesmo já aprendeu sobre o conteúdo estudado e aquilo que ainda não ficou claro, assim se utilizará de novas estratégias de aprendizagem para alcançar tal objetivo.

Sousa e Sousa (2012) disseram que, para que o professor possa ajudar de forma efetiva seus alunos em seus erros, faz-se necessário que aprenda a identificar os erros e saber a qual natureza pertence, caso contrário irá tratá-los da mesma forma, sendo que os erros cometidos pelos alunos são de diversos tipos, merecendo tratamento diferenciado.

Para a análise dos erros organizamos em categorias assim denominadas:

Conceituais: Nesta categoria estão os erros dos alunos nas questões por não entenderem o conceito

Registro: Nesta categoria estão os erros dos alunos nas questões por não registrarem de forma correta.

Interpretação de problemas: Nesta categoria estão os erros dos alunos nas questões por não interpretarem corretamente o problema.

Simbologia: nessa categoria estão os erros dos alunos nas questões que não reconhecem os símbolos utilizados.

5.4.1.Análise da primeira questão

Utilizar os símbolos $\in$, $\notin$,$\subset$ e $\not\subset$ complete os espaços em branco a seguir:

a) a ...... {b, c, d, f, g}   b) u ...... {a, e, i, o, u}

c) e ...... {a, e, i, o, u}   d) f .... {b, c, d, f}

No item (a) tivemos 41,4% de erro, no item (b) 51,7%, no item (c) 44,8% e no item (d) 62%. Acreditamos que isso se deve por termos colocados quatro símbolos para preencher quatro espaço, isso fez com que os alunos achassem que era preciso usar os quatro simbolos para completar os espaços.

Percebemos ainda que nenhum aluno deixou essa questão em branco. Observamos que com mais frequência os erros dos estudantes estavam relacionados a questões conceituais e de simbologia, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 38 – Exemplo de erros na 1ª questão

a) a ..$\subset$.. {b, c, d, f, g}	b) u ..$\not\subset$... {a, e, i,o,u}
c) e ..$\notin$... {a, e, i,o,u}	d) f ..$\notin$... {b, c, d, f}

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.2. Análise da segunda questão

Utilizar os símbolos ⊂ ou ⊄, complete os espaços em branco a seguir:	
a) { –1, –3, – 5} ...... {–3, –5}	b) {–3, –5} ...... {0, –1, –3, – 5}
c) {0, –1, –3, – 5} ...... {0, –1}	d) {0, –1} ...... {0, –1, –3, – 5}

No item (a) tivemos 38% de erros, no item (b) 34,5%, no item (c) 41,4% e no item (d) 44,8%. Percebemos que nenhum aluno deixou a questão em branco. Podemos observar que teve um aluno que usou os símbolos ∈ e ∉ que não estava no enunciado da questão.

Observamos que com mais frequência os erros dos estudantes estavam relacionados a questões conceituais e de simbologia, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 39 – Exemplo de erros na 2ª questão

a) { –1, –3, – 5} $\notin$... {–3, –5}	c) {0, –1, –3, – 5} .$\in$. {0, –1}
b) u ..$\notin$.. {a e, i,o,u}	d) f ..$\subset$... {b, c, d, f}

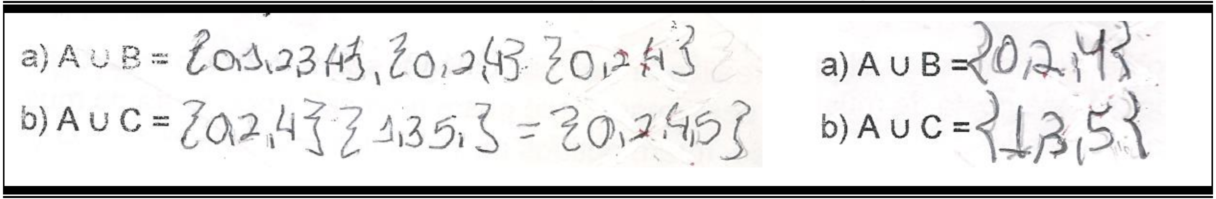
Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.3. Análise da terceira questão

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos:	
a) A ∪ B =	b) A ∪ C =

Analisando os 31% de erros da questão 3 no pós teste, percebemos que 4 alunos usaram o conceito de intersecção, 1 colocou que não tem a união e os outros colocaram resultados aleatórios que não percebemos qual a operação ele utilizou. Os erros dos estudantes estavam relacionados a questões conceituais, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 40 – Exemplo de erros na 3ª questão



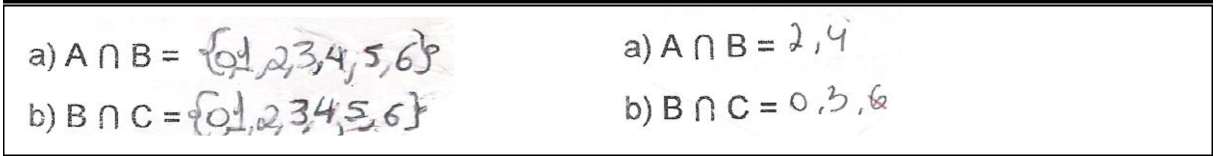
Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.4. Análise da quarta questão

Dados os conjuntos A = {0, 1, 3, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos: a) A ∩ B =   b) B ∩ C =

Analisando os 55,2% de erros da questão 4 no pós teste, percebemos que 2 alunos usaram o conceito de união, 2 usaram o conceito de diferença e os outros colocaram resultados aleatórios que não percebemos qual a operação ele utilizou. Os erros dos estudantes estavam relacionados a questões conceituais, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 41 – Exemplo de erros na 4ª questão



Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.5. Análise da quinta questão

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos: a) A – B =   b) C – A =   c) A – C =

Analisando os erros da questão 5 no pós teste, observamos que 34,5% erraram o item (a), 62% o item (b) e 38% o item (c), percebemos que 7 alunos erraram somente o item (b), o mesmo estava relacionado ao conceito de conjunto vazio e acreditamos que esses alunos não interiorizaram esse conceito, 3 usaram o conceito de intersecção, 2 fizeram a operação diferença de números e os outros colocaram resultados aleatórios que não percebemos qual a operação utilizada. Os erros dos estudantes estavam relacionados a questões conceituais, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 42 – Exemplo de erros na 5ª questão

a) A – B = 0,1,2,3,4,5	a) A – B = 9
b) C – A = 0,1,2,3,4,5	b) C – A = -6
c) A – C = 0,1,2,3,4,5	c) A – C = 6

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.6. Análise da sexta questão

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) C_A^B= b) C_A^C=

Analisando os erros da questão 6 no pós teste, observamos que 72,4% erraram o item (a) e (b) e a única questão em branco, onde o item (a) teve 3,4% e o item (b) 10,3% de questões em branco , 5 alunos usaram o conceito de união, 5 usaram na operação C_A^B, o conjunto B como resultado e na operação C_A^C, o conjunto A como resultado e os outros colocaram resultados aleatórios que não conseguimos perceber o que significa seu resultado. Os erros dos alunos estavam relacionados a questões conceituais, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 43 – Exemplo de erros na 6ª questão

a) $C_A^B = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{0+2+3+4+6} = \frac{21}{12} = 36$	b) $C_A^C = \frac{1+2+4+5}{0+1+2+3+4+5+6} = \frac{12}{21} = 33$
a) C_A^B = 0,1,2,3,4,5,6	b) C_A^C = 1,2,3,4,5

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.7. Análise da sétima questão

Uma Universidade está oferecendo três cursos de extensão para a comunidade externa com a finalidade de melhorar o condicionamento físico de pessoas adultas, sendo eles:

Curso A: Natação.

Curso B: Alongamento.

Curso C: Voleibol.

As inscrições nos cursos se deram de acordo com a tabela seguinte:

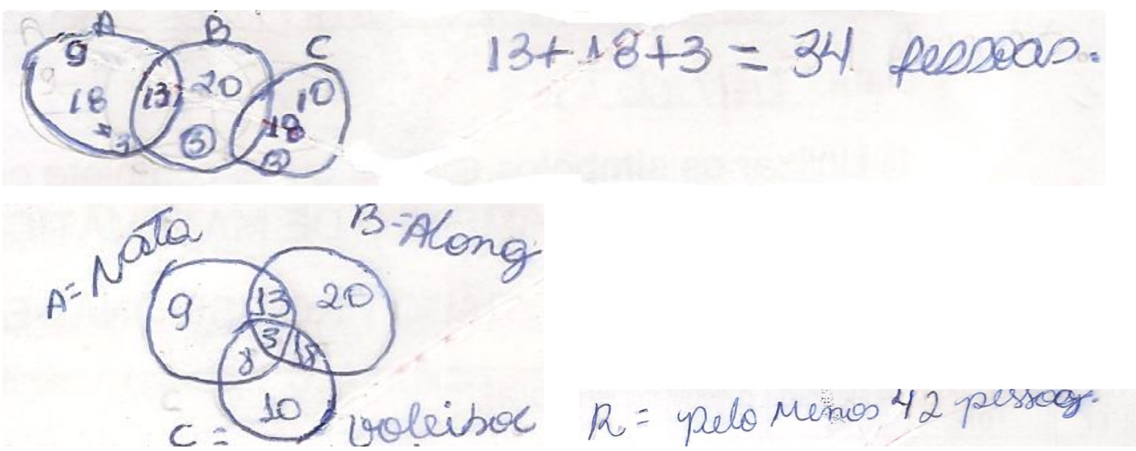
Cursos	Apenas A	Apenas B	Apenas C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Alunos	9	20	10	13	8	18	3

De acordo com os dados apresentados, quantas pessoas se inscreveram em pelo menos dois cursos?

Analisando os erros da questão 7 no pós teste, observamos 93,1% de erros, desses 14 só colocaram a resposta, 3 usaram os valores da tabela, onde aparecem B e C ou A e C como resposta, 1 calculou a média dos valores da tabela, 1 somou os valores em que aparecem 2 e 3 conjuntos, 1 somou os valores onde aparecem 2 conjuntos e 6 fizeram o diagrama, mas registraram de forma errada.

Os erros dos alunos estavam relacionados a questões de interpretação, de registro e conceitual, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 44 – Exemplo de erros na 7ª questão



Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.8. Análise da oitava questão

Seja X um conjunto tal que X – {1, 2, 3, 7, 8} = {4} e X ∩ {1, 2, 3, 5, 6} = {1, 2, 3}. Determine o conjunto X.

Analisando os erros da questão 8 no pós teste, observamos 62% de erro, alguns alunos deram como resultado o conjunto {1,2,3}, outros usaram a união de todos os conjuntos, outros fizeram a união de todos os conjuntos e tiraram o elemento 4, outros juntaram os elementos que não se repetiam, e alguns deram respostas que não conseguimos identificar o raciocínio usado. observamos 20,7% de questões em branco, acreditamos que, nesse caso, o aluno não entendeu o que a questão queria.

Os erros dos alunos estavam relacionados a questões de interpretação, de simbologia e conceitual, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 45 – Exemplo de erros na 8ª questão

X={1,2,3,4,7,8}	X={4}
X – 1,2,3,4,5,6,7,8}	

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.9. Análise da nona questão

José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos conseguiu tirar suas férias na fábrica do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar as suas obrigações?

Analisando os erros da questão 9 no pós teste, observamos 86,2% de erro, a grande maioria colocou somente a resposta, logo não temos como analisar esses erros, alguns disseram que eles teriam do dia 5 até o dia 25 para viajar, mas subtraíram 25 – 2 = 20, a análise está correta, mas o resultado errado, um aluno transformou os intervalos em número decimal e somou, 2,28 + 5,30 + 1,25 = 8,83, e um somou os últimos números de cada intervalo, 28 + 30 + 25 = 83.

Observamos que nenhum aluno deixou essa questão em branco. Os erros dos alunos estavam relacionados a questões de interpretação e conceitual, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 46 – Exemplo de erros na 9ª questão

A família Poderá viajar com 8 días sem faltar as suas obrigações.

$$\begin{array}{r} 2,28 \\ +5,30 \\ 1,25 \\ \hline 8,83 \end{array}$$

83 dias 28 + 30 + 25 =

Durante 20 dias

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\ 5 \\ \hline 20 \end{array}$$

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

5.4.10. Análise da décima questão

Em uma pesquisa realizada em um colégio sobre o gosto musical dos alunos, foram feitas duas perguntas: Você gosta de rock? Você gosta de música clássica? Após a tabulação, foram obtidos os seguintes resultados:

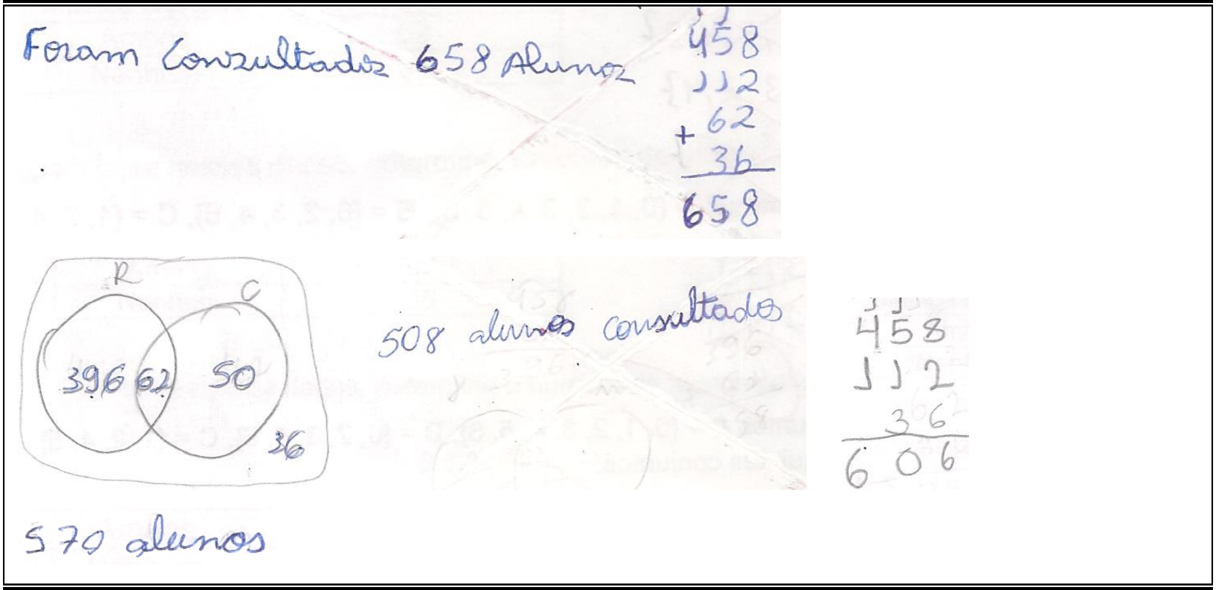
	Números de alunos
Rock	458
Música clássica	112
Ambos	62
Nenhum	36

Com base nesses dados, determine o número de alunos consultados.

Analisando os erros da questão 10 no pós teste, observamos 79,3% de erro, a maioria dos alunos somaram todos os valores da tabela, por não perceberem que 62 alunos gostavam dos dois estilos de música. Um aluno somou 458 + 112+ 36 = 606, esse não levou em conta que 62 foi contado duas vezes. Um aluno fez o diagrama certo, mas não levou em consideração os alunos que não gostavam de nenhum dos dois estilo. E alguns deram resposta sem nenhum tipo de registro, logo não é possível fazermos análise.

Nessa questão nenhum aluno deixou em branco, significa que mesmo errado, tiveram a confiança de fazê-la. Os erros dos alunos estavam relacionados a questões de interpretação, de registro e conceitual, como podemos ver no quadro a seguir:

QUADRO 47 – Exemplo de erros na 10ª questão



Fonte: Pesquisa de campo de 2018

O interesse em entender, segundo Sousa e Sousa (2012), como o erro é interpretado pelos professores deve-se ao fato de compreendermos que errar faz parte do processo de ensino, de construção do conhecimento. O erro deve ser tido como algo estimulante para o aluno continuar estudando para galgar mais aprendizagem, e não que o fato de errar seja impossibilidade de aprender.

5.5 RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E O DESEMPENHO NOS TESTES

Nesta subseção, apresentaremos as análises das informações produzidas com a aplicação do questionário utilizado na experimentação e o desempenho dos estudantes nos testes, com a finalidade de verificar se há alguma relação entre os fatores socioeconômicos e questões ligadas a matemática com a desempenho dos estudantes na resolução das questões.

QUADRO 48 – Os fatores socioeconômicos e o desempenho dos estudantes

Aluno	**Frequência**	**Você gosta de matemática?**	**Frequência que estuda matemática fora da escola**	**Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**	**Você consegue compreender as explicações do professor matemática?**	**Rendimento**	
						Pré teste	Pós teste
A1	76,5%	Sim. Gosto bastante	Somente nos finais de semana	Primo	Sempre	8,6%	19%
A2	64,7%	Um pouco	Somente no período de prova	Tio	Poucas vezes	9,5%	52,4%
A3	82,4%	Um pouco	Somente no período de prova	Ninguém	Poucas vezes	19%	33,3%
A4	11,8%	Um pouco	Somente nos finais de semana	Amigo	Poucas vezes	9,5%	33,3%
A5	70,6%	Sim. Gosto	Somente no período de prova	Ninguém	Quase sempre	9,5%	38%
A6	64,7%	Não gosto	Somente nos finais de semana	Ninguém	Quase sempre	0%	52,4%
A7	11,8%	Um pouco	Somente na véspera da prova	Ninguém	Poucas vezes	9,5%	23,8%
A8	35,3%	Um pouco	Somente nos finais de semana	Responsável masculino	Quase sempre	23,8 %	66,7%
A9	35,3%	Sim. Gosto	Todos os dias	Responsável feminino	Quase sempre	4,8%	38%
A10	29,4%	Não gosto	Nunca	Ninguém	Sempre	9,5%	47,6%
A11	94,1%	Um pouco	Somente nos finais de semana	Ninguém	Poucas vezes	47,6 %	66,7%
A12	10%	Um pouco	Somente na véspera da prova	Ninguém	Quase sempre	14,3 %	85,7%
A13	88,2%	Um pouco	Somente nos finais de semana	Ninguém	Sempre	9,5%	23,8%
A14	41,2%	Um pouco	Somente na véspera da prova	Ninguém	Quase sempre	4,8%	14,3%
A15	88,2%	Um pouco	Todos os dias	Professor particular	Poucas vezes	38,1 %	52,4%
A16	35,3%	Sim. Gosto	Somente na véspera da prova	Responsável feminino	Quase sempre	0%	23,8%
A17	100%	Sim. Gosto	Somente nos finais de semana	Responsável feminino	Quase sempre	0%	9,5%

(continua)

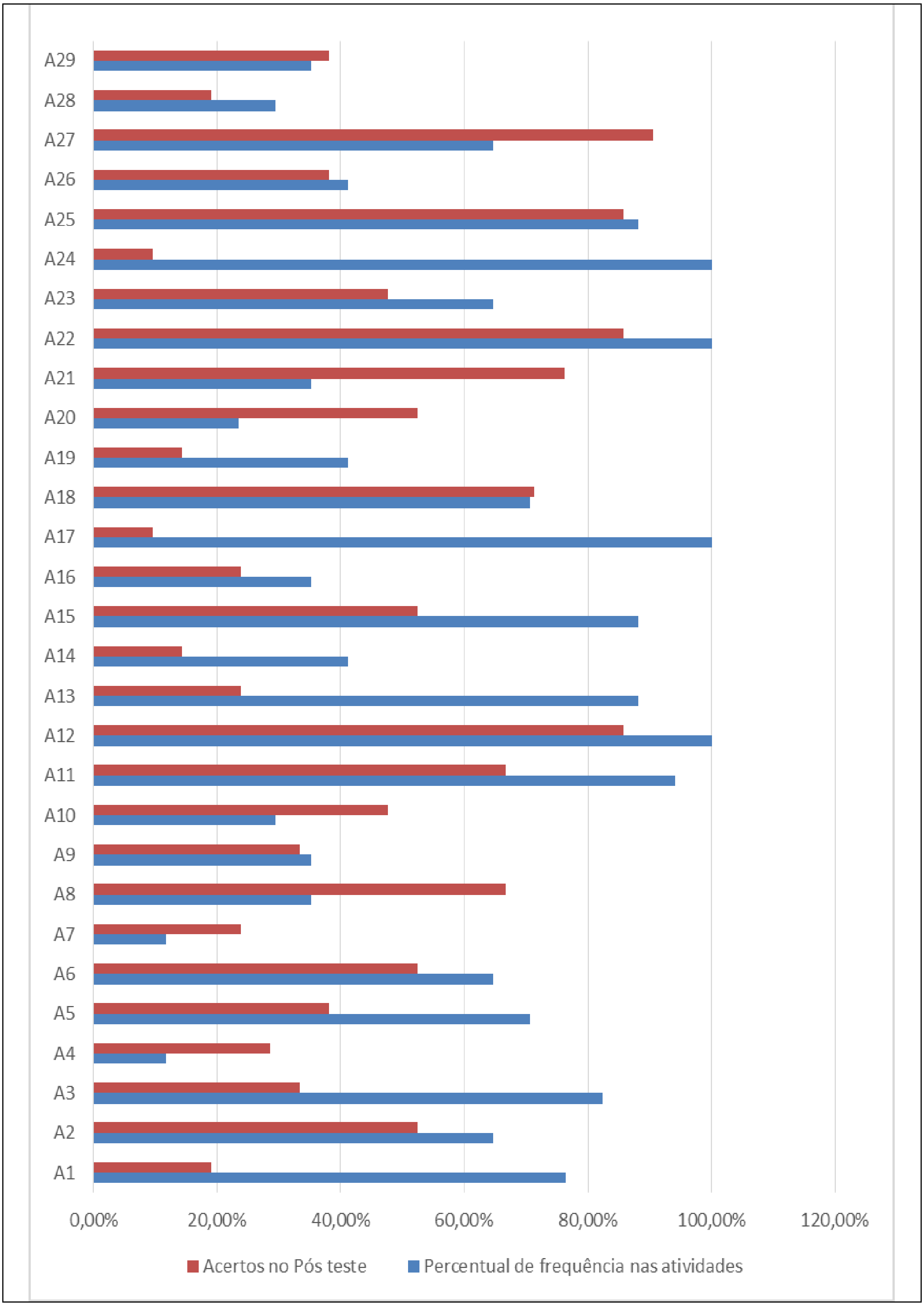
(continuação)

Aluno	Frequência	Você gosta de matemática?	Frequência que estuda matemática fora da escola	Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Você consegue compreender as explicações do professor de matemática?	Rendimento	
						Pré teste	Pós teste
A18	70,6%	Não gosto	Somente na véspera da prova	Ninguém	Quase sempre	19%	71,4%
A19	41,2%	Um pouco	Somente no período de prova	Ninguém	Quase sempre	0%	14,3%
A20	23,5%	Não gosto	Somente na véspera da prova	Colegas de classe	Poucas vezes	0%	52,4%
A21	35,3%	Um pouco	Somente nos finais de semana	Ninguém	Sempre	42,9 %	76,2%
A22	10%	Sim. Gosto	Somente no período de prova	Ninguém	Quase sempre	23,8 %	85,7%
A23	64,7%	Não gosto	Nunca	Tio	Quase sempre	14,3 %	47,6%
A24	10%	Um pouco	Somente na véspera da prova	Ninguém	Poucas vezes	28,6 %	14,3%
A25	88,2%	Sim. Gosto	Somente no período de prova	Ninguém	Sempre	9,5%	85,7%
A26	41,2%	Um pouco	Somente na véspera da prova	Ninguém	Poucas vezes	9,5%	38%
A27	64,7%	Sim. Gosto	Somente nos finais de semana	Professor particular	Sempre	33,3 %	90,5%
A28	29,4%	Um pouco	Somente no período de prova	Professor particular, Responsável feminino, Responsável masculino	Quase sempre	9,5%	19%
A29	35,3%	Sim, gosto bastante	Somente nos finais de semana	Ninguém	Quase sempre	4,8%	38%

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

Pelo quadro 48, ao abordar os fatores de desempenho dos alunos, Sete alunos obtiveram frequência igual ou superior a 75% e 6 alunos, menos de 25% das aulas. Além disso, 15 alunos gostam pouco de matemática e 5 alunos não gostam, o que reflete na frequência que estuda fora da escola, 15 alunos só estudam no período da prova ou véspera, e grande parte, 16 estudam sozinhos.

GRÁFICO 5 - Relação percentual de acertos dos alunos no pós-teste e a frequência dos alunos nas atividades



Fonte: Pesquisa de campo de 2018

Ao comparar os dados do quadro 48 e do gráfico 5 podemos observar que o aluno A3 gosta um pouco de matemática, só estuda no período de prova e ninguém ajuda nas tarefas de casa e que apesar de ter 82,4% de frequências nas atividades, não teve um rendimento bom, dado que o mesmo teve apenas 33,3% de acerto e o aluno A12 que tem as mesmas características em relação aos fatores de desempenho do aluno citado acima, mas que teve 10% de frequência nas atividades obteve 85,7% de rendimento.

Podemos constatar que a turma é heterogênea, pois cada um aprende no seu tempo, e que não tem uma receita básica de plano de aula ou uma sequência didática que faça com que a aprendizagem seja 100% significativa, mas o que podemos fazer é descobrir que método melhor se adequa a cada turma para um bom desenvolvimento do aluno.

Posto isso, é necessário pensarmos que na sala de aula cada caso é um caso e deve-se utilizar uma forma de ensinar que esteja adequada às necessidades do aluno, considerando as suas características, estabelecendo um tipo de atividade que constitui um desafio alcançável, e, depois, lhes oferecemos a ajuda necessária para superá-lo (ZABALA,1998).

Com esses dados podemos estabelecer o quadro 49.

QUADRO 49 – Relação entre o desempenho dos alunos no pós-teste e a frequência nas atividades

CATEGORIAS	Quantidades de alunos	Quantidade de alunos que obteve desempenho menor que 50% no pós-teste	Quantidade de alunos que obteve desempenho igual ou maior que 50%
Compareceu em todas as atividades	4	3	1
Faltou em pelo menos uma das atividades	25	15	10

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

A partir da análise do quadro 49 percebemos que a maioria dos alunos faltou em pelo menos uma atividade, e que destes, 40% obtiveram um desempenho igual ou maior que 50% de acertos. E observamos também, que daqueles participaram de todas as atividades, apenas um aluno pontuou média superior a 50% no pós-teste, ou seja, esse aluno obteve desempenho igual a 85,7% do total de acertos.

Isso parece destacar que as atividades não influenciaram de forma positiva no desempenho dos alunos no pós-teste aplicado, mas olhando de forma geral, a maioria dos alunos obteve uma melhora em seu aproveitamento, comparando com as notas do pré-teste. Relacionamos ainda o gosto pela matemática, a presença de dificuldade na matéria, e os acertos no pós-teste.

QUADRO 50 – Relação entre o gosto pela matemática, a dificuldade em matemática e o acerto dos alunos no pós-teste

Categorias	**Percentual de alunos**	**Percentual de alunos que gostam de matemática**				**Percentual dos alunos que compreendem as explicações do professor de matemática**		
		Não gosto	Um pouco	Sim. Gosto	Sim, gosto bastante	Poucas vezes	Quase sempre	Sempre
Desempenho inferior a 50% no pós-teste	58,6%	11,8%	52,9%	23,5%	11,8%	29,4%	53%	17,6%
Desempenho igual ou superior a 50% no pós-teste	41,4%	0%	50%	25%	25%	33,3%	41,7%	25%

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

Percebemos que 41,4% dos alunos teve um aproveitamento igual ou superior a 50% no pós-teste. Ainda, 50% destes alunos declararam gostar pouco de matemática e 41,7% apontaram que quase sempre entendem a explicação do professor de matemática. O quadro 50 apresenta a relação entre o gostar de matemática hábito de estudo e a média de acertos dos alunos no pós-teste.

QUADRO 51 – Relação entre o gosto pela matemática, hábito de estudo e a média de acertos dos alunos no pós-teste.

		Gosto pela matemática			
		Média de acertos dos alunos			
Hábitos de estudo		Não gosto	Um pouco	Sim gosto	Sim gosto bastante
	Período de prova	0	6,25	13,0	0
	Finais de semana	11,0	11,0	10,5	6,0
	Todos os dias	0	11,0	8,0	0
	Véspera da prova	13,0	7,2	5,0	0
	Nunca	10,0	0	0	0

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

Observamos que as maiores médias registradas consistem nos alunos que gostam de matemática e destacam estudar apenas no período de prova ou que não gostam de matemática e destacam estudar apenas na véspera da prova.

QUADRO 52 – Relação entre alunos que tem ajuda nas tarefas e a média de acertos dos alunos no pós-teste

Percentual de alunos que tem ajuda nas tarefas de matemática	**Percentual de alunos que tem desempenho inferior a 50% no pós-teste.**	**Percentual de alunos que tem desempenho igual ou superior a 50% no pós-teste**
	58,6%(17)	41,4%(12)
Responsável masculino	0%	8,3%
Responsável feminino	17,6%	0%
Ninguém	58,8%	58,3%
Outros	17,7%	16,7%
Professor Particular	0%	16,7%
Professor Particular, Responsável feminino e Responsável masculino	5,9%	0%

Fonte: Pesquisa de campo de 2018

Dos 58,6% dos alunos que tiveram desempenho menor que 50%, 58,8% não tem ajuda de ninguém nas tarefas de matemática, isso provoca um desinteresse pela disciplina, pois eles gostariam de fazer as tarefas, mas não sabem como. E dos 41,4% que tiveram desempenho superior a 50%, 58,3% não tem ajuda de ninguém.

Assim, segundo Costa e Silva (2010) considera-se que é fundamental que escola e família criem parcerias para promover a educação de seus educandos/filhos, e muitos dos conflitos hoje observados em sala de aula, serão aos poucos superados. Com tal processo em evidência torna-se importante que a família realmente participe da vida escolar de seus filhos, demonstrando comprometimento, envolvimento com a escola, possibilitando que a escola se torne além do ambiente de formação uma oportunidade de integração.

5.6 TESTE DE HIPÓTESE

A última parte de uma pesquisa que tem como metodologia a Engenharia Didática é a validação da sequência didática apresentada, que deve ser realizada com subsídios matemáticos plausíveis e pertinentes. Deste modo, após analisar os resultados quantitativos obtidos nos testes, aplicamos o teste de hipótese a fim de alcançar conclusões estatísticas sobre o pós-teste e, consequentemente, a metodologia de ensino adotada durante o experimento.

Para aplicação do teste de hipóteses, inicialmente consideramos as notas absolutas dos alunos nos dois testes. Como foram 21 (vinte e uma) questões, as notas foram tabuladas de 0 a 21, de acordo com o número de questões corretas de cada estudante.

Quadro 53 – Notas dos testes (por número de acertos)

Aluno	Pré teste	Pós teste
A1	6	4
A2	2	11
A3	4	7
A4	2	6
A5	2	8
A6	0	11
A7	2	5
A8	5	14
A9	1	8
A10	2	10
A11	10	14
A12	3	18
A13	2	5
A14	1	3
A15	8	11
A16	0	5
A17	0	2
A18	4	15
A19	0	3
A20	0	11
A21	9	16
A22	5	18
A23	3	10
A24	6	2
A25	2	18
A26	2	8
A27	7	19
A28	2	4
A29	1	8

Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Em seguida retiramos os dados para a aplicação do teste com base na fórmula

$$t = \frac{\sum d\ /n}{S_d/\sqrt{n}}$$

Onde:

$\sum d$ = somatório das diferenças dos dois testes

S_d = desvio padrão da diferença das notas dos dois testes

n = número de elementos da amostra

Com os dados presentes no quadro 53, teremos:

$\sum d$ = - 183

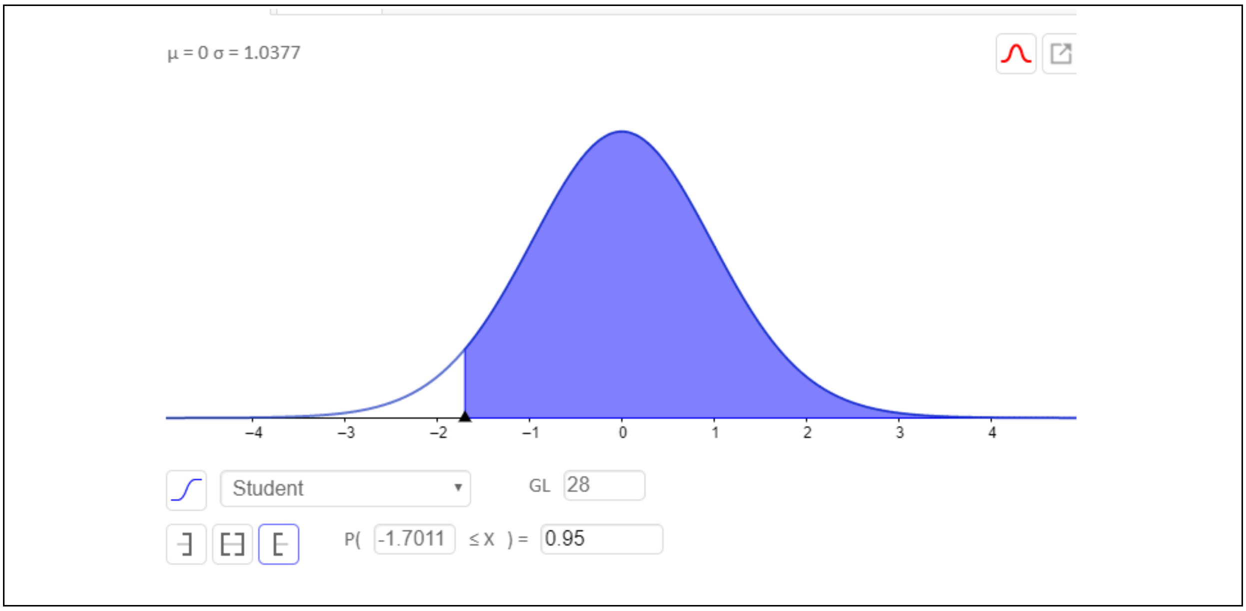
S_d = 4,744195

$$t_{obser.} = \frac{\sum d/n}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{-183/29}{4{,}74/\sqrt{29}} = -7{,}17$$

O teste de hipótese é um procedimento estatístico que permite tomar uma decisão (aceitar ou rejeitar a hipótese nula) entre duas ou mais hipóteses (hipótese nula ou hipótese alternativa), utilizando os dados observados de um determinado experimento.

O passo seguinte foi testar as seguintes hipóteses, que são: Hipótese nula H0: $M1 \geq M2$, ou seja, a média do pré-teste foi maior ou igual à do pós-teste; e a Hipótese alternativa Ha: $M1 < M2$, isto é, a média do pré-teste foi menor que a do pós-teste. Com base no resultado do teste utilizamos a curva t de Student para comparar seus resultados com as hipóteses anteriormente levantadas. Teremos, então, o seguinte gráfico:

GRÁFICO 6 – Curva t de Student



Fonte: Pesquisa de campo (2018)

Como $t_{obser} < t_{crit.}$, rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Portanto, estatisticamente a média do pós teste é maior que a média do pré teste.

5.7 PERCEPÇÃO DOS ALUNOS SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para sabermos como foi recebida a sequência didática, foi aplicado um questionário aberto para que os alunos pudessem se expressar em relação ao material utilizado, considerando os seguintes pontos: objetividade; clareza; participação; qualidade e relevância.

A primeira pergunta foi se a técnica utilizada ajudou no entendimento do conteúdo. Vinte e sete alunos responderam que sim, ajudou, somente um aluno respondeu que as vezes e um respondeu que não muito. Algumas falas dos alunos: “Ajudaram, pois seria mais complicado sem elas”, “sim práticas e objetivas”, “sim, pois esclareceu muitas dúvidas”. Então percebemos que a técnica aplicada favoreceu a aprendizagem.

A segunda pergunta foi se o material utilizado era de boa qualidade, e se tinha enunciados claros. Vinte e oito alunos responderam que sim e somente um respondeu que não muito, mas dava pra entender.

A terceira pergunta foi se as explicações foram claras e objetivas. Vinte e quatro alunos responderam que sim e cinco responderam que algumas sim e outras não.

A quarta pergunta foi se o professor criou um ambiente de discussão e participação durante as aulas. Vinte e cinco dos alunos responderam que sim, e quatro alunos responderam que as vezes. Alguns alunos argumentaram que “ Sim o professor criou um ambiente de participação durante todas as aulas”, “Sim, proporcionando um ambiente agradável”, “Sim, todos tinham a oportunidade de perguntar”. A discussão proporciona a interação da turma e dá a oportunidade de todos participarem do processo ensino aprendizagem.

A quinta pergunta foi se o aluno participou de mais de 70% das aulas. Dezessete alunos responderam que sim, quatro respondeu que não, um não soube, e sete que acham que sim.

A sexta pergunta foi se o aluno participou intensamente dos trabalhos em classe. Doze alunos responderam que sim, nove disse que não, sete responderam que acho que sim, nem sempre, a maioria, as vezes e um não respondeu nada.

A sétima questão, perguntava se valeu a pena ter participado dessa experimentação e por que. Todos os alunos responderam que sim, e acrescentaram que “nos trouxe a mente conteúdos que já vimos e que precisamos ver no vestibular”, “foi essencial para esclarecer as dúvidas”, “foi atrativo e bem legal”, “foi bom aprender e relembrar esse conteúdo”, “Me fez lembrar do assunto, além de ser de fácil entendimento”. Podemos esclarecer aqui que apesar da experimentação não ter um resultado excelente, os alunos, gostaram de ter participado.

E a última era quais os pontos positivos e negativos. Os pontos positivos de acordo com os alunos foram, “o método nos ajudou a exercer nossa capacidade”, “explicação de fácil entendimento”, “a interação entre os alunos”, “aprendi bastante”, “explicou claramente o conteúdo”, “técnica simples, fácil e rápida, ajuda a desenvolver seus aprendizados”, “aprendi tudo que foi explicado”, “linguagem direta sem rodeios” e os negativos, “dificuldades que não foram sanadas”, “explicação menos detalhada”, “algumas questões não estavam claras o suficiente”, “por ser um pouco enjoativo”, “não usar fórmulas diretas, em vez de diagramas”, “os alunos faziam muito barulho”, “muita atividade”. Como a nossa sequência foi formada por 17 atividades, tornou-se muito grande e exaustiva, por isso a justificativa de enjoativa e muita atividade.

Então podemos concluir que o material é muito bom, mas os alunos não estavam acostumados a trabalhar com sequência didática, não faz parte da realidade deles, logo eles tiveram muita dificuldade em se concentrar e cumprir com todas as atividades que foram propostas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar os efeitos da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Conjuntos por meio de atividades para uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola estadual, do Município de Marabá no Estado do Pará, a partir da metodologia da Engenharia Didática devido à possibilidade de se investigar processos de aprendizagem, bem como o aspecto experimental que se torna evidente perante o objetivo da pesquisa.

A evolução histórica da Teoria dos Conjuntos começou quando os estudiosos sentiram a necessidade de compreender e de utilizar as noções de parte e de todo na Grécia até a sua construção axiomática no século XIX. O estado-da-arte do processo de ensino-aprendizagem de Conjuntos resgatou estudos que classificamos em: de livros didáticos, teórico/investigativo, diagnósticos, experimentais, bibliográficos e propostos. Percebemos a escassez de estudos experimentais, isto é, daqueles que, por meio de métodos alternativos, facilitam a aprendizagem dos alunos.

Os resultados provenientes da pesquisa por questionário realizada com 100 alunos egressos de 2º ano do Ensino Médio mostraram que, os alunos estudam sozinhos e somente no período da prova, gostam apenas um pouco de matemática, e quando o conteúdo de Conjuntos é trabalhado por meio do método definição-exemplos-exercícios, a aprendizagem não é satisfatória.

Ao tomar as conclusões advindas das Análises Prévias, na Concepção e Análise a priori, construímos uma sequência didática, que consiste num conjunto de atividades para o ensino de Conjuntos. Dessa forma, nossa construção se deu com a reunião de dezessete atividades, que inicia com o que é conjunto e termina com problemas de operações de conjuntos, e oito atividades de aprofundamento.

Como forma de avaliar o conhecimento dos participantes da pesquisa em relação ao tema foi elaborada testes avaliativos: um pré-teste e um pós-teste. O pré-teste objetivou averiguar os conhecimentos os alunos antes da aplicação da sequência didática, enquanto que o pós-teste, após a aplicação da sequência das atividades.

Vale destacar nossa angústia no ato da aplicação da atividade, uma vez que no início da sequência didática nós tivemos alguns obstáculos. Para que essa pesquisa fosse validada, verificamos a possibilidade de aplicá-la em uma escola, onde os alunos eram mais aplicados, mas eles não quiseram participar da experimentação, então decidimos aplicá-la na escola onde os alunos não tinham muito interesse, mas foram encorajados a participar de nossa experimentação, a partir de alguns combinados para que eles se sentissem motivados, mas mesmo assim não foi possível obter um desempenho significativo em relação ao pós-teste.

A análise a posteriori destacam os principais erros e estudos correlatados, podemos concluir que antes do conjunto de atividades os alunos tiveram de 0% a 47,6% de acertos, de 0% a 81% de questões em branco, e de 9,5% a 85,7% de erros e que depois da aplicação da mesma, os alunos obtiveram um resultado positivo quanto ao desempenho no pós-teste.

Dessa forma podemos pontuar que esta metodologia de ensino possibilitou um melhor desempenho dos alunos, no que diz respeito ao processo de aprendizagem de conjuntos. Destacamos aqui nesse momento, que a participação dos alunos foi um fator importante para o melhor desempenho no pós-teste, pois sempre estávamos, através do diálogo, pontuando o quanto a presença deles na atividade iria contribuir positivamente para o seu aprendizado quanto ao ensino de Matemática.

Em se tratando da realização das atividades, percebemos que inicialmente os alunos não tinham o hábito de trabalhar da maneira que nós propusemos, mas no decorrer da aplicação das atividades os mesmos foram se habituando a metodologia diferenciada. Também observamos o desenvolvimento da escrita matemática, pois nas últimas atividades os alunos escreveram suas conclusões utilizando a linguagem matemática adequada.

Consideramos que há a necessidade de prosseguir com estudos que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem de Conjuntos, principalmente a fim de superar as dificuldades que são obstáculos para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos. O ensino da matemática ainda é um obstáculo na aprendizagem, pois a matemática apresentada em sala de aula não tem significação para o aluno, isto é, ele não percebe onde e como pode utilizá-la.

Acreditamos ter contribuído para a construção de um fazer pedagógico para o ensino de Conjuntos e, por conseguinte para a formação de professores, pois estes poderão utilizar a experiência descrita neste estudo e adaptá-la de acordo com a realidade escolar vivenciada.

REFERÊNCIAS

ACZEL, Almir D. **O Mistério de Alef**: a matemática, a Cabala e a procura do infinito; tradução Ricardo Gouveia. São Paulo: Globo, 2003.

AGUIAR, Francisco Fagner Portela. **Um Background na Teoria dos conjuntos**. - 2015.50f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. CE, 2015

ALENCAR FILHO, Edgard De. **Teoria Elementar dos conjuntos**. 21ª edição. São Paulo: Nobel. 1990.

ALMOULOUD, Saddo Ag ; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva.Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd (Grupo de trabalho 19 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Brasil)). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. REVEMAT - V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARRUDA, Joseane Pinto de. A Teoria dos Conjuntos no Ensino Primário: um marco da linguagem da matemática moderna. In: **XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, 2008, Rio Claro. Educação Matemática: possibilidades de interlocução. Rio Claro/SP: Unesp, 2008. v. 1.

BARBOSA, Gislene Aparecida da Silva. **A contribuição da sequência didática no desenvolvimento da leitura e da escrita no ensino médio**: análise dos materiais didáticos "sequência didática artigo de opinião" e "pontos de vista". 2011. 123f. Dissertação (mestrado em educação) - UNESP/Campus de Presidente Prudente, Presidente Prudente, São Paulo. 2011

BICUDO, Irineu. A Hipótese Do Continuum Ou O Primeiro Problema De Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática** - Vol. 3 nº 5 - pág. 15 - 26 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, São Paulo, 2003

BORGES, Rosimeire Aparecida Soares. **A Matemática Moderna No Brasil**: As Primeiras Experiências e Propostas de Seu Ensino. 2005. 207f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – SP. 2005

BRAGA, Eduardo dos Santos de Oliveira. Repensando A Utilização Das Ideias Da Teoria Dos Conjuntos E De Sua Construção E Organização De Raciocínio No Ensino Fundamental. In: **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**, São João Del Rei - MG. 2015

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, **Orientações curriculares para o ensino médio,** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, Brasília, 2006

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

CAMPOS, Gean Pierre da Silva. **A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos**: uma abordagem didática. 2014. 94f. Tese (doutorado em Educação). Universidade de São Paulo – SP, 2014

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike**, Campinas. UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

CARVALHO, Joaquim Francisco de**.** As origens do pensamento matemático e a crise dos fundamentos**. Ciência e Cultura.** vol.64 no.2. São Paulo, Abril/ Junho 2012

CLARAS, Antônio Flavio; PINTO, Neuza Bertoni. O movimento da matemática moderna e as iniciativas de formação docente. In: **VIII congresso nacional de educação** da PUCPR - EDUCERE e no **III congresso ibero-americano sobre violências nas escolas** - CIAVE, 2008, Curitiba. Formação de professores, 2008.

_________. **A Teoria Dos Conjuntos Proposta Pelo NEDEM:** Do Ideário Do MMM Às Práticas Escolares**.** 2010. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná – Curitiba – PR, 2010

COSTA, M. E. P.; SILVA, J. C. Dever de Casa: Prática necessária para integrar Família-Escola. **O Professor PDE e os desafios da escola pública Paranaense**. Volume1. Secretaria de Educação do estado do Paraná. 2010

DIEUDONNÉ, Jean. **A Formação da Matemática Contemporânea**. Tradução de J. H. Von Hafe Perez. Publicações Dom Quixote, Lisboa,1990.

EVES, Howard. **Introdução A História Da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues.5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GRIJÓ, Douglas Rosa. Operações com Conjuntos Auxiliadas pelo Software Octave: Atividades para a Sala de Aula. **Revista Eletrônica TECCEN**, Vassouras, v. 3, n. 4, p. 29-44, out./dez., 2010

HALMOS, Paul R. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda.,2001

HEIN, Nelson; DADAM, Fábio. **Teoria Unificada dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2009

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LUIZ, Elisete Adriana José; COL, Lidiane de. Educação Matemática no Ensino Médio. **VI Congresso Internacional de ensino da Matemática**. ULBRA. Canoas. Rio Grande do Sul.2013.

MACEDO, Rodrigo Sanchez. **Um estudo da Teoria dos Conjuntos no Movimento da Matemática Moderna**. 2008. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) – SP. 2008

MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **Revista Zetetiké**. V. 15, n. 27, jan/jun, 2007.

NASCIMENTO, Elaine Cristina Santos do. **O Não Acompanhamento Familiar**. Centro de Estudos de Neurociências. Instituto Neurológico de São Paulo. Publicado em 21/09/2011. Disponível em: <http://www.psicopedagogia.com.br/new1_artigo.asp?entrID=1397#.V-r0ZPArLIU>. Acesso em: 27/09/2016

NERY, Wesley Ferreira; BATISTELA, Rosemeire de Fátima**.** Matemática: a busca por seus fundamentos e o surgimento da teoria dos conjuntos**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática**. ULBRA. Canoas- RS. 2013

NUNES, André Anderson da Silva**. Lógica Básica e o Método Axiomático:** Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática). Universidade de Brasília. Brasília-DF: 2015, 134p.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. Professores De Matemática Ao Tempo Do Movimento Da Matemática Moderna**:** Perspectivas de Pesquisa. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.79-89, maio./ago. 2006.

PENA, Fernando Sousa e MIRANDA, Virginia. **Teoria dos conjuntos**. Instituto Piaget. Lisboa, 2006.

PIEPER, Christian Roger Vilela**.** et al**.** A Aplicação Da Teoria Cognitivista E Da Etnomatemática No Ensino De Conjuntos Matemáticos Na Educação De Jovens E Adultos**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba – PR, 2013.

RIBEIRO, Couto; BARBOSA, Igor Laélio Souza; BORTOLOTI, Roberta D'Angela Menduni. **Uma Questão de Conjuntos**: Relacionando a Produção Escrita dos Alunos do 6º Semestre da UESB nos CAMPI Jequié e Vitória da Conquista. 2010

SÁ, Pedro Franco De. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental**. Belém, EDUEPA, 2009.

SANTOS, J. L. B.; SANTOS, G. B.; ARAGÃO, I. G.. Possibilidades e Limitações: as dificuldades existentes no processo de ensino e aprendizagem da matemática. **6º Encontro de Formação de Professores de Sergipe** - Edição Internacional, 2013.

SOARES, Elenir Terezinha Paluch. **Um Novo Enfoque Para O Livro O Fracasso Da Matemática Moderna.** Pontifícia Universidade Católica do Paraná- PR. 2007.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?**. 2001.192 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – RJ, 2001

SOUZA, Delson Silva. **A Teoria dos conjuntos no Ensino Fundamental**: Abordagem Histórica. Universidade Católica de Brasília. 2005.

SOUZA**,** Anderson Da Silva. **A Inserção Da Teoria Dos Conjuntos Em Livros Didáticos De Matemática No Brasil.** 2014, 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera De São Paulo. São Paulo.2014

TATTO, Franciele e SCAPIN, Ivone José. Matemática: Por Que O Nível Elevado De Rejeição?**. Revistas URI**.2004

THÉ, Maria Alice Lagos. **Raciocínio Baseado Em Casos Uma Abordagem Fuzzy Para Diagnóstico Nutricional.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2001.

TOMAZ, frutuoso gomes, **Teoria dos conjuntos e taxonomia biológica: estudo interdisciplinar.** 2016. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA). Mossoró. RN, 2016.

VYGOTSKY, L.S.A. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

ZABALA, Antônio. **A Prática Educativa**: Como Ensinar. Porto Alegre. Ed. Artmed.1998.

ANEXO

ANEXO A: QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS EGRESSOS

Prezado(a) aluno(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1.Idade: __________ anos 2. Série: __________
3. Gênero: ( ) Masculino ( ) Feminino
4.Tipo de escola
( ) Pública Municipal ( ) Pública estadual
( ) Pública Federal ( ) Outra
5.Qual a escolaridade de seu **Responsável Masculino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
( ) Nenhum
( ) Fundamental incompleto
( ) Fundamental completo
( ) Ensino Médio incompleto
( ) Ensino Médio completo
( ) Ensino Superior completo
( ) Pós-Graduação completo
6.Qual a escolaridade de seu **Responsável Feminino** (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)
( ) Nenhum
( ) Fundamental incompleto
( ) Fundamental completo
( ) Ensino Médio incompleto
( ) Ensino Médio completo
( ) Ensino Superior completo
( ) Pós-Graduação completo
7.Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino?
____
8.Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino?
____
9.Você está ou já esteve em dependência em Matemática?
( ) Sim, Estou (atualmente) em dependência em Matemática
( ) Sim, já estive (no passado) em dependência em Matemática
( ) Não. Nunca fiquei de dependência em Matemática
10.Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola?
( ) Todos os dias
( ) Somente nos finais de semana
( ) Somente no período de prova
( ) Somente na véspera da prova.
( ) Nunca
11.Você gosta de Matemática?
( ) Não gosto
( ) Um Pouco
( ) Sim. Gosto
( ) Sim. Gosto bastante
12.Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática? (Marque mais de uma opção, se necessário)
( ) Professor particular ( ) Responsável Masculino
( ) Responsável Feminino ( ) Irmão
( ) Ninguém ( ) Outro:_________________

13.Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?
( ) Sempre ( ) Quase sempre
( ) Poucas vezes ( ) Nunca compreendo

14.Quais as principais formas de avaliação o (a) professor (a) de matemática costuma solicitar a você? (Marque mais de uma opção, se necessário)
( ) Prova oral ( ) Prova escrita
( ) Autoavaliação ( ) fichas de observação
( ) produções no caderno ( ) Outros. Qual:__
15.Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação em Matemática? (Marque no máximo 2 opções)
( ) Entusiasmado ( ) Tranquilo
( ) Com Medo ( ) Preocupado
( ) Com Raiva ( ) Sinto Calafrios
( ) Outros: ______________________________
16.Quando você estudou **conjuntos**, a maioria das aulas foram:
( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios.
( ) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto.
( ) Criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos.
( ) Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas.
( ) Outra metodologia:
____
____
17.Para fixar o conteúdo estudado de **Conjuntos**, o seu professor (a):
( ) Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) Apresentava jogos envolvendo o assunto
( ) Mandava resolver os exercícios do livro didático
( ) Não propunha questões de fixação
( ) Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.
( ) Propunha a resolução de questões por meio de softwares

18. No que se refere o grau de dificuldade em aprender Conjuntos, preencha o quadro abaixo (Marque com um X)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Grau de dificuldade para aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Muito difícil	Difícil
Noção de Conjuntos							
Noção de elemento							
Relação de pertinência							
Conjunto Vazio							
Conjunto Unitário							
Subconjuntos							
Relação de Inclusão							
União de Conjuntos							
Propriedades da União							
Intersecção de Conjuntos							
Propriedades da Intersecção							
Diferença de Conjuntos							
Propriedades da diferença							
Complementar de um Conjunto							
Propriedades do Complementar							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos da União de dois conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos da intersecção de dois conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos que estão em somente um dos							

dois conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos do complementar da união de dois conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos da União de três conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos da intersecção de três conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos que estão em somente um dos três conjuntos.							
Problemas contextualizado que calcule o número de elementos do complementar da união de três conjuntos.							

APÊNDICES

APÊNDICE A: QUESTÕES DE VERIFICAÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS

1) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3}, use os símbolos $\in$ ou $\notin$:

a) 1 --- A b) 5 --- A c) 0 --- A d) 2 --- A

2) Seja A = { 1, {2}, {1,2} }. Considere as afirmações:
(I) 1 $\in$ A
(II) 2 $\in$ A
(III) $\varnothing \subset$ A
(IV) {1,2} $\subset$ A
Estão corretas as afirmações:
a) I e II b) I e III c) III e IV d) III e) I

3) Dados os conjuntos A = {0, 1, 3, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5} e D = {1, 3, 5, 6}, determine (AUB) ∩(CUD).

4) Dados o conjuntos A = {0, 1, 2} e o conjunto universo U = {0, 1, 2, 3}, determine C_U^A.

5) Seja X um conjunto tal que X – {1, 2, 3, 7, 8} = {4} e X ∩ {1, 2, 3, 5, 6} = {1, 2, 3}. Determine o conjunto X.

6) José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos conseguiu tirar suas férias na fábrica do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar as suas obrigações?

7) Em uma pesquisa realizada em um colégio sobre o gosto musical dos alunos, foram feitas duas perguntas: Você gosta de rock? Você gosta de música clássica? Após a tabulação, foram obtidos os seguintes resultados:

	Números de alunos
Rock	458
Música clássica	112
Ambos	62
Nenhum	36

Com base nesses dados, determine o número de alunos consultado.

8) Uma prova contendo dois problemas foi dada a 200 alunos. Sabe-se que:

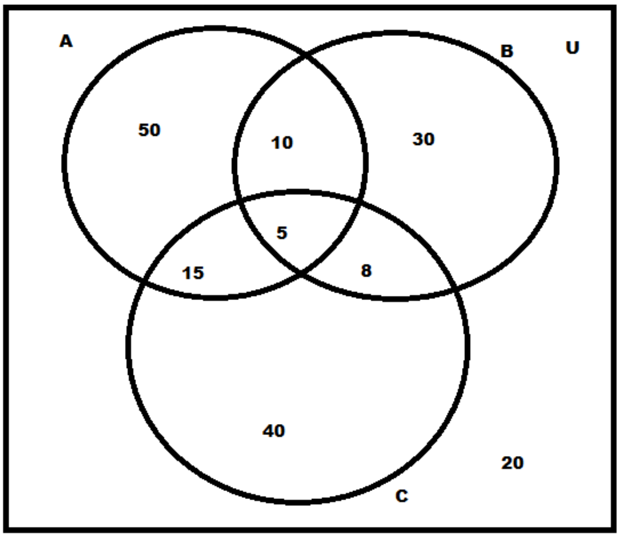
- 50 alunos acertaram os dois problemas;

- 100 alunos acertaram o primeiro problema;

- 99 acertaram o segundo problema.

Quantos alunos erraram os dois problemas?

9) É dado o seguinte diagrama:



Então, determine o número de elementos que pertencem aos conjuntos A e B, mas não pertence a C.

10) Em um supermercado foi feita uma pesquisa sobre a preferência de três produtos A, B e C. A tabela mostra o resultado:

Produto	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhum
Preferência	100	95	125	40	30	15	10	40

Quantas pessoas consomem exclusivamente um produto?

APÊNDICE B: PRÉ TESTE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Prezado(a) aluno(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

Aluno: ____

Data: ____/____/____

1) Utilizar os símbolos ∈, ∉, ⊂ ou ⊄, complete os espaços em branco a seguir:

a) a ...... {b, c, d, f, g}

b) u ...... {a, e, i,o,u}

c) e ...... {a, e, i,o,u}

d) f .... {b, c, d, f}

e) { –1, –3, – 5} ...... {–3, –5}

f) {–3, –5} ...... {0, –1, –3, – 5}

g) {0, –1, –3, – 5} ...... {0, –1}

h) {0, –1} ...... {0, –1, –3, – 5}

2) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) A ∪ B =

b) A ∪ C =

3) Dados os conjuntos A = {0, 1, 3, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) A ∩ B =

b) B ∩ C =

4) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) A – B =

b) C – A =

c) A – C =

5) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) C_A^B=

b) C_A^C=

6) Numa pesquisa sobre o consumo dos produtos A, B e C, obteve-se o seguinte resultado: 68% dos entrevistados consomem A, 56% consomem B, 66% consomem C e 15% não consomem nenhum dos produtos. Qual a percentagem mínima de entrevistados que consomem A, B e C?

7) Uma Universidade está oferecendo três cursos de extensão para a comunidade externa com a finalidade de melhorar o condicionamento físico de pessoas adultas, sendo eles:
Curso A: Natação.
Curso B: Alongamento.

Curso C: Voleibol.
As inscrições nos cursos se deram de acordo com a tabela seguinte:

Cursos	Apenas A	Apenas B	Apenas C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Alunos	9	20	10	13	8	18	3

De acordo com os dados apresentados, quantas pessoas se inscreveram em pelo menos dois cursos?

8) Seja X um conjunto tal que X – {1, 2, 3, 7, 8} = {4} e X ∩ {1, 2, 3, 5, 6} = {1, 2, 3}. Determine o conjunto X.

9) José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos conseguiu tirar suas férias na fábrica do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar as suas obrigações?

10) Em uma pesquisa realizada em um colégio sobre o gosto musical dos alunos, foram feitas duas perguntas: Você gosta de rock? Você gosta de música clássica? Após a tabulação, foram obtidos os seguintes resultados:

	Números de alunos
Rock	458
Música clássica	112
Ambos	62
Nenhum	36

Com base nesses dados, determine o número de alunos consultado.

APÊNDICE C: PÓS TESTE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1) Utilizar os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$, complete os espaços em branco a seguir:

a) a ...... {b, c, d, f,...}   b) u ...... {a, e, i, o ,u}

c) e ...... {a, e, i, o, u}   d) f .... {b, c, d, f,...}

2) Utilizar os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, complete os espaços em branco a seguir:

e) { –1, –3, – 5} ...... {–3, –5}   f) {–3, –5} ...... {0, –1, –3, – 5}

g) {0, –1, –3, – 5} ...... C{0, –1}   h) {0, –1} ...... {0, –1, –3, – 5}

3) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) $A \cup B$ =

b) $A \cup C$ =

4) Dados os conjuntos A = {0, 1, 3, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) $A \cap B$ =

b) $B \cap C$ =

5) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) A – B =

b) C – A =

c) A – C =

6) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {0, 2, 3, 4, 6}, C = {1, 2, 4, 5}, determine os seguintes conjuntos:

a) C_A^B=

b) C_A^C=

7) Uma Universidade está oferecendo três cursos de extensão para a comunidade externa com a finalidade de melhorar o condicionamento físico de pessoas adultas, sendo eles:
Curso A: Natação.
Curso B: Alongamento.
Curso C: Voleibol.
As inscrições nos cursos se deram de acordo com a tabela seguinte:

Cursos	Apenas A	Apenas B	Apenas C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Alunos	9	20	10	13	8	18	3

De acordo com os dados apresentados, quantas pessoas se inscreveram em pelo menos dois cursos?

8) Seja X um conjunto tal que X – {1, 2, 3, 7, 8} = {4} e $X \cap$ {1, 2, 3, 5, 6} = {1, 2, 3}. Determine o conjunto X.

9) José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos conseguiu tirar suas férias na fábrica do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar as suas obrigações?

10) Em uma pesquisa realizada em um colégio sobre o gosto musical dos alunos, foram feitas duas perguntas: Você gosta de rock? Você gosta de música clássica? Após a tabulação, foram obtidos os seguintes resultados:

	Números de alunos
Rock	458
Música clássica	112
Ambos	62
Nenhum	36

Com base nesses dados, determine o número de alunos consultado.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado
Trav. Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-010 Belém – PA
www.uepa.br