Universidade do Estado do Pará
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Adenilson Sacramento Dantas

O Ensino de Medidas de Tendência Central por Atividades

Belém - PA
2018

Adenilson Sacramento Dantas

O Ensino de Medidas de Tendência Central por Atividades

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática.
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém – PA
2018

ADENILSON SACRAMENTO DANTAS

O ENSINO DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL POR ATIVIDADES

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Data de aprovação: 26/04/2018

Banca examinadora

Pedro Sá
___________________________________. Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará

___________________________________. Examinador (Interno)
Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Doutor em Educação Matemática – Universidade de Campinas
Universidade do Estado do Pará

Dorival Lobato Jr.
___________________________________. Examinador (Interno)
Prof. Dr. Dorival Lobato Junior
Doutor em Estatística – Universidade Federal de Lavras
Universidade do Estado do Pará

___________________________________. Examinador (Externo)
Prof. Dr. Heliton Ribeiro Tavares
Doutor em Estatística – Universidade de São Paulo
Universidade Federal de Pará

Belém – PA

2018

Dedico este trabalho a Deus, por me fortalecer e guiar na superação deste desafio, aos meus pais pelo apoio incondicional na minha trajetória de vida, à minha esposa pelo incentivo e compreensão nesta etapa da minha vida e aos meus filhos por serem minha fonte de inspiração para seguir em frente.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, que me deu forças para vencer todas as dificuldades.

A todos os meus familiares, em especial, aos meus pais Adalberto Ricardo Dantas (in memorian) e Maria Antônia Nazaré Sacramento Dantas, pelo amor, incentivo e apoio incondicional em toda a minha trajetória de vida.

À minha esposa Kelly Cristina Sousa Estevam Dantas, pelo companheirismo, incentivo, amor, paciência, compreensão e apoio nessa etapa tão importante da minha vida.

Aos meus amados filhos Adenilson Sacramento Dantas Júnior e Larissa Sousa Dantas, por serem os contribuintes diretos da persistência em vencer os obstáculos.

A Universidade do Estado do Pará (UEPA) pela oportunidade.

Ao meu orientador, professor doutor Pedro Franco de Sá, por sua dedicação e paciência na orientação deste trabalho. Profissional admirável pela sua competência e dedicação a educação. Sou grato pela oportunidade de ter sido seu orientando.

Aos membros da banca avaliadora, professores Dorival Lobato Júnior, Francisco Hermes Santos da Silva e Héliton Ribeiro Tavares pelas considerações no texto de qualificação que muito contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa e avaliação do texto final.

À coordenação e aos professores do programa de Mestrado profissional em Ensino de Matemática, por todas as contribuições, acolhimento, dedicação e seriedade em fornecer sempre o melhor para nossa formação profissional.

Aos amigos de classe que sempre serviram como suporte para trocas de experiência e ampliação de conhecimentos.

À funcionária do PMPEM Glads Maria Serra que muito contribuiu com as questões administrativas do curso.

“O ponto de partida de qualquer conquista é o desejo.”

Napoleon Hill

RESUMO

DANTAS, Adenilson Sacramento. **O ensino de medidas de tendência central por atividades.** 2018. 208f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, têm na aquisição de conceitos e no desempenho de resolução de questões envolvendo as medidas de tendência central. A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática. A experimentação foi realizada em uma escola pública estadual de Belém/PA com 24 estudantes do 3º ano do Ensino Médio. A análise dos resultados obtidos durante a experimentação apontaram para um aumento significativo de acertos no pós-teste e que vários fatores socioeconômicos não interferiram nos resultados alcançados, constatando que a metodologia de ensino surtiu efeito, o que acarretou em uma melhora estatisticamente significativa no desempenho dos estudantes na resolução de questões envolvendo as medidas de tendência central.

Palavras-chave: Ensino. Ensino de Matemática. Ensino de Matemática por Atividade. Ensino de Medidas de Tendência Central.

ABSTRACT

DANTAS, Adenilson Sacramento. The teaching of measures of central tendency by activities. 2018. 208f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2018.

This paper presents the results of a research that aimed to investigate the effects of a didactic sequence, different from the traditional one, in the acquisition of concepts and in the problem solving performance involving measures of central tendency. The methodology used was Didactic Engineering. The experiment was carried out at a state public school in Belém/PA with 24 students from the 3rd year of high school. The analysis of the results obtained during the experimentation pointed to a significant increase of correct answers in the post-test and that several socioeconomic factors did not interfere in the achieved results, noting that the teaching methodology had an effect, which resulted in a statistically significant improvement in the performance of the students in solving questions involving measures of central tendency.

Key-words: Teaching. Mathematics Teaching. Teaching Mathematics by Activity. Teaching of Measures of Central Tendency.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como a Ciência que se destina à análise e interpretação de dados, no mundo contemporâneo, a Estatística tem sido utilizada nos mais diversos contextos. Destacadamente, a preocupação com a organização, com o resumo, com os métodos de escolha e com a interpretação e apresentação de dados tem inserido a Estatística nas diferentes áreas, como por exemplo, nas disciplinas relacionadas a índices econômicos, sociais e ambientais, taxas populacionais e desempenho escolar, entre outros. Isso feito, dentro do propósito de conclusões sobre as especificidades das fontes de onde surgiram os dados para a melhor compreendê-los às questões relacionadas.

Historicamente, a Estatística nasceu basicamente para o cumprimento de ofícios do Estado, tendo o seu nome surgido da mesma raiz semântica deste: statu (estado, em latim), no século XVIII desenvolvida pelo alemão Godofredo Achenwall (1719-1772), alcançando notoriedade a partir da sociedade Moderna. Embora esse fato não implique dizer que não houvesse a preocupação com cálculos de grande natureza, anteriormente (MEMÓRIA, 2004).

Na atualidade, o progresso tecnológico tem contribuído favoravelmente para a aplicação e divulgação, assim como para o crescimento da Estatística, como uma das ferramentas mais utilizadas em todas as áreas do conhecimento na descrição de dados observados e no desenvolvimento de metodologias para tomada de decisões frente à incerteza, atribuindo-lhe relevância para a inclusão nos currículos do ensino básico. Dado tal crescimento, a disciplina alcançou a realidade das redes escolares preocupadas com a aprendizagem significativa, em virtude da exigência do cotidiano sobre o conhecimento estatístico.

Como define Brasil (2000), nos PCN do ensino médio a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade cumprem um bloco de conteúdos classificado como Tratamento da Informação, justificados sob o objetivo da formação de cidadãos críticos e autônomos, haja vista, tais conteúdos estarem relacionados à interpretação e análise de informações e à leitura, assim como à tomada de decisões e previsão de situações reais. Ou seja, o processo ensino-aprendizagem de situações relacionadas às três disciplinas em todos os níveis de ensino com o propósito de promover uma aprendizagem mais significativa ao estudante, contribuindo para o aprimoramento de competências tanto probabilísticas e estatísticas quanto sociais.

Nesse sentido, a análise probabilística facilita a realização do cálculo quantitativo sobre as chances de ocorrência de determinado fenômeno, o que consiste basicamente no uso de conceitos probabilísticos para a solução de problemas envolvendo estratégias de resolução, até ao alcance da análise de resultados. Para tanto, o estudante necessita ser conduzido à percepção da existência da variabilidade dos dados e de como essa questão pode influenciar nos resultados, entendendo-se que tais capacidades não surgem de uma hora para outra. É preciso que durante o processo de escolarização os estudantes explorem situações que contemplem o desenvolvimento desse modelo de pensamento.

Assim, os PCNs estão elaborados com o objetivo de se estabelecer um referencial para direcionamento do trabalho do professor, de modo a orientar as competências voltadas a cada série, da mesma forma que os conteúdos de desenvolvimento destas. Divididas em quatro etapas, a etapa de Tratamento da Informação está relacionada à Estatística, à Combinatória e à Probabilidade, como já escrito, com destaque para a relevância de seu uso na vida em sociedade. Por conseguinte, entende-se que a prática em sala de aula de atividades voltadas a linguagem probabilística é importante para o amadurecimento do pensamento estatístico, constituindo-se em ferramenta adequada a partir de um vocabulário apropriado.

Por conseguinte, admite-se que a inserção de outras práticas didáticas dedicada ao fim exposto possibilita o amadurecimento cognitivo do estudante. E, consequentemente, propõem-se o conjunto de atividades sob o tema Medidas de Tendência Central, com vistas a contribuir para a transformação da situação a qual a aprendizagem deste conteúdo de Matemática tem se mostrado defasado no ensino médio.

Posto a isso, no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA), a pesquisa busca responder a seguinte pergunta: Quais os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, provoca na aquisição de conceitos e no desempenho de resolução de questões envolvendo as medidas de tendência central em uma turma de 3º ano do Ensino Médio? Consecutivamente, o objetivo geral desta pesquisa consiste em investigar os efeitos que tem uma sequência didática, diferente da tradicional, na aquisição de conceitos e no desempenho de resolução de questões envolvendo as medidas de tendência central em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

Para responder a essa questão, a fundamentação teórica desse trabalho está nos princípios da Engenharia Didática, surgidos na França, nas pesquisas de Michelle Artigue (1996) que apresentam uma metodologia de pesquisa em Didática da Matemática organizada em quatro fases. Também, nos estudos de Sá (2009), o qual destaca que essa proposta objetiva dar atenção aos perfis interativos decorrentes da relação: estudante/objeto do conhecimento. E ainda, nos estudos de Jucá (2014), nos quais ela defende que o exercício dessas atividades ocorre inferindo-se do referencial concreto para o abstrato.

Esse trabalho está dividido em cinco seções baseadas nas etapas da engenharia didática. A primeira seção apresenta uma análise prévia sobre o ensino de medidas de tendência central. A segunda seção apresenta a concepção e análise *a priori*. A terceira seção descreve a experimentação. A quarta seção realiza a análise a *posteriori* e validação da pesquisa. E na última seção apresentam-se as considerações finais.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

Nesta seção, com intuito de realizar a investigação sobre os efeitos que tem uma sequência didática, diferente da tradicional, na aquisição de conceitos e no desempenho de resolução de questões envolvendo as medidas de tendência central, faz-se a descrição da metodologia usada neste trabalho: a Engenharia Didática.

A Engenharia Didática surgiu na França, nas pesquisas de Michelle Artigue (1996). Ela apresenta uma metodologia de pesquisa em Didática da Matemática organizada em quatro fases: 1) Análises prévias; 2) Concepção e análise *a priori*; 3) Experimentação e 4) Análise *a posteriori* e validação.

As Análises Prévias, na visão de Artigue (1996, p. 198), apoiam-se, na maior parte dos casos nas seguintes análises: análise epistemológica dos conteúdos visados; análise do ensino habitual e seus efeitos; análise das concepções dos sujeitos envolvidos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução; análise do campo de constrangimento em que se situa a realização didática; e naturalmente, no objeto de investigação.

Essas análises prévias correspondem na metodologia usada nesse trabalho à execução da primeira etapa, quando se deteve aos aspectos históricos da Estatística; aos propósitos do ensino da Matemática por atividades, fazendo-se a revisão de estudos sobre o tema e, consequentemente a consulta aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo em foco. Posteriormente, fez-se a análise de livros didáticos de Matemática cuja abordagem se relacionasse a essa mesma problemática.

A Concepção e Análise *a priori*, para Sá e Alves (2011, p. 150), consiste na "construção de uma sequencia didática para o conteúdo em questão e formulação das hipóteses com base nos resultados obtidos nas análises prévias". Para os autores, a sequência didática, por sua vez, consiste em um conjunto de atividades propostas para o trabalho pedagógico, em que se espera que os estudantes sejam levados a desenvolver certas competências e habilidades desejadas com relação ao conteúdo investigado.

Nesta etapa da pesquisa, elaboramos os testes e uma sequência de atividades que possui seus respectivos objetivos a serem alcançados e as possíveis dificuldades que os estudantes poderão ter no desenvolvimento das mesmas.

Na fase metodológica da Experimentação, deve-se “colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori* ” (ALMOULOUD, 2007, p. 177). Sá e Alves (2011) esclarecem que este momento da pesquisa tem como *locus* a sala de aula e se inicia quanto a primeira atividade é desenvolvida. Cada encontro com a turma é denominado de sessão, ainda que seja uma atividade diagnóstica. Nesta etapa é necessário que o pesquisador faça o maior número de registros possível, seja em quantidade ou diversidade.

Essa fase da experimentação nesse estudo corresponde à pesquisa realizada *in locus* – em uma escola pública estadual de Belém/PA com 24 estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Dentro desse procedimento, aplicou-se a sequência didática elaborada pelo autor do trabalho, para o ensino de medidas de tendência central executadas em sessões de ensino-aprendizagem, assim como, o registro escrito das observações dos experimentos. Considerando que esses registros passaram a ser o instrumento base para a realização posterior das análises, na etapa de análise a *posteriori* e validação.

A última etapa, análise *a posteriori* e validação, “se apoia no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos em sala de aula ou fora dela” (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Essa última etapa da Engenharia Didática corresponde à análise das informações tomadas com os dados obtidos na fase anterior (experimentação). Nessa fase, foram feitos o tratamento estatístico aplicado por meio da comparação percentual dos resultados dos testes, a análise dos tipos de erros cometidos nos testes, a correlação policórica, o coeficiente de contingência de pearson e o teste de hipótese. Assim, os resultados foram validados por meio da comparação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori,* qualitativa e quantitativamente e em consonância com o objetivo do trabalho.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção, apresentamos os resultados que compõem as Análises Prévias em nosso estudo: considerações históricas sobre estatística, ensino de matemática por atividades, fundamentação matemática, estudos do processo de ensino-aprendizagem de medidas de tendência central e o ensino-aprendizagem de medidas de tendência central segundo estudantes.

3.1 CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS SOBRE ESTATÍSTICA

Segundo Memória (2004) estudos relacionados a China de Confúcio há mais de 2.000 anos anteriores a Era Cristã; no Egito Antigo onde os Faraós utilizavam, sistematicamente, informações de caráter estatístico; além das práticas em balancetes no Império Romano, passando também pelo uso de dados numéricos entre os Astecas, Maias e Incas – só para destaque de alguns casos. São alguns dos exemplos de registros anteriores ao surgimento da Estatística descritiva ocorrido na Itália do século XVI.

O mesmo autor destaca que com o Renascimento despertou-se para a coleta de dados estatísticos, principalmente por sua aplicação na administração pública, considerando como pioneira a obra de Francesco Sansovini (1521-1586), publicada em 1561. Defende Memória (2004) que é possível afirmar que o desenvolvimento da estatística teve origem preliminar nas aplicações práticas do cotidiano, a partir do que nenhuma disciplina interage tanto com as demais disciplinas em suas atividades do que a estatística, sendo que é por sua natureza a ciência do significado e do uso dos dados, sendo por isso importante como instrumento auxiliar na pesquisa científica.

A partir de elementos disponíveis, a Estatística apresenta como finalidade catalogar e organizar dados para posteriormente submetê-los a análise com o objetivo da explicação ou descrição, além da definição de prováveis correlações relacionadas a um fenômeno qualquer em determinado contexto. Como escreveu Crespo (2009), o termo Estatística teve na palavra latina status a sua origem etimológica, sendo que passou a ser considerada como ciência a partir dos registros do pesquisador alemão Godofredo Achenwall (1719-1772), professor da Universidade de Göttingen, no século XVIII, embora ainda como coleta de dados a exemplo da prática do Italiano Sansovini, no ano de 1561, voltada a casamentos, óbitos, batismos e expedientes afins que antes impostos pela igreja católica após o Concílio de Trento (1545-1563) se tornaram compulsórios. Esse estudo que consistia preliminarmente da análise exaustiva dos nascimentos e morte realizados por meio das chamadas “Tábuas de Mortalidade”, foi o que deu origem para a atualidade das tábuas utilizadas pelas companhias de seguro (MEMÓRIA, 2004).

Dando continuidade a esse relato histórico, Memória (2004) afirma que fora anteriormente a Achenwall, ainda no ano de 1662 na Inglaterra, que John Graunt (1620-1674) apresentou a palavra Estatística como significado de organização e coleta de dados. Isso publicado no livro do próprio Graunt[1], o que culminara na tentativa inicial de obter dados conclusivos a partir de elementos numéricos, por tal denominado: "Aritmética Política", posteriormente chamada demografia. Sendo, portanto, referendado por estudiosos e pesquisadores como o marco primeiro da Estatística. E, reitera o autor:

> Os dados usados por Graunt compreendiam uma série anual de 1604 a 1660, coletados nas paroquias de Londres, onde ele tirou a seguinte conclusão: que havia maior nascimento de crianças do sexo masculino, mas havia distribuição aproximadamente igual de ambos os sexos na população geral; alta mortalidade nos primeiros anos de vida; maior mortalidade nas zonas urbanas em relação às zonas rurais (MEMÓRIA, 2004, p.13).

A partir daí, já na segunda metade do século XIX personagens como o inglês Francis Ysidoro Edgeworth (1845-1926), o alemão Wilhelm Lexis (1837-1914) e o dinamarquês Thorvald Micolai Thiele (1838-1910) alcançaram resultados relevantes para o desenvolvimento da Inferência Estatística, alguns dos quais só compreendidos em sua plenitude muito posteriormente. Apesar disso, a notoriedade maior se atribui aos contemporâneos: Karl Pearson (1857-1936), William S. Gosset (1876-1937) e, principalmente, a Ronald A. Fisher (1890-1962) que deram o impulso decisivo à disciplina. Moore (2000) ao prestar sua colaboração a esse histórico e dentro de um raciocínio muito comum nos dias atuais, assevera que embora não se possa negar a contribuição dos dados em todos os aspectos da vida moderna: semelhante às palavras, eles (os dados) não podem ser compreendidos isoladamente sem o entendimento de um contexto. E, desfecha chamando a atenção de que esses (dados) tais quais a estas (palavras), podem ser enganosos, convincentes ou vergonhosamente inócuos.

No entendimento de Farias, Soares e César (2003) a Estatística é a disciplina científica que se aplica ao uso e ao desenvolvimento de métodos para a coleta, organização, resumo, análise e apresentação de dados. Complementa Levin (1987) destacando que a Estatística é empregada pelo pesquisador quando do uso de números e da quantificação de dados como instrumento de decisão ou descrição,

[1] Obra sob o título: *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality.*

ou ambas, simultaneamente. Prossegue o autor especificando que a Estatística se divide em duas partes: a inferencial e a descritiva, sendo que a inferencial usa métodos de estimativas de uma população embasada em estudos pautados em amostras, enquanto que a descritiva trabalha com números para descrever fatos, com o objetivo de facilitar o entendimento de questões complexas.

Retomando as considerações de Memória (2004, p.18), este afirma que Gauss que teve seu trabalho publicado em 1609[2], após diversas experiências, de maneira independente, chegou à curva dos erros de forma empírica adotando como premissa "o princípio de que o valor mais provável de uma quantidade desconhecida, observada com igual precisão várias vezes sob as mesmas circunstâncias, é a média aritmética das observações".

Posteriormente, o belga Adolph Quételet (1796-1874) foi o primeiro que defendeu a ideia de que a Estatística poderia ser baseada na noção de probabilidade. Segundo Memória (2004) Quételet é considerado "o pai das estatísticas públicas" por ter dado início à colaboração internacional, sendo suas maiores contribuições na análise estatística dos dados sociais o ajustamento da distribuição normal e o conceito de homem médio conjugados com a interpretação da regularidade estatística. A importância do conceito de homem médio está na originalidade de ter sido abandonada as médias aritméticas das medidas e considerado as suas dispersões, para assim descobrir a curva normal, nome dado posteriormente por Pearson e Galton à curva de erros como ficou conhecida anteriormente à descoberta de Quételet.

Já no ano de 1938 o Departamento de Agricultura e o Laboratório de Estatística da Universidade Estadual de Iowa estabeleceram um programa cooperativo de pesquisa sobre amostragem, dirigido por Arnold J. King e Raymond J. Jessen, que estimou consideravelmente o desenvolvimento de levantamentos agrícolas. Um de seus trabalhos publicados estudou o método conhecido mais tarde como amostragem por área, usado em levantamentos onde as unidades de amostragem são visitadas, pessoalmente pelos recenseadores, utilizado em larga escala pelo Censo Agrícola. A extensão desse método se fez logo em seguida às áreas urbanas (MEMÓRIA, 2004). No Brasil a Pesquisa Nacional por Amostra de

---

[2] Obra intitulada: *Teoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium*.

Domicílios – Pnad – implantada a partir de 1967 é um exemplo do uso de trabalho semelhante.

3.2 ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE

Ao contrário do que comumente se pressupõe, de que o processo ensino/aprendizagem se dá por meio da transmissão de conteúdo, o Ensino da Matemática por Atividade eleva ao conhecimento matemático a partir da investigação, na qual o estudante se faz mais autônomo, podendo assim apostar na condução de sua curiosidade. Como destaca Sá (2009), esse procedimento metodológico estabelece uma nova conduta ao professor que, definitivamente, deixa de ser a autoridade do saber, transformando-se em mediador: um condutor rumo ao conhecimento, considerando-se para tal, a necessidade que este profissional busque aproximação das práticas e exercícios dessas atividades.

Ao definir tais atividades dentro do modelo proposto por Dockwieller (1996), Sá (2009, p.19) afirma que esta proposta dá atenção ao: "...aspecto interativo existente entre o aluno e o objeto do conhecimento, sempre centrado também nos aspectos matemáticos, psicológicos e sociais, isto é, procurando ver o aluno por inteiro". Por conseguinte, tais atividades possibilitam ao discente experimentos matemáticos promovidos a partir do contato direto com o fenômeno, para a familiarização dos conceitos preliminares, objetivando outras elaborações conceituais, até o alcance da verbalização e sistematização do assunto por parte do estudante.

Ainda para Sá (2009) e Sá e Jucá (2014), a prática dessas atividades, propriamente dita, ocorre inferindo-se da realidade concreta para o estabelecimento de conceitos abstratos. Isso se dá a partir do concurso de uma dinâmica experimental a qual compreende em maior escala o universo contextual do estudante. Dentro dessa perspectiva o professor propõe ao estudante por meio da elaboração e testagem de hipóteses, situações que o leva à própria descoberta com o emprego da reformulação de princípios.

Uma das características do ensino de Matemática por meio de atividades é a mútua colaboração entre estudante e professor no percurso da ação construtiva do conhecimento, embasada na premissa de que os tópicos em processo de apreensão serão descortinados pelo próprio estudante individual e/ou coletivamente durante o procedimento de investigação. Como afirma Sá (2009), tal atitude emprega uma concepção participativa, dinâmica e construtiva mediada pelo professor até o momento da assimilação comprovada por parte do educando.

Ao destacar o incômodo em se deixar de alcançar os objetivos da educação Matemática, Sá (2009) assinala à aprendizagem dessa disciplina como instrumento contribuinte do desenvolvimento autônomo competente do estudante, em resposta à formação do cidadão humano sem descuido do indivíduo profissional. E, traça parâmetros que aponta necessários para o alcance desse ser autônomo competente, são eles:

> * A participação ativa do estudante no processo ensino-aprendizagem;
> * Compreensão da Matemática como um conhecimento humano e que, portanto, deve servir para a melhoria da vida no planeta;
> * A experiência de vida do aluno deve servir de parâmetro para a escolha e desenvolvimento de metodologias de ensino adotadas em sala de aula;
> * A articulação entre compreensão instrumental e compreensão relacional deve implicar na memorização como consequência da construção dos conceitos (SÁ, 2009, p.23).

Destaca o mesmo autor, em continuidade, que a prática dessas especificidades atribui mudança na postura do professor que passa a conceder ao educando sob o seu encaminhamento a descoberta e/ou redescoberta de similaridades e outras bases, como resultantes de atividades aplicadas em classe, provocando inferências no que concerne às estratégias propostas para a promoção do conhecimento. Tais procedimentos elegem ao professor como mediador ou aos próprios estudantes como protagonistas quando as ações educativas forem auto-direcionadas, sendo o primeiro denominado demonstração, enquanto o segundo, experimental, podendo este ser em grupo ou individualmente.

Neste último o professor presta o direcionamento inicial sobre a atividade e compartilha do processamento da mesma, facilitando aos estudantes a observação, o levantamento de hipóteses e os consequentes registros. Consequentemente, promove o debate relacionado aos resultados, mediando o estabelecimento do conhecimento matemático alcançado a partir da atividade executada. Na forma de demonstração a atividade é inteiramente promovida pelo professor, sendo permissível ao estudante a observação, o levantamento de hipóteses, os registros, os debates relacionados aos resultados e a elaboração de pareceres finais.

Ainda segundo esses autores, tais procedimentos tendem por natureza deixar os estudantes mais à vontade para as discussões, os debates e o levantamento de hipóteses. Há de se ressaltar, entretanto, a necessidade de estabelecer prioridades, no intuito de alcançar o real protagonismo da aprendizagem durante o processo, valorizando a importância dessa atitude nas tomadas de decisão conjunta.

3.3 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de tendência central ou de posição constituem uma forma mais sintética de apresentar os resultados contidos nos dados observados, pois representam um valor central, em torno do qual os dados tendem a se concentrar.

Segundo Stevenson (1981, p.19), "As medidas de tendência central são usadas para indicar um valor que tende a tipificar, ou a representar melhor, um conjunto de números".

A seguir, apresentamos as principais medidas de tendência central e suas respectivas definições que são abordadas por alguns autores:

3.3.1 Média Aritmética

A média aritmética é, talvez, a medida mais conhecida e trabalhada nos cursos de ensino médio e superior. Além de sua importância direta, também é base para definições mais abstratas em estatística. Segundo Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.114), a definição de média aritmética é dada por:

Definição 1: Seja x uma variável quantitativa e $x_1, x_2, ..., x_n$ os valores assumidos por x. Define-se a *média aritmética* de x – indicada por $\overline{x}$ – como a divisão da soma de todos esses valores pelo número de valores, isto é:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad (2.1)$$

Para Bussab e Morettin (2013, p.38), a definição de media aritmética é dada por:

Definição 2: Se $x_1, ..., x_n$ são os n valores (distintos ou não) da variável X, a *média aritmética*, ou simplesmente *média*, de X pode ser escrita

$$\overline{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2.2)$$

3.3.2 Propriedades Matemáticas da Média Aritmética

Nesta subseção apresentaremos as propriedades da média aritmética.

1ª Propriedade: A média aritmética de uma constante é a própria constante.

Demonstração: Sejam $x_1 = b, x_2 = b, ..., x_i = b, ..., x_n = b$, então pela definição de média aritmética temos que

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{2.3}$$

Como $x_1 = x_2 = ... = x_n = b$, então a expressão (2.3) equivale a

$$\overline{X} = \frac{b+b+...+b}{n} = \frac{n.b}{n} = b \tag{2.4}$$

Portanto, a média aritmética de uma constante é a própria constante.

2ª Propriedade: A média está localizada entre os valores extremos.

Inicialmente provaremos para $x_i \leq \overline{X}$.

Demonstração: Seja a sequência de números reais $x_1, x_2, ..., x_i, x_j, ..., x_n$, com $x_i =$ mínimo da sequência e $x_n =$máximo da sequência.

Pela definição de média aritmética temos que $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Como x_i é o mínimo da sequência, então

$$x_i + x_i + x_i + ... + x_i \leq x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \tag{2.5}$$

Devido,

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n\overline{X} \tag{2.6}$$

Logo, a expressão

$$x_i + x_i + x_i + ... + x_i \leq x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \tag{2.7}$$

equivale a

$$x_i + x_i + x_i + ... + x_i \leq n\overline{X} \tag{2.8}$$

que é equivalente a

$$\frac{x_i + x_i + x_i + ... + x_i}{n} \leq \overline{X} \tag{2.9}$$

que equivale a

$$\frac{nx_i}{n} \leq \overline{x} \tag{2.10}$$

Logo,

$$x_i \leq \overline{x} \tag{2.11}$$

Portanto, a média aritmética é maior ou igual que o mínimo da sequência.

Agora provaremos para $x_n \geq \overline{x}$.

Demonstração: Seja a sequência de números reais $x_1, x_2, ..., x_i, x_j, ..., x_n$, com $x_i =$ mínimo da sequência e $x_n =$ máximo da sequência.

Pela definição de média aritmética temos que $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Como x_n é o máximo da sequência, então

$$x_n + x_n + x_n + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \tag{2.12}$$

Devido,

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n\overline{x} \tag{2.13}$$

Logo, a expressão

$$x_n + x_n + x_n + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \tag{2.14}$$

equivale a

$$x_n + x_n + x_n + ... + x_n \geq n\overline{x} \tag{2.15}$$

que é equivalente a

$$\frac{x_n + x_n + x_n + ... + x_n}{n} \geq \overline{x} \tag{2.16}$$

que equivale a

$$\frac{nx_n}{n} \geq \overline{x} \tag{2.17}$$

Logo,

$$x_n \geq \overline{x} \tag{2.18}$$

Portanto, a média aritmética é menor ou igual que o máximo da sequência.

3ª Propriedade: Ao somar uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua média também é somada por esta constante.

Demonstração: Seja a sequência de números reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n \tag{2.19}$$

Ao adicionar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.19), obtemos a sequência

$$x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c, ..., x_n + c \tag{2.20}$$

Pela definição de média aritmética, temos que a média $\overline{x}_1$ da sequência (2.19) é dada por

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{2.21}$$

e a média aritmética da sequência (2.20) é dada por

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 + c + x_2 + c + x_3 + c + ... + x_n + c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + c + c + c + ... + c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} + \frac{c + c + c + ... + c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + \frac{n.c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + c \tag{2.22}$$

Portanto, a média aritmética sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

4ª Propriedade: Ao subtrair uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua média também é subtraída por esta constante.

Demonstração: Seja a sequência de números reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n \tag{2.23}$$

Ao subtrair $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.23), obtemos a sequência

$$x_1 - c, x_2 - c, x_3 - c, ..., x_n - c \tag{2.24}$$

Pela definição de média aritmética, temos que a média $\overline{x}_1$ da sequência (2.23) é dada por

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{2.25}$$

e a média aritmética da sequência (2.24) é dada por

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 - c + x_2 - c + x_3 - c + \ldots + x_n - c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - c - c - c - \ldots - c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} - \frac{c + c + c + \ldots + c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{n.c}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - c \tag{2.26}$$

Portanto, a média aritmética sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

5ª Propriedade: Ao multiplicar uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua média também é multiplicada por esta constante.

Demonstração: Seja a sequência de números reais

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n \tag{2.27}$$

Ao multiplicar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.27), obtemos a sequência

$$cx_1, cx_2, cx_3, \ldots, cx_n \tag{2.28}$$

Pela definição de média aritmética, temos que a média $\overline{x}_1$ da sequência (2.27) é dada por

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{2.29}$$

e a média aritmética da sequência (2.28) é dada por

$$\overline{x}_2 = \frac{cx_1 + cx_2 + cx_3 + \ldots + cx_n}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{c(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)}{n}$$

$$\overline{x}_2 = c\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

$$\overline{x}_2 = c\overline{x}_1 \tag{2.30}$$

Portanto, a média aritmética sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

6ª Propriedade: Ao dividir uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua média também é dividida por esta constante.

Demonstração: Seja a sequência de números reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n \quad (2.31)$$

Ao dividir $c \in \mathbb{R}^*$ a x_i da sequência (2.31), obtemos a sequência

$$\frac{x_1}{c}, \frac{x_2}{c}, \frac{x_3}{c}, \cdots, \frac{x_n}{c} \quad (2.32)$$

Pela definição de média aritmética, temos que a média $\overline{x}_1$ da sequência (2.31) é dada por

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad (2.33)$$

e a média aritmética da sequência (2.32) é dada por

$$\overline{x}_2 = \frac{\frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c}}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\frac{1}{c}(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)}{n}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{c}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\right)$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_1}{c} \quad (2.34)$$

Portanto, a média aritmética sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

7ª Propriedade: A soma algébrica dos desvios de um conjunto de números tomados em relação à média aritmética é zero.

Demonstração: Desvio é a diferença entre um elemento de uma sequência e a média aritmética da sequência.

Seja a sequência $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de média aritmética $\overline{x}$, então o desvio d_i do elemento x_i , com i=1, 2, 3, ..., n é dado por $d_i = x_i - \overline{x}$.

Assim,

$$= x_1 - \overline{X} + x_2 - \overline{X} + x_3 - \overline{X} + ... + x_n - \overline{X}$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - \overline{X} - \overline{X} - \overline{X} - ... - \overline{X}$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - n.\overline{X}$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - n.\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n - x_1 - x_2 - x_3 - ... - x_n$$

$$= x_1 - x_1 + x_2 - x_2 + x_3 - x_3 + ... + x_n - x_n$$

$$= 0 + 0 + 0 + ... + 0$$

$$= 0 \tag{2.35}$$

Portanto, a soma dos desvios tomados em relação à média aritmética é zero.

8ª Propriedade: Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é igual a $\overline{x}$, pelo menos, um dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é maior que ou igual a $\overline{x}$.

Demonstração: Supor, por contradição, que $x_i < \overline{X}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Ou seja, $x_1 < \overline{X}, x_2 < \overline{X}, ..., x_n < \overline{X}$. Assim, $x_1 + x_2 + ..., x_n < n.\overline{X}$, e dividindo a desigualdade por n, temos, $\frac{x_1 + x_2 + ..., x_n}{n} < \overline{X}$. E, portanto $\overline{X} < \overline{X}$, o que é absurdo. Logo, existe $i \in 1, 2, ..., n$ tal que $x_i \geq \overline{X}$.

3.3.3 Média Aritmética Ponderada

A média aritmética ponderada surge quando os valores se repetem ou quando é estabelecido um peso para cada valor, assim ela é definida por Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.116) como:

Definição 3: Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$ com *frequências absolutas* respectivamente iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$. A *média aritmética ponderada* de x – indicada por $\overline{x}$ – é definida como a divisão da soma de todos os produtos $x_i \, . \, n_i \; (i = 1, 2, ..., k)$ pela soma das frequências, isto é:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1.n_1 + x_2.n_2 + ... + x_k.n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} \tag{2.36}$$

Já para Farias, Soares e César (2008, p.22), a definição de media aritmética ponderada é dada por:

Definição 4: A média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, ..., x_n$, com pesos $p_1, p_2, ..., p_n$, representada por $\overline{X}_p$, é definida como

$$\overline{X}_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} \tag{2.37}$$

3.3.4 Propriedades Matemáticas da Média Aritmética Ponderada

Nesta subseção apresentaremos uma propriedade da média aritmética ponderada.

1ª Propriedade: (Média Aritmética Ponderada de Todas as Médias). Se n_1 números têm média $\overline{x}_1$, n_2 números têm média $\overline{x}_2$, ..., n_k números têm média $\overline{x}_k$, então a média do conjunto formado por todos os números é dada pela expressão:

$$\overline{x} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2 + ... + n_k \overline{x}_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} \tag{2.38}$$

Demonstração: Sejam $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}$, $x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}$, ... , $x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k}$ sequências de $n_1, n_2, ..., n_k$ números que têm média $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$, então:

Pela definição de média aritmética, temos que

$$\overline{x}_1 = \frac{x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n_1}}{n_1}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n_2}}{n_2}$$

$$\vdots$$

$$\overline{x}_k = \frac{x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{kn_k}}{n_k} \tag{2.39}$$

Daí, tiramos que

$$n_1\bar{x}_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n_1}$$
$$n_2\bar{x}_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n_2}$$
$$\vdots$$
$$n_k\bar{x}_k = x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{kn_k} \tag{2.40}$$

Assim, a média de todos os números é dada pela expressão

$$\bar{x} = \frac{x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n_1} + x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n_2} + ... + x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{kn_k}}{n_1 + n_2 + ... + n_k} \tag{2.41}$$

Logo, a expressão (2.41) é equivalente a

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} \tag{2.42}$$

Portanto, a média aritmética ponderada de todas as médias.

3.3.5 Média Geométrica

Outra medida trabalhada em estatística é a média geométrica, segundo Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.174), é definida por:

Definição 5: Dados *n* $(\mathrm{n} \geq 2)$ números reais não negativos $x_1, x_2, ..., x_n$, define-se a *média geométrica* (G) desses valores pela relação:

$$G = \sqrt[n]{\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{x}_3 \cdot ... \cdot \mathrm{x}_\mathrm{n}} \tag{2.43}$$

isto é, a média geométrica corresponde à raiz n-ésima do produto desses *n* números.

Outro autor, Toledo e Ovalle (1985, p.124), utiliza uma definição muito próxima a esta mostrada anteriormente (Definição 5), expõe que a definição de média geométrica é dada por:

Definição 6: Dados *n* valores $x_1, x_2, ..., x_n$, a *média geométrica* desses valores será

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n} \tag{2.44}$$

3.3.6 Propriedades Matemáticas da Média Geométrica

Nesta subseção apresentaremos as propriedades da média geométrica.

1ª Propriedade: O produto dos quocientes de cada valor de um conjunto de números pela média geométrica do conjunto é igual a um.

Demonstração: Seja a sequência de números reais positivos

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n \tag{2.45}$$

Ao dividir x_i da sequência (2.45) por $\overline{x}_g \in \mathbb{R}_+^*$, obtemos a sequência

$$\frac{x_1}{\overline{x}_g},\ \frac{x_2}{\overline{x}_g},\ \frac{x_3}{\overline{x}_g},\ \cdots,\ \frac{x_n}{\overline{x}_g} \tag{2.46}$$

Pela definição de média geométrica, temos que a $\overline{x}_g$ da sequência (2.45) é dada por

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n} \tag{2.47}$$

Daí, tiramos que

$$\overline{x}_g{}^n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \tag{2.48}$$

Então, o produto dos termos da sequência (2.46) é dada por

$$\frac{x_1}{\overline{x}_g} \cdot \frac{x_2}{\overline{x}_g} \cdot \frac{x_3}{\overline{x}_g} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{\overline{x}_g} = \tag{2.49}$$

ou seja,

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}{\overline{x}_g{}^n} \tag{2.50}$$

Extraindo a raiz enésima da expressão (2.50), obtemos

$$= \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}{\overline{x}_g{}^n}} \tag{2.51}$$

Aplicando a propriedade dos radicais na expressão (2.51), temos que

$$= \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}}{\sqrt[n]{\overline{x}_g{}^n}} \tag{2.52}$$

Devido,

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n} \tag{2.53}$$

Então, a expressão (2.52), é equivalente a

$$= \frac{\overline{x}_g}{\sqrt[n]{\overline{x}_g{}^n}} \tag{2.54}$$

Aplicando a propriedade dos radicais no denominador da expressão (2.54), temos

$$= \frac{\overline{x}_g}{\overline{x}_g}$$

$$= 1 \tag{2.55}$$

Portanto, o produto de cada valor de uma sequência de números pela média geométrica da sequência é igual a um.

2ª Propriedade: A média geométrica é menor ou igual à média aritmética.

Provaremos a desigualdade no caso $n=2$.

Demonstração: Como $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, então $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0$.

Somando $4x_1x_2$ em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 \geq 0 + 4x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geq 4x_1x_2 \tag{2.56}$$

que pode ser escrito como

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \tag{2.57}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2} \geq \sqrt{4x_1x_2}$$

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2} \tag{2.58}$$

Daí, tiramos que

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \tag{2.59}$$

Logo, concluímos que

$$\overline{x} \geq \overline{x}_g\,. \tag{2.60}$$

Portanto, a média geométrica para duas quantidades é menor ou igual à média aritmética.

3ª Propriedade: O logaritmo da média geométrica é igual à média aritmética dos logaritmos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$.

Pela definição de média geométrica, temos que

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n} \tag{2.61}$$

Daí, tiramos que

$$\overline{x}_g = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.62}$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade, obtemos

$$\log \overline{X}_g = \log\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.63}$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos no segundo membro da igualdade, obtemos

$$\log \overline{X}_g = \frac{1}{n}\log\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n\right) \tag{2.64}$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos no segundo membro da igualdade, obtemos

$$\log \overline{X}_g = \frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ... + \log x_n\right) \tag{2.65}$$

Daí, concluímos que

$$\log \overline{X}_g = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ... + \log x_n}{n} \tag{2.66}$$

Portanto, o logaritmo da média geométrica é igual à média aritmética dos logaritmos.

3.3.7 Média Harmônica

Para a média harmônica, outra medida de muita importância para a estatística, Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.176), expõem a seguinte definição:

Definição 7: Dados um conjunto de valores não nulos $x_1, x_2, ..., x_n$, define-se a *média harmônica* $\left(\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{h}}\right)$ desses valores pela relação:

$$H = \left(\frac{\frac{1}{\mathrm{x}_1} + \frac{1}{\mathrm{x}_2} + ... + \frac{1}{\mathrm{x}_\mathrm{n}}}{n}\right)^{-1} \tag{2.67}$$

isto é, a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos de $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}$.

Para Toledo e Ovalle (1985, p.133), a definição de media harmônica é dada por:

Definição 8: Dado o conjunto de *n* valores $x_1, x_2, ..., x_n$, a *média harmônica* do conjunto será

$$\overline{X}_h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}} \tag{2.68}$$

3.3.8 Propriedades Matemáticas da Média Harmônica

Nesta subseção apresentaremos as propriedades da média harmônica.

1ª Propriedade: A média harmônica é menor ou igual à média geométrica para valores da variável diferentes de zero.

Provaremos a desigualdade no caso $n = 2$.

Demonstração: Como $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, então $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0$.

Somando $4x_1x_2$ em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 \geq 0 + 4x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geq 4x_1x_2 \tag{2.69}$$

que pode ser escrito como

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \tag{2.70}$$

Multiplicando x_1x_2 em ambos os membros da desigualdade, temos que

$$x_1x_2(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2x_1x_2$$

$$x_1x_2(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1^2x_2^2 \tag{2.71}$$

Daí, tiramos que

$$4x_1^2x_2^2 \leq x_1x_2(x_1 + x_2)^2 \tag{2.72}$$

Então,

$$\frac{4x_1^2x_2^2}{(x_1 + x_2)^2} \leq x_1x_2 \tag{2.73}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade, teremos

$$\sqrt{\frac{4x_1^2x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}} \leq \sqrt{x_1x_2}$$

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \tag{2.74}$$

Logo, concluímos que

$$\overline{x}_h \leq \overline{x}_g \,. \tag{2.75}$$

Portanto, a média harmônica é menor ou igual à média geométrica para valores diferentes de zero.

3.3.9 Mediana

A mediana é empregada quando desejamos obter um valor que divide o conjunto de dados em duas partes com quantidades iguais ou quando há valores extremos que afetam de maneira acentuada a média aritmética, assim sendo ela é definida por Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.127) como:

Definição 9: Sejam $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ os *n* valores ordenados de uma variável *x*. A mediana desse conjunto de valores – indicada por Me – é definida por:

$$\text{Me} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & se\ n\ é\ ímpar \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & se\ n\ é\ par \end{cases} \tag{2.76}$$

Para Lima et al. (2005, p.161), a definição de mediana é dada por:

Definição 10: De modo mais preciso, consideremos que as *n* observações $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são reordenadas na nova sequência $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$. Quando *n* é ímpar a mediana é definida como $\hat{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Quando *n* é par, a mediana é definida como $\hat{x} = \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$.

3.3.10 Propriedades Matemáticas da Mediana

Nesta subseção apresentaremos as propriedades da mediana.

1ª Propriedade: Ao somar uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua mediana também é somada por esta constante.

Provaremos primeiro para um número ímpar de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.77}$$

Ao adicionar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.77), obtemos a sequência

$$x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c, ..., x_n + c \tag{2.78}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.77) é dada por

$$\text{Me}_1 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \tag{2.79}$$

e a mediana da sequência (2.78) é dada por

$$\text{Me}_2 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} + c$$

$$\text{Me}_2 = \text{Me}_1 + c \tag{2.80}$$

Agora, provaremos para um número par de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.81}$$

Ao adicionar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.81), obtemos a sequência

$$x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c, ..., x_n + c \tag{2.82}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.81) é dada por

$$\text{Me}_1 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ se } n \text{ é par.} \tag{2.83}$$

e a mediana da sequência (2.82) é dada por

$$\text{Me}_2 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + c + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + c}{2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + 2c}{2}$$

$$\text{Me}_2 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} + \frac{2c}{2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} + c$$

$$\text{Me}_2 = \text{Me}_1 + c \tag{2.84}$$

Portanto, a mediana sofreu a mesma operação que os valores de x_i.

2ª Propriedade: Ao subtrair uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua mediana também é subtraída por esta constante.

Provaremos primeiro para um número ímpar de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.85}$$

Ao subtrair $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.85), obtemos a sequência

$$x_1 - c, x_2 - c, x_3 - c, ..., x_n - c \tag{2.86}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.85) é dada por

$$\text{Me}_1 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \tag{2.87}$$

e a mediana da sequência (2.86) é dada por

$$\text{Me}_2 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} - c$$

$$\text{Me}_2 = \text{Me}_1 - c \tag{2.88}$$

Agora, provaremos para um número par de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.89}$$

Ao subtrair $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.89), obtemos a sequência

$$x_1 - c, x_2 - c, x_3 - c, ..., x_n - c \tag{2.90}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.89) é dada por

$$\text{Me}_1 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ se } n \text{ é par.} \tag{2.91}$$

e a mediana da sequência (2.90) é dada por

$$\text{Me}_2 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} - c + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} - c}{2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} - 2c}{2}$$

$$\text{Me}_2 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} - c$$

$$\text{Me}_2 = \text{Me}_1 - c \tag{2.92}$$

Portanto, a mediana sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

3ª Propriedade: Ao multiplicar uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua mediana também é multiplicada por esta constante.

Provaremos primeiro para um número ímpar de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.93}$$

Ao multiplicar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.93), obtemos a sequência

$$cx_1, cx_2, cx_3, ..., cx_n \tag{2.94}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.93) é dada por

$$\text{Me}_1 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \tag{2.95}$$

e a mediana da sequência (2.94) é dada por

$$\text{Me}_2 = cx_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\text{Me}_2 = c\text{Me}_1 \tag{2.96}$$

Agora, provaremos para um número par de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.97}$$

Ao multiplicar $c \in \mathbb{R}$ a x_i da sequência (2.97), obtemos a sequência

$$cx_1, cx_2, cx_3, ..., cx_n \tag{2.98}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.97) é dada por

$$\text{Me}_1 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ se } n \text{ é par.} \tag{2.99}$$

e a mediana da sequência (2.98) é dada por

$$\text{Me}_2 = \frac{cx_{\left(\frac{n}{2}\right)} + cx_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

$$\text{Me}_2 = c\left(\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}\right)$$

$$\text{Me}_2 = c\text{Me}_1 \tag{2.100}$$

Portanto, a mediana sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

4ª Propriedade: Ao dividir uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua mediana também é dividida por esta constante.

Provaremos primeiro para um número ímpar de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.101}$$

Ao dividir $c \in \mathbb{R}^*$ a x_i da sequência (2.101), obtemos a sequência

$$\frac{x_1}{c}, \frac{x_2}{c}, \frac{x_3}{c}, \cdots, \frac{x_n}{c} \tag{2.102}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.101) é dada por

$$\text{Me}_1 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \tag{2.103}$$

e a mediana da sequência (2.102) é dada por

$$\text{Me}_2 = \frac{x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{c}$$

$$\text{Me}_2 = \frac{\text{Me}_1}{c} \tag{2.104}$$

Agora, provaremos para um número par de elementos.

Demonstração: Seja a sequência de números reais ordenados de forma crescente ou decrescente

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \tag{2.105}$$

Ao dividir $c \in \mathbb{R}^*$ a x_i da sequência (2.105), obtemos a sequência

$$\frac{x_1}{c}, \frac{x_2}{c}, \frac{x_3}{c}, \cdots, \frac{x_n}{c} \tag{2.106}$$

Daí, observe que nesta nova sequência a ordenação original é preservada.

Pela definição da mediana, temos que a mediana Me_1 da sequência (2.105) é dada por

$$\text{Me}_1 = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ se } n \text{ é par.} \tag{2.107}$$

e a mediana da sequência (2.106) é dada por

$$\text{Me}_2 = \frac{\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}}{c} + \frac{x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{c}}{2} = \frac{\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{c}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2c} = \frac{1}{c}\left(\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}\right)$$

$$\text{Me}_2 = \frac{\text{Me}_1}{c} \tag{2.108}$$

Portanto, a mediana sofreu a mesma operação que os valores de x_i.

3.3.11 Moda

A moda é uma medida de tendência central que possui sua definição intuitiva, como mostram Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p.129) ao defini-la como:

Definição 11. Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$, com frequências absolutas iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. Se o máximo entre $n_1, n_2, ..., n_k$ é igual a n_j, $j \in \{1, 2, ..., k\}$, dizemos que a moda - indicada por Mo - é igual ao valor x_j.

Ou seja:

A moda de um conjunto de valores corresponde ao valor que ocorre mais vezes.

Para Lima et al. (2005, p.162), de forma mais direta, expõem que a definição de moda é dada por:

Definição 12. Chamamos de moda o valor mais frequentemente observado de uma variável.

3.3.12 Propriedades Matemáticas da Moda

Nesta subseção apresentaremos as propriedades da moda.

1ª Propriedade: Ao somar uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua moda também é somada por esta constante.

Provaremos para o caso unimodal.

Demonstração: Seja a sequência de valores reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_k \tag{2.109}$$

e $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ uma sequência de frequências absolutas de cada x_j com $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Daí, temos

$n_j = máx(n_1, ..., n_k)$, representando o máximo das frequências.

Dessa forma, a moda é o valor da sequência (2.109) correspondente à n_j (maior frequência), ou seja,

$$M_o = x_j, \ \ j \in \{1, 2, 3, ..., k\} \tag{2.110}$$

Agora seja “c” uma constante e somando “c” a cada elemento de $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, ou seja,

$$x_1 + c, x_2 + c, x_3 + c, ..., x_k + c \tag{2.111}$$

Note que, a sequência das frequências permanece preservada.

Logo, a moda da sequência (2.111) é dada por:

$$M_o = x_j + c \tag{2.112}$$

Portanto, a moda sofreu a mesma operação que os valores de x_i.

2ª Propriedade: Ao subtrair uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua moda também é subtraída por esta constante.

Provaremos para o caso unimodal.

Demonstração: Seja a sequência de valores reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_k \tag{2.113}$$

e $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ uma sequência de frequências absolutas de cada x_j com $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Daí, temos

$n_j = máx(n_1, ..., n_k)$, representando o máximo das frequências.

Dessa forma, a moda é o valor da sequência (2.113) correspondente à n_j (maior frequência), ou seja,

$$M_o = x_j, \ \ j \in \{1, 2, 3, ..., k\} \tag{2.114}$$

Agora seja "c" uma constante e subtraindo "c" a cada elemento de $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, ou seja,

$$x_1 - c, x_2 - c, x_3 - c, ..., x_k - c \tag{2.115}$$

Note que, a sequência das frequências permanece preservada.

Logo, a moda da sequência (2.115) é dada por:

$$M_o = x_j - c \tag{2.116}$$

Portanto, a moda sofreu a mesma operação que os valores de x_i.

3ª Propriedade: Ao multiplicar uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua moda também é multiplicada por esta constante.

Provaremos para o caso unimodal.

Demonstração: Seja a sequência de valores reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_k \tag{2.117}$$

e $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ uma sequência de frequências absolutas de cada x_j com $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Daí, temos

$n_j = máx(n_1, ..., n_k)$, representando o máximo das frequências.

Dessa forma, a moda é o valor da sequência (2.117) correspondente à n_j (maior frequência), ou seja,

$$M_o = x_j, \ \ j \in \{1, 2, 3, ..., k\} \tag{2.118}$$

Agora seja “c” uma constante e multiplicando “c” a cada elemento de $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, ou seja,

$$cx_1, cx_2, cx_3, ..., cx_k \tag{2.119}$$

Note que, a sequência das frequências permanece preservada.

Logo, a moda da sequência (2.119) é dada por:

$$M_o = cx_j \tag{2.220}$$

Portanto, a moda sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

4ª Propriedade: Ao dividir uma constante c por todos os valores de um conjunto de dados numéricos, sua moda também é dividida por esta constante.

Provaremos para o caso unimodal.

Demonstração: Seja a sequência de valores reais

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_k \tag{2.221}$$

e $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ uma sequência de frequências absolutas de cada x_j com $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Daí, temos

$n_j = máx(n_1, ..., n_k)$, representando o máximo das frequências.

Dessa forma, a moda é o valor da sequência (2.221) correspondente à n_j (maior frequência), ou seja,

$$M_o = x_j, \ \ j \in \{1, 2, 3, ..., k\} \tag{2.222}$$

Agora seja “c” uma constante e dividindo “c” a cada elemento de $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, ou seja,

$$\frac{x_1}{c}, \frac{x_2}{c}, \frac{x_3}{c}, ..., \frac{x_k}{c} \tag{2.223}$$

Note que, a sequência das frequências permanece preservada.

Logo, a moda da sequência (2.223) é dada por:

$$M_o = \frac{x_j}{c} \tag{2.224}$$

Portanto, a moda sofreu a mesma operação que os valores de x_i .

3.4 ESTUDOS SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Nesta subseção, apresentamos um panorama das investigações em Educação Matemática e Estatística sobre o ensino de medidas de tendência central na educação básica de forma a identificar os caminhos já percorridos pelas pesquisas acadêmicas nesta área. Vale destacar que não pretendemos fazer a análise exaustiva dos trabalhos, mas perceber as semelhanças, singularidades e as perspectivas que estes apontam para o trabalho docente.

Na investigação, foram levantadas informações e dados em dissertações nos repositórios institucionais dos programas de pós-graduação em Educação Estatística e em Educação Matemática de diversas universidades brasileiras, bem como, buscamos artigos publicados nos eventos da área. Isso nos permitiu, a partir das semelhanças observadas nas metodologias das investigações, organizar os trabalhos em categorias, a saber: Estudos diagnósticos, Estudos experimentais e Estudos de livros didáticos.

Os estudos diagnósticos agrupam dois artigos; que buscaram identificar dificuldades de ensino-aprendizagem de medidas de tendência central, bem como refletir sobre os fatos didáticos relacionados ao conteúdo.

Na categoria estudos experimentais foram agrupados oito dissertações; os quais apresentaram propostas metodológicas para o ensino de medidas de tendência central a partir de resultados de experiências didáticas em sala de aula.

Por fim, os estudos de livros didáticos agrupa uma dissertação; que procura analisar as formas de abordagem do conteúdo de medidas de tendência central em livros didáticos.

A seguir, apresentamos a revisão destes estudos.

3.4.1 Estudos diagnósticos

Neste item apresentamos os resultados das pesquisas referentes aos estudos diagnósticos sobre o ensino e aprendizagem de medidas de tendência central, destacando principalmente os objetivos das pesquisas, os sujeitos, os instrumentos de coletas e análise de dados, as conclusões e, se houver, direcionamentos para estudos futuros.

Lopes, Corral e Resende (2012) realizaram uma pesquisa que teve por objetivo avaliar os resultados da aplicação de uma proposta didático-pedagógica, que utiliza um jogo associado à resolução de problemas para o estudo dos conceitos de média, mediana e moda da estatística descritiva, para tanto foi selecionada uma amostra de 30 estudantes do terceiro ano matutino do ensino médio de uma escola estadual de uma cidade do noroeste paulista, que responderam a um questionário contendo dez questões de múltipla escolha.

Os estudantes foram submetidos à pré e pós-testes para comparação entre eles em relação ao quanto, o conteúdo de medidas de tendência central por meio de jogos e da resolução de problemas, pode ser mais significativo na percepção dos estudantes. Além disso, foi feita uma análise do número de acertos do antes e depois da proposta metodológica e, para tal, foram utilizados gráficos e testes de hipóteses.

Os dados apontaram que o desempenho dos estudantes em todas as questões foi maior no pós-teste. Entretanto, os autores destacam que na questão onde o estudante deveria saber interpretar os aspectos matemáticos envolvidos na média, na mediana e na moda os resultados foram poucos satisfatórios com 22,58% e 25,81% no pré-teste e no pós-teste, respectivamente. Além disso, cinco das onze questões aplicadas no pós-teste os discentes tiveram mais de 80% de acertos.

E, ainda, os autores afirmam que as questões envolvendo o cálculo de moda para dados não tabulados e no jogo 3Ms poderão ocorrer valores iguais para as três medidas de tendência central foram as que tiveram maior número de acertos com 67,74% e 90,32%, respectivamente, no pré-teste e no pós-teste.

Por fim, os resultados desta pesquisa revelam que a utilização de jogos como proposta pedagógica provocou nos estudantes uma maior motivação no processo de ensino-aprendizagem das medidas de tendência central. Porém, quando o pesquisador buscou trabalhar as questões utilizando à metodologia de resolução de problemas o entusiasmo dos estudantes não foi o mesmo.

Neres e Cantanhêde (2016) realizaram uma pesquisa, de caráter qualitativo e quantitativo, com 20 professores da rede pública de ensino e 41 estudantes do 5º período do curso de Alimentos (correspondente ao 3º ano do Ensino Médio), modalidade Ensino Médio integrado à Educação Profissional, do IFMA – Campus Açailândia, na qual objetivou investigar a viabilidade do ensino-aprendizagem de medidas de tendência central aplicando a metodologia de resolução de problemas.

Neres e Cantanhêde (2016) destacam que essa metodologia de ensino provoca novas posturas e atitudes por parte dos sujeitos da pesquisa. O professor deixa de ser o detentor do conhecimento e o estudante assume de maneira ativa a responsabilidade pela aprendizagem dos conteúdos trabalhados.

Os resultados revelados na pesquisa sinalizam que os estudantes apresentaram bom desempenho na resolução dos problemas sugeridos, assim como em relação aos conteúdos tratados de medidas de tendência central. Além disso, segundo os pesquisadores, a metodologia de ensino desperta mais motivação, interesse e aciona curiosidade, contribuindo dessa forma para o desenvolvimento crítico e reflexivo do estudante.

3.4.2 Estudos experimentais

Neste item apresentamos diversos estudos que relatam resultados de experiências em sala de aula, estas utilizaram metodologias de ensino não tradicionais, com ênfase em instrumentos diferenciados, dessa forma os autores expõem metodologias alternativas no ensino de medidas de tendência central juntamente com suas potencialidades e limites.

O trabalho de Lutz (2012) relata experiência com estudantes do ensino médio na modalidade PROEJA do Curso Técnico em Informática – Etapa I, do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete/RS, na qual elaborou, implementou e analisou uma sequência didática envolvendo atividades de ensino e aprendizagem de Estatística.

Com fundamentação nos pressupostos da engenharia didática e na teoria dos registros de representação semiótica, o pesquisador desenvolveu e acompanhou as habilidades dos estudantes por meio de atividades que envolviam a coleta dos dados, tratamento, interpretação e a crítica de informações retiradas de situações cotidianas dos meios de comunicação.

Os resultados mostraram que a aplicação da sequencia didática produzida gerou resultados satisfatórios de acordo com o esperado para cada atividade, contudo foi identificada uma limitação, em que os estudantes acharam o conjunto de atividades eficiente, porém cansativa, logo a sugestão seria diminuir a quantidade de questões de fixação para cada assunto e assim otimizar o tempo de aplicação.

Walichinski (2012) relata outra experiência com estudantes do 7º ano do ensino fundamental de um colégio público estadual do município de ponta grossa/PR, com o objetivo de analisar as contribuições de uma sequência de ensino pautada nos pressupostos da contextualização para o ensino e aprendizagem de estatística. Neste sentido, a pesquisadora aplicou uma sequência de atividades direcionadas a conteúdos básicos de estatística, por meio da utilização de dados coletados na própria turma.

A pesquisa, de caráter qualitativo, utilizou como instrumento para coleta e análise de dados, anotações feitas pela pesquisadora, atividades escritas realizadas pelos estudantes, fotografias e gravações em áudio. O período de coleta foi de quatorze aulas de cinquenta minutos, dentre as quais, além das aulas, foram aplicados um pré-teste e um pós-teste e através destes resultados foram feitas comparações de modo a identificar os avanços conquistados, bem como, as dificuldades ainda presentes.

Na aplicação da sequência didática, a pesquisadora verificou maior interesse, motivação e melhor aprendizagem dos conteúdos estudados. Isso foi possibilitado pelo envolvimento que o estudante obteve a partir de suas próprias experiências ou de experiências pertencentes ao seu meio social.

A partir de suas observações após aplicação das atividades, Walichinski (2012) expõe que houve um ganho significativo para os estudantes em relação ao desenvolvimento de competências de raciocínio, pensamento e, letramento estatístico, alcançando os objetivos de ensino deste conteúdo na educação fundamental e gerando uma sólida base para a continuação do estudo que será apresentado aos estudantes no nível médio.

Algumas constatações também podem ser observadas por meio do estudo realizado por Noronha (2014), que teve como pergunta norteadora:

"A proposição de uma sequência didática fundamentada na metodologia da engenharia didática e com apoio de aplicações práticas pode contribuir para o ensino e aprendizagem dos elementos básicos de estatística?", assim objetivou investigar se a utilização de uma sequência didática, embasada nos princípios da engenharia didática, contribui para o ensino e aprendizagem dos elementos básicos de estatística em turmas do ensino básico. Esta pesquisa foi realizada com estudantes do 2º ano do ensino médio da escola Professora Terezinha de Jesus Rodrigues, no município de Santarém/PA.

Noronha (2014), por meio desta temática realizou uma pesquisa experimental, na qual utiliza os pressupostos da engenharia didática como metodologia da pesquisa, dessa forma realizou análises prévias mostrando o atual estado do ensino de matemática no município de Santarém, além disso discorre sobre os fundamentos teóricos que utilizou para a elaboração de uma sequência didática proposta para ser aplicada posteriormente.

O pesquisador não define explicitamente uma metodologia de ensino ou teoria específica que priorizou a montagem da sequência de aulas, o que pode ser observado é que este se utilizou de metodologias que não são usuais, como levar os estudantes a uma pesquisa na biblioteca ou a um laboratório de informática e a partir de então explorar o assunto com aqueles dados coletados, a proposição de elaboração de perguntas e construção de instrumentos de coleta pelos próprios estudantes organização e apresentação dos dados em tabelas e gráficos com uso do conhecimento que o aluno já possui para esta organização, propõe exercícios de fixação, porém deixa a cargo do leitor esta tarefa de elaboração os exercícios, pois não expõe atividades desta natureza.

Por fim, Noronha (2014) expõe como resultados da pesquisa análises após as atividades (a posteriori) em consonância com o que se esperava por parte dos estudantes diante das aulas acrescenta que as atividades são significativas ao contemplar o cotidiano dos discentes, bem como, são enriquecidas quando são utilizados vídeos interessantes que tratam do assunto. A atividade contextualizada e realizada em grupo também favoreceu um ambiente de discussões aguçando assim o poder crítico e criativo dos estudantes.

A sequência proposta se distancia do ensino habitual por não expor o conteúdo pronto, mas por propiciar a construção por parte dos estudantes do mesmo.

Oliveira (2014) desenvolveu uma pesquisa intitulada “Ensino de estatística no ensino médio”, foi realizada com estudantes do 3º ano deste nível de ensino no município de Coelho Neto/MA. O estudo, segundo seu autor, objetivou apresentar de uma forma diferente ao trabalhar com a estatística numa proposta por meio de projetos.

Oliveira (2014) expõe que para a aplicação da série de aulas dividiu os estudantes em dois grupos, um deles participou de forma direta do projeto, pesquisando, coletando dados, apresentando seminários e construindo tabelas e gráficos, enquanto o outro grupo participou das aulas de forma passiva, apenas assistindo as lições ministradas que se utilizou de somente os seguintes instrumentos: livro didático, pincel e quadro.

Os grupos foram submetidos à pré e pós-testes para comparação entre eles em relação ao quanto, o conteúdo de estatística através de projetos e pesquisas, pôde se mostrar mais estimulante na percepção dos estudantes. Foi feita uma análise das notas e do desempenho obtidos pelos discentes de ambos os grupos nos testes e, para tal, foram utilizados além dos gráficos e tabelas, os testes de hipóteses.

Os resultados, confirmados através dos testes estatísticos, mostraram que por meio de projetos, o ensino de estatística tornou-se um forte instrumento facilitador da aprendizagem, por proporcionar aos estudantes a vivencia da pesquisa de campo, que gerou dados reais pertinentes ao cotidiano escolar dos estudantes que passaram assim a conhecer melhor o seu ambiente educacional e o representar por meio de números, tabelas e gráficos. Em contraste a este processo, Oliveira (2014) observou que os estudantes que não participaram das atividades, mas sim da aula no estilo tradicional, se mantiveram desmotivados, num sentimento de cansaço dentro de sala.

Em relação ao teste de hipótese pode-se afirmar ao nível de 5% de significância que não existiram diferenças significativas entre as médias de pré e pós-testes dos estudantes que não participaram das aulas por projetos, diferente do que aconteceu com os demais estudantes que demostraram em termos numéricos uma considerável diferença entre as médias, logo houve a confirmação estatística da evolução do conhecimento destes discentes.

Dangió (2014) relata experiência com estudantes do 3º ano do ensino médio A e B da escola estadual Professor Antônio Terézio Mendes Peixoto, localizada no município de Jaú/SP, na qual desenvolveu uma sequência didática para o ensino de estatística no ensino médio, envolvendo atividades de projetos e experimentações práticas, contextualizadas e próximas da realidade dos estudantes.

A pesquisa, de caráter qualitativo, foi realizada utilizando os pressupostos da engenharia didática onde buscou desenvolver com os estudantes habilidades para elaboração, tabulação, representação gráfica e apresentação dos resultados obtidos de uma pesquisa de campo para serem trabalhados em atividades estatísticas a serem cumpridas no decorrer do processo de ensino-aprendizagem.

Através dos resultados obtidos, Dangió (2014) concluiu que a aplicação da sequência didática trouxe uma melhora significativa na relação professor-estudante e por este motivo tornaram as aulas mais significativas e dinâmicas. Além disso, o pesquisador ressalta que as atividades práticas e contextualizadas promovem maior aprendizagem dos conteúdos estatísticos trabalhados.

Por fim, o pesquisador destaca que a falta de motivação em estudar estatística pode ser reflexo de uma metodologia tradicional com uso excessivo de simbolismos formais e alto grau de abstração.

Salvador (2015) desenvolveu um estudo com o objetivo de propor uma metodologia construtiva para o ensino-aprendizagem de estatística descritiva ligada à resolução de problemas. As atividades foram desenvolvidas em duas turmas distintas do 3º ano do ensino médio noturno da Escola Estadual Major Veneziano Vital do Rêgo, localizada na cidade de Campina Grande/PB.

Neste sentido, a pesquisa discorre com aplicação nas turmas de duas metodologias diferenciadas na qual a primeira procurou seguir os conteúdos descritos nas orientações do livro didático adotado pela escola e a segunda buscou uma metodologia construtivista, na qual o estudante se depara com situações problema em que o conhecimento estatístico se faz necessário e a partir desse ponto de partida, desenvolver uma aprendizagem significativa aliada à resolução de problemas.

Através dos resultados obtidos, Salvador (2015) concluiu em sua pesquisa que a metodologia de ensino-aprendizagem aliada à proposta construtiva gerou melhores resultados, em comparação com a turma de estudantes onde foi utilizado o livro didático sugerido pela escola, porém destacou que em algumas atividades os discentes demonstraram dificuldades com conhecimentos derivados do ensino fundamental.

Outro estudo realizado, no sentido de práticas docentes para o ensino de estatística foi o realizado por Saraiva (2015), que na vertente de uso da tecnologia na educação, utilizou planilhas eletrônicas como forma de dinamizar o processe de aprendizagem, teve como objetivo analisar a concepção de estudantes na modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA) sobre o ensino de Estatística com o auxílio da planilha eletrônica.

Neste sentido, foi realizada uma pesquisa descritiva em busca de posicionamentos dos discentes para obter esclarecimentos em torno do tema, a metodologia utilizada tem enfoque qualitativo e quantitativo de forma simultânea. Os instrumentos de coleta utilizados foram questionários com perguntas sobre o ensino de Estatística com a utilização de planilhas eletrônicas e conhecimento prévio a respeito dessa tecnologia.

Em seus resultados, Saraiva (2015) aponta que houveram dificuldades para o desenvolvimento das atividades por algumas vezes, isso aconteceu pela limitação que os estudantes, que pouco tinham acesso a computadores fora da escola, apresentaram, apesar disso os discentes consideraram o laboratório de informática como sendo o melhor ambiente para desenvolver as atividades propostas, e reconheceram que o computador como auxiliar para o ensino melhorou significativamente o interesse deles nas aulas.

Deste modo, pode-se perceber um alto nível de contentamento dos estudantes no que tange a melhoria de ensino com a utilização de planilhas eletrônicas, estes resultados são reforçados quando analisados de forma quantitativa.

Outra pesquisa sobre o tema foi realizada em 2015 no município de ponta grossa/PR, o trabalho de Damin (2015) teve como objetivo investigar as contribuições de uma sequência didática, com a utilização da realidade dos discentes, na aprendizagem de conceitos estatísticos pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Num primeiro momento foi feita aplicação de teste diagnóstico denominado pré-teste, que teve intuito de observar o conhecimento prévio dos estudantes, após isso foi desenvolvida uma sequência didática que contemplou conteúdos básicos de Estatística.

De cunho qualitativo, os resultados foram produzidos durante a aplicação das atividades, feitas pelo pesquisador por meio de fotografias, gravação de áudio e atividades escritas realizadas pelos estudantes, e após isso analisados de acordo com o propósito do pesquisador.

Segundo Damin (2015), durante a aplicação da sequência, foi observado que a participação dos estudantes foi de forma mais efetiva, apresentaram maior envolvimento e interesse pelos conteúdos abordados, pois puderam de fato conduzir a pesquisa coletando, organizando e tabulando os dados.

Os resultados do desempenho dos estudantes após a aplicação mostraram que a forma de tratamento do conteúdo mais próximo à realidade dos estudantes mostra-se eficaz quanto à aquisição ao conhecimento de conceitos estatísticos, favorecendo o desenvolvimento das competências de raciocínio, pensamento e letramento estatístico exigidos neste nível de ensino.

3.4.3 Estudos de livros didáticos

O livro didático dá ao estudante a possibilidade de estabelecer novas ideias, compreender ou finalizar assimilações dos conteúdos trabalhados pelo professor em sala de aula. Já em relação ao professor, ele serve como referência ou até mesmo como principal roteiro na organização e execução de suas aulas.

Sabendo da importância dessa ferramenta, nosso próximo passo para o desenvolvimento da pesquisa foi a análise dos livros didáticos utilizados em nossa escola. Essa análise teve como objetivo verificar como eles trazem o conteúdo de estatística, se estes permitem ao estudante compreender e explorar os assuntos estatísticos, e como eles estabelecem a relação entre conceitos estudados e a realidade.

Simone Neto (2008) analisou seis coleções de livros didáticos do ensino médio aprovados pelo PNLEM (2006), com o objetivo de verificar as abordagens feitas pelos desenvolvedores dos livros na apresentação do ensino de estatística e se estes seguem as recomendações dos documentos oficiais para o ensino médio. Além disso, o autor destaca que as coleções escolhidas pertencem às editoras de maiores fluxos de vendas para o governo federal.

Com isso o pesquisador busca responder as seguintes questões de pesquisa: que organização matemática e didática os livros didáticos do ensino médio de 1º ao 3º ano selecionados apresentam em relação aos conteúdos estatísticos? e a construção do letramento estatístico é favorecida pelo desenvolvimento da organização apresentada nos livros analisados?

Através das análises realizadas, Simone Neto (2008) buscou verificar se as recentes propostas dos livros didáticos em relação aos assuntos estatísticos auxiliam a ampliar a construção do letramento estatístico e de que forma ela está concebida nos livros em termos de dimensão e repartição dos assuntos, buscando assim compreender a escolha de currículo desenvolvida nas coleções didáticas em relação à abordagem da estatística.

Diante dos resultados obtidos, Simone Neto (2008) conclui em sua pesquisa que os livros didáticos analisados, em sua maioria, aumentam o letramento estatístico apenas no nível cultural e somente uma coleção permite ao estudante desenvolver o letramento no nível funcional. E, ainda, destaca que as coleções avaliadas, necessitariam trazer um quantitativo maior de atividades propostas que englobam os conteúdos estatísticos e distribuí-los em diferentes tópicos ao longo dos volumes, ao invés de concentrá-los apenas em poucos volumes.

3.5 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL SEGUNDO ESTUDANTES

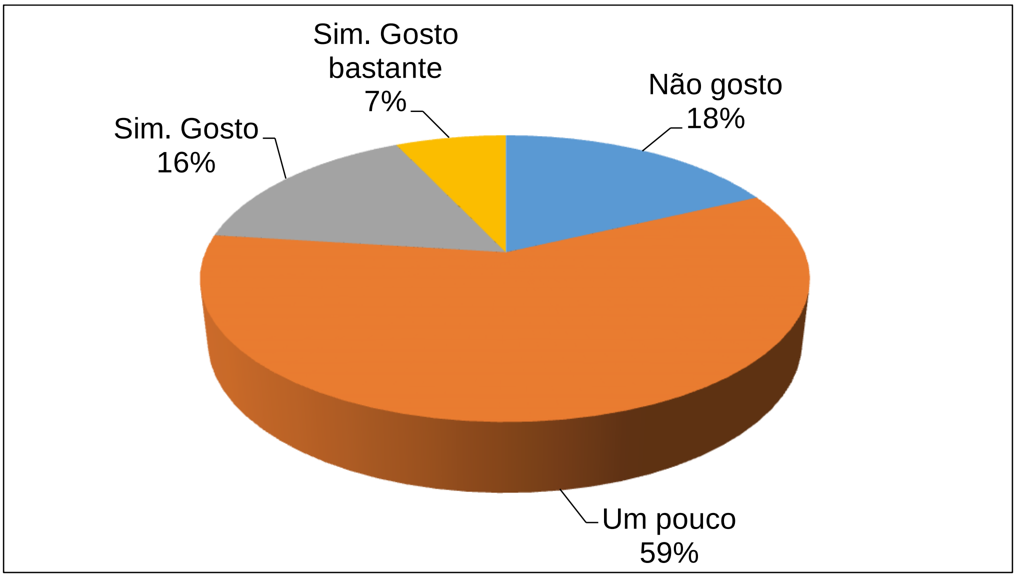
O objetivo desta subseção é apresentar os resultados de uma pesquisa por questionário realizada com 100 estudantes da rede pública de ensino de Belém, egressos do 3º ano do ensino médio, a fim de traçar o perfil dos estudantes quanto ao contexto social, processo de ensino e avaliação em matemática, bem como saber quais assuntos relacionados às medidas de tendência central, têm mais dificuldades de aprender. A produção de dados ocorreu através da aplicação de um questionário no período de 30 a 31 de agosto de 2016.

A seguir, apresentamos a sistematização e análise dos dados produzidos na aplicação do questionário aos estudantes.

Com relação à idade dos estudantes, 9% tinham 16 anos, 38%, 17 anos, 32%, 18 anos e 21%, acima de 18 anos. Esses dados revelam que a maioria dos estudantes não está na idade correspondente ao nível de escolaridade em que estavam cursando. A maioria dos estudantes participantes deste momento da pesquisa é do sexo feminino, 61%. Ainda, 40%, dos responsáveis masculinos possuem apenas o ensino médio completo e 47%, dos responsáveis femininos possui também o ensino médio completo como nível de escolaridade. Os dados revelaram que 65% dos responsáveis masculino trabalham com remuneração.

Um dos questionamentos da pesquisa é quanto à “preferência” ou não sobre a disciplina matemática e os dados revelaram que 59% dos estudantes gostam um pouco de matemática, 18% não gostam, 16% gostam e 7% gostam bastante. Observamos que a maioria dos estudantes nesta amostra aparenta não ter mais aquela aversão quando se trata de matemática nas escolas, apesar de que a pesquisa nos revelar uma metodologia tradicional dominante nas aulas de matemática, conforme mostra o gráfico abaixo.

Gráfico 1: Gosto dos estudantes egressos pela matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

No âmbito social e suas implicações, uma das principais questões desta pesquisa foi: Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática? Obtivemos um resultado revelador que mostra com clareza a ausência familiar nas tarefas de matemática, pois 67% dos pesquisados costuma estudar sozinho, 8% professor particular, 7% os pais, 5% o irmão, 1% professor particular e mãe, 1% professor particular e irmão, 1% mãe e irmão e 10% outros, como primo, namorado.

Segundo Reis (2005, p.6):

> O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) realizado em 2003 também revela que estudantes cuja família participa de forma mais direta no cotidiano escolar, apresenta um desempenho superior em relação àquela onde os pais estão ausentes do seu processo educacional.

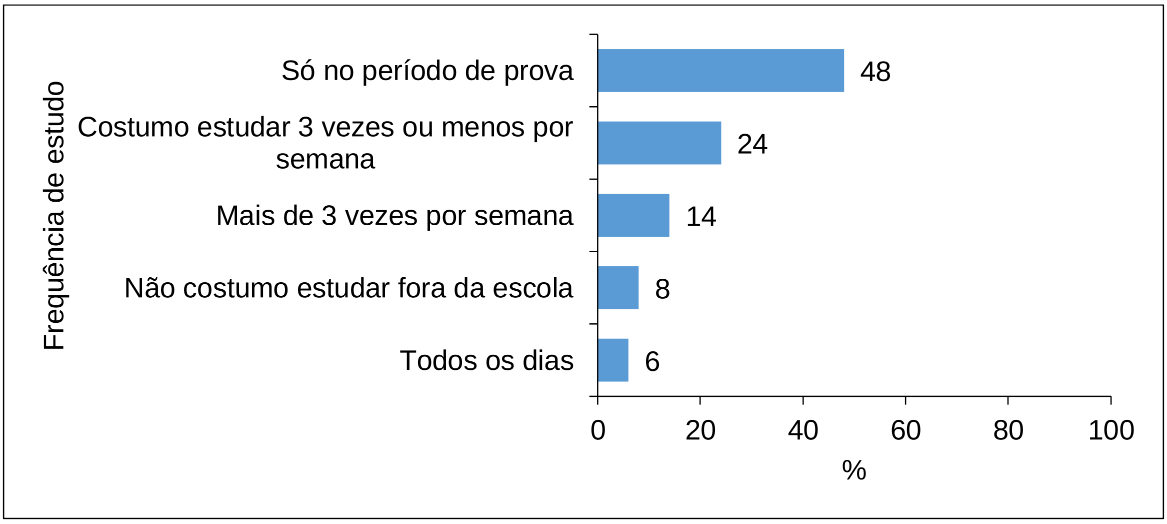
Realidade essa percebida na amostragem, o quanto nossos estudantes estão praticamente estudando sozinhos em casa, tal cenário podemos tentar justificar ao verificarmos os resultados quando perguntamos: qual a escolaridade de seus pais? 46% dos responsáveis masculinos tem escolaridade inferior ao ensino médio completo e, também 42% das responsáveis femininas tem ensino médio completo. A baixa qualificação pode ser responsável por um resultado não satisfatório. Pois é de saber coletivo que a família tem uma grande relevância para o desenvolvimento educacional.

Reis (2005, p.6) também ressalta dizendo:

> Em contrapartida, Conceição (apud Sipavicius, 1987) relata que estudantes que vivem em melhores condições ambientais socioeconômicas tais como: famílias com maior renda, melhor grau de instrução, cujos pais têm ocupações de maior prestígio social, e em que a situação de vida não exige o trabalho da mãe fora do lar, está associado ao melhor rendimento escolar do aluno.

O próximo item avaliado é quanto à pergunta: Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola? Obtivemos uma parcela de 48% dos estudantes que estudam somente no período de prova, 24% dos discentes informaram que costuma estudar 3 vezes ou menos por semana, 14% mais de 3 vezes por semana, 8% não costuma estudar fora da escola e apenas 6% dos estudantes estudam todos os dias, conforme demonstra o gráfico a seguir.

Gráfico 2: Hábito de estudo da Matemática fora da escola

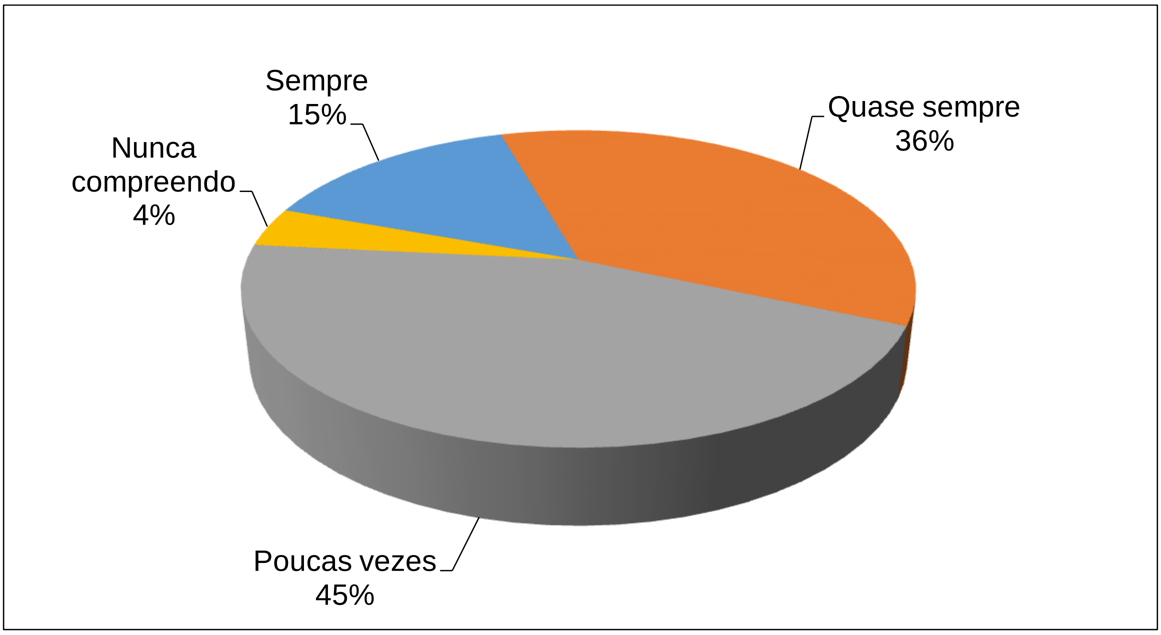


Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Os dados demonstram que os estudantes costumam estudar somente véspera das provas, o que revela uma tendência comum na conduta do discente em relação ao estudo da matemática: estudar por obrigação. Essa conduta dificulta a aprendizagem da matemática, pois sabemos que apenas as horas de aula ministradas em sala não são suficientes para a apreensão dos conhecimentos. É necessário também dedicação por parte dos estudantes.

Em relação à compreensão dos estudantes relativa às explicações dadas nas aulas de matemática, perguntamos: Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de matemática? Tivemos como respostas a opção Poucas vezes com 45%, a opção quase sempre 36%, já a opção Sempre com 15% e por fim apenas 4% nunca compreendendo as aulas. Assim, podemos tentar justificar o baixo índice nos resultados matemáticos, pois 85% dos estudantes alegam ter dificuldades em entender as aulas, conforme mostra o gráfico a seguir.

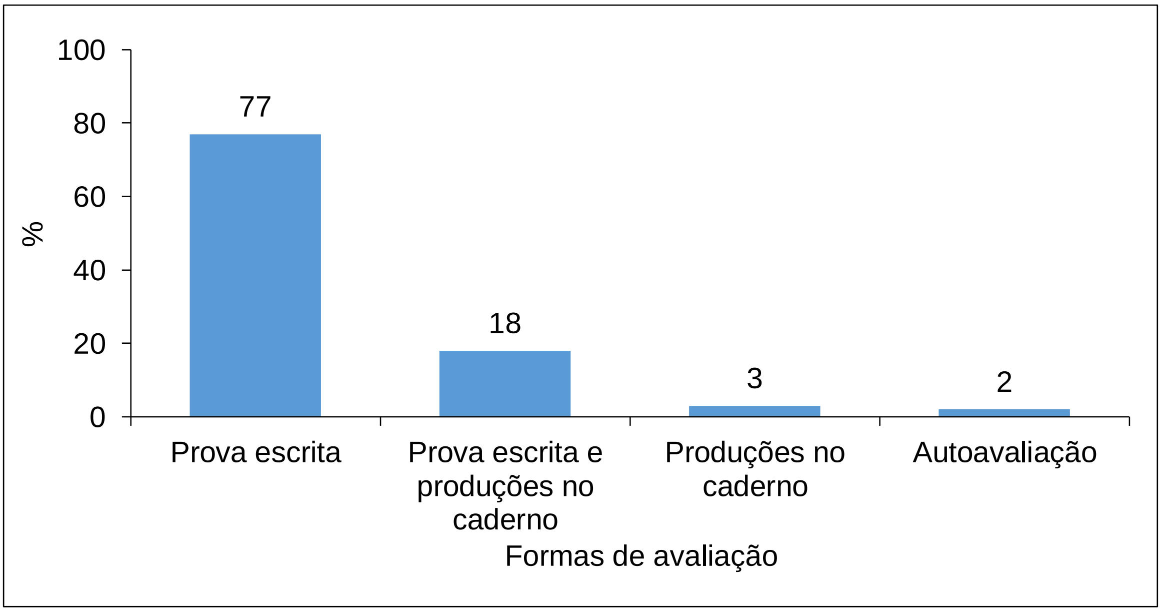
Gráfico 3: Compreensão das explicações dadas nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Ao focalizar o processo de avaliação em matemática perguntamos: Quais as principais formas de avaliação você costuma ser avaliado em matemática? Os resultados mostram que 77% dos estudantes são avaliados através de prova escrita e 18% em prova escrita e produções no caderno, 3% são em produções no caderno e os demais com 2% através de auto avaliação, conforme mostra o gráfico abaixo.

Gráfico 4: Formas de avaliação praticada pelos professores de matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Segundo Luckesi (1998, p.43), “para não ser autoritária e conservadora, a avaliação tem como uma das tarefas, de ser diagnóstica, ou seja, deverá ser o instrumento dialético do avanço, sendo instrumento de identificação de novos rumos”.

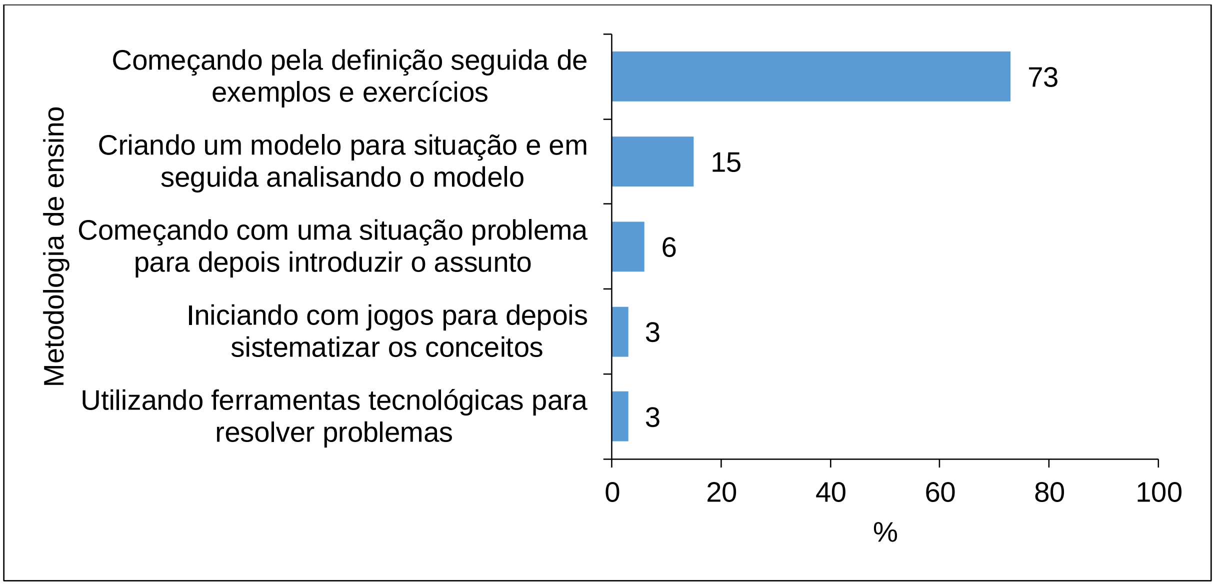
Nós, professores, temos estado, há muito tempo, presos a um modelo único de avaliação – a prova –, que apenas evidencia o que os estudantes não sabem ou, muitas vezes, o que simplesmente memorizam.

Ainda no mesmo enfoque de avaliação perguntamos: Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação em matemática? Foi perceptível que 37% dos estudantes tem a sensibilidade de estar preocupado em uma avaliação de matemática, 25% se sentem tranquilos, 14% se sentem preocupados e com medo, 6% com medo, 5% tranquilo e preocupado, 4% com medo e com raiva, 3% sinto calafrios, 2% entusiasmado, 2% preocupado e com raiva e também 2% entusiasmado e tranquilo. Isto demonstra que 71% dos estudantes possui uma relação tensa e conturbada neste processo de avaliação.

Segundo Lopes (2010) a construção de conhecimento acontece quando ocorre a aprendizagem dos conceitos relacionados a esse conhecimento, assim a Avaliação da aprendizagem vem para deixar nítido se a aprendizagem foi concretizada ou não proporcionando ao professor meio de analisar suas abordagens em sala.

Quanto ao processo da didática utilizada pelos docentes no ensino-aprendizagem de medidas de tendência central, perguntamos como a maioria das aulas começava quanto ao tema em questão: Quando você estudou o assunto medidas de tendência central a maioria das aulas foi: Assim obtivemos 73% das respostas, começando pela definição seguida de exemplos e exercícios confirmando a metodologia tradicional, já 15% dos estudantes afirmam que os docentes iniciam as aulas criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo, já 6% dos estudantes afirmam que os docentes iniciam as aulas começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto, já apenas 3% alegam que iniciam com jogos para depois sistematizar os conceitos e também com a mesma porcentagem, utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas, conforme mostra o gráfico a seguir.

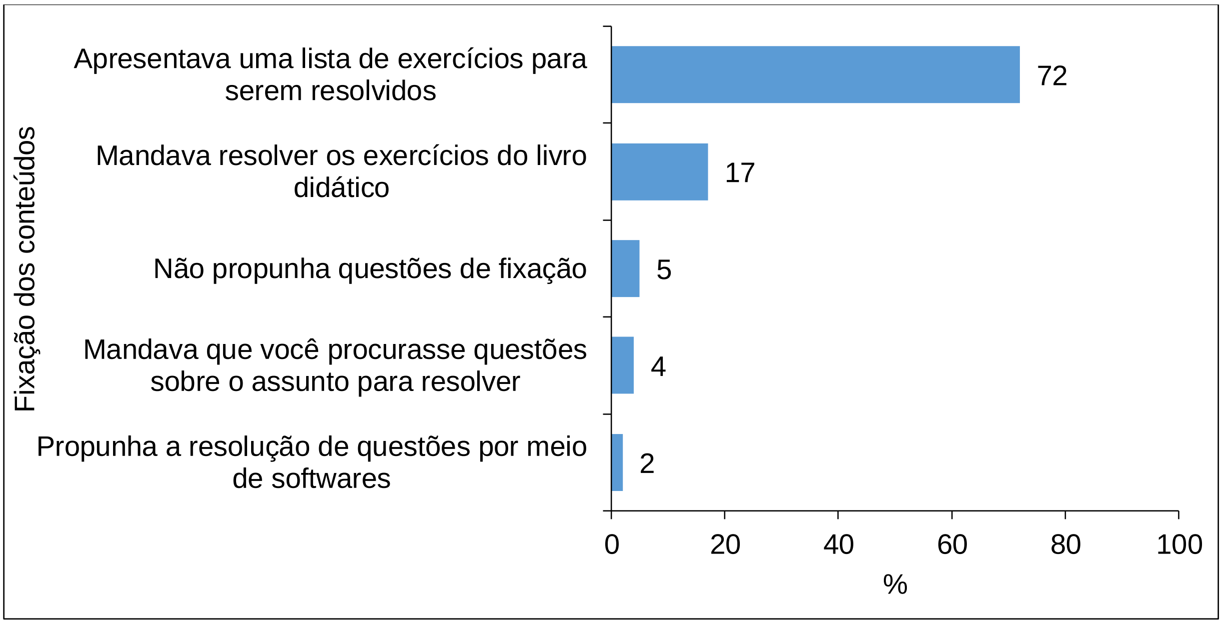
Gráfico 5: Metodologia de ensino praticada pelos professores de matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Em relação à fixação de conteúdo foi questionado o seguinte: para fixar o conteúdo estudado de medidas de tendência central o seu professor: 72% dos estudantes afirmaram que o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos, 17% mandava resolver os exercícios no livro didático, 5% não propunha questões de fixação, 4% mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver e 2% propunha a resolução de questões por meio de softwares, conforme mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 6: Técnicas de fixação dos conteúdos praticada pelos professores de matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Segundo Soares (2008, p.39), os livros didáticos não são recursos adequados para trabalhar a apreensão dos conteúdos, pois,

> Evidenciam sempre o mesmo tipo de exercício, com o mesmo procedimento de resolução. Há pouco espaço para o aluno pensar e refletir sobre o que é para fazer e como deve ser feito. As situações geralmente exigem pouca leitura e interpretação.

Para nós, estes dados revelaram que a metodologia usada para ensinar o conteúdo e as atividades para fixação deste, ainda, predomina a maneira tradicional de ensinar e de exercitar os conhecimentos adquiridos.

Compreendemos que a utilização de recursos e estratégias diversificadas exigem um esforço muito maior por parte dos professores que precisam, dentre outras coisas, estar bem formados para saber como usar, com criatividade, os recursos pedagógicos disponíveis relacionando-os de maneira adequada aos conteúdos que se quer ensinar.

Pesquisas têm mostrado que alguns professores reconhecem que precisam mudar sua prática, mas muitas vezes não sabem como fazê-lo, ou sentem-se sozinhos neste desafio, como fica evidenciado no depoimento de um dos sujeitos da pesquisa realizada por Fiorentini e Nacarato:

> Gostaria que pudesse ter um lugar ou alguém que pudesse mostrar caminhos alternativos para melhorar a minha aula e que também pudesse me animar quando tudo parecesse que perde a importância, o valor, a necessidade. Tem momentos, no dia-a-dia da sala de aula, que estou sozinha, lutando para meus alunos gostarem e aprenderam matemática. Muitos artigos ou livros discutem assuntos que parecem ser baseados em alunos perfeitos, ideais e ficam distantes da realidade do adolescente de minha escola. Sugiro que montem grupos de estudo com os professores que estão na sala de aula do ensino fundamental ou médio, mas que de alguma forma que a secretaria de educação apoie e custeie (FIORENTINI e NACARATO, 2005, p. 104)

Para Mizukami e Reali (2002), muitos docentes vivem hoje um conflito entre o que é, o que quer ser e o que consegue ser, fruto da cobrança que faz de si mesmo e das cobranças impostas pela sociedade atual que espera que a escola além de desenvolver no aluno novos saberes e competências, também desenvolva "sujeitos capazes de promover continuamente seu próprio aprendizado" (FIORENTINI e NACARATO, 2005, p.89). Desta forma, segundo estes autores, os saberes e os processos de ensinar e aprender tradicionalmente desenvolvidos pela escola se mostram cada vez mais obsoletos e desinteressantes para o estudante.

Neste sentido, entendemos que é essencial que os docentes recebam formação inicial e continuada adequada para atuarem em sala de aula visando contribuir para que as dificuldades encontradas no momento de conduzir os estudantes ao aprendizado, sejam melhor resolvidas.

Em se tratando das dificuldades para o aprendizado, pedimos aos discentes que apontassem o grau de dificuldades que percebiam para o aprendizado de cada assunto contido no conteúdo de medidas de tendência central, neste momento nossa intenção era verificar como esses estudantes avaliam as dificuldades sentidas na aprendizagem deste conteúdo, os resultados obtidos estão tabulados no quadro a seguir.

Quadro 1: Assuntos e grau de dificuldade para aprender Medidas de Tendência Central (em %)

Conteúdo	Grau de dificuldade para aprender				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Definição de média aritmética	14%	12%	50%	11%	13%
Calcular a média aritmética em um conjunto de números inteiros	10%	20%	42%	19%	9%
Calcular a média aritmética em um conjunto de números fracionários	4%	12%	46%	25%	13%
Calcular a média aritmética em um conjunto de números decimais	2%	15%	51%	19%	13%
Propriedades da média aritmética	2%	22%	36%	24%	16%
Resolver problema utilizando a propriedade da média aritmética	5%	13%	44%	27%	11%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média aritmética com números decimais	1%	10%	50%	29%	10%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média aritmética com números inteiros	5%	20%	44%	22%	9%
Resolver problema em que conhecemos o valor da média aritmética e queremos determinar um dos termos da equação algébrica	4%	12%	28%	45%	11%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média aritmética a partir de tabelas	8%	20%	30%	34%	8%

Resolver problema envolvendo o cálculo de média aritmética a partir de gráficos	12%	27%	36%	21%	4%
Definição de média ponderada	7%	18%	47%	20%	8%
Calcular a média ponderada em um conjunto de números inteiros	9%	16%	44%	22%	9%
Calcular a média ponderada em um conjunto de números fracionários	5%	17%	45%	26%	7%
Calcular a média ponderada em um conjunto de números decimais	2%	16%	48%	25%	9%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média ponderada com números decimais	3%	10%	47%	34%	6%
Resolver problema em que conhecemos o valor da média ponderada e queremos determinar um dos termos da equação algébrica	4%	15%	44%	23%	14%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média ponderada a partir de tabelas	10%	17%	44%	23%	6%
Resolver problema envolvendo o cálculo de média ponderada a partir de gráficos	7%	14%	44%	31%	4%
Definição de moda	18%	22%	34%	20%	6%
Calcular a moda em um conjunto de números inteiros	15%	25%	37%	15%	8%
Calcular a moda em um conjunto de números fracionários	3%	24%	40%	23%	10%
Calcular a moda em um conjunto de números decimais	9%	17%	39%	25%	10%
Resolver problema envolvendo o cálculo de moda com números decimais	4%	15%	47%	24%	10%
Resolver problema envolvendo o cálculo de moda a partir de tabelas	12%	16%	42%	21%	9%
Resolver problema envolvendo o cálculo de moda a partir de gráficos	13%	19%	38%	22%	8%
Definição de mediana	14%	20%	39%	20%	7%
Calcular a mediana em um conjunto de números inteiros	11%	23%	38%	22%	6%
Calcular a mediana em um conjunto de números fracionários	3%	17%	47%	20%	13%

Calcular a mediana em um conjunto de números decimais	4%	15%	41%	30%	10%
Resolver problema envolvendo o cálculo de mediana com números decimais	5%	19%	44%	25%	7%
Resolver problema envolvendo o cálculo de mediana a partir de tabelas	7%	20%	34%	31%	8%
Resolver problema envolvendo o cálculo de mediana a partir de gráficos	9%	16%	40%	25%	10%

Fonte: Pesquisa de campo, 2016.

Diante dos percentuais apresentados no quadro de dificuldades, fica evidente no geral que os percentuais mais acentuados são atribuídos para as classificações: regular e difícil. Contribuindo para a análise de que os assuntos pertinentes ao aprendizado de medidas de tendência central, ainda são vistos pela maioria dos estudantes pesquisados, com a necessidade de atenção voltada para amenizar e/ou modificar o retrospecto negativo em relação ao seu estudo e aprendizado.

Quanto ao grau de dificuldade em resolver problemas envolvendo o cálculo de média aritmética com números decimais, os resultados apontados na pesquisa revelaram que 50% dos discentes pesquisados classificaram como sendo regular; 29% como difícil, 10% como muito difícil, 10% como fácil e apenas 1% dos entrevistados classificaram como muito fácil. Acreditamos que esses indicadores representam o reflexo da deficiência no processo de ensino e aprendizagem nas operações com números decimais e com isso de certa forma dificulta o cálculo da média.

Fonseca (2005) realizou um estudo diagnóstico junto a 30 estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública de São Paulo, com o objetivo de analisar a compreensão dos estudantes nas questões que envolviam decimais, e observar os erros cometidos na operação de divisão dos números racionais decimais.

Segundo Fonseca (2005), os estudantes, ao efetuarem o algoritmo da divisão, não iniciaram igualando as casas decimais, mostrando assim que não possuem compreensão do significado da vírgula no divisor e do zero no quociente. Segundo este autor, os estudantes conseguiram identificar os termos décimos, centésimos e milésimos, mas não atribuíram significados aos mesmos quando inseridos na divisão; mostraram que conhecem a técnica da divisão, porém, não refletem sobre a utilização da mesma, pois apresentaram problema em continuar a divisão até o final.

Outro conteúdo destacado pelos estudantes com muita relevância na pesquisa foi resolver problemas em que conhecemos o valor da média aritmética e queremos determinar um dos termos da equação algébrica, os resultados descritos revelaram que 45% dos discentes pesquisados classificaram como sendo difícil; 28% como regular, 11% como muito difícil, 12% como fácil e apenas 4% dos entrevistados classificaram como muito fácil. Podemos perceber que esses estudantes não conseguem compreender os problemas envolvendo média aritmética e tão pouco traduzi-los em linguagem matemática ou operaram o algoritmo de forma equivocada.

O ensino da álgebra inicia no 7º ano do ensino fundamental II aprofundando-se no 8º ano e posteriormente é encontrada diluída em outros assuntos matemáticos. A importância da mesma é destacada em diversos estudos e documentos oficiais como nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115)

Desde os anos iniciais, no ensino fundamental, os professores deveriam introduzir o tema, apresentando aos estudantes problemas cujo pensamento algébrico estivesse presente e cuja resolução também pudesse ocorrer através da aritmética.

Gil (2008) analisou que a interpretação de problemas algébricos, que exigem uma tradução da “linguagem corrente” para a linguagem simbólica apresenta obstáculos, assim como, à relação entre a álgebra e a aritmética. Ainda ressalta que no estudo de álgebra, o aluno utiliza muito esta codificação já que envolve uma interpretação, exigindo a tradução da “linguagem escrita” para a linguagem matemática, e muitas vezes, as dificuldades apresentadas pelos estudantes na tradução de situação da “linguagem corrente” para a linguagem formal residem na interpretação.

Para Feio (2009), muitos estudantes parecem ter dificuldades para resolver certos tipos de problemas algébricos, em particular, quando antes da resolução envolvem uma tradução da “linguagem escrita corrente” para a linguagem matemática.

Quanto à resolução de problemas envolvendo o cálculo de mediana a partir de tabelas, os percentuais obtidos revelaram que 34% dos discentes pesquisados classificaram como sendo regular; 31% como difícil, 20% como fácil, 8% como muito difícil e apenas 7% dos entrevistados classificaram como muito fácil.

Para entender as tabelas apresentadas em relatórios estatísticos o cidadão precisa de no mínimo uma alfabetização estatística, que de acordo com Cardona (2011, p.236), encontramos a seguinte afirmação:

> “a alfabetização estatística é um elemento primordial para os indivíduos da sociedade moderna. O cidadão comum necessita formação estatística essencial para entender o entorno em que se desempenha, para avaliar criticamente a informação estatística relacionada com contextos sociais nos quais se está imerso e para tomar decisões informadas”.

Compreender esse contexto não é tarefa fácil, tendo em vista que os órgãos Federais, Estaduais e Municipais geralmente mostram os dados de forma muito resumida. O pensamento estatístico para Wodewotzki, Jacobini, Campos & Ferreira (2010) é desenvolvido à medida que os educandos possam relacionar dados com situações concretas e aplicadas, percebam que os resultados de uma pesquisa estatística indicam uma tendência e não uma certeza, interpretem os resultados e explorem os dados sob diferentes ângulos.

Por isso que os discentes precisam de uma boa formação no campo da Estatística para entender essa gama de informações que todos os dias aparecem nos mais variados meios de comunicação. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio recomendam

> Durante o ensino médio, os alunos precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Isso inclui entender a relação entre síntese estatística, representações gráficas e dados primitivos. (BRASIL, 2006, p.79)

O cálculo da mediana de uma distribuição de frequência parece complexo para alguns discentes, pois eles devem prestar atenção se a distribuição apresenta um número par ou ímpar de elementos e isso muitas das vezes não é levado em conta por uma boa parte dos estudantes.

Percebe-se que esses discentes já trazem algumas deficiências do Ensino Fundamental. Essa situação deve ser contornada durante o Ensino Médio para que eles não levem para o Ensino Superior essas dificuldades.

Quanto à resolução de problemas envolvendo o cálculo de mediana a partir de gráficos, os percentuais obtidos revelaram que 40% dos discentes pesquisados classificaram como sendo regular; 25% como difícil, 16% como fácil, 10% como muito difícil e apenas 9% dos entrevistados classificaram como muito fácil.

Esse grau de dificuldade dos estudantes é preocupante, pois o ensino de estatística básica teoricamente já foi estudado no Ensino Fundamental.

Busin & Oro (2012) fizeram uma pesquisa com dezesseis estudantes da oitava série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública do município de Lagoa Vermelha no Rio Grande do Sul cujo objetivo foi analisar os conhecimentos relativos aos conteúdos que contemplam o bloco Tratamento da Informação. Os autores usaram para esse trabalho a matriz de referência da Prova Brasil, cujo tema quatro: Tratamento da informação é dividido em dois descritores: (D36), com o intuito de resolver problemas envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos e (D37), que busca associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa. Os resultados mostram que o estudo da Matemática torna-se atrativo aos estudantes, quando conseguimos transpor a Matemática da sala de aula para a Matemática da vida real, e o estudo do Tratamento da informação, faz com que essa relação aconteça, dando sentido a todos os cálculos e situações problemas estudado na sala de aula. Schneider & Andreis (2014, p.3), destacam que:

> “A educação estatística visa uma compreensão crítica e tem como objetivo desenvolver nos alunos a criticidade e o engajamento de forma que o aluno seja capaz de pensar sobre as questões políticas e sociais que são relevantes para a sua comunidade e região, contribuindo dessa forma para a melhoria da vida dessas pessoas”.

Os resultados mostram que os discentes estão finalizando o Ensino Médio, com pouco ou quase nenhum conhecimento sobre Estatística, em especial sobre as medidas de tendência central. Essas dificuldades encontradas nessa pesquisa, e em outros registrados nesse trabalho, mostram que se não forem corrigidas essas deficiências, os discentes encontrarão problemas na leitura e interpretação de gráficos e tabelas apresentados em jornais, revistas, periódicos, etc.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Nessa seção descrevemos nossa proposta didática, primeiramente nos debruçando na metodologia de ensino que fundamentará as atividades, e em seguida expondo os objetivos que esperamos que sejam alcançados para cada uma delas, e assim detalharemos os passos das aulas a serem aplicadas, bem como, faremos a descrição das atividades que comporão cada momento.

ATIVIDADE 1

Título: Média aritmética

Objetivo: Conceituar média aritmética.

Material: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento:

- Resolva cada questão proposta;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

1. Um médico realiza atendimento a uma comunidade em três dias da semana. No primeiro dia ele atendeu 31 pacientes, 27 no segundo e 26 no terceiro dia. Se o médico tivesse atendido o mesmo total de pacientes distribuídos igualmente nos três dias, quantos pacientes teria atendido por dia?

2. Em um restaurante há 4 garçons. No final de cada dia, o total das gorjetas recebidas são repartidas igualmente entre eles. Em determinado dia, cada um dos garçons recebeu as seguintes quantias em dinheiro: Alberto 61 reais, Carlos 63 reais, Fernando 62 reais e Gustavo 54 reais. Nessas condições, qual a quantia em dinheiro que ficou para cada garçom depois de repartirem as gorjetas desse dia?

3. Em uma fábrica no município do Belém, existem 5 máquinas F, G, H, I, e J que produzem peças metálicas. Sabe-se que F, G, H, I, e J produzem, respectivamente, 98, 103, 96, 101 e 102 peças. Nessas condições, qual a produção de peças distribuídas igualmente nas cinco máquinas dessa fábrica?

4. Um colégio realizou uma excursão ao forte do presépio com seus alunos do ensino médio e para tanto realizou a distribuição dos alunos nos ônibus alugados pela escola da seguinte maneira: 28 alunos no primeiro ônibus, 27 alunos no segundo ônibus, 31 no terceiro ônibus, 33 no quarto ônibus, 32 no quinto ônibus e 29 no sexto ônibus. Se o diretor do colégio resolvesse distribuir os alunos de modo que cada ônibus fique com a mesma quantidade, quantos alunos cada ônibus levou?

5. Uma determinada rodovia é conhecida por seu alto índice de acidentes. Nos últimos sete meses foram registrados, respectivamente, 18, 21, 19, 22, 17, 23 e 20 acidentes. Nessas condições, qual a quantidade de acidentes registrados igualmente nos sete meses nessa rodovia?

Com base nas resoluções anteriores preencha o quadro abaixo.

Questão	O que a questão pede?	Cálculo realizado	Resultado
1			
2			
3			
4			
5			

Observação

Análise a *priori* da atividade 01: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar todas as parcelas e dividir o resultado pela quantidade de parcelas somadas serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de média aritmética. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de divisão.

Questões de Aprofundamento 1

1. As idades dos consumidores de produtos light estão indicados a seguir: 40, 50, 30, 80, 20, 30, 60, 70, 50, 55, 45 e 30 anos. Qual a média de idade dos consumidores?

2. As cifras, em reais, representam o gasto diário de farinha de trigo de uma padaria em 10 dias úteis consecutivos: 514, 664, 671, 631, 488, 570, 483, 484, 554 e 612. Qual a média de gasto de farinha de trigo nesse período?

3. Em um grupo de dez amigos suas idades são 19 anos, 20 anos, 22 anos, 16 anos, 14 anos, 18 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos e 20 anos. Nessas condições, qual a média de idade desse grupo?

4. A média aritmética das idades dos 30 alunos de uma turma do ensino médio é 18 anos. Qual é a soma dessas idades?

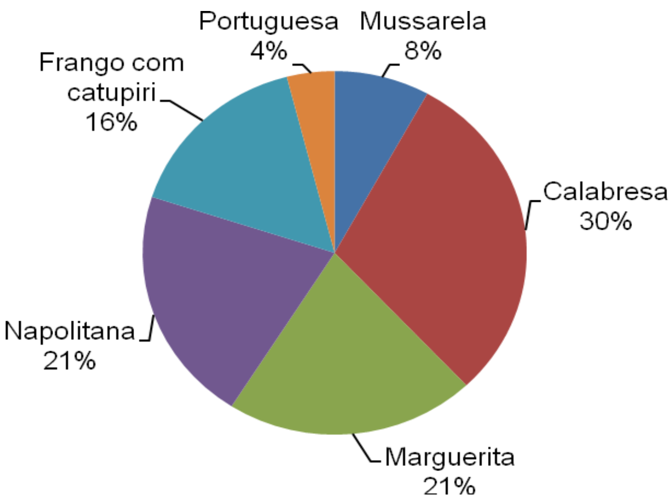
5. Durante os sete primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Qual a média de gols por partida?

6. A média mínima para a aprovação na disciplina matemática é 8,0. Se um estudante obtém as notas 7,5 ; 8,0 ; 3,5 ; 9,0 ; 7,5 ; 10,0 ; 8,0 e 7,9 nos trabalhos mensais da disciplina em questão, pergunta-se: ele foi ou não aprovado?

7. De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Qual a media de gastos dessa pessoa por dia?

8. Nas eleições em 1º turno em todo o país, no dia 3 de outubro de 1996, inaugurou-se o voto eletrônico. Numa determinada seção eleitoral, cinco eleitores demoraram para votar, respectivamente: 1min 4s, 1min 32s, 1min 12s, 1min 52s e 1min 40s. Nessas condições, qual a média aritmética do tempo de votação (em minutos e segundos) desses eleitores?

9. Há 50 mil pizzarias no Brasil, entre estabelecimentos formais e informais. Metade delas fica em São Paulo, seguida por Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Bahia. Cada cidade tem suas preferências.



Revista Super interessante, ed. 300, jan. 2012, p. 26-27 (adaptado).

A partir dos sabores apresentados, qual é a média percentual entre o sabor mais pedido e o menos pedido?

10. Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetiva a ação?

ATIVIDADE 2

Título: Propriedade da Média aritmética I

Objetivo: Descobrir uma propriedade aditiva da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1ª parcela	2ª parcela	3ª parcela	4ª parcela	1ª Média	Z, P, Q, K	1ª parcela + Z	2ª parcela + P	3ª parcela + Q	4ª parcela + K	2ª Média
3	4	6	7		Z = 1 P = 1 Q = 1 K = 1					
10	11	13	14		Z = 2 P = 2 Q = 2 K = 2					
26	28	32	34		Z = 3 P = 3 Q = 3 K = 3					
42	49	51	58		Z = 4 P = 4 Q = 4 K = 4					
63	66	74	77		Z = 5 P = 5 Q = 5 K = 5					
2	3	5	6		Z = 1 P = 2 Q = 3 K = 6					
12	13	15	16		Z = 2 P = 3 Q = 4 K = 7					
20	22	26	28		Z = 2 P = 3 Q = 5 K = 6					
32	39	41	48		Z = 3 P = 4 Q = 6 K = 7					
44	51	53	60		Z = 4 P = 5 Q = 7 K = 8					

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 02: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é somada por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade aditiva da média aritmética.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?
   Para esta pergunta esperamos que os alunos cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética dos valores dados.
2) Em seguida o que foi realizado?
   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: foi adicionado o valor de Z a cada parcela da média aritmética calculada.
3) E por fim o que foi realizado?
   Para esta questão esperamos que a resposta seja: foi calculada a média aritmética dos valores obtidos com a adição do valor de Z.
4) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?
   A expectativa é que os estudantes percebam que o resultado da segunda média aritmética é igual ao valor da primeira média aritmética adicionado do valor de Z. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos adicionem o valor de Z ao valor da primeira média aritmética e comparem com o valor da segunda média aritmética. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for adicionado um valor fixo aos valores de uma média aritmética a média aritmética calculada terá um aumento do mesmo valor adicionado as parcelas.

Questões de Aprofundamento 2

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 13, 14, 15, 18 e 20 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Se acrescentarmos 2 anos a cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 212, 213, 214, 217 e 219 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?
b) Se acrescentarmos 100 kwh a cada residência desse grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 80, 81, 82, 85 e 87 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?
b) Se acrescentarmos 5 kg a cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 887, 888, 889, 892 e 894 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Se acrescentarmos 10 reais a cada trabalhador desse grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 16, 15, 17, 16, 16, 17 e 22 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a três anos, qual será a média aritmética da idade desses alunos?

6. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 18, 17, 19, 18, 18, 19 e 24 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a quatro anos, qual será a média aritmética da idade desses alunos?

7. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 22, 21, 23, 22, 22, 23 e 28 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a cinco anos, qual será a média aritmética da idade desses alunos?

8. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 28, 27, 29, 28, 28, 29 e 34 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a dez anos, qual será a média aritmética da idade desses professores?

9. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 32, 31, 33, 32, 32, 33 e 38 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a vinte anos, qual será a média aritmética da idade desses professores?

10. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 34, 33, 35, 34, 34, 35 e 40 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Daqui a trinta anos, qual será a média aritmética da idade desses professores?

ATIVIDADE 3

Título: Propriedade da Média aritmética II

Objetivo: Descobrir uma propriedade aditiva da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1ª parcela	2ª parcela	3ª parcela	4ª parcela	1ª Média	Z, P, Q, K	1ª parcela - Z	2ª parcela - P	3ª parcela - Q	4ª parcela - K	2ª Média
4	5	7	8		Z = 1 P = 1 Q = 1 K = 1					
11	12	16	17		Z = 2 P = 2 Q = 2 K = 2					
26	28	32	34		Z = 3 P = 3 Q = 3 K = 3					
42	49	51	58		Z = 4 P = 4 Q = 4 K = 4					
63	66	74	77		Z = 5 P = 5 Q = 5 K = 5					
11	12	19	22		Z = 4 P = 2 Q = 5 K = 1					
18	19	28	31		Z = 3 P = 2 Q = 5 K = 6					
24	27	42	47		Z = 7 P = 2 Q = 6 K = 9					
42	44	54	60		Z = 4 P = 3 Q = 5 K = 8					
50	55	73	78		Z = 6 P = 5 Q = 8 K = 9					

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 03: Por meio da observação das regularidades, os estudantes perceberão que ao subtrair um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é subtraída por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade aditiva da média aritmética.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?
   Para esta pergunta esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética dos valores dados.
2) Em seguida o que foi realizado?
   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: foi subtraído o valor de Z a cada parcela da média aritmética calculada.
3) E por fim o que foi realizado?
   Para esta questão esperamos que a resposta seja: foi calculada a média aritmética dos valores obtidos com a subtração do valor de Z.
4) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?
   A expectativa é que os estudantes percebam que o resultado da segunda média aritmética é igual ao valor da primeira média aritmética subtraído do valor de Z. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos subtraiam o valor de Z ao valor da primeira média aritmética e comparem com o valor da segunda média aritmética. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for subtraído um valor fixo aos valores de uma média aritmética a média aritmética calculada terá uma redução do mesmo valor subtraído as parcelas.

Questões de Aprofundamento 3

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 14, 15, 16, 17 e 21 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Se retirarmos 3 anos de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 215, 216, 217, 220 e 222 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?

b) Se retirarmos 90 kwh de cada residência desse grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 82, 83, 84, 87 e 89 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?

b) Se retirarmos 8 kg de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 907, 908, 909, 912 e 914 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?

b) Se retirarmos 20 reais de cada trabalhador desse grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 16, 15, 17, 16, 16, 17 e 22 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há três anos, qual era a média aritmética da idade desses alunos?

6. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 18, 17, 19, 18, 18, 19 e 24 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há quatro anos, qual era a média aritmética da idade desses alunos?

7. Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 22, 21, 23, 22, 22, 23 e 28 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há cinco anos, qual era a média aritmética da idade desses alunos?

8. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 28, 27, 29, 28, 28, 29 e 34 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há dez anos, qual era a média aritmética da idade desses professores?

9. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 32, 31, 33, 32, 32, 33 e 38 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há vinte anos, qual era a média aritmética da idade desses professores?

10. Considere um grupo de professores com as seguintes idades 34, 33, 35, 34, 34, 35 e 40 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há trinta anos, qual era a média aritmética da idade desses professores?

ATIVIDADE 4

Título: Propriedade da Média aritmética III

Objetivo: Descobrir uma propriedade multiplicativa da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1ª parcela	2ª parcela	3ª parcela	4ª parcela	1ª Média	Z, P, Q, K	1ª parcela x Z	2ª parcela x P	3ª parcela x Q	4ª parcela x K	2ª Média
10	11	13	14		Z = 2 P = 2 Q = 2 K = 2					
26	28	32	34		Z = 3 P = 3 Q = 3 K = 3					
52	59	61	68		Z = 4 P = 4 Q = 4 K = 4					
93	96	104	107		Z = 5 P = 5 Q = 5 K = 5					

98	100	114	120		Z = 6 P = 6 Q = 6 K = 6					
10	11	12	19		Z = 3 P = 2 Q = 1 K = 4					
16	20	28	32		Z = 4 P = 2 Q = 3 K = 6					
24	26	42	48		Z = 2 P = 5 Q = 3 K = 1					
30	36	42	52		Z = 4 P = 5 Q = 2 K = 3					
40	44	54	62		Z = 2 P = 6 Q = 1 K = 5					

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 04: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao multiplicar um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é multiplicada por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade multiplicativa da média aritmética.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?
   Para esta pergunta esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética dos valores dados.
2) Em seguida o que foi realizado?
   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: foi multiplicado o valor de Z a cada parcela da média aritmética calculada.

3) E por fim o que foi realizado?

   Para esta questão esperamos que a resposta seja: foi calculada a média aritmética dos valores obtidos com a multiplicação do valor de Z.

4) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?

   A expectativa é que os estudantes percebam que o resultado da segunda média aritmética é igual ao valor da primeira média aritmética multiplicado do valor de Z. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos multipliquem o valor de Z ao valor da primeira média aritmética e comparem com o valor da segunda média aritmética. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for multiplicado um valor fixo aos valores de uma média aritmética a média aritmética calculada terá uma multiplicação do mesmo valor multiplicado as parcelas.

Questões de Aprofundamento 4

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 16, 17, 18, 21 e 23 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Se duplicarmos a idade de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 220, 221, 222, 225 e 227 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?

b) Se triplicarmos o consumo de cada residência desse grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 80, 81, 82, 85 e 87 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?
b) Se quadriplicarmos o peso de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 887, 888, 889, 892 e 894 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Se quintuplicarmos o salário de cada trabalhador desse grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Uma dentista distribui escovas de dente para várias crianças em escolas públicas. Assim, foram fornecidas em cada escola 6, 5, 4, 8 e 7 escovas de dente.

a) Qual é a média aritmética das escovas de dente distribuídas por escola?
b) Se sextuplicarmos a quantidade de escovas fornecidas em cada escola, qual será a nova média aritmética?

6. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 20, 10, 40, 30, 60, 50 e 70.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?
b) Se na próxima campanha tiver um crescimento de 10% em celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

7. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 20, 10, 40, 30, 60, 50 e 70.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?

b) Se na próxima campanha tiver um crescimento de 20% em celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

8. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 20, 10, 40, 30, 60, 50 e 70.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?
b) Se na próxima campanha tiver um crescimento de 30% em celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

9. É dado um conjunto de dez números cuja média aritmética é 32. Cada número desse conjunto é multiplicado por 2. Qual é a média aritmética dos dez números assim obtidos?

10. É dado um conjunto de quinze números cuja média aritmética é 16. Cada número desse conjunto é multiplicado por 4. Qual é a média aritmética dos quinze números assim obtidos?

ATIVIDADE 5

Título: Propriedade da Média aritmética IV

Objetivo: Descobrir uma propriedade multiplicativa da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1ª parcela	2ª parcela	3ª parcela	4ª parcela	1ª Média	Z, P, Q, K	1ª parcela ÷ Z	2ª parcela ÷ P	3ª parcela ÷ Q	4ª parcela ÷ K	2ª Média
6	12	14	16		Z = 2 P = 2 Q = 2 K = 2					
12	18	30	36		Z = 3 P = 3 Q = 3 K = 3					
24	32	40	48		Z = 4 P = 4 Q = 4 K = 4					
15	20	25	40		Z = 5 P = 5 Q = 5 K = 5					

18	24	36	42		Z = 6 P = 6 Q = 6 K = 6					
9	12	15	32		Z = 3 P = 2 Q = 1 K = 4					
6	32	16	42		Z = 3 P = 8 Q = 2 K = 1					
24	26	42	56		Z = 4 P = 2 Q = 3 K = 8					
30	36	42	60		Z = 5 P = 4 Q = 2 K = 3					
40	48	60	80		Z = 5 P = 4 Q = 3 K = 2					

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 05: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao dividir por um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é dividida por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade multiplicativa da média aritmética.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?

   Para esta pergunta esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética dos valores dados.

2) Em seguida o que foi realizado?

   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: foi dividido o valor de Z a cada parcela da média aritmética calculada.

3) E por fim o que foi realizado?

   Para esta questão esperamos que a resposta seja: foi calculada a média aritmética dos valores obtidos com a divisão do valor de Z.

4) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?

   A expectativa é que os estudantes percebam que o resultado da segunda média aritmética é igual ao valor da primeira média aritmética dividido do valor de Z. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos dividam o valor de Z ao valor da primeira média aritmética e comparem com o valor da segunda média aritmética. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade aditiva da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for dividido um valor fixo aos valores de uma média aritmética a média aritmética calculada terá uma divisão do mesmo valor dividido as parcelas.

Questões de Aprofundamento 5

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 20, 22, 24, 26 e 28 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Se dividirmos por 2 anos a idade de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 321, 324, 330, 336 e 339 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?

b) Se dividirmos por 3 kwh o consumo de cada residência desse grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 60, 70, 85, 90, 95 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?
b) Se dividirmos por 5 kg o peso de cada pessoa desse grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 860, 880, 920, 960 e 980 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Se dividirmos por 20 reais o salário de cada trabalhador desse grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Uma dentista distribui escovas de dente para várias crianças em escolas públicas. Assim, foram fornecidas em cada escola 6, 10, 4, 8 e 2 escovas de dente.

a) Qual é a média aritmética das escovas de dente distribuídas por escola?
b) Se reduzirmos a quantidade de escovas fornecidas em cada escola pela metade, qual será a nova média aritmética?

6. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 60, 120, 180, 240, 300 e 360.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?
b) Se na próxima campanha tiver uma redução de um terço dos celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

7. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 60, 120, 180, 240, 300 e 360.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?

b) Se na próxima campanha tiver uma redução de um quinto dos celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

8. Foi realizada uma campanha de conscientização sobre a reciclagem de celulares para garantir o uso sustentável de recursos naturais e para reduzir a poluição. As quantidades de celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade foram 60, 120, 180, 240, 300 e 360.

a) Qual é a média aritmética de celulares recolhidos?
b) Se na próxima campanha tiver uma redução de um décimo dos celulares velhos recolhidos em vários pontos da cidade, qual será a nova média aritmética?

9. É dado um conjunto de dez números cuja média aritmética é 32. Cada número desse conjunto é dividido por 2. Qual é a média aritmética dos dez números assim obtidos?

10. É dado um conjunto de quinze números cuja média aritmética é 16. Cada número desse conjunto é dividido por 4. Qual é a média aritmética dos quinze números assim obtidos?

ATIVIDADE 6

Título: Propriedade da Média aritmética V

Objetivo: Descobrir uma propriedade da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1º Conjunto de valores	Média do 1º conjunto	2º Conjunto de valores	Média do 2º conjunto
8, 13, 15		2, 13, 15	
6, 7, 9, 10		2, 7, 9, 10	
18, 20, 23, 26, 28		3, 20, 23, 26, 28	
90, 100, 110, 120, 130, 140		30, 100, 110, 120, 130, 140	

8, 12, 13		8, 12, 19	
5, 7, 12, 16		5, 7, 12, 28	
14, 18, 26, 48, 54		14, 18, 26, 48, 64	
95, 100, 115, 125, 135, 150		95, 100, 115, 125, 135, 630	

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 06: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao substituir os valores extremos de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade da média aritmética com substituição de valores extremos.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?
   Para esta pergunta esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética do primeiro conjunto de valores dados.
2) Em seguida o que foi realizado?
   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética do segundo conjunto de valores dados.
3) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?
   A expectativa é que os estudantes percebam que ao substituir os valores extremos de um conjunto de números o resultado da segunda média

aritmética será afetado por essa mudança de valores. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos realizem as permutas dos primeiros elementos de cada conjunto e comparem os resultados obtidos das médias aritméticas. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for substituído os valores extremos de um conjunto de números o resultado da média aritmética será afetado por essa mudança de valores.

Questões de Aprofundamento 6

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 16, 18, 20, 23, 24 e 25 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Excluindo-se o mais novo deles, que tem 16 anos, e acrescentando uma pessoa de 4 anos ao grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 212, 213, 214, 217 e 219 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia elétrica desse grupo?
b) Excluindo-se o menor consumo deles, que foi de 212 kwh, e acrescentando um consumo de 137 kwh ao grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de amigos com os seguintes pesos 80, 50, 30, 35 e 90 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?
b) Excluindo-se o menos pesado deles, que tem 30 kg, e acrescentando um amigo de 20 kg ao grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 1.000, 1.100, 1.200, 1.300 e 1.400 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Excluindo-se o menor salário deles, que é 1.000 reais, e acrescentando um trabalhador com salário de 500 reais ao grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 16, 18, 20, 23, 24 e 25 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Excluindo-se o mais velho deles, que tem 25 anos, e acrescentando uma pessoa de 31 anos ao grupo, qual será a nova média aritmética?

6. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 212, 213, 214, 217 e 219 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia elétrica desse grupo?
b) Excluindo-se o maior consumo deles, que foi de 219 kwh, e acrescentando um consumo de 234 kwh ao grupo, qual será a nova média aritmética?

7. Considere um grupo de amigos com os seguintes pesos 80, 50, 30, 35 e 90 kg.

a) Qual é a média aritmética de peso desse grupo?
b) Excluindo-se o mais pesado deles, que tem 90 kg, e acrescentando um amigo de 110 kg ao grupo, qual será a nova média aritmética?

8. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 1.000, 1.100, 1.200, 1.300 e 1.400 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Excluindo-se o maior salário deles, que é 1.400 reais, e acrescentando um trabalhador com salário de 2.900 reais ao grupo, qual será a nova média aritmética?

9. A média aritmética de 12 números é igual a 14. Sabe-se que o maior desses números é igual a 42. Retirando-se o número 42 e acrescentando 66, qual será a nova média?

10. A média aritmética de 12 números é igual a 18. Sabe-se que o menor desses números é igual a 40. Retirando-se o número 40 e acrescentando 4, qual será a nova média?

ATIVIDADE 7

Título: Propriedade da Média aritmética VI

Objetivo: Descobrir uma propriedade da média aritmética.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

1º Conjunto de valores	Média do 1º conjunto	2º Conjunto de valores	Média do 2º conjunto
6, 10, 14		6, 14	
4, 6, 8, 10		6, 8, 10	
18, 24, 30, 42, 56		18, 24, 42, 56	
90, 100, 110, 120, 130, 140		90, 100, 110, 120, 140	
8, 12, 16		4, 8, 12, 16	
5, 7, 10, 14		5, 7, 10, 14, 29	
19, 24, 32, 47, 58		19, 24, 30, 32, 47, 58	
95, 100, 115, 125, 135, 150		95, 100, 115, 125, 134, 135, 150	

Observação

Conclusão

Análise a *priori* da atividade 07: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao inserir ou retirar qualquer valor de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade da média aritmética com inclusão e exclusão de valores.

Quando houver a situação de que os estudantes não percebam a relação faremos as seguintes perguntas, visando auxiliar na percepção da propriedade:

1) O que foi realizado inicialmente?
   Para esta pergunta esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética do primeiro conjunto de valores dados.
2) Em seguida o que foi realizado?
   Neste momento esperamos que os estudantes cheguem a seguinte resposta: calculada a média aritmética do segundo conjunto de valores dados.
3) O que foi observado comparando os resultados da primeira média com os resultados da segunda média?
   A expectativa é que os estudantes percebam que ao inserir ou retirar qualquer valor de um conjunto de números o resultado da segunda média aritmética será afetado por essa mudança de valores. Caso essa resposta não seja apresentada solicitaremos que os grupos realizem a retirada de qualquer elemento dos três primeiros conjuntos ou acrescente qualquer valor nos demais conjuntos e comparem os resultados obtidos das médias aritméticas. Com este procedimento esperamos que a propriedade em questão seja percebida pelos estudantes.

Quanto à sistematização da propriedade temos a expectativa de que em virtude da experiência em relação obtida nas atividades anteriores os estudantes não terão dificuldade em elaborar um enunciado adequado para apresentar a propriedade da média aritmética. Caso isto não aconteça a partir das redações propostas pela turma elaboraremos um enunciado que satisfaça as exigências de adequação para apresentar a propriedade da média aritmética.

Como resultado da sistematização esperamos obter a seguinte afirmação: Se for inserido ou retirado qualquer valor de um conjunto de números o resultado da média aritmética será afetado por essa mudança de valores.

Questões de Aprofundamento 7

1. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 32, 70, 83, 64, 41, e 28 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Acrescentando uma pessoa de 25 anos ao grupo, qual será a nova média aritmética?

2. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 210, 211, 212, 215 e 217 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?
b) Acrescentando um consumo de 231 kwh ao grupo, qual será a nova média aritmética?

3. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 74, 75, 76, 79 e 81 kg.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Acrescentando uma pessoa de 47 kg ao grupo, qual será a nova média aritmética?

4. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 1.050, 1.060, 1.100, 1.140 e 1.160 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Acrescentando um trabalhador com salário de 1.120 reais ao grupo, qual será a nova média aritmética?

5. Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 32, 60, 54, 52, 40, e 26 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Excluindo uma pessoa de 54 anos desse grupo, qual será a nova média aritmética?

6. Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 144, 160, 145, 149 e 162 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?
b) Excluindo um consumo de 160 kwh desse grupo, qual será a nova média aritmética?

7. Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 24, 32, 41, 43 e 45 kg.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?
b) Excluindo uma pessoa de 41 kg desse grupo, qual será a nova média aritmética?

8. Considere um grupo de trabalhadores com os seguintes salários 1.020, 1.030, 1.130, 1.170 e 1.200 reais.

a) Qual é a média aritmética de salário desse grupo?
b) Excluindo um trabalhador com salário de 1.030 reais desse grupo, qual será a nova média aritmética?

9. Um conjunto com 20 números possui a média aritmética igual a 45. Dos números que fazem parte do conjunto, são retirados os números 18 e 54. Qual a média dos números que restaram?

10. A média aritmética de um conjunto de 16 números é 12. Se os números 14, 18, 26 e 30 forem acrescentados ao conjunto, qual a média aritmética do novo conjunto?

ATIVIDADE 8

Título: Média ponderada

Objetivo: Conceituar média aritmética ponderada.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimentos

- Resolva cada questão proposta;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

1. Considere dez baldes de água, tal que cinco deles contém 6L cada um, três outros contém 2L cada um, e os dois restantes contém 7L cada um. Se toda essa água fosse igualmente distribuída entre os baldes, com quantos litros ficaria cada um?

2. Considere nove caixas de papelão, tal que quatro delas contém 50 salgadinhos cada uma, três outras contém 30 salgadinhos cada uma, e as duas restantes contém 35 salgadinhos cada uma. Se todo esse salgadinho fosse igualmente distribuído entre as caixas, com quantos salgadinhos ficaria cada uma?

3. Considere doze salas de aula, tal que cinco delas contém 40 carteiras cada uma, quatro outras contém 25 carteiras cada uma, e as três restantes contém 20 carteiras cada uma. Se toda essa carteira fosse igualmente distribuída entre as salas, com quantas carteiras ficaria cada uma?

4. Considere quatorze enfermarias de um hospital, tal que cinco delas contém 4 leitos cada uma, quatro delas contém 5 leitos cada uma, três outras contém 8 leitos cada uma, e as duas restantes contém 10 leitos cada uma. Se todo esse leito fosse igualmente distribuído entre as enfermarias, com quantos leitos ficaria cada uma?

5. Considere dezoito setores de uma empresa, tal que seis deles contém 3 funcionários cada um, cinco deles contém 4 funcionários cada um, quatro outros contém 7 funcionários cada um, e os três restantes contém 8 funcionários cada um. Se todo esse funcionário fosse igualmente distribuído entre os setores, com quantos funcionários ficaria cada um?

Com base nas resoluções anteriores preencha o quadro abaixo.

Questão	O que a questão pede?	Cálculo realizado	Resultado
1			
2			
3			
4			
5			

Observação

Análise a *priori* da atividade 08: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar todos os produtos de cada parcela com seu respectivo peso e dividir o resultado pelo somatório dos pesos das parcelas, assim serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de média aritmética ponderada. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de multiplicação e divisão.

Questões de Aprofundamento 8

1. Numa multinacional, que tem 800 operários, 600 recebem R$ 60,00 e os outros 200 recebem R$ 40,00 por hora. Qual o salário médio por hora desses operários?

2. Numa padaria, comprei 5 doces a R$ 1,80 cada um, 3 doces a R$ 1,50 e 2 doces a R$ 2,50 cada. Qual o preço médio por doce?

3. Qual é a média de idade de um grupo em que há 10 pessoas de 15 anos, 6 pessoas de 16 e 5 pessoas de 18 anos?

4. No processo de seleção de certa instituição de ensino superior, a nota do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) obtida pelo candidato tem peso 6, e a obtida no vestibular, peso 4. Se um candidato obtiver nota 80 no ENEM e 60 no vestibular, qual será sua média final?

5. Em 2017, uma universidade pagou cada um de seus 10 auxiliares um salário mensal de R$ 2.000,00; a cada um de seus 30 assistentes R$ 3.000,00; a cada um dos 20 adjuntos R$ 4.000,00 e a cada um de seus 40 titulares R$ 4.500,00. Qual o salário médio dos 100 docentes dessa universidade?

6. A avaliação dos candidatos inscritos em um concurso é feita em três etapas distintas, sendo a média final obtida através da média ponderada da pontuação obtida em cada uma delas. Sabendo-se que os pesos da primeira, segunda e terceira etapas são, respectivamente, 3, 4 e 2. Nessas condições, qual a média final

de um candidato que fez 65 pontos na primeira etapa, 51 pontos na segunda e 75 pontos na terceira?

7. Uma loja vende cinco produtos básicos A, B, C, D, E. O lucro por unidade comercializada destes produtos vale respectivamente R$ 200,00; R$ 300,00; R$ 500,00; R$ 1.000,00 e R$ 5.000,00. A loja vendeu em determinado mês 15; 30; 20; 10 e 5 unidades respectivamente. Qual foi o lucro médio por unidade comercializada por esta loja?

8. A tabela representa o gasto semanal com alimentação de um grupo de 10 famílias:

Gasto por família (em reais)	126,00	172,00	342,00
Número de famílias	5	3	2

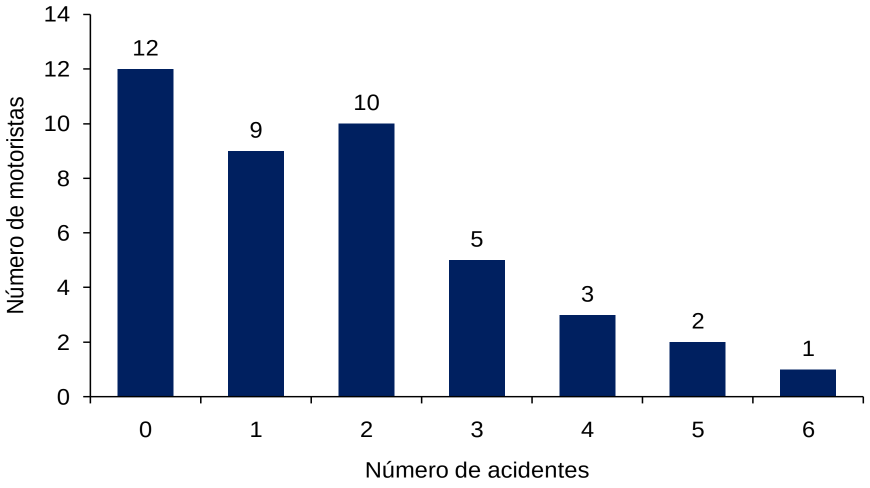
Nessas condições, qual o gasto semanal médio por família?

9. Os salários dos trabalhadores de uma empresa de transportes são os indicados no quadro a seguir:

Salário (em reais)	880,00	920,00	1100,00	1200,00	1500,00	2000,00
Número de trabalhadores	10	4	5	7	9	5

Nessas condições, qual o salário médio dos trabalhadores dessa empresa?

10. O gráfico indica o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 42 motoristas de táxi em uma determinada cidade, no período de um ano.



Nessas condições, qual a média de acidentes por motorista?

ATIVIDADE 9

Título: Mediana

Objetivo: Conceituar mediana.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimentos

Preencha o quadro a seguir:

Sequência	Número de elementos da sequência	Elementos da sequência em ordem crescente	A sequência de ordem crescente tem elemento central?		Elementos da sequência em ordem decrescente	A sequência de ordem decrescente tem elemento central?	
			Sim	Não		Sim	Não
6, 4, 9							
5, 2, 7							
4, 8, 6							
9, 7, 5, 11							
8, 3, 9, 6							
8, 6, 10, 14							

8, 10, 7, 12, 6							
6, 9, 12, 14, 7, 4							
2, 9, 7, 8, 4, 5, 10							
27, 19, 13, 21, 18, 33, 9, 38							
Observação							

Análise a *priori* da atividade 09: Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que o valor que divide uma sequência ordenada de tal forma que pelo menos a metade ou cinquenta por cento dos números sejam iguais ou maiores do que ela, e que haja pelo menos outra metade ou cinquenta por cento de números menores do que ela, assim serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de mediana. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de divisão.

Questões de Aprofundamento 9

1. Em um grupo de sete amigos suas idades são 19 anos, 22 anos, 14 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos e 20 anos. Nessas condições, qual a idade mediana desse grupo?

2. Durante os sete primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 4, 3, 1, 1, 5, 4 e 2 gols. Qual a mediana de gols por partida?

3. De segunda-feira a sexta, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, e 14 reais. Qual o gasto mediano com alimentação dessa pessoa?

4. Um técnico de segurança do trabalho, para avaliar a temperatura ambiente do setor de produção de uma fábrica, realizou treze medições, obtendo-se os valores,

em graus Celsius, conforme segue: 28, 36, 33, 32, 29, 31, 27, 34, 26, 32, 30, 28 e 35. Nessas condições, qual a temperatura mediana desse setor?

5. Os preços em reais (R$) para uma amostra de equipamentos de som estão indicados na tabela abaixo.

Equipamento	1	2	3	4	5	6	7
Preço (R$)	500,00	834,00	470,00	480,00	420,00	440,00	440,00

Com base na amostra, qual o valor da mediana?

6. Em um grupo de oito amigos suas idades são 21 anos, 20 anos, 22 anos, 14 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos e 24 anos. Nessas condições, qual a idade mediana desse grupo?

7. Durante os seis primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 6, 4, 1, 5, 1 e 2 gols. Qual a mediana de gols por partida?

8. De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 17, 13, 12, 10, 15 e 16 reais. Qual o gasto mediano com alimentação dessa pessoa?

9. Um técnico de segurança do trabalho, para avaliar a temperatura ambiente do setor de produção de uma fábrica, realizou doze medições, obtendo-se os valores, em graus Celsius, conforme segue: 28, 36, 33, 32, 29, 37, 27, 34, 26, 25, 30 e 35. Nessas condições, qual a temperatura mediana desse setor?

10. As empresas aéreas brasileiras reduziram as ofertas de voos nos últimos anos em função dos gastos com o combustível. No quadro abaixo, encontra-se a variação do aumento de preço do litro do querosene de aviação.

Ano	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Preço (R$)	1,44	1,40	1,56	1,92	2,26	2,50

Fonte: Revista Veja, 4 de setembro de 2013.

Qual o valor da mediana em relação ao preço do litro do querosene?

ATIVIDADE 10

Título: Moda

Objetivo: Conceituar moda.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha, calculadora.

Procedimento

Preencha o quadro a seguir:

Sequência	A sequência tem elementos que se repetem?		Qual elemento se repete mais?	Quantas vezes se repete?
	Não	Sim		
2, 3, 7, 5, 7, 5, 8, 7, 9				
0, 8, 3, 4, 8, 5, 4, 0, 8, 6, 4, 8				
1, 1, 1, 4, 5, 6, 2, 2, 2, 7, 3, 4, 1, 2, 7, 4, 6, 4, 9, 4, 0, 1, 4				
castanho, loiro, loiro, castanho, ruivo, preto, preto, castanho, loiro, castanho, preto, castanho, ruivo, preto.				
12, 4, 6, 12, 8, 2, 4, 89, 3, 4, 22, 56, 34, 11, 7, 12, 89, 3, 3, 3, 12, 6, 12				
90, 23, 4, 54, 82, 94, 90, 4, 54, 21, 94, 2, 85, 94, 12, 15, 13, 13, 10, 76				
água, suco, leite, refrigerante, refrigerante, leite, água, refrigerante, suco, refrigerante, água, suco, refrigerante, suco.				
102, 4, 5, 6, 7, 99, 103, 9, 54, 23, 5, 97, 46, 7, 23, 7, 102, 9, 24, 7, 102, 49, 77				
900, 880, 1100, 950, 880, 1200, 950, 1000, 880, 1250, 950, 1300, 880, 920, 1150, 1080, 920, 880, 1800, 1680, 880				
esporte, música, dança, esporte, dança, música, esporte, música, dança, esporte, esporte, música, esporte.				

Observação

Análise a *priori* da atividade 10: Os estudantes, por meio da observação das regularidades, serão induzidos a perceber que o valor mais frequente de uma sequência de dados é a definição de moda. Consideramos que os estudantes desenvolverão a atividade em menor tempo do que o gasto nas atividades anteriores.

Questões de Aprofundamento 10

1. Em uma clínica médica, foram atendidas 6 pessoas pesando 90kg, 60kg, 40kg, 60kg, 45kg e 100kg, respectivamente. Qual o peso mais frequente dessas pessoas?

2. As notas de uma turma de alunos no simulado de matemática foram 10, 10, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 4 e 2. Qual foi a nota mais frequente da turma?

3. As cifras, em reais, representam o gasto diário de farinha de trigo de uma padaria em 10 dias úteis consecutivos: 514, 664, 671, 631, 488, 570, 483, 484, 554 e 514. Qual o gasto mais frequente de farinha de trigo nesse período?

4. As idades dos consumidores de produtos light estão indicadas a seguir: 40, 50, 30, 80, 20, 30, 60, 70, 50, 55, 45 e 30 anos. Qual a idade mais frequente dos consumidores?

5. Em um grupo de quinze amigos suas idades são 19 anos, 20 anos, 22 anos, 16 anos, 14 anos, 18 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos, 16 anos, 22 anos, 18 anos, 20 anos, 18 anos e 20 anos. Nessas condições, qual a idade mais frequente desse grupo?

6. Durante os oito primeiros jogos de um campeonato, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 2, 4, 3 e 2 gols. Qual a quantidade de gols mais frequente por partida?

7. De segunda-feira a sábado, os gastos com alimentação de uma pessoa foram 15, 13, 12, 10, 14 e 14 reais. Qual o gasto mais frequente com alimentação dessa pessoa?

8. Um técnico de segurança do trabalho, para avaliar a temperatura ambiente do setor de produção de uma fábrica, realizou treze medições, obtendo-se os valores, em graus Celsius, conforme segue: 35, 36, 28, 32, 29, 31, 27, 34, 26, 32, 30, 28 e 32. Nessas condições, qual a temperatura mais frequente desse setor?

9. Em uma loja de sapatos masculinos, há no estoque 30 pares de tamanho 38, 50 pares de tamanho 39, 60 pares de tamanho 40, 35 pares de tamanho 41 e 20 pares de tamanho 42. Dessa forma, qual o tamanho mais frequente dos pares de sapatos masculinos?

10. Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º	2º	3º	4º	5º
que entram no	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

5 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção, faz-se o relato da experimentação seguindo os pressupostos da Engenharia didática, na qual se analisa a aplicação da sequência didática. Sobre esse assunto Pais (2011, p.102) afirma:

> é também uma etapa de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica [...], é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir para o desvelamento do fenômeno investigado.

Neste sentido, foi aplicada a sequência didática para o ensino de medidas de tendência central, realizadas em sessões de ensino-aprendizagem, bem como o registro das observações escritas na ficha de observação nos momentos da realização do experimento didático. Estes registros possibilitaram a realização das análises, na etapa de análise a *posteriori* e validação.

O *lócus* desta experimentação foi uma escola pública estadual do município de Belém do Pará. Os participantes foram 24 estudantes de uma turma de 3º ano do Ensino Médio do turno vespertino. A sequência didática foi desenvolvida em 10 sessões.

Para coletar os dados e as informações foram usados os seguintes instrumentos: pré-teste, pós-teste, questionários com informações sociais e econômicas, escala de atitudes, as resoluções dos estudantes no decorrer das aulas e a ficha de observação, na qual foram registrados o desempenho e conclusões dos envolvidos durante a execução do experimento. Estas anotações forneceram informações relevantes para a análise dos dados.

Para superar qualquer dificuldade nos momentos de registros, contou-se com a presença de um professor colaborador do mestrado em ensino da matemática para ajudar nos momentos de encontro com os estudantes.

A seguir apresentamos um quadro demonstrativo de toda a fase da experimentação, para oportunizar ao leitor uma visão geral das atividades e dos conteúdos estudados sobre medidas de tendência central.

Quadro 2: Cronograma das sessões de ensino desenvolvidas na experimentação

Sessão	**Descrição da Atividade**	**Tempo**
1ª	Questionário, escala de atitudes e pré-teste.	90 minutos
2ª	Atividade 1 - Média aritmética. Questões de aprofundamento 1.	90 minutos
3ª	Atividade 2 e 3 - Propriedade da média aritmética I e II. Questões de aprofundamento 2 e 3.	90 minutos
4ª	Atividade 4 e 5 - Propriedade da média aritmética III e IV. Questões de aprofundamento 4 e 5.	90 minutos
5ª	Atividade 6 e 7 - Propriedade da média aritmética V e VI. Questões de aprofundamento 6 e 7.	90 minutos
6ª	Atividade 8 - Média ponderada. Questões de aprofundamento 8.	90 minutos
7ª	Atividade 9 - Mediana. Questões de aprofundamento 9.	90 minutos
8ª	Atividade 10 - Moda. Questões de aprofundamento 10.	90 minutos
9ª	Revisão.	90 minutos
10ª	Pós-teste.	90 minutos

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

A seguir, faz-se uma descrição do desenvolvimento da experimentação por sessões de ensino.

5.1 PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

A primeira sessão de ensino ocorreu no dia 03 de outubro de 2017 (terça-feira), quando o professor de matemática me apresentou aos estudantes como professor para realizar uma pesquisa científica sobre o ensino de matemática e combinou que a partir daquele momento eu iria conduzir as atividades de matemática na turma. O professor da turma avisou também que nos dias destinados a essa atividade ele estaria presente nas aulas.

Então, apresentei-me para a turma, destacando o nome da universidade a qual estou vinculado no mestrado, falei do objetivo da pesquisa e da importância da participação dos estudantes nas atividades para que sua concretização tivesse sucesso.

Em seguida, informei aos estudantes que seriam aplicados naquele momento um questionário socioeconômico, uma escala de atitudes e um pré-teste. Esclareci que não precisariam se preocupar se não haviam estudado, pois o pré-teste era para avaliar os conhecimentos que eles tinham do assunto e que, se não soubessem realizar os cálculos, poderiam deixar em branco, mas que era preciso empenho para responder às perguntas.

Após entregar os instrumentos de produção de informações e pré-teste aos 24 estudantes, acompanhamos a leitura e o preenchimento do questionário a fim de evitar múltiplas perguntas durante a aplicação, bem como impedir que os estudantes iniciassem o pré-teste antes mesmo de ter respondido os questionários. O tempo de preenchimento dos questionários foi de 30 minutos e de resolução do pré-teste foi de 55 minutos. As informações produzidas na aplicação dos questionários são descritas a seguir.

5.1.1 Perfil dos Estudantes

Em relação às idades, os dados revelam que 8,3% tinham 16 anos, 33,3% tinham 17 anos, 37,5% tinham 18 anos, 12,5% tinham 19 anos, 4,2% tinham 20 anos e 4,2% tinham 23 anos, ou seja, mais de 55% dos estudantes estão fora dos padrões sugeridos pelo MEC para cursar o 3º ano do ensino médio. Em Silva (2014), em relação à idade dos estudantes do 1° ano o pesquisador constatou que:

> [...] a maioria dos 45% possui 16 anos, sendo que a idade recomendada pelo MEC para que o adolescente ingresse no 1° ano é de 15 anos. Enquanto que 5% possuem 14 anos, 20% com 15 anos, 15% com 17 anos, 10% com 18 anos e 5% com 21 anos. (SILVA, 2014 p.125)

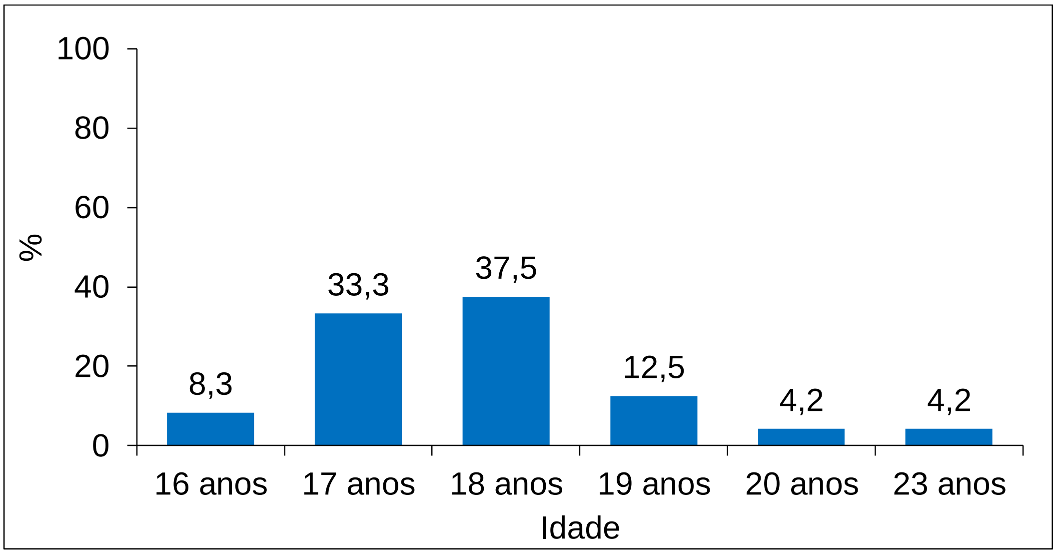
A seguir apresentamos as idades desses discentes.

Tabela 1 – Distribuição dos estudantes do 3º ano por idade

Idade	Nº de estudantes	%
16 anos	2	8,3
17 anos	8	33,3
18 anos	9	37,5
19 anos	3	12,5
20 anos	1	4,2
23 anos	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 7 – Distribuição dos estudantes do 3º ano por idade



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

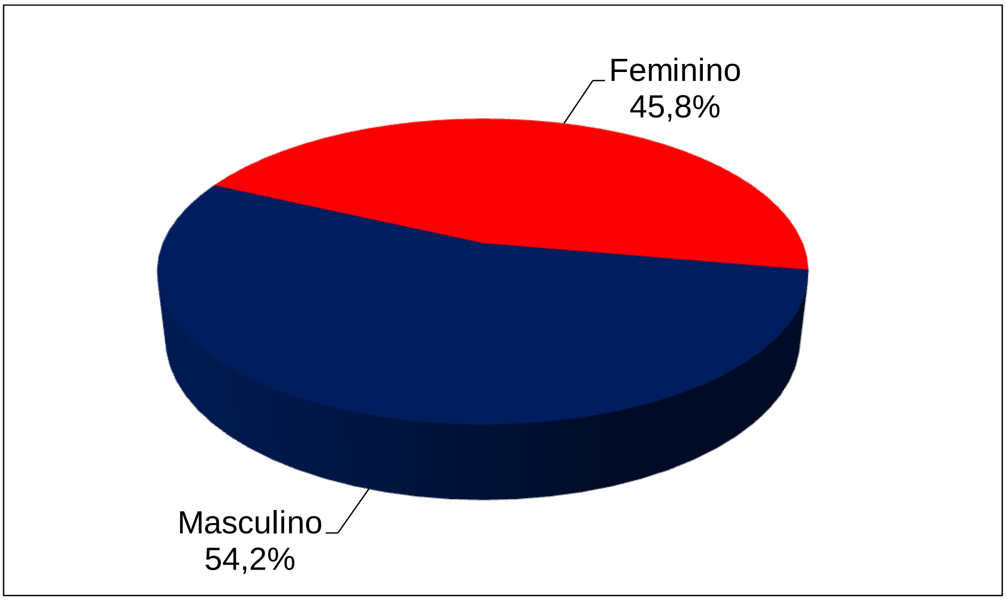
Quanto ao gênero dos estudantes participantes da nossa experimentação, verificamos que a turma é mais acentuada para o sexo masculino com 54,2% do total e 45,8% dos mesmos são do sexo feminino. Na pesquisa de Silva (2014) o pesquisador obteve sobre o perfil dos estudantes do 1º ano de sua amostra que 55% eram do sexo masculino e 45% do sexo feminino. A seguir apresentamos o gênero desses discentes.

Tabela 2 – Distribuição dos estudantes do 3º ano por gênero

Gênero	Nº de estudantes	%
Masculino	13	54,2
Feminino	11	45,8
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 8 – Distribuição dos estudantes do 3º ano por gênero



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados revelaram que 62,5% dos estudantes não exerciam alguma atividade remunerada e que 37,5% dos mesmos além de estudar, também trabalhavam de forma remunerada, o que poderia influenciar de forma insatisfatória em seus desempenhos na escola. Na pesquisa de Correa (2016) sobre o exercício da atividade remunerada a pesquisadora detectou que:

> [...] a maioria possui tempo reservado apenas para os estudos, pois 59% responderam não, 29% disseram às vezes e 12% afirmaram que trabalham. (CORREA, 2016 p.184)

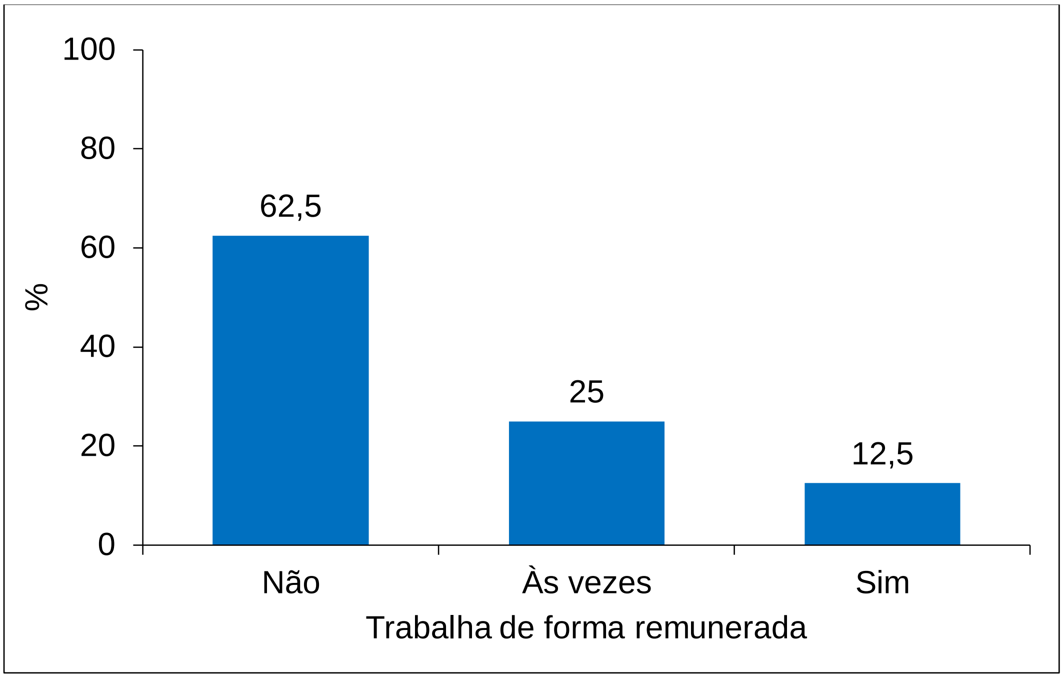
A seguir apresentamos os dados referentes ao trabalho remunerado.

Tabela 3 – Número de estudantes do 3º ano que trabalham de forma remunerada

Trabalha de forma remunerada	Nº de estudantes	%
Não	15	62,5
Às vezes	6	25,0
Sim	3	12,5
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 9 – Número de estudantes do 3º ano que trabalham de forma remunerada



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Com relação ao responsável masculino dos estudantes, a maioria com 62,5% assinalou ser o pai, 12,5% disseram que é o padrasto, 8,3% afirmaram ser o avô ou tio e 4,2% falaram ser o irmão ou não tem responsável. Realizando um breve comparativo com Correa (2016), pois a mesma percorreu o mesmo caminho metodológico, a respeito do responsável masculino de sua amostra de estudantes do 2° ano:

> Com relação ao responsável masculino dos alunos, o pai possui papel fundamental, pois a maioria deles, 88% responderam pai e 6% disseram que ou é o padrasto ou não tem responsável. (CORREA, 2016 p.184)

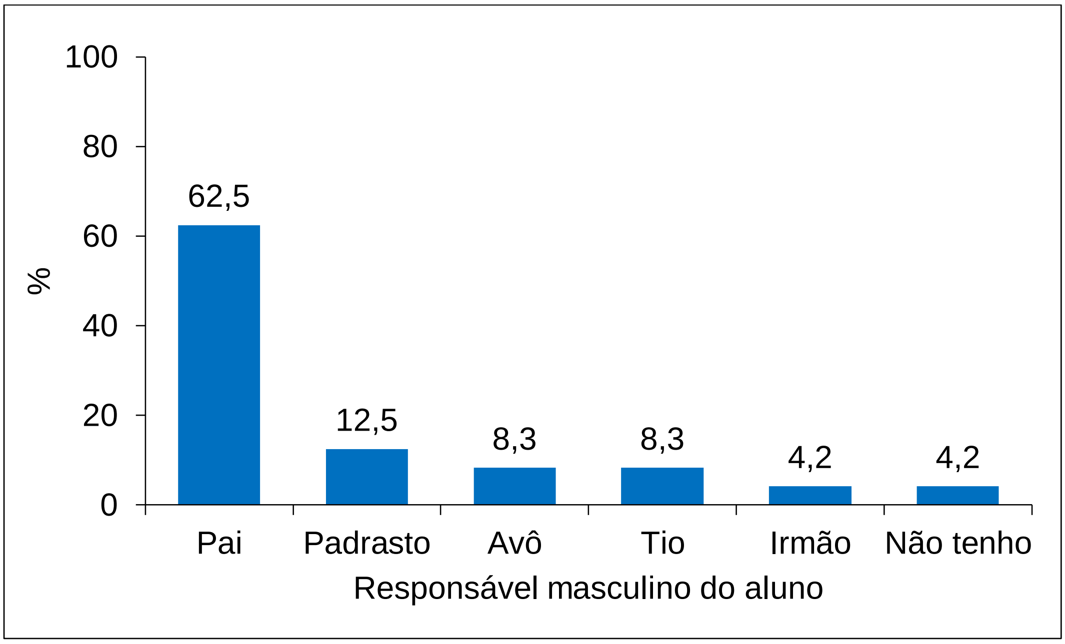
A seguir apresentamos os responsáveis masculinos desses estudantes.

Tabela 4 – Responsável masculino dos estudantes do 3º ano

Responsável masculino	Nº de estudantes	%
Pai	15	62,5
Padrasto	3	12,5
Avô	2	8,3
Tio	2	8,3
Irmão	1	4,2
Não tenho	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 10 – Responsável masculino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

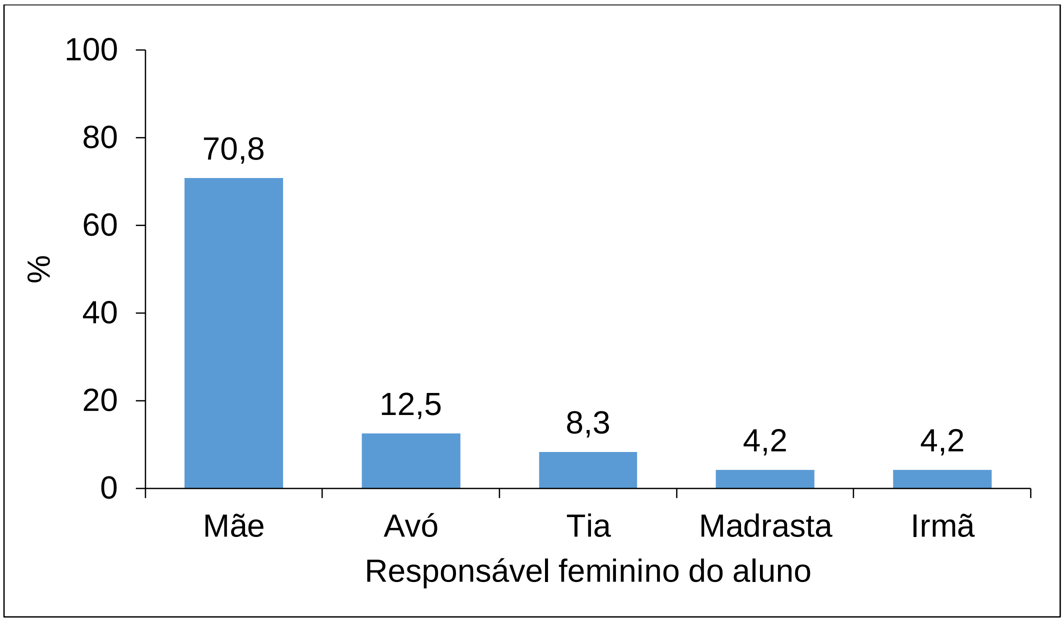
Quanto ao responsável feminino dos estudantes, 70,8% descreveram que é a mãe que exerce essa responsabilidade, 12,5% dizem ser avó, 8,3% a tia e 4,2% garantiram ser a irmã ou madrasta. O mesmo acontece em Silva (2014) que percebeu que a maioria dos participantes de sua pesquisa marcou como responsável a mãe com 75%, seguida do pai, após a avó, avô e tia. A seguir apresentamos os resultados dos responsáveis femininos desses estudantes.

Tabela 5 – Responsável feminino dos estudantes do 3º ano

Responsável feminino	Nº de estudantes	%
Mãe	17	70,8
Avó	3	12,5
Tia	2	8,3
Madrasta	1	4,2
Irmã	1	4,2
Não tenho	0	0,0
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 11 – Responsável feminino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quando indagamos sobre o nível de escolaridade do responsável masculino, constatamos uma predominância nos níveis de ensino fundamental e médio completo, com 45,8% e 25%, respectivamente. Sobre as escolaridades dos responsáveis masculinos dos estudantes do 2° ano da pesquisa de Correa (2016), autora que utilizou os mesmos procedimentos metodológicos, também ressalta dizendo:

> Quando perguntamos sobre o grau de escolaridade do responsável masculino, percebemos que os responsáveis não possuem ensino superior e uma pequena parcela possui ensino médio, pois 29% dos alunos responderam Ensino Fundamental Maior Incompleto, 24% Ensino Fundamental Menor Incompleto ou o Ensino Fundamental Menor Completo, 11% têm o Ensino Fundamental Maior Completo e 6% disseram que não estudou ou concluíram o Ensino Médio [...]. (CORREA, 2016 p.185)

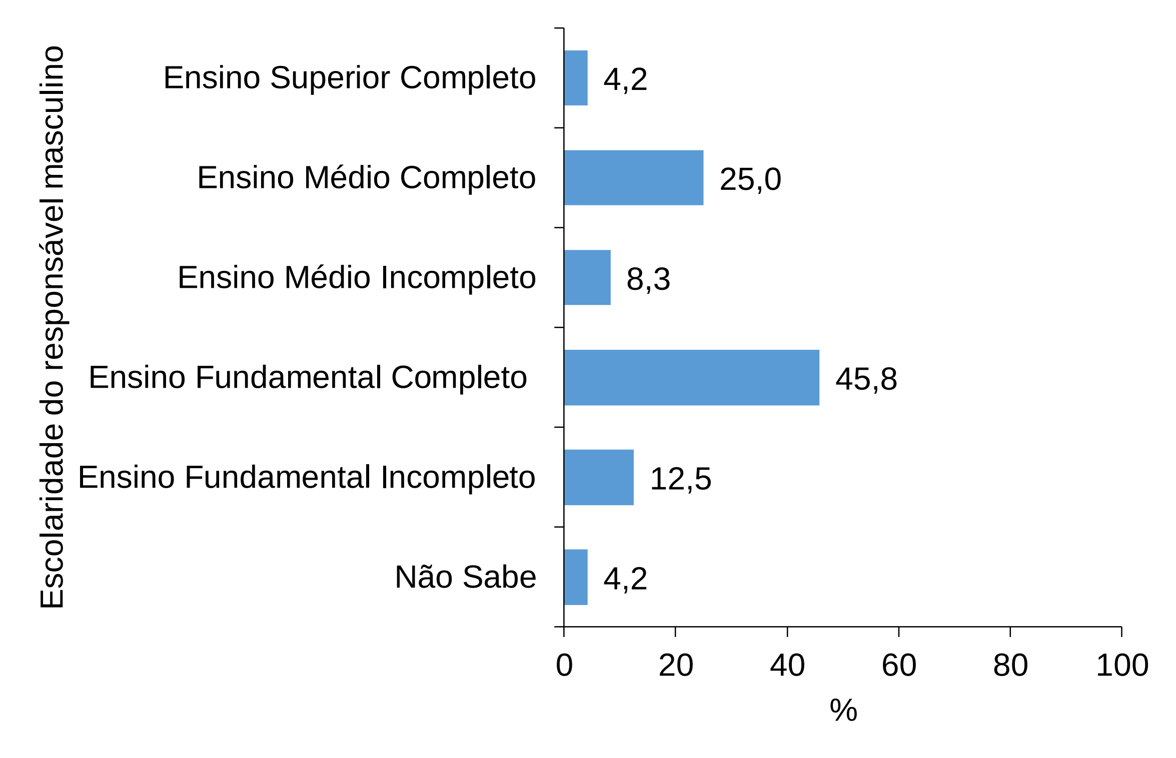
A seguir apresentamos o nível de escolaridade dos responsáveis masculinos.

Tabela 6 – Escolaridade do responsável masculino dos estudantes do 3º ano

Escolaridade do responsável masculino	Nº de estudantes	%
Ensino Superior Completo	1	4,2
Ensino Médio Completo	6	25,0
Ensino Médio Incompleto	2	8,3
Ensino Fundamental Completo	11	45,8
Ensino Fundamental Incompleto	3	12,5
Não Sabe	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 12 – Escolaridade do responsável masculino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quanto à escolaridade do responsável feminino, observamos que houve uma melhora significativa neste quesito, pois 50% dos responsáveis possuem ensino médio e 20,8% têm ensino fundamental incompleto. Sobre as escolaridades dos responsáveis femininos Silva (2016) discorre, com base em seus dados, que:

> [...] os níveis de escolaridade dos responsáveis femininos são maiores que o nível dos responsáveis masculinos, tanto a nível básico como a nível superior [...]. (SILVA, 2016 p.149)

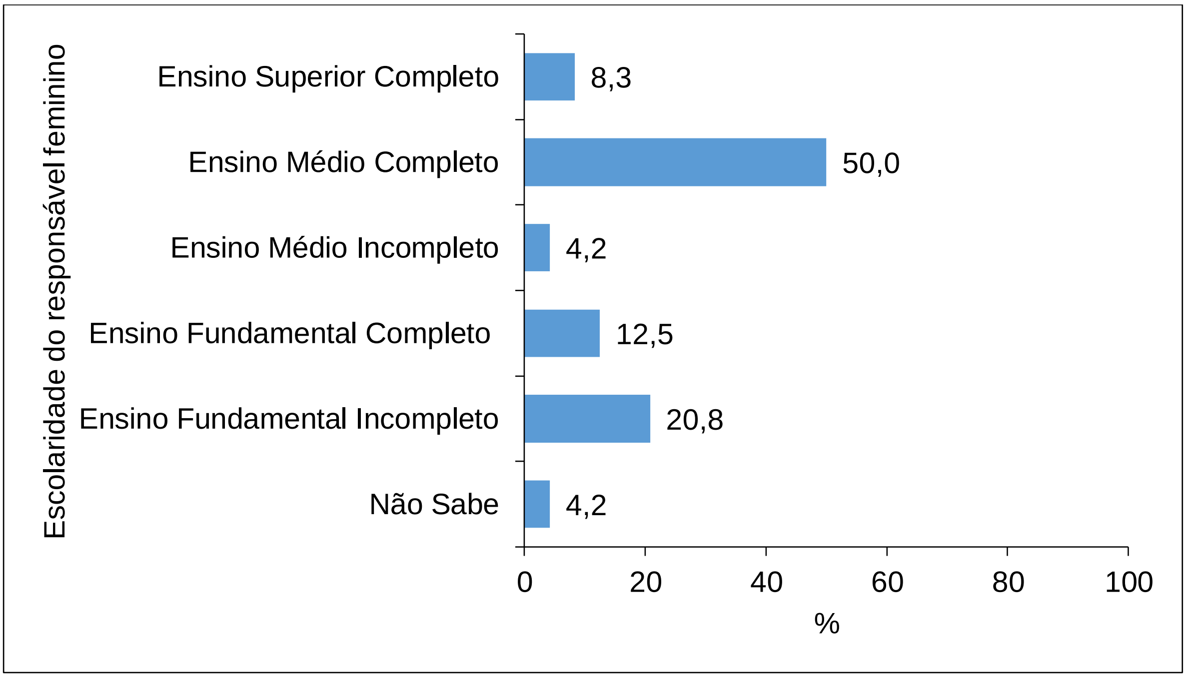
A seguir apresentamos os dados referente a escolaridade dos responsáveis femininos.

Tabela 7 – Escolaridade do responsável feminino dos estudantes do 3º ano

Escolaridade do responsável feminino	Nº de estudantes	%
Ensino Superior Completo	2	8,3
Ensino Médio Completo	12	50,0
Ensino Médio Incompleto	1	4,2
Ensino Fundamental Completo	3	12,5
Ensino Fundamental Incompleto	5	20,8
Não Sabe	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 13 – Escolaridade do responsável feminino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados apontam uma variedade de profissões dos responsáveis masculinos, com predominância de ocupações informais, pois 29,2% responderam motorista, 20,8% pedreiro, 16,7% autônomo, 12,5% pintor, 8,3% agricultor ou açougueiro e 4,2% afirmaram ser vigilante, este resultado é reforçado por Correa (2016) quando expõe que:

> Ao perguntarmos aos alunos se o seu responsável masculino exercia alguma profissão, analisamos que a grande maioria assume atividades por conta própria, o que pode está relacionado à formação que possuem, 28% responderam pescador, 18%, peixeiro ou autônomo e 36% afirmaram assumir atividades diversas: carregador, montador de andaime, flanelinha, pedreiro e manipulador de alimentos (ambos com um percentual de 6% cada). (CORREA, 2016 p.187)

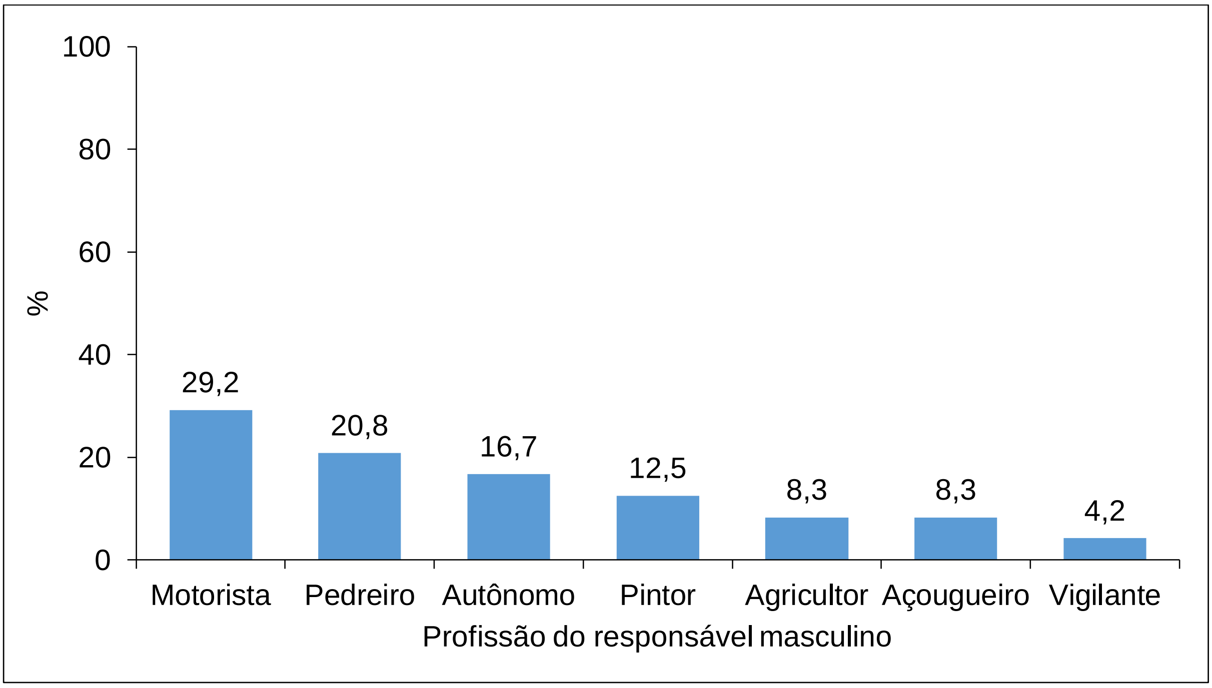
A seguir apresentamos as profissões dos responsáveis masculinos.

Tabela 8 – Profissão do responsável masculino dos estudantes do 3º ano

Profissão do responsável masculino	Quantidade	%
Motorista	7	29,2
Pedreiro	5	20,8
Autônomo	4	16,7
Pintor	3	12,5
Agricultor	2	8,3
Açougueiro	2	8,3
Vigilante	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 14 – Profissão do responsável masculino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

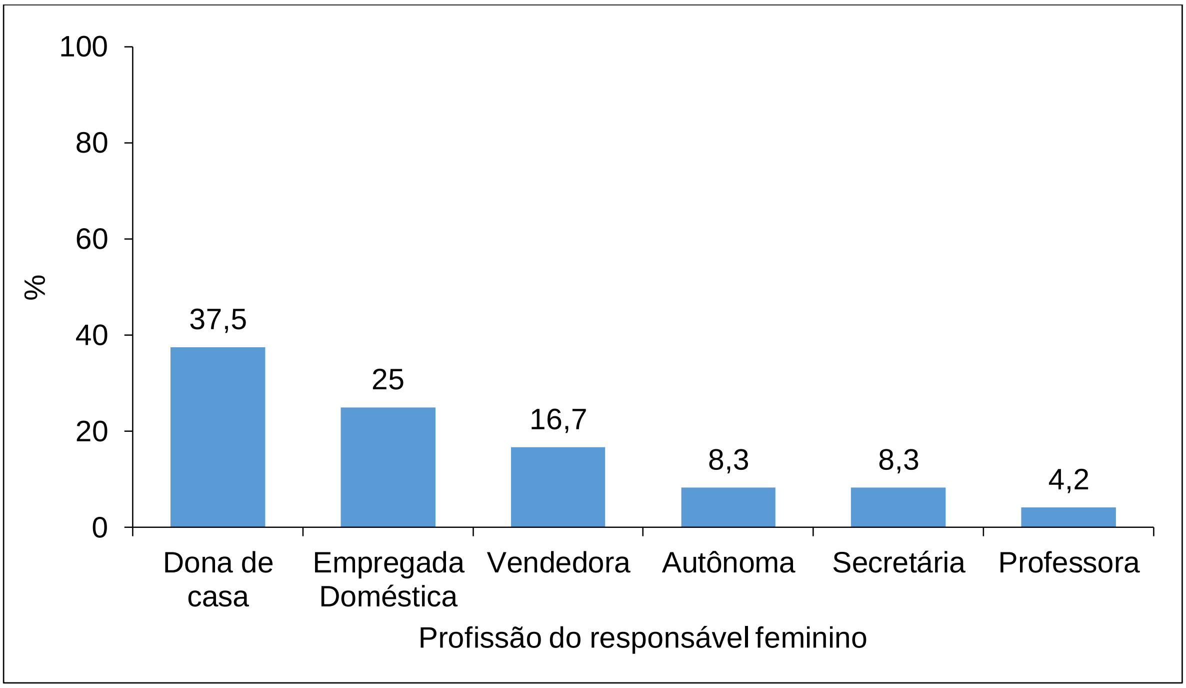
Em relação à profissão do responsável feminino, percebemos uma predominância de mães que se dedicam ao trabalho doméstico, pois 37,5% dos estudantes responderam dona de casa, 25% empregada doméstica, 16,7% vendedora, 8,3% autônoma ou secretária e 4,2% disseram ser professora. A seguir apresentamos as profissões dos responsáveis femininos.

Tabela 9 – Profissão do responsável feminino dos estudantes do 3º ano

Profissão do responsável feminino	Quantidade	%
Dona de casa	9	37,5
Empregada Doméstica	6	25,0
Vendedora	4	16,7
Autônoma	2	8,3
Secretária	2	8,3
Professora	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 15 – Profissão do responsável feminino dos estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

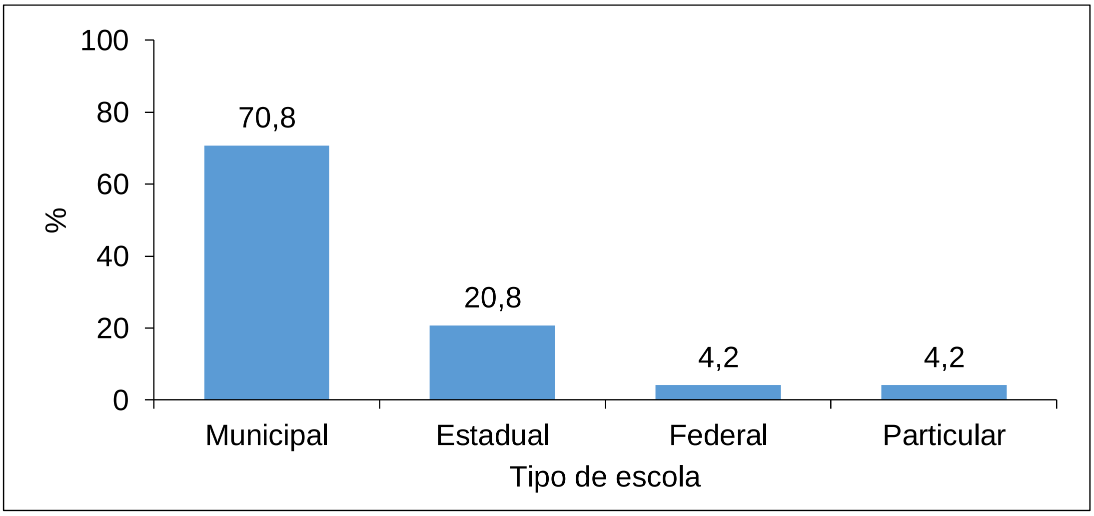
Quanto ao tipo de escola em que o estudante cursou o ensino fundamental, a grande maioria dos discentes garantiu ter estudado em escola municipal, com 70,8% e 20,8% asseguraram ter cursado em escola estadual. A seguir apresentamos os dados referentes ao tipo de escola que cursaram o ensino fundamental.

Tabela 10 – Tipo de escola em que os estudantes do 3º ano cursaram o ensino fundamental.

Tipo de escola em que cursou o ensino fundamental	Quantidade	%
Municipal	17	70,8
Estadual	5	20,8
Federal	1	4,2
Particular	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 16 – Tipo de escola em que os estudantes do 3º ano cursaram o ensino fundamental



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

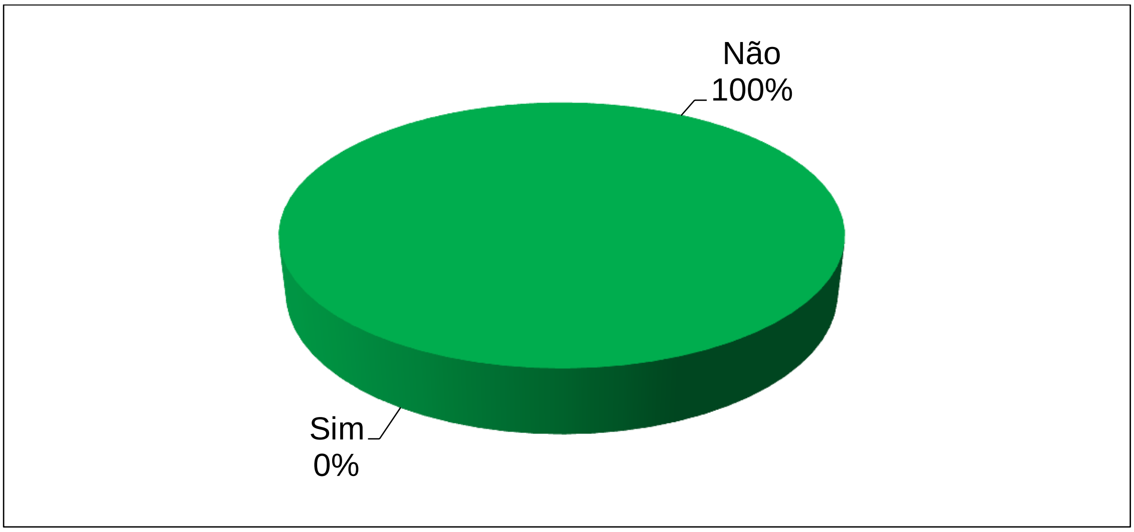
Em relação à dependência na disciplina matemática, constatamos que 100% dos estudantes participantes da nossa experimentação não estão cursando esta disciplina em sua série normal. A seguir apresentamos os dados referentes à dependência em matemática.

Tabela 11 – Número de estudantes do 3º ano de dependência em matemática

Dependência em matemática	Nº de estudantes	%
Sim	0	0,0
Não	24	100,0
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 17 – Número de estudantes do 3º ano de dependência em matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

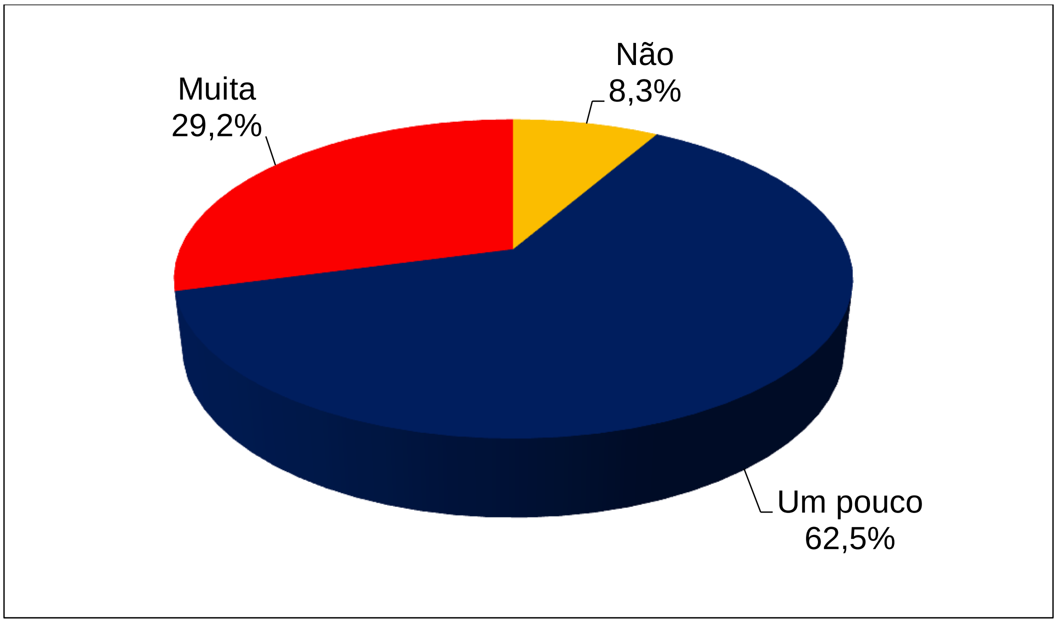
Os dados abaixo mostram que 62,5% dos estudantes apontam que têm um pouco de dificuldade em aprender essa disciplina, 29,2% disseram apresentar muita dificuldade e 8,3% relataram não possuir dificuldade em aprender matemática, ou seja, um quantitativo expressivo de estudantes demonstram que possuem de alguma forma dificuldade em relação à aprendizagem matemática. Correa (2016) constatou que 65% de seus alunos afirmam ter pouca dificuldade, 12% dizem não possuir e 23% afirmam possuir muita dificuldade na aprendizagem matemática. A seguir apresentamos os dados referentes à dificuldade em aprender matemática.

Tabela 12 – Dificuldade em aprender matemática de estudantes do 3º ano

Dificuldade em aprender matemática	Quantidade	%
Não	2	8,3
Um pouco	15	62,5
Muita	7	29,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 18 – Dificuldade em aprender matemática de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

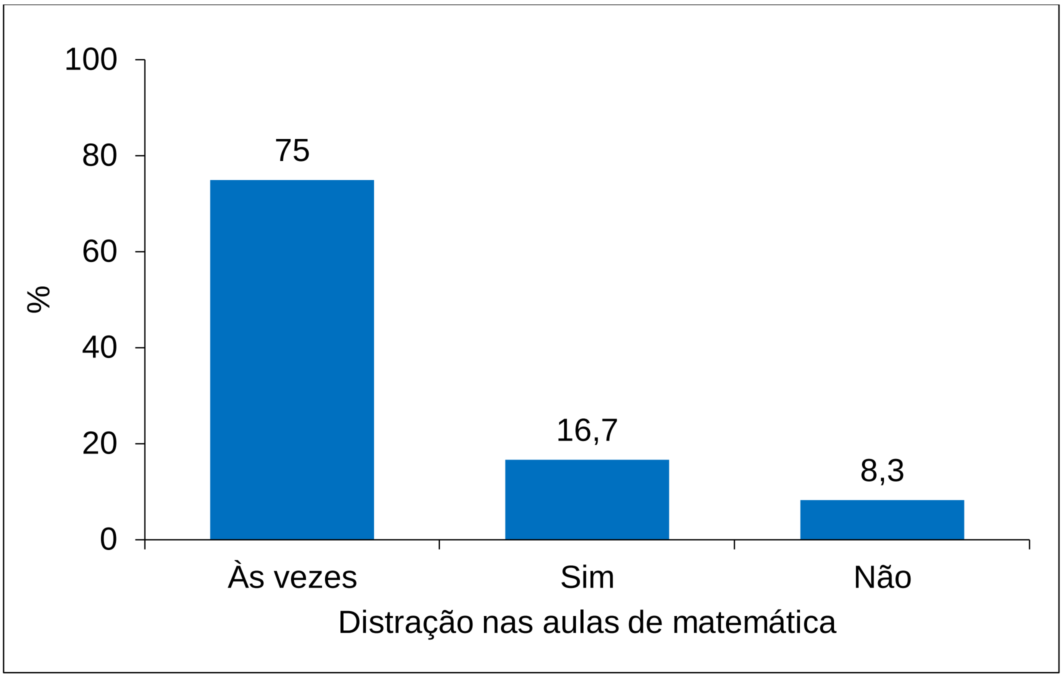
Sobre a distração nas aulas de matemática, 75% dos estudantes afirmaram que se distraem às vezes, 16,7% disseram que sim e apenas 8,3% declaram não ter problemas de distração no período das aulas, ou seja, a maioria deles não demonstra interesse pelas aulas de Matemática. A seguir apresentamos os dados sobre distração nas aulas de matemática.

Tabela 13 – Distração nas aulas de matemática de estudantes do 3º ano

Distração nas aulas de matemática	Quantidade	%
Às vezes	18	75,0
Sim	4	16,7
Não	2	8,3
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 19 – Distração nas aulas de matemática de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Em relação à nota dos estudantes na disciplina matemática, 54,2% responderam que geralmente tiram acima de 5,0, 37,5% igual a 5,0 e 8,3% abaixo de 5,0, ou seja, os números mostram que mais de um terço dos estudantes não obtém boa pontuação nas avaliações de matemática, o que de certa forma reforça os resultados anteriores quando afirmaram que se distraem às vezes nas aulas de matemática. Fazendo um breve comparativo com Silva (2016), pois o mesmo percorreu o mesmo caminho metodológico, a respeito das notas em matemática de sua amostra de estudantes do 2° ano:

> [...] 53,8% responderam que possuem geralmente rendimento com nota maior que 5 nas avaliações escolares de matemática, 38,5% com notas iguais a 5, e apenas 7,7% ficam na maior parte das vezes com nota inferior a 5 em matemática. (SILVA, 2016 p.157)

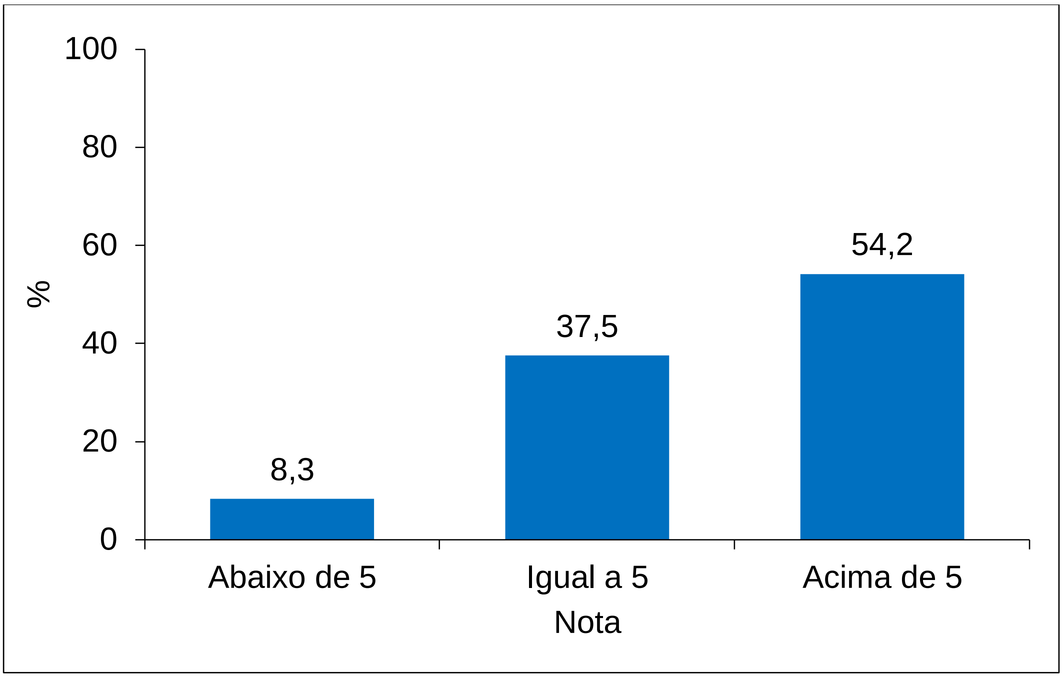
A seguir apresentamos o desempenho nas avaliações de matemática.

Tabela 14 – Nota em matemática de estudantes do 3º ano

Nota	Nº de estudantes	%
Acima de 5	13	54,2
Igual a 5	9	37,5
Abaixo de 5	2	8,3
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 20 – Nota em matemática de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Sobre o hábito com que estuda matemática fora da escola, 20,8% responderam 2 dias na semana, 16,7% disseram que estudam 3 dias na semana, 12,5% afirmaram que estudam apenas 1 dia na semana, nenhum dos estudantes respondeu que se dedica entre 4 e 7 dias, e os 50% restantes, disseram que estudam somente em sala de aula. Este diagnóstico demonstra que mais da metade dos estudantes não se dedica ao aprendizado matemático fora da escola, o que a nosso ver não é suficiente para alcançar bons resultados na disciplina. Na pesquisa de Santos (2017) sobre o hábito de estudar matemática o pesquisador verificou que:

> [...] a maioria dos discentes, 34,3%, informou que tem o hábito de estudar matemática, fora da escola, alguns dias da semana; 14,3% estudam matemática em períodos próximos das provas bimestrais; 22,9% estudam matemática todos os dias; e, 22,9% informaram que só estudam matemática em sala de aula. (SANTOS, 2017 p.207)

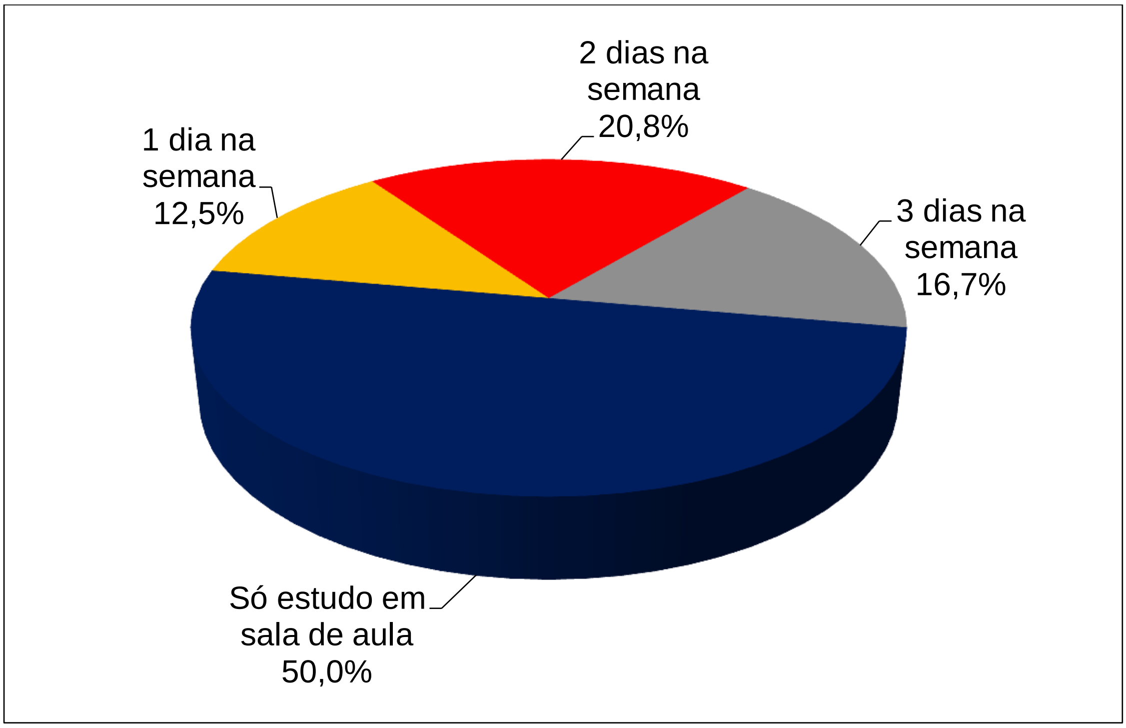
A seguir apresentamos os dados sobre os hábitos de estudos em matemática.

Tabela 15 – Hábitos de estudos em matemática de estudantes do 3º ano

Hábito de estudar matemática	Nº de estudantes	%
1 dia na semana	3	12,5
2 dias na semana	5	20,8
3 dias na semana	4	16,7
4 dias na semana	0	0,0
5 dias na semana	0	0,0
Todos os dias da semana	0	0,0
Só estudo em sala de aula	12	50,0
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 21 – Hábitos de estudos em matemática de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quando indagamos sobre quem os auxilia nas tarefas extraclasse de matemática, 70,8% dos estudantes afirmaram que ninguém auxilia nas atividades fora da escola, 12,5% responderam ser auxiliados por amigo (a), 8,3% que quem auxilia é a mãe e apenas 4,2% opinaram por irmão (a) ou primo (a). Este cenário nos demonstra que os responsáveis destes estudantes não estão preocupados com o acompanhamento das atividades propostas pela escola e tal fato pode diretamente influenciar no rendimento do aluno em matemática.

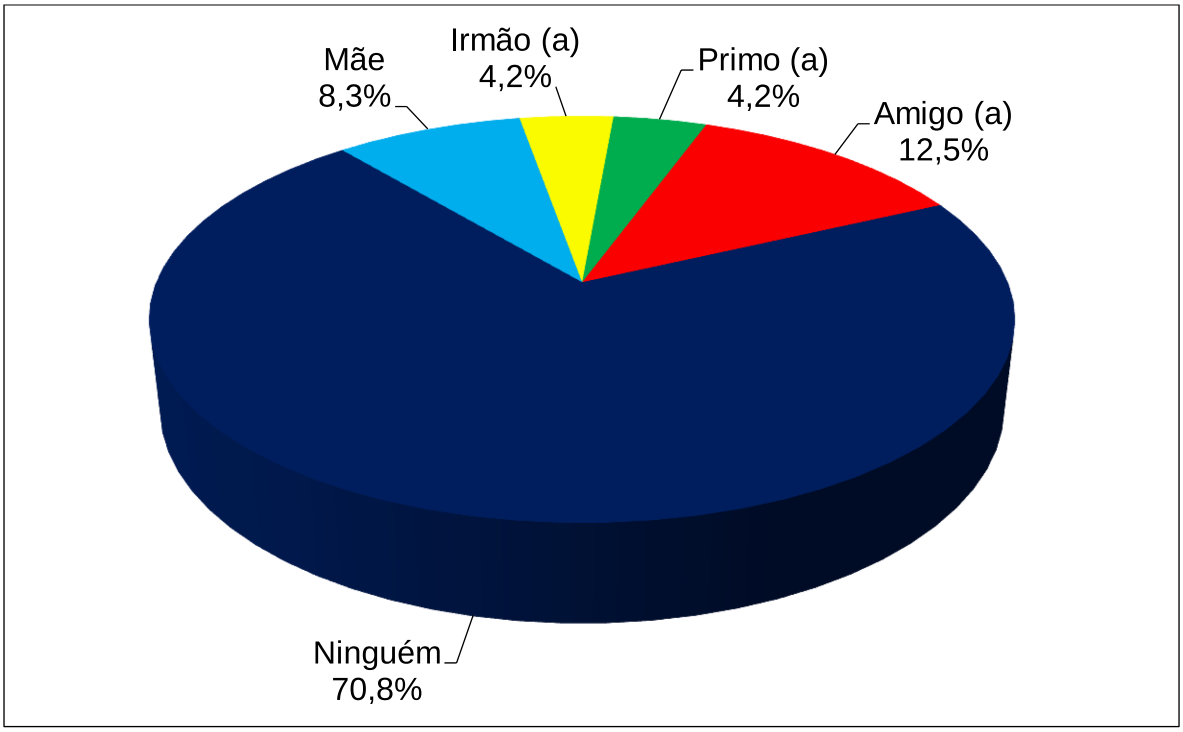
Resultados similares são encontrados no estudo de Correa (2016) onde revela que dentre sua amostra 47% afirmam que ninguém ajuda, 18% responderam ser ajudados pela mãe ou irmão (ã), 11% relatam ser ajudados pelo primo (a) e apenas 6% opinaram por tio (a). A seguir apresentamos os dados referentes ao auxílio nas tarefas extraclasse de matemática.

Tabela 16 – Auxílio nas tarefas extraclasse de matemática de estudantes do 3º ano

Auxilio nas tarefas extraclasse de matemática	Nº de estudantes	%
Professor particular	0	0,0
Pai	0	0,0
Mãe	2	8,3
Irmão (a)	1	4,2
Tio (a)	0	0,0
Primo (a)	1	4,2
Amigo (a)	3	12,5
Ninguém	17	70,8
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 22 – Auxílio nas tarefas extraclasse de matemática de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quanto à metodologia de ensino utilizada pelo professor de matemática para ministrar suas aulas, 79,2% dos estudantes afirmaram que a pratica docente inicia-se na maioria das vezes pela definição do assunto seguida de exemplos e exercícios, 8,3% disseram que o professor inicia as aulas de matemática partindo de uma situação problema para depois introduzir o assunto ou usando a história do assunto matemático e 4,2% revelaram que utilizam um experimento didático para chegar ao conceito. Na pesquisa de Correa (2016) sobre a metodologia de ensino utilizada pelo professor de matemática a pesquisadora notou que:

> [...] 70% dos alunos afirmaram que a atividade docente inicia-se na maioria das vezes pela definição do assunto seguida de exemplos e exercícios, 24% disseram que o professor inicia as aulas de matemática partindo de uma situação problema para em seguida introduzir o assunto, 6% revelaram que usam um modelo para situação e análise do mesmo e ninguém afirmam que utilizam um experimento didático ou a história do assunto matemático. (CORREA, 2016 p.196)

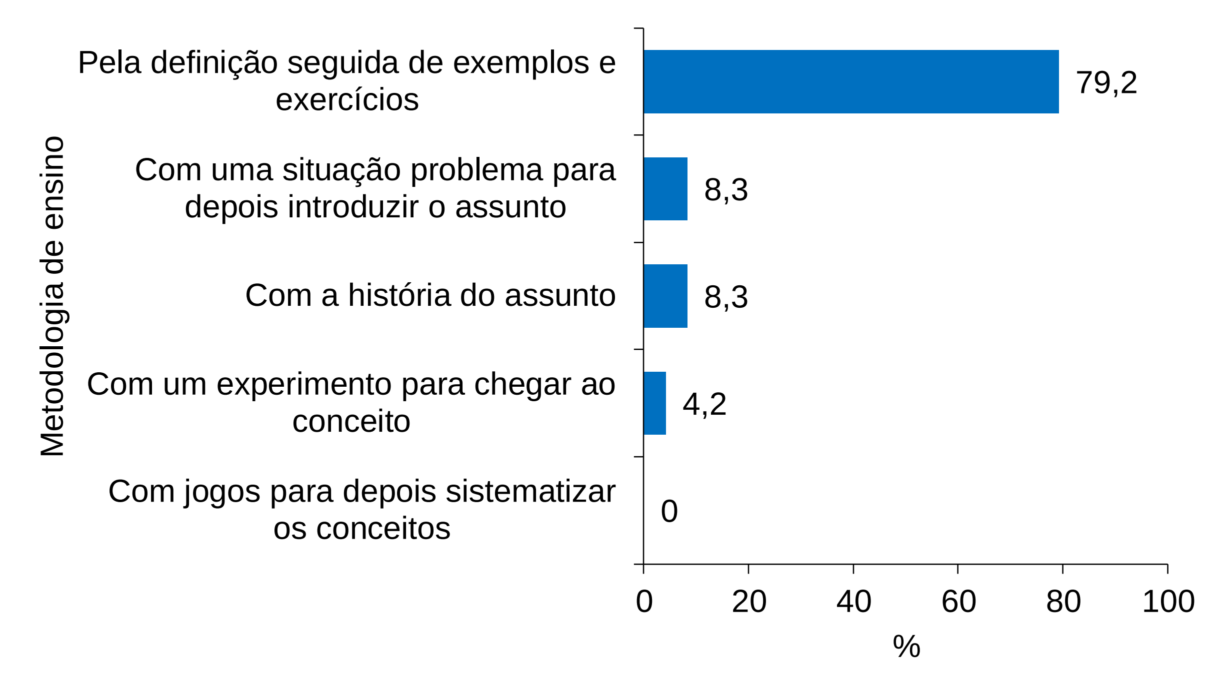
Estes percentuais evidenciam que ainda prevalece o ensino de matemática tradicional, que valoriza aula expositiva, sequência de exemplos predeterminados e a repetição de exercícios enfatizando a memorização. A seguir apresentamos os dados referentes à metodologia de ensino utilizada pelos professores de matemática.

Tabela 17 – Metodologia de ensino utilizada pelos professores de matemática nas aulas de estudantes do 3º ano

Metodologia de ensino	Nº de estudantes	%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios	19	79,2
Com uma situação problema para depois introduzir o assunto	2	8,3
Com a história do assunto	2	8,3
Com um experimento para chegar ao conceito	1	4,2
Com jogos para depois sistematizar os conceitos	0	0,0
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 23 – Metodologia de ensino utilizada pelos professores de matemática nas aulas de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Ainda em relação à estratégia didática que o docente costuma fazer para que os estudantes possam fixar os conteúdos matemáticos, 62,5% responderam que o professor costuma apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos, 25% solicita que resolva questões do livro didático, 8,3% solicita que procurem questões sobre o assunto para resolver e 4,2% não propõem questões de fixação. Quanto à estratégia didática utilizada pelos professores para fixar conteúdos dos estudantes 2° ano que participaram da pesquisa de Correa (2016) discorre, com base em seus resultados, que:

> [...] a maioria, 76%, responderam que o professor costuma apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos e 12%, a partir de resolução de questões do livro didático ou ainda que procurem questões sobre o assunto para resolver. (CORREA, 2016 p.197)

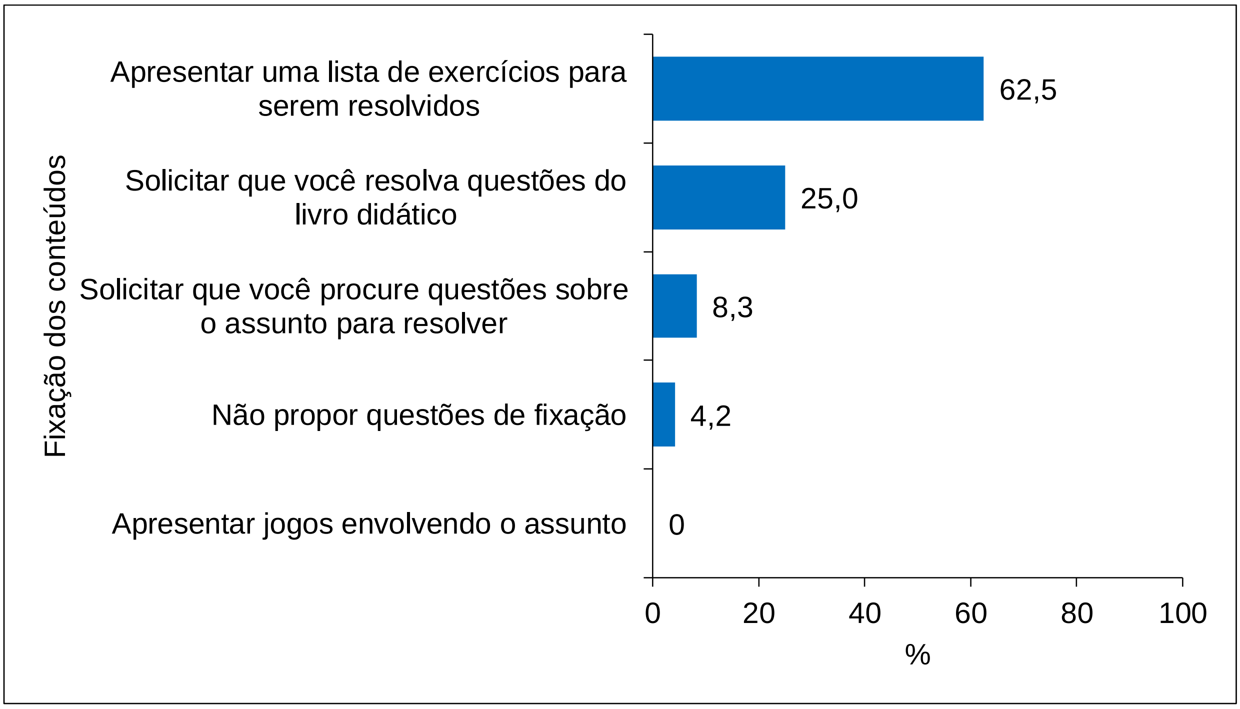
Tais indícios reforçam a falta de aulas mais atrativas e diferenciadas que permitam levar o estudante a fixar os conteúdos. A seguir apresentamos os dados referentes às técnicas de fixação dos conteúdos utilizada pelos professores de matemática.

Tabela 18 – Técnicas de fixação dos conteúdos utilizada pelos professores de matemática nas aulas de estudantes do 3º ano

Fixação dos conteúdos	Nº de estudantes	%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	15	62,5
Solicitar que você resolva questões do livro didático	6	25,0
Solicitar que você procure questões sobre o assunto para resolver	2	8,3
Não propor questões de fixação	1	4,2
Apresentar jogos envolvendo o assunto	0	0,0
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 24 – Técnicas de fixação dos conteúdos utilizada pelos professores de matemática nas aulas de estudantes do 3º ano



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

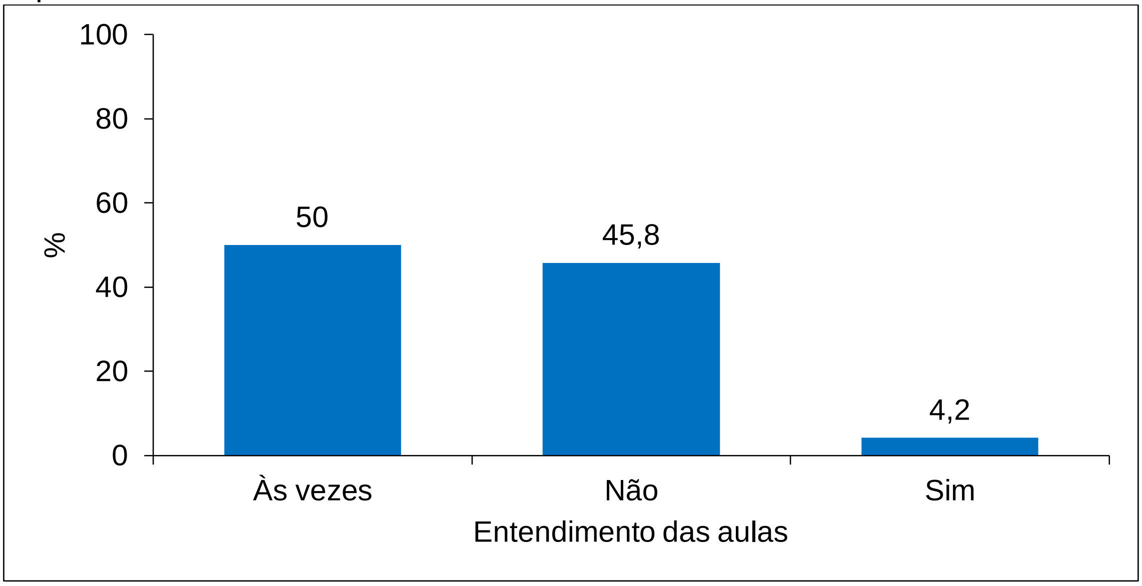
Quanto ao entendimento da forma que seu professor ensina matemática, 50% dos estudantes disseram que às vezes entendem o conteúdo matemático da forma como o professor ensina, 45,8% responderam não e 4,2% afirmaram que sim, o que nos leva a analisar que a maioria dos estudantes tem dificuldade em aprender os conteúdos matemáticos da maneira como o docente leciona suas aulas. A seguir apresentamos os dados referentes ao entendimento matemático perante a forma como o professor ensina.

Tabela 19 – Entendimento matemático do estudante de 3º ano perante a forma como o professor ensina

Forma como o professor ensina	Nº de estudantes	%
Às vezes	12	50,0
Não	11	45,8
Sim	1	4,2
Total	24	100,0

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Gráfico 25 – Entendimento matemático do estudante de 3º ano da forma como o professor ensina



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

5.2 SEGUNDA SESSÃO DE ENSINO

A segunda sessão de ensino ocorreu no dia 10 de outubro de 2017 (terça-feira) com aplicação de uma atividade de aprendizagem (Atividade 1) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 1); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 1” durou 42min, de 15h às 15h42min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 1” durou 48min, de 15h42min às 16h30min.

O objetivo desta atividade foi levar os estudantes a perceberem que ao somar todas as parcelas e dividir o resultado pela quantidade de parcelas somadas teriam a média desejada, assim sendo induzidos a generalizar a definição de média aritmética.

Inicialmente solicitamos aos estudantes que se organizassem em seis grupos de quatro estudantes cada um, deixando que os mesmos, espontaneamente, o fizessem, orientando aos discentes para que não desperdiçassem tempo em tal organização, visando aproveita-lo melhor no momento da execução da atividade. Em seguida, entregamos uma cópia da primeira atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura das questões e nos falassem se tinham alguma dificuldade na resolução das mesmas e do preenchimento do quadro localizado no final da atividade.

Neste momento, percebemos, por meio das expressões dos educandos, um sentimento de aflição, pois a tarefa de resolver as questões talvez possa ter gerado um grau de responsabilidade de acerto das mesmas, então alegaram que precisariam de tempo para estudar com antecedência antes de fazer tal atividade, pois nunca tinham feito atividades deste tipo. Assim entendemos que neste primeiro momento os estudantes mostraram insegurança em ocasiões de resolução dos problemas.

No decorrer da atividade procuramos dar liberdade para que os grupos trabalhasse livremente, apenas supervisionando o desenvolvimento das ações, visando perceber as dificuldades ou ainda receber as dúvidas dos estudantes, procurando saná-las de maneira segura e motivadora. Um dos grupos apresentou dificuldade para realizar a atividade e obteve resultado diverso do esperado, porém foi incentivado e motivado a atentar à correção e continuar resolvendo as demais questões.

A seguir mostraremos algumas perguntas feitas pelos estudantes no decorrer da primeira atividade, como por exemplo: “professor é para dividir o total?”, “professor depois que soma, o que faz?”, “professor tem que somar tudo?”, “professor tem que dividir por quanto?”, “professor o resultado é diferente dos números dados na questão?”, “professor o resultado pode ser um numero decimal?”. É perceptível que os estudantes conseguem ter noção do que precisam fazer, as perguntas deles mostram isso ao se encaminharem para a ideia da média quando perguntam sobre a possibilidade de somar os valores e de dividir por outro valor determinado, porém como ainda não possuem total segurança a respeito destes conceitos, se expressam em forma de perguntas.

Para sanar as duvidas, chamávamos a atenção dos estudantes com novos questionamentos a partir dos mesmos dados das questões, porém os direcionávamos, induzindo que ele mesmo chegasse à resposta desejada por meio do encadeamento de ideias. Após os esclarecimentos das dúvidas, percebemos que os mesmos deram atenção às nossas orientações para a execução da atividade, demonstrando compreensão à proposta da mesma.

Neste momento, percebemos que a estratégia de orientação por meio de questionamentos para a descoberta da conceituação da média, alvo da atividade, foi bastante motivadora para os mesmos durante a análise das informações registradas.

A partir do preenchimento do quadro e das observações da atividade 1 tidas pelos estudantes, formalizamos a definição de média aritmética, como: *o resultado obtido por meio da soma de n parcelas de mesma espécie dividida por n é denominado de média aritmética dos valores.*

Após este momento, entregamos aos discentes a lista de questões de aprofundamento contendo 10 questões sobre o assunto que haviam estudado na atividade 1 e que iriamos escolher aleatoriamente três questões da lista para resolver no quadro. Após resolução, solicitamos aos mesmos que resolvessem as demais questões.

Ao fim da atividade, observamos que os estudantes não tiveram dificuldades em observar as regularidades presentes no quadro a partir de seu preenchimento, bem como, nos ficou clara a importância das questões de aprofundamento, pois alguns estudantes esboçaram entendimento maior do assunto ao realizarem tais questões solicitadas.

De um modo geral, percebemos envolvimento significativo dos componentes dos grupos na realização da Atividade 1, a interação destes educandos no grupo favoreceu o entendimento de todos a partir do compartilhamento das percepções de cada um.

5.3 TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO

A terceira sessão de ensino ocorreu no dia 11 de outubro de 2017 (quarta-feira) com aplicação de duas atividades de aprendizagem (Atividade 2 e 3) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 2 e 3); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 2 e 3” durou 54min, de 15h às 15h54min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 2 e 3” durou 36min, de 15h54min às 16h30min.

A primeira atividade desta sessão de ensino durou 30min, de 15h às 15h30min. O objetivo desta atividade foi levar os estudantes a perceberem por meio das regularidades que *ao somar um valor constante a cada uma das parcelas de um conjunto de números, sua média aritmética também é somada por esta constante*.

A segunda atividade desta sessão de ensino durou 24min, de 15h30min às 15h54min e tinha como objetivo levar os estudantes a perceberem por meio das regularidades que *ao subtrair um valor constante a cada uma das parcelas de um conjunto de números, sua média aritmética também é subtraída por esta constante* e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade aditiva da média aritmética.

Inicialmente solicitamos aos estudantes que se organizassem em grupos, dando preferência ao grupo formado na sessão anterior, destacando novamente aos mesmos para não desperdiçar tempo para esta organização, visando aproveita-lo melhor no momento da execução da atividade. Em seguida, entregamos uma cópia da segunda atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura da atividade proposta e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro.

Após este momento, fizemos as nossas orientações para a execução das atividades conforme planejado e depois os estudantes partiram para o preenchimento do quadro. Em seguida, alertamos os mesmos para que fizessem o preenchimento do quadro de maneira cuidadosa, pois qualquer erro no valor das parcelas iria impactar no resultado da média.

Na execução da atividade procuramos dar liberdade para que o grupo trabalhasse livremente, apenas supervisionando o desenvolvimento das ações, visando perceber as dificuldades ou ainda receber as dúvidas dos estudantes, procurando sana-las de maneira segura e motivadora. Os estudantes apresentaram algumas dúvidas para a execução da atividade, porém menores que as apresentadas anteriormente, sempre solicitando a nossa orientação quando do surgimento das mesmas, sem constrangimento.

A seguir mostraremos algumas perguntas feitas pelos estudantes no decorrer da segunda atividade, como por exemplo: “professor que números eu devo usar para preencher o quadro?”, “professor o que é parcela?”, “professor o que significa Z, P, Q e K?”, “professor a 2ª média é a média das quatro primeiras parcelas com os acréscimos inclusos?”, “professor a 1ª média é para calcular com as parcelas da coluna ou linha?”, “professor como vamos calcular a 2ª média se não temos os valores das parcelas?”, “professor a coluna do quadro 1ª parcela + Z é para calcular com o valor da 1ª parcela mais a média?”.

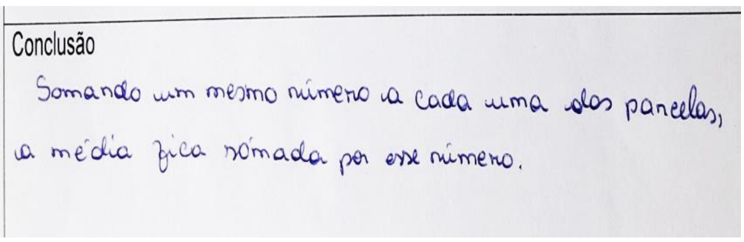
Para sanar as dúvidas, chamávamos a atenção dos estudantes com novos questionamentos e orientando para que os mesmos busquem as respostas através dos dados contidos no quadro, assim como dando algumas orientações que julgamos ser necessárias e que levasse o estudante a obter as respostas de maneira satisfatória.

As dificuldades observadas foram referentes ao preenchimento do quadro quando os valores de Z, P, Q e K não representavam uma constante, ou seja, quando os valores eram diferentes. Percebemos que alguns grupos ficaram confusos com os valores trocados durante a realização das duas primeiras sequencias de números, e assim, num primeiro momento não conseguiram perceber a irregularidade dos resultados, porém, a partir da terceira sequencia os componentes já discutiam entre si a respeito das irregularidades, como esperávamos que acontecesse.

Novamente, percebemos que a estratégia de orientação através de questionamentos para a descoberta da relação, alvo da atividade, foi bastante motivadora para os mesmos durante a análise das informações registradas.

Nesta sessão de ensino percebemos os estudantes motivados na realização da atividade, não tiveram dificuldades nos cálculos nem no preenchimento do quadro da atividade enquanto os valores de Z, P, Q e K eram os mesmos, calcularam de forma correta a média aritmética solicitada na atividade, tanto antes quanto depois do acréscimo da constante. Novamente podemos observar a consolidação do conhecimento obtido na sessão anterior sobre o cálculo da média. Vejamos as conclusões produzidas pelos estudantes nesta atividade no quadro a seguir.

Quadro 3: Conclusões dos estudantes na atividade 2

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	 Conclusão Somando um mesmo número a cada uma das parcelas, a média fica somada por esse número.	Válida

G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	Conclusão Somando um mesmo valor a cada uma das par-celas, a média ficou somada por esse valor.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	Conclusão Somando uma mesma quantidade a cada uma das parcelas, a média fica somando por essa quantidade.	Válida
G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	Conclusão Somando o mesmo valor a cada uma das parcelas, a média fica somada desse mesmo valor.	Válida
G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	Conclusão Adicionando o mesmo valor em todas as parcelas, a média fica adicionada desse mesmo valor.	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	Conclusão Somando o mesmo número a todas as parcelas, a média fica somada desse mesmo número.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 4: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 2

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Após as observações dos estudantes e de suas respectivas conclusões, formalizamos a propriedade da média aritmética, mostrando a eles que a percepção que já haviam tido a respeito da propriedade estava correta, em seguida, fizemos a complementação com a exposição da demonstração algébrica.

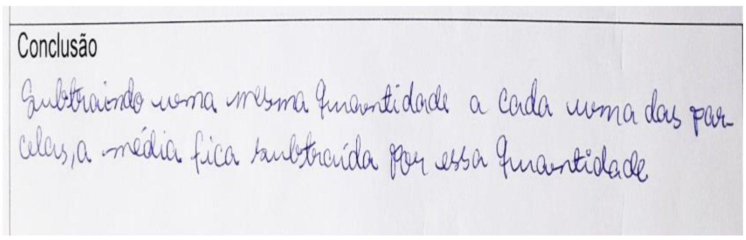
Na sequencia, entregamos uma cópia da terceira atividade a cada grupo e depois pedimos novamente para fazerem a leitura da atividade e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro. Posteriormente, fizemos as nossas orientações para a execução da atividade conforme planejado e depois os estudantes partiram para o preenchimento do quadro.

Mais uma vez permitimos que o grupo trabalhasse livremente, apenas monitorando o desenvolvimento das ações, visando perceber as dificuldades ou ainda dirimir as dúvidas dos estudantes, procurando esclarece-las de maneira consistente e motivadora.

Durante a realização desta percebemos que os estudantes não apresentaram dificuldades, pois tiveram base na atividade anterior e já suspeitavam que com a subtração teriam resultados similares aos que tiveram no uso da adição, isto ficou claro em um dos discursos de estudantes que disse: “agora ficou fácil professor, basta trocar o sinal da adição pelo da subtração”.

Mesmo com estas percepções tidas pelos estudantes, solicitamos que eles continuassem o preenchimento cuidadoso do quadro desta atividade para terem argumentos numéricos para a tal conclusão, assim fizeram, e chegaram à conclusão. A seguir, mostraremos as conclusões descritas pelos estudantes nesta atividade.

Quadro 5: Conclusões dos estudantes na atividade 3

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	 Conclusão Subtraindo uma mesma quantidade a cada uma das par-celas, a média fica subtraída por essa quantidade	Válida

G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	Conclusão Subtraindo o mesmo valor de cada uma dos parcelas, a média fica subtraída desse mesmo valor.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	Conclusão: Subtraindo o mesmo número a todas as parcelas, a média fica subtraída desse mesmo número.	Válida
G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	Conclusão Subtraindo um mesmo número a cada uma das parcelas, a média fica subtraída por esse número.	Válida
G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	Conclusão: Subtraindo o mesmo valor em todas as parcelas, a média fica subtraída desse mesmo valor.	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	Conclusão Subtraindo um mesmo valor de cada uma das parcelas, a média fica subtraída por esse valor.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 6: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 3

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

A partir de então, formalizamos a propriedade da média aritmética, e novamente complementamos com sua respectiva demonstração.

Após a realização das atividades 2 e 3 propostas, iniciamos a aplicação das questões de aprofundamento que buscaram consolidar os conhecimentos adquiridos durante esta sessão.

O trabalho com as questões de aprofundamento 2 e 3 nos permitiram observar de forma prática o entendimento de fato das propriedades aditivas da média aritmética pelos estudantes, percebemos um sentimento de conquista, de realização pessoal quando eles acertavam as questões que a priori pareciam ser difíceis de resolver, dessa forma ratificamos a importância do trabalho com este tipo de questões.

5.4 QUARTA SESSÃO DE ENSINO

A quarta sessão de ensino ocorreu no dia 17 de outubro de 2017 (terça-feira) com aplicação de duas atividades de aprendizagem (Atividade 4 e 5) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 4 e 5); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 4 e 5” durou 58min, de 15h às 15h58min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 4 e 5” durou 32min, de 15h58min às 16h30min.

A primeira atividade desta sessão de ensino durou 28min, de 15h às 15h28min, e objetivou levar os estudantes a perceberem por meio das regularidades que *ao multiplicar um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é multiplicada por esta constante* e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta a propriedade multiplicativa da média aritmética.

A segunda atividade desta sessão de ensino durou 30min, de 15h28min às 15h58min e tinha como objetivo fazer os estudantes perceberem que *ao dividir por um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é dividida por esta constante,* induzindo-os assim à generalização desta propriedade multiplicativa.

Primeiramente solicitamos aos estudantes que se organizassem nos mesmos grupos formados nas sessões anteriores, alertando novamente aos discentes para não desperdiçar tempo com esta organização, visando aproveita-lo melhor no momento da execução da atividade. Em seguida, entregamos uma cópia da quarta atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura das atividades propostas e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro.

Após este momento, fizemos as nossas orientações para a execução da atividade conforme planejado, em seguida os estudantes partiram para o preenchimento do quadro. Novamente, pedimos aos estudantes que fizessem o preenchimento com bastante cautela, para que os resultados das médias calculadas não tivessem nenhuma interferência externa.

No desenvolvimento da atividade procuramos dar liberdade para que o grupo trabalhasse livremente, apenas supervisionando o desenvolvimento das ações, visando perceber as dificuldades ou ainda receber as dúvidas dos estudantes, procurando resolve-las de maneira eficaz e motivadora.

A seguir mostraremos algumas perguntas feitas pelos estudantes no decorrer da quarta atividade, como por exemplo: “professor só está mudando a operação, agora é multiplicação?”, “professor os valores dessas parcelas poderiam ser negativos?”, “professor o valor de Z, P, Q e K na multiplicação das parcelas pode ser negativo?”, “professor os valores das parcelas poderiam ser números decimais?”, “professor qualquer uma dessas parcelas poderia ser zero?”.

Neste momento, destacamos duas perguntas surgidas pelos estudantes as quais julgamos extremamente interessantes, por exemplo: “professor o valor de Z, P, Q e K na multiplicação das parcelas pode ser negativo?” e “professor os valores das parcelas poderiam ser números decimais?”, pois essas perguntas não foram contempladas na nossa atividade.

Como estes questionamentos não iriam interferir na realização da atividade, solicitamos que eles continuassem a preencher o quadro com os valores atribuídos para Z, P, Q e K, e que estes questionamentos seriam esclarecidos após a formalização da mesma.

Com a realização das atividades anteriores e os esclarecimentos necessários para a execução desta atividade, percebemos que os estudantes ficavam mais confiantes para o preenchimento do quadro. Com isso notamos que as dificuldades apresentadas anteriormente foram gradativamente sendo amenizadas. Desta forma, concluíram essa atividade anotando suas conclusões, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 7: Conclusões dos estudantes na atividade 4

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	Conclusão Multiplicando o mesmo valor em todas as parcelas, a média fica multiplicada desse mesmo valor.	Válida
G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	Conclusão Multiplicando o mesmo valor por todas as parcelas, a média fica multiplicada por esse valor.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	Conclusão Multiplicando um mesmo número a cada uma das parcelas, a média fica multiplicada por um número.	Válida
G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	Conclusão Multiplicando uma mesma quantidade a cada uma das parcelas, a média fica multiplicada por essa quantidade.	Válida
G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	Conclusão Multiplicando o mesmo valor a cada uma das parcelas, a média fica multiplicada desse mesmo valor.	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	Conclusão Multiplicando um mesmo valor a cada uma das parcelas, a média fica multiplicada por esse valor.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 8: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 4

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

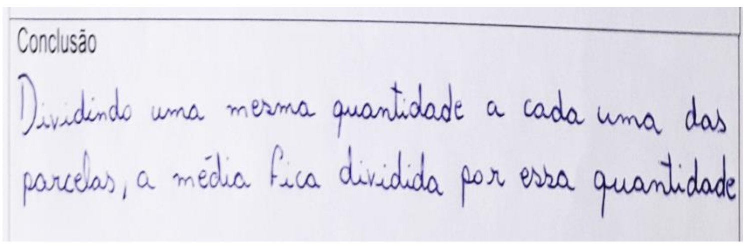
Após as observações dos estudantes e de suas respectivas conclusões, formalizamos a propriedade da média aritmética, expondo a definição matemática de tal ideia, bem como sua demonstração algébrica e alguns exemplos de números negativos e decimais.

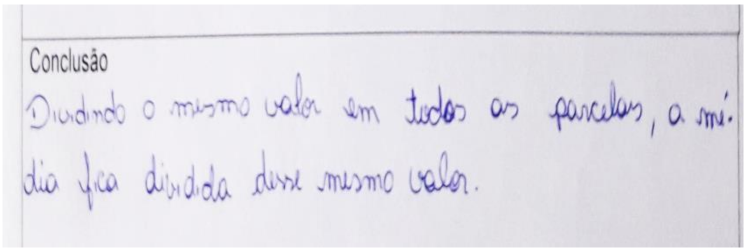
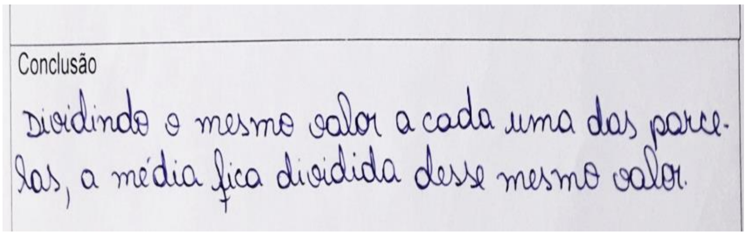
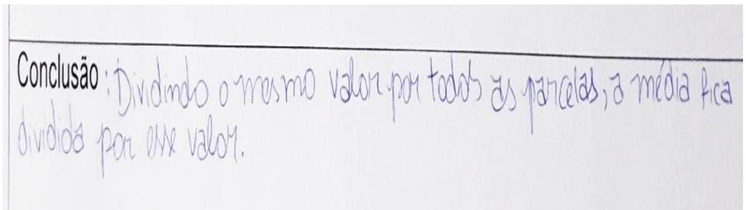
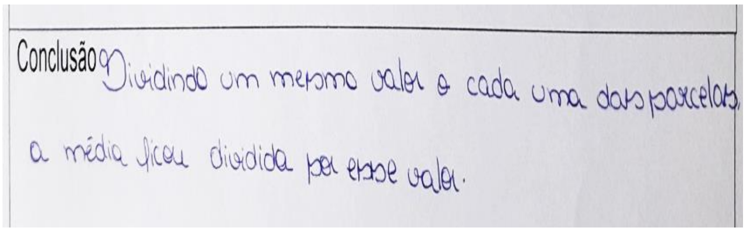
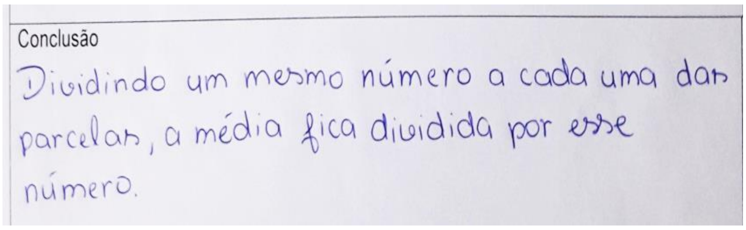
Na sequencia, entregamos uma cópia da quinta atividade a cada grupo e depois pedimos mais uma vez para fazerem a leitura da atividade e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro. Posteriormente, fizemos às devidas orientações para a realização da atividade conforme planejado e depois os estudantes partiram para o preenchimento do quadro.

Em seguida, deixamos que o grupo executasse livremente a atividade, apenas monitorando a forma como realizavam as ações, visando detectar as dificuldades ou ainda dirimir as dúvidas dos estudantes, procurando elucidá-las de maneira segura e motivadora.

Nesta atividade, foram observadas algumas dificuldades, porém estas foram em relação aos cálculos que envolviam a operação de divisão, ou seja, as dificuldades estavam ligadas aos conhecimentos sobre a operação básica e não aos conhecimentos do algoritmo da média. Desta forma, terminaram essa atividade anotando suas conclusões, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 9: Conclusões dos estudantes na atividade 5

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	 Conclusão Dividindo uma mesma quantidade a cada uma das parcelas, a média fica dividida por essa quantidade	Válida

G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	 Conclusão Dividindo o mesmo valor em todos as parcelas, a média fica dividida desse mesmo valor.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	 Conclusão Dividindo o mesmo valor a cada uma das parcelas, a média fica dividida desse mesmo valor.	Válida
G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	 Conclusão: Dividindo o mesmo valor por todos as parcelas, a média fica dividida por esse valor.	Válida
G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	 Conclusão: Dividindo um mesmo valor a cada uma das parcelas, a média ficou dividida por esse valor.	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	 Conclusão Dividindo um mesmo número a cada uma das parcelas, a média fica dividida por esse número.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 10: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 5

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Após as observações dos estudantes e de suas respectivas conclusões, formalizamos a propriedade da média aritmética, expondo a definição matemática, bem como sua demonstração algébrica.

Posteriormente à realização das atividades propostas, iniciamos a aplicação das questões de aprofundamento 4 e 5 que buscaram consolidar os conhecimentos sobre as propriedades adquiridos nesta sessão.

Novamente foi possível observar a importância do trabalho com as questões de aprofundamento, no que se refere ao sentimento de realização dos estudantes.

5.5 QUINTA SESSÃO DE ENSINO

A quinta sessão de ensino ocorreu no dia 18 de outubro de 2017 (quarta-feira) com aplicação de duas atividades de aprendizagem (Atividade 6 e 7) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 6 e 7); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 6 e 7” durou 50min, de 15h às 15h50min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 6 e 7” durou 40min, de 15h50min às 16h30min.

Iniciamos esta sessão com a atividade 6 que durou 26min, de 15h às 15h26min, com o intuito de levar os estudantes a perceberem por meio das regularidades que *ao substituir os valores extremos de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores*.

Já a segunda atividade desta sessão de ensino durou 24min, de 15h26min às 15h50min e teve como objetivo fazer os estudantes perceberem que *ao inserir ou retirar qualquer valor de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores*.

Inicialmente solicitamos que os estudantes formassem os grupos, com base na formação anterior, alertando aos mesmos para não perder tempo com esta organização, visando aproveitá-lo melhor no momento da execução da atividade. Em seguida, entregamos uma cópia da sexta atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura das atividades propostas e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro.

Depois deste momento, fizemos às orientações necessárias para a execução das atividades conforme planejado e depois os estudantes partiram para o preenchimento do quadro com bastante entusiasmo e motivação. Como de costume, solicitamos aos estudantes que observasse com muito cuidado os valores contidos em cada linha nos dois conjuntos a fim de não causar erro de aplicação do algoritmo da média aritmética.

No percurso da atividade buscamos dar liberdade para que o grupo trabalhasse livremente, apenas monitorando o desenvolvimento das ações, visando perceber as dificuldades ou ainda receber as dúvidas dos estudantes, procurando sana-las de maneira segura e motivadora.

Neste momento, verificamos que as experiências adquiridas da atividade 2, atividade referente ao cálculo da média, foi de fundamental importância para o desenvolvimento desta atividade, pois os estudantes estavam muito mais atenciosos às regularidades presentes no preenchimento do quadro e conseguiram realizar observações e conclusões esperadas sem dificuldades. Desta forma, finalizaram essa atividade descrevendo suas conclusões, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 11: Conclusões dos estudantes na atividade 6

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	Conclusão Concluímos que a mídia é modificada pelas alterações sofridas. pelos valores extremos do conjunto.	Válida
G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	Conclusão Concluímos que a mudança de valores extremos do conjunto afetou o resultado da 2ª media.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	Conclusão Concluimos que a 2ª mídia foi sensível a alteração de valores extremos do conjunto.	Válida

G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	Conclusão Concluímos que o valor da média é afetado pela modificação dos valores extremos do conjunto.	Válida
G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	Conclusão Concluímos que qualquer mudança dos valores das extremidades do conjunto à média será afetada por essa mudança.	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	Conclusão Concluímos que a 2° média foi influenciada pela mudança de valores extremos do conjunto.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 12: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 6

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Após as observações dos estudantes e de suas respectivas conclusões, formalizamos a propriedade da média aritmética, expondo a definição matemática da mesma.

O preenchimento do quadro desta atividade foi um momento muito produtivo, pois eles perceberam que qualquer modificação dos valores extremos de um conjunto de dados numéricos irá influenciar de maneira significativa no resultado da média aritmética.

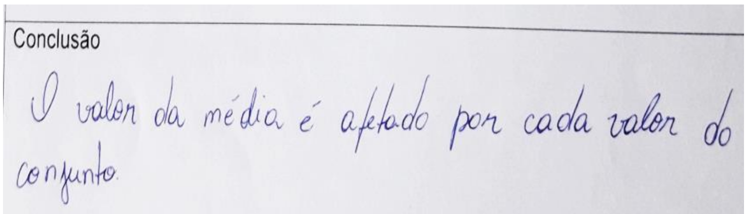
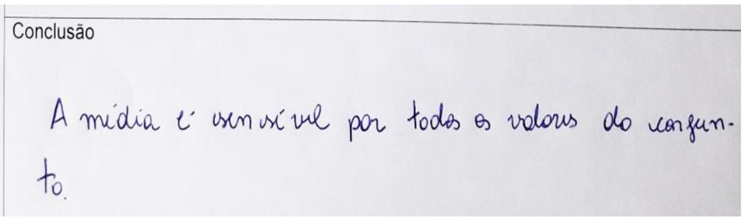
Na sequencia, entregamos uma cópia da sétima atividade a cada grupo e depois pedimos como de praxe para fazerem a leitura da mesma e nos falassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro. Posteriormente, fizemos às devidas orientações para a realização da atividade e depois os estudantes partiram para o preenchimento do quadro.

Em seguida, deixamos que o grupo executasse livremente a atividade, apenas monitorando a forma como realizavam as ações, visando detectar as dificuldades ou ainda dirimir as dúvidas dos estudantes, procurando elucidá-las de maneira veraz e motivadora.

Na segunda atividade os estudantes conseguiram perceber com maior rapidez as regularidades presentes no preenchimento do quadro, chegando à conclusão esperada. Desta forma, terminaram essa atividade anotando suas conclusões, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 13: Conclusões dos estudantes na atividade 7

GRUPO	ESTUDANTES	CONCLUSÃO	ANÁLISE
G_1	E_1, E_2, E_3 e E_4	Conclusão A média é sensível a valores de um conjunto.	Válida
G_2	E_5, E_6, E_7 e E_8	Conclusão O RESULTADO DA MÉDIA SOFRE INTERFERÊNCIA DE TODOS OS VALORES DO CONJUNTO.	Válida
G_3	E_9, E_{10}, E_{11} e E_{12}	Conclusão A média é influenciada por todos os valores do conjunto.	Válida
G_4	E_{13}, E_{14}, E_{15} e E_{16}	Conclusão A média é afetada por cada valor do conjunto.	Válida

G_5	E_{17}, E_{18}, E_{19} e E_{20}	 Conclusão O valor da média é afetado por cada valor do conjunto	Válida
G_6	E_{21}, E_{22}, E_{23} e E_{24}	 Conclusão A média é sensível por todos os valores do conjun-to.	Válida

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 14: Percentual das conclusões dos estudantes na atividade 7

TIPO DE CONCLUSÃO	%
Válida	100
Parcialmente válida	-
Inválida	-
Não apresentou	-

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Após as observações dos estudantes e de suas respectivas conclusões, formalizamos a propriedade da média aritmética, expondo a definição matemática.

Neste momento de sala, sentimos que os estudantes almejaram por um aprofundamento em relação às aplicações dos conceitos, então fizemos algumas observações, dando exemplos que os fizessem visualizar de forma mais detalhada a relevância deste aprendizado, exemplos sobre *outliers,* valores que fogem da normalidade, cuidados com o cálculo da média de salários de uma empresa, exemplos sobre estimativas no contexto hospitalar, médias de quantidades no banco de doação de sangue e distorções equivocadas utilizando a média, foram alguns temas abordados neste momento com os estudantes.

Em nosso olhar, este período de discussão, a partir das atividades 6 e 7, foi de extrema importância, pois além de facilitar a interpretação sobre o significado da média, conseguimos mostrar aos estudantes um olhar mais apurado sobre este conceito, houve um aprofundamento do conhecimento nesta prática, isto ficou notório ao observar os estudantes com suas expressões de compreensão do assunto.

Após este momento, iniciamos a resolução junto aos estudantes das questões de aprofundamento, que funcionou como uma extensão da discussão anterior a partir dos exemplos contextualizados contidos nas questões (ver questões de aprofundamento 6 e 7), assim fizemos a consolidação do conteúdo, observando que os estudantes, após as atividades e as discussões, não tiveram dificuldades na interpretação e resolução das questões.

Vale ressaltar que esta sessão de ensino foi umas das que mais geraram discussão entre os estudantes a respeito dos cuidados com o cálculo da média e de sua respectiva interpretação, portanto destacamos aqui a importância que as atividades 6 e 7 possuem para esta sequência didática, pois a partir delas foram geradas várias discussões que ampliaram a visão dos estudantes a respeito deste conhecimento matemático.

5.6 SEXTA SESSÃO DE ENSINO

A sexta sessão de ensino ocorreu no dia 24 de outubro de 2017 (terça-feira) com aplicação de uma atividade de aprendizagem (Atividade 8) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 8); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 8” durou 50min, de 15h às 15h50min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 8” durou 40min, de 15h50min às 16h30min.

O objetivo desta atividade foi levar os estudantes a perceberem que *ao somar todos os produtos de cada parcela com seu respectivo peso e dividir o resultado pelo somatório dos pesos das parcelas* teriam a média desejada, assim sendo induzidos a generalizar à definição de média aritmética ponderada.

Inicialmente perguntamos como os estudantes estavam e percebemos que todos já nos aguardavam organizados em seus grupos. Em seguida, entregamos uma cópia da oitava atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura das questões e nos falassem se tinham alguma dificuldade na resolução das mesmas e do preenchimento do quadro localizado no final da atividade.

Posteriormente, fizemos as nossas orientações para a execução da atividade conforme programado e em seguida destacamos algumas observações sobre o cuidado com as operações básicas que os estudantes teriam que efetuar ao longo da atividade, visto que tiveram algumas dificuldades com este tipo de cálculo na Atividade 5, conforme exposto anteriormente. Percebemos que os estudantes estavam mais atentos ás nossas orientações e nos demonstraram ter entendido a proposta da atividade. Após este momento, seguiram para o preenchimento do quadro por meio dos cálculos solicitados na atividade.

No andamento da atividade procuramos dar autonomia para que o grupo trabalhasse com liberdade, apenas observando o desenvolvimento das ações, visando tirar dúvidas quando solicitado ou ao perceber as dificuldades dos estudantes, procurando resolve-las de maneira necessária e motivadora. Observamos, em cada grupo, certo dinamismo através da interação dos seus componentes e também percebemos que conseguiram seguir as instruções previstas no roteiro com facilidade.

Porém, percebemos que os estudantes apresentavam dificuldade em registrar as informações produzidas no quadro da atividade e neste instante surgiram algumas perguntas demandadas pelos mesmos no decorrer da atividade, como por exemplo: “professor é para multiplicar tudo?”, “professor o resultado da multiplicação tem que dividir por quanto?”, “professor no quadro abaixo das questões a coluna cálculo realizado é para somar todas as multiplicações?”, “professor depois que multiplicar os valores, o que faz?”, “professor agora temos as operações de adição, multiplicação e divisão?”, “professor o resultado pode ser um numero decimal?”.

Nesta hora, buscamos orienta-los através de questionamentos para a descoberta de uma relação válida para o cálculo da média aritmética ponderada. Após este momento, percebemos que os estudantes foram aos poucos conseguindo amenizar suas dúvidas e continuaram o preenchimento do quadro como esperávamos para atividade.

Contudo, o objetivo da atividade foi alcançado, pois a partir da resolução da quarta questão os estudantes já conseguiam visualizar as regularidades e assim fazerem as observações que esperávamos. A atividade realizada em grupo deve ser novamente destacada neste momento, pois a interação entre os estudantes favoreceu a percepção em relação à identificação do fator de ponderação.

A partir do preenchimento do quadro e das observações da atividade 8 apontadas pelos estudantes, formalizamos a definição de média aritmética ponderada, que diz: *ao somar todos os produtos de cada parcela com seu respectivo peso e dividir o resultado pelo somatório dos pesos das parcelas*.

Logo em seguida, entregamos aos discentes a lista de questões de aprofundamento contendo 10 questões subjetivas sobre o assunto que haviam estudado na atividade 8 e que iriamos escolher duas delas para resolver no quadro. Após resolução, solicitamos aos mesmos que resolvessem as demais questões.

Nas questões de aprofundamento os estudantes puderam ampliar os olhares em relação à média ponderada, visualizando esta em outros contextos por meio dos comandos das questões, assim como, puderam trabalhar com questões que envolveram outros conhecimentos como a leitura e interpretação de um gráfico ou de uma tabela. Não observamos grandes dificuldades dos estudantes nas resoluções das questões, eles tiveram um bom aproveitamento, e conseguiram realizá-las normalmente.

5.7 SÉTIMA SESSÃO DE ENSINO

A sétima sessão de ensino ocorreu no dia 25 de outubro de 2017 (quarta-feira) com aplicação de uma atividade de aprendizagem (Atividade 9) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 9); teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação da "Atividade 9" durou 47min, de 15h às 15h47min e a resolução das "Questões de Aprofundamento 9" durou 43min, de 15h47min às 16h30min.

O objetivo desta atividade foi levar os estudantes a perceberem que *o valor que divide uma sequência ordenada de tal forma que pelo menos a metade ou cinquenta por cento dos números sejam iguais ou maiores do que ela, e que haja pelo menos outra metade ou cinquenta por cento de números menores do que ela*, assim sendo induzidos a generalizar à definição de mediana.

No começo solicitamos aos estudantes que se organizassem nos quartetos formados nas sessões anteriores, prevenindo mais uma vez os discentes para que não desperdiçassem tempo com ações alheias á organização, visando utiliza-lo melhor no momento da execução da atividade. Em seguida, entregamos uma cópia da nona atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura da atividade proposta e nos expressassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro.

Feito isto, realizamos as nossas orientações para a execução da atividade conforme planejado e em seguida destacamos algumas observações sobre o cuidado com as interpretações que os estudantes teriam que realizar no decorrer da atividade. Percebemos que os estudantes estavam atentos ás nossas orientações e nos demonstraram ter entendido a proposta da atividade. Após este momento, seguiram para o preenchimento do quadro por meio dos cálculos requeridos na atividade.

Durante a realização da atividade procuramos dar independência para que o grupo trabalhasse livremente, apenas supervisionando o desenvolvimento das ações, visando tirar dúvidas quando solicitado ou ao perceber as dificuldades dos estudantes, procurando esclarecê-las de maneira convicta e motivadora. Observamos, em todos os grupos, certo dinamismo através da interação dos seus componentes e ainda percebemos que conseguiram seguir as instruções previstas no roteiro da atividade sem nenhuma dificuldade.

Mesmo os estudantes não encontrando dificuldades durante a realização da atividade, algumas perguntas ainda surgiram, por exemplo: “professor pode ter dois elementos centrais?”, “professor o elemento central é sempre um dos números dados na sequência?”, “professor pode ter sequências que tenha o zero como um dos elementos?”, “professor qualquer uma dessas sequências poderia ser de números negativos?”, “professor poderia ser uma sequência de números decimais?”.

Com a finalidade de diminuir algumas duvidas surgidas durante a execução da atividade, procuramos chamar a atenção dos estudantes com novos questionamentos, assim como passando algumas orientações que possibilitasse aos mesmos chegarem ao objetivo da atividade. Após esse momento os discentes continuaram preenchendo o quadro.

A partir do preenchimento do quadro, os estudantes fizeram suas observações e consideraram, principalmente, que nas sequencias que continham numero par de elementos não perceberam a presença de valor central, ao contrário das sequências que continham numero ímpar de elementos, pois este valor sendo explícito facilitou a visualização rápida pelos estudantes.

Este resultado já era por nós esperado, inclusive na concepção da atividade, exposta anteriormente, já destacamos esta indução justamente para provocar questionamentos dos estudantes. A partir das observações, formalizamos o conceito e explicamos a presença implícita de um valor central nas sequencias com numero par de elementos, assim como expomos as fórmulas advindas deste pensamento para o calculo da mediana.

Para além do cálculo, retomamos a discussão sobre alguns problemas na utilização da média como tendência central, referente à atividade 6, e então supomos novas situações para que os estudantes escolhessem entre média e mediana qual seria a mais adequada para cada situação levando em consideração o significado de cada uma na análise estatística.

As questões de aprofundamento 9 serviram como forma de praticar o calculo da mediana, tanto com números de elementos pares ou impares, foi um momento que os estudantes puderam, de fato, potencializar o conhecimento sobre a mediana já construída no desenvolvimento da atividade 9, além de visualizar contextos reais onde este conceito pode ser aplicado. A resolução das questões durou um pouco mais de 40 minutos, conforme exposto anteriormente, mostrando que os estudantes conseguiram resolver sem problemas o que foi solicitado.

5.8 OITAVA SESSÃO DE ENSINO

A oitava sessão de ensino ocorreu no dia 27 de outubro de 2017 (sexta-feira) com aplicação de uma atividade de aprendizagem (Atividade 10) e questões de aprofundamento (Questões de Aprofundamento 10); teve duração de noventa minutos, de 16h50min às 18h20min e participação de 24 estudantes. A aplicação da “Atividade 10” durou 42min, de 16h50min às 16h32min, e a resolução das “Questões de Aprofundamento 10” durou 48min, de 16h32min às 18h20min.

O objetivo desta atividade foi levar os estudantes a perceberem que *o elemento que mais se repete numa sequência de dados é a moda*, assim sendo induzidos a generalizar à definição de moda.

Em primeiro lugar solicitamos aos estudantes que se dividissem nos mesmos grupos da sessão anterior, em seguida, pedimos para otimizarem o tempo na organização, pois poderiam utiliza-lo melhor no momento da execução da atividade. Após este momento, entregamos uma cópia da décima atividade a cada grupo e depois pedimos para fazerem a leitura da atividade proposta e nos pronunciassem se tinham alguma dificuldade no preenchimento do quadro.

Posteriormente, realizamos as orientações necessárias para a execução da atividade conforme idealizado e logo depois pedimos aos educandos que fizessem o preenchimento do quadro com bastante cautela, pois qualquer equivoco iria levá-los a observação errada. Observamos que os estudantes estavam bastante concentrados ás nossas orientações e nos expressaram ter entendido a proposta da atividade. Após este momento, seguiram para o preenchimento do quadro com base nas sequências propostas na atividade.

No percurso da atividade procuramos dar autonomia para que o grupo trabalhasse naturalmente, apenas supervisionando a evolução das ações, visando tirar dúvidas quando solicitado ou ao constatar as dificuldades dos estudantes, procurando esclarecê-las de maneira consistente e motivadora. Observamos que os estudantes conseguiram seguir as orientações previstas no roteiro da atividade sem nenhum problema.

Em relação a esta atividade, observamos que a maioria dos grupos não demorou a perceber as regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade e conseguiram chegar à observação esperada, sem problemas.

Mesmo os estudantes não encontrando dificuldades durante a realização da atividade, algumas perguntas ainda surgiram, por exemplo: “professor se não tiver elemento que se repete mais?”, “professor se tiver dois números que se repete mais?”, “professor se tiver três números que se repete mais?”, “professor pode ter sequências com números decimais?”, “professor pode ter sequências com números negativos e positivos?”, “professor temos que organizar as sequências numéricas em ordem crescente?”, “professor temos que organizar as sequências não numéricas em ordem alfabética?”.

Embora sendo essa atividade de fácil compreensão por parte dos estudantes, ainda tivemos alguns questionamentos que julgamos oportuno para um próximo trabalho. Como percebemos que esses questionamentos não iria atrapalhar o preenchimento do quadro, orientamos para que os estudantes continuassem preenchendo e que essas indecisões seriam sanadas no momento da formalização. Depois dessas orientações os mesmos continuaram com o preenchimento do quadro da atividade.

Após as observações descritas pelos grupos, formalizamos a definição matemática de moda. Em seguida, passamos para as questões de aprofundamento 10 na qual buscamos explorar ainda mais o assunto abordado na sessão de ensino e conferir o desempenho dos estudantes nas resoluções das questões.

Por meio dessas resoluções, os estudantes, além de mostrarem boa compreensão do assunto, ainda tiveram esclarecidas algumas dúvidas que surgiram durante a execução da atividade. Percebemos a grande relevância no trabalho com a lista de aprofundamento, pois ela permite explorar algumas especificidades que não foram exploradas no momento da produção da atividade.

Ao final perguntamos qual era a percepção deles sobre essa última parte do assunto, e de maneira uniforme ouvimos que este tópico estava sendo de fácil compreensão.

5.9 NONA SESSÃO DE ENSINO

A nona sessão de ensino ocorreu no dia 31 de outubro de 2017 (terça-feira) com aplicação de uma atividade de revisão dos conteúdos trabalhados nas sessões de ensino anteriores, teve duração de noventa minutos, de 15h às 16h30min e participação de 24 estudantes. A aplicação desta revisão de conteúdos durou 50min, de 15h às 15h50min, e a resolução da “Lista de Questões” durou 40min, de 15h50min às 16h30min.

O objetivo desta atividade foi fazer uma revisão geral dos conteúdos de medidas de tendência central trabalhados nas sessões de ensino anteriores, com o intuito de sanar qualquer dificuldade apresentada pelo estudante na compreensão das questões.

Neste sentido, fornecemos aos participantes da experimentação uma lista de exercícios com dez questões propostas para resolverem novamente com uso de calculadora. Depois de um tempo concedido aos estudantes para resolução da lista, nos dirigimos ao quadro para fazer as resoluções das questões de forma dialogada.

Neste momento, observamos que essa atividade alcançou o objetivo desejado, pois oportunizou aos estudantes tirar as últimas dúvidas, principalmente dos educandos que, no decorrer das atividades anteriores, tiveram maior dificuldade em suas resoluções. Aproveitamos para deixá-los mais autônomos, resolvendo sozinhos as questões e, em seguida, mostrando suas resoluções, espontaneamente, na mesa do professor.

Conforme mencionado anteriormente, a sequência planejada para as atividades foi muito feliz, porque as dificuldades surgidas nas primeiras atividades foram sanadas após os esclarecimentos e deram subsídios para a resolução das subsequentes. Isso foi constatado na aplicação destas atividades, pela segurança e motivação que os estudantes resolveram as questões.

5.10 DÉCIMA SESSÃO DE ENSINO

A décima seção de ensino ocorreu no dia 01 de novembro de 2017(quarta-feira), quando na oportunidade os estudantes realizaram o pós-teste composto com as mesmas questões do pré-teste, com o objetivo de verificar como os participantes da experimentação resolveriam questões sobre medidas de tendência central depois da aplicação de nossa sequência de atividades sobre o assunto.

Como seria nosso último encontro, agradecemos aos estudantes e ao professor efetivo pela oportunidade de realizarmos esse trabalho enfatizando que gostamos muito de ter trabalhado com eles. Reconhecemos a participação e a seriedade com que realizaram as atividades, desejando que o desenvolvimento delas tivesse contribuído de forma significativa com o aprendizado deles a respeito das medidas de tendência central.

Às 15 horas organizamos as cadeiras na sala e entregamos os testes aos estudantes que se mantiveram concentrados ao resolverem as questões, não observamos dificuldades durante a resolução das questões sobre o assunto. A duração do teste foi de 90 minutos e a primeira entrega do pós-teste ocorreu antes de 45 minutos.

Após este momento, fomos chamados pela direção da escola que perguntou sobre a possibilidade de darmos uma força, através de revisão, para os estudantes que iriam prestar o Enem. Como forma de agradecimento, combinamos com a direção alguns encontros para realizarmos a revisão, o que foi de muito proveito para ambas às partes. Algum tempo depois recebemos alguns agradecimentos, por parte de alguns estudantes, sobre a prova que eles realizaram.

Os resultados do pós-teste serão expostos na sessão de análise *a posteriori* e validação que trataremos na sessão seguinte.

6 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Nesta seção faremos as análises das informações produzidas com a aplicação dos instrumentos utilizados na Experimentação, fazendo uma confrontação com os resultados da fase das Análises Prévias para em seguida validarmos ou não as hipóteses da pesquisa.

Para isso, analisaremos qualitativamente e quantitativamente as informações produzidas durante a experimentação em consonância com o objetivo do trabalho através das técnicas de observação, testes de hipóteses e correlação estatística.

6.1 ANÁLISES A POSTERIORI DOS PRÉ- E PÓS-TESTES

Nesta subseção temos o objetivo de apresentar e analisar os resultados obtidos do pré-teste e do pós-teste aplicados na fase da experimentação, em que faremos as análises por questão e o comparativo do desempenho dos estudantes nos testes, de forma a destacar dados referentes ao rendimento dos mesmos, bem como fazermos considerações referentes à sequência didática aplicada para o ensino de medidas de tendência central.

A seguir fazemos uma análise do comparativo do desempenho dos estudantes por questão.

6.1.1 Comparativo do desempenho dos estudantes por questão

Os dados relacionados ao desempenho dos estudantes por questão são apresentados no quadro 15, a seguir.

Quadro 15: Comparativo do desempenho dos estudantes por questão

Questão	Acerto (%)		Erro (%)		Em Branco (%)	
	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-
Questão 1	29,2%	95,8%	16,7%	4,2%	54,1%	0,0%
Questão 2	25,0%	100,0%	12,5%	0,0%	62,5%	0,0%
Questão 3	20,8%	95,8%	8,3%	4,2%	70,9%	0,0%
Questão 4	29,2%	100,0%	8,3%	0,0%	62,5%	0,0%
Questão 5	16,7%	95,8%	4,2%	4,2%	79,1%	0,0%
Questão 6	20,8%	100,0%	12,5%	0,0%	66,7%	0,0%
Questão 7	25,0%	95,8%	4,2%	4,2%	70,8%	0,0%
Questão 8	0,0%	95,8%	16,7%	4,2%	83,3%	0,0%
Questão 9	0,0%	95,8%	8,3%	4,2%	91,7%	0,0%
Questão 10	62,5%	100,0%	16,7%	0,0%	20,8%	0,0%

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Por meio dos resultados evidenciados no quadro 15, observamos claramente que os estudantes tiveram avanços significativos em seu desempenho no pós-teste em relação ao pré-teste, visto que conseguiram resolver corretamente mais de 90% das questões propostas.

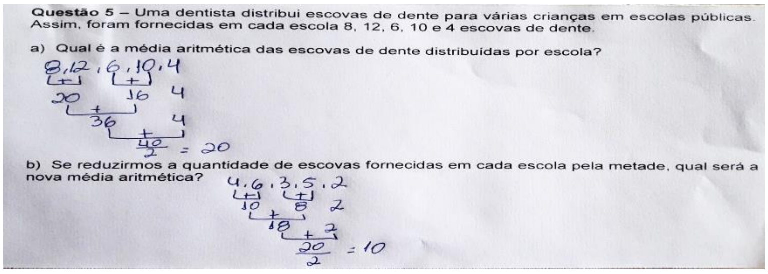
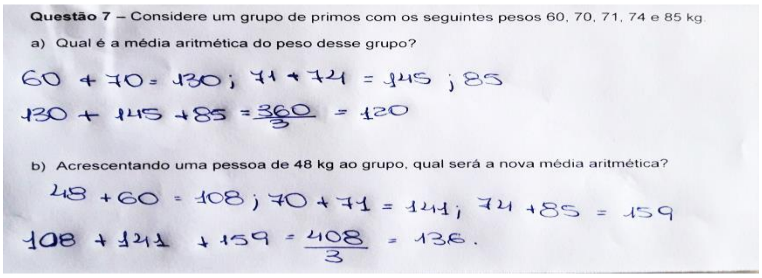
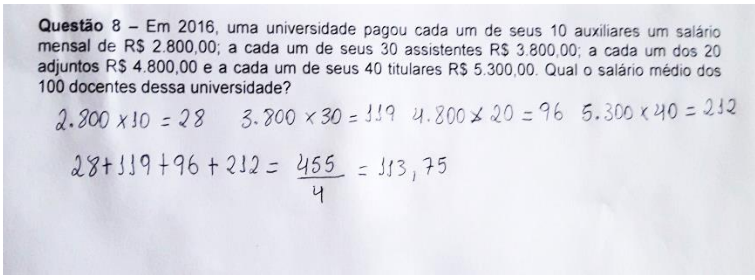
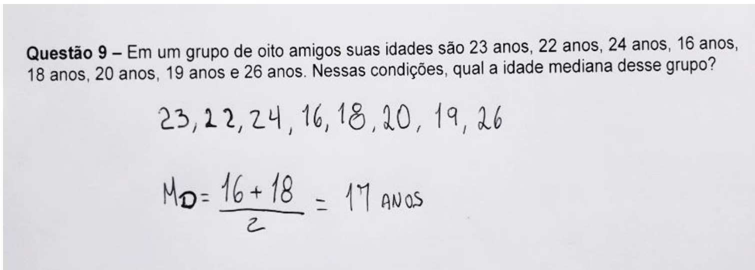
Os elevados percentuais de acertos das questões 1, 3, 5, 7 e 8, demonstram a capacidade que os estudantes já possuem em resolver problemas que envolvem assuntos relacionados às medidas de tendência central. Nas questões 1, 3, 5 e 7, que envolve o conceito de média aritmética e suas propriedades, os estudantes acertaram quase em sua totalidade, o mesmo aconteceu com a questão 8, que envolve o conceito de média aritmética ponderada.

Quanto a questão 5, esta nos chamou mais atenção pelo fato de que no pré-teste os estudantes demonstraram muita dificuldade na resolução, esta envolve a propriedade multiplicativa da média aritmética, 95,8% dos estudantes acertaram esta questão no pós-teste, revelando assim um avanço considerável em relação ao que foi mostrado anteriormente com os resultados do pré-teste e o que nos alertavam nossas análises prévias ao destacarem as dificuldades dos estudantes egressos com a resolução de problemas que envolviam esta propriedade.

As resoluções corretas das questões 2, 4, 6, 9 e 10, após a fase de experimentação, demonstram que as dificuldades apontadas inicialmente em nossas análises prévias e depois no rendimento dos estudantes no pré-teste já haviam sido superadas. Observamos, também, que não tivemos nenhuma questão em branco no pós-teste, este resultado nos conduzem ao pensamento que os estudantes adquiriram no decorrer da experimentação uma compreensão do assunto e confiança para a resolução das questões. A seguir apresentamos os erros dos estudantes por questão no pós-teste.

Quadro 16: Erros dos estudantes por questão no pós-teste

ESTUDANTE	QUESTÃO	ERRO
E_{23}	1	**Questão 1 –** Em um grupo de dez alunos suas idades são 17 anos, 15 anos, 18 anos, 16 anos, 15 anos, 18 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos e 20 anos. Nessas condições, qual a média de idade desse grupo? 15 + 15 = 30 + 16 = 46 + 16 = 52 + 17 = 69 + 17 = 86 + 18 = 104 + 18 = 122 + 18 = 140 + 20 = $\frac{160}{9}$ = 17,78 anos A média da idade desse grupo é de 17,78 anos.
E_{18}	3	**Questão 3 –** Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 22, 21, 23, 22, 22, 23 e 28 anos. a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo? 22+21+23+22+22+23+28 = $\frac{141}{7}$ = 20,14 a media desse grupo é de 20 anos b) Há quatro anos, qual era a média aritmética da idade desses alunos? 20+4 = 24 A quatro anos a media desse grupo é de 24 anos

E_7	5	 Questão 5 – Uma dentista distribui escovas de dente para várias crianças em escolas públicas. Assim, foram fornecidas em cada escola 8, 12, 6, 10 e 4 escovas de dente. a) Qual é a média aritmética das escovas de dente distribuídas por escola? 8,12,6,10,4 20 16 4 36 4 $\frac{40}{2} = 20$ b) Se reduzirmos a quantidade de escovas fornecidas em cada escola pela metade, qual será a nova média aritmética? 4,6,3,5,2 10 8 2 18 2 $\frac{20}{2} = 10$
E_{12}	7	 Questão 7 – Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 60, 70, 71, 74 e 85 kg. a) Qual é a média aritmética do peso desse grupo? 60 + 70 = 130; 71 + 74 = 145; 85 130 + 145 + 85 = $\frac{360}{3}$ = 120 b) Acrescentando uma pessoa de 48 kg ao grupo, qual será a nova média aritmética? 48 + 60 = 108; 70 + 71 = 141; 74 + 85 = 159 108 + 141 + 159 = $\frac{408}{3}$ = 136.
E_{10}	8	 Questão 8 – Em 2016, uma universidade pagou cada um de seus 10 auxiliares um salário mensal de R$ 2.800,00; a cada um de seus 30 assistentes R$ 3.800,00; a cada um dos 20 adjuntos R$ 4.800,00 e a cada um de seus 40 titulares R$ 5.300,00. Qual o salário médio dos 100 docentes dessa universidade? 2.800 x 10 = 28 3.800 x 30 = 119 4.800 x 20 = 96 5.300 x 40 = 212 28 + 119 + 96 + 212 = $\frac{455}{4}$ = 113,75
E_{22}	9	 Questão 9 – Em um grupo de oito amigos suas idades são 23 anos, 22 anos, 24 anos, 16 anos, 18 anos, 20 anos, 19 anos e 26 anos. Nessas condições, qual a idade mediana desse grupo? 23, 22, 24, 16, 18, 20, 19, 26 $M_D = \frac{16 + 18}{2}$ = 17 ANOS

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Como podemos observar no quadro 16, os estudantes (E_{23}, E_{18}, E_7, E_{12}, E_{10} e E_{22}) apresentaram erros procedimentais na resolução das questões 1, 3, 5, 7, 8 e 9, respectivamente. A seguir apresentamos os resultados dos testes de acordo com o desempenho por estudante.

Quadro 17: Desempenho por estudante nos testes

Estudante	Acerto (%)		Erro (%)		Em Branco (%)	
	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-
E_1	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_2	30%	100%	10,0%	0,0%	60%	0,0%
E_3	40%	100%	10,0%	0,0%	50%	0,0%
E_4	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_5	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%

E_6	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_7	20%	90%	10,0%	10,0%	70%	0,0%
E_8	20%	100%	20,0%	0,0%	60%	0,0%
E_9	30%	100%	10,0%	0,0%	60%	0,0%
E_{10}	20%	90%	10,0%	10,0%	70%	0,0%
E_{11}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{12}	30%	90%	10,0%	10,0%	60%	0,0%
E_{13}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{14}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{15}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{16}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{17}	30%	100%	10,0%	0,0%	60%	0,0%
E_{18}	20%	90%	10,0%	10,0%	70%	0,0%
E_{19}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{20}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{21}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%
E_{22}	30%	90%	20,0%	10,0%	50%	0,0%
E_{23}	20%	90%	10,0%	10,0%	70%	0,0%
E_{24}	20%	100%	10,0%	0,0%	70%	0,0%

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

No pré-teste, 75% dos estudantes (E_1, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_{10}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}, E_{18}, E_{19}, E_{20}, E_{21}, E_{23} e E_{24}) tiveram 20% de acerto. O número de questões em branco foi maior do que as certas e erradas, este fato fica evidente que os mesmos não tinham nenhum conhecimento dos assuntos que foram cobrados nas questões.

Os estudantes (E_7, E_{10}, E_{18} e E_{23}) tiveram no primeiro teste apenas 20% de acerto, já no segundo teste progrediram para 90% de acertos. E ainda os estudantes (E_{12} e E_{22}) que, embora tenham obtido 30% de acertos no pré-teste, no pós-teste melhoraram significativamente seus desempenhos. Os estudantes (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_8, E_9, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}, E_{17}, E_{19}, E_{20}, E_{21} e E_{24}) obtiveram 100% de acerto nos pós-teste. A seguir apresentamos uma análise da frequência e participação dos estudantes nas sessões de ensino.

6.1.2 Frequência dos estudantes nas sessões de ensino

Nesta subseção apresentamos uma análise das frequências dos estudantes em todas as sessões de ensino que envolvia atividades de medidas de tendência central com os dados do desempenho relacionado ao percentual de acertos de cada estudante nos testes realizados, buscando verificar o nível de participação e a possível influência que este possuiu sobre os resultados dos estudantes. O quadro a seguir apresenta a frequência dos 24 estudantes nas 10 sessões de ensino.

Quadro 18: Relação entre a frequência dos estudantes nas sessões de ensino e desempenho nos testes.

Estudante	**Sessões de ensino**										**Acerto**	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Pré (%)**	**Pós (%)**
E_1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_2	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	30%	100%
E_3	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	40%	100%
E_4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_7	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	90%
E_8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_9	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	30%	100%
E_{10}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	90%
E_{11}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{12}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	30%	90%
E_{13}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{14}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{15}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{16}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{17}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	30%	100%
E_{18}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	90%
E_{19}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{20}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{21}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%
E_{22}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	30%	90%
E_{23}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	90%
E_{24}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	20%	100%

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

O quadro acima mostra que todos os 24 estudantes participantes da nossa experimentação apresentaram 100% de frequência nas sessões de ensino. Acreditamos que essa participação expressiva foi um dos fatores que levaram ao sucesso do experimento.

Os estudantes (E_7, E_{10}, E_{12}, E_{18}, E_{22} e E_{23}) foram presentes em todas as sessões de ensino, porém isto não possibilitou aos mesmos um desempenho máximo na realização do pós-teste.

Deste modo, entendemos que a aplicação da sequência didática, bem como a participação nas atividades, contribuiu para a melhora no desempenho dos estudantes no pós-teste. A seguir apresentamos a relação entre os fatores socioeconômicos, a matemática e o desempenho nos testes.

6.1.3 A relação entre fatores socioeconômicos, a matemática e o desempenho nos testes

Nesta subseção apresentamos as análises das informações produzidas com a aplicação do questionário utilizado na experimentação e o desempenho dos estudantes nos testes, com a finalidade de verificar se há alguma relação entre os fatores socioeconômicos e questões ligadas a matemática com o desempenho dos estudantes na resolução das questões. As informações contidas nos quadros a seguir referem-se ao número de acertos de cada aluno nos dois testes, formando uma terna (estudante, nota no pré-teste, nota no pós-teste), como mostra o exemplo abaixo.

Número de acertos no pré-teste

↑

Estudante dez ⟵ (E_{10}, 2, 10)

↓

Número de acertos no pós-teste

A apresentação dos dados produzidos com a aplicação do questionário usado no experimento será iniciada com as variáveis escolaridade dos responsáveis masculino e feminino e o desempenho nos testes.

Quadro 19: Escolaridade dos responsáveis masculino e feminino e o desempenho nos testes

		Escolaridade do Responsável Masculino					
		Não sabe	EF Incompleto	EF Completo	EM Incompleto	EM Completo	Ensino Superior
Escolaridade do Responsável Feminino	Não sabe						(E_{21}, 2, 10)
	EF Incompleto	(E_{12}, 3, 9)	(E_4, 2, 10) (E_8, 2, 10) (E_{18}, 2, 9)	(E_{23}, 2, 9)			
	EF Completo			(E_1, 2, 10)		(E_{10}, 2, 9) (E_{22}, 3, 9)	
	EM Incompleto			(E_{24}, 2, 10)			
	EM Completo			(E_3, 4, 10) (E_6, 2, 10) (E_7, 2, 9) (E_{16}, 2, 10) (E_{17}, 3, 10) (E_{20}, 2, 10) (E_9, 3, 10) (E_{19}, 2, 10)	(E_2, 3, 10) (E_5, 2, 10)	(E_{14}, 2, 10) (E_{13}, 2, 10)	
	Ensino Superior					(E_{11}, 2, 10) (E_{15}, 2, 10)	

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados contidos no quadro acima mostram que apenas dois estudantes da amostra, E_{12} e E_{21}, informaram que não sabem a escolaridade dos seus responsáveis masculino e feminino, respectivamente. O primeiro discente apresentou um bom desempenho no pós-teste, acertou 9 questões, e o segundo teve um excelente desempenho, acertou todas as questões.

A maioria dos estudantes da amostra, 33,3%, informou que tem o responsável masculino com Ensino Fundamental completo e o feminino Ensino Médio completo. No pré-teste esses estudantes (E_3, E_6, E_7, E_9, E_{16}, E_{17}, E_{19} e E_{20}) apresentaram um desempenho baixo, com número de acertos variando entre 2 e 4 questões. No entanto, quando observamos o desempenho médio desses estudantes do grupo no pós-teste temos um índice de 98,75% em número de acertos.

O percentual de estudantes da amostra que tem os seus responsáveis masculino e feminino com Ensino Médio completo é de 8,3%. No pós-teste esses discentes, E_{13} e E_{14}, apresentaram um desempenho excelente, respectivamente, 10 e 10 acertos cada.

A seguir apresentamos os dados referentes às notas, dificuldade em aprender matemática e desempenho nos testes.

Quadro 20: Notas, dificuldade em aprender matemática e desempenho nos testes

		Dificuldade em aprender matemática		
		Não	Um pouco	Muita
Notas em matemática	Acima de 5	(E_{5}, 2, 10) (E_{13}, 2, 10)	(E_{12}, 3, 9) (E_{8}, 2, 10) (E_{1}, 2, 10) (E_{3}, 4, 10) (E_{7}, 2, 9) (E_{17}, 3, 10) (E_{20}, 2, 10) (E_{2}, 3, 10) (E_{22}, 3, 9) (E_{15}, 2, 10)	(E_{16}, 2, 10)
	Igual a 5		(E_{4}, 2, 10) (E_{24}, 2, 10) (E_{10}, 2, 9) (E_{14}, 2, 10) (E_{21}, 2, 10)	(E_{23}, 2, 9) (E_{6}, 2, 10) (E_{9}, 3, 10) (E_{11}, 2, 10)
	Abaixo de 5			(E_{18}, 2, 9) (E_{19}, 2, 10)

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados acima mostram que o estudante E_{16} foi o único que informou obter notas acima de cinco em matemática e têm muita dificuldade em aprender essa disciplina. Esse estudante acertou apenas duas questões no pré-teste. Os estudantes E_{5} e E_{13} afirmaram que obtêm notas em matemática acima de cinco e que não apresentam dificuldades em apreender esta disciplina, representando 8,3% da amostra. O desempenho desses educandos foi excelente no pós-teste, acertaram todas as questões.

A maioria dos estudantes, 41,7%, informou obter notas acima de cinco em matemática e têm um pouco de dificuldade em aprender essa disciplina. No pré-teste esses estudantes (E_{1}, E_{2}, E_{3}, E_{7}, E_{8}, E_{12}, E_{17}, E_{20}, E_{15} e E_{22}) tiveram um desempenho baixo, com número de acertos variando entre 2 e 4 questões. Já no pós-teste esse mesmo grupo de estudantes obteve um desempenho expressivo, com número de acertos variando de 9 a 10 questões, sem dúvida uma melhora significativa nas notas.

Os estudantes E_6, E_9, E_{11} e E_{23} disseram que obtêm notas em matemática igual a cinco e que têm muita dificuldade em aprender essa disciplina, representando 16,7% da amostra. Os três primeiros discentes apresentaram um rendimento excelente no pós-teste e o último teve um bom desempenho nesse teste, acertou 9 questões. A seguir apresentamos os dados referentes às notas, distração nas aulas de matemática e desempenho nos testes.

Quadro 21: Notas, distração nas aulas de matemática e desempenho nos testes

		Distração nas aulas de matemática		
		Não	Às vezes	Sim
Notas em matemática	Acima de 5	(E_{13}, 2, 10)	(E_{12}, 3, 9) (E_8, 2, 10) (E_1, 2, 10) (E_3, 4, 10) (E_7, 2, 9) (E_{17}, 3, 10) (E_{20}, 2, 10) (E_2, 3, 10) (E_{22}, 3, 9) (E_{15}, 2, 10)	(E_{16}, 2, 10) (E_5, 2, 10)
	Igual a 5	(E_{10}, 2, 9)	(E_4, 2, 10) (E_{24}, 2, 10) (E_{14}, 2, 10) (E_{21}, 2, 10) (E_6, 2, 10) (E_9, 3, 10) (E_{11}, 2, 10)	(E_{23}, 2, 9)
	Abaixo de 5		(E_{19}, 2, 10)	(E_{18}, 2, 9)

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados acima mostram que os estudantes (E_5 e E_{16}) afirmaram que obtêm notas em matemática acima de cinco e que se distraem nas aulas dessa disciplina, representando 8,33% da amostra. Ambos apresentaram um rendimento excelente no pós-teste, acertaram, respectivamente, 10 e 10 questões cada.

O percentual de estudantes que informou obter nota igual a cinco em matemática e na maioria das vezes se distrai nas aulas dessa disciplina foi de 33,33%. Os discentes desse grupo tiveram um desempenho baixo no pré-teste, com número de acertos variando entre 2 e 3 questões.

A maioria dos estudantes, 41,67% da amostra, informou obter notas acima de cinco em matemática e na maioria das vezes se distrai nas aulas dessa disciplina. O desempenho dos estudantes desse grupo no pós-teste foi da seguinte maneira: 3 estudantes (E_7, E_{12} e E_{22}) tiveram um bom desempenho no referido teste, acertaram 90% das questões e 7 estudantes (E_1, E_2, E_3, E_8, E_{15}, E_{17} e E_{20}) apresentaram desempenho excelente no pós-teste, alcançaram 100% de acertos. A seguir apresentamos os dados referentes às notas, hábitos de estudos em matemática e desempenho nos testes.

Quadro 22: Notas, hábitos de estudos em matemática e desempenho nos testes

		Hábitos de estudos em matemática			
		1 dia na semana	2 dias na semana	3 dias na semana	Só estudo em sala de aula
Notas em matemática	Acima de 5	(E_5, 2, 10)	(E_{17}, 3, 10) (E_{20}, 2, 10) (E_{15}, 2, 10)	(E_2, 3, 10) (E_7, 2, 9) (E_{13}, 2, 10)	(E_1, 2, 10) (E_3, 4, 10) (E_8, 2, 10) (E_{12}, 3, 9) (E_{16}, 2, 10) (E_{22}, 3, 9)
	Igual a 5	(E_6, 2, 10) (E_9, 3, 10)	(E_{21}, 2, 10) (E_{11}, 2, 10)	(E_{10}, 2, 9)	(E_4, 2, 10) (E_{14}, 2, 10) (E_{23}, 2, 9) (E_{24}, 2, 10)
	Abaixo de 5				(E_{18}, 2, 9) (E_{19}, 2, 10)

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados acima destacam que os estudantes E_1, E_3, E_8, E_{12}, E_{16}, E_{22}, E_4, E_{14}, E_{23}, E_{24}, E_{18} e E_{19} que representam 50% da amostra só estudam matemática em sala de aula; sendo que destes, os seis primeiros, disseram ter notas acima de cinco; os quatro seguintes, igual a cinco e os dois últimos, abaixo de cinco.

O percentual de estudantes que informou obter nota igual a cinco em matemática e tem o hábito de estudar matemática apenas dois dias na semana foi de 8,33%. Os discentes desse grupo tiveram um desempenho baixo no pré-teste, com número de acertos de 2 questões. Porém, quando os mesmos realizaram o pós-teste obtiveram um desempenho excelente, com 100% de acertos.

Já quatro dos estudantes, E_2, E_7, E_{13} e E_{10}, que representam 16,67% deles afirmaram que estudam matemática três dias na semana e, para este grupo, os três primeiros têm notas em matemática acima de cinco e o último, igual a cinco. O desempenho dos mesmos no pós-testes foi, respectivamente, 10, 9, 10 e 9 acertos.

A maior parte dos estudantes, 25% da amostra, informou obter notas acima de cinco em matemática e tem o hábito de estudar matemática somente em sala de aula. O desempenho dos discentes desse grupo no pós-teste foi bastante expressivo variando de 9 a 10 questões. A seguir apresentamos os dados referentes aos hábitos de estudos, auxílio nas tarefas extraclasse de matemática e desempenho nos testes.

Quadro 23: Hábitos de estudos, auxílio nas tarefas extraclasse de matemática e desempenho nos testes

		Auxílio nas tarefas extraclasse de matemática				
		Mãe	Irmão (a)	Primo (a)	Amigo (a)	Ninguém
Hábitos de estudos em matemática	1 dia na semana					(E_5, 2, 10) (E_6, 2, 10) (E_9, 3, 10)
	2 dias na semana			(E_{15}, 2, 10)		(E_{11}, 2, 10) (E_{17}, 3, 10) (E_{20}, 2, 10) (E_{21}, 2, 10)
	3 dias na semana	(E_{10}, 2, 9)			(E_7, 2, 9)	(E_2, 3, 10) (E_{13}, 2, 10)
	Só estudo em sala de aula	(E_{23}, 2, 9)	(E_3, 4, 10)		(E_1, 2, 10) (E_8, 2, 10)	(E_{24}, 2, 10) (E_{22}, 3, 9) (E_4, 2, 10) (E_{12}, 3, 9) (E_{14}, 2, 10) (E_{16}, 2, 10) (E_{19}, 2, 10) (E_{18}, 2, 9)

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

De acordo com os dados apresentados no quadro acima, 16,67% da amostra tem o hábito de estudar matemática apenas dois dias na semana e não recebe auxílio de ninguém nas tarefas extraclasse. O desempenho desses estudantes (E_{11}, E_{17}, E_{20} e E_{21}) no pré-teste foi, respectivamente, 2, 3, 2 e 2 questões. Os estudantes E_1 e E_8 informaram que só estudam matemática em sala de aula e recebem ajuda de amigo nas tarefas extraclasse desta disciplina. Os dois educandos acertaram todas as questões no pós-teste

O único estudante que informou ter o hábito de estudar matemática somente em sala de aula e receber ajuda da mãe nas tarefas extraclasse foi o E_{23}. Este educando apresentou um desempenho bom no pós-teste, acertou nove questões. E apenas o discente E_3 disse que só estuda matemática em sala de aula e recebe ajuda do irmão nas tarefas de casa desta disciplina. Este estudante acertou todas as questões do pós-teste.

O percentual de estudantes que informou ter o hábito de estudar matemática somente em sala de aula e não receber auxílio de ninguém nas tarefas extraclasse desta disciplina foi de 33,33%. Os discentes (E_4, E_{12}, E_{14}, E_{16}, E_{18}, E_{19}, E_{22} e E_{24}), que pertencem a este grupo, apresentaram um desempenho elevado no pós-teste, acertaram, respectivamente, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 9 e 10 questões cada. .

Em síntese, podemos dizer que, como bem mostrado anteriormente, a maioria, 70,83%, faz as atividades de matemática sem contar com a ajuda de ninguém, ao passo que na pesquisa de Santos (2017), a maior parte, 60% dos pesquisados, conta com a ajuda mãe. Cremos que esse fato pode ser explicado por se tratar, nesse estudo de estudantes do ensino médio e, no trabalho de Santos (2017), uma pesquisa realizada com discentes do fundamental. A seguir apresentamos o confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades da sequência didática.

6.1.4 Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades da sequência didática

Nesta subseção apresentamos um quadro comparativo do confronto entre as análises a priori e posteriori das atividades propostas, com o objetivo de fazer a validação de nossa sequência didática. A seguir apresentamos as análises confrontadas entre si, para cada uma das atividades da sequência didática.

Quadro 24: Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades da sequência didática

ATIVIDADE	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
1	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar todas as parcelas e dividir o resultado pela quantidade de parcelas somadas serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de média aritmética. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de divisão.	Ao fim da atividade, verificamos que os estudantes não tiveram dificuldades em observar as regularidades presentes. Perceberam que deviam somar as parcelas e o resultado deveria ser dividido por um número ao final. (número de parcelas). De um modo geral, percebemos envolvimento e interação significativa dos componentes dos grupos na realização desta atividade.	Positiva
2	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é somada por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade aditiva da média aritmética.	Com a realização desta atividade percebemos os estudantes motivados na realização, e não tiveram dificuldades nos cálculos nem no preenchimento do quadro da atividade, calcularam de forma correta a média aritmética solicitada, tanto antes quanto depois do acréscimo da constante. Dessa forma, com o auxilio do professor, os estudantes conseguiram perceber a propriedade aditiva da média aritmética.	Positiva

3	Por meio da observação das regularidades, os estudantes perceberão que ao subtrair um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é subtraída por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade aditiva da média aritmética.	Percebemos que os estudantes não apresentaram dificuldades, pois tiveram base na atividade anterior. Mesmo com as percepções tidas por eles, continuaram o preenchimento cuidadoso do quadro da atividade para terem argumentos numéricos para a conclusão, assim, perceberam que a propriedade aditiva é válida também para valores negativos.	Positiva
4	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao multiplicar um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é multiplicada por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade multiplicativa da média aritmética.	Por meio da realização da atividade 4, os estudantes demonstraram entendimento da propriedade ao concluírem que multiplicando uma mesma quantidade a cada uma das parcelas, a média fica multiplicada por essa quantidade. Dessa forma, os estudantes conseguiram perceber a propriedade multiplicativa da média aritmética.	Positiva

5	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao dividir por um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, sua média aritmética também é dividida por esta constante e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade multiplicativa da média aritmética.	Por meio da realização da atividade 5, os estudantes demonstraram entendimento da propriedade ao concluírem que dividindo uma mesma quantidade a cada uma das parcelas, a média fica dividida por essa quantidade. Dessa forma, os estudantes conseguiram perceber a propriedade multiplicativa da média aritmética.	Positiva
6	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao substituir os valores extremos de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade da média aritmética com substituição de valores extremos.	A partir desta atividade foi possível observar que os estudantes perceberam que qualquer modificação dos valores extremos de um conjunto de dados numéricos irá influenciar de maneira significativa no resultado da média aritmética.	Positiva

7	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao inserir ou retirar qualquer valor de um conjunto de números, a média aritmética será afetada por essa mudança de valores e dessa forma serão induzidos a generalizar de forma correta à propriedade da média aritmética com inclusão e exclusão de valores.	Os estudantes conseguiram perceber com maior rapidez as regularidades presentes esta atividade, chegando à conclusão que a média é sensível a todos os valores do conjunto.	Positiva
8	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que ao somar todos os produtos de cada parcela com seu respectivo peso e dividir o resultado pelo somatório dos pesos das parcelas, assim serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de média aritmética ponderada. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de multiplicação e divisão.	Percebemos que os estudantes tiveram algumas dúvidas em relação ao preenchimento do quadro, esses obstáculos foram referentes aos procedimentos do cálculo solicitado e de operações a serem realizadas. Com essa limitação superada, o objetivo da atividade foi alcançado a partir do desenvolvimento da atividade, os estudantes conseguiram visualizar as regularidades e assim concluíram que ao somar todos os produtos de cada parcela com seu respectivo peso e dividir o resultado pelo somatório dos pesos das parcelas irão obter o resultado desejado.	Positiva

9	Por meio da observação das regularidades, os estudantes devem perceber que o valor que divide uma sequência ordenada de tal forma que pelo menos a metade ou cinquenta por cento dos números sejam iguais ou maiores do que ela, e que haja pelo menos outra metade ou cinquenta por cento de números menores do que ela, assim serão induzidos a generalizar de forma correta à definição de mediana. As limitações para a resolução desta atividade poderão ser deficiências dos estudantes no cálculo envolvendo a operação de divisão.	Os estudantes fizeram suas observações e consideraram fácil a visualização de valor central em sequências que continham número ímpar de elementos, pois este valor estava explícito. Ao contrário das sequencias que continham número par de elementos, nestas não perceberam a presença de valor central num primeiro momento, mas com o auxílio do professor conseguiram visualizar qual seria este valor, bem como, verificar que é o valor que divide a sequência ordenada em duas partes iguais.	Positiva
10	Os estudantes, por meio da observação das regularidades, serão induzidos a perceber que o valor mais frequente de uma sequência de dados é a definição de moda. Consideramos que os estudantes desenvolverão a atividade em menor tempo do que o gasto nas atividades anteriores.	Com o desenvolvimento desta atividade, os estudantes não tiveram dificuldades em perceber os valores que mais se repetem em uma sequencia de números, chegando assim à ideia da moda. Todas as questões referentes a este assunto foram resolvidas sem dificuldades e em pouco tempo por parte dos estudantes.	Positiva

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Como é possível observar, as validações positivas no confronto da Análise *a priori* e da Análise *a posteriori*, apresentadas no quadro 24, apontam para resultados satisfatórios quando o ensino de medidas de tendência central é realizado com base no Ensino de Matemática por Atividades. A seguir apresentamos a relação entre as pontuações gerais, atitude em relação à matemática e o desempenho nos testes.

6.1.5 A relação entre pontuação geral, atitude em relação à matemática e o desempenho nos testes

Nesta subseção apresentamos a escala de atitudes em relação à Matemática (ver apêndice 2) que foi traduzida, adaptada e validada por Brito (1996), cujo objetivo era identificar a atitude que cada estudante possuía em relação à matemática. É composta de vinte afirmações que expressam o sentimento que cada estudante possui em relação à matemática, sendo dez afirmações positivas (03, 04, 05, 09, 11, 14, 15, 18, 19 e 20) e dez afirmações negativas (01, 02, 06, 07, 08, 10, 12, 13, 16 e 17). Segundo Trindade (2004) essa escala tem sido bastante utilizada em pesquisas educacionais nos mais variados níveis de ensino, pois os resultados comprovam sua eficácia.

A obtenção da totalidade dos pontos na escala de atitudes foi executada através da contagem da pontuação de cada afirmativa que varia de um a quatro pontos. Cada afirmativa positiva foi pontuada da seguinte maneira: 1 (um) para “discordo totalmente”, 2 (dois) para “discordo”, 3 (três) para “concordo” e 4 (quatro) para “concordo totalmente”. Para cada afirmativa negativa a pontuação foi invertida, ou seja, 4 (quatro) para “discordo totalmente”, 3 (três) para “discordo”, 2 (dois) para “concordo” e 1 (um) para “concordo totalmente”. Assim, a pontuação máxima que pode ser atingida na escala de atitudes é de 80 pontos que identifica o estudante com atitude positiva e a mínima é de 20 pontos que permite a identificação do estudante com atitude negativa em relação à matemática.

Depois de obtida a nota de cada estudante, foi feita a média da escala, que totalizou 48,92 pontos. “O sujeito que possuir uma nota inferior ao da média da escala tem uma atitude negativa e, se superior tem uma atitude positiva com relação à matemática.” (BORTOLOTI; DATTOLI, 2006, p. 5). A seguir apresentamos os resultados dos testes de acordo com a pontuação e atitude em relação à matemática.

Quadro 25: Pontuação geral, atitude em relação à matemática e desempenho nos testes

Estudante	Pontuação Geral	Atitude	Acerto	
			Pré (%)	Pós (%)
Estudante 1	46	Negativa	20%	100%
Estudante 2	59	Positiva	30%	100%
Estudante 3	48	Negativa	40%	100%
Estudante 4	44	Negativa	20%	100%
Estudante 5	68	Positiva	20%	100%
Estudante 6	32	Negativa	20%	100%
Estudante 7	49	Positiva	20%	90%
Estudante 8	46	Negativa	20%	100%
Estudante 9	48	Negativa	30%	100%
Estudante 10	49	Positiva	20%	90%
Estudante 11	45	Negativa	20%	100%
Estudante 12	55	Positiva	30%	90%
Estudante 13	51	Positiva	20%	100%
Estudante 14	50	Positiva	20%	100%
Estudante 15	50	Positiva	20%	100%
Estudante 16	45	Negativa	20%	100%
Estudante 17	57	Positiva	30%	100%
Estudante 18	43	Negativa	20%	90%
Estudante 19	43	Negativa	20%	100%
Estudante 20	68	Positiva	20%	100%
Estudante 21	42	Negativa	20%	100%
Estudante 22	48	Negativa	30%	90%
Estudante 23	43	Negativa	20%	90%
Estudante 24	45	Negativa	20%	100%

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Os dados acima mostram que os estudantes (E_6, E_9, E_{11}, E_{16}, E_{18}, E_{19} e E_{23}) apresentaram atitude negativa em relação à matemática e que têm muita dificuldade em apreender esta disciplina. O desempenho dos discentes desse grupo no pós-teste foi bastante significativo variando de 9 a 10 questões.

O percentual de estudantes que apresentou atitude negativa em relação à matemática e na maioria das vezes se distrai nas aulas dessa disciplina foi de 78,57%. Os discentes (E_1, E_3, E_4, E_6, E_8, E_9, E_{11}, E_{19}, E_{21}, E_{22} e E_{24}), que pertencem a este grupo, apresentaram desempenho excelente no pós-teste, alcançaram 100% de acertos.

Os estudantes (E_4, E_6, E_9, E_{11}, E_{21}, E_{23} e E_{24}) apresentaram atitude negativa em relação à matemática e disseram que obtêm notas iguais a cinco nesta disciplina, representando 50% dos discentes com atitudes negativas. Desse grupo de estudantes, mais de 85% dos mesmos com atitudes negativas obtiveram um rendimento excelente no pós-teste, ou seja, acertaram todas as questões.

Neste quadro, observamos uma diferença significativa entre os estudantes de atitudes negativas e positivas. Pouco mais de 70% dos estudantes com atitudes negativas preferem estudar matemática somente em sala de aula. O desempenho dos estudantes desse grupo no pós-teste foi da seguinte maneira: 3 estudantes (E_{18}, E_{22} e E_{23}) tiveram um bom desempenho no referido teste, acertaram 90% das questões e 7 estudantes (E_1, E_3, E_4, E_8, E_{16}, E_{19} e E_{24}) apresentaram desempenho excelente no pós-teste, alcançaram 100% de acertos.

Neste quadro temos que 71,43% dos estudantes apresentaram atitude negativa em relação à matemática e não recebe auxílio de ninguém nas tarefas extraclasse desta disciplina. Os discentes (E_4, E_6, E_9, E_{11}, E_{16}, E_{18}, E_{19}, E_{21}, E_{22} e E_{24}), que pertencem a este grupo, tiveram um desempenho elevado no pós-teste, acertaram, respectivamente, 10, 10, 10, 10, 10, 9, 10, 10, 9 e 10 questões cada.

De modo geral, podemos afirmar que a sequência didática realizada, revelou-se como uma eficiente alternativa metodológica para o ensino de medidas de tendência central por atividades.

A seguir, analisaremos estatisticamente, os dados obtidos nos testes aplicados, com o objetivo de tornar mais confiável as análises percentuais realizadas. Para tanto, realizamos alguns testes de hipóteses e correlações, a fim de validar estatisticamente, que a aplicação da sequência didática proporcionou a aprendizagem de conceitos relacionados às medidas de tendência central.

6.2 CORRELAÇÃO POLICÓRICA

Nesta subseção temos a finalidade de averiguar se fatores socioeconômicos, externos a experimentação, interferiram no desempenho dos estudantes nos testes. Para atingirmos este objetivo utilizamos a correlação policórica, que é usada para verificar se existe uma associação bivariada entre duas variáveis ordinais. A correlação policórica é uma medida de associação bivariada utilizada quando as duas variáveis são ordinais com 3 ou mais categorias (BISTAFFA, 2010, p. 49). O quadro a seguir apresenta a classificação para a correlação, de acordo com o resultado obtido para o coeficiente de correlação policórica (ρ).

Quadro 26: Classificação da Correlação Policórica

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	CORRELAÇÃO
$\rho = 1$	Perfeita Positiva
$0{,}8 \leq \rho < 1$	Forte Positiva
$0{,}5 \leq \rho < 0{,}8$	Moderada Positiva
$0{,}1 \leq \rho < 0{,}5$	Fraca Positiva
$0 < \rho < 0{,}1$	Ínfima Positiva
$\rho = 0$	Nenhuma correlação
$-0{,}1 < \rho < 0$	Ínfima Negativa
$-0{,}5 < \rho \leq -0{,}1$	Fraca Negativa
$-0{,}8 < \rho \leq -0{,}5$	Moderada Negativa
$-1 < \rho \leq -0{,}8$	Forte Negativa
$\rho = -1$	Perfeita Negativa

Fonte: Adaptado de Barbetta (2012, p. 258)

As informações explicitadas anteriormente destacam que o índice em questão pode ser um número negativo e, neste caso os dados apresentam correlação negativa; já para um valor positivo, uma correlação positiva. E, “em relação ao grau de associação, quanto mais próximo de 1, maior a intensidade da correlação” (LEVIN e FOX, 2012 apud SILVA, 2015. p. 161).

Será considerada a natureza ordinal intrínseca à característica de exercer a atividade remunerada uma vez que do “Não” até o “Sim” há um crescimento natural na possibilidade de trabalhar.

Sendo a natureza ordinal do par de variáveis (diferença e atividade remunerada), para avaliar o relacionamento será utilizado o coeficiente de correlação policórica. O qual é uma medida de associação bivariada utilizada quando ambas as variáveis são ordinais com três ou mais categorias. Este coeficiente estima a associação entre duas variáveis latentes X_L e Y_L, que assumem uma distribuição conjunta normal bivariada, subjacentes às duas variáveis ordinais observadas (BISTAFFA, 2010).

Segundo Ribeiro (2013) o Coeficiente de Correlação Policórica pode ser estimado pelo método de máxima verossimilhança.

Seja $f(x, y; \rho)$ a função de densidade normal bivariada entre as variáveis latentes X_L e Y_L, com $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e coeficiente de correlação ρ:

$$f(x,y;\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2\right\}.$$

Desta forma, a probabilidade conjunta de se observar o valor x_i para a variável X_L e o valor y_j para a variável Y_L é estimada por:

$$P_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x,y;\rho)dydx,$$

e a função de verossimilhança de uma amostra é:

$$L = k \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} P_{ij}^{n_{ij}},$$

onde: k é uma constante;

n_{ij} é o número de observações com $X = x_i$ e $Y = y_j$;

r e s são o número de classes de x e y, respectivamente.

O estimador de máxima verossimilhança para ρ obtém-se maximizando o logaritmo da função de verossimilhança em relação a todos os parâmetros do modelo $(\rho, x_i, \dots, x_r, y_j, \dots, y_s)$. Por exemplo, a derivada parcial de *L* em relação à ρ é:

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial\rho} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}}{P_{ij}}\left[f\left(x_i, y_j;\rho\right) - f\left(x_{i-1}, y_j;\rho\right) - f\left(x_i, y_{j-1};\rho\right) + f\left(x_{i-1}, y_{j-1};\rho\right)\right].$$

Para resolver o sistema de equações de verossimilhança resultante é necessário a utilização de métodos iterativos.

Hamdan e Martinson (1972) citados por Bistaffa (2010) criaram um procedimento para reduzir a quantidade de cálculos, denominado de estimativa de dois passos. No primeiro passo são ajustadas distribuições normal padrão para as distribuições marginais X e Y e, no segundo passo, maximiza-se *L* somente em relação a ρ. O valor de ρ que maximiza *L* dado os valores dos limiares obtidos no primeiro passo, é a estimativa da correlação policórica.

O *Software Estatístico StataSE* foi utilizado para calcular as correlações policóricas entre as seguintes variáveis: diferença das notas nos testes, exercer atividade remunerada, escolaridade do responsável masculino, escolaridade do responsável feminino, dificuldade em aprender matemática, distração nas aulas de matemática, notas em matemática e hábitos de estudar matemática.

Nos cálculos das correlações terá sempre um quadro para parametrização dos dados, outro que trará as informações com as notas dos testes, a diferença entre elas e a associação com o valor parametrizado anteriormente seguido do valor do coeficiente de correlação e da devida análise. É importante destacar que esse teste aplicado em nossa pesquisa não tem relação de variável dependente e independente, portanto o que importa é que tem uma correlação entre as grandezas envolvidas.

Iniciemos pela correlação entre a diferença das notas nos testes e o fato do estudante exercer alguma atividade remunerada.

Quadro 27: Parametrização dos dados - exercer atividade remunerada

EXERCE ATIVIDADE REMUNERADA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
As vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 28: Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercer atividade remunerada

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ATIVIDADE REMUNERADA
Estudante 1	2	10	8	1
Estudante 2	3	10	7	1
Estudante 3	4	10	6	2
Estudante 4	2	10	8	1
Estudante 5	2	10	8	1
Estudante 6	2	10	8	2
Estudante 7	2	9	7	1
Estudante 8	2	10	8	1
Estudante 9	3	10	7	1
Estudante 10	2	9	7	2
Estudante 11	2	10	8	1
Estudante 12	3	9	6	1
Estudante 13	2	10	8	1
Estudante 14	2	10	8	1
Estudante 15	2	10	8	1
Estudante 16	2	10	8	2
Estudante 17	3	10	7	1
Estudante 18	2	9	7	2
Estudante 19	2	10	8	1
Estudante 20	2	10	8	3
Estudante 21	2	10	8	1
Estudante 22	3	9	6	3
Estudante 23	2	9	7	3
Estudante 24	2	10	8	2

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Neste caso, o valor do coeficiente de correlação policórica (ρ) foi ρ = **-0,373**, número que pertencente ao intervalo $-0,5<\rho\leq-0,1$. Deste modo, considerando a classificação explicitada no Quadro 26, a correlação entre as variáveis é fraca negativa.

Deste modo, podemos inferir que a ação de exercer atividades remuneradas não fora determinante para os resultados das notas dos testes. A seguir, apresentamos a correlação entre a escolaridade do responsável masculino e a diferença das notas nos testes. Será excluída da análise o estudante que não soube informar a escolaridade do seu responsável masculino, apresentado no quadro 29 de parametrização com o código 1.

Quadro 29: Parametrização dos dados - escolaridade dos responsáveis masculinos

ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS MASCULINOS	PARAMETRIZAÇÃO
Não Sabe	1
Ensino Fundamental Incompleto	2
Ensino Fundamental Completo	3
Ensino Médio Incompleto	4
Ensino Médio Completo	5
Ensino Superior Completo	6

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 30: Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade dos responsáveis masculinos

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO ESPONSÁVEL MASCULINO
Estudante 1	2	10	8	3
Estudante 2	3	10	7	4
Estudante 3	4	10	6	3
Estudante 4	2	10	8	3
Estudante 5	2	10	8	4
Estudante 6	2	10	8	3
Estudante 7	2	9	7	3
Estudante 8	2	10	8	2
Estudante 9	3	10	7	3
Estudante 10	2	9	7	5
Estudante 11	2	10	8	5
Estudante 12	3	9	6	3
Estudante 13	2	10	8	5
Estudante 14	2	10	8	5

Estudante 15	2	10	8	3
Estudante 16	2	10	8	3
Estudante 17	3	10	7	3
Estudante 18	2	9	7	2
Estudante 19	2	10	8	5
Estudante 20	2	10	8	3
Estudante 21	2	10	8	6
Estudante 22	3	9	6	5
Estudante 23	2	9	7	2
Estudante 24	2	10	8	1

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Neste caso, o valor do coeficiente de correlação policórica (ρ) foi ρ = **0,218**, número que pertencente ao intervalo $0,1<\rho<0,5$. Deste modo, considerando a classificação explicitada no Quadro 26, a correlação entre as variáveis é fraca positiva. Dessa forma, podemos inferir que a escolaridade do responsável masculino não foi determinante para os resultados das notas dos testes.

A seguir, apresentamos a correlação entre a escolaridade do responsável feminino e a diferença das notas nos testes. Será excluída da análise o estudante que não soube informar a escolaridade do seu responsável feminino, apresentado no quadro 31 de parametrização com o código 1.

Quadro 31: Parametrização dos dados - escolaridade dos responsáveis femininos

ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS FEMININOS	PARAMETRIZAÇÃO
Não Sabe	1
Ensino Fundamental Incompleto	2
Ensino Fundamental Completo	3
Ensino Médio Incompleto	4
Ensino Médio Completo	5
Ensino Superior Completo	6

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 32: Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade dos responsáveis femininos

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO
Estudante 1	2	10	8	3
Estudante 2	3	10	7	5
Estudante 3	4	10	6	5

Estudante 4	2	10	8	5
Estudante 5	2	10	8	5
Estudante 6	2	10	8	5
Estudante 7	2	9	7	5
Estudante 8	2	10	8	5
Estudante 9	3	10	7	2
Estudante 10	2	9	7	3
Estudante 11	2	10	8	6
Estudante 12	3	9	6	2
Estudante 13	2	10	8	5
Estudante 14	2	10	8	5
Estudante 15	2	10	8	6
Estudante 16	2	10	8	5
Estudante 17	3	10	7	5
Estudante 18	2	9	7	2
Estudante 19	2	10	8	2
Estudante 20	2	10	8	5
Estudante 21	2	10	8	1
Estudante 22	3	9	6	3
Estudante 23	2	9	7	2
Estudante 24	2	10	8	4

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente policórica (ρ) foi ρ = **0,543** pertencente ao intervalo $0,5 \leq \rho \leq 0,8$, fato que, de acordo com o Quadro 26 se traduz em uma correlação moderada positiva

Deste modo, podemos inferir que a escolaridade do responsável feminino foi determinante para os resultados das notas dos testes. A seguir, apresentamos a correlação entre a dificuldade em aprender matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 33: Parametrização dos dados – dificuldade em aprender matemática

DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Um pouco	2
Muita	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 34: Correlação entre a diferença das notas nos testes e dificuldade em aprender matemática

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	DIFICULDADE EM MATEMÁTICA
Estudante 1	2	10	8	2
Estudante 2	3	10	7	2
Estudante 3	4	10	6	2
Estudante 4	2	10	8	2
Estudante 5	2	10	8	1
Estudante 6	2	10	8	3
Estudante 7	2	9	7	2
Estudante 8	2	10	8	2
Estudante 9	3	10	7	3
Estudante 10	2	9	7	2
Estudante 11	2	10	8	3
Estudante 12	3	9	6	2
Estudante 13	2	10	8	1
Estudante 14	2	10	8	2
Estudante 15	2	10	8	2
Estudante 16	2	10	8	3
Estudante 17	3	10	7	2
Estudante 18	2	9	7	3
Estudante 19	2	10	8	3
Estudante 20	2	10	8	2
Estudante 21	2	10	8	2
Estudante 22	3	9	6	2
Estudante 23	2	9	7	3
Estudante 24	2	10	8	2

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente policórica (ρ) foi ρ = **- 0,070** pertencente ao intervalo $-0{,}1<\rho<0$, fato que, de acordo com o Quadro 26 se traduz em uma correlação ínfima negativa.

Deste modo, podemos inferir que a dificuldade em Matemática não foi determinante para os resultados das notas dos testes. A seguir, apresentamos a correlação entre o fato do aluno se distrair nas aulas de Matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 35: Parametrização dos dados – distração nas aulas de matemática

DISTRAÇÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Às vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 36: Correlação entre a diferença das notas nos testes e distração nas aulas de matemática

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	DISTRAÇÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA
Estudante 1	2	10	8	2
Estudante 2	3	10	7	2
Estudante 3	4	10	6	2
Estudante 4	2	10	8	2
Estudante 5	2	10	8	1
Estudante 6	2	10	8	2
Estudante 7	2	9	7	2
Estudante 8	2	10	8	2
Estudante 9	3	10	7	2
Estudante 10	2	9	7	3
Estudante 11	2	10	8	2
Estudante 12	3	9	6	2
Estudante 13	2	10	8	3
Estudante 14	2	10	8	2
Estudante 15	2	10	8	2
Estudante 16	2	10	8	1
Estudante 17	3	10	7	2
Estudante 18	2	9	7	1
Estudante 19	2	10	8	2
Estudante 20	2	10	8	2
Estudante 21	2	10	8	2
Estudante 22	3	9	6	2
Estudante 23	2	9	7	1
Estudante 24	2	10	8	2

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente policórico (ρ) foi ρ = **0,002** pertencente ao intervalo $0<\rho<0{,}1$ fato que, de acordo com o Quadro 26 se traduz em uma correlação ínfima positiva.

Deste modo podemos inferir que a distração nas aulas de Matemática não foi determinante para os resultados das notas dos testes. A seguir, apresentamos a correlação entre as notas em matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 37: Parametrização dos dados – notas em matemática

NOTAS EM MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Abaixo de 5	1
Igual a 5	2
Acima de 5	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 38: Correlação entre a diferença das notas nos testes e as notas em matemática

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	NOTAS EM MATEMÁTICA
Estudante 1	2	10	8	3
Estudante 2	3	10	7	3
Estudante 3	4	10	6	3
Estudante 4	2	10	8	2
Estudante 5	2	10	8	3
Estudante 6	2	10	8	2
Estudante 7	2	9	7	3
Estudante 8	2	10	8	3
Estudante 9	3	10	7	2
Estudante 10	2	9	7	2
Estudante 11	2	10	8	2
Estudante 12	3	9	6	3
Estudante 13	2	10	8	3
Estudante 14	2	10	8	2
Estudante 15	2	10	8	3
Estudante 16	2	10	8	3
Estudante 17	3	10	7	3
Estudante 18	2	9	7	1
Estudante 19	2	10	8	1
Estudante 20	2	10	8	3
Estudante 21	2	10	8	2
Estudante 22	3	9	6	3
Estudante 23	2	9	7	2
Estudante 24	2	10	8	2

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente policórico (ρ) foi ρ = **- 0,225** pertencente ao intervalo -0,5<ρ≤-0,1, fato que, de acordo com o Quadro 26 se traduz em uma correlação fraca negativa.

Deste modo, podemos inferir que as notas em Matemática não foram determinantes para os resultados das notas dos testes. A seguir, apresentamos a correlação entre o hábito de estudar matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 39: Parametrização dos dados – hábito de estudar matemática

HÁBITO DE ESTUDAR MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Só estudo em sala de aula	1
1 dia na semana	2
2 dias na semana	3
3 dias na semana	4
4 dias na semana	5
5 dias na semana	6
Todos os dias da semana	7

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 40: Correlação entre a diferença das notas nos testes e o hábito de estudar matemática

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	HÁBITO DE ESTUDAR MATEMÁTICA
Estudante 1	2	10	8	1
Estudante 2	3	10	7	4
Estudante 3	4	10	6	1
Estudante 4	2	10	8	1
Estudante 5	2	10	8	2
Estudante 6	2	10	8	2
Estudante 7	2	9	7	4
Estudante 8	2	10	8	1
Estudante 9	3	10	7	2
Estudante 10	2	9	7	4
Estudante 11	2	10	8	3
Estudante 12	3	9	6	1
Estudante 13	2	10	8	4
Estudante 14	2	10	8	1
Estudante 15	2	10	8	3
Estudante 16	2	10	8	1
Estudante 17	3	10	7	3
Estudante 18	2	9	7	1
Estudante 19	2	10	8	1

Estudante 20	2	10	8	3
Estudante 21	2	10	8	3
Estudante 22	3	9	6	1
Estudante 23	2	9	7	1
Estudante 24	2	10	8	1

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente policórico (ρ) foi ρ = **0,566** pertencente ao intervalo 0,5<ρ<0,8. Deste modo, considerando a classificação explicitada no Quadro 26, a correlação entre as variáveis é moderada positiva. Assim, podemos inferir que o hábito de estudar Matemática foi determinante para os resultados das notas dos testes.

Então, para melhor entendimento das correlações que realizamos, a seguir, no quadro 41, apresentamos uma síntese.

Quadro 41: Resultados da correlação policórica

VARIÁVEL	VALOR	INTENSIDADE
Exerce atividade remunerada	– 0,373	Fraca negativa
Escolaridade dos responsáveis masculinos	0,218	Fraca positiva
Escolaridade dos responsáveis femininos	0,543	Moderada positiva
Dificuldade em aprender matemática	– 0,070	Ínfima negativa
Distração nas aulas de matemática	0,002	Ínfima positiva
Notas em matemática	–0,225	Fraca negativa
Hábito de estudar Matemática	0,566	Moderada positiva

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

As informações produzidas e explicitadas anteriormente nos mostram que, após a realização da correlação das variáveis, algumas socioeconômicas e outras sobre as impressões dos estudantes sobre a Matemática, com a diferença nas notas dos “pré” e “pós-testes”, foi possível a constatação de que as variáveis “Escolaridade dos responsáveis femininos e Hábito de estudar Matemática” interferiram nos resultados dos testes, já as variáveis “Exerce atividade remunerada, Escolaridade dos responsáveis masculinos, Dificuldade em aprender matemática, Distração nas aulas de matemática e Notas em matemática” não chegara a interferir, de modo significativo, nos resultados dos testes, bem como na diferença das notas apresentadas pelos sujeitos participantes desta etapa da pesquisa em questão.

6.3 COEFICIENTE DE CONTINGÊNCIA

Também chamado de Coeficiente de Contingência de Pearson, trata-se de um indicador do grau de correlação entre duas variáveis nominais ou ordinais, submetidas ao teste Qui-Quadrado aplicado a tabelas de contingência de qualquer tamanho (MARTINS, 2006).

O estimador do Coeficiente de Contingência é definido como apresentado a seguir:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

onde: C é o Coeficiente de Contingência;

χ^2 é a estatística Qui-Quadrado calculado para os dados;

n é o número de elementos da amostra.

A estatística Qui-Quadrado é calculada através de:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{o_i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}}$$

onde: f_o é a frequência observada;

f_e é a freqüência esperada.

O valor máximo do Coeficiente de Contingência nunca atinge a unidade, mesmo que as variáveis sejam perfeitamente correlacionadas, embora seja nulo quando não há correlação.

O valor de $C_{máx}$ poderá ser calculado se o número de linhas (ℓ) for igual ao número de colunas (c), através de:

$$C_{máx} = \sqrt{\frac{(\ell - 1)}{\ell}}$$

Para verificar se o valor observado de C indica existência de associação entre duas variáveis na população, utiliza-se o valor de χ^2 observado com gl=(ℓ -1)(c-1). Se χ^2 calculado para a amostra for significativo, a um certo nível de significância, pode-se concluir que a associação entre as duas variáveis é diferente de zero (LIRA, 2004).

O Coeficiente de Contingência (C) não varia entre 0 e 1. Tendo em vista que os coeficientes de associação entre variáveis frequentemente variam entre 0 e 1, ou entre –1 e +1, sendo que a proximidade de zero indica falta de associação entre as variáveis. Uma alternativa, então, é considerar como medida de associação o seguinte coeficiente, denominado Coeficiente de Contingência Corrigido (C*), dado por:

$$C^* = \frac{C}{\sqrt{\frac{(t-1)}{t}}} \ ,$$

em que t é o número mínimo entre o número de colunas e o número de linhas da tabela de contingência, ou seja, é o mínimo entre os níveis das variáveis envolvidas na pesquisa. C* assim determinado varia entre 0 e 1, indicando fraca correlação quando próximo de 0 e forte correlação quanto mais próximo de 1 estiver.

O *Software Estatístico BioEstat* foi utilizado para calcular o coeficiente de contingência entre as seguintes variáveis: diferença das notas nos testes e auxílio nas tarefas extraclasse de matemática.

No cálculo da correlação terá sempre um quadro para parametrização dos dados, outro que trará as informações com as notas dos testes, a diferença entre elas e a associação com o valor parametrizado anteriormente seguido do valor do coeficiente de Contingência e da devida análise. A seguir, apresentamos o coeficiente de contingência entre o auxílio nas tarefas extraclasse de matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 42: Parametrização dos dados – auxílio nas tarefas extraclasse de matemática

AUXÍLIO NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Professor particular	1
Pai	2
Mãe	3
Irmão (a)	4
Tio (a)	5
Primo (a)	6
Amigo (a)	7
Ninguém	8

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Quadro 43: Correlação entre a diferença das notas nos testes e o auxílio nas tarefas extraclasse de matemática

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	AUXÍLIO NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA
Estudante 1	2	10	8	7
Estudante 2	3	10	7	8
Estudante 3	4	10	6	4
Estudante 4	2	10	8	8
Estudante 5	2	10	8	8
Estudante 6	2	10	8	8
Estudante 7	2	9	7	7
Estudante 8	2	10	8	7
Estudante 9	3	10	7	8
Estudante 10	2	9	7	3
Estudante 11	2	10	8	8
Estudante 12	3	9	6	8
Estudante 13	2	10	8	8
Estudante 14	2	10	8	8
Estudante 15	2	10	8	6
Estudante 16	2	10	8	8
Estudante 17	3	10	7	8
Estudante 18	2	9	7	8
Estudante 19	2	10	8	8
Estudante 20	2	10	8	8
Estudante 21	2	10	8	8
Estudante 22	3	9	6	8
Estudante 23	2	9	7	3
Estudante 24	2	10	8	8

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Nesta correlação o valor do coeficiente de contingência foi C = **0,597**. Deste modo, há uma indicação de associação moderada entre o par de variáveis. Portanto, podemos inferir que o auxílio nas tarefas extraclasse de matemática foi determinante para os resultados das notas dos testes.

6.4 TESTE DE HIPÓTESES

A última parte de uma pesquisa que tem como metodologia a Engenharia Didática é a validação da sequência didática apresentada, que deve ser realizada com subsídios matemáticos plausíveis e pertinentes, deste modo, além dos dados apresentados mostrando que as notas dos estudantes melhoraram comparando o pré-teste e o pós-teste, vamos usar, considerando a quantidade de acertos de cada aluno, a Estatística de testes, para que assim possamos, com mais rigor, fazer a validação da pesquisa realizada.

Deste modo, após analisar percentualmente os resultados quantitativos obtidos nos testes, aplicamos o teste de hipótese a fim de tirar conclusões estatísticas sobre o pós-teste e, consequentemente, a metodologia de ensino adotada durante o experimento, já que este teste é reflexo, tanto dos conhecimentos que os estudantes tinham previamente acerca do assunto, quanto dos conhecimentos adquiridos no decorrer das aulas.

Para aplicação do teste de hipóteses, inicialmente consideramos as notas absolutas dos estudantes nos dois testes. Como foram 10 (dez) questões, as notas foram tabuladas de 0 a 10, de acordo com o número de questões corretas de cada estudante.

Quadro 44: Notas absolutas dos estudantes nos testes

ESTUDANTES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Estudante 1	2	10
Estudante 2	3	10
Estudante 3	4	10
Estudante 4	2	10
Estudante 5	2	10
Estudante 6	2	10
Estudante 7	2	9
Estudante 8	2	10
Estudante 9	3	10
Estudante 10	2	9
Estudante 11	2	10
Estudante 12	3	9
Estudante 13	2	10
Estudante 14	2	10
Estudante 15	2	10
Estudante 16	2	10
Estudante 17	3	10
Estudante 18	2	9
Estudante 19	2	10
Estudante 20	2	10

Estudante 21	2	10
Estudante 22	3	9
Estudante 23	2	9
Estudante 24	2	10

Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

Em seguida retiramos os dados para a aplicação do teste com base na fórmula $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}}$ onde:

$\bar{X} =$ média do pré-teste;

$\mu_0 =$ média do pós-teste;

$\vartheta =$ desvio padrão das diferenças de notas nos testes;

$n =$ número da amostra.

Com os dados presentes no quadro 36, teremos:

$\bar{X} = 2{,}292$

$\mu_0 = 9{,}75$

$\vartheta = 0{,}721$

$n = 24$

Que aplicado à equação resulta em:

$$\mathrm{t} = \frac{2{,}292 - 9{,}75}{0{,}721/\sqrt{24}}$$

$$\mathrm{t} = -50{,}675$$

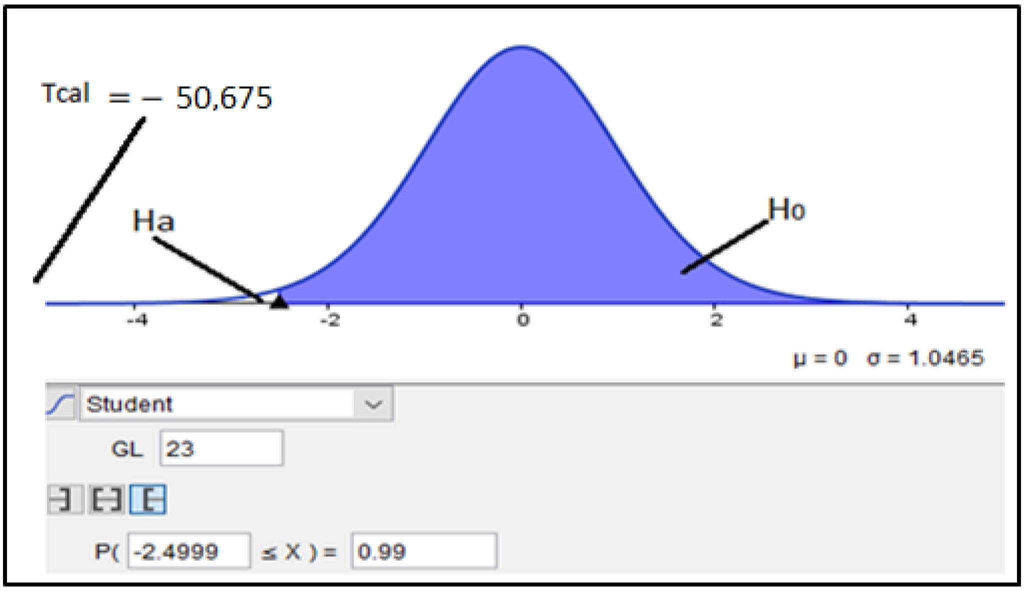
O passo seguinte foi testar as seguintes hipóteses, que são:

Hipótese nula H_0: A média do pré-teste foi maior ou igual à do pós-teste $\mu_1 \geq \mu_2$.

Hipótese alternativa H_a: A média do pré-teste foi menor que a do pós-teste $\mu_1 < \mu_2$.

Com base no resultado do teste utilizamos a curva normal para um teste bicaudal, fazendo assim a comparação do resultado com as hipóteses anteriormente levantadas. Vejamos graficamente:

Gráfico 26: Curva t de Student



Fonte: Pesquisa de campo, 2017.

A hipótese inicial está representada no espaço em azul do gráfico. Como o resultado do teste foi – 50,675, ou seja, encontra-se abaixo de – 2,4999. Neste caso, com uma confiança de 99%, rejeita-se a hipótese inicial de que H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ e aceita-se a hipótese alternativa H_a, comprovando estatisticamente que $\mu_1 < \mu_2$, isto é, o pós-teste apresentou, estatisticamente, melhores notas de que o pré-teste.

Deste modo, considerando o que foi exposto, podemos afirmar que a sequência didática realizada, revelou-se como uma eficiente alternativa metodológica para o ensino de medidas de tendência central, deste modo, podendo ser perfeitamente adotada por outros docentes, pois proporcionou significativos resultados na perspectiva da Educação Matemática, além de fornecer subsídios para os estudantes visualizarem e buscarem caminhos para resolver problemas, que é o que preconizam as recomendações dos documentos oficiais e tem sido à base das cobranças em exames, como o ENEM.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com objetivo de avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, têm sobre a participação nas aulas de matemática e no desempenho de resolução de problemas envolvendo as medidas de tendência central. E para alcançarmos tal finalidade optamos pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Neste sentido foram realizadas as análises prévias, aonde foram apresentados os aspectos históricos dos problemas envolvendo as medidas de tendência central, uma revisão de literatura sobre o tema, uma consulta a estudantes sobre o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo e a análise de livros didáticos de matemática do Ensino Médio.

O resgate de aspectos históricos envolvendo as medidas de tendência central mostrou que esses tipos de medidas fazem parte do cotidiano das pessoas desde a antiguidade e o estudo desses tipos de medidas passou a se intensificar a partir da sociedade moderna.

A revisão de estudos mostrou a influência de vários fatores no desempenho na resolução desses tipos de problemas, dentre os quais se destacam: uso excessivo de simbolismos formais, alto grau de abstração e cálculos com operações fundamentais de forma errônea. Além disso, mostrou também alguns métodos de ensino ou recursos didáticos que podem ser usados para superar as dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo, dentre os quais se destacaram: o ensino por atividades, o ensino por meio de projetos, jogos educativos e a utilização de planilhas eletrônicas.

A consulta aos estudantes mostrou que os professores, iniciam as aulas de resolução de problemas envolvendo medidas de tendência central pela definição seguida de exemplos e exercícios; utilizam listas de exercícios e/ou o livro didático como instrumento para a fixação deste conteúdo, dando indícios do predomínio da prática pedagógica tradicional. A maioria dos discentes informou que os itens relacionados à resolução de problemas envolvendo as medidas de tendência central apresentam um grau de dificuldade para a aprendizagem que está numa escala de regular para muito difícil.

Na análise dos livros didáticos do Ensino Médio, verificamos que há um predomínio de coleções analisadas que necessitam trazer um quantitativo maior de atividades propostas que englobam os conteúdos de medidas de tendência central e distribuí-los em diferentes tópicos ao longo dos volumes, ao invés de concentrá-los apenas em poucos volumes. Também constatamos que esses livros não apresentam exercícios contextualizados com a realidade regional.

Na segunda etapa da pesquisa, concepção e análise a *priori,* foram tecidos alguns comentários a respeito de tendências metodológicas para o ensino de matemática e execução de uma sequência didática para a aprendizagem de medidas de tendência central. Esta sequência didática era composta por 10 atividades envolvendo as metodologias de ensino mencionadas anteriormente.

Na terceira etapa da pesquisa, experimentação, foi descrita a aplicação da sequência didática e para se atingir essa finalidade foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: testes; questionário com informações socioeconômicas; ficha de observação, aonde foi registrado as observações feitas em sala de aula no que se referem à participação nas aulas de matemática e no desempenho de resolução de problemas envolvendo as medidas de tendência central dos estudantes. O experimento ocorreu em dez sessões de ensino de duas horas-aula cada.

Na última etapa da pesquisa, análise a *posteriori* e validação, foram analisados os resultados dos instrumentos de coleta de dados utilizados durante a aplicação da sequência didática e realizado o tratamento estatístico dos dados obtidos na etapa anterior, por meio da comparação percentual dos resultados dos testes, análise dos tipos de erros ocorridos nos testes e técnicas estatísticas, como o teste de hipótese, correlação policórica e o coeficiente de contingência de Pearson. Com a validação dos resultados realizada por meio da comparação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori,* qualitativa e quantitativamente e em consonância com o objetivo do trabalho.

Os resultados das correlações entre os fatores socioeconômicos (atividade remunerada, dificuldade em aprender matemática, distração nas aulas de matemática, notas em matemática, hábitos de estudos, auxílio nas tarefas extraclasse de matemática, escolaridade do responsável masculino e escolaridade do responsável feminino) e a diferença das notas nos testes foram na maioria ínfimas ou fracas, indicando que não houve influência de vários fatores no experimento, ou seja, não interferiram nos resultados dos testes. Portanto, o bom desempenho dos estudantes na resolução de problemas envolvendo as medidas de tendência central nos pós-testes deve-se as metodologias de ensino utilizadas durante a experimentação. A sequência didática aplicada surtiu efeito positivo na resolução desses tipos de problemas e na participação de estudantes nas aulas de matemática.

O teste de hipótese mostrou que houve uma melhora nas notas do pós-teste em relação ao pré-teste, portanto estatisticamente ocorreu um aumento significativo de desempenho do primeiro para o segundo teste do experimento. E isso comprovou o resultado satisfatório da metodologia de ensino adotada durante a experimentação.

Deste modo, esperamos com esta sequência didática contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de problemas envolvendo as medidas de tendência central, de modo a construir uma educação de melhor qualidade. E que os docentes da Educação Básica apreciem os resultados dessa pesquisa e possam utilizar essa sequência didática em suas aulas. Sugerimos o desenvolvimento de novas pesquisas envolvendo estes tipos de questões e a elaboração de atividades utilizando outros campos numéricos que não foram contemplados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 8.ed. Florianópolis: UFSC, 2012.

BISTAFFA, B. C. **Incorporação de indicadores categóricos ordinais em modelos de equações estruturai**s. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

BORTOLOTI, Roberta D´Angela M.; DATTOLI, Thaysi Santos. Atitude e desempenho escolar em matemática: algumas contribuições para a formação de professores. In: SIPEMAT (SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA), nº 1, 2006, Recife, **Anais...** Recife: UFPE, 2006, 11p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio**.** Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRITO, M. R. F. **Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. 1996. 383 f. Tese de livre docência. UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), São Paulo, 1996.

BUSIN, A. S.; ORO, N. T. **Tratamento da Informação:** conhecimento de Estatística de alunos da oitava série do ensino fundamental do município de Lagoa Vermelha. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, Brasília, **Anais...** Brasília: Universidade de Passo Fundo, 2012.

BUSSAB, Wilton de Oliveira. MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística Básica**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

CARDONA, L. ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? **Revista Virtual Universidad Católica del Norte**, Colombia, n.33, p. 234 – 247. maio – agosto, 2011.

CORREA, Rosana dos Passos. **O ensino de funções trigonométricas por atividades.** 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

DAMIN, Willian. **Ensino de estatística para os anos finais do ensino fundamental**. 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2015.

DANGIÓ, Eric Giovanni Zenatti. **O ensino de estatística no ensino médio através de projetos**. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

FARIAS A., SOARES, J.; CÉSAR, C. **Introdução à Estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

FEIO, E. dos S. P. **Matemática e linguagem:** um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática. 2009. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

FIORENTINI, Dário; NACARATO, Adair M (Orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa; Campinas: GEPFPM-PRAPEM-FE/ UNICAMP, 2005.

FONSECA, F.L. **A divisão de números racionais decimais.** 2005. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e

Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel. DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar 11**: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva. São Paulo: Atual, 2004.

LEVIN, J. **Estatística Aplicada às Ciências Humanas.** São Paulo: Harbra, 1987.

LEVIN, Jack; FOX, James Alan; FORDE, David R. **Estatística para Ciências Humanas.** 11. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas Elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LIRA, S. A. **Análise de correlação:** Abordagem teórica e de construção dos coeficientes com aplicações. 2004. 209 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2004.

LOPES, C. E.; MUNIZ, I. S. **O Processo de Avaliação nas aulas de Matemática.** São Paulo: Mercado de Letras, 2010.

LOPES, José Marcos; CORRAL, Renato Sagiorato; RESENDE, Jéssica Scavazini. O estudo da média, da mediana e da moda através de um jogo e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 2, nov. 2012.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem escolar.** 7. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

LUTZ, Mauricio Ramos. **Uma sequência didática para o ensino de estatística a alunos do ensino médio na modalidade PROEJA**. 2012. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MARTINS, G. A. **Estatística Geral e Aplicada.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

MEMÓRIA. José Maria Pompeu. **Breve História da Estatística**: Texto para discussão 21. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2004.

MIZUKAMI, Maria das Graças N; REALI, Alice Maria M. R. **Formação de professores**: práticas pedagógicas e escola. São Paulo: EDUFSCAR, 2002.

MOORE, D. A. **Estatística Básica e sua prática**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

NERES, Raimundo Luna; CANTANHÊDE, Regiane Braz da Silva. Ensinar e aprender estatística por meio de resolução de problemas. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 6, n. 1, jan - abr, 2016.

NORONHA, Gilmar Cardoso. **Contribuições da engenharia didática para o ensino e a aprendizagem da estatística na educação básica**. 2014. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

OLIVEIRA, Amsterdã Lopes de. **Ensino de estatística no ensino médio: uma aplicação no 3º ano para os alunos de Coelho Neto - MA**. 2014. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

PAIS, Luiz Carlos Pais. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

REIS, L. R. dos. **Rejeição a Matemática:** causas e formas de intervenção. 2005.

RIBEIRO, H. J. JR. **Indicador multivariado policórico:** Proposta de indicador para o diagnóstico da aprendizagem organizacional. 2013. 158 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: MARCONDES, Maria Inês; OLIVEIRA, Ivanilde A.; TEIXEIRA, Elizabeth. (Org.). **Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação**. Belém: EDUEPA, 2011.

SÀ, Pedro Franco de; JUCÀ, Rosineide de Sousa. O ensino de problemas envolvendo as quatro operações: resultados de uma abordagem ousada. In: SÀ, Pedro Franco de; JUCÀ, Rosineide de Sousa (Orgs). **Matemática por atividades:** experiências didáticas bem-sucedidas. Petrópolis: Vozes, 2014.

SALVADOR, Wesyllis das Mercês. **Análise do conteúdo de estatística descritiva no ensino médio**. 2015. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2015.

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais**. 2017. 393 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

SARAIVA, Gabrielly Nunes. **O ensino de estatística para a educação de jovens e adultos com o auxílio da planilha eletrônica**. 2015. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.

SCHNEIDER, J. C.; ANDREIS, R. F. **Contribuições do ensino de estatística na formação cidadã do aluno da educação básica.** Disponível em: http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wpcontent/uploads/2014/04/juliana_schneider.pdf. Acesso em: 16 set. 2016.

SILVA, Hugo Carlos Machado da. **O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas.** 2016. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

SILVA, Silvio Tadeu Teles da. **O ensino das funções exponencial e logarítmica por atividades.** 2014. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2014.

SIMONE NETO, Fernando de. **Análise do letramento estatístico nos livros didáticos do ensino médio**. 2008. 162 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

SOARES, Pércio J. **O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso.** 2008. 157 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

STEVENSON, William J. **Estatística Aplicada à Administração.** São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1981.

TOLEDO, Geraldo Luciano; OVALLE, Ivo Izidoro. **Estatística Básica.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 1985.

TRINDADE, Patrícia de Campos Corrêa. **As atitudes em relação à Matemática dos professores das séries iniciais**. 2004. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará. Belém, 2004.

WALICHINSKI, Danieli. **Contextualização no ensino de estatística: uma proposta para os anos finais do ensino fundamental**. 2012. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2012.

WODEWOTZKI, M. L. L. et al. Temas contemporâneos nas aulas de estatística: um caminho para combinar aprendizagem e reflexões políticas**.** In: LOPES, C. E., COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD. S. A. (Org.). **Estudos e reflexões em educação estatística**. Campinas: Mercado de letras, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

Muito obrigado!

1. Idade: _____ anos.
2. Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino
3. Você trabalha de forma remunerada? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes
4. Quem é o seu responsável masculino? ( ) Pai ( ) Avô ( ) Tio ( ) Irmão ( ) Padrasto ( ) Não tenho
5. Quem é a sua responsável feminino? ( ) Mãe ( ) Avó ( ) Tia ( ) Irmã ( ) Madrasta ( ) Não tenho
6. Até que série estudou o seu responsável masculino? _______________________
7. Até que série estudou o seu responsável feminino? ________________________
8. Qual a profissão do seu responsável masculino?___________________________
9. Qual a profissão do seu responsável feminino?____________________________
10. Você estudou o Ensino Fundamental todo em que tipo de escola: ( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Federal ( ) Particular
11. A escola onde você estuda está localizada no bairro onde você mora? ( ) Sim ( ) Não
12. Você está repetindo o 3º ano do Ensino Médio? ( ) Sim ( ) Não
13. Você está em dependência em matemática? ( ) Sim ( ) Não
14. Você tem dificuldade para aprender matemática? ( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muita
15. Você faz algum curso extracurricular? ( ) Não faço ( ) Informática ( ) Língua estrangeira ( ) Cursinho pré-vestibular
16. Você gosta de Matemática? ( ) Nenhum pouco ( ) Pouco ( ) Muito
17. Você tem dificuldade para aprender matemática? ( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muita
18. Você se distrai nas aulas de matemática? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes
19. Suas notas em matemática geralmente são: ( ) Acima de 5 ( ) Igual a 5 ( ) Abaixo de 5
20. Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola? ( ) 1 dia na semana ( ) 2 dias na semana ( ) 3 dias na semana ( ) 4 dias na semana ( ) 5 dias na semana ( ) Todos os dias da semana ( ) Só estudo em sala de aula
21. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática? ( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão(ã) ( ) Tio(a) ( ) Primo(a) ( ) Amigo(a) ( ) Ninguém
22. A maioria das aulas de matemática inicia como:

( ) pela definição seguida de exemplos e exercícios
( ) com uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) com um experimento para chegar ao conceito
( ) com jogos para depois sistematizar os conceitos
( ) com a História do assunto.

23. Para fixar os conteúdos matemáticos seu professor costuma:
( ) apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) apresentar jogos envolvendo o assunto
( ) solicitar que você resolva questões do livro didático
( ) solicitar que você procure questões sobre o assunto para resolver
( ) não propor questões de fixação.

24. Você entende matemática da forma que seu professor ensina? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

25. Você participou de algum experimento didático durante as aulas de matemática? ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE 2 – A ESCALA DE ATITUDES COM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

(AIKEN E DREGER (1961), AIKEN (1963) adaptada e validada por Brito (1996))

Instrução: Cada uma das frases abaixo expressam os sentimentos que as pessoas apresentam com relação à Matemática. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatro pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Matemática.

1. Eu fico sobre uma terrível tensão na aula de Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

2. Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

3. Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

4. A Matemática é fascinante e divertida.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

5. A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

6. "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

7. Eu tenho a sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

8. A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

9. O sentimento que eu tenho com relação à Matemática é bom.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

10. A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

11. A Matemática é algo que aprecio grandemente.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

12. Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

13. Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

14. Eu gosto realmente de Matemática.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

15. A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

16. Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Matemática me deixa nervoso(a).

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

17. Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

18. Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

19. Eu me sinto mais tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

20. Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.

( ) Discordo totalmente ( ) Discordo ( ) Concordo ( ) Concordo totalmente

APÊNDICE 3 – Teste Geral (Pré-teste/Pós-teste)

Resolva as questões a seguir:

Questão 1 – Em um grupo de dez alunos suas idades são 17 anos, 15 anos, 18 anos, 16 anos, 15 anos, 18 anos, 16 anos, 18 anos, 17 anos e 20 anos. Nessas condições, qual a média de idade desse grupo?

Questão 2 – Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 17, 16, 18, 17, 17, 18 e 23 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Daqui a cinco anos, qual será a média aritmética da idade desses alunos?

Questão 3 – Considere um grupo de alunos com as seguintes idades 22, 21, 23, 22, 22, 23 e 28 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Há quatro anos, qual era a média aritmética da idade desses alunos?

Questão 4 – Considere um grupo de residências com os seguintes consumos de energia elétrica 220, 221, 222, 225 e 227 kwh.

a) Qual é a média aritmética do consumo de energia desse grupo?

b) Se duplicarmos o consumo de cada residência desse grupo, qual será a nova média aritmética?

Questão 5 – Uma dentista distribui escovas de dente para várias crianças em escolas públicas. Assim, foram fornecidas em cada escola 8, 12, 6, 10 e 4 escovas de dente.

a) Qual é a média aritmética das escovas de dente distribuídas por escola?

b) Se reduzirmos a quantidade de escovas fornecidas em cada escola pela metade, qual será a nova média aritmética?

Questão 6 – Considere um grupo de pessoas com as seguintes idades 15, 17, 19, 22, 23 e 24 anos.

a) Qual é a média aritmética da idade desse grupo?

b) Excluindo-se o mais novo deles, que tem 15 anos, e acrescentando uma pessoa de 3 anos ao grupo, qual será a nova média aritmética?

Questão 7 – Considere um grupo de primos com os seguintes pesos 60, 70, 71, 74 e 85 kg.

a) Qual é a média aritmética do peso desse grupo?

b) Acrescentando uma pessoa de 48 kg ao grupo, qual será a nova média aritmética?

Questão 8 – Em 2016, uma universidade pagou cada um de seus 10 auxiliares um salário mensal de R$ 2.800,00; a cada um de seus 30 assistentes R$ 3.800,00; a cada um dos 20 adjuntos R$ 4.800,00 e a cada um de seus 40 titulares R$ 5.300,00. Qual o salário médio dos 100 docentes dessa universidade?

Questão 9 – Em um grupo de oito amigos suas idades são 23 anos, 22 anos, 24 anos, 16 anos, 18 anos, 20 anos, 19 anos e 26 anos. Nessas condições, qual a idade mediana desse grupo?

Questão 10 – Um técnico de segurança do trabalho, para avaliar a temperatura ambiente do setor de produção de uma fábrica, realizou treze medições, obtendo-se os valores, em graus Celsius, conforme segue: 45, 46, 38, 42, 39, 41, 37, 44, 36, 42, 40, 38 e 42. Nessas condições, qual a temperatura mais frequente desse setor?

ANEXO

ANEXO 1 – Ficha de Observação de Aula de Redescoberta

Nome do Professor:____ Nome do observador:____

Data:___/___/___ Ano: _______ Atividade: ____

Horário: Inicio:______ h Término:______ h Quantidade de alunos da turma: _____ Quantidade de grupos formados: _____

Objetivo da atividade:

Momentos	Docente	Grupo										
Organização	Dirigiu as ações? ( ) sim ( ) em partes ( ) não	**Grupos** / **Pergunta**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
	Orientou a formação das equipes?( ) sim ( )em parte ( ) não		**Os componentes foram receptivos?**									
	Demonstrou ter planejado a atividade?( )sim( )em parte( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Evitou que os alunos desperdiçassem tempo com ações alheias á organização da turma? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Desperdiçou tempo com ações alheias à organização?**									
	Foi objetivo? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Mostrou entusiasmo? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**O grupo foi formado espontaneamente?**									
	Obs:	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
		Obs:										
	Distribuiu o material necessário? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Mostrou estar atento ás orientações do professor?**									
	Mostrou estar motivado? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Mostrou segurança? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Mostrou-se motivado?**									
	Obs:	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )

Apresentação			**Demonstrou ter entendido a proposta da atividade?**									
		Sim Em partes Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
		Obs:										

Momentos	**Docente**	**Grupo**										
Execução	Deu liberdade para a equipe trabalhar livremente? ( ) sim ( ) em partes ( ) não	**Grupos** / **Pergunta**	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
	Supervisionou o desenvolvimento das ações? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Mostrou dinamismo através da interação dos componentes?**									
	Tirou dúvidas quando solicitado ou ao perceber as dificuldades? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Orientou com clareza e precisão sem constrangimento? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Conseguiu seguir as instruções previstas no roteiro com facilidade?**									
	Motivou os alunos? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Mostrou segurança? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Ficou trabalhando, fazendo a atividade, juntos?**									
	Obs:	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
			Solicitou orientação do professor?									
		Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
			Sentiu-se motivado para a execução da atividade?									
		Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Supervisionou e auxiliou o grupo quando solicitado ou quando percebeu necessidade?		**Conseguiu registrar as informações produzidas durante a execução com facilidade?**									

Sistematização	( ) sim ( ) em parte ( ) não Mostrou estar motivado? ( ) sim ( ) Em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Demonstrou segurança? ( ) sim ( ) Em parte ( ) não		**Necessitou ou solicitou orientação para o registro das informações produzidas?**									
	Obs:	Sim Em partes Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
		Obs:										

Momentos	**Docente**	**Discentes**										
Análise	Supervisionou fazendo perguntas para o grupo? ( ) sim ( ) em partes ( ) não	**Grupos** / **Pergunta**	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
	Orientou através de questionamentos para a descoberta da relação? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Descobriu uma relação válida a partir das análises das informações registradas?**									
	Motivou os grupos? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Demonstrou segurança? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		**Sentiu-se a vontade para solicitar orientação?**									
	Demonstrou motivação? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Obs		**Apresentou motivação para a análise?**									
		Sim Em parte Não	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
			Registrou na ficha sua conclusão?									
		Sim Em parte	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )

		Não										
Institucionalização	Disponibilizou o espaço no quadro à elaboração das considerações finais? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	**Registrou sua conclusão no quadro?**									
	Mostrou estar motivado para os registros no quadro pelos alunos? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Mostrou segurança para o registro no quadro pelos alunos? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em parte Não	**Mostrou-se motivado para o registro no quadro?**									
	Fez questionamentos que orientasse a elaboração de um texto adequado? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Elaborou conjuntamente com a turma a **conclusão da turma**? ( ) sim ( ) em parte ( ) não											
	Deixou claro que a atividade realizada não é uma demonstração do resultado obtido? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	Sim Em partes Não	**Elaborou uma conclusão no formato adequado?**									
	Apresentou uma formula para expressar a conclusão da atividade? ( ) sim ( ) em parte ( ) não		( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Propôs atividade de aprofundamento? ( ) sim ( ) em parte ( ) não	**Obs:**										