Universidade Do Estado Do Pará
Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sócias e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Janir Assunção Maués

Geometria Analítica a partir de Georreferenciamento: construindo aplicativos em sala de aula no Ensino Médio, via Modelagem Matemática

Belém - PA
2017

Janir Assunção Maués

Geometria Analítica a partir de Georreferenciamento: construindo aplicativos em sala de aula no Ensino Médio, via Modelagem Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Belém – PA
2017

Janir Assunção Maués

Geometria Analítica a partir de Georreferenciamento: construindo aplicativos em Sala de Aula no Ensino Médio, via Modelagem Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Data de aprovação:

Banca examinadora:

____. Orientador
Prof. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica
Universidade do Estado do Pará

____. Examinador (Interno)
Prof. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

____. Examinador (Interno)
Prof. Paulo Roberto Bibas Fialho
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

____. Examinador (Externo)

Profª. Caudianny Amorim Noronha
Doutora em Educação
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

A minha família, em especial, as minhas filhas, Ana Júlia Góes Maués e Fiama Góes Maués.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus por toda a graça concedida e, pelo discernimento e sabedoria me concedida durante as disciplinas.

Aos meus entes queridos, em especial as minhas filhas Ana Júlia Góes Maués e Fiama Góes Maués que me apoiaram, se preocuparam com meu bem estar em geral.

A universidade do Estado do Para, pela disponibilidade da vaga para que pudesse ingressar e cursar o mestrado no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, por todo apoio e pela calorosa recepção e pela qualidade da formação me concedida durante o curso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves, por toda a orientação e paciência nas inúmeras orientações que recebi, pelos esclarecimentos e norteamentos das atividades e da escrita durante a construção do texto e, nos momentos de dúvidas e dificuldades quanto ao entendimento, principalmente, no que tange a construção dessa pesquisa e do experimento didático. E, pela sua competência em orientar, pelo profissionalismo mostrado durante as orientações, pois, isso ajudou muito no esclarecimento dos limiares dessa pesquisa.

Ao prof. Dr. Pedro Franco de Sá, pela coorientação, incentivo e, pela transmissão de inúmeros saberes que me ajudaram a ser um pesquisador competente e uma pessoa melhor do que sou comprometido com o ensino, ao, Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira, coordenador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, por todos seus ensinamentos gnosiológicos muito valorosos e, por toda cordial atenção em todos os momentos de dificuldades.

Aos meus colegas José Maria, Márcio, Marcel e Wellington, pelos momentos construtivos de conversas e, companheirismo durante os traslados feitos de Abaetetuba a Belém.

E, a todos os professores do curso pelos valiosos saberes e pela formação de qualidade, transmitidos, e, ai se inclua também os membros da banca. E, a todos os funcionários do PMPEM, pela prestatividade.

RESUMO

MAUÉS, J. A. **Geometria Analítica a Partir de Georreferenciamento: Construindo Aplicativos em Sala de Aula no Ensino Médio, via Modelagem Matemática**. 2017. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

Este trabalho apresenta os resultados de um estudo sobre Construção de Aplicativos em Sala de Aula no Ensino Médio, via Geometria Analítica, com objetivo de verificar se a aprendizagem de geometria analítica torna-se mais satisfatória, a partir de uma sequência didática com construção de aplicativos. Para tanto, foram realizadas análises das escritas e dos registros de voz dos alunos participantes do experimento didático por meio da teoria dos Registros de representação semiótica de Raymond Duval (2011) e da teoria da microgênese de Piaget. O lócus de pesquisa foi uma escola pública estadual do município de Abaetetuba/PA e os sujeitos foram 32 (trinta e dois) alunos do 3° ano do Ensino Médio. A metodologia utilizada foi a Modelagem Matemática e como técnica de pesquisa adotou-se a Engenharia Didática de Michelle Artigue. Como instrumento de pesquisa foi utilizado uma sequência de atividades com 30 questões sobre definição de geometria analítica, distância de dois pontos, ponto médio, alinhamento de três pontos, equação geral da reta, coeficiente angular da reta e distância entre ponto e reta. Os resultados mostraram que alguns alunos erraram ao resolverem as questões propostas, o que implicou no tratamento e na interpretação do significado dos dados e das operações para se chegar a um resultado satisfatório e que no geral a atividade proposta apresentou médio grau de dificuldade referente à interpretação e manipulação em relação aos cálculos básicos de matemática. Por outro lado, as análises realizadas apontaram que a atividade proposta é favorável à formação do aluno como cidadão do mundo que o cerca, ao afirmarem que se sentiram bem em estudar matemática relacionada a fenômenos envolvendo problemas de seu dia a dia e que ficaram envolvidos e interessados em estudar geometria analítica. Espera-se, portanto, que em estudos futuros haja um melhoramento dessas atividades, de forma que o pesquisador possa trabalhar questões preliminares que objetivem a recuperação da base e do conhecimento matemático do aluno e treino com a interpretação.

Palavras-chave: Educação. Ensino de Geometria Analítica e Georreferenciamento. Registro de Representações Semióticas e Microgênese.

ABSTRACT

MAUÉS, J. A. **Analytical Geometry from Georeferencing: Building Applications in the Classroom in High School, via Mathematical Modeling**. 2017. f. Dissertation (Masters in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2017.

This work presents the results of a study on the Construction of Classroom Applications in High School, via Analytical Geometry, in order to verify if the learning of analytical geometry becomes more effective, from a didactic sequence with application construction . For that, analyzes of the written and voice records of the students participating in the didactic experiment were performed through the Raymond Duval (2011) semiotic representation Registers theory and Piaget's theory of microgenesis. The research locus was a state public school in the municipality of Abaetetuba / PA and the subjects were 32 (thirty two) students of the 3rd year of high school. The methodology used was Mathematical Modeling and as a research technique was adopted the Didactic Engineering of Michelle Artigue. As a research instrument, a sequence of activities was used with 30 questions on the definition of analytical geometry, distance of two points, midpoint, alignment of three points, general equation of the line, angular coefficient of the line and distance between point and line. The results showed that some students were wrong to solve the proposed questions, which implied in the treatment and interpretation of the data and operations meaning in order to arrive at a satisfactory result and that in general the proposed activity presented a medium degree of difficulty regarding the interpretation and manipulation over basic math calculations. On the other hand, the analyzes carried out indicated that the proposed activity favors the formation of the student as a citizen of the world around him, affirming that they felt good in studying mathematics related to phenomena involving problems of their day to day and that they became involved and interested in studying analytical geometry. It is hoped, therefore, that in future studies there will be an improvement of these activities, so that the researcher can work on preliminary questions that aim at the recovery of the base and the mathematical knowledge of the student and training with the interpretation.

Keywords: Education. Teaching of Analytical Geometry and Georeferencing. Record of Semiotic Representations and Microgenesis.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1. COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE PONTOS DE ABAETETUBA/PA.. 71

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: CARTA GEOGRÁFICA DA CIDADE DE ABAETETUBA/PA............ 55
FIGURA 2: APP INVENTOR DA MIT.. 59
FIGURA 3: APP INVENTOR DA MIT.. 60
FIGURA 4: APP INVENTOR DA MIT.. 60
FIGURA 5: APP INVENTOR DA MIT.. 61
FIGURA 6: APP INVENTOR DA MIT.. 61
FIGURA 7: APP INVENTOR DA MIT.. 62
FIGURA 8: APP INVENTOR DA MIT.. 62
FIGURA 9: APP INVENTOR DA MIT.. 68
FIGURA 10: APP INVENTOR DA MIT.. 69
FIGURA 11: APP INVENTOR DA MIT.. 69
FIGURA 12: APP INVENTOR DA MIT.. 69
FIGURA 13: APP INVENTOR DA MIT.. 70
FIGURA 14: APP INVENTOR DA MIT.. 74
FIGURA 15: APP INVENTOR DA MIT..., 75
FIGURA 16: APP INVENTOR DA MIT.. 75
FIGURA 17: APP INVENTOR DA MIT.. 75
FIGURA 18: APP INVENTOR DA MIT.. 76
FIGURA 19: APP INVENTOR DA MIT.. 81
FIGURA 20: APP INVENTOR DA MIT.. 82
FIGURA 21: APP INVENTOR DA MIT.. 82
FIGURA 22: APP INVENTOR DA MIT.. 82
FIGURA 23: APP INVENTOR DA MIT.. 83
FIGURA 24: APP INVENTOR DA MIT.. 87
FIGURA 25: APP INVENTOR DA MIT.. 88
FIGURA 26: APP INVENTOR DA MIT.. 88
FIGURA 27: APP INVENTOR DA MIT.. 88
FIGURA 28: APP INVENTOR DA MIT.. 89

FIGURA 29: APP INVENTOR DA MIT.. 94
FIGURA 30: APP INVENTOR DA MIT.. 95
FIGURA 31: APP INVENTOR DA MIT.. 95
FIGURA 32: APP INVENTOR DA MIT.. 95
FIGURA 33: APP INVENTOR DA MIT.. 96
FIGURA 34: APP INVENTOR DA MIT.. 102
FIGURA 35: APP INVENTOR DA MIT.. 103
FIGURA 36: APP INVENTOR DA MIT.. 103
FIGURA 37: APP INVENTOR DA MIT.. 103
FIGURA 38: APP INVENTOR DA MIT.. 104

LISTA DE IMAGENS

IMAGEM 1. ALUNO A_1 (1ª QUESTÃO)........ 126
IMAGEM 2. ALUNO A_1 (2ª QUESTÃO)........ 127
IMAGEM 3. ALUNO A_1 (3ª QUESTÃO)........ 128
IMAGEM 4. ALUNO A_2 (4ª QUESTÃO)........ 129
IMAGEM 5. ALUNO A_2 (5ª QUESTÃO)........ 130
IMAGEM 6. ALUNO A_2 (6ª QUESTÃO)........ 131
IMAGEM 7. ALUNO A_{11} (7ª QUESTÃO)........ 131
IMAGEM 8. ALUNO A_{11} (8ª QUESTÃO)........ 132
IMAGEM 9. ALUNO A_{11} (9ª QUESTÃO)........ 133
IMAGEM 10. ALUNO A_6 (10ª QUESTÃO)........ 135
IMAGEM 11. ALUNO A_{15} (11ª QUESTÃO)........ 136
IMAGEM 12. ALUNO A_{15} (12ª QUESTÃO)........ 136
IMAGEM 13. ALUNO A_{18} (13ª QUESTÃO)........ 137
IMAGEM 14. ALUNO A_{18} (14ª QUESTÃO)........ 137
IMAGEM 15. ALUNO A_{18} (15ª QUESTÃO)........ 138
IMAGEM 16. ALUNO A_{19} (16ª QUESTÃO)........ 139
IMAGEM 17. ALUNO A_{13} (17ª QUESTÃO)........ 140
IMAGEM 18. ALUNO A_{21} (18ª QUESTÃO)........ 141
IMAGEM 19. ALUNO A_{23} (19ª QUESTÃO)........ 142
IMAGEM 20. ALUNO A_{19} (20ª QUESTÃO)........ 143
IMAGEM 21. ALUNO A_8 (21ª QUESTÃO)........ 144
IMAGEM 22. ALUNO A_{24} (22ª QUESTÃO)........ 145
IMAGEM 23. ALUNO A_{22} (23ª QUESTÃO)........ 146
IMAGEM 24. ALUNO A_{22} (24ª QUESTÃO)........ 146
IMAGEM 25. ALUNO A_{16} (25ª QUESTÃO)........ 147
IMAGEM 26. ALUNO A_{31} (26ª QUESTÃO)........ 148

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.. 13

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.. 17

3. TEORIAS UTILIZADAS.. 39

3.1. MODELAGEM MATEMÁTICA.. 39

3.2. ANÁLISE MICRO GENÉTICA.. 43

3.3. SEMIÓTICA.. 45

3.4. ENGENHARIA DIDÁTICA.. 49

4. PROPOSTA DE ATIVIDADE.. 54

5. EXPERIMENTO DIDÁTICO.. 106

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS.. 118

CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 149

REFERÊNCIAS.. 152

APÊNDICE.. 160

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu de uma inquietação minha durante os anos de docência que possuo lecionando matemática no Ensino Médio em uma Escola Estadual do município de Abaetetuba - PA, ao ministrar geometria analítica nas turmas, percebia que os educandos tinham dificuldade em assimilar este conteúdo. Foi essa preocupação que me levou a refletir, sobre o que fazer para solucionar este problema.

Buscar uma definição do fio que conduzirá a reflexão que pretendo propor neste projeto, a partir do qual me instigou a identificar ferramentas que pudessem despertar nos sujeitos o prazer pela matemática, proporcionando a eles maior facilidade em assimilar o conteúdo de geometria analítica.

O estudo da geometria analítica é um dos conteúdos matemáticos que tem despertado nosso interesse e preocupação, enquanto professor do Ensino Médio, por notarmos uma grande incidência de erros sendo cometidos pelos alunos deste nível de ensino referentes ao desenvolvimento dos problemas matemáticos que apresentam interpretações gráfica e algébrica. Considerando que a dificuldade discente tem implicado em uma interferência direta no aprendizado de novos conteúdos matemáticos, especialmente os de analise gráficas, comprometendo a qualidade do aprendizado.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio dos PCN (BRASIL, 2006) o estudo da Geometria Analítica deve possibilitar aos discentes a capacidade de resolver problemas do dia a dia, por ser um estudo onde os discentes conseguem ter um olhar especial por se tratar de argumentações dedutivas.

Constatamos que um dos fatores que pode estar provocando esta incidência de erros apresentados pelos discentes, ao desenvolverem as análises nos gráficos geométricos, é a argumentações dedutivas, ou seja, é a falta de conceitos e proposições que por algum motivo não foram apreendido no momento do estudo deste conteúdo.

Ao estudar sobre o tema encontramos o trabalho de Dallemole (2010), que realizou uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática, constatou que estes apresentam dificuldades em realizar articulações entre os registros língua natural, algébrico e gráfico que envolve os conteúdos de Geometria Analítica, mesmo já tendo visto tais conceitos no Ensino Médio.

Segundo Eves (2007) as ideias concebidas por Descartes e Fermat acerca da Geometria Analítica moderna constituem um método de enfrentar problemas geométricos, e considera a introdução deste método uma experiência positiva para um aluno do curso de Ensino Médio ou início de faculdade. A ideia de coordenada, segundo o autor, já foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas.

Silva (2006) constatou que muitos alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em articular as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, além da dificuldade para compreender a diferença entre o objeto matemático e sua representação.

Dificuldades que provavelmente estão diretamente relacionados a proficiência da aprendizagem dos conteúdos e habilidades matemáticas adquiridas por parte dos educandos aferidos nos últimos levantamentos da Prova Brasil (2014), do SAEB (2014) e SisPAE (2014).

Partindo dessa linha de análise e diante dos problemas encontrados em nossas aulas cobramos respostas capazes de assegurar, no dia a dia de nossos educandos a proposta de se trabalhar com o advento da computação e de um software. O App Inventor, capaz de programar algoritmos para resolver situações do dia a dia lidando com variáveis para números, além de que com o Google Maps temos a oportunidade de trabalhar com a interdisciplinaridade envolvendo a Geografia. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo, e partindo destes fortes componentes dessa nova realidade de ensino da matemática, irei elaborar uma proposta educativa usando a Modelagem Matemática com aulas práticas, que serão aplicadas coletivamente, para que os educandos possam revisar e aprofundar os principais conceitos da geometria analítica plana partindo de sua realidade.

Segundo Valente (1999,p.107) “A possibilidade que o computador oferece como ferramenta para ajudar o aprendiz a construir o conhecimento e a compreender o que faz, constitui uma verdadeira revolução do processo de aprendizagem”.

Para Franchi (2006, p.184) a informática facilita as visualizações, testa mudanças e observa variações, e dessa forma, pode-se dizer que a inserção dos computadores no ensino de Matemática, em particular no ensino de Geometria

Analítica, trará efetivas contribuições para o ensino e também para a aprendizagem, principalmente por ser algo novo no dia a dia de nossos educandos.

Assim, este projeto foi pensado para servir de apoio para os educadores de Matemática e para tentar suprir as dificuldades que eles encontraram para trabalhar a Geometria Analítica e responder a seguinte questão: **a construção de aplicativos, a partir de uma sequência didática, voltada para o ensino de geometria analítica, e que envolve dados georreferenciados torna a aprendizagem, desse assunto, mais satisfatória?** Para isso, elegemos como objetivo geral da pesquisa: verificar se a aprendizagem de geometria analítica torna-se mais satisfatória, a partir de uma sequência didática com construção de aplicativos, que envolvam dados georreferenciados.

Para justificar a questão problema apoiamo-nos no poder que a tecnologia exerce na sociedade atual. Com os recentes avanços no campo da informática, a internet tornou-se um meio de comunicação, informação e entretenimento comum na vida de muitas pessoas, facilitando a conexão de dados por diversas formas, como por exemplo, por meio da tecnologia wireless.

Também nos apoiamos na preocupação que a tecnologia representa para os professores, onde ela pode se tornar uma aliada do docente no processo de ensino-aprendizagem. Se bem exploradas, as ferramentas tecnológicas se constituem em uma excelente oportunidade para a estruturação de atividades exploratórias que estimulem o raciocínio, a criatividade e a autonomia discentes.

Segundo Borba e Penteado (2012, p.87), “Na escola, a alfabetização informática precisa ser considerada como algo tão importante quanto à alfabetização na língua materna e em matemática”. Com esses pressupostos, visando aliar ferramentas tecnológicas ao processo de ensino-aprendizagem em matemática e analisar qualitativamente a viabilidade de sua incorporação em atividades de cunho pedagógico, nossa pesquisa procura utilizar o desenvolvimento de aplicativo como método de ensino no sistema operacional Android com uso do App Inventor desenvolvido pela Massachusetts Institute of Technology (MIT), onde os alunos vão poder programar os algoritmos de cada um dos sete tópicos da Geometria Analítica da sequência didática usando manipulações algébricas.

Em nossa pesquisa usaremos também o georreferenciamento do mapa do município de Abaetetuba-PA como informação geográfica, onde os alunos usando o Global Positioning System (GPS) dos seus smartphones para tornar suas coordenadas conhecidas num dado sistema de referência. Este processo inicia-se com a obtenção das coordenadas (pertencentes ao sistema no qual se pretende georreferenciar) de pontos do mapa do município a serem georreferenciados. Os pontos são locais como a escola e outros no bairro da escola ou próximos que oferecem uma feição física para esses alunos e perfeitamente identificável, tais como corpo de bombeiro, terminal rodoviário, praças, praias, entre outros. A obtenção das coordenadas dos pontos pode ser realizada em campo (a partir de levantamentos topográficos, GPS, ou ainda por meio das imagens ou mapas (em papel ou digitais) georreferenciados. E também o APP inventor da Massachusetts Institute of Technology (MIT) onde os alunos vão poder programar os algoritmos de cada um dos sete tópicos da Geometria Analítica da sequência didática usando manipulações algébricas. Nessa ótica, a fim de facilitar a compreensão da sequência didática adotada e do próprio experimento adotado, nessa pesquisa, pretendeu-se seguir a estrutura abaixo.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: Introdução, Seção I – Revisão Bibliográfica a qual objetiva apresentar um prévio levantamento bibliográfico das produções recentes sobre o Ensino de Geometria Analítica, Seção II – Modelagem Matemática a qual apontará os aspectos metodológicos utilizados na execução da pesquisa, Seção III – Análise Micro Genética a qual tratara das analises dos registros de voz que serão analisados a luz da teoria da micro gênese de Piaget segundo os estudos de Cabral (2004), Seção IV - Semiótica a qual usa a análise de dados os pressupostos teóricos da semiótica de Raymond Duval (2011), sobre a análise dos signos contidos na escrita dos alunos que participaram do experimento em questão, que abordará todas as análises realizadas para a conclusão desta pesquisa, Seção V - Engenharia Didática que é constituída em quatro fases, a saber: análises prévias, análise a priori, análise a posteriori e validação e Seção VI - Atividades de Modelagem contendo seis questões de geometria analítica georrferenciadas e finalmente, as Considerações Finais.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta sessão objetiva apresentar um prévio levantamento bibliográfico das produções recentes sobre o Ensino de Geometria Analítica, conforme se discorre a seguir.

Estudos que trazem um balanço e apontam para a necessidade de um mapeamento que elucide e examine o conhecimento já elaborado a respeito de determinada área do conhecimento humano, mostrando tendências e lacunas observáveis, são denominados como *estado da arte*. Sendo assim, tal *estado* liga-se à Pesquisa em Educação, especificamente, na área de Matemática voltada ao Ensino de Geometria Analítica.

A constituição do corpus deste item da pesquisa ocorreu integralmente em meio digital, momento no qual se buscou produções científicas no período de 2011 a 2016 – cinco anos. A busca pelos trabalhos adotou as seguintes metodologias de pesquisa digital:

a) utilizou-se como sistema de busca maior o Google Web para se ter acesso ao Banco de Teses da Capes através da busca básica de dissertações de mestrado sobre o Ensino de Geometria Analítica. Para tanto, se usou algumas palavras chaves sem aspas como: Ensino de Geometria Analítica, Geometria Analítica, de onde obtive-se cerca de 30 dissertações relacionadas com a temática em questão, porém, no Banco de Teses referido só se pode encontrar os resumos desses trabalhos devido a isso, decidiu-se fazer uma busca nas bibliotecas depositárias das universidades versadas por cada autor em seus resumos no banco da CAPES. Assim, encontrou-se em Banco de teses e dissertações do Mestrado Profissional de Matemática - PROFMAT nacional, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais- PUCMINAS, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sual-PUCRS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul- UFRS, Universidade Federal de Pernambuco- UFPE, Universidade Anhanguera de São Paulo-UNIBAM, Universidade Estadual de Paraíba-UEPB, Universidade Regional de Blumenau-FURB, Centro Universitário São Francisco-UNIFRA, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, Universidade São Francisco-USF, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUCSP e na biblioteca digital da UNICAMP, algumas publicações relacionadas ao tema deste artigo. Contudo, apenas algumas destas tratavam diretamente do Ensino de Geometria Analítica.

b) As principais palavras-chave, com aspas, utilizadas para a busca nas bibliotecas depositárias das universidades, versadas acima, durante a pesquisa bibliográfica feita no Banco de Teses da CAPES foram: “História da Geometria Analítica”, “Ensino de Geometria Analítica”, “Estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio”, “Geometria Analítica”, “Tratamento da informação” e “Gráficos e Tabelas”.

c) Vale ressaltar que para se ter acesso a estes documentos foi usado como sistema de busca on-line; como por exemplo, através da frase “Universidade Federal do Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Professor. Leopoldo Nachbin do Instituto de Matemática”, em seguida se acessou o ícone acervo. Em acervo eletrônico, catálogos e Bases de dados se acessou Portal de Periódicos da Universidade Federal do Ceará, logo após se acessou a base de dados MINERVA, escolhendo-se o sistema de busca simples desta base onde se inseriu o título completo da dissertação depois se buscou em acervo geral clicando-se em (1), e localizar informações usando o sistema de busca da web (google) e, por fim se escolheu a opção PDF onde se encontrou a dissertação de Santos (2014), que foi um dos trabalhos encontrados durante a pesquisa. Já ao se pesquisar nos bancos de dados de tese e dissertação da Universidade de Pernambuco (UFPE), adotou-se o seguinte critério: a) se digitou no sistema de busca da google web, “biblioteca depositária e no link, biblioteca central-UFPE, se acessou através do ícone BDTD, fez-se uma busca no “buscar DSpace”, na aba título se digitou “título completo” e, por fim, ordem ascendente. Por outro lado, ao se pesquisar sobre dissertações e teses no banco de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, por exemplo, seguiu-se a seguinte metodologia de pesquisa digital: primeiramente, se acessou por meio da web a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, que através do acesso ao setor de serviços pode-se acessar a biblioteca on-line onde se acessou o “portal de busca da biblioteca digital de Teses e Dissertações”, digitando-se em seguida nome do autor, ano de publicação e, por último se escolheu na aba “programas”, todos os programas onde se encontrou, por exemplo, a dissertação de Guedes(2013), da Universidade Federal do Espírito Santo, em sua pesquisa sobre "Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao Ensino de Geometria Analítica"; Santos(2011), da Universidade Federal de Ouro Preto, em sua pesquisa sobre “Explorando Conceitos de Geometria Analítica Plana Utilizando Tecnologia de Informação e Comunicação: Uma Ponte do Ensino Médio Para o

Ensino Superior Construída na Formação Inicial de Professores de Matemática” encontramos os resultados de um estudo envolvendo como se constitui / se caracteriza um ambiente de aprendizagem e exploração dos conceitos Retas, Circunferências e Cônicas utilizando TICEM(Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática) no Curso de Licenciatura em Matemática" e, assim por diante. Com intuito de dar prosseguimento a este estudo optou-se por não detalhar todas as outras buscas digitais feitas na google web, haja visto que, a busca pelos trabalhos de todos os outros autores citados no decorrer desta pesquisa seguiram o mesmo critério de busca e, praticamente, na mesma ordem metodológica.

A pesquisa de Santos (2014), da Universidade Federal do Ceará, em sua pesquisa sobre "Algumas Aplicações do Kig no Estudo de Geometria Analítica" encontramos os resultados de um estudo sobre problema envolvendo o que fazer para mudar a forma de ensinar matemática, sobre o que fazer para que o educando seja agende do sucesso, levando ao processo de ensino-aprendizagem algo que desperte no educando o prazer ao aprender, e teve como objetivo, apresentar a inserção do uso do computador, especificamente, o software Kig no processo de ensino aprendizagem de Geometria Analítica, de modo particular no Estudo da Reta, estudo esse feito no terceiro ano do Ensino Médio.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: uso do software livre Kig, programa da plataforma Linux, em atividades manipulativas, onde o aluno por si só, com o uso do computador constrói o conhecimento, relacionando o conteúdo fundamentado teoricamente ao conteúdo trabalhado por meio do computador.

Os resultados obtidos foram que o Kig possibilita aos alunos o manuseio com os próprios lugares geométricos, desde um ponto até as mais variadas figuras planas. Todos os assuntos de Geometria Analítica, trabalhados comumente no 3º ano do ensino médio, podem ser desenvolvidos com este software, como: localização de pontos, construção de segmentos e retas, construção de figuras planas, bem como suas propriedades, comprimento, perímetro, áreas, equações etc. Após desenvolver as atividades propostas com o Kig, os alunos visualizam e verificam a veracidade de suas soluções que, no método tradicional, se resume a números e/ou equações algébricas.

O autor concluiu que a utilização do Kig no Estudo da Reta, na Geometria Analítica, conduz os alunos a um aprendizado mais significativo, prazeroso e consistente. A utilização do computador nas aulas de Geometria Analítica distribui mais ainda as responsabilidades, não ficando apenas para o professor, o aluno se sente chamado ao aprendizado. E sugere o uso do software como uma ferramenta de melhoria no ensino da Matemática, um auxilio nas demonstrações dos conteúdos matemáticos, de modo específico, o estudo da Geometria Analítica onde o aluno visualiza de forma concreta as construções geométricas através do computador.

Nos estudos de Guedes (2013), da Universidade Federal do Espírito Santo, em sua pesquisa sobre "Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao Ensino de Geometria Analítica", encontramos os resultados de um estudo para se rever as principais propriedades da geometria plana no estudo de Geometria Analítica nas turmas do 3º ano do Ensino Médio que teve como objetivo a inserção de algumas aplicações do software GeoGebra ao ensino de geometria analítica.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: o aluno analisava certas propriedades previamente escolhidas, discutia os resultados obtidos, a partir de algumas indagações, elaborava argumentos que comprovase as observações obtidas e descrevia, de forma clara e sucinta, as relações e condições para explicar os conceitos e propriedades estudadas.

As atividades foram aplicadas em duas turmas de 3º ano do Ensino Médio, do Colégio Salesiano Jardim Camburi, Vitória – ES, no Laboratório de Informática. O trabalho prático foi desenvolvido em várias aulas, sendo aplicado, simultaneamente, no laboratório de informática e na sala de aula. Primeiramente, utilizou duas aulas para apresentar o programa GeoGebra. Depois, trabalhou algumas funções básicas com eles. Passadas essas duas aulas iniciais, aplicou-se as atividades em dupla. Cada atividade foi aplicada em um dia diferente, com espaço de um dia de intervalo entre duas atividades. Após cada atividade, executada no laboratório, os alunos tinham um tempo de, aproximadamente, uma hora para finalizar a resolução e entregar a folha com as respostas.

Durante a execução (finalização) da parte escrita, foi permitida a consulta ao livro didático, para facilitar e procurar mostrar como responder corretamente, visto que a finalidade das atividades não era avaliativa, e sim investigativa. Essa etapa do trabalho demonstrou a preocupação dos alunos em fundamentar muito bem as respostas, escrevendo-as de forma clara e objetiva.

Os resultados obtidos foram que em todas as resoluções, as respostas foram condizentes com o que foi proposto, mostrando que os alunos assimilaram bem a ideia e os objetivos do trabalho. Foi percebida, também, em vários momentos, uma preocupação por parte dos alunos em argumentar, de forma correta e clara, a resposta a ser dada. Houve muitos debates acalorados e até prolongados sobre as indagações contidas nas atividades.

O autor concluiu que com o uso do software livre de GeoGebra para obter as propriedades de geometria plana o aprendizado e o interesse dos alunos pelo conteúdo ensinado sobre Geometria Analítica aumentaram, favorecendo significadamente o ensino aprendizado, e sugeriu que o mesmo fosse usados por outros professores em suas aulas, pois muitos conteúdos, tidos como chatos e difíceis, passaram a ser mais simples e, por isso mesmo, de fácil assimilação e compreensão.

Em Santos (2011), da Universidade Federal de Ouro Preto, em sua pesquisa sobre “Explorando Conceitos de Geometria Analítica Plana Utilizando Tecnologia de Informação e Comunicação: Uma Ponte do Ensino Médio Para o Ensino Superior Construída na Formação Inicial de Professores de Matemática” encontramos os resultados de um estudo de como se constitui/ se caracteriza um ambiente de aprendizagem e exploração dos conceitos de Retas, Circunferências e Cônicas utilizando TICEM (Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática) no Curso de Licenciatura em Matemática", que teve como objetivo apresentar/discutir o ensino de Geometria Analítica Plana na perspectiva da Educação Matemática nos Ensinos Médio e Superior, visando contribuir para a formação de futuros Professores de Matemática.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: O trabalho fundamentou-se teoricamente em reflexões de autores que pesquisaram a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica. A pesquisa de campo foi realizada com alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, a partir do desenvolvimento de atividades exploratórias utilizando o software GeoGebra.

Os resultados obtidos apontam que o ensino de Geometria Analítica Plana utilizando o software GeoGebra contribuiu para a constituição / caracterização de um ambiente capaz de privilegiar as ações dos nossos alunos na construção do conhecimento matemático, proporcionando ricas possibilidades de visualização de conceitos e propriedades, além de privilegiar a experimentação e dar ênfase à interpretação de construções geométricas que são difíceis de serem trabalhadas em sala de aula.

O autor concluiu que na formação de futuros Professores de Matemática, a importância de se construir conhecimento de uma forma ativa, na perspectiva de que esse conhecimento seja significativo para os seus alunos; que a experiência do trabalho de experimentação, visualização e conjecturação deverá ser lembrada em sua prática pedagógica, quando em futuras atividades docentes; e que é possível estabelecer, então, uma “ponte” do Ensino Médio para o Ensino Superior que, na realidade, no parecer do autor deve ser de mão dupla. E sugeriu que esse trabalho sirva como uma mola propulsora para novas pesquisas que intentamos, a partir de agora, desenvolver em nossa sala de aula, especialmente, investigações sobre aplicações da Geometria Analítica na perspectiva da Modelagem Matemática que, apesar de não ter sido o foco da presente pesquisa, parece para ele um terreno extremamente fértil.

Em Silva (2015), da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, em sua pesquisa sobre “Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem” encontramos os resultados de um estudo envolvendo a utilização da ferramenta informatizada, o software GeoGebra aliado as construções históricas relacionados aos conceitos de geometria possibilitam que o aluno reveja e relacione vários resultados e construções da geometria analítica ampliando dessa forma, o leque de situações apresentadas pelo professor a seus alunos, que teve como objetivo: estudar é propor caminhos para o ensino da geometria analítica tendo como base três eixos norteadores: A história das geometrias, a proposição de problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto pela geometria plana como pela geometria analítica e o uso da ferramenta tecnológica através do software GeoGebra.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: pesquisa bibliográfica que teve como base materiais didáticos de geometria analítica, sendo selecionados: dois livros didáticos disponibilizados em escolas públicas estaduais de ensino médio e um livro didático para o ensino universitário e uma revista voltada para formação de professores de matemática.

Os resultados obtidos foram que o presente estudo possibilitou propor caminhos alternativos para o processo de ensino e aprendizagem da geometria, de modo a possibilitar ao aluno construir e conhecer diversas propostas na resolução de problemas de geometria analítica.

O autor concluiu que o uso do software GeoGebra, para representar e explicitar os passos para resolução de problemas de geometria analítica leva ao aluno, além, de constatar uma propriedade geométrica a de sentir necessidade de complementar a sua aprendizagem, com a demonstração da validade daquela propriedade. Isso acontece devido o software permitir a manipulação dos objetos construídos preservando as características inerentes definidas em sua construção, possibilitando assim, a percepção de padrões e invariâncias. E sugeriu a realização de pesquisas voltadas para um maior aprofundamento das possibilidades do software GeoGebra para o processo de ensino e aprendizagem de outros problemas que utilizem a geometria clássica e analítica e, que tenham conexão com história da matemática.

Em Halberstadt (2015), da Universidade federal de Santa Maria, em sua pesquisa sobre "A Aprendizagem da Geometria Analítica do Ensino Médio e suas Representações Semióticas no GrafEq" encontramos os resultados de um estudo envolvendo o delineamento de uma pesquisa de mestrado envolvendo alunos do terceiro ano do Ensino Médio, a qual tem por objetivo estudar a compreensão de conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio com o uso do software GrafEq.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: pesquisa de cunho qualitativo cuja metodologia de ensino e pesquisa adotada foi a Engenharia Didática, que foi aplicada junto a uma turma de alunos de uma escola da cidade de Santa Maria/RS, como aporte teórico adotou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, as atividades que compõem a sequência didática foram planejadas com o uso do software GrafEq e em algumas atividades fez-se uso do software GeoGebra.

Os resultados apontaram para a consolidação do reconhecimento dos objetos abordados nos seus diferentes registros de representação semiótica, condição prioritária para a sua compreensão.

O autor concluiu que as atividades da sequência contribuíram para o reconhecimento e compreensão das variáveis visuais pertinentes dos registros algébricos dos objetos abordados e verificou que, de modo geral, houve um desenvolvimento dos alunos ao longo da dinamização da sequência didática, isto é, uma melhora na compreensão dos objetos matemáticos abordados.

Em Righetto (2015), da Universidade Estadual Paulista JULIO DE MESQUITA FILHO, em sua pesquisa sobre "Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio" encontramos o resultado de um estudo com o objetivo de apresenta uma proposta de ensino aprendizagem para problemas de Programação Linear e sua solução geométrica, para o caso de duas variáveis.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: foi aplicado em sala de aula um pré-teste para avaliar o conteúdo proposto com o objetivo de verificar a necessidade de refazer ou acrescentar alguns problemas, através de uma sequência didática com resolução de problemas apresentando uma ordem crescente de dificuldade, foi apresentado uma breve revisão do conteúdo de Geometria Analítica, desigualdades lineares e por meio de uma linguagem simples, como modelar e resolver problemas de Programação Linear que estão presentes em nosso cotidiano para que o aluno chegue ao conceito matemático por meio de suas descobertas.

O autor concluiu que uma das principais dificuldades dos alunos está na parte da modelagem matemática do Problema de Programação Linear. Essa dificuldade está nitidamente relacionada com a dificuldade na interpretação de texto, fato que claramente ocorre com os alunos que têm pouco hábito de leitura.

Da análise dos resultados do pré-teste e para os professores que pretendam utilizar esta sequência didática em sala de aula o autor sugere: uma maior atenção no desenvolvimento da modelagem matemática, com o acréscimo de mais alguns problemas, pois acreditamos foi isto que faltou para um melhor êxito no problema 10. Que cada problema seja cuidadosamente trabalhado tendo em vista que a resolução de alguns problemas de nossa sequência didática depende da solução correta de problemas anteriores.

E diz também que para uma adequada aplicação desta proposta de ensino em sala de aula e utilizando-se a resolução de problemas como uma forma para se ensinar matemática, conforme preconizada por Onuchic (1999) e Van de Walle (2009), sejam necessárias pelo menos 8 aulas de 50 minutos cada uma.

Segura (2013) desenvolveu atividades relacionadas à Geometria Analítica fazendo uso do software GeoGebra, guiando suas atividades, para ao final ter obtido a releitura de uma obra Kandinsky. Na oportunidade, a autora abordou temas sobre o Ensino de Matemática, o uso de tecnologias e do GeoGebra, Abstracionismo e Releituras de Obras de Arte, método convencional do ensino de Geometria Analítica, e trouxe propostas para uma nova abordagem usando o software GeoGebra. De forma muito interessante em seu trabalho, a autora buscou não apenas usar o software para mostrar as propriedades da Geometria Analítica, mas também usar algumas de suas ferramentas para fazer um estudo mais aprofundado dessas propriedades, além de trazer fortemente a ideia da interdisciplinaridade.

Ao encerrar sua pesquisa, Segura (2013) apresenta numa de suas conclusões, em relação ao uso de tecnologias para desenvolver sua aula, a seguinte consideração:

> Considerando a aceitação por parte dos alunos, não restam dúvidas de que o ensino da Matemática com a utilização da tecnologia não apenas desperta um maior interesse pela aprendizagem, mas possibilita a aquisição da aprendizagem de forma mais efetiva, uma vez que o aluno não é apenas ouvinte, ou mero reprodutor do conhecimento, mas tem participação ativa, questionando, conjecturando, criando, pensando nos conceitos de maneira mais ampla e construindo seu conhecimento. (SEGURA, 2013, p.83)

Em Oliveira (2014), da Universidade Federal Rural do Semi-árido - Rio Grande do Norte, em sua pesquisa com o tema "O Software GeoGebra como Ferramenta para o Ensino da Geometria Analítica" encontramos os resultados de um estudo sobre o uso de novas tecnologias no ensino de Geometria Analítica que teve como objetivo propor uma metodologia diferenciada de ensino da Geometria Analítica Plana no terceiro ano do ensino médio da EEM Liceu Vila Velha, em Fortaleza-CE, com o auxílio do software GeoGebra.

A metodologia consistiu das seguintes etapas: construções que envolvem os conteúdos básicos da geometria analítica. Um estudo histórico da geometria analítica e sua importância na atualidade. Um estudo da importância e as contribuições que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) podem fazer para o ensino da matemática, bem como as orientações provenientes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que incentivam a utilização das TICs. Para um melhor desenvolvimento do trabalho é realizado um aprofundado estudo do software GeoGebra. Logo após as atividades propostas, feito um estudo de caso realizado com uma turma do terceiro ano do ensino médio na EEM (Escola de Ensino Médio) Liceu Vila Velha, neste estudo foram analisados tanto os resultados qualitativos como também a opinião dos alunos sobre o uso das TICs em sala de aula e mais especificamente do GeoGebra como ferramenta para o ensino da geometria analítica.

Os resultados obtidos foram condizente ao esperado, que de fato a utilização do software GeoGebra contribui para a melhoria do aprendizado da Geometria Analítica. Outra observação importante foi o aumento do interesse em aprender, participar e interagir por parte dos alunos, fazendo com que o aluno saia da sua situação de conforto e passe a ser protagonista no processo de ensino-aprendizagem.

O autor concluiu que o trabalho cumpre seu objetivo a partir do momento em que um colega professor sentir curiosidade, motivar-se, ou até mesmo, propagar o uso das TICs em sala de aula, principalmente no que diz respeito ao uso do software GeoGebra nas aulas de Geometria Analítica. E pesando em uma perspectiva futurista, o autor diz que o avanço das TICs e o desenvolvimento cada vez mais aprimorado do GeoGebra, permitirão futuras abordagens deste trabalho, tornando-o aberto a novos olhares e ao desenvolvimento de novas metodologias que possam contribuir para o enriquecimento das práticas pedagógicas e melhorar o ensino-aprendizado da matemática. O autor observou com relação às limitações, a que mais pesou de forma negativa foi a defasagem no aprendizado da matemática básica, apresentada pela maioria dos alunos que participaram da pesquisa. E sugeriu que a resolução desse problema deve ser feita de forma prévia, visto que para o desenvolvimento das atividades é necessário o domínio de conteúdos do ensino fundamental, tais como o teorema de Pitágoras e operações com números decimais.

Em Bacca (2013), da Universidade Regional de Blumenau, em sua pesquisa com o tema "Geometria Analítica na Educação Básica: Primeiros Passos no Plano Cartesiano" encontramos uma proposta de atividades didáticas, em vários momentos do currículo escolar, buscando contribuir, a partir de diferentes abordagens, para uma melhor compreensão do plano cartesiano e dos conceitos elementares da geometria analítica que teve como objetivo: propor atividades didáticas que envolvam os conceitos elementares do mesmo, buscando contribuir, a partir de diferentes abordagens, para uma melhor compreensão do plano cartesiano e dos conceitos elementares da geometria analítica em vários momentos do currículo escolar.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: primeiramente foi feita uma avaliação diagnóstica, onde foram identificadas as dificuldades encontradas por estudantes em relação aos conceitos elementares do plano cartesiano. Em seguida as atividades que compõem o produto educacional foram elaboradas a partir da avaliação diagnóstica. Essas atividades foram aplicadas com estudantes de Licenciatura em Matemática, Engenharias e Educação Básica. As sugestões e observações feitas pelos estudantes durante a aplicação das atividades didáticas foram verifica das e, posteriormente incorporadas nas atividades e nas considerações didáticas de cada atividade. Por meio de textos sobre história e filosofia da matemática apresentaram-se atividades que permitiram ao estudante verificar a relação existente entre a álgebra e a geometria, antes e depois da publicação de La Géométrie de Descartes, em 1637. Tais atividades possibilitam a compreensão das diferentes representações geométricas de uma mesma expressão algébrica, conceito fundamental ao se trabalhar com a geometria analítica. No produto educacional também foi colocado texto enfocando as aplicações do plano cartesiano e dos conceitos elementares da geometria analítica na atualidade, assim como atividades contextualizadas. O produto educacional da dissertação foi aplicado a 164 estudantes de escola pública estadual, localizada no município de Blumenau, com o apoio de bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência da Universidade Regional de Blumenau - Edital 2010.

Os resultados obtidos por meio das atividades diagnósticas revelaram que grande parte das dificuldades encontradas pelos estudantes refere-se aos conteúdos do Ensino Fundamental. Ao final da aplicação da atividade, foi constatamos que praticamente todos os estudantes que erraram a localização de pontos na reta, consequentemente, não responderam corretamente a pergunta "c" (Existem números entre 6,9 e 7? Justifique sua resposta.). Outro fato interessante, o qual surgiu na resposta de alguns alunos, é a não compreensão do significado de um número escrito na forma de fração. Por exemplo, quando tinham que localizar os números 4/3 ou 2/5, muitos não sabiam onde localizá-los.

O autor concluiu que parte das dificuldades encontradas pelos estudantes refere-se aos conteúdos do Ensino Fundamental, pois há uma frágil compreensão da reta numérica e dos números negativos, cujo conhecimento é fundamental para a localização de pontos no plano cartesiano e no entendimento da geometria analítica e que não sabem escrever números fracionários em suas outras representações, no caso a decimal.

E sugere que as atividades propostas, utilizando o desenho da régua centimetrada, sejam realizadas com os estudantes no início dos estudos de geometria analítica. A régua é um instrumento que os estudantes manuseiam, fazendo parte do espaço sensível do estudante, permitindo dominar, de uma forma mais simples, a representação da reta numérica real. Com o desenho da régua no lugar da reta numérica, os estudantes conseguiram, com uma maior facilidade, localizar os pontos solicitados. Estava mais claro para eles localizarem 1,2 centímetros do que o número 1,2 em si, pois o 1,2 centímetros representava 1 centímetros e 2 milímetros, o que estava dando inicialmente a experiência e a representação de seu domínio para daí então partir para a reta numérica.

Após representar a reta numérica com a régua, o autor sugere que passamos a representa-las como eixos cartesianos posicionando-as perpendicularmente. Inicialmente, posicionaram-se duas réguas que representavam o 1º quadrante do plano cartesiano e após foram mostrados os outros quadrantes. Para determinarmos pontos neste plano, ainda não utilizamos a escrita convencional (x, y) e sim, partimos da linguagem de domínio do estudante: a ideia do deslocamento horizontal (x) e vertical (y) em cada régua para fazer a localização. Além de o estudante poder localizar pontos sobre e régua, ele pode localizar pontos no plano determinado entre as duas réguas.

Em Correia (2011), da Universidade Federal de Ouro Preto, em sua pesquisa com o tema "Aprendizagem Significativa, explorando Alguns Conceitos de Geometria Analítica: Pontos e Retas" encontramos os resultados de um estudo sobre a aprendizagem significativa de alguns conceitos de Geometria Analítica que teve como objetivo: pesquisar as contribuições da utilização das tarefas de investigação e exploração, com a utilização de softwares de geometria dinâmica para a aprendizagem significativa de alguns conceitos de Geometria Analítica, se limitando a pontos e retas.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: foram utilizados como referenciais teóricos as ideias de João Pedro da Ponte (atividades investigativas e exploratórias) e a Teoria de David Ausubel (Aprendizagem Significativa). Para a sua realização, foi proposta uma sequência de atividade, realizada pelos sujeitos da pesquisa, futuros professores de matemática da

Educação Básica de um Instituto Superior de Educação. A pesquisa teve aspectos qualitativos, preponderantes sobre os aspectos quantitativos. Como instrumento inicial de coleta de dados foi elaborado um questionário, com o intuito de conhecer os sujeitos da pesquisa, sua vida acadêmica e o tempo destinado aos estudos, bem como sua trajetória no Ensino de Geometria. Foi elaborado um pré-teste com a finalidade de verificar quais eram suas habilidades e quais embasamentos traziam de suas experiências.

Os resultados obtidos foram que as atividades de investigação e exploração aliadas ao software GeoGebra possibilitaram provocar aprendizagem significativa por descoberta, por recepção a partir da utilização dos organizadores prévios, em 100% das tarefas realizadas conforme o quadro 17(abaixo). Os resultados do pós-teste e os relatos dos sujeitos da pesquisa demonstraram que os objetivos foram alcançados. Ocorreu a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e ao mesmo tempo foi propiciada uma prática útil para a futura atuação profissional a todos os pesquisados.

Aprendizagem significativa	**Tarefas**				
	01	**02**	**03**	**04**	**05**
Por descoberta	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Por recepção	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
Utilização de organizadores prévios	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Quadro 17: Tipos de aprendizagem significativa, obtidas com a realização das atividades investigativas e exploratórias.

O autor concluiu que as tarefas de exploração e investigação por meio da utilização de softwares de geometria dinâmica, no caso o GeoGebra, constituem importante instrumento para a formação dos professores de Matemática. Esta formação contempla tanto a construção do conhecimento matemático quanto a aquisição da prática pedagógica para a futura atuação na sala de aula de Matemática na Educação Básica.

Como sugestões para pesquisas futuras relacionadas a esse tema, o autor sugere a possibilidade de outras inter-relações entre atividades de investigação e aprendizagem significativa em outros conteúdos de Matemática. Também em outras instâncias que não a formação de professores, mas também com alunos da própria Educação Básica. No entanto, o desenvolvimento de tais pesquisas exigirá uma adaptação.

Em Fiegenbaum (2015), da Universidade Federal de Santa Maria, em sua pesquisa com o tema “Elementos de Geometria Analítica: Uso do Aplicativo Grafeq na Reprodução de Obras de Arte” encontramos os resultados de um estudo sobre o uso das tecnologias no ensino da Matemática, mais especificamente, o software GrafEq para desenvolver atividades de Geometria Analítica que teve como objetivo: apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem de elementos da Geometria Analítica usando um software que permite a construção de elementos geométricos, associando o estudo de Matemática e Artes, oportunizando aos alunos um olhar diferente para esses conteúdos e ampliando sua percepção sobre a matemática presente no nosso cotidiano.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: aplicação de atividades ao longo de cinco semanas a duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal Rio Grande do Sul, Campus Ibirubá, que abordavam a compreensão do plano cartesiano, o estudo de retas, as condições de paralelismo e perpendicularismo e a equação reduzida da circunferência e da elipse. A maior parte das atividades foi abordada a partir de uma obra da arte, que ao final de cada etapa, era reproduzida no aplicativo GrafEq. Após o desenvolvimento das atividades relacionadas aos conteúdos, os alunos foram desafiados a reproduzirem uma obra de arte diferente das trabalhadas anteriormente, sem muitas interferências. Análise qualitativa dos dados relacionando-se o relato de experiência das atividades realizadas referentes aos conteúdos matemáticos com os registros apresentados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade final que envolvia a reprodução de uma obra de arte.

Os resultados obtidos na atividade final ficaram dentro do esperado, ou seja, satisfatórios. Os alunos mantiveram as proporções da obra original, se reproduziu todos elementos da obra, foram fieis aos detalhes, apresentaram os cálculos necessários para encontrar as equações que foram utilizadas e apresentaram de maneira organizada as atividades e que o uso das tecnologias pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

O autor concluiu que os alunos tiveram êxito ao reproduzir uma obra de arte, apresentando trabalhos ricos em detalhes e réplicas cujos elementos geométricos foram muito próximos das obras originais. O fato de, em sua maioria, os alunos terem alcançado os objetivos propostos, levou-o a pensar que as atividades previamente realizadas foram importantes para compreensão dos conteúdos trabalhados.

Em Leite (2015), da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, em sua pesquisa com o tema “Cônicas e gráficos de funções de uma variável” encontramos os resultados de um estudo sobre os conceitos de expressões, equações e funções nas cônicas que teve como objetivo: apresentar conteúdos necessários para a construção de uma base sólida em Matemática do Ensino Fundamental e Médio, mas que são em geral mal assimilados pelos alunos.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: inicialmente foi apresentado o plano cartesiano, equações de uma e duas variáveis, funções de uma variável real e gráfico de funções. Depois então o estudo de curvas simples e bem conhecidas dos alunos em geral, como a circunferência, e chegou até as cônicas rotacionadas. A partir daí, procurou-se relacionar as duas partes do trabalho, mostrando como as cônicas podem ser vistas como gráficos de função de uma variável. Por fim foram propostas atividades teóricas e computacionais, utilizando o software GeoGebra para construção de curvas no plano cartesiano.

Os resultados obtidos foram: que uma parte de uma curva que representa uma cônica pode ser gráfica de função, independente do eixo, porém ficou uma proposta lançada, pois inicialmente o desejo era trabalhar também as quádricas, trabalho que alcançaria um volume muito maior, mas o resultado foi a contento, pois se pode mostrar, inclusive com o apoio do GeoGebra, quais são essas funções.

O autor concluiu que foi possível atingir o objetivo de mostrar, com o apoio de programas matemáticos, maior ênfase o GeoGebra, mas o Maple também foi utilizado, a construção de funções diversas, a fim de estimular e atrair os alunos que tem facilidade com as mídias, mas não gostam do lápis, papel e caneta. Algumas atividades foram implantadas em sala de aula de forma muito proveitosa e algumas foram apenas propostas.

Em Luminati (2015), da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, em sua pesquisa com o tema “A Matemática dos Sistemas de Localização por Satélites” encontramos os resultados de um estudo sobre a Matemática utilizada nos sistemas de localização e navegação que teve como objetivo: despertar a curiosidade e o interesse pela Matemática apresentando um pouco da matemática utilizada pelo homem desde a antiguidade em sistemas de localização e navegação, começando pela marcação de estrelas no céu, passando pela bússola, pelo astrolábio, pelo quadrante, pelo sextante, e terminando com a apresentação do GPS – Sistema de Posicionamento Global por Satélites.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: foram abordados conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial como distância entre dois pontos no plano e no espaço, colinearidade e coplanaridade; foram apresentamos a circunferência e seus elementos, sua equação cartesiana e também o conceito de trilateração; a superfície esférica e seus elementos, suas intersecções com planos, sua equação cartesiana, o teorema da intersecção de quatro superfícies esféricas no espaço tridimensional, sendo este teorema fundamental para o entendimento dos sistemas de localização por satélites, e em particular, o GPS, as coordenadas geográficas e cartesianas de um ponto na superfície terrestre e as transformações de coordenadas geográficas em cartesianas e vice-versa; os principais instrumentos de localização utilizados pelo homem desde a antiguidade, terminando com a apresentação do GPS, o sistema de posicionamento global com o uso de satélites artificiais. Por fim, foram propostas duas atividades educacionais incluindo a construção de uma maquete em escala representando a Terra e as órbitas dos satélites GPS e a determinação das coordenadas geográficas de um ponto da superfície terrestre utilizando as efemérides transmitidas por quatro satélites. O público-alvo destas atividades foram os alunos do terceiro ano do ensino médio regular.

Os resultados obtidos foram atividades para serem desenvolvidas pelos professores do Ensino Médio que podem ser adaptadas de acordo com a realidade e possibilidade de cada escola.

O autor concluiu que o uso de softwares educacionais, no caso os softwares gratuitos GeoGebra e Microsoft Mathematics, nas atividades é mais um fator facilitador para o aprendizado do aluno. E sugeriu que as atividades sejam desenvolvidas pelos professores do Ensino Médio.

Em Pereira (2013), da Universidade Federal de São Carlos, em sua pesquisa com o tema “Futebol: A Geometria Analítica no Campo” encontramos os resultados de um estudo sobre as medidas usadas em um campo de futebol para ensinar geometria analítica aos alunos do ensino médio público que teve como objetivo: levar os alunos a descobrirem como fazer os cálculos básicos da geometria analítica usando o modelo de um campo de futebol e suas medidas, e que entendam na prática como as fórmulas podem facilitar os cálculos.

A metodologia da pesquisa consistiu das seguintes etapas: elaboração do material para que os alunos o fizessem em grupos de duas ou três pessoas em cada equipe. Além da folha de atividades, cada grupo tinha à sua disposição em sala de aula o campo de futebol com os 22 jogadores. A sequência didática foi composta por 20 atividades organizadas por nível de dificuldade e com dependência dos resultados umas das outras. Cada uma das atividades teve por objetivo levar o aluno a aprender os conhecimentos básicos da geometria analítica, tomando como ponto de partida a distância entre dois pontos do plano cartesiano. Estas atividades foram aplicadas na 3ª série do Ensino Médio. Todas as atividades foram desenvolvidas com o uso do campo de futebol e dos 22 jogadores, porém sempre que necessário eram feitas retomadas de conteúdo e introduções ou exercícios extras com o livro didático volume 3 da Coleção Novo Olhar, de Joamir Souza.

Os resultados obtidos foram: dedicação dos alunos, onde a todo momento, durante as aulas questionavam e participavam demonstrando uma dedicação nunca antes vista nesta sala de aula. O conteúdo foi atingido e os alunos adquiriram rapidez nas contas, trabalharam com raiz não exata, dízimas periódicas e equações. A disciplina da sala melhorou consideravelmente, houve muita participação, envolvimento, trabalho em equipe e até mesmo a frequência, pois os alunos que faltavam todas as sextas feiras passaram a vir devido ao interesse pelo assunto, por se tratar de futebol.

O autor concluiu que o material de ensino produzido funcionou, pois atingiu seus objetivos principais, sendo o maior deles o aprendizado do aluno e sugeriu que o material elaborado possa ser útil a outros professores que desejarem desenvolver o tema proposto em suas aulas, fazendo as adaptações necessárias às suas turmas. Para ele o campo de futebol mostrou se como um material viável e potencialmente importante no ensino da geometria analítica, podendo ainda ter outras aplicações, como nas aulas de Física, ou até mesmo na matemática do Ensino Fundamental com as equações, áreas e perímetros.

Neto (2013), da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, em sua pesquisa apresentou um novo conceito de distância: a do táxi e aplicações com objetivo de apresentar uma nova noção de distância, bem como compará-la com a noção usualmente conhecida e aplicá-la na definição de dois lugares geométricos específicos.

Apresentou uma proposta de atividades abordando a distância euclidiana e a distância do táxi na qual os objetivos são o de consolidar o uso de coordenadas cartesianas no plano, construção e relação entre conceitos matemáticos específicos, a saber, distância entre dois pontos e dois lugares geométricos particulares: a circunferência e a elipse.

A primeira e a segunda atividade o autor diz que possuem como base, desenvolver uma visualização geométrica, permitindo ao aluno por meio de uma linguagem informal, chegar ao conceito de distância euclidiana entre dois pontos, relacionando-a com o Teorema de Pitágoras.

Segundo o autor as atividades seguintes, terceira e quarta, trazem também através de uma linguagem informal, questões onde o aluno estabelecerá um novo conceito de distância na nova Geometria, a distância da Geometria do Táxi.

Na quinta atividade, o mesmo diz que o aluno terá oportunidade de perceber a mudança na forma geométrica da circunferência na Geometria do Táxi. E que para isso, a atividade traz questões que conduz o aluno a reconhecer a forma geométrica da circunferência ao aplicar o novo conceito de distância. O autor descreve uma recomendação metodológica para cada atividade.

O autor concluiu que a Geometria do Táxi permite uma nova visão sobre o ensino da matemática, pois possibilita uma simulação de movimentos mais adequada nos espaços urbanos e também analisar algumas formas geométricas utilizando a distância do táxi. É essencial a abordagem de temas mais atualizados e mais completos no âmbito educacional, proporcionando assim aulas mais dinâmicas e contextualizadas com a realidade dos alunos.

Desta forma, compreenderam estar despertando maior interesse e compreensão dos temas por parte dos alunos, e por consequência, levando-os a maiores reflexões e aprendizados. Para isso propuseram também nesse trabalho atividades complementares para alunos que gostam de desafios e querem sempre aprofundar mais.

O autor afirma que o presente trabalho contribuiu para enriquecer seu conhecimento sobre temas interessantes e relevantes da matemática, podendo assim transmitir esse conhecimento ao aluno de forma que o mesmo perceba um maior sentido da matemática para o seu cotidiano. Com este objetivo, após estudos e com base em experiências pessoais na área da educação, sugeriram algumas abordagens sobre o tema das quais consideramos relevantes. E esperam ter alcançar o objetivo que é o de contribuir com os professores de Matemática e com os alunos no processo de ensino aprendizagem.

Oliveira (2013), Universidade Federal de Goiás, em sua pesquisa sobre “O Uso Do GeoGebra No Ensino Da Geometria Analítica: Estudo Da Circunferência” analisou o uso do GeoGebra no ensino da geometria analítica: estudo da circunferência com objetivo de refletir sobre como o uso do programa GeoGebra pode tornar-se um instrumento eficaz no ensino da Geometria analítica.

A metodologia do trabalho apresentado compreende uma sequência de atividades que proporcionam para alunos do ensino médio uma prática significativa com o uso de um aplicativo GeoGebra, como ferramenta tecnológica educacional que favorece o aprendizado no ensino de matemática. Em sua concepção, o produto educacional é um software livre e de código aberto e disponível em Java (linguagem de programação desenvolvida pela Sun Microsystems) com várias plataformas e em diversos idiomas.

O programa institui conteúdos como a álgebra, a geometria e o cálculo de estilo simples e interativo, podendo ser utilizado em diversas condições de ensino. Ao todo foram propostas seis atividades e duas questões de vestibulares que puderam ser trabalhadas em três aulas de cinquenta minutos, podendo ser intercaladas no decorrer das aulas sobre o estudo da circunferência.

O autor concluiu que durante a análise e a observação empírica, por meio de suas próprias experiências diárias em sala de aula, entenderam que o uso de tecnologias na educação é uma ferramenta muito importante para o crescimento do trabalho pedagógico. E que quando está no laboratório de informática da escola, o discente fica motivado e interessado, o que pode ser abrangido em suas fórmulas faciais, em seu procedimento, na sua participação durante a aula, na efetivação das atividades, no comprometimento com a tarefa, enfim, a vontade de aprender é diferente de quando ele está na sala de aula, sentado, mergulhado em seus pensamentos, esperando calmamente que o professor escreva longas equações no quadro.

O mesmo diz que depois de estudar várias atividades que usam o GeoGebra para ensinar Geometria Analítica, puderam elaborar algumas para o ensino da circunferência. O autor Acredita que essas e outras atividades que usam o Geogebra facilitam o aprendizado, pois as aulas se tornam mais dinâmicas e, consequentemente, o aluno se sente mais motivado. A tecnologia está implantada no mundo atual, e o docente não pode se coibir de utilizá-la em suas aulas.

O autor afirma que é responsabilidade do professor de Matemática equipar os alunos de conhecimentos matemáticos, haja vista serem estes essenciais para sua vida pessoal e profissional. A escola deve ser a mediadora entre tais conhecimentos e o indivíduo, para que o mesmo possa, nos momentos oportunos, atuar criticamente frente ao mundo e as problemáticas da vida.

Martimiano (2013), da Universidade Federal de São Carlos, em sua pesquisa sobre “Da Batalha Naval à Geometria Analítica” elaborou um estudo da batalha naval à geometria analítica que teve por objetivo: minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos ao aprenderem os conceitos de Geometria Analítica apresentados pelo material pedagógico do Ensino Médio estadual.

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática. Segundo o autor a Engenharia Didática foi um termo criado na França pela educadora Michèle Artigue (década de 80), estabelecendo se em uma metodologia de pesquisa para docentes e profissionais do ensino sugeridas na atividade do engenheiro.

A sequência didática mostrou-se muito útil para favorecer a aprendizagem dos alunos. Mesmo sendo um conjunto anormal em relação à realidade do Ensino Médio, a probabilidade de sua realização alcançar seu principal objetivo de amenizar as dificuldades de compreensão e aprendizagem dos conceitos de geometria analítica ainda é muito alto.

Martins (2013), da Universidade Federal de Goiás, em sua pesquisa utilizou o GeoGebra no ensino da Geometria Analítica: estudo da reta. Com objetivo de apresentar atividades de Geometria Analítica, especificamente o estudo da reta, a serem aplicadas na terceira série do ensino médio com auxílio do GeoGebra, que é um software livre para matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo permitindo aos alunos compreenderem os principais conteúdos apresentados.

O autor propôs atividades que aprovassem o avanço do ensino de geometria analítica, enfocando o ensino da reta, na terceira série do ensino médio, usando o programa GeoGebra. O mesmo advertiu que estas atividades serviram como suporte ao ensino de retas em Geometria Analítica, como um instrumento complementário, a ser utilizado após o conteúdo ser relatado em sala de aula na forma tradicional, com definições e declarações oferecidas.

Os resultados obtidos foram que por meio destas atividades reforçaram o aprendizado dos alunos quanto à posição relativa entre retas e a relação entre seus ângulos, coeficientes lineares e angulares.

O autor concluiu que as atividades envolvendo o GeoGebra, teve um efeito muito aceitável, especialmente por parte dos alunos que exibem dificuldade em visualizar as figuras no sistema cartesiano ou não possuam noção espacial e de posicionamento, seja por dificuldades naturais ou por deficiência de aprendizagem nas séries anteriores.

Uma forma que pode sanar essa dificuldade é por meio da utilização dessa ferramenta e a possibilidade de relacionar os conteúdos de Geometria Analítica a vários outros conteúdos matemáticos, aumentando nos alunos habilidades espaciais, benéficas no estudo de máximos e mínimos de áreas, bem como proporcionalidade, simetria, conceitos de Geometria Plana, entre outros. E que o ensino de Geometria Analítica consentiu ao docente dar sentido ao estudo da álgebra, como exemplo citaram o estudo dos determinantes, até então desnecessário aos olhos dos alunos.

Destacamos aqui nesse sub tópico, algumas leituras de revisão bibliográficas as quais estão relacionadas com esta pesquisa, cuja leitura foi de grande contributo para o seu desenvolvimento e construção. Assim, ao investigar sobre o desenvolvimento e surgimento do Ensino de Geometria Analítica e as diversas formas de se abordar tal assunto, constatou-se que, atualmente, há diversificados meios didático-pedagógico de se trabalhar tais conceitos. Dai a importância de se evidenciar as tendências teóricas que dão suporte a esta pesquisa cuja ancoragem é a dinâmica metodológica através das sequências didáticas, conforme versa Bacca (2013). Assim como, sua aplicação nas diversas áreas de atuação, a ênfase à importância da simbologia ou Teoria das Situações Didáticas de Raymond Duval (2003), traduzido por Halberstadt (2015), através do registro de figuras naturais e a importância que tem as atividades experimentais frisadas por Navarro e Segura (2013), Oliveira (2014), Righetto (2015); o Ensino da teoria da Geometria Analítica nos Livros didáticos evidenciados por Silva (2015), os quais nos chamam atenção para a deficiência do Ensino da Geometria Analítica nos livros didáticos, entre outros. Investigando o desenvolvimento e surgimento do ensino da Geometria Analítica constatou-se, de acordo com esses autores que, a utilização de conceitos como: interdisciplinaridade, sequencia didática, análise do livro de didático inferindo estudos a respeito da Geometria Analítica, solidificam, constituem o bojo desta pesquisa e contribuem para se tenha uma visão mais clara sobre o que se vem abordando no que concerne ao Ensino da Geometria Analítica.

Confirma-se no decorrer desta pesquisa, que ainda se precisa aumentar o campo de discussões sobre o uso de uma sequência didática eficaz e a importância conforme versa Correia (2011), em seu estudo, partindo do pressuposto de que o uso de um método adequado de pesquisa tem maior eficácia no ensino da teoria da Geometria Analítica. Fiegenbaum (2015) ratifica isso em sua pesquisa através do registro de figuras naturais das Obras de Arte. Mas, para que isto aconteça, Oliveira (2013), silva (2015), Correia (2011) e Halberstadt (2015), elucidam sobre a necessidade da importância, em especial, ao uso de uma sequência didática eficaz na abordagem dos conceitos tratados o que facilitará aos alunos uma compreensão mais ampla da Geometria Analítica do que a proposta pelo livro didático adotado pela escola.

Contudo, não basta que o professor apenas crie uma sequência didática ou uma metodologia eficaz, é preciso que este tenha postura adotada pelo professor como versa Correia (2011), consonante a este aspecto, Neto (2013) analisa que a prática pedagógica interdisciplinar, também, pode contribui de maneira determinante, para que haja uma contextualização e para a integração das mais diversas áreas de conhecimento o que implicará no beneficiamento de todos os evolvidos em tirarem proveito desta prática no que se refere à valorização da historicidade sobre o estudo da Geometria Analítica que se deu, segundo o autor, historicamente, através da transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente.

3. TEORIAS UTILIZADAS

Trataremos neste capítulo a respeito das teorias que embasa nossa pesquisa: a modelagem matemática, a análise micro genética, a semiótica e a engenharia didática.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática mostra novas formas de ensinar a disciplina de modo contextualizado e melhor relacionado à vivência dos educandos. A Modelagem Matemática vem sendo relevante como instrumento pedagógico e metodológico, envolvendo pesquisa, atividades em equipe, coleta e análise de dados, com isso colabora com a formação intelectual do aluno.

A Modelagem Matemática está presente na vida do ser humano desde os tempos remotos, ao utilizar conhecimentos matemáticos para modelar e resolver situações problemáticas com as quais se deparava. Quando esses conhecimentos não se mostravam suficientes, a busca de novos objetos e/ou relações matemáticas fazia-se necessário. A mesma era vista como um método que transforma uma situação escrita na linguagem usual de um contexto real ou fatos do dia a dia em linguagem simbólica da matemática, fazendo aparecer um modelo matemático, que por sua vez ser uma representação significativa do real, e se analisado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para a realidade que se está questionando. Apresentaremos a seguir algumas concepções de Modelagem Matemática que nos auxiliaram na realização desta pesquisa.

A Modelagem Matemática pode ser vista como um método que transforma uma situação escrita na linguagem usual de um contexto real ou fatos do dia a dia em linguagem simbólica da matemática, fazendo aparecer um modelo matemático, que por ser uma representação significativa do real, se analisado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para a realidade que se está questionando. “É o processo que envolve a obtenção de um modelo” e que, se o modelo for “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”, então temos um modelo matemático (BIEMBENGUT e HEIN, 2003).

Sendo que este modelo será delimitado de acordo com a necessidade do modelador, assim, um modelo não é a representação da realidade em sua totalidade, embora carregue essa responsabilidade, mas sempre um recorte, uma aproximação de idealizações sobre a realidade.

Desse modo, a modelagem matemática pode ser analisada de duas maneiras, Bassanezi (2004, p. 32-38) a diferencia quanto ao seu uso, como um método científico ou como uma estratégia de ensino aprendizagem.

Como método científico a modelagem é utilizada como instrumento de pesquisa, devido sua larga aplicação, na Física, na Química, na Biomatemática, em problemas industriais de engenharia, na economia e em outras áreas. Como pontos relevantes:

- ✓ Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- ✓ Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- ✓ Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- ✓ Pode sugerir prioridades de aplicações e de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- ✓ Pode preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
- ✓ Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- ✓ Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2004, p. 32 e 33).

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem leva em consideração a interação do aluno com seu ambiente natural, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas o caminho que permite aprender o conteúdo matemático. Bassanezi identifica a modelagem em Educação como Modelação Matemática.

> Na modelação a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática (BASSANEZI, 2004, p. 38).

Por tudo isso que escolhemos a modelagem matemática como tendência metodológica para o nosso experimento.

Biembengut e Hein (2007, p.28) a veem como uma “metodologia de ensino-aprendizagem [que] parte de uma situação/tema sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema”.

Nesse sentido, “há várias maneiras de conceber e materializar a modelagem na sala de aula” Barbosa (1999, p.5), através de projetos decurta ou longa duração, através de situações que podem requerer uma ou duas aulas ou atividades propostas aos alunos.

De acordo com as possibilidades de sala de aula Barbosa (2003, p.70) explicita três “casos” para a aplicação da modelagem que são categorizados conforme as tarefas que compete ao professor e/ou aos alunos desenvolverem dentro do processo de Modelagem, na sala de aula, conforme quadro a seguir:

Quadro 6–Tarefas do professor e dos alunos nos casos de Modelagem

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação-problema	**professor**	**professor**	**professor/aluno**
Simplificação	**professor**	**professor/aluno**	**professor/aluno**
Dados qualitativos e quantitativos	**professor**	**professor/aluno**	**professor/aluno**
Resolução	**professor/aluno**	**professor/aluno**	**professor/aluno**

Fonte: Barbosa, 2003. p.70

> No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos (...), acompanhados pelo professor, (...) a tarefa de resolver o problema e chegar a um modelo que o represente e possa ser generalizado para outras situações semelhantes. Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar (...) Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. (...) E, por fim, no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas, não matemáticos", que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. (BARBOSA, 2003 p. 69).

De posse das abordagens da modelagem matemática e das pesquisas realizadas, entendemos que a mesma enquanto estratégia de ensino e seguindo o caso mais adequado para a sala de aula, dependendo de cada contexto, pode consistir em uma forte alternativa para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Já a modelagem matemática, na perspectiva da interdisciplinaridade, também contempla as competências sugeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) na medida em que permite:

- ✓ Identificar e relacionar os dados, interpretar informações relevantes em uma dada situação-problema, sendo apresentados em diferentes linguagens e representações;
- ✓ Reconhecer a natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática e das demais ciências;
- ✓ Utilizar, elaborar e interpretar modelos e representações matemáticas para análise de situações-problema;
- ✓ Identificar regularidades para estabelecer regras, algoritmos e propriedades;
- ✓ Analisar os noticiários e artigos relativos à ciência e tecnologia, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados;
- ✓ Expressar as ideias com clareza, utilizando a linguagem matemática;
- ✓ Reconhecer a contribuição do conhecimento matemático, físico, químico e biológico no desenvolvimento da tecnologia, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida e suas implicações no mundo cotidiano;
- ✓ Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, fazendo-o sentir-se mobilizado para diferentes ações (Brasil, 1999a).

Assim cada vez mais podemos observar a necessidade de integração entre as questões científicas das diversas áreas do conhecimento nos sistemas educacionais. Devemos reconhecer que as atividades didáticas favorecem a construção do conhecimento mediada pela utilização de ferramentas que auxiliem o educando a observar, interpretar e discutir a realidade.

A utilização da Modelagem Matemática no ensino de Matemática a partir de conceitos científicos exige que os educadores revejam suas concepções epistemológicas da ciência, procurando conhecer suas características, do que é ou não específico da cientificidade, refletindo sobre sua evolução histórica, seus fundamentos, suas implicações no ensino e na aprendizagem, a fim de que possam optar por posturas que condizem com uma perspectiva construtiva do conhecimento, respeitado as relações entre os atos de ensinar e aprender. Desta forma, o educador através da Modelagem Matemática estará dando oportunidade ao educando de vivenciar um ambiente investigativo baseado no processo de “reflexão-na-ação”.

Feito um panorama a respeito da Modelagem Matemática como metodologia de ensino-aprendizagem é possível caracterizar nossa pesquisa como um trabalho que agrega as características previamente citadas. Trabalharemos com alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Abaetetuba-PA.

Nossa proposta de trabalho trata de avaliar a viabilidade do uso da Modelagem Matemática, como ambiente de aprendizagem, e também analisarmos a interpretação dos conceitos a serem desenvolvidos por meio dos registros de representação semiótica, tal como abordo por Duval (2009). Portanto, analisaremos como a Modelagem Matemática influencia a capacidade de interpretação dos conceitos matemáticos relativos à geometria analítica através de georreferenciamento e na sua transcrição para a forma algébrica.

3.2 ANÁLISE MICRO GENÉTICA

O conceito de **MICROGÊNESE** surgiu quando Vygotsky passou a observar emergência de determinados processos mentais no momento em que preparava os sujeitos para participarem de certo experimento. A microgênese seria, portanto, um domínio genético, porque Vygotsky percebeu que era exatamente no aqui e agora das ações e interações diante de uma situação problema que se encontravam os processos mentais mais ricos. A microgênese permite compreender melhor a emergência de fenômenos psicológicos novos e complexos, procurando captar os momentos em que o processo de transformação está ocorrendo (SIEGLER & CROWLEY, 1991).

Vygotsky também percebeu que ocorriam desdobramentos do ato psicológico como, por exemplo, um ato de percepção. Isso se dava em uma fração de segundos e era preciso se estar atento para perceber o exato momento em que ocorria (WERTSCH, 1990). Era como um *zoom* no estudo de determinado processo, permitindo uma análise detalhada, passo a passo, necessária à observação de mudanças desenvolvimentais significativas (KELMAN, 2002).

A microgênese na psicologia tem uma diversidade de funções dentro de ambiente socioculturais como o ambiente escolar. Entre outras possibilidades, permite-nos o estudo de características do desenvolvimento humano que vão se constituindo na dinâmica das interações verbais e não verbais e na observação das negociações que ocorrem no fluxo interativo entre educador-educando e educando-educando, na face-a-face**.** Permite, em última análise, que se observe a sequência do fenômeno e os processos de mudança experienciados pelo indivíduo.

É uma abordagem metodológica apropriada para o estudo dos fenômenos que influenciam a relação entre cultura e socialização, o que conduz, no dizer de Rossetti-Ferreira, Amorim e Silva (2000), “a um diálogo contínuo com a teoria”.

A análise microgenética no ambiente escolar é particularmente interessante porque permitem observar como ocorre o processo ensino-aprendizagem, quais são as qualidades do contexto de determinada sala de aula, e assim detectar quais são as habilidades comunicativas necessárias durante os processos de interação que facilitam ou dificultam a ocorrência da aprendizagem.

Segundo Branco & Valsiner (1997) a metodologia é o processo de pensamento orientado para objetivos e os procedimentos de intervenção utilizados pelo investigador em interação com os fenômenos investigados, que conduzem à construção de um novo conhecimento, este sendo resultante da interpretação dos dados construídos, baseando-se na análise da complexidade do fenômeno estudado.

Para Wertsch (1988) a microgênese é a formação de um processo psíquico em curto prazo, que pode ser observado, por exemplo, durante os esforços despendidos pelo sujeito para dominar ou solucionar uma tarefa.

Uma implicação metodológica e a possibilidade de analisar no curtíssimo espaço de tempo de um episódio (por exemplo, de segundos ou minutos), a manifestação de uma função psíquica superior – como a atenção voluntária – já formada ou em processo de formação. Quanto aos instrumentos utilizados para a realização de análises de natureza micro genética, eles podem ser do tipo tarefas ou situações cotidianas, sempre pressupondo uma dinâmica interativa (em geral, do tipo: examinador-examinando, educador-educando, educando-educando, mãe-filho, entre outros). Na análise micro genética diferente dos métodos de avaliação hegemônicos, o eixo da avaliação e deslocado do indivíduo para as relações intrapsíquicas em ocorrência, visando a identificar tanto os modos de operar a realidade já formada, como as transformações nos níveis de funcionamento do sujeito.

Qualquer ator social que participe do processo de interação é considerado para efeito de análise. Nesse sentido, caso o examinador esteja em contato direto com a criança, irrealizável a neutralidade, ele tem um papel não apenas ativo, mas interativo – ou seja, ele é visto como parte integrante do processo de regulação do comportamento, que afeta necessariamente as respostas do examinando.

Uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes é o recorte de episódios interativos, tendo que ser feita a orientação para o bom funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

De acordo com Góes (2000) a análise micro genética pode ser o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante. Esta abordagem está voltada para os detalhes das ações, para as interações, para a constituição dos sujeitos, concebendo os aspectos intersubjetivos e dialógicos a partir de uma visão sociocultural. Para a mesma, considera-se a inter-relação entre os micro eventos e as condições macrossociais. Pois, através da análise micro genética é possível refletir criticamente acerca do momento histórico vivido em qualquer ação.

Assim a análise micro genética, por sua vez, permite a visualização de uma intrincada trama de vozes sociais, vozes essas presentes e ausentes, nos mostra características de uma realidade complexa que se constitui em um palco de lutas, alianças, jogos de interesses variados, enfim, de múltiplas contradições.

3.3 SEMIÓTICA

A teoria que embasa nossas análises: a semiótica. Por isso, consideramos conveniente apresentar um breve histórico a respeito do tema, os conceitos que irão compor nossas análises e ainda um panorama das pesquisas realizadas no país com a mesma temática.

Segundo os autores Davis e Hersh (1998) "[...] a Matemática provém da conexão da mente com o mundo externo..." e, neste sentido, a presença da Matemática na realidade não pode ser ignorada no meio da Educação Matemática e, especialmente, quando se trata de aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Neste cenário, para evidenciar a conexão entre Matemática, mente e mundo externo é de suma importância o uso de representações. A abordagem dessas representações, num sentido amplo, refere-se à Semiótica que é a ciência de toda e qualquer linguagem e que usa de signos para realizar estas representações.

Em geral um registro de representação semiótica pode não ser suficiente para abordar diferentes características e propriedades de um objeto matemático. Por esse motivo, faz-se necessário o uso de diferentes registros para um mesmo objeto matemático. É importante passar entre os diferentes tipos de registros de representação, fazendo transformações de um sistema de registros para outros sistemas de registros. Esse tipo de transformação é chamado conversão e é uma das atividades cognitivas fundamentais para a compreensão dos objetos matemáticos.

De acordo com Duval (2008), do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. A essa atividade cognitiva geralmente não ocorre naturalmente, ou seja, a passagem de um sistema de registros de representação para outro pode ser considerada complexa do ponto de vista cognitivo. Para evidenciar se esta atividade é mais complexa ou menos complexa em uma atividade matemática, é preciso comparar a representação no registro de saída com a representação no registro de chegada. Isso envolve o fenômeno de congruência nas conversões entre os registros de representação. A esse fenômeno podemos associar um nível de congruência ou de não congruência a partir da análise da conversão e observar aspectos relacionados à compreensão e à aprendizagem em Matemática. É necessário também que exista uma coordenação entre os registros, ou seja, é preciso compreender que os diferentes registros se referem ao mesmo objeto matemático e podem se complementar no sentido de que um registro pode expressar características ou propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza em outro registro.

Os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática mostram-se como um importante instrumento de pesquisa, já que possibilita uma análise das complexidades da aprendizagem em matemática. Mas, por outro lado, a base teórica de Duval nos leva a outras reflexões que não se referem propriamente ao aspecto cognitivo do aluno. O que quero dizer é que ela nos faz pensar sobre o papel primordial, o funcionamento e a constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes.

Neste sentido, vale refletir aqui como a ideia de representação, particularmente de representação semiótica, se fez como o modelo para a aquisição do conhecimento. Significa, portanto, compreender a criação, ou a emergência deste modo de conhecer. A base do estudo de Duval, sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, tem como fundamento o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos.

Pois para um trabalho cognitivo centrado sobre um determinado registro de representação semiótica há a mobilização de tratamentos específicos ao registro escolhido. Por exemplo, além das representações simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico), pode-se recorrer às representações figurais. Neste caso, a operação que se chama reconfiguração é um tipo particular de tratamento para o registro figural.

Assim sendo, é preciso preocupar-se com uma aprendizagem que leve em conta tal tratamento. O fato de que duas representações distintas para um mesmo objeto têm cada uma delas sentidos diferentes, logo, tratamentos diferenciados implicam em um custo cognitivo também diferente. Somar dois números fracionários, por exemplo, não tem o mesmo custo cognitivo que somar os mesmos dois números em sua forma decimal. Como observamos tudo depende do sentido que se dá para cada uma das formas de apresentação do objeto matemático.

Duval (1993) afirma que para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir três atividades cognitivas que são fundamentais e encontram-se ligadas à semioses que consta de: formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão, descreveremos a seguir em que consiste cada uma delas.

Quanto à formação de uma representação identificável ela se apresenta como “a representação de um registro dado: enunciado de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula,...” (DUVAL, 1993, p.41). Assim Duval (1993) esclarece que: essa formação implica uma seleção de tratos e dados no conteúdo a representar. Essa seleção se faz em função das unidades e das regras de formação que são próprias ao registro semiótico no qual a representação é produzida. A esse título, a formação de uma representação poderia ser comparada à realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar as regras (gramática, para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, dificuldades de construção para as figuras...). A função dessas regras é assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para os tratamentos. Essas são as regras de conformidade, não são as regras de produção efetiva para um sujeito. Isso quer dizer que um conhecimento de regras de conformidade não implica a competência para formar as representações, mas somente a competência para reconhecê-las (DUVAL, 1993, p.41).

O autor nos atenta para que a formação das representações semiótica respeite as regras próprias ao sistema empregado, assim uma representação semiótica não deve sair do domínio definido pelas regras que constituem tal sistema, pois estas regras permitem o reconhecimento das representações como representações num registro determinado.

Em relação ao tratamento Duval (1993) define que este significa uma atividade cognitiva que visa à transformação de uma representação semiótica em outra, porém permanecendo no mesmo registro de representação e afirma que "o tratamento é uma transformação interna a um registro". (DUVAL, 1993, p.41).

Cabe ressaltar que tanto o tratamento como a conversão, que veremos mais adiante, são dois tipos distintos de transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica.

Em Matemática, muitas vezes, o tratamento é a transformação que mais se evidencia nas atividades, pois o tratamento corresponde a procedimentos de justificação. Segundo Duval (2003), em atividades pedagógicas, professores tentam utilizar o "melhor" registro de representação para que os alunos possam "compreender" o que está sendo estudado, pois assim conseguem justificar uma idéia referente ao conteúdo.

Em relação à conversão, Duval (1993) define esta atividade cognitiva da seguinte forma:

> A conversão de uma representação é uma transformação dessa representação em uma representação de um outro registro, conservando a totalidade ou uma pequena parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (o registro de representação a converter). (DUVAL, 1993, 42).

Assim verificamos que esta transformação de representação consiste na mudança entre o registro de partida e de chegada, porém conservando o mesmo objeto matemático, por exemplo, a passagem escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003).

Dessa forma, a atividade de conversão não é trivial nem cognitivamente neutra. Ela precisa ser privilegiada pelo professor na sala de aula e deve ser distinguida do tratamento. No entanto, os estudantes devem ter em mente que os diferentes registros envolvidos na atividade de conversão se referem simultaneamente ao mesmo objeto matemático.

3.4 ENGENHARIA DIDÁTICA

Para responder a questão problema nos apoiamos nos pressupostos da Engenharia Didática, surgidos na França, nos estudos de Michelle Artigue. Trata-se de uma metodologia de pesquisa em Didática da Matemática, organizada em quatro fases: 1) Análises Prévias; 2) Construção (concepção) da sequência didática e Análise *A Priori*; 3) Aplicação de uma sequência didática (Execução) e a 4) Análise *A Posteriori* e a Validação.

Segundo Pais (2008, p.101), a análise preliminar é fundamental para a "referência de um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta suas principais categorias", bem como destacar os problemas do ato de ensinar e aprender do objeto de estudo, e também fundamentar todas as questões, e objetivos da pesquisa.

Para Almouloud (2007, p.174) a construção da sequência e análise *a priori* destaca que o "pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações problemas" para, dessa forma, possibilitar ao aluno o desenvolvimento de certas competências e habilidades.

Pais (2008, p.101), entretanto, destaca que o pesquisador precisa, em seguida, definir "um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno".

Artigue (1998, apud Almouloud, 2007, p.175) define dois tipos de variáveis:

> As variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia; e as variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

A aplicação da sequência didática corresponde à construção e aplicação de um conjunto de atividades planejadas e analisadas com antecedência, essa fase tem por objetivo observar e destacar situações de aprendizagem que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A quarta fase é composta por dois momentos, a análise *a posteriori* e a validação dos resultados. O primeiro momento diz respeito ao modo como as informações obtidas na aplicação da sequência didática são tratadas. Os dados podem ser obtidos pela observação do pesquisador ou de alguém capacitado para registrar toda experiência. Vale destacar que podem ser utilizadas outras técnicas para obtenção de informações, tais como: questionários, gravações, entrevistas, dentre outros que se fizerem necessários para construir o objeto de estudo estabelecido.

O segundo momento, corresponde à validação dos resultados, Pais (2008, p.103) assinala que neste momento é desenvolvida a "confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*", para dessa forma verificar se os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Com base nesta perspectiva teórica, estabeleceremos o procedimento metodológico da pesquisa em questão, que utilizou Engenharia Didática como procedimento metodológico, que pudesse proporcionar ao alunado e ao professor de matemática os subsídios adequados ao processo de construção e compreensão do conhecimento matemático.

A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional elaborada no início da década de 1980 para trabalhos de Educação Matemática. Concebe o trabalho do pesquisador parecido ao de um engenheiro subdividindo o componente sem estar em sala de aula, com o uso das sequências didática o termo pode, também, ser usado para designar a aplicação planejada de uma sequência didática em um grupo de educandos.

Esta teoria se originou pela preocupação com certa "ideologia da inovação" presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do educador, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino.

Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da *realização didática* na sala de aula como prática de investigação.

A noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa) que se iniciou nos anos 80. Segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático que se compara ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. No transcorrer das discussões desenvolvidas no IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), na França, ao final da década de 1960. Em seus primórdios, o IREM desenvolvia uma complementação na formação de educadores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula, destacando-se o desenvolvimento de jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos.

Segundo Robert (1992) em Didática da Matemática são frequentemente articuladas em torno de uma questão que nos colocamos sobre uma aprendizagem ou sobre um problema de ensino, ou ainda sobre uma hipótese que procuramos confirmar particularmente a existência de uma regularidade entre certo tipo de ensino e certo tipo de aprendizagem para uma maioria de educandos.

Já a Engenharia Didática, é vista como metodologia de pesquisa e caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posterior.

Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia chama Engenharia Didática, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. A mesma pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um determinado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa se diferencia daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático.

Segundo ARTIGUE (1988) existem quatro diferentes fases que compõem a metodologia da engenharia didática que são:

- ✓ A primeira fase é a das análises preliminares. que se dá apoiada em um referencial teórico já adquirido e analisa como se encaminha aquele conhecimento no aprendiz, como se dá o ensino atual em relação àquele domínio, as concepções dos educandos, as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução.
- ✓ A segunda fase é a da concepção e análise a priori das situações didáticas nas quais o pesquisador definirá as variáveis que estarão sob controle, "comporta uma parte descritiva e outra preditiva" onde o comportamento esperado do educando é o foco principal da análise.
- ✓ A terceira fase é a da experimentação que é ida a campo para aplicação da sequência didática com certa população de alunos e os registros de observações realizadas durante a mesma.
- ✓ A quarta e última fase é a análise a posteriori e validação que "se apoia no conjunto de dados recolhidos quando da experimentação, (...) mas também nas produções dos educandos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele".

Explica ASTOLFI (1995) que o uso dos símbolos na resolução de problemas é mais do que a aplicação mecânica de um código sobre uma situação, é suscitar uma variedade de formas de representação gráfica dos resultados, além de uma discussão sobre o valor de cada um deles e a clareza de seus significados para o indivíduo. Ao desenvolver situações-problema diversas, que trazem informações em diferentes linguagens, o educando procura traduzi-las naquelas que ele já consegue utilizar como uma ferramenta de tratamento da situação. Como cada linguagem traduz algumas, mas não todas, as propriedades do objeto, uma linguagem pode ser mais adequada que outra para lidar com esse objeto, em uma situação específica.

Desta forma, o conhecimento dos educandos sobre os objetos e suas propriedades é ampliado por meio do trânsito entre representações expressas em diferentes linguagens, as quais se tornam ferramentas para o pensamento no desenvolvimento de situações-problema.

É na relação alternada dos conceitos matemáticos como instrumentos na resolução de problemas e como objetos na construção do conhecimento que os sujeitos dão sentido aos saber científico e fazem evoluir suas concepções segundo alguns autores.

Assim as principais diferenças entre as pesquisas realizadas dentro de uma Metodologia da Engenharia Didática e outras, na área da didática que não são desenvolvidas por meio desta metodologia, são observadas na profundidade das análises preliminares, e também no fato da validação das hipóteses realizadas sobre o problema da pesquisa serem validadas no confronto entre análise a priori e a posteriori. Dentro desse quadro, a ida do pesquisador a campo, busca um confronto das análises iniciais com os dados sobre os procedimentos e desempenhos dos educandos, analisados posteriormente, validando assim as hipóteses da pesquisa.

4. PROPOSTA DE ATIVIDADE

Nesta sequência didática de modelagem em sala de aula deve-se iniciar, com a divisão da turma em grupo, e deve ser pedido para cada grupo apontar a solução para cada problema proposto. Deve-se pedir para cada grupo apresentar sua solução e registraremos a mesma no quadro, em um processo de socialização onde todos têm direito a falar. Listaremos as soluções dos alunos no quadro, após isto vamos promover uma discussão para elencar a melhor solução, que vai estar vinculado ao cartesiano.

Caso ninguém apresente ou mencione que não existe uma representação matemática para tal. Vamos discutir as vantagens da representação algébrica e as situações problemas possíveis de resolução com a sua utilização.

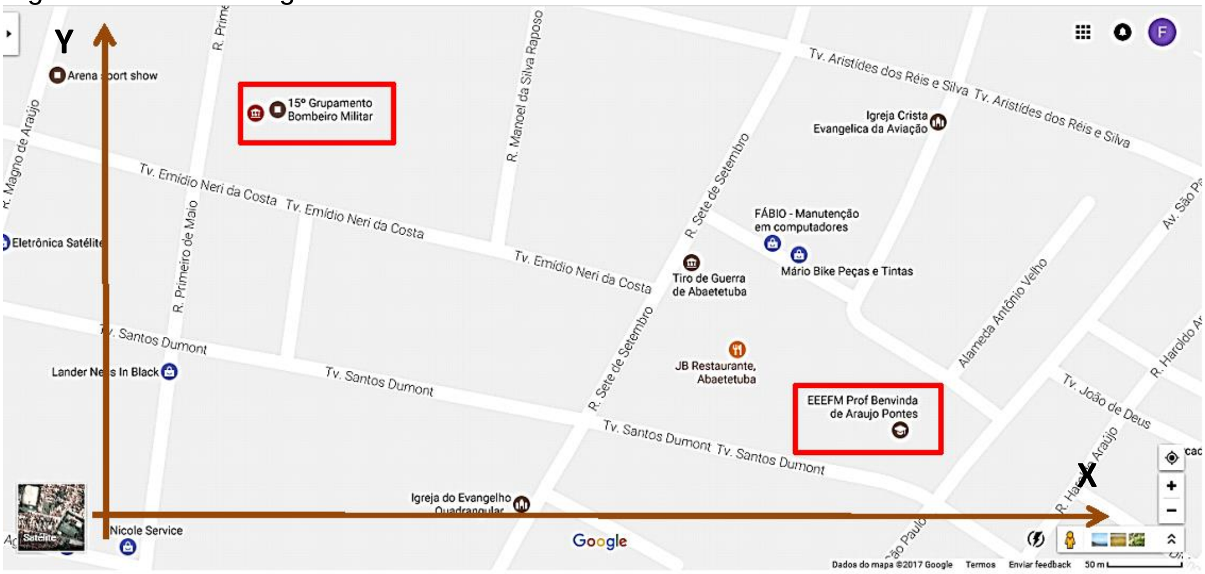
Nós vamos partir da melhor proposta pelos discentes e vamos discutir o conteúdo matemático, e de como determinar esse algoritmo. Nós vamos pedir para os discentes montarem o algoritmo e construírem um aplicativo, no App Inventor, para calcular a distância entre dois pontos.

Apresentaremos a fórmula para o Plano Cartesiano, uma simplificação do problema, já que o mesmo trata de Coordenadas Geográficas, indagaremos dos alunos como resolver este problema no Plano Cartesiano. Antes de fazermos a programação distribuiremos uma folha “registro das ideias”, e resolveremos o problema simplificado no plano cartesiano.

Nosso desafio é construir modelos georreferenciados na cartografia de Abaetetuba-PA, pequena cidade do nordeste paraense, localizada na Região Amazônica, norte do Brasil, noroeste do Estado do Pará, na microrregião de Cametá, no Baixo Tocantins, à margem direita desse rio, em um de seus afluentes, o rio Meruu ou Maratuaíra. Distante, em linha reta, 60 km de Belém, capital do Estado. Dentre as cidades vizinhas, é a sexta cidade mais próxima da capital. A zona urbana está dividida em 11 bairros e a zona rural, em 35 colônias e 72 ilhas. O município limita-se ao Norte com o Município de Barcarena e o Rio Pará; ao Sul com o município de Igarapé-Miri; a Leste com o município de Moju e a oeste com o Município de Limoeiro do Ajuru e com a Baia de Maratá.

Imagem para as atividades 1 a 6

Figura 1 – Carta Geográfica da Cidade de Abaetetuba/PA



Fonte: http://maps.google.com.br. Acesso em 13/08/2016.

ATIVIDADE 1: Construção de aplicativo para o cálculo da distância entre dois pontos

Análise a priori: Nesta atividade, inicialmente é desejável que o grupo aponte uma solução para questão proposta. A seguir o professor deve incentiva-los a registra-las no quadro de escrever da sala de aula, incentivando a socialização dos resultados obtidos e procedimentos utilizados para alcança-los, para que todos possam decidir sobre aquela que melhor se aplica à solução do problema. Nossa hipótese é de que os grupos descubram uma expressão algébrica que recaia no Teorema de Pitágoras, pois consideramos que os alunos do 3º ano do Ensino Médio dominam esse conteúdo, uma vez que ele é trabalhado desde o Ensino Fundamental, e é considerado pré-requisito para a aprendizagem de outros conteúdos relacionados à geometria e trigonometria. Contudo, os estudantes podem apresentar dificuldade de redigir suas observações e conclusões, isto porque escrever um texto explicativo acerca dos seus entendimentos poderá ser um problema para muitos deles, uma vez que possivelmente os alunos não estejam habituados com esse modo de construção do conhecimento.

Por este motivo, durante a institucionalização do saber orientaremos os estudantes a atentar para o título, o objetivo da atividade e também a obtenção dos resultados advindos das relações estabelecidas entre os conjuntos de valores da latitude e longitude, até então abordados apenas como x e y, afim de que percebam que esses elementos podem ajudá-los na organização de suas conclusões. Ainda que tenham dificuldades em estabelecer uma associação entre o Teorema de Pitágoras e o algoritmo da distância de dois pontos, esclareceremos isto no quadro de escrever, após a socialização das considerações dos alunos, abordando a demonstração do algoritmo da distância de dois pontos e como podemos encontrar essa distância conhecendo dois pontos usando um aplicativo, que vamos ajudar os alunos a desenvolverem. Evidenciaremos alguns exemplos, para que em seguida os discentes resolvam a questão proposta com base nos dados da imagem “Carta geográfica da cidade de Abaetetuba”.

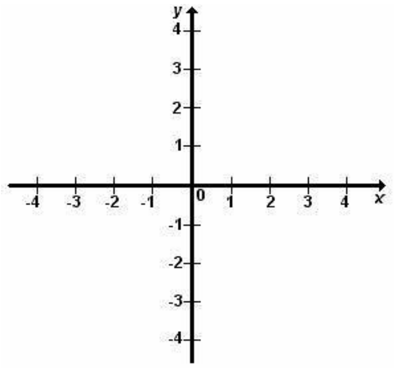
Objetivo: Compreender os conceitos da distância entre dois pontos a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

Questão Proposta: Na cidade de Abaetetuba, Figura 1, como em muitas cidades, se uma operadora de celular pretender colocar duas torres de transmissão, uma no terreno de sua escola e outra no 15º Grupamento Bombeiro Militar, e quiser saber qual a distância, em linha reta, entre essas duas torres, como poderá fazer usando um GPS e conhecimentos matemáticos?

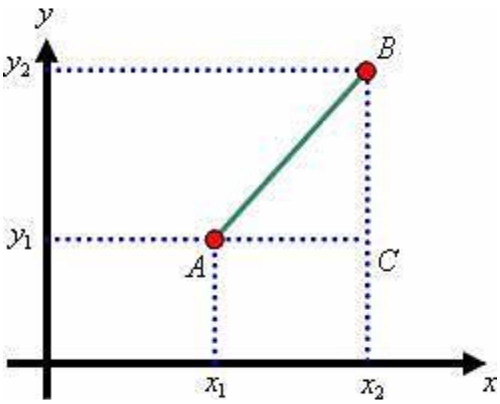
UM POUCO DE MATEMÁTICA

A distância entre dois pontos é determinada pela Geometria Analítica, responsável por estabelecer relações entre fundamentos geométricos e algébricos. As relações são intituladas com base num sistema de coordenadas cartesianas, que é constituído de dois eixos perpendiculares enumerados.



No plano cartesiano, qualquer ponto possui uma coordenada de localização, basta identificar o ponto e observar os valores primeiramente em relação ao eixo horizontal x (abscissa) e posteriormente em relação ao eixo vertical y (ordenada).

Nesse sistema de coordenadas podemos demarcar dois pontos e determinar a distância entre eles. Observe:



Observe que o triângulo formado é retângulo de catetos AC e BC e hipotenusa AB. Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras nesse triângulo determinando a medida da hipotenusa estaremos também calculando a distância entre os pontos A e B. Vamos aplicar as propriedades da relação de Pitágoras no triângulo ABC, originando a expressão matemática responsável pela determinação da distância entre dois pontos em função de suas coordenadas.

O Teorema de Pitágoras diz: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”. No triângulo ABC temos que:

Cateto AC = $x_2 - x_1$

Cateto BC = $y_2 - y_1$

$$\boldsymbol{D_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Vamos Iniciar o Problema na Programação do App Inventor

Falaremos como vamos usar o App inventos passo a passo.

1º passo: apresentar o ambiente do App inventor 2.

2º passo: fazer um aplicativo básico para calcular a distância de dois pontos sendo a entrada pontos do plano cartesiano, onde pediremos aos alunos para fazerem uma sequência lógica para o programa.

CONSTRUINDO O 1º APLICATIVO:

Nosso desafio agora será construir um aplicativo para calcular a distância de dois pontos dados, para isto vamos construir juntos o primeiro aplicativo.

O primeiro desafio é construir um app para calcular a distância entre dois pontos. Iniciamos esse projeto escolhendo um nome para ele:

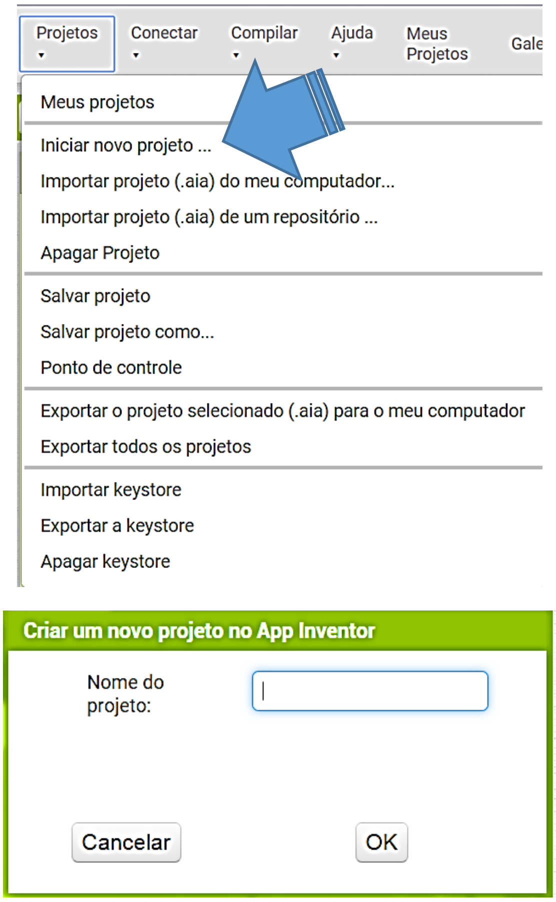


Figura 2
Fonte: App Inventor da MIT

Deixe a tela principal com os seguintes elementos:

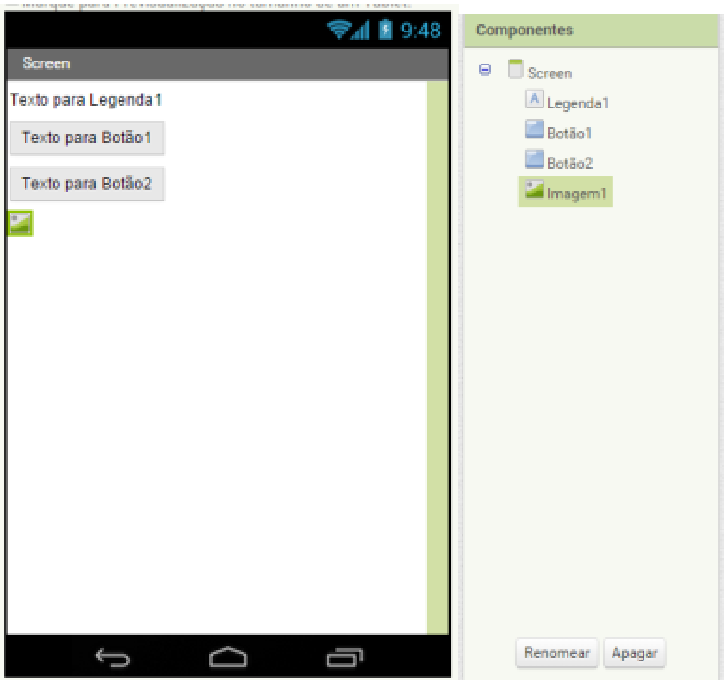


Figura 3
Fonte: App Inventor da MIT

Depois altere suas propriedades para que ela fique com essa cara:

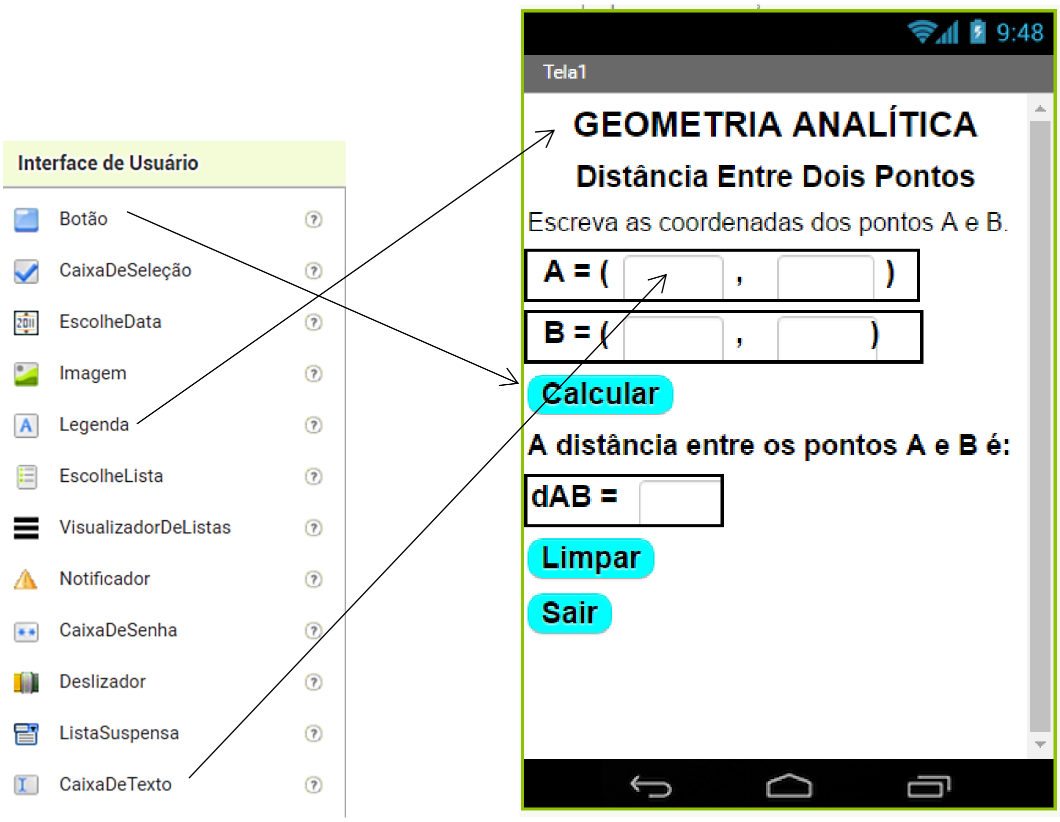


Figura 4
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para o cálculo da distância de dois pontos. Quando clicamos no *botão* **BTcalcular**, devemos:

1. Ler o valor de x_A do ponto A;
2. Ler o valor de y_A do ponto A;
3. Ler o valor de x_B do ponto B;
4. Ler o valor de y_B do ponto B;
5. Subtrair x_B de x_A e elevar ao quadrado, somar com a subtração de y_B de y_A e elevar ao quadrado por última extrais a raiz quadrada.
6. Exibir o resultado na *legenda* **Resultado.**

Observe os blocos:

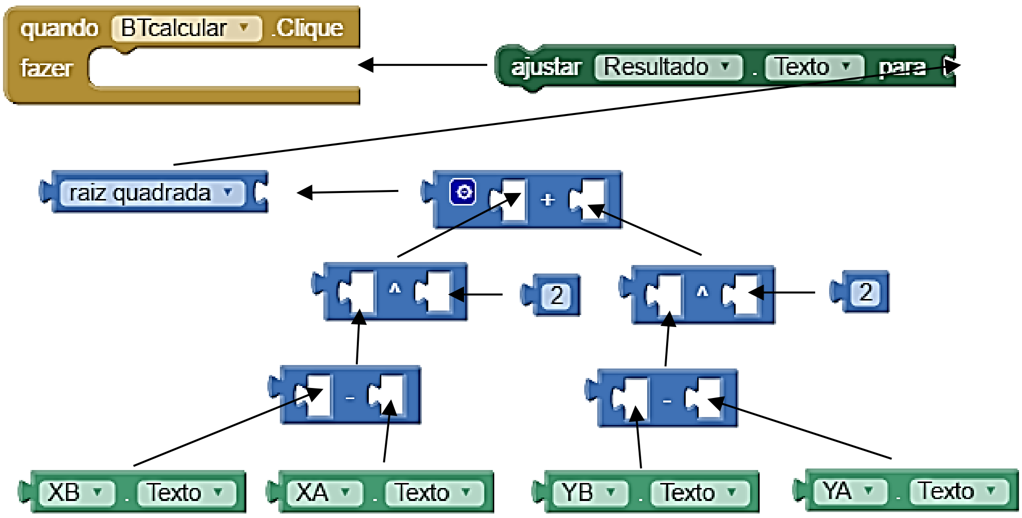


Figura 5
Fonte: App Inventor da MIT

Primeiro montaremos a equação:

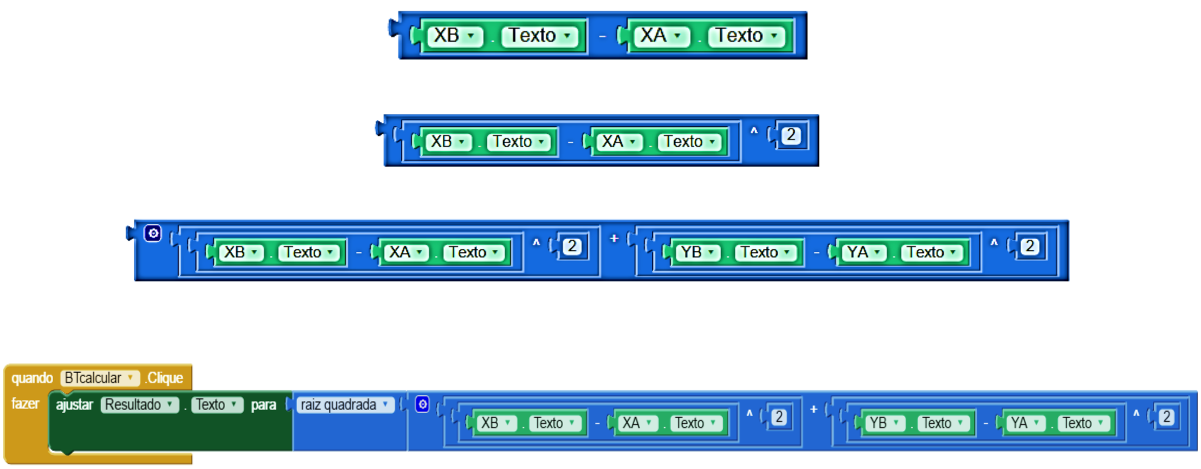


Figura 6
Fonte: App Inventor da MIT

7. Programação do botão limpar.

Figura 7
Fonte: App Inventor da MIT

8. Programação do botão sair.

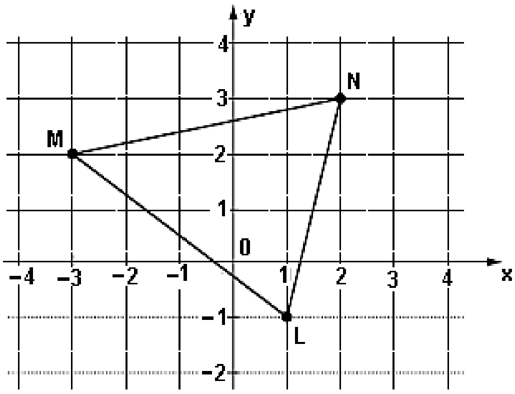
Figura 8
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro entre os pontos de coordenadas (2,3) e (4,7), devendo a trajetória da estrada ser retilínea. Qual é a distância entre esses dois pontos da estrada de ferro?

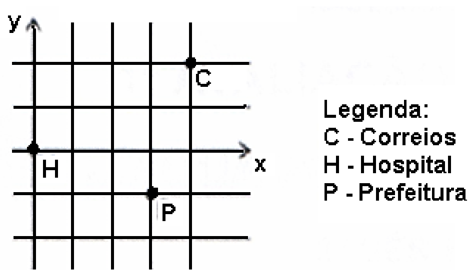
2. Veja o triângulo LMN desenhado no plano cartesiano abaixo.



Qual o perímetro do triângulo de vértices L, M e N?

3. Observe o quadriculado que representa a figura da região de uma cidade. Nessa figura as linhas são as ruas que se cortam perpendicularmente e cada quadrado é um quarteirão.

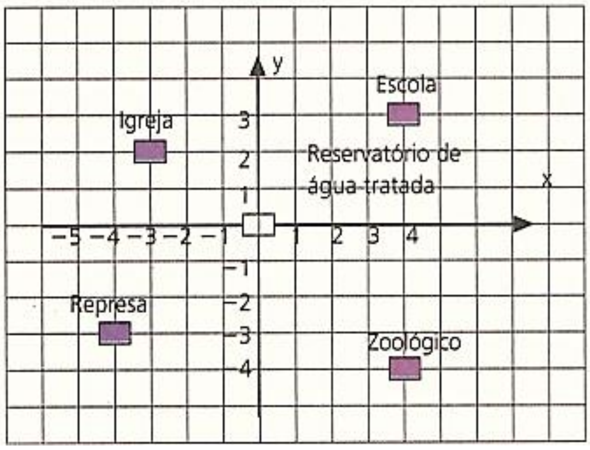
Associando um plano cartesiano a esse quadriculado, considere o Hospital como origem, os eixos coordenados x e y como indicado na figura e a medida do lado do quarteirão como unidade de medida.



Qual o perímetro da figura geométrica formada por esses três pontos?

4. Uma cidade tem quatro pontos turísticos que são os mais visitados. Esses pontos são identificados pelas coordenadas A(1, 0), B(2, 1), C(2, 3) e D(3, 1). Assim, o gráfico que representa as localizações dos pontos de turismo é uma figura geometria, qual o perímetro dessa figura?

5. Uma operadora de celular registrou num sistema ortogonal as coordenadas de alguns pontos estratégicos de uma cidade. Ela precisa conhecer as distâncias entre elas para colocar algumas torres de transmissão de sinal.



Qual a distância da igreja para a escola, da escola para o zoológico, do zoológico para a represa e finalmente da represa para a igreja?

ATIVIDADE 2: Construção de aplicativo para converter coordenadas geográficas em cartesianas

Objetivo: Compreender os conceitos da transformação de coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

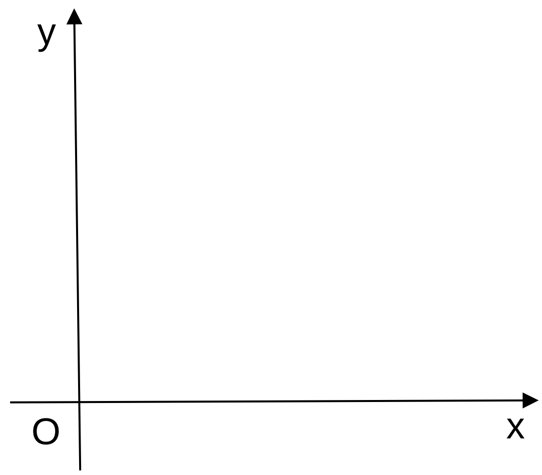
Questão Proposta: Como cálculo de distância a partir de coordenadas geográficas?

Vamos apresentar uma discussão sobre como converter Coordenadas Geográficas em Coordenadas Cartesianas (usaremos um texto de apoio).

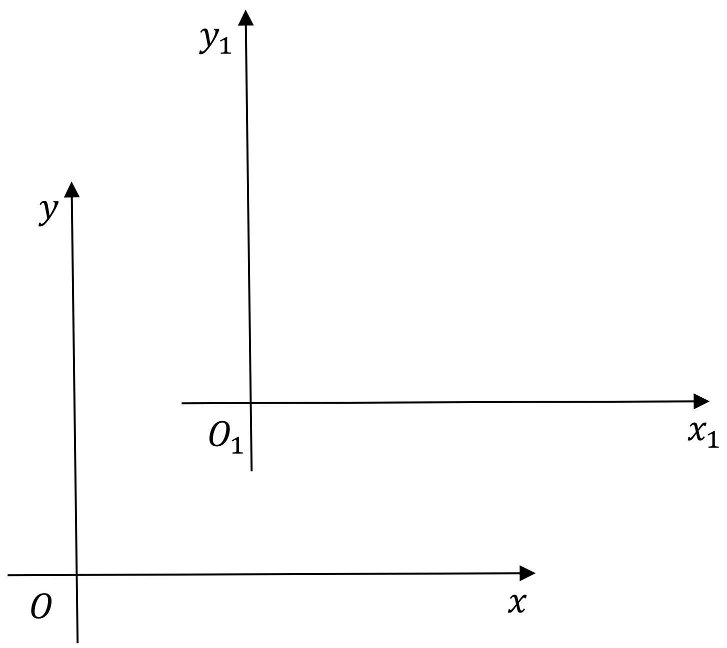
UM POUCO DE MATEMÁTICA

Uma forma simples de trabalharmos com dados em coordenadas geográficas é fazer a conversão dos dados para o sistema de coordenadas cartesiano local. Para isto, precisamos rever um pouco da teoria da translação de eixo.

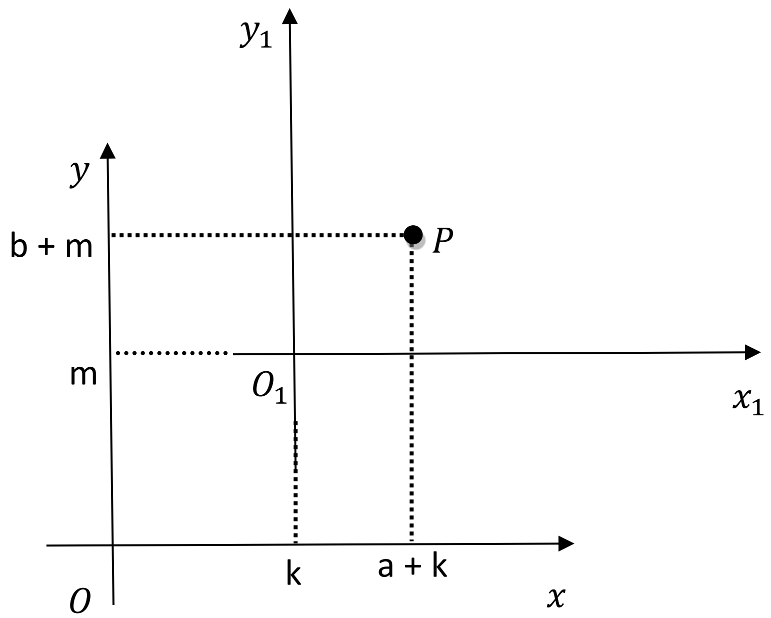
Considere o Plano Cartesiano ilustrado abaixo, que vamos chamar de xOy.



Desejamos transladar (ou seja, “deslocar”) o Plano Cartesiano xOy para uma outra posição, criando assim um novo Plano Cartesiano que vamos chamar de $x_1O_1y_1$, de tal modo que os novos eixos $x_1\ e\ y_1$ são paralelos aos eixos $x\ e\ y$, respectivamente.



Considere que as coordenadas de O_1 em xOy seja (k, m). Já as coordenadas de P em $x_1O_1y_1$ seja (a, b). Dessa forma, as coordenadas P em xOy serão $(a + k, b + m)$.



Translação de Eixos – Definição

Considere o Plano Cartesiano xOy e um ponto $O_1 = (k, m)$ desse plano. Considere também o Plano Cartesiano $x_1O_1y_1$, de tal modo que os eixos $x_1 \; e \; y_1$ são paralelos aos eixos $x \; e \; y$, respectivamente. Se um ponto P em $x_1O_1y_1$ tem coordenadas $(x_1, y_1\ )$ e esse mesmo ponto em xOy tem coordenadas (x, y), então temos que:

$$\begin{cases} x = \ x_1 + k \\ y = \ y_1 + m \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = x - k \\ y_1 = y - m \end{cases}$$

Translação de Eixos – Aplicação

Vamos efetuar a translação do Plano Cartesiano xOy de tal modo que o novo plano $x_1O_1y_1$ tenha origem em $O_1 = (-2, 3)$. Em seguida, complete a tabela abaixo convertendo as coordenadas dos pontos dados em um plano para outro.

Coordenadas em xOy	Coordenadas em $x_1O_1y_1$
(4, 5)	
(-2, 4)	
(-3, -1)	
(1, -5)	

Como a origem do novo plano $x_1O_1y_1$ é dada por $O_1 = (-2, 3)$, temos que:

$$\begin{cases} x = \ x_1 - 2 \\ y = \ y_1 + 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y - 3 \end{cases}$$

Desse modo, podemos completar a tabela da seguinte maneira:

Coordenadas em xOy	Coordenadas em $x_1O_1y_1$
(4, 5)	(6, 2)
(-2, 4)	(0, 1)
(-3, -1)	(-1, -4)
(1, -5)	(3, -8)

CONSTRUINDO O 2º APLICATIVO:

Nosso desafio agora será construir um aplicativo para transladar coordenadas geográficas convertidas em cartesianas, local. Iniciamos esse projeto escolhendo um nome para ele:

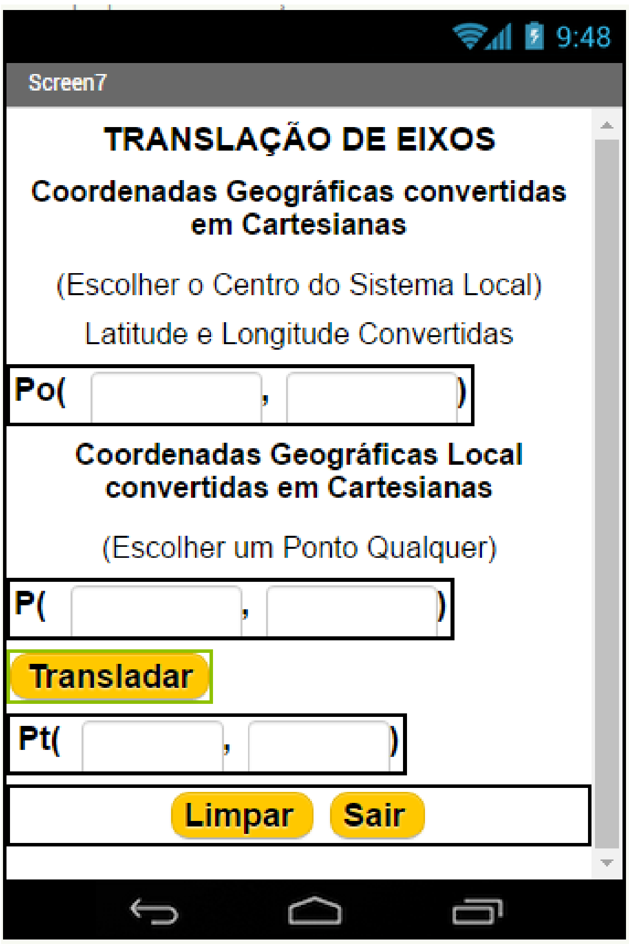


Figura 9
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para o cálculo o ponto médio entre dois pontos. Quando clicamos no *botão* **BTcalcular**, devemos:

1. Ler o valor de x_0 do ponto P_0;
2. Ler o valor de x do ponto P;
3. Ler o valor de y_0 do ponto P_0;
4. Ler o valor de y do ponto P;
5. Subtrair x_0 e x para obter x_t depois subtrair y_0 e y para obter y_t.
6. Exibir o resultado na *legenda* P_t.

Observe os blocos:

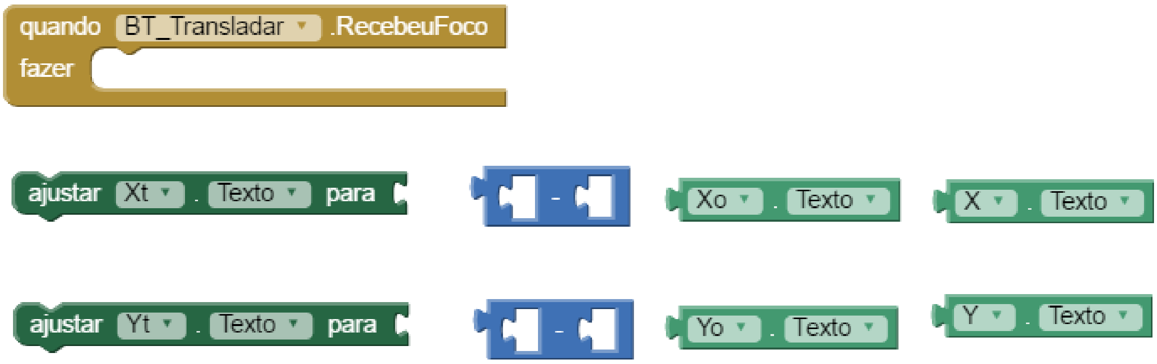


Figura 10
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

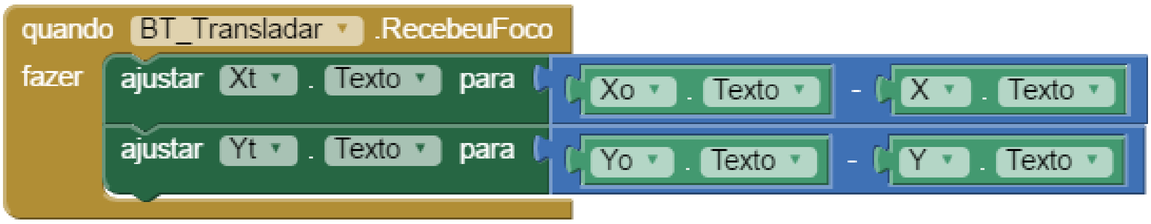


Figura 11
Fonte: App Inventor da MIT

7. Programação do botão limpar.

Figura 12
Fonte: App Inventor da MIT

8. Programação do botão sair.

Figura 13
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

Vamos converter, usando o app inventor, de coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas os seguintes pontos turísticos da Cidade de Abaetetuba.

Considerando a latitude decimal -1.724124 ou grau 1º43’26.846”S e a longitude decimal -48.891415 ou grau 48º53’29.094W, como origem de um sistema de coordenadas cartesianas local. A partir dessa informação calculem, para esse sistema, as coordenadas cartesianas correspondentes às coordenadas geográficas dada na Tabela 1 abaixo.

TABELA 1 - Coordenadas Geográficas de alguns pontos de Abaetetuba/PA

Local	**Coordenadas Geográficas**		**Coordenadas Cartesianas** (Com origem no dado ponto acima)	
	Latitude	**Longitude**	x	Y
Praça da Bandeira	-1.725004	-48.889198		
	1º43’30.014”S	48º53’21.113”W		
Igreja de Conceição	-1.7230089	-48.8879049		
	1º43’22.832”S	48º53’16.458”W		
Cruzeiro	-1.724124	-48.891415		
	1º43’26.846”S	48º53’29.094W		
Praia de beja	-1.6251526	-48.8155445		
	1º37’30.549”S	48º48’55.96W		
Estádio Humberto Parente	-1.7234929	-48.8820333		
	1º43’24.574”S	48º52’55.32”W		

Fonte: elaborada pelo pesquisador

ATIVIDADE 3: Aplicativo para calcular ponto médio

Análise a priori: A questão proposta busca orientar o discente a extração de dados do mapa para construção gráfica. Inicialmente damos um tempo para os grupos encontrarem os dados no mapa. Supomos que, por diferentes motivos, eles tenham dificuldades em identificar esses dados. Para tanto, devemos orientá-los na construção de um raciocínio semelhante à da atividade 1, em que estavam destacadas coordenadas cartesianas, mostrando que esses dados no mapa estão como coordenadas geográficas, ou seja, latitude e longitude. Esperamos que desta forma seja possível que eles sistematizem os dados e cheguem num algoritmo aproximado ao do ponto médio.

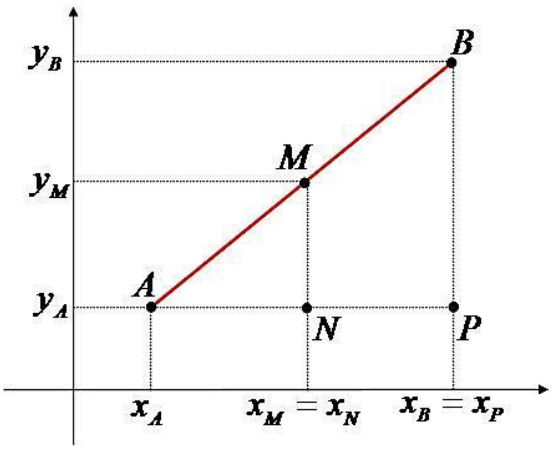
Objetivo: Compreender os conceitos de ponto médio a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

Questão Proposta: Essa mesma operadora de celular depois de ter construído as duas torres citadas anteriormente, agora quer colocar uma terceira torre que fique alinhada entre as duas primeiras e que as distâncias entre elas sejam as mesmas. Como a operadora pode encontrar essas distâncias como poderá fazer usando GPS e conhecimentos matemáticos?

UM POUCO DE MATEMÁTICA: PONTO MÉDIO

O segmento de reta possui inúmeros pontos alinhados, mas somente um deles irá dividir o segmento em duas partes iguais. A identificação e a determinação do ponto médio de um segmento de reta serão demonstradas com base na ilustração a seguir.



O segmento de reta AB terá um ponto médio (M) com as seguintes coordenadas (x_M, y_M). Observe que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, possuindo os três ângulos respectivamente iguais. Dessa forma, podemos aplicar a seguinte relação entre os segmentos que formam os triângulos. Veja:

$$\boldsymbol{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}}$$

Podemos concluir que AB = 2 * (AM), considerando que M é o ponto médio do segmento AB. Temos:

$$\frac{AM}{2.AM} = \frac{AN}{AP}$$

$$\frac{AN}{AP} = \frac{1}{2}$$

$$AP = 2.AN$$

$x_P - x_A = 2.(x_M - x_A)$

$x_B - x_A = 2.(x_M - x_A)$

$x_B - x_A = 2x_M - 2x_A$

$2x_M = x_B - x_A + 2x_A$

$2x_M = x_A + x_B$

$x_M = (x_A + x_B)/2$

Utilizando método análogo, conseguimos demonstrar que $y_M = (y_A + y_B)/2$.

Portanto, considerando M o ponto médio do segmento AB, temos a seguinte expressão matemática capaz de determinar a coordenada do ponto médio de qualquer segmento no plano cartesiano:

$$\boldsymbol{x_M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Percebemos que o cálculo da abscissa x_M é a média aritmética entre as abscissas dos pontos A e B. Assim, o cálculo da ordenada y_M é a média aritmética entre as ordenadas dos pontos A e B.

CONSTRUINDO O 3º APLICATIVO: Aplicativo para calcular o ponto médio.

Vamos construir um aplicativo no App Inventor para calcular o ponto médio de dois pontos. Iniciamos esse projeto escolhendo um nome para ele:

Deixe a tela principal com os seguintes elementos:

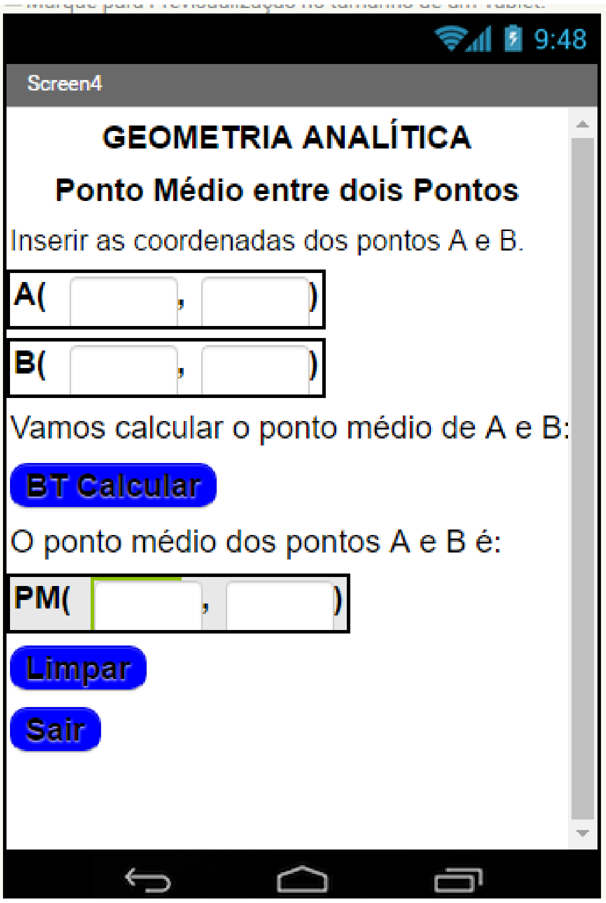


Figura 14
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para o cálculo o ponto médio entre dois pontos. Quando clicamos no *botão* **BTcalcular**, devemos:

1. Ler o valor de x_A do ponto A;
2. Ler o valor de y_A do ponto A;
3. Ler o valor de x_B do ponto B;
4. Ler o valor de y_B do ponto B;
5. Dividir a soma x_A + x_B por 2 para encontrar o valor de X_M em seguida dividir a soma de y_A + y_B para encontrar o valor de Y_M.
6. Exibir o resultado na *legenda* **Resultado.**

Observe os blocos:

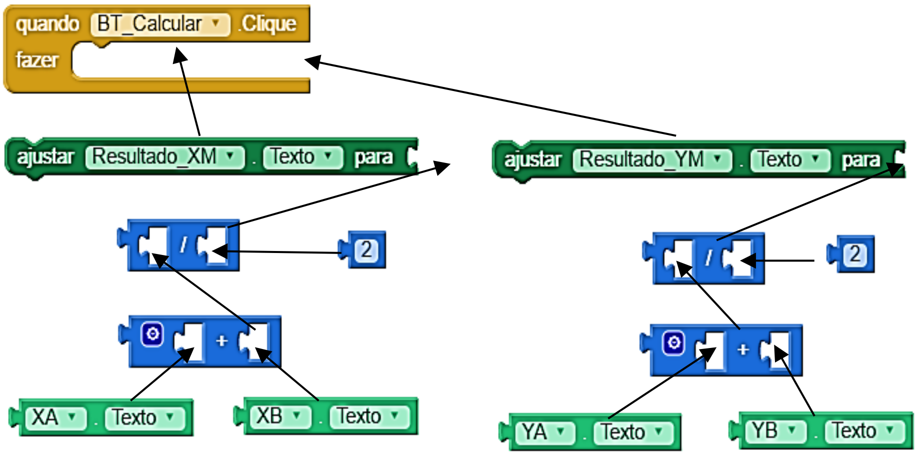


Figura 15
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

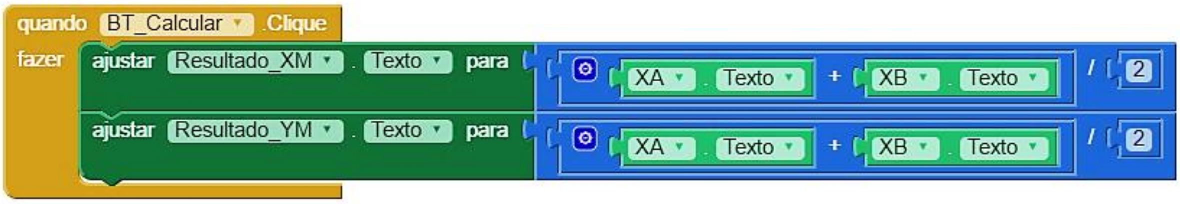


Figura 16
Fonte: App Inventor da MIT

7. Programação do botão limpar.

Figura 17
Fonte: App Inventor da MIT

8. Programação do botão sair.

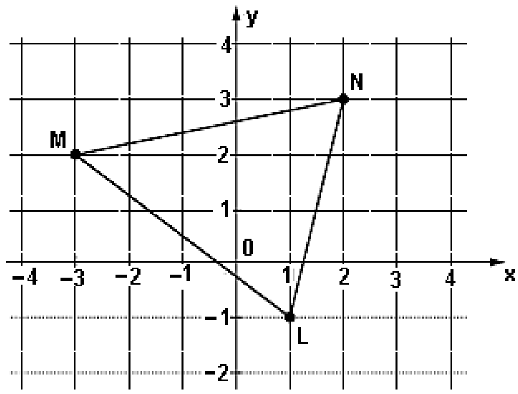
Figura 18
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro entre os pontos de coordenadas (2,3) e (4,7), devendo a trajetória da estrada ser retilínea. Qual é o ponto médio dessa estrada de ferro entre os pontos dados?

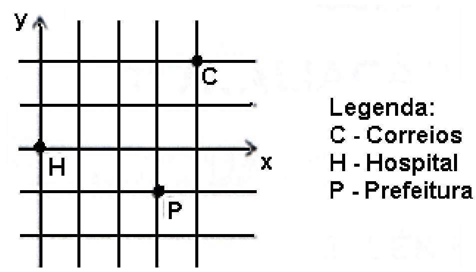
2. Veja o triângulo LMN desenhado no plano cartesiano abaixo.



Qual o ponto médio de cada lado desse triângulo?

3. Observe o quadriculado que representa a figura da região de uma cidade. Nessa figura as linhas são as ruas que se cortam perpendicularmente e cada quadrado é um quarteirão.

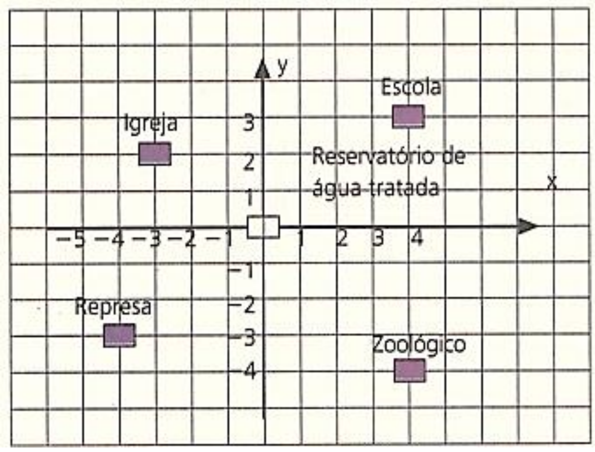
Associando um plano cartesiano a esse quadriculado, considere o Hospital como origem, os eixos coordenados x e y como indicado na figura e a medida do lado do quarteirão como unidade de medida.



Qual o ponto médio de cada lado da figura geométrica formada por esses três pontos?

4. Uma cidade tem quatro pontos turísticos que são os mais visitados. Esses pontos são identificados pelas coordenadas A(1, 0), B(2, 1), C(2, 3) e D(3, 1). Assim, o gráfico que representa as localizações dos pontos de turismo é uma figura geometria, qual o ponto médio de cada lado dessa figura?

5. Uma operadora de celular registrou num sistema ortogonal as coordenadas de alguns pontos estratégicos de uma cidade. Ela precisa conhecer os pontos médio entre para colocar algumas torres de transmissão de sinal sem perda de sinal.



Qual o ponto médio da igreja para a escola, da escola para o zoológico, do zoológico para a represa e finalmente da represa para a igreja?

ATIVIDADE 4: Construção de aplicativo para verificar o alinhamento de três pontos

Análise a priori: Julgamos que as equipes serão capazes de conseguir uma estratégia mais refinada para resolver essa atividade, haja vista que eles já estarão mais familiarizados com o processo e, por isso, também demandará menor tempo que as atividades anteriores para ser concluída através da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor,

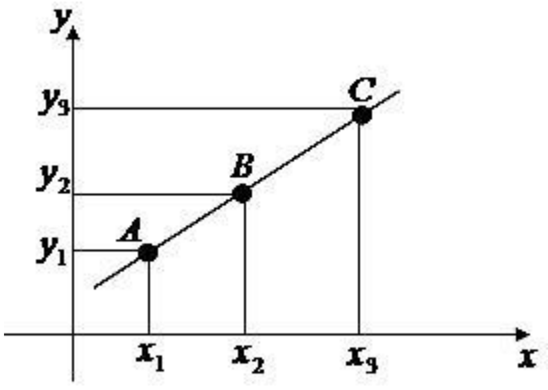
Objetivo: Compreender os conceitos de alinhamento de três pontos a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

Questão Proposta: Como a operadora citada no primeiro problema pode ter certeza que as três torres do segundo problema vão estar alinhadas usando GPS e conhecimentos matemáticos?

UM POUCO DE MATEMÁTICA: CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

O alinhamento de três pontos pode ser determinado aplicando o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3x3. Ao calcular o determinante da matriz construída utilizando as coordenadas dos pontos em questão e encontrando valor igual a zero, podemos afirmar que existe colinearidade dos três pontos. Observe os pontos no plano cartesiano a seguir:



As coordenadas dos pontos A, B e C são:

Ponto A (x_1, y_1)

Ponto B (x_2, y_2)

Ponto C (x_3, y_3)

Através dessas coordenadas iremos montar a matriz 3x3, as abscissas dos pontos constituirão a 1ª coluna; as ordenadas, a 2ª coluna e a terceira coluna serão complementadas com o número um.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{y_3} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Aplicando Sarrus temos:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{y_3} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{y_3} \end{matrix} = \boldsymbol{0}$$

$$x_1.y_2.1 + y_1.1.x_3 + 1.x_2.x_3 - (y_1.x_2.1 + x_1.1.y_3 + 1.y_2.x_3) = 0$$

$$x_1y_2 + 3y_1 + x_2x_3 - 2y_1 - x_1y_3 - 3y_2 = 0$$

CONSTRUINDO O 4º APLICATIVO: Verificar se três pontos estão alinhados.

Vamos construir um aplicativo no app inventor para calcular o ponto médio de dois pontos. Iniciamos esse projeto escolhendo um nome para ele:

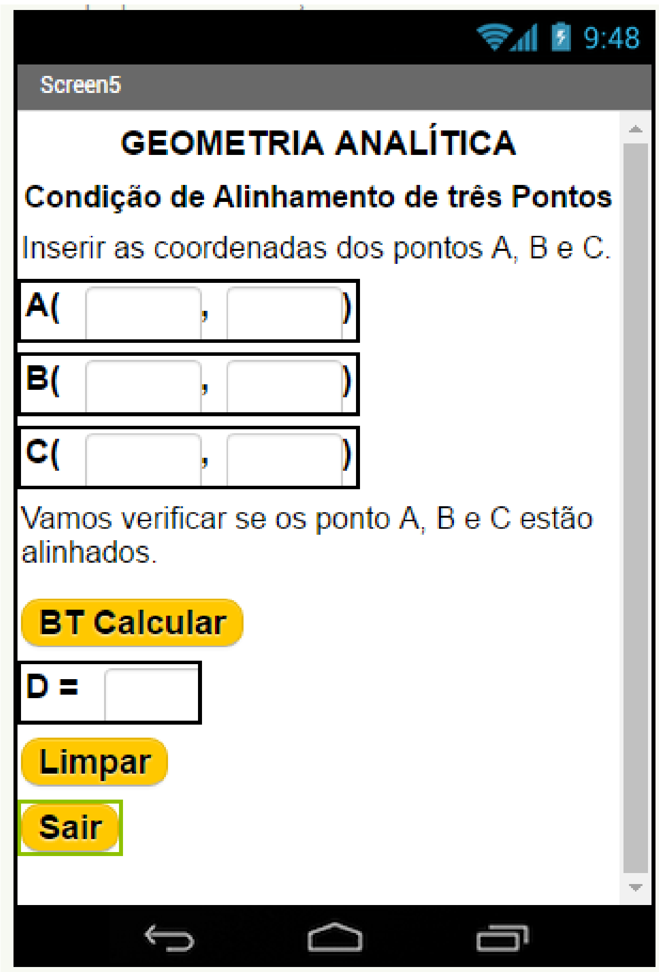


Figura 19
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para verificar se três pontos estão alinhados. Quando clicamos no *botão* **BT verificar**, devemos:

1. Ler o valor de x_A do ponto A;
2. Ler o valor de y_A do ponto A;
3. Ler o valor de x_B do ponto B;
4. Ler o valor de y_B do ponto B;
5. Ler o valor de x_C do ponto C;
6. Ler o valor de y_C do ponto C;
7. Subtrair a soma dos produtos da diagonal principal com a soma dos produtos da diagonal secundaria.
8. Exibir o resultado na *legenda* **D=.**

Observe os blocos:

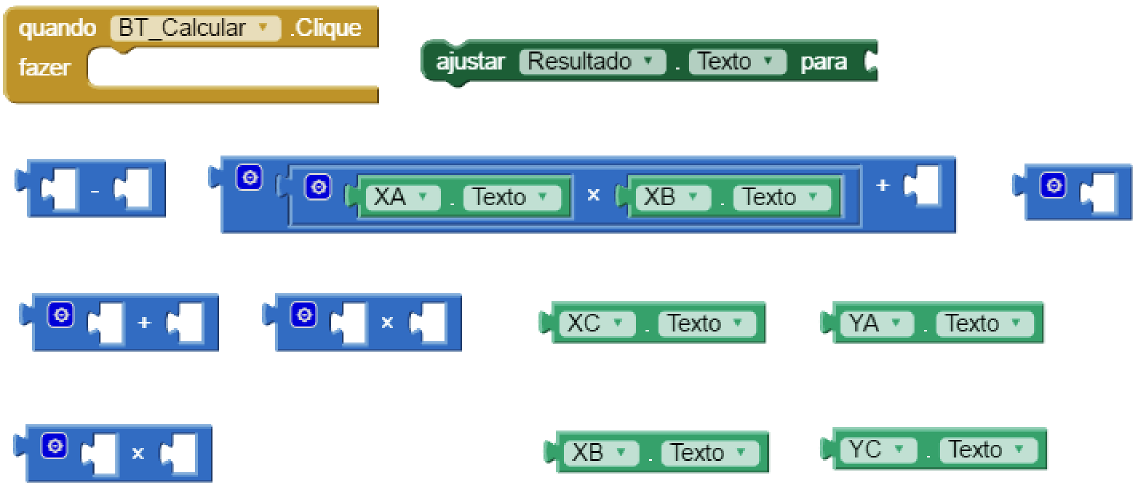


Figura 20
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

Figura 21
Fonte: App Inventor da MIT

9. Programação do botão limpar.

Figura 22
Fonte: App Inventor da MIT

10. Programação do botão sair.

Figura 23
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Verifique se os pontos A(0, 4), B(–6, 2) e C(8, 10) estão alinhados.

2. Determine o valor de c para que os pontos A(4, 2), B(2, 3) e C(0, c) estejam alinhados.

3. Conhecendo os pontos A, B e C, verifique, em cada item, se pertencem à mesma reta.

a) A(3,-2), B(0,1) e C(-3,4)

b) A(-3,-1), B(0,5) e C(1,-2)

c) A (-2,5), B(-5,6) e C(-8,7)

d) A(1,-1), B(2,1) e C(3,2)

4. Sabendo-se que o ponto A pertence ao eixo das abscissas e à mesma reta que os pontos B(6,-2) e C(-4,3), determine a abscissa X_A.

5. Determine a ordenada y_B do ponto B, sabendo que esse ponto também pertence ao eixo das ordenadas e à reta que contém os pontos A(3,2) e C(7,-2).

ATIVIDADE 5: Aplicativo para determinar a equação geral da reta

Análise a priori: Julgamos que os alunos terão dificuldade em compreender a questão proposta, em associar a equação geral da reta com o determinante dos coeficientes da equação igual a zero, mesmo já tendo visto o mesmo na verificação do alinhamento de três pontos. Caso isso ocorra pediremos para que reanalisem a atividade 3 e tentem montar uma estratégia.

Objetivo: Compreender os conceitos para determinar a equação geral da reta a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

Questão Proposta: Como podemos encontrar a equação geral da reta que representa a TV. Santos Dumont que passa em frente a sua Escola usando GPS e conhecimentos matemáticos?

UM POUCO DE MATEMÁTICA: EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Para determinarmos a equação geral de uma reta utilizamos os conceitos relacionados a matrizes. Na determinação da equação na forma ax + by + c = 0 aplicamos a regra de Sarrus utilizada na obtenção do discriminante de uma matriz quadrada de ordem 3 x 3. Para utilizarmos uma matriz nessa determinação da equação feral devemos ter no mínimo dois pares ordenados (x, y) dos possíveis pontos alinhados, por onde a reta irá passar. Observe a matriz geral da determinação da equação geral:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{y_1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{y_2} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Na matriz temos os pares ordenados que devem ser informados: (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e um ponto genérico representado pelo par (x, y). Observe que a 3º coluna da matriz é completada com o algarismo 1. Vamos aplicar esses conceitos na obtenção da equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 2) e B(3,8), veja:

Ponto A temos que: $x_1 = 1$ e $y_1 = 2$

Ponto B temos que: $x_2 = 3$ e $y_2 = 8$

Ponto genérico C representado pelo par ordenado (x, y)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Calcular o determinante de uma matriz quadrada aplicando a regra de Sarrus significa:

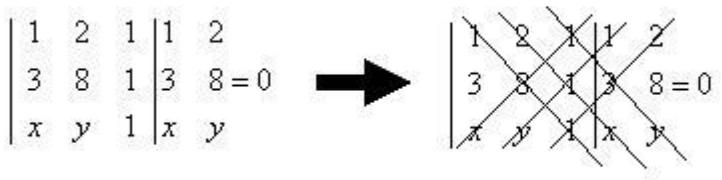
1º passo: repetir a 1º e a 2º coluna da matriz.

2º passo: somar os produtos dos termos da diagonal principal.

3º passo: somar os produtos dos termos da diagonal secundária.

4º passo: subtrair a soma total dos termos da diagonal principal dos termos da diagonal secundária.

Observe todos os passos na resolução da matriz dos pontos da reta:



[(1 . 8 . 1) + (2 . 1 . x) + (1 . 3 . y)] – [(2 . 3 . 1) + (1 . 1 . y) + (1 . 8 . x)] = 0

[8 + 2x + 3y] – [6 + y + 8x] = 0

8 + 2x + 3y – 6 – y – 8x = 0

2x – 8x + 3y – y + 8 – 6 = 0

–6x + 2y + 2 = 0

Os pontos A(1, 2) e B(3,8) pertencem a seguinte equação geral da reta:

–6x + 2y + 2 = 0

CONSTRUINDO O 5º APLICATIVO: Equação geral da reta.

Deixe a tela principal com os seguintes elementos:

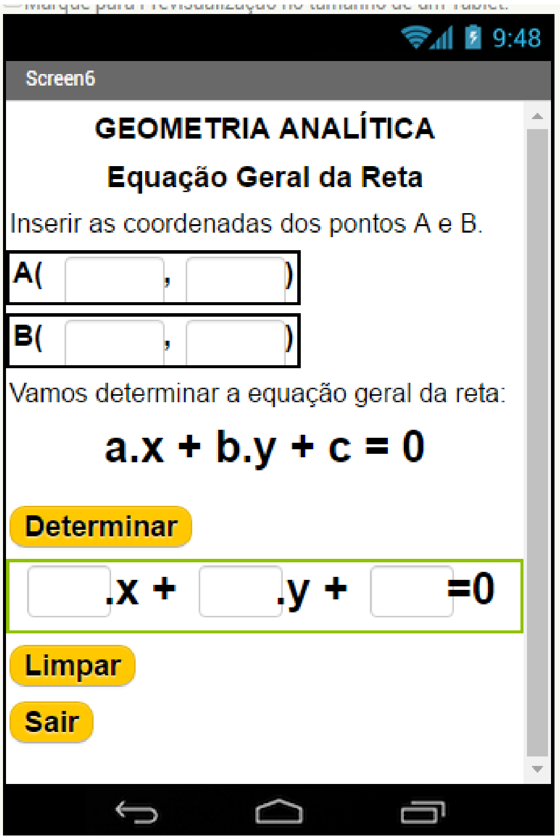


Figura 24
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para verificar se três pontos estão alinhados. Quando clicamos no *botão* **BT verificar**, devemos:

1. Ler o valor de x_A do ponto A;
2. Ler o valor de y_A do ponto A;
3. Ler o valor de x_B do ponto B;
4. Ler o valor de y_B do ponto B;
5. Subtrair a soma dos produtos da diagonal principal com a soma dos produtos da diagonal secundaria e igualar a zero.
6. Exibir o resultado da equação geral da reta.

Observe os blocos:

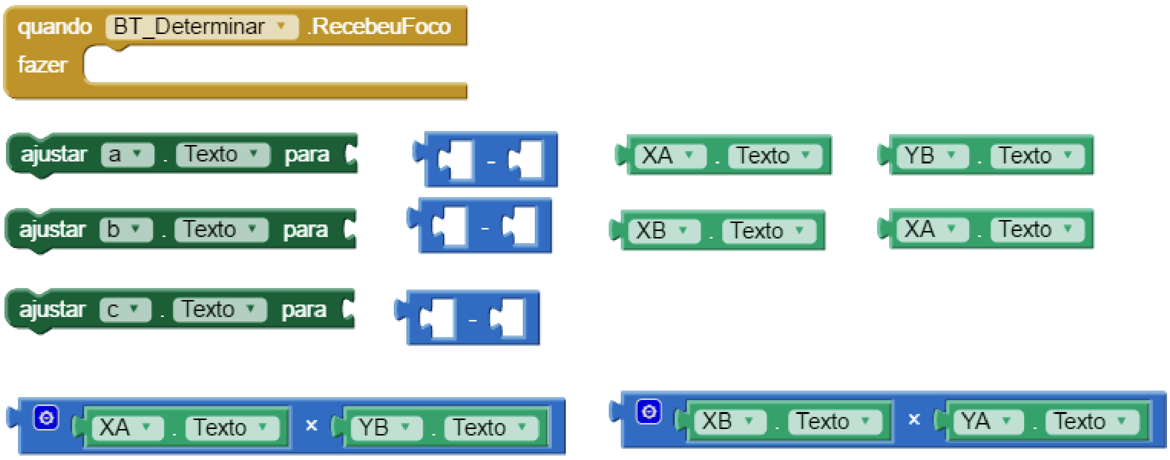


Figura 25
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

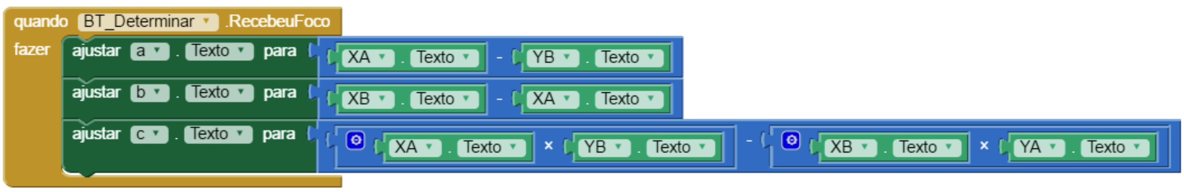


Figura 26
Fonte: App Inventor da MIT

7. Programação do botão limpar.

Figura 27
Fonte: App Inventor da MIT

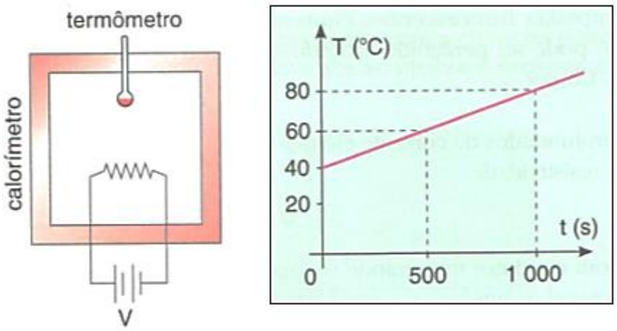
8. Programação do botão sair.

Figura 28
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

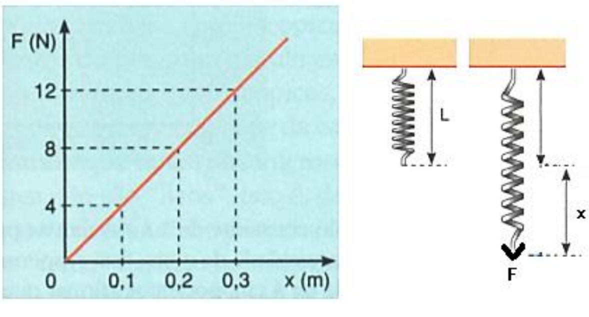
ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico. Num experimento, em que a potência dissipada pelo resistor, permitiu construir um gráfico da temperatura T em função do tempo t, como mostra a figura abaixo.



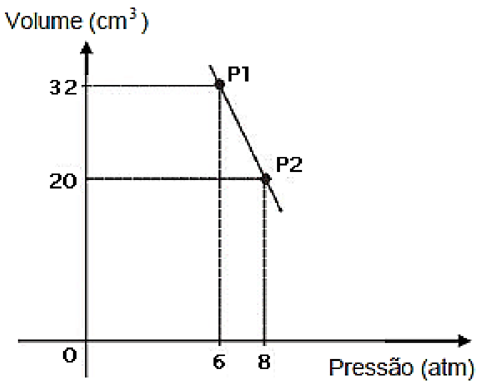
A taxa de aumento da temperatura T (ºC) é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (500; 60) e (1000; 80) como mostra no gráfico acima. Nesse caso, determine a equação geral da reta que passa por esses pontos.

2. O professor de física fez um gráfico que representava a intensidade da força F (N) sofrida por uma mola ideal em função da deformação x (cm) de acordo com o gráfico abaixo. A taxa de aumento da força é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (0,1; 4), (0,2; 8) e (0,3; 12), como ilustra o gráfico abaixo.



Nesse caso, determina a equação geral da reta que passa por esses pontos.

3. Os pesquisadores verificaram que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 6 atm, o volume é de 32 cm³, e quando a pressão é de 8 atm, o volume é de 20 cm³. A taxa média de redução do volume é representada pela declividade da reta que passa por P1= (6, 32) e P2= (8, 20), ilustrada no gráfico abaixo.



Nesse caso, determine a equação geral da reta que passa por esses pontos.

4. Um engenheiro elétrico quer construir uma linha de transmissão de energia entre os pontos de coordenadas (1, 4) e (2, 9), devendo a trajetória da linha de transmissão ser retilínea. Qual é a equação geral da reta que representa essa linha de transmissão de energia?

5. Marcos é arquiteto e projetou um novo bairro sobre um plano cartesiano. Ele posicionou numa mesma rua, a Escola no ponto A (2, 3) e o Posto de Saúde no ponto B (3, 5).
Qual é a equação geral da reta que representa essa rua?

ATIVIDADE 6: Aplicativo para determinar o coeficiente angular da reta

Análise a priori: Consideramos que os grupos até consigam estabelecer algumas relações, mas não consigam concluir a atividade questão por se tratar de situações que envolvem relações trigonométricas. Caso isso ocorra incentivaremos os discentes a encontrarem um triângulo retângulo e relacionarem os elementos nele que já foram usados em atividades anteriores com um dos ângulos agudo e observar qual relação trigonométrica eles poderiam usar nessa atividade.

Objetivo: Compreender os conceitos para determinar o coeficiente angular da reta a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

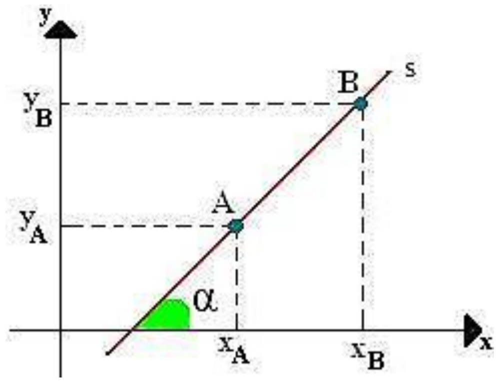
Questão Proposta: Como podemos encontrar o coeficiente angular da reta que no mapa da Cidade de Abaetetuba passa pela sua Escola e pelo 15º Grupamento Bombeiro Militar usando um GPS e conhecimentos matemáticos?

UM POUCO DE MATEMÁTICA: CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

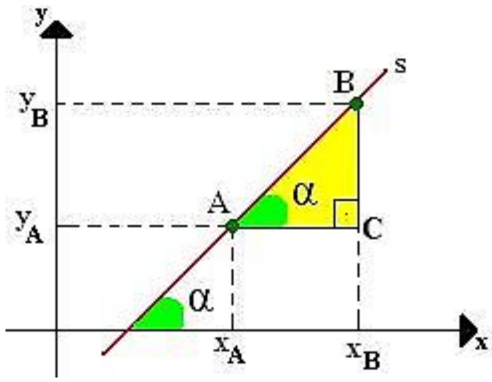
Sabemos que o valor do coeficiente angular de uma reta é a tangente do seu ângulo de inclinação. Através dessa informação podemos encontrar uma forma prática para obter o valor do coeficiente angular de uma reta sem precisar fazer uso do cálculo da tangente.

Vale ressaltar que se a reta for perpendicular ao eixo das abscissas, o coeficiente angular não existirá, pois não é possível determinar a tangente do ângulo de 90º.

Para representarmos uma reta não vertical em um plano cartesiano é preciso ter no mínimo dois pontos pertencentes a ela. Desse modo, considere uma retas que passa pelos pontos A(x_A, y_A) e B($x_{B,}$ y_B) e possui um ângulo de inclinação com o eixo Ox igual a α.

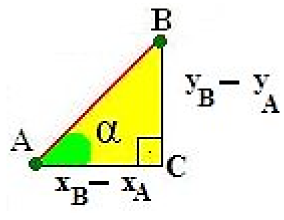


Prolongado a semirreta que passa pelo ponto A e é paralela ao eixo Ox formaremos um triângulo retângulo no ponto C.



O ângulo A do triângulo BCA será igual ao da inclinação da reta, pois, pelo Teorema de Tales, duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais.

Levando em consideração o triângulo BCA e que o coeficiente angular é igual à tangente do ângulo de inclinação, teremos:



tgα = cateto oposto / cateto adjacente

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Portanto, o cálculo do coeficiente angular de uma reta pode ser feito pela razão da diferença entre dois pontos pertencentes a ela.

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

CONSTRUINDO O 6º APLICATIVO: Calculo do coeficiente angular da reta.

Deixe a tela principal com os seguintes elementos:

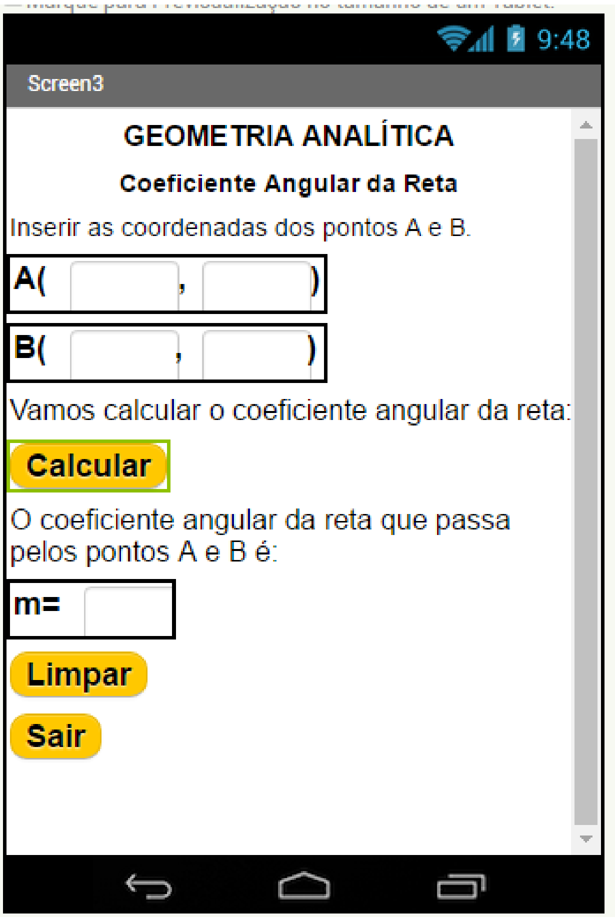


Figura 29
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para o cálculo o coeficiente angular da reta que passa por dois pontos. Quando clicamos no *botão* **BT Calcular**, devemos:

1. Ler o valor de x_A do ponto A;
2. Ler o valor de y_A do ponto A;
3. Ler o valor de x_B do ponto B;

4. Ler o valor de y_B do ponto B;
5. Dividir a diferença de x_B - x_A pela diferença de y_B - y_A.
6. Exibir o resultado na *legenda* **Resultado.**

Observe os blocos:

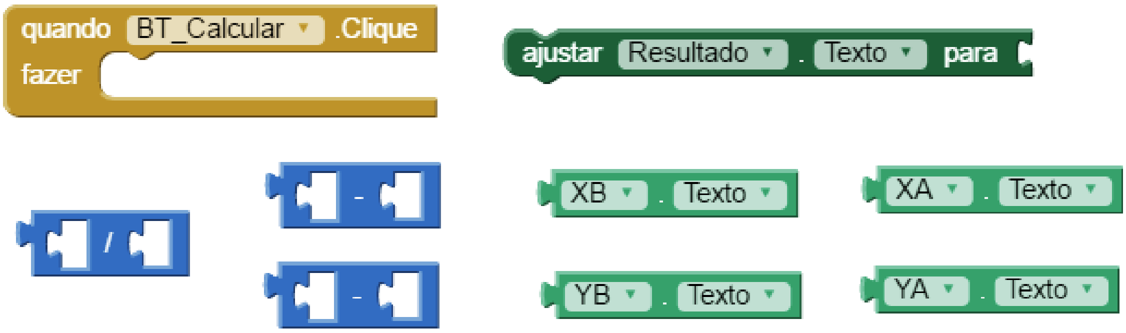


Figura 30
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

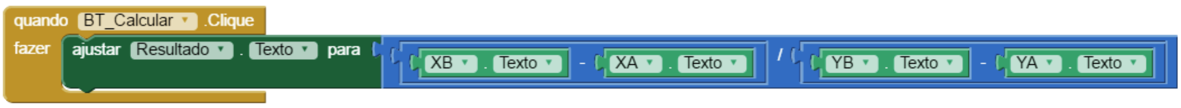


Figura 31
Fonte: App Inventor da MIT

1. Programação do botão limpar.

Figura 32
Fonte: App Inventor da MIT

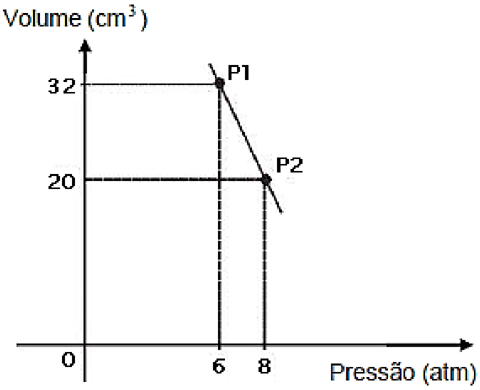
2. Programação do botão sair.

Figura 33
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

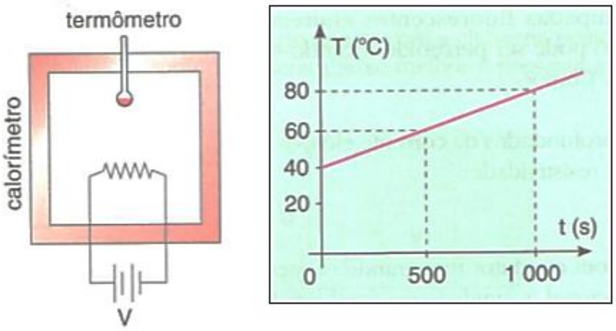
1. Os pesquisadores verificaram que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 6 atm, o volume é de 32 cm³, e quando a pressão é de 8 atm, o volume é de 20 cm³. A taxa média de redução do volume é representada pela declividade da reta que passa por P1= (6, 32) e P2= (8, 20), ilustrada no gráfico abaixo.



Nesse caso, a declividade é igual a

(A) -6. (B) 6. (C) 8. (D) 20. (E) 32.

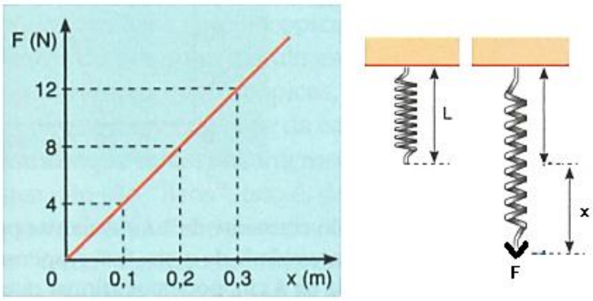
2. Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico. Num experimento, em que a potência dissipada pelo resistor, permitiu construir um gráfico da temperatura T em função do tempo t, como mostra a figura abaixo.



A taxa de aumento da temperatura T (ºC) é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (500; 60) e (1000; 80) como mostra no gráfico acima. Nesse caso, a inclinação de reta é igual a:

(A) 25 (B) 80 (C) 1000 (D) 0,04 (E) 60

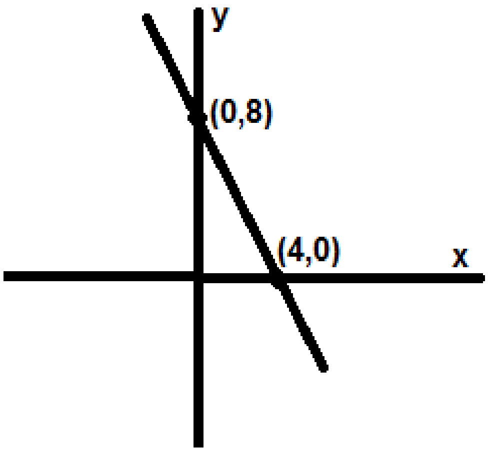
3. O professor de física fez um gráfico que representava a intensidade da força F (N) sofrida por uma mola ideal em função da deformação x (cm) de acordo com o gráfico abaixo. A taxa de aumento da força é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (0,1; 4), (0,2; 8) e (0,3; 12), como ilustra o gráfico abaixo.



Nesse caso, a inclinação de reta é igual a:

(A) 4 (B) 40 (C) 12 (D) 8 (E) 0,3

4. Observe a reta a seguir:



Sobre seu coeficiente angular, podemos afirmar que é

(A) um número negativo cujo módulo é um número par.

(B) um número negativo cujo módulo é um número ímpar.

(C) um número positivo par.

(D) um número positivo ímpar.

(E) nulo.

5. A reta de equação 2y + x = 0.

(A) é paralela ao eixo 0X.

(B) é paralela ao eixo 0Y.

(C) tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$.

(D) tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

(E) tem coeficiente angular 2.

ATIVIDADE 7: Aplicativo para determinar a distância de um ponto a uma reta

Análise a priori: Com as habilidades adquiridas até então consideramos que os alunos serão capazes de redigir suas conclusões acerca do apreendido, mas sem relatar precisamente na linguagem matemática o que será fortalecido por nós no momento de socialização do conhecimento. Após isso, julgamos que os alunos não terão dificuldade em compreender e resolver a questão proposta e as questões complementares. Consideramos que a atividade levará pouco tempo para sua realização e a concentração maior do mesmo será na fase inicial de análise do mapa.

Objetivo: Compreender os conceitos para determinar a distância de um ponto a uma reta a partir da construção e validação de um aplicativo para celular, no App Inventor.

Material: lápis, borracha, cadernos de anotações, computador.

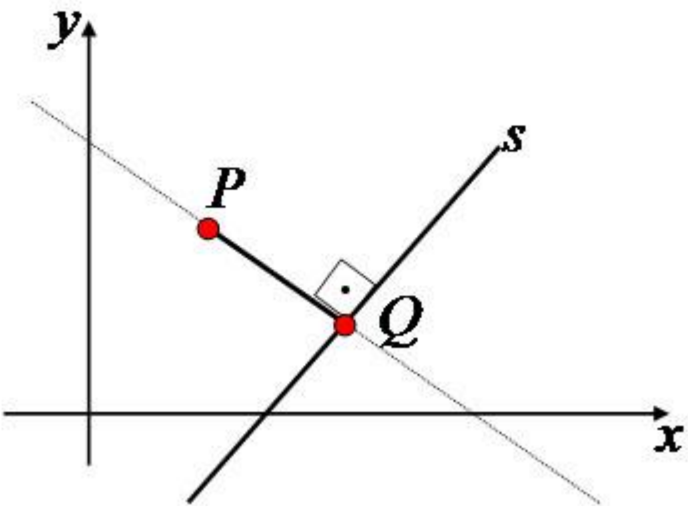
Questão Proposta: Como encontrar a menor distância entre a sua Escola a Av. Dom Pedro II no Mapa de Abaetetuba usando GPS e conhecimentos matemáticos?

UM POUCO DE MATEMÁTICA: DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

A Geometria Analítica objetiva seus estudos através da conciliação entre a Álgebra e a Geometria. Dessa forma, algumas situações podem ser analisadas metodicamente, através da interpretação geométrica e das relações algébricas.

Uma dessas importantes relações da Geometria Analítica é a distância entre um ponto e uma reta no plano cartesiano.

A distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento, que deverá formar com a reta um ângulo reto (90º). Para estabelecer a distância entre os dois necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto. A figura a seguir estabelece a condição gráfica da distância entre o ponto P e a reta r, sendo o segmento PQ a distância entre eles.



Estabelecendo a equação geral da reta s: ax + by + c = 0 e a coordenada do ponto P(x_0, y_0), conseguimos chegar à expressão capaz de calcular a distância entre o ponto P e a reta s:

$$\boldsymbol{d} = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{c}|}{\sqrt{(\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b}^2)}}$$

Essa expressão surge de uma generalização feita, podendo ser utilizada nas situações em que envolve o cálculo da distância entre um ponto qualquer e uma reta.

CONSTRUINDO O 6º APLICATIVO: Calcular a distância de um ponto a uma reta.

Vamos construir um aplicativo no app inventor para calcular o ponto médio de dois pontos. Iniciamos esse projeto escolhendo um nome para ele:

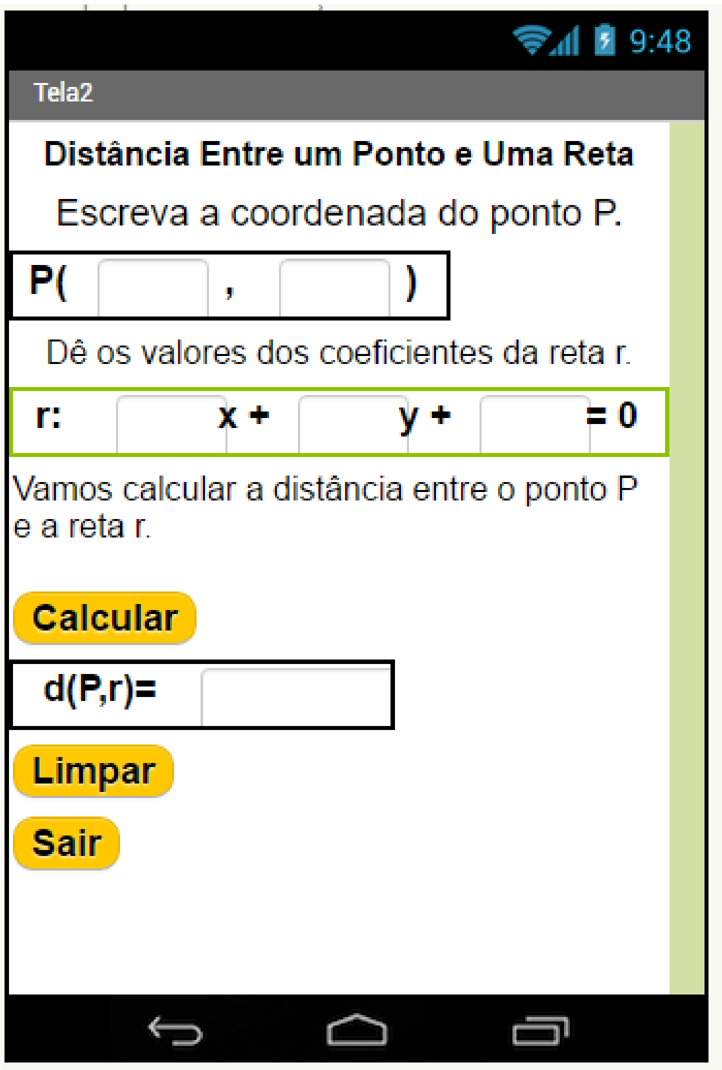


Figura 34
Fonte: App Inventor da MIT

Altere para o modo Blocos e vamos inserir o código para o cálculo da distância entre pontos e reta. Quando clicamos no *botão* **BTcalcular**, devemos:

1. Ler o valor de x do ponto P;
2. Ler o valor de y do ponto P;
3. Ler o valor do coeficiente a da reta r;
4. Ler o valor do coeficiente b da reta r;
5. Ler o valor do coeficiente c da reta r;
6. Módulo do coeficiente a multiplica por x mais o coeficiente b multiplica por y mais o coeficiente c, tudo isso dividido pela raiz do coeficiente a elevado ao quadrado mais o coeficiente b elevado ao quadrado.
7. E por último exibir o resultado na *legenda* **Resultado.**

Observe os blocos:

Figura 35
Fonte: App Inventor da MIT

Veja como ficou a fórmula:

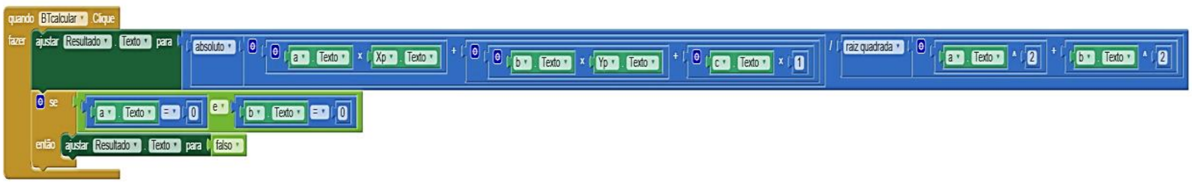


Figura 36
Fonte: App Inventor da MIT

8. Programação do botão limpar.

Figura 37
Fonte: App Inventor da MIT

9. Programação do botão sair.

Figura 38
Fonte: App Inventor da MIT

Agora é só testar a aplicação!!!!

ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Dado o ponto B com coordenadas (2, 6) e reta s: $2x + 4y – 1 = 0$, determine a distância entre eles de acordo com os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica.

2. Considerando que a distância entre ponto P(k, 4) e a reta r, de equação $6x + 8y – 80 = 0$, é igual a 6 unidades, calcule o valor da coordenada k.

3. O ponto A(–1, –2) é um vértice de um triângulo equilátero ABC, cujo lado BC está sobre a reta de equação $x + 2y – 5 = 0$. Determine a medida h da altura desse triângulo.

4. Calcular a distância do ponto P(1,2) a reta r: $2x + 3y + 4 = 0$.

5. Calcule a distância da reta P à reta r, no caso:

• P(1,3) e r: $5x + 12y – 2 = 0$.

5. EXPERIMENTO DIDÁTICO

Essa fase da pesquisa vem tratar, especificamente, da validação da sequência didática cujo objetivo foi apresentar uma sequência de 7 (sete) questões envolvendo Geometria Analítica com problemas do cotidiano usando o georreferenciamento do mapa do município de Abaetetuba-PA como informação geográfica, onde os alunos usando o GPS dos seus smartphones para tornar suas coordenadas conhecidas num dado sistema de referência. Este processo inicia-se com a obtenção das coordenadas (pertencentes ao sistema no qual se pretende georreferenciar) de pontos do mapa do município a serem georreferenciados. Os pontos são locais como a escola e outros no bairro da escola ou próximos que oferecem uma feição física para esses alunos e perfeitamente identificável, tais como corpo de bombeiro, terminal rodoviário, praças, praias, entre outros. A obtenção das coordenadas dos pontos pode ser realizada em campo (a partir de levantamentos_topográficos, GPS – Sistema de Posicionamento Global), ou ainda por meio das imagens ou mapas (em papel ou digitais) georreferenciados. E também o APP inventor da Massachusetts Institute of Technology (MIT) onde os alunos vão poder programar os algoritmos de cada um dos sete tópicos da Geometria Analítica da sequência didática usando manipulações algébricas. Nessa ótica, a fim de facilitar a compreensão da sequência didática adotada e do próprio experimento adotado, nessa pesquisa, pretendeu-se seguir a estrutura abaixo.

a) Descrição da experimentação didática feita com os alunos participantes da atividade de validação.

Para dar início a essa fase da pesquisa foi feito um breve relato de nossa experiência enfatizando como se deu o desenvolvimento da sequência de atividades propostas envolvendo questões georreferrenciadas via geometria analítica no que concerne a definição de geometria analítica, a distância de dois pontos, ao ponto médio, ao alinhamento de três pontos, a equação geral da reta, ao coeficiente angular da reta e a distancia entre ponto e reta. Para tanto, foi feito uma experimentação didática com 12(doze) alunos do curso de mestrado em ensino de matemática turma 2017 da Universidade do Estado do Pará os quais participaram na construção dos aplicativos com intuito de filtrar e retificar possíveis erros que viessem influenciar, posteriormente, na aplicação das questões propostas e, no entendimento dessas ao serem aplicadas em sala de aula, futuramente, para os alunos do 3° ano do Ensino Médio conforme descrito em parágrafos anteriores nessa pesquisa. Segue a descrição da experimentação didática:

No encontro ocorrido no dia 05/04/2016, às 8 horas da manhã no laboratório de informática da Universidade do Estado do Pará, campos Centro de Ciências Sociais e Educação, onde foi lhes apresentado um livreto (está nos apêndices) com 7(sete) problemas sobre definição de geometria analítica envolvendo georrefereciamento e programação no App Inventor da MIT, em que os alunos participantes puderam não só resolver essas questões, mas registrar seus comentários a respeito do contexto e da estrutura de cada aplicativo.

Nesse encontro, o primeiro problema a ser resolvido e programado seu algoritmo no App Inventor da MIT, onde os colaboradores puderam não somente resolver e registrar suas críticas com relação aos problemas propostos, mas tiveram a oportunidade de refletir acerca de cada um deles e das ferramentas propostas para as suas soluções, como o uso do celular em sala de aula, programação de aplicativos pelos alunos, o uso da sala de informática pelos alunos da educação básica, entre outros.

Objetivo

O objetivo de tal experimentação foi verificar que o uso de ferramentas como celular, programação de aplicativos e laboratório de informática, além de problemas contextualizados na resolução de problemas de matemática são bons e estimulantes na aprendizagem dos alunos. Para tanto, foi usada a seguinte metodologia, a saber:

Metodologia

Essa pesquisa teve como norte teórico metodológico o registro de voz de 12(doze) alunos do curso de mestrado profissional em ensino de matemática sobre o grupo de questões envolvendo o assunto de Geometria Analítica via problemas contextualizados e uso de ferramentas como Global Positioning System (GPS), smartphone, laboratório de informática que constituem uma sequencia didática contendo 7 (sete) problemas contextualizados com o uso do mapa da cidade de

Abaetetuba-PA onde os alunos com o GPS dos seus smartphones terão de fazer o georrefericiamento de logradouros no bairro da escola ou de bairros próximos, ou seja, problemas que envolve o dia a dia dos adolescentes que cursam o 3° ano do Ensino Médio.

Vale ressaltar, que a aplicação da sequência didática ocorreu a partir de um encontro no laboratório de informática da Universidade do Estado do Pará sendo que os 12(doze) alunos participantes cursando o primeiro semestre do curso de mestrado profissional em ensino de matemática no CCSE.

Para realizar tal experimentação foi usada a pesquisa de grupo focal como técnica de investigação qualitativa por se tratar de um estudo feito a partir do registro de voz de um grupo seleto de alunos específicos de mestrado em matemática, pois de acordo com Gondim (2003),

> “É uma técnica de pesquisa que coleta dados por meio das interações grupais ao se discutir um tópico especial sugerido pelo pesquisador como técnica, ocupa uma posição intermediaria entre a observação participante e as entrevistas em profundidade. Pode ser caracterizada também como um recurso para compreender o processo de construção das percepções, atitudes e representações sociais de grupos humanos”. (GONDIM, 2003, p. 151).

Para essa autora (2003), o conceito de grupos focais esta alicerçado no desenvolvimento das entrevistas de grupos cuja diferença esta intrinsecamente ligada ao papel do entrevistador e no tipo de abordagem. Assim, a autora afirma que:

> O entrevistador grupal exerce um papel mais diretivo no grupo, pois sua relação e, a rigor, didática, ou seja, com cada membro. Ao contrario, o moderador de um grupo focal assume uma posição de facilitador do processo de discussão, e sua ênfase esta nos processos psicossociais que emergem, ou seja, no jogo de interinfluencias da formação de opiniões sobre um determinado tema. Os entrevistadores de grupo pretendem ouvir a opinião de cada um e comparar suas respostas; sendo assim, o seu nível de analise e o individuo no grupo. A unidade de analise do grupo focal, no entanto, e o próprio grupo. (GONDIM 2003, p.151)

Nesse sentido, essa etapa da pesquisa esta direcionada as aplicações práticas e tem como prioridade a construção de novas ideias, ou seja, a "identificação de necessidades e a descoberta de outros usos para um produto especifico”. (GONDIM, 2003 p.152)

Além disso, durante esse encontro foram feitos alguns registros de voz dos alunos colaboradores com relação à importância e a relevância para a escolha profissional relacionada a tais questões na vida desses estudantes, o que será tratado como maior especificidade na fase seguinte dessa pesquisa, a qual tratara das analises dos dados construídos no experimento didático apresentado na sessão (9).

b) Análise qualitativa dos recortes de voz dessa fase.

Ao fazer o registro de voz de cada aluno colaborador que contribuiu para o sucesso da experimentação didática ou atividade de filtragem sobre as questões que constituíram o experimento didático supramencionado relativas a problemas que envolvem georreferenciamento, smartphone e programação de aplicativos via teoria de Geometria Analítica compostos pelas mais diversas situações vivenciadas por muitos alunos adolescentes que cursam o 3° ano do Ensino Médio, pode-se notar que estes foram enfáticos ao se posicionar a esse respeito e tais posicionamentos estão descritos de forma explicita nos parágrafos seguintes quando o pesquisador faz diversas indagações a respeito da importância do professor de matemática trabalhar com questões contextualizadas que envolvam georreferenciamento, programação de aplicativos para celular via Geometria Analítica com problemas envolvendo situações cotidianas na vida do aluno. A seguir estão descritos os registros de voz de cada aluno e suas respectivas análises.

Pesquisador:

“As atividades alcançam a matemática escolar propostas nas aulas?”

- Registro de voz do aluno (A):

“Sem dúvida, vejo que a proposta está de acordo com o que pede os parâmetros curriculares nacionais em relação a envolver o dia a dia dos alunos, quando envolve as coordenadas geográficas de pontos da cidade, e as TIC, quando faz uso dos aplicativos para smartphones o que é uma febre principalmente entre os adolescentes, isso faz com que eles se motivem para resolver os problemas propostos.”

- Registro de voz do aluno (D):

“Sim, pois essas atividades não só ajudarão os alunos a entenderem mais o assunto como mostra à matemática na prática, o que eles sempre questionam com seus professores de matemática quando perguntam para que vai servir tal assunto na vida deles. Além de os posicionarem geograficamente e prepara-los para enfrentar desafios e perigos que a tecnologia usada de forma errada traz para a vida desses adolescentes.”

- Registro de voz do aluno (E):

“Sim, pelo que vimos essas atividades foram pensadas para facilitar o entendimento da matemática que muitos alunos têm dificuldade em entender quando o professor usa só quadro e giz e ainda sem contextualizar com o dia a dia do aluno e de sua comunidade. Temos como exemplo o bom uso do GPS para se localizar geográfica e os aplicativos que se bem usados ajudam na aprendizagem e esses alunos no futuro poderão desenvolver outros aplicativos que poderão beneficiar sua comunidade.”

- Registro de voz do aluno (J)

“Sim, de acordo com a metodologia essas atividades vão fazer os alunos do 3º anos do ensino médio refletirem como a matemática está no nosso dia a dia e como ele pode nos ajudar nos problemas de nossa comunidade.”

- Registro de voz do aluno (M)

“Vejo esse tipo de iniciativa muito válida, pois além das atividades estarem de acordo com a matemática escolar ela faz com que os alunos se entusiasmem para aprender cada vez mais devido ele estar presenciando a aplicabilidade da mesma.”

Pesquisador:

“Nas atividades a matemática desenvolvida está coerente com o assunto que se deseja ensinar?”

- Registro de voz do aluno (A):

“Sem dúvida tudo está coerente não só a matemática, mas também as ferramentas usadas têm tudo haver com o assunto.”

- Registro de voz do aluno (F):

“Quando trabalhamos Geometria Analítica com nossos alunos sempre achamos que está faltando alguma coerência, parece uma coisa muito distante da realidade deles, mas com essa metodologia apresentada vejo que é esse o caminho para sanar o que eu sentia falta nas minhas aulas.”

- Registro de voz do aluno (J):

“Sim, podemos observar que existe uma ligação muito grande principalmente porque é usado o georreferenciamento que está ligado diretamente a geometria analítica no nosso dia a dia.”

- Registro de voz do aluno (M):

“Sim, gostei da metodologia porque ela faz uma ligação da matemática com o que os alunos usam no seu dia a dia e o assunto geometria analítica.”

➢ Análise dos registros de voz

▪ Análise do registro de voz do aluno (A):

Como podemos perceber no registro de voz do aluno (A), o contexto das questões propostas, bem como a forma como elas foram construídas, não só refletem situações que fazem parte do cotidiano da maioria desses alunos como os incentiva e entusiasma a resolverem problemas matemáticos, nesse caso, as situações envolvendo questões de georreferenciamento de logradouros da cidade deles e programação de aplicativos para smartphones que estão ligados direto ao dia a dia desses adolescentes.

- Análise do registro de voz do aluno (D):

Observa-se, portanto nos registros de voz do aluno (D), indícios sobre a importância e relevância que tem as questões propostas relativas à geometria analítica para a vida dos alunos. Dessa forma, o aluno e incentivado a refletir sobre sua realidade, bem como, da natureza geográfica que o cerca diariamente, pois, despertam o aluno para sua realidade tornando-o um cidadão mais bem localizado na sua comunidade, cidade, estado, País e mundo. E também mais preparado para lidar com o mundo tecnológico presente em nosso dia a dia que quando não bem usados principalmente pelos adolescentes pode trazer riscos para as suas vidas.

- Analise do registro de voz do aluno (E):

Nota-se, no registro de voz do aluno (E), que as atividades tratadas nas questões da sequência didática tornam importante e relevante o que chama a atenção de forma entusiasmante e, de maneira significativa para que o aluno possa se sentir atraído em estudar o conteúdo matemático. Nesse caso, o conteúdo matemático referente à geometria analítica, isto é, leva o aluno a refletir matematicamente a respeito do que o cerca e do que pode trazer muitos benefícios para a sua vida, como e o caso do exemplo citado pelo referido aluno durante seu relato de voz.

Portanto, podemos observar nas falas acima que as questões são boas e, realmente, podem ajudar o aluno a se interessar em resolver problemas. Nesse caso, situações problemas envolvendo a geometria analítica, pois são questões que despertam o interesse de quem lê, principalmente de um aluno que está na fase de adolescência e de descobertas sobre sua identidade e formação cientifico-tecnológica que a sociedade e o mercado de trabalho exige nos dias atuais. E, por envolver em sua construção situações reais vivenciadas durante a adolescência o que torna o ensino mais atraente e despertam o interesse pelo estudo.

Durante as atividades pode-se perceber que todos os 12(doze) alunos colaboradores estavam muito entusiasmados por ver nas leituras das questões muitas situações vivenciadas por eles hoje em dia, e dos muitos adolescentes com os quais convivem, ou seja, o fato dessas questões tratarem de realidades envolvendo problemas vivenciados e/ou observados por esses alunos tais como GPS, smartphones, aplicativos, dentre outros, fazem com que seus interesses em resolver problemas, refletirem sobre essas realidades presentes em seu dia a dia e já com pensamento no futuro profissional despertam tanto o entusiasmo quanto o interesse em resolver essas questões.

No segundo momento de perguntas, observou-se que os modelos de questões propostas influenciaram muito no interesse dos alunos em aprender o assunto de geometria analítica. Tais comprovações aparecem de forma clara nos recortes de voz transcritos abaixo, como por exemplo, conforme se pode constatar nos registros de voz dos alunos (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (I), (J), (L) e (M) a seguir quando o pesquisador faz as seguintes indagações:

Pesquisador:

"*Nas atividades as questões usadas para validação dos aplicativos estão bem relacionadas com o que foi ensinado durante a construção dos aplicativos?"*

- Registro de voz do aluno (A):

"Sim, percebemos que as questões não só auxiliam na validação dos aplicativos como nos fazem pensar logicamente uma maneira para que com o aplicativo em mãos montarmos uma estratégia para chegarmos ao resultado já que as questões não são diretas, isso facilita na aplicação em sala de aula e faz com que o aluno aprenda geometria analítica de modo que ele se sinta motivado a estudar."

- Registro de voz do aluno (C):

"Sim, como podemos perceber as questões estão bem relacionadas com o que foi ensinado durante a construção dos aplicativos porque elas não só auxiliam na validação como são importantes porque buscam formas diferentes de ensinar um assunto partindo dos problemas que emergem da realidade vivenciada pelo aluno e de situações reais presentes em sua vida além de serem úteis para eles que vão prestar vestibulares e concursos."

Pesquisador

“Nas atividades há alguma correção e/ou contribuição que você pode mencionar para melhorar as atividades?”

- Registro de voz do Aluno (G):

“Para mim as atividades foram muito bem pensadas, elas possuem figuras e situações muito bem colocadas que nos ajudam na interpretação e visualização dos problemas, além de estarem metodologicamente de acordo com a construção dos aplicativos, que é uma coisa inovadora, são construídos a partir de problemas da vivência dos alunos.”

- Registro de voz do aluno (H):

“São questões bem elaboradas e contextualizadas que conseguimos entender com clareza o que cada uma delas estava pedindo e as figuras ajudam ainda mais nesse entendimento”.

- Registro de voz do aluno (L):

“As atividades não necessitam de correção e nem melhorias pelo que pode observar, pois elas estão de acordo com a proposta da sequência didática, ou seja, tanto os aplicativo como as atividades estão interligados e de acordo com o objetivo da pesquisa, fazendo com que nós tenhamos clareza do que é para fazer. Digo isso porque trabalho com alunos dos 3º anos do ensino médio e sei a necessidade de termos propostas como essa.”

Pesquisador

“Nas atividades os textos das questões apresentam clareza para suas interpretações?”

- Registro de voz do aluno (E):

“Sim, podemos perceber que as questões elaboradas além de terem clareza elas ainda são contextualizadas e vem com figuras ilustrativas que ajudam bastante na interpretação, para nós que trabalhamos com adolescentes podemos perceber a dificuldade que eles têm em interpretar as questões problemas, muitas vezes pelas questões não trazerem essa clareza.”

Desse modo, pode-se notar nos recortes das falas desses alunos que as atividades para a validação dos aplicativos estão bem relacionadas com o que foi ensinado durante a construção dos aplicativos, e os textos das questões apresentam clareza para suas interpretações. Tal fato pode ser constatado nas analises feitas dos registros de voz desses alunos a seguir.

➢ Analise dos registros de voz

▪ Analise do registro de voz do aluno (A):

Como se pode perceber no argumento do aluno (A), realmente, as questões são boas e poderão ajudar em uma aplicação futura em sala de aula e faz com que o aluno aprender geometria analítica de modo que ele se sinta motivado a estudar, pois tais questões tratam de assuntos que o educando vivência em seu dia a dia e isso faz com que esse modelo de questões venha ser profícuo para se ensinar geometria analítica.

▪ Analise do registro de voz do aluno (C):

Como podemos constatar no recorte de voz desse aluno, é importante que o docente busque formas diferentes de ensinar um assunto partindo dos problemas que emergem da realidade vivenciada pelo aluno e de situações reais presentes em sua vida. Essa importância e explicitada em um trecho da fala do aluno (C), quando este afirma que *“São maneiras boas de chamar a atenção do aluno, assim que deveríamos trabalhar nas escolas...”,* o que vem reforçar ainda mais a importância dessas questões.

- Analise do registro de voz do aluno (G):

Portanto, metodologicamente, essa forma de se trabalhar o assunto de geometria analítica, de acordo com o registro de voz do aluno em questão, além de ser inovadora, pois vem tratar de situações que envolvem tecnologia que faz parte do dia a dia da realidade de muitos alunos, através dos smartphones, vem solidificar ainda mais a qualidade das questões do experimento didático proposto nessa pesquisa e o quanto essa forma de se ensinar e boa e que poderão vir a serem usados de modo seguro em experimentos didáticos futuros.

- Analise do registro de voz do aluno (H):

Como se pode notar na fala do aluno (H), realmente, o modelo de questões propostas não só chama a atenção de quem as resolve, mas também, e uma forma diferente e que com certeza poderá ser usado em atividades futuras por professores e pesquisadores em um experimento didático ao ensinar um determinado assunto referente a problemas matemáticos envolvendo questões do dia a dia.

- Analise do registro de voz do aluno (L):

Evidencia-se no registro de voz do aluno (L), que as atividades são boas, pois, esse tipo de atividade envolve questões que fazem o aluno se sentir atraído e, ao mesmo tempo, entusiasmado em estudar o assunto, isto e, ajudam o aluno a entender com maior facilidade tal assunto o que desperta sua curiosidade em estudar e aprender geometria analítica.

Enfim, percebe-se que as atividades são válidas e podem ser aplicadas em experimentos didáticos posteriores, pois não só prendem a atenção por tratar de situações vivenciadas no dia a dia, como facilita o aprendizado de geometria analítica, pois, são questões que trazem no seu constructo teórico, dados reais georreferenciamento de logradouros próximos de sua escola e de sua comunidade coletados usando o GPS dos seus smartphones que depois de colhidos vão ser levados para um laboratório de informática para com o aplicativo App Inventor serem transformados em algoritmos para resolverem problemas envolvendo geometria analítica.

A fim de verificar as constatações feitas acima nas análises dos recortes de voz dos colaboradores do processo de validação, para saber se o modelo de questões propostas sobre o assunto de geometria analítica poderia ser eficaz e bom para se trabalhar em experimentos didáticos posteriores foi realizado um experimento didático composto de contendo 6 (seis) questões envolvendo os assuntos de geometria analítica, distância de dois pontos, ponto médio, alinhamento de três pontos, equação geral da reta, coeficiente angular da reta, e distância entre ponto e reta; dessa vez, com alunos do 3° **ano do Ensino Médio** de uma escola pública do município de Abaetetuba o que será tratado em seguida nessa pesquisa na sessão que trata das analises qualitativas sobre os registros de voz e das escritas desses alunos.

A análise qualitativa a seguir, foi realizada com o objetivo de vislumbrar se a atividade proposta foi capaz de cumprir seu papel na formação do aluno a uma tomada de consciência critica sobre sua realidade no que se refere a situações de vida envolvendo georreferenciamento e se essa atividade ajudou esse aluno a trabalhar a capacidade de leitura e interpretação, relacionando a matemática escolar a problemas vivenciados por estes.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esta fase da pesquisa tratara das analises dos dados qualitativos a partir dos registros de voz e dos registros da escrita que serão analisados a luz da teoria da micro gênese de Piaget segundo os estudos de Cabral (2004) e da teoria dos signos de Raymond Duval (2011), onde se poderá verificar se as atividades alcançaram seus objetivos de motivarem os alunos para a aprendizagem da matemática a partir da abordagem de temas do dia a dia e a identificação das dificuldades dos alunos em cada fase das atividades.

Antes de tratar do experimento didático mencionado, será feita uma previa descrição do o *lócus* da pesquisa, do método usado, bem como, da descrição dos dias de aplicação do experimento.

a) Descrição do *lócus* da pesquisa

A aproximação com a escola foi feito por meio do contato com o diretor da escola o qual nos recebeu com muita cordialidade e foi por meio dele que conheci o professor da turma a qual tive permissão e todo apoio para desenvolver as atividades propostas. Vale ressaltar, que a escola e uma escola pública de Abaetetuba sendo que são ofertados desde 6° (sexto) ano do Ensino Fundamental até as series finais do Ensino Médio, funcionando nos três turnos.

b) O método

Tal atividade empírica foi desenvolvida com um grupo de 32(trinta) alunos todos cursando o 3° ano do Ensino Médio cujo objetivo foi verificar se a aprendizagem de geometria analítica torna-se mais satisfatória, a partir de uma sequência didática com construção de aplicativos, que envolvam dados georreferenciados. Além disso, os alunos participantes do experimento em questões variaram entre 16 e 21 anos, aproximadamente.

Todas as observações foram realizadas numa escola pública de Ensino Médio localizada no município de Abaetetuba. Todo o procedimento de construção de dados ocorreu com o auxilio de gravações feitas com gravador de voz, anotações de questionamentos dos alunos e indagações sobre o assunto e de registros feitos com o uso de diário de bordo.

As interações dialógicas entre professor e aluno e vice versa, vieram facilitar em muito a compreensão do assunto em questão, bem como, o aprimoramento das ações dos alunos participante da pesquisa o que possibilitou e contribuiu no esclarecimento de construções e transformações cognitivas por meio das ações verbais desses alunos. Por outro lado, puderam-se constatar alguns obstáculos durante as aplicações do experimento didático em questão como, por exemplo, o tempo limitado para o aluno resolver as questões contidas no experimento; poucos computadores, dentre outras.

No dia 05 de junho de 2017 foi lecionada a primeira aula sobre definição de geometria analítica com os alunos do 3° ano da Benvinda de Araújo Pontes localizada no Município de Abaetetuba. A aula começou às 7h e encerrou às 8h30min. Nesse dia os alunos foram para o laboratório de informática, onde eles aceram os computadores e entraram com as suas contas da google na plataforma da MIT e acessaram o App Invento. Depois eles foram divididos em grupos e cada grupo resolveu um problema envolvendo torres de transmissão de sinal de celular onde eles modelaram um algoritmo usando GPS do smartphone, mapa da cidade, geometria euclidiana e manipulação algébrica. Depois cada equipe colocou sua resolução no quadro branco e o professor escolheu a que mais se aproximou do algoritmo da distância de dos pontos para comentar a definição.

Depois os alunos foram orientados pelo professor a entrarem na plataforma da MIT e acessarem o App inventor, e com o livreto que cada um tinha, seguissem as orientações que estavam nele e programassem o algoritmo no computador através da internet para posteriormente usarem em seus smartphones e resolverem as atividades de validação e aprendizagem do livreto.

No dia 07 de junho de 2017, segundo dia de aula, foi proposto 5 (cinco) questões sobre definição de geometria analítica aos alunos como atividade de fixação cujo o tempo de duração foi de 90 (noventa) minutos para que os alunos, individualmente, pudessem resolver, refletir e discutir.

No terceiro dia de atividades, dia 12/06/2017, foi realizada a segunda aula envolvendo o conceito de geometria analítica sobre ponto médio. Nesse momento, como no primeiro dia, foi dado um problema envolvendo torres de transmissão de celular em que os alunos tiveram de usar a tecnologia que tinham em mãos, ou seja, o smartphone além do mapa da cidade, onde através de interpretação, conhecimento do dia a dia, geometria euclidiana e manipulação algébrica chegaram num algoritmo para resolver esse problema, isso depois de eles terem expostos seus resultados no quadro branco e ser formalizado pelo professor que escolheu o que mais se aproximou do resultado, além disso, foram deixadas 5 atividades para os alunos resolverem em sala no próximo dia.

No dia 14/06/2017, quarto dia de atividades, conforme supramencionado, foi dado aos alunos uma lista com 5 (cinco) questões ponto médio. Cada aluno teve 90 (noventa) minutos para efetuar as resoluções das questões que lhes foram entregues.

Nesse dia, tivemos a oportunidade de observar os alunos nas atividades de validação e aprendizagem e também não deixamos de ouvir alguns comentários deles sobre a experiência. Eles comentaram a ida deles para o LABIN, que os professores não os levavam, sobre a felicidade dos familiares quanto eles mostravam o que estavam fazendo nas aulas de matemática, além de comentarem que nunca tinham visto isso em escola pública. Observamos também que diferente dos primeiros dias de aula os alunos estavam mais soltos, perguntando mais e trocando informações entre eles, o que fez com que a aula tivesse um rendimento muito bom.

No quinto dia de atividades, dia 19/06/2017, foi ministrada a aula sobre alinhamento de três pontos. Nesse momento, como nas outras definições foi dado um problema envolvendo torres de transmissão e o mapa da cidade onde eles tinham de chegas a um algoritmo para resolver o problema e posteriormente fazer a programação na plataforma da MIT usando o App inventor. Nesse dia os alunos já tinham se familiarizado com a metodologia, tanto é que conseguiram chegar no algoritmo do alinhamento de três pontos, além de fazerem a programação e resolverem as atividades de validação. Nesse dia não deixamos de observa o sorriso dos alunos ao verem que o aplicativo funciona, e a expectativa deles, através das perguntas, de como eles poderiam usá-lo no futuro.

No sexto dia de atividades, dia 21/06/2017, foi dado um problemas do mesmo estilo dos outros sobre equação geral da reta, onde muitos alunos nas folgas de outras disciplinas foram ao LABIN da escola e avançaram uma parte de programação que corresponde ao *layout*, isso foi possível sem orientação do professor porque eles já dominavam o aplicativo e além de terem o livreto para orientá-los, isso ajudou para que a aula fosse muito mais dinâmica e proveitosa.

Nos dias 26 e 28/06/2017 trabalhamos com os conceitos de coeficiente angular da reta e distância entre ponto e reta, respectivamente, onde os alunos tiveram muito mais facilidade para chegar aos algoritmos de fazerem a programação e as atividades de validação.

No dia 09/08/2017 foi o último encontro onde aproveitamos para resolver mais atividades além de conversarmos sobre o experimento com os alunos, os quais mencionaram que devia ter mais aulas desse tipo na escola e que estavam muito satisfeitos com o método que as aulas foram ministradas.

Essa fase da pesquisa está direcionada a análise de voz de alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio participantes do experimento didático aplicado em sala de aula cuja finalidade está, intrinsicamente, direcionada em analisar tais recortes de voz de modo a evidenciar o qualitativo desse experimento didático no que tange a importância e eficácia dessa forma de se trabalhar o assunto em questão envolvendo geometria analítica.

Vale salientar que tais análises têm sua base teórica fundamenta e direcionada pela teoria da micro gênese de Lev Vygotsky, tal como mencionado em parágrafos anteriores dessa pesquisa e que de acordo com os estudos de Kelman e Branco (2004):

> A análise micro genética possibilita a observação e o estudo dos processos de comunicação envolvidos nas relações de ensino-aprendizagem. O pesquisador adquire postura flexível e atenta, sendo capaz de dialogar com os processos construtivos de interação que propiciam situações de desenvolvimento (KELMAN e BRANCO, 2004, p.103).

De acordo com as autoras citadas à micro gênese tem grande importância e relevância quando se refere ao ambiente escolar, pois:

> Permite, entre outras possibilidades, o estudo de características do desenvolvimento humano que vão se constituindo na dinâmica das interações verbais e não-verbais e na observação das negociações que ocorrem no fluxo interativo entre professor-aluno e aluno-aluno, no face-a-face.(KELMAN e BRANCO, 2004 p. 95).

Nesse sentido, buscou-se, em particular, focar nessa fase da pesquisa uma análise qualitativa no que concerne a importância de se perceber o interesse do aluno em aprender certo conteúdo, nesse caso, o conteúdo de geometria analítica, por meio das análises das interações verbais desses alunos.

Durante a gravação das vozes dos alunos que participaram da pesquisa pode-se notar que nas observações feitas, esses alunos estavam estimulados e entusiasmados em estudar o assunto de geometria analítica, pois estes mostraram um grande interesse a esse respeito. Tal fato é comprovado por meio dos recortes de fala, por exemplo, dos alunos A_2 e A_9, respectivamente.

ALUNO A_2

“Estou achando muito interessante, legal, pois estou tendo oportunidades melhores de aprender sobre geometria analítica.”

ALUNO A_9

“Incrível, não imaginava que existia matemática por trás dos app.”

Normalmente os alunos têm muitas dificuldades em aprender um conteúdo com um grau de cognição que tem, por exemplo, um assunto envolvendo analise e muito menos quando envolve ao mesmo tempo geometria euclidiana, plano cartesiano e mais manipulações algébricas. Concomitante a isso, a forma de abordar o assunto de geometria analítica por meio de atividades envolvendo georreferenciamento de situações reais que realmente fazem parte do contexto de vida e experiências desses alunos tornaram os alunos mais interessados em aprender geometria analítica o que pode ser evidenciado nos recortes de fala dos alunos A_{12} e A_{16}, respectivamente, quando afirmam que:

ALUNO A_{12}

“[...] Estou achando muito interessante usar GPS e o mapa da nossa cidade para estudar matemática, fazendo aplicativos para celular.”

ALUNO A_{16}

“[...] eu estou achando essa aula ótima, pois a maneira em que ela foi abordada ficou mais fácil e legal de aprender.”

Dessa forma, conforme versa Moysés (1997, p.31), "no processo de internalização os aspectos cognitivos e afetivos mostram-se intimamente entrelaçados” e isso atrelado às situações de vida do aluno relativo às suas atividades experienciais de vida, fazem com que o aluno manifeste seu interesse em aprender, conforme mostra o recorte de fala dos alunos A_{20} e A_3 ao indagarem entre si sobre a importância de se aprender uma teoria envolvendo situações do dia a dia e usando TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) que estão em suas mãos.

ALUNO A_{20}

“[...] estou achando muito legal, pois uma união da matemática com a tecnologia ficou bem mais interessante do que só a matemática na sala de aula.”

ALUNO A_3

“[...] estou achando interessante, pois está sendo importante utilizar a tecnologia ao meu favor.”

Após a análise do registro de voz pode-se perceber que essa forma de se ensinar geometria analítica foi realmente boa e teve eficácia, pois se trata de um conjunto de situações que envolvem tecnologia, experiências de vida e georreferenciamento de lugares bem conhecidos pelos alunos, e isso se mostrou de grande importância no sentido de que se é possível ensinar geometria analítica para um aluno quando se trabalha questões envolvendo situações reais e coisas que eles presenciam em seu dia a dia, e isso aparece de forma clara nos recortes de fala dos alunos A_{24}, A_{11}, A_{29} e A_{30}, de acordo com os registros a seguir.

ALUNO A_{24}

“[...] matemática não é uma matéria que eu goste, sempre tive algumas dificuldades. Porém o aplicativo me mostra que é possível aprender matemática de um jeito divertido.”

ALUNO A_{11}

“[...] A matemática com o uso do aplicativo se torna mais interessante [...] é interessante saber que uma coisa leva a outra.”

ALUNO A_{29}

“[...] as aulas estão me dando à oportunidade de aprender muito mais [...] esse aprendizado vai nos ajudar muito em nosso futuro, e também vai nos ensinar e/ou incentivar a usarmos computadores de uma maneira correta.”

ALUNO A_{30}

“[...] não sabia que a matemática estava por trás desses aplicativos. É muito importante, pois aprendemos mais assim do que só com cálculo.”

Assim, pode-se constatar que o assunto fica bem mais interessante e instigante para um aluno aprender, pois segundo Moysés (1997, p.46), o aprendizado do aluno tem maior eficácia e significado quando "o objeto ou elemento figurativo estimula o aluno a pensar”, nesse caso, o elemento figurativo são os modelos de questões com situações envolvendo dados extraídos de pesquisas sobre o georreferenciamento de lugares conhecidos, aplicativos de smartphones e situações que ocorrem na vida diária desses alunos e que fazem parte de muitas realidades e contextos escolares vivenciados por eles.

Em fim, pode-se afirmar de acordo com os recortes de fala supramencionados que a atividade foi boa e teve resultados positivos no que tange a um incentivo prazeroso e válido de acordo como as análises das falas dos alunos citados e durante a aplicação desse experimento aos alunos de mestrado profissional em ensino de matemática outrora, mencionados, nessa pesquisa. E isso só vem consolidar a afirmação feita antes, de que esse modo de se ensinar é bom e faz com que o aluno se interesse em aprender, refletir e, sobre tudo, nesse caso, georreferenciar, calcular distâncias, calcular declividades e analisar posicionamentos de tudo o que estar ao seu redor e de sua comunidade, além de aprender o melhor uso para as TIC (Tecnologia de Informação e Comunicação).

Por outro lado, com intuito de saber se houve ou não indícios de erros cometidos por esses alunos ao resolverem as questões propostas no experimento didático proposto serão feitas algumas análises dos registros das escritas desses alunos por meio dos registros de representação semiótica, conforme mostram as análises feitas, a seguir, no subtópico (9.3), sobre análises das escritas.

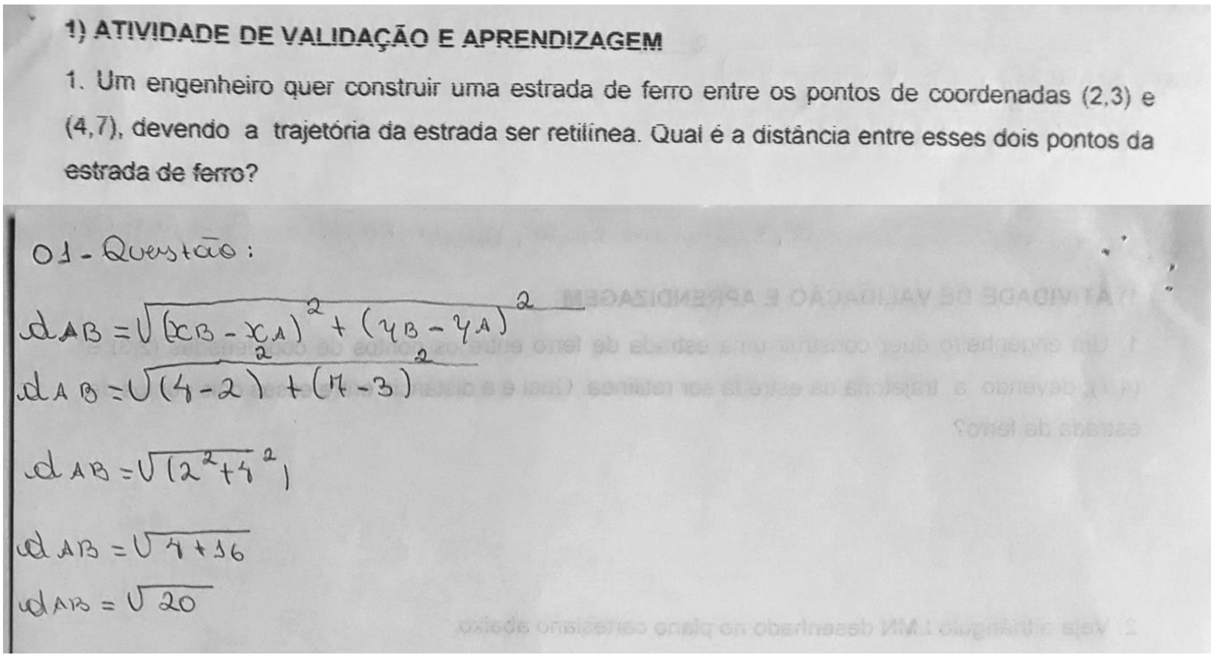
Nesse momento, será apresentada as análises semiótica das escritas dos 32 (trinta e dois) alunos no que tange as resoluções das questões contidas nas atividades de validação e aprendizagem propostas nesse experimento cujo objetivo maior foi verificar por meio de suas escritas quais são suas dificuldades e limitações ao resolver tais questões. Para tanto, teve-se, nessa fase de análise de dados os pressupostos teóricos da semiótica de Raymond Duval (2011), sobre a análise dos signos contidos na escrita dos alunos que participaram do experimento em questão.

Assim, conforme mostram os recortes de escrita apresentados a seguir, podem-se fazer algumas analises por meio da observação das escritas desses alunos para saber se houve algum problema de transformar a ação do pensamento em signos e, se durante essa transformação ocorreu algum erro na hora de converter seus pensamentos em signos (escrita) ou se houve algum erro no tratamento da operação matemática durante esse processo. Assim, todas as análises, por motivo de conveniência, tiveram como parâmetro adotado para nomear cada aluno a identificação pelas letras A_1, A_2, A_3,... e, assim por diante, a fim de não comprometer a identidade deles, conforme mostram as análises a seguir:

Primeiramente analisamos as questões envolvendo distância de dois pontos onde podemos observar que alguns alunos cometeram erros por interpretação, manipulação, erros de transformação e falta de conhecimento com relação aos cálculos básicos de matemática o que significa que há evidencias que esses alunos apresentaram uma falta de domínio de aritmética, além da falta de base, principalmente nas operações que envolvem números inteiros ou radiciação.

Ao analisar a 1ª questão, pode-se constatar que o maior problema foi na hora de fazer a simplificação de radicais. Como se pode presenciar por meio das escritas, esses alunos apresentaram um problema de tratamento conforme versa a teoria da semiótica de Duval (2011), pois não conseguiram efetuar a operação de simplificação de radicais, o que ocasionou um obstáculo para esses alunos, isso indica que há indício de falta de conhecimentos de matemática básica para chegar no resultado de tal questão. Mas no geral os alunos conseguiram, usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, chegar ao resultado esperado.

Podemos observar isso na resolução aluno A_1, onde podemos constatar que esse aluno apresentou problema na hora de fazer a simplificação de radicais na 1ª questão como mostra o registro desse aluno quando chega à operação $\sqrt{20}$, ao resolver a questão, que trata do cálculo de distância de dois pontos. Como se pode presenciar por meio da escrita abaixo, esse aluno apresentou um problema de tratamento, pois não conseguiu efetuar a operação de simplificação de radicais, o que está representado de forma clara na imagem (1).


1) ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro entre os pontos de coordenadas (2,3) e (4,7), devendo a trajetória da estrada ser retilínea. Qual é a distância entre esses dois pontos da estrada de ferro?

01 - Questão:

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(2^2+4^2)}$

$d_{AB} = \sqrt{4+16}$

$d_{AB} = \sqrt{20}$

Imagem 1. Aluno A_1 (1ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

No que tange a análise da 2ª questão desses alunos pode-se perceber que alguns apresentaram problema de conversão conforme versa a teoria da semiótica de Duval (2011), isto é, eles não conseguiram transformar um registro dado de um problema em outro registro diferente. Mas no que podemos observar na maioria dos alunos eles conseguiram, usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, um resultado bastante efetivo.

Podemos observar o que aconteceu na resolução da 2ª questão nos registros da escrita do aluno A_1, onde podemos perceber que este apresentou um problema de conversão, pois ao substituir as variáveis ele trocou $x_{B-}x_A$ por $x_{A-}y_A$, de acordo com a imagem (2).

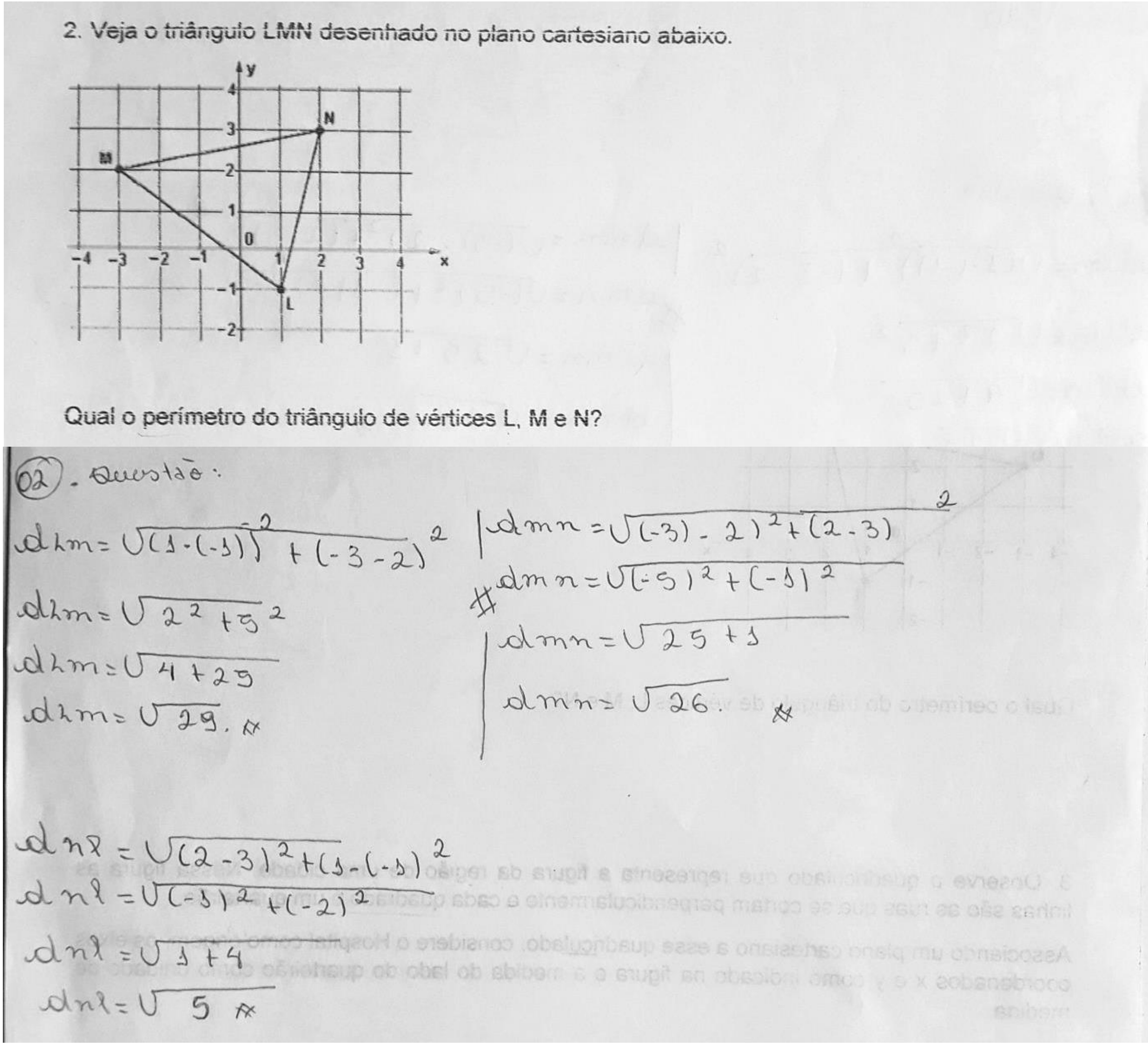
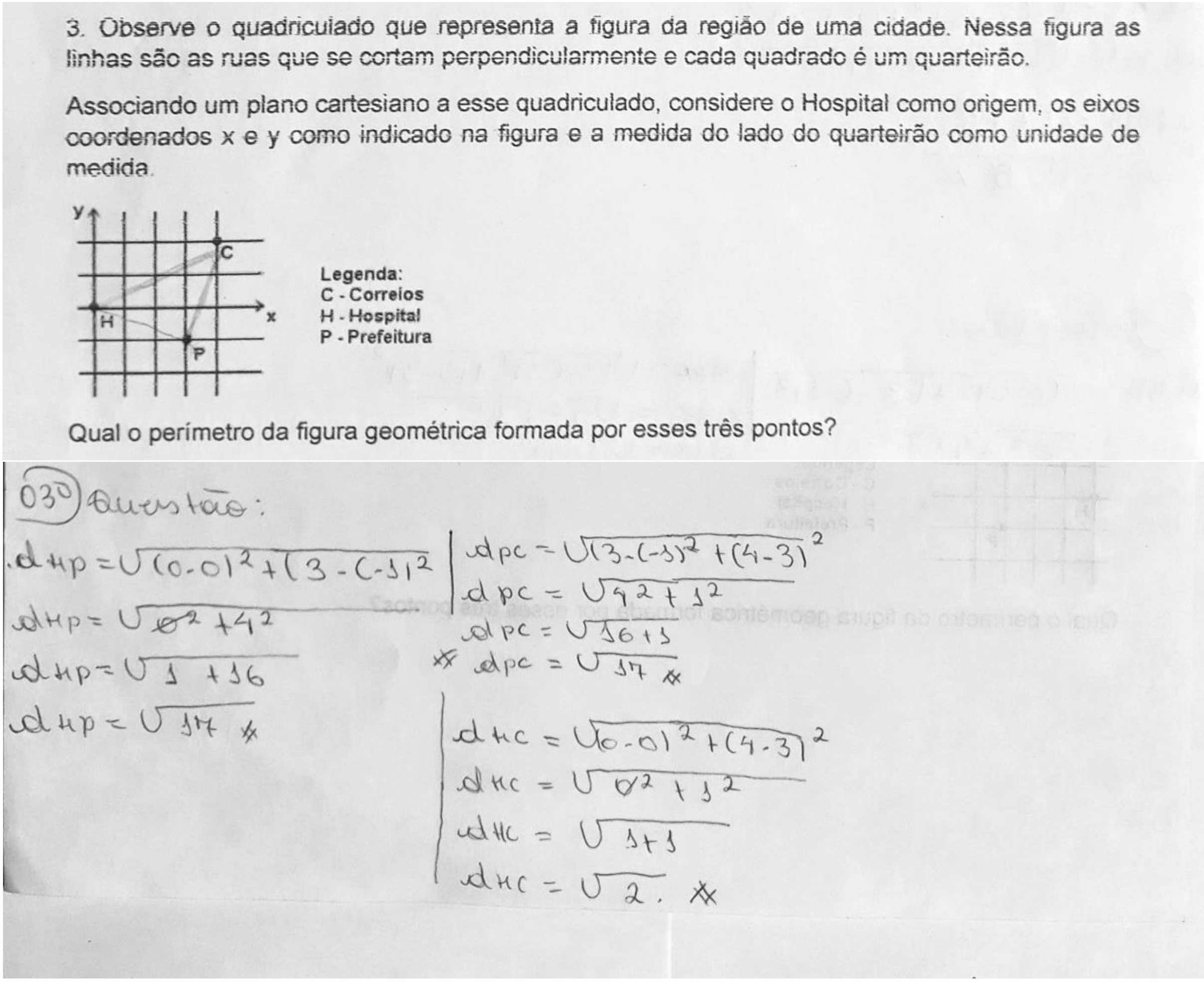


Imagem 2. Aluno A_1 (2ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

No que se referem à análise da terceira questão, alguns alunos continuaram a apresentar as mesmas dificuldades supramencionadas nas análises das questões um e dois, porém, demostraram uma habilidade muito boa no que se refere a operações matemáticas básicas, o que há um indício de que esses alunos apresentaram um problema na hora de interpretar e retirar os dados da questão o que implicou na transformação dos registros de semiótica de sua escrita, ou seja, eles apresentaram um obstáculo no momento de converter os dados em registro o que influenciou suas interpretações do problema e vice versa. Mas a maioria conseguiu executá-la com perfeição.

Podemos observar esse problema de conversões na resolução do aluno A_1, pois ao substituir as variáveis ele trocou $x_{B-}x_A$ por $x_A - y_A$ e $y_{B-}y_A$ por $x_B - y_B$, como mostram a imagem (3).


3. Observe o quadriculado que representa a figura da região de uma cidade. Nessa figura as linhas são as ruas que se cortam perpendicularmente e cada quadrado é um quarteirão.

Associando um plano cartesiano a esse quadriculado, considere o Hospital como origem, os eixos coordenados x e y como indicado na figura e a medida do lado do quarteirão como unidade de medida.

Legenda:
C - Correios
H - Hospital
P - Prefeitura

Qual o perímetro da figura geométrica formada por esses três pontos?

03º Questão:

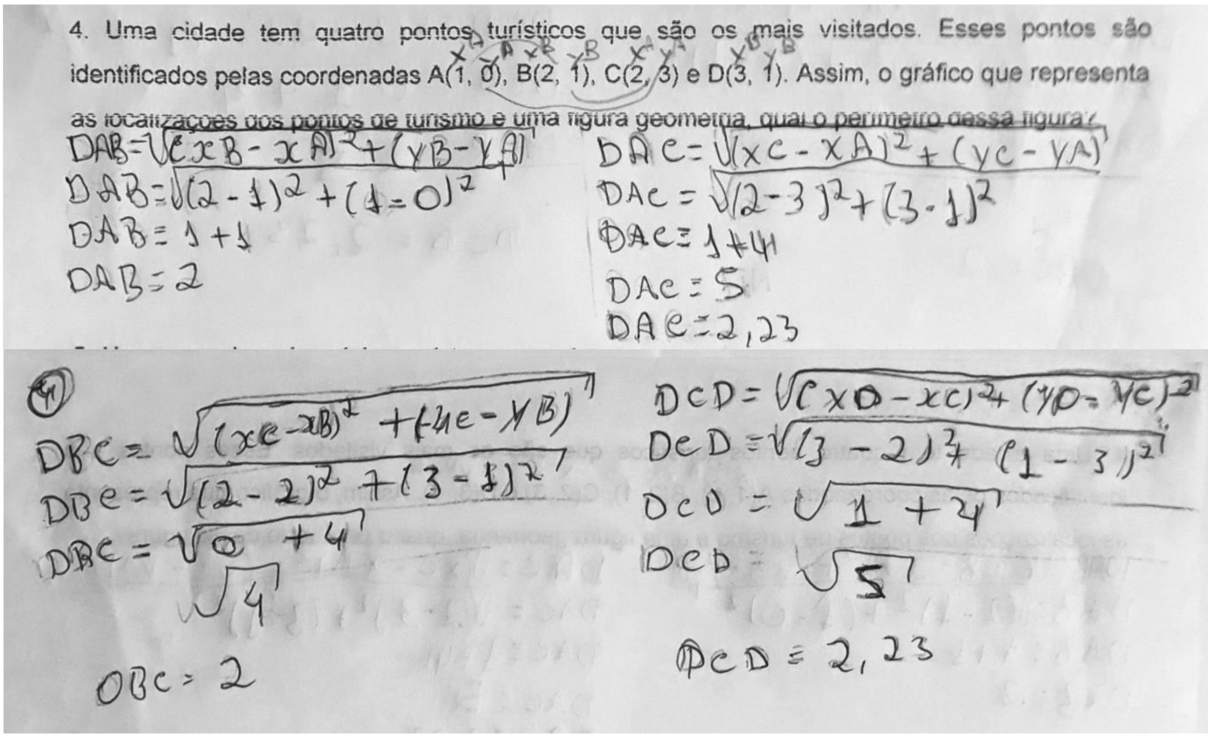
$d_{HP} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-(-1))^2}$
$d_{HP} = \sqrt{0^2 + 4^2}$
$d_{HP} = \sqrt{1 + 16}$
$d_{HP} = \sqrt{17}$ *

$d_{PC} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-3)^2}$
$d_{PC} = \sqrt{4^2 + 1^2}$
$d_{PC} = \sqrt{16+1}$
$d_{PC} = \sqrt{17}$ *

$d_{HC} = \sqrt{(0-0)^2 + (4-3)^2}$
$d_{HC} = \sqrt{0^2 + 1^2}$
$d_{HC} = \sqrt{1+1}$
$d_{HC} = \sqrt{2}$. *

Imagem 3. Aluno A_1 (3ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 4ª questão podemos observar um grande avanço na resolução das questões principalmente no que se refere à conversão, havendo uma falha na hora de finalizarem a reposta no que diz respeito ao perímetro da figura geometria, o que há indício falta de conhecimento de matemática básica no tratamento dessa informação, como podemos observar na imagem (4) das anotações do aluno A_2.



4. Uma cidade tem quatro pontos turísticos que são os mais visitados. Esses pontos são identificados pelas coordenadas A(1, 0), B(2, 1), C(2, 3) e D(3, 1). Assim, o gráfico que representa as localizações dos pontos de turismo é uma figura geométrica, qual o perímetro dessa figura?

DAB = $\sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)}$
DAB = $\sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2}$
DAB = 1 + 1
DAB = 2

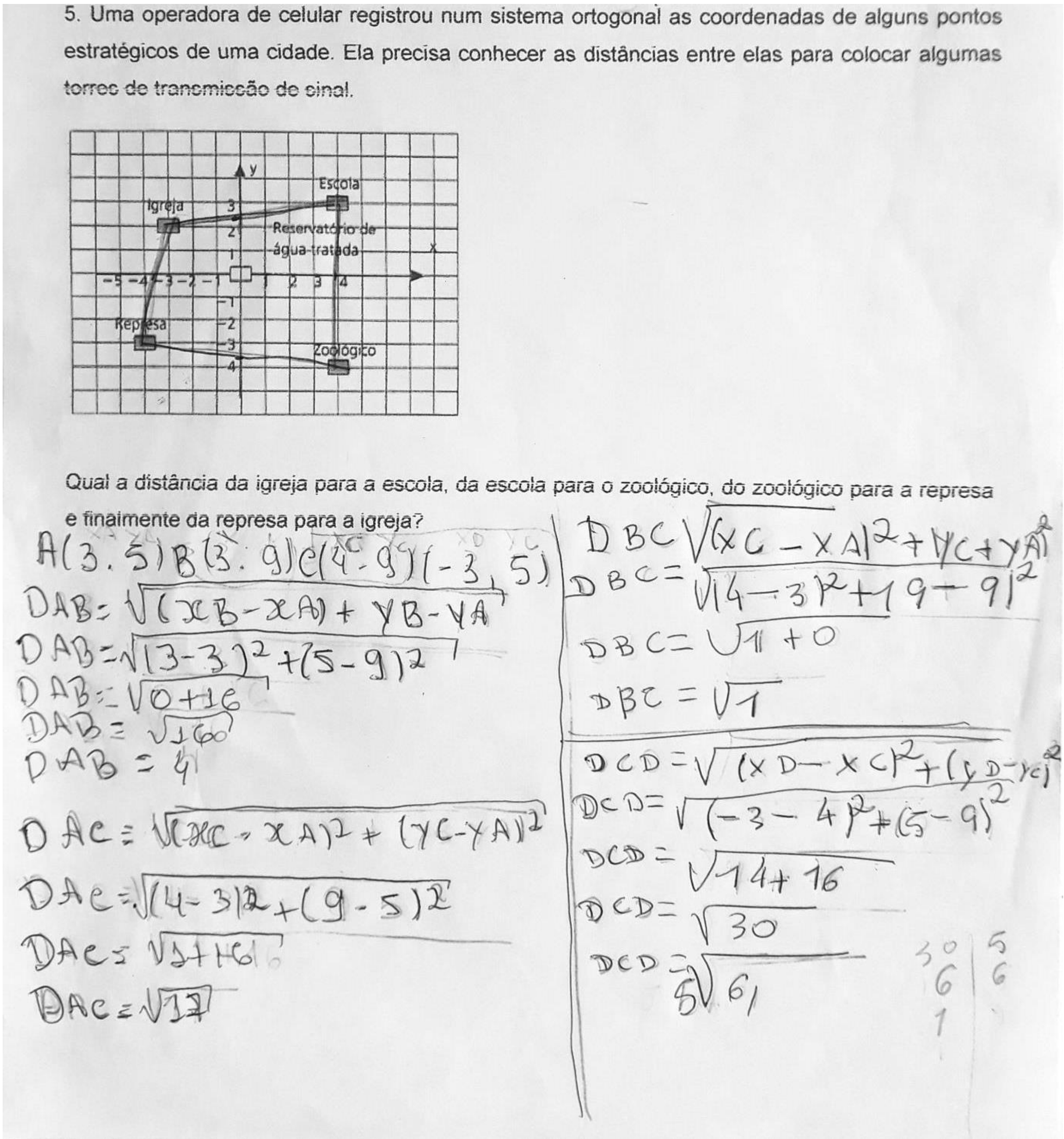
DAC = $\sqrt{(xC - xA)^2 + (yC - yA)}$
DAC = $\sqrt{(2-3)^2 + (3-1)^2}$
DAC = 1 + 4
DAC = 5
DAC = 2,23

DBC = $\sqrt{(xC - xB)^2 + (yC - yB)}$
DBC = $\sqrt{(2-2)^2 + (3-1)^2}$
DBC = $\sqrt{0 + 4}$
$\sqrt{4}$
DBC = 2

DCD = $\sqrt{(xD - xC)^2 + (yD - yC)^2}$
DCD = $\sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2}$
DCD = $\sqrt{1 + 4}$
DCD = $\sqrt{5}$
DCD = 2,23

Imagem 4. Aluno A_2 (4ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Já na análise da 5ª questão observamos erros na hora de retirar os dados do texto, o que nos remete a erro por conversão, o que há indício de falta de interpretação de alguns alunos que não conseguiram transformar um registro dado de um problema em outro registro diferente. Mas no que podemos observar na maioria dos alunos eles conseguiram, usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, obtendo um resultado bastante efetivo na resolução dessa atividade, podemos ver esse erro na imagem (5) das anotações do aluno A_2.


5. Uma operadora de celular registrou num sistema ortogonal as coordenadas de alguns pontos estratégicos de uma cidade. Ela precisa conhecer as distâncias entre elas para colocar algumas torres de transmissão de sinal.

Qual a distância da igreja para a escola, da escola para o zoológico, do zoológico para a represa e finalmente da represa para a igreja?

A(3. 5) B(3. 9) C(4. 9) (-3, 5)
DAB = √((xB - xA) + yB - yA)
DAB = √((3-3)² + (5-9)²)
DAB = √(0+16)
DAB = √16
DAB = 4

DAC = √((xC - xA)² + (yC - yA)²)
DAC = √((4-3)² + (9-5)²)
DAC = √(1+16)
DAC = √17

DBC √((xC - xA)² + (yC + yA)²)
DBC = √((4-3)² + (9-9)²)
DBC = √(1 + 0)
DBC = √1

DCD = √((xD - xC)² + (yD - yC)²)
DCD = √((-3 - 4)² + (5 - 9)²)
DCD = √(14 + 16)
DCD = √30
DCD = 5√6

Imagem 5. Aluno A_2 (5ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise das questões sobre ponto médio verificamos uma grande evolução quando se tratou de conversão, pois um aluno só errou por esse motivo, mas o que observamos mesmo foi erro por tratamento o que há indício de falta de base das operações básicas.

Na análise de 6ª questão podemos observar que nenhum aluno cometeu errou, seja de conversão como de tratamento da informação. Vejamos a resolução do aluno A_2 na imagem (6).

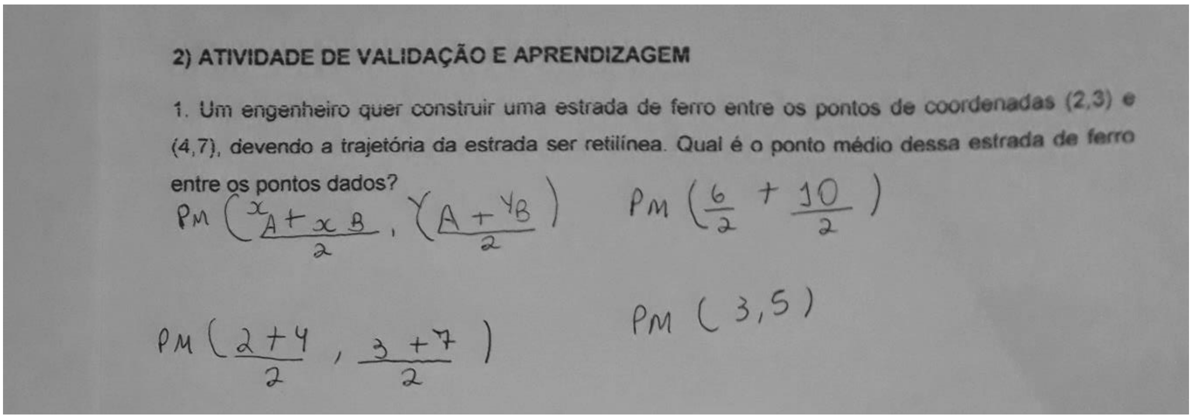


Imagem 6. Aluno A_2 (6ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

É notório perceber durante a análise da 7ª questão das atividades que apenas um aluno não conseguiu realizar com exatidão a transformação dos dados numéricos da referida questão para a escrita, mas podemos notar nesta questão que alguns alunos erram na hora de fazer o tratamento dessa questão o que há indício de falta de base das operações básicas como podemos notar na imagem (7) da escrita do aluno A_{11}, o único que errou a conversão, pois não conseguiu realizar com exatidão a transformação dos dados numéricos da referida questão para a escrita.

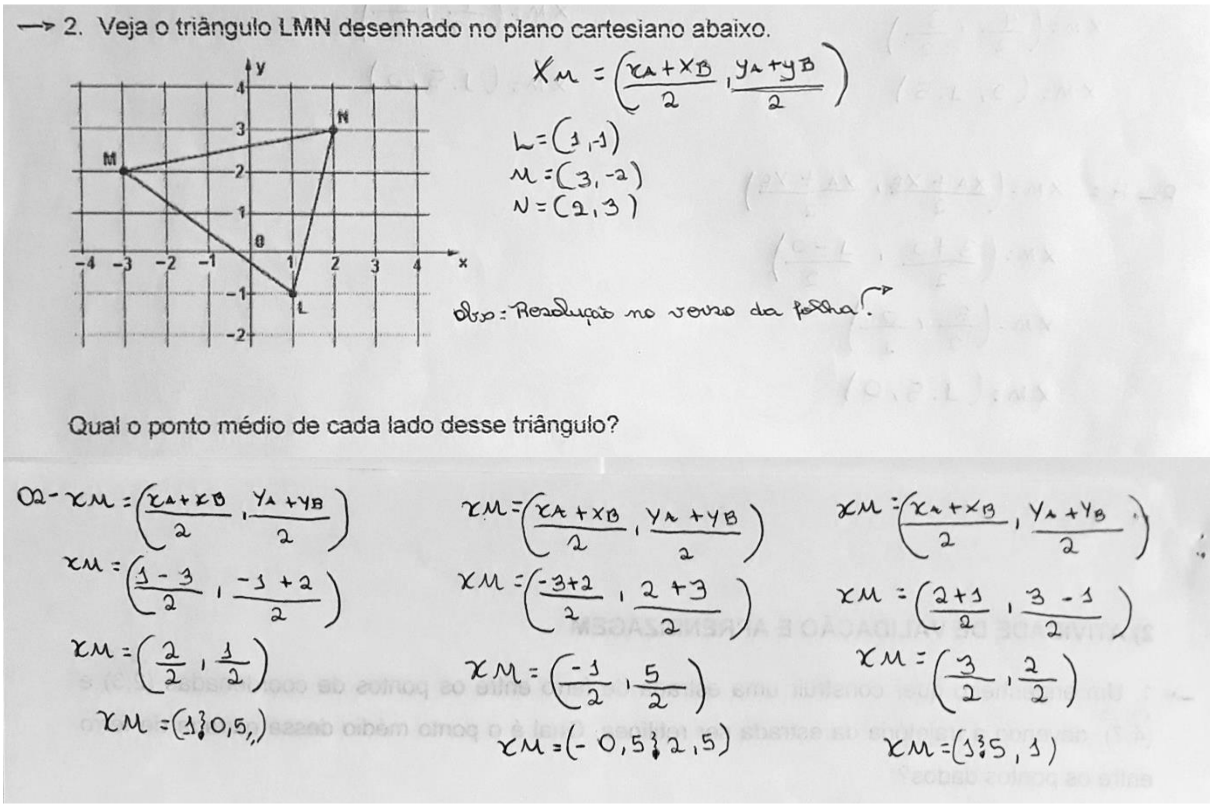
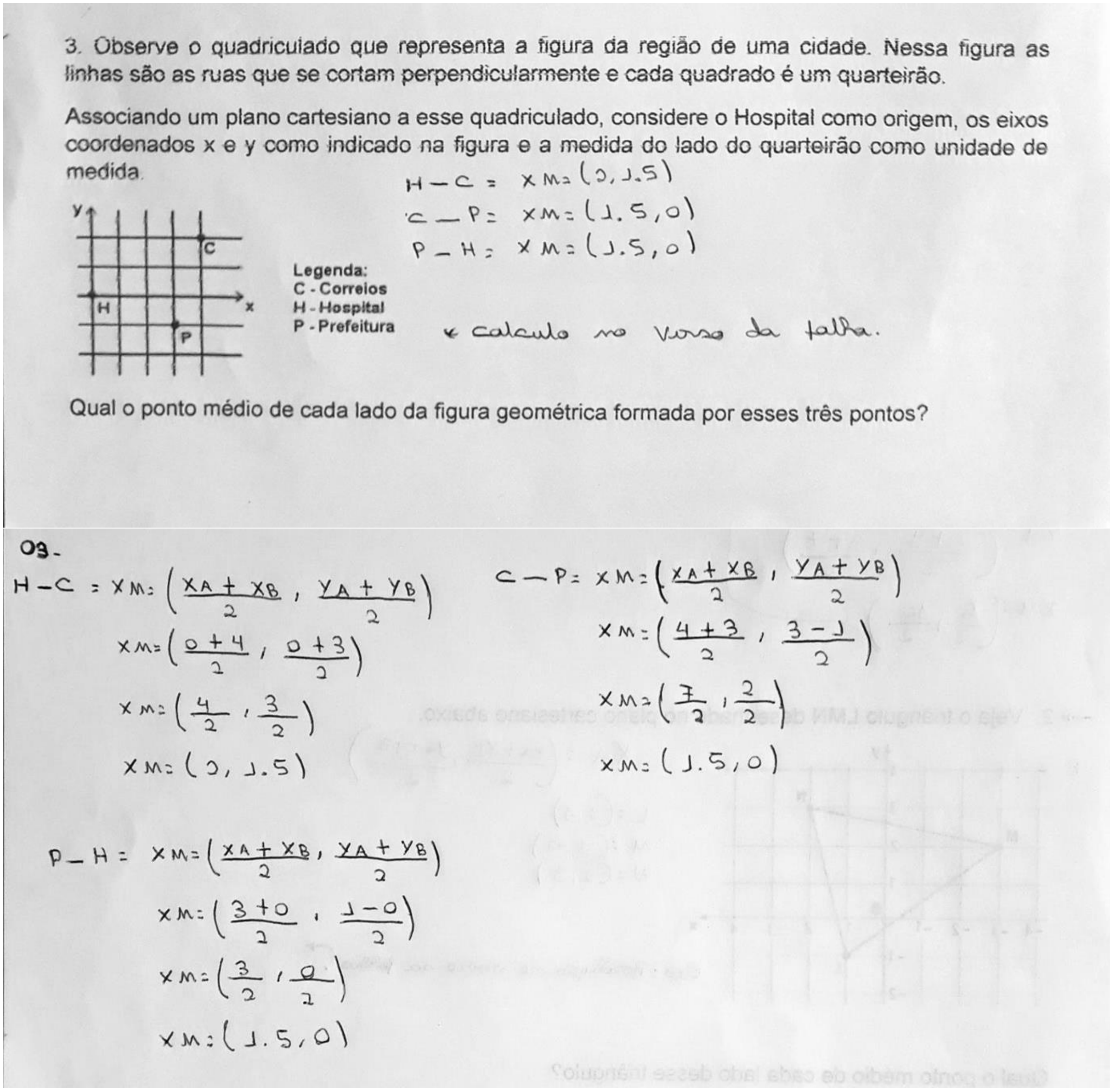


Imagem 7. Aluno A_{11} (7ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 8ª questão verificaram-se alguns erros de conversão o que há indício de que esses alunos apresentaram um problema na hora de interpretar e retirar os dados da questão o que implicou na transformação dos registros de semiótica de sua escrita, ou seja, eles apresentaram um obstáculo no momento de converter os dados em registro o que influenciou suas interpretações do problema e vice versa, o que foi resolvido com o uso da calculadora que eles programaram. Mas a maioria conseguiu executá-la com perfeição, como podemos ver na imagem (8) das escritas do aluno A_{11}.



3. Observe o quadriculado que representa a figura da região de uma cidade. Nessa figura as linhas são as ruas que se cortam perpendicularmente e cada quadrado é um quarteirão.

Associando um plano cartesiano a esse quadriculado, considere o Hospital como origem, os eixos coordenados x e y como indicado na figura e a medida do lado do quarteirão como unidade de medida.

$H - C = x_M = (2, 1.5)$
$C - P = x_M = (1.5, 0)$
$P - H = x_M = (1.5, 0)$

Legenda:
C - Correios
H - Hospital
P - Prefeitura

* calculo no verso da folha.

Qual o ponto médio de cada lado da figura geométrica formada por esses três pontos?

03-

$H - C = x_M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$x_M = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$

$x_M = \left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$x_M = (2, 1.5)$

$C - P = x_M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$x_M = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$

$x_M = \left(\frac{7}{2}, \frac{2}{2}\right)$

$x_M = (1.5, 0)$

$P - H = x_M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

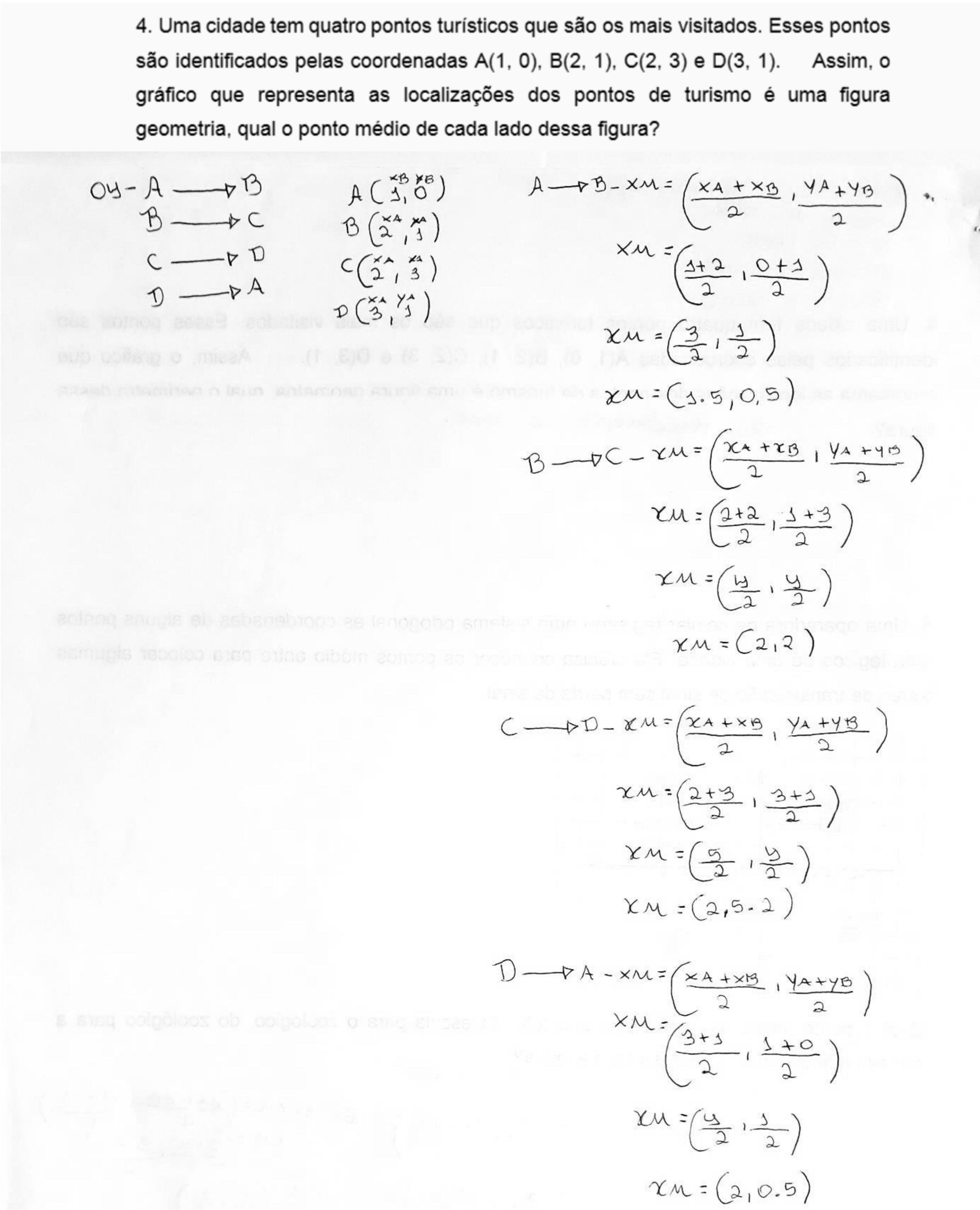
$x_M = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{1-0}{2}\right)$

$x_M = \left(\frac{3}{2}, \frac{0}{2}\right)$

$x_M = (1.5, 0)$

Imagem 8. Aluno A_{11} (8ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 9ª questão não encontramos erros nem de conversão e nem de tratamento de informação, e podemos observar foi o uso da lógica de programação como foi ensinado na sequência didática, o que deve levado a esse resultado bastante efetivo, como podemos ver na imagem (9) das anotações do aluno A_{11}.



4. Uma cidade tem quatro pontos turísticos que são os mais visitados. Esses pontos são identificados pelas coordenadas A(1, 0), B(2, 1), C(2, 3) e D(3, 1). Assim, o gráfico que representa as localizações dos pontos de turismo é uma figura geometria, qual o ponto médio de cada lado dessa figura?

OY - $A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$C \rightarrow D$
$D \rightarrow A$

$A\left(\overset{xB}{1}, \overset{yB}{0}\right)$
$B\left(\overset{xA}{2}, \overset{yA}{1}\right)$
$C\left(\overset{xA}{2}, \overset{xA}{3}\right)$
$D\left(\overset{xA}{3}, \overset{yA}{1}\right)$

$A \rightarrow B$ - $xm = \left(\frac{xA + xB}{2}, \frac{yA + yB}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$xm = (1.5, 0,5)$

$B \rightarrow C$ - $xm = \left(\frac{xA + xB}{2}, \frac{yA + yB}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right)$

$xm = (2, 2)$

$C \rightarrow D$ - $xm = \left(\frac{xA + xB}{2}, \frac{yA + yB}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

$xm = (2,5 . 2)$

$D \rightarrow A$ - $xm = \left(\frac{xA + xB}{2}, \frac{yA + yB}{2}\right)$

$xm = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$

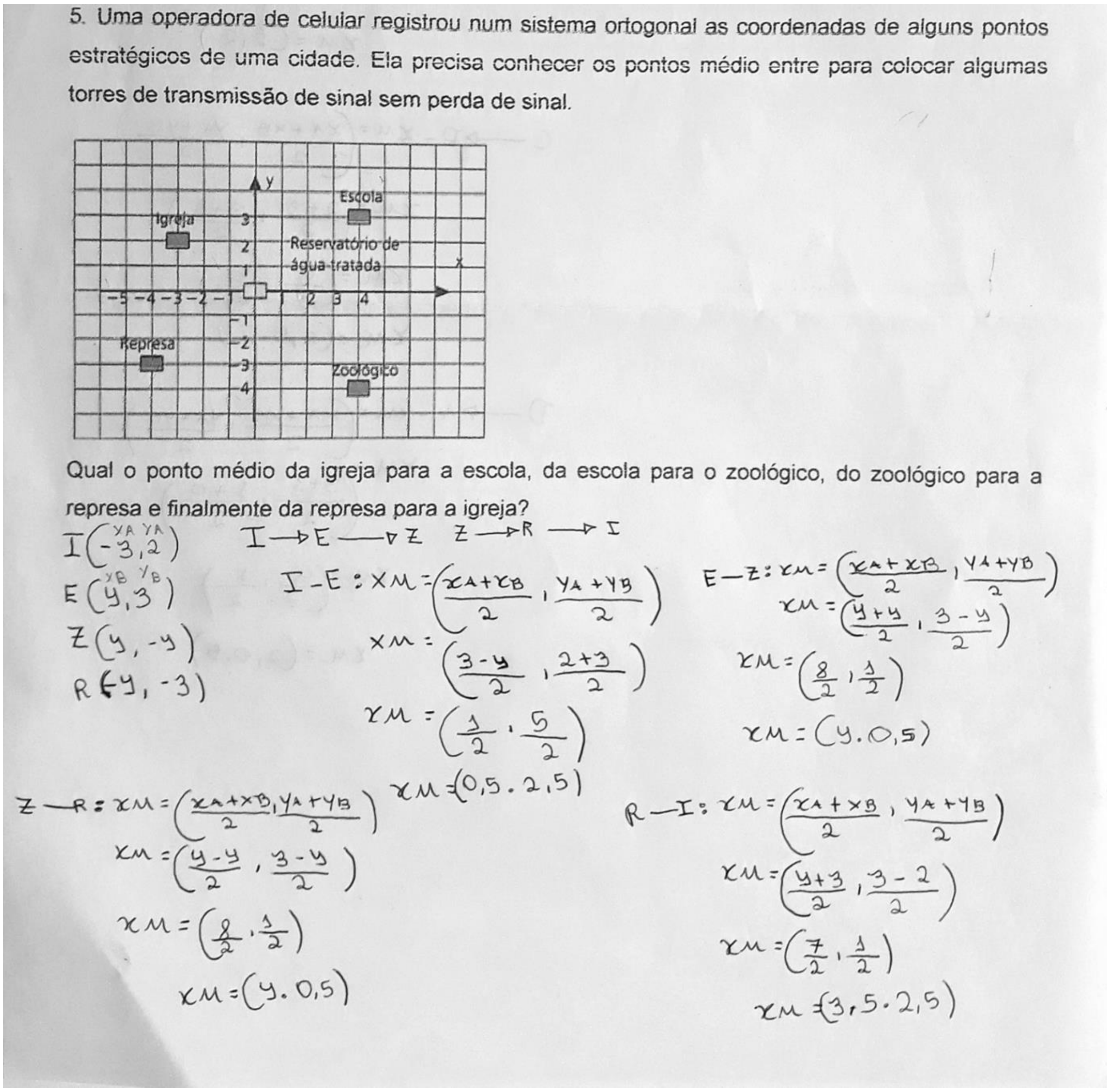
$xm = \left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$xm = (2, 0.5)$

Imagem 9. Aluno A_{11} (9ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Nas análises da 10ª questão verificou-se que alguns alunos mostraram certa dificuldade, novamente, com relação às operações aritmética envolvendo números inteiros, o que há indícios de falta de conhecimentos de matemática básica para chegar ao resultado de tal questão. O que não foi observado na maioria dos alunos que conseguiram êxito na atividade usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, um resultado bastante efetivo.

Podemos observar tal fato nas escritas do aluno A_6 que mostrou certa dificuldade na operação aritmética envolvendo o números inteiros ao efetuar os cálculos $\left(\frac{4+4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{4-4}{2}, \frac{-3-4}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o que segundo o a soma aritmética entre números inteiros está incorreto. Portanto, nota-se que esse aluno apresentou dificuldades no tratamento da questão ao realizar as operações mencionadas de acordo com a imagem (10).



5. Uma operadora de celular registrou num sistema ortogonal as coordenadas de alguns pontos estratégicos de uma cidade. Ela precisa conhecer os pontos médio entre para colocar algumas torres de transmissão de sinal sem perda de sinal.

Qual o ponto médio da igreja para a escola, da escola para o zoológico, do zoológico para a represa e finalmente da represa para a igreja?

$I(-3,2)$ (y_A y_A)

$E(4,3)$ (x_B y_B)

$Z(4,-4)$

$R(-4,-3)$

$I \to E \to Z \quad Z \to R \to I$

$I-E: xM = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{3-4}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$xM = (0{,}5 . 2{,}5)$

$E-Z: xM = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{3-4}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{8}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$xM = (4 . 0{,}5)$

$Z-R: xM = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{8}{2} . \frac{1}{2}\right)$

$xM = (4 . 0{,}5)$

$R-I: xM = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)$

$xM = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$xM = (3{,}5 . 2{,}5)$

Imagem 10. Aluno A_6 (10ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise das questões sobre alinhamento de três pontos, como na maioria dos erros que encontramos até agora, podemos observar erros de tratamento das informações o que há indício de falta de base das operações básicas. Mas com relação à conversão de informações podemos observar uma evolução grande devido nenhum aluno ter erro por esse registro.

Durante a resolução da 11ª questão alguns alunos continuaram a apresentar dificuldades nas operações de matemática básica, o que há indício de falta de base, e que pode ser considerado como um problema de transformação relacionado a tratamento, segundo a teoria dos registros de representação de semiótica, de acordo com a imagem (11) das escritas do aluno A_{15}. Nessa questão não observamos erro por conversão o que há indício que o uso da lógica de programação na sequência didática levou os resultados a serem bastante efetivos.

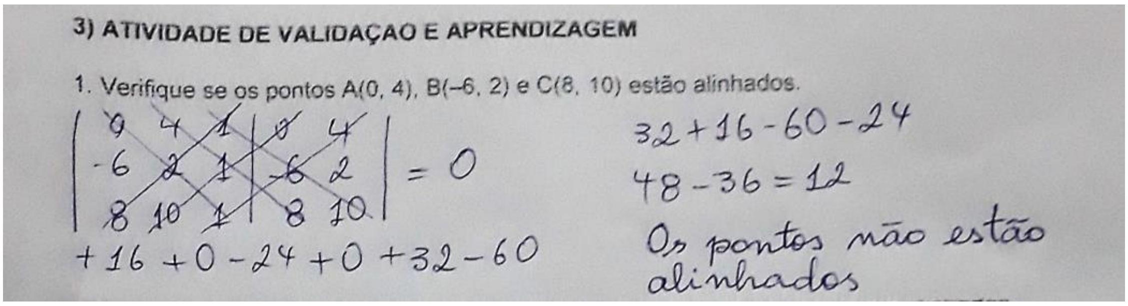


Imagem 11. Aluno A_{15} (11ª questões)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 12ª questão não houve erro transformação relacionado à conversão, e a grande maioria conseguiu chegar ao resultado esperado, sendo que os poucos erros foram por tratamento, o que há indício de falta de base nas operações básicas, podemos observar um desses erros na imagem (12) nas anotações do aluno A_{15}.

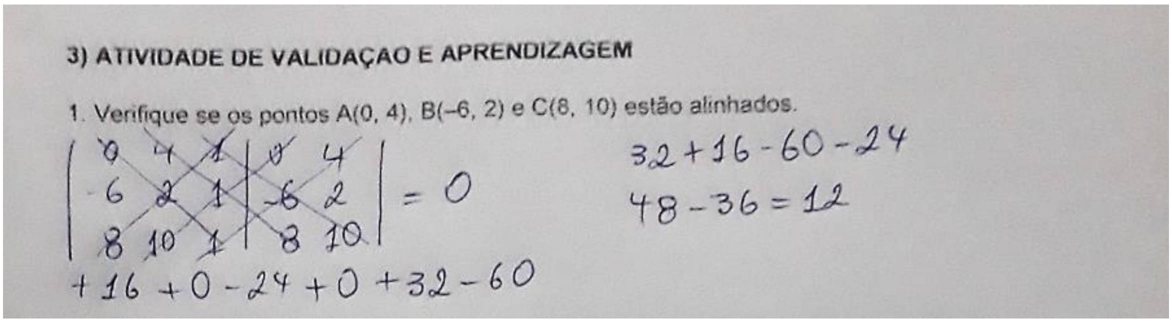


Imagem 12. Aluno A_{15} (12ª questões)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 13ª questão, também, não houve erro transformação relacionado à conversão, e a grande maioria conseguiu chegar ao resultado esperado e poucos erraram no tratamento de informações, o que há indício de falta de base nas operações básicas, que podemos observar um desses erros, também na imagem (13) nas anotações do aluno A_{18}.

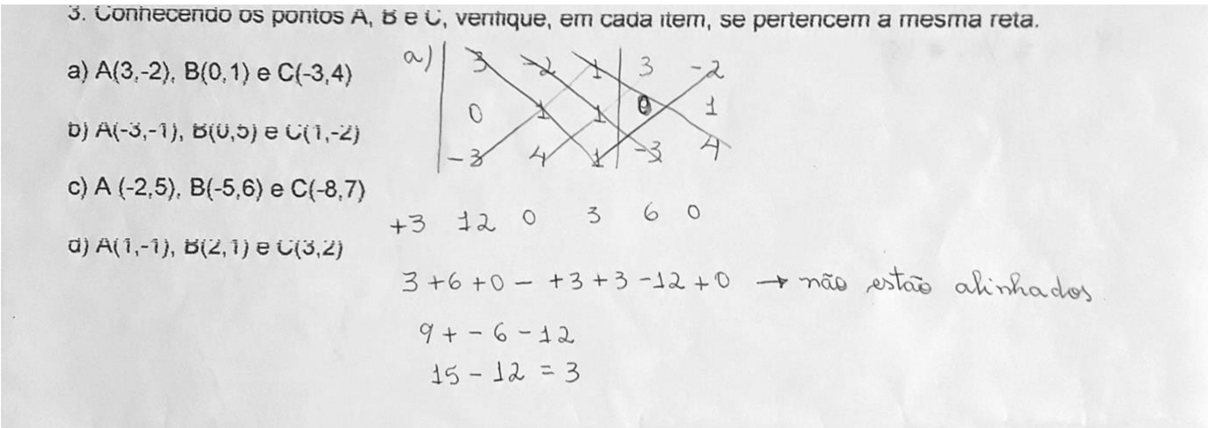


Imagem 13. Aluno A_{18} (13ª questões)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 14ª questão também observamos alguns erros no tratamento da informação, o que há indício, como já vimos em questões anteriores, de falta de domínio das operações básicas, esses erros podemos ver na imagem (14) nas anotações do aluno A_{18}. Já com relação à conversão não encontramos erros, o que nos leva a crer no bom entendimento da sequência didática, onde os alunos usaram a lógica de programação, o que há indício de ter ajudado na efetividade dos resultados.

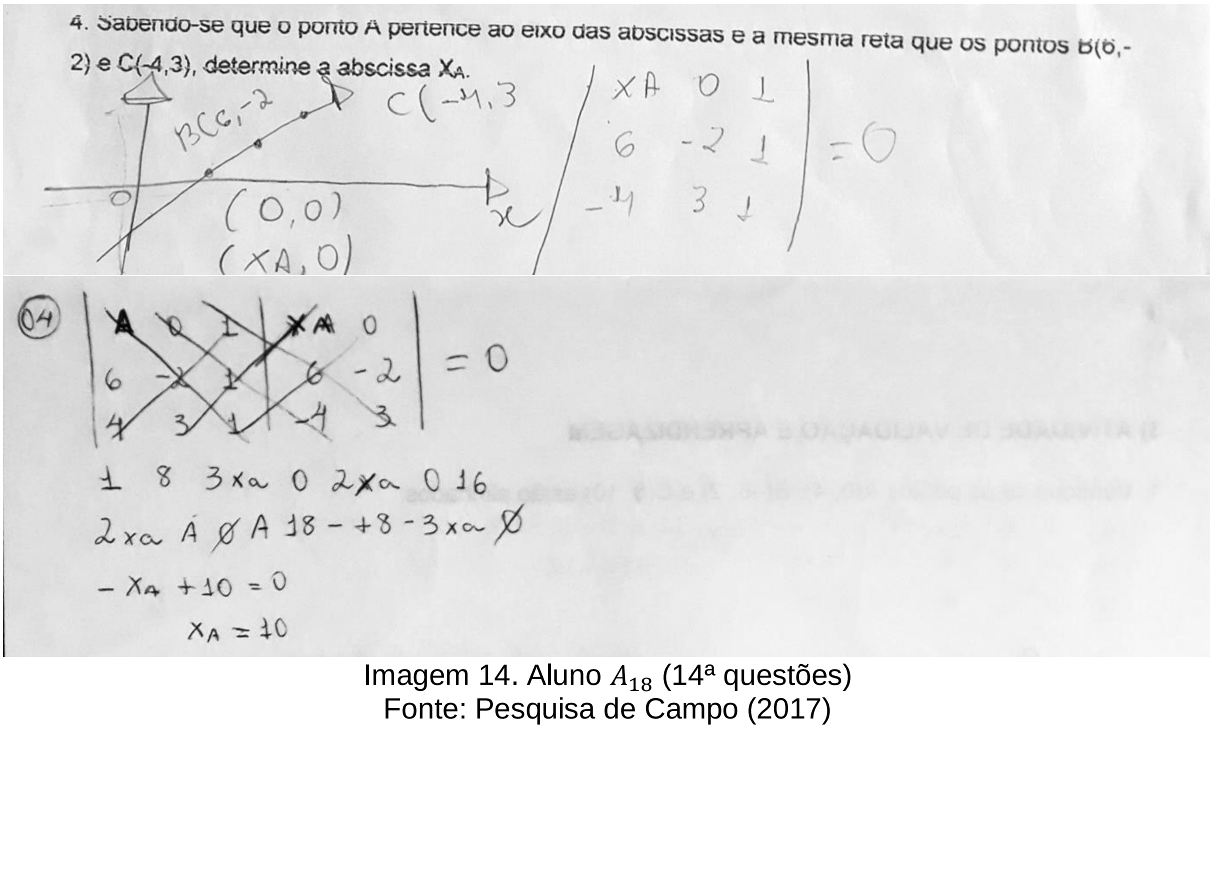
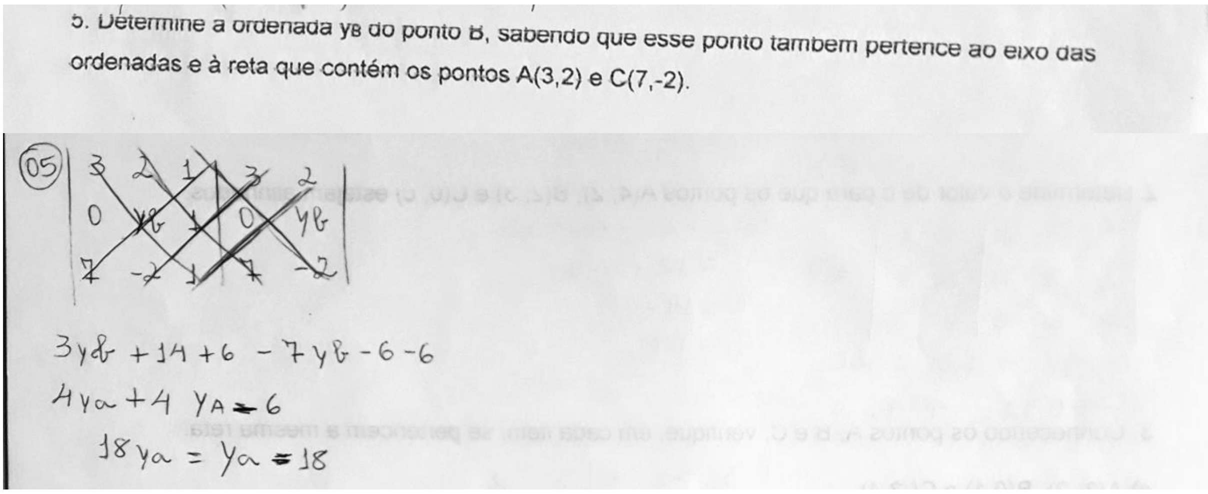


Imagem 14. Aluno A_{18} (14ª questões)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Com relação à análise da 14ª questão também observamos alguns erros no tratamento da informação, esses erros podemos ver na imagem (15) das anotações do aluno A_{18}. Já com relação à conversão não encontramos erros, o que nos leva a crer, também no bom entendimento da sequência didática, onde os alunos usaram a lógica de programação, o que há indício de ter ajudado na efetividade dos resultados.


5. Determine a ordenada y_B do ponto B, sabendo que esse ponto também pertence ao eixo das ordenadas e à reta que contém os pontos A(3,2) e C(7,-2).

05

$3y_B + 14 + 6 - 7y_B - 6 - 6$

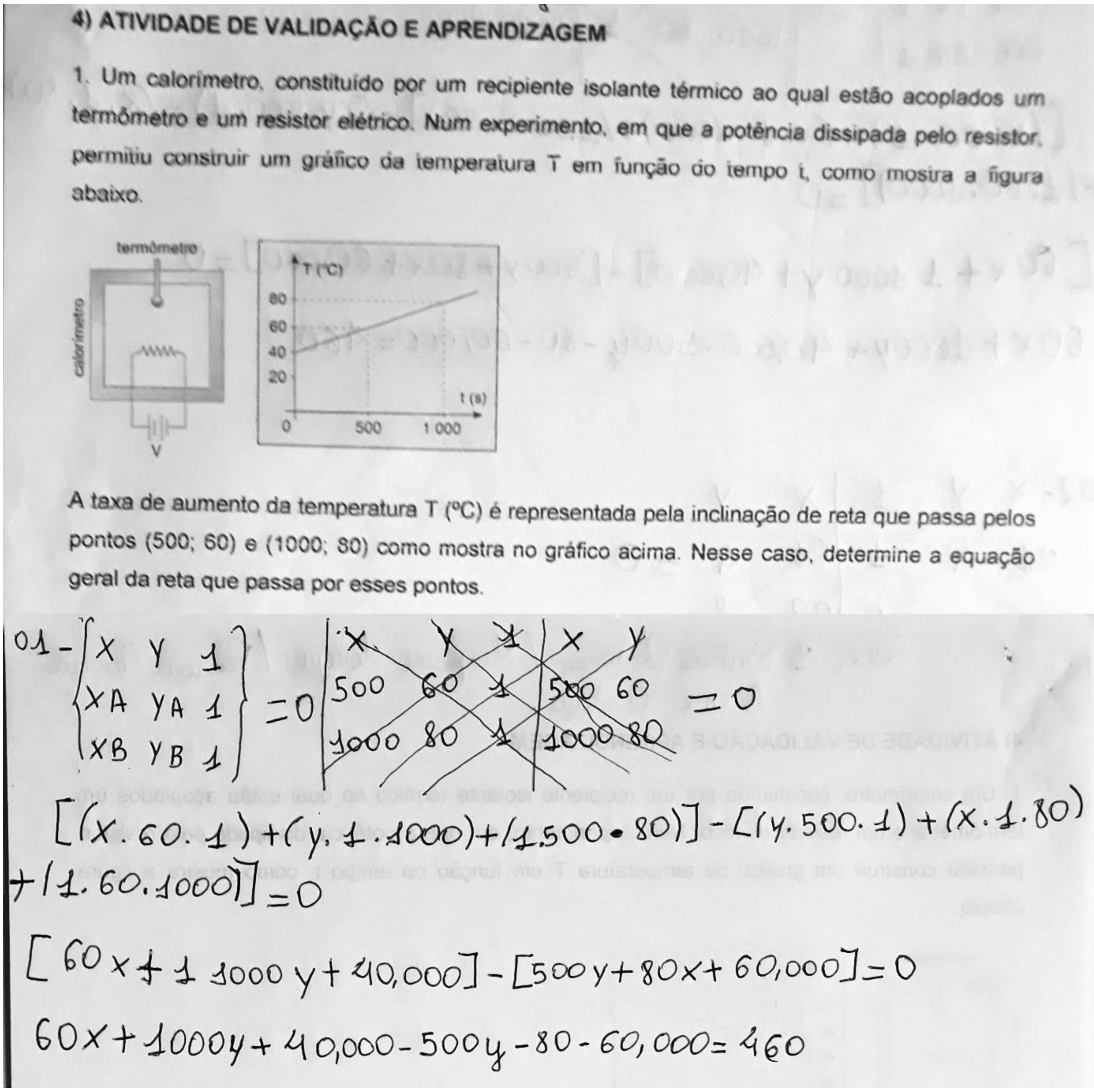
$4y_A + 4\ y_A = 6$

$18y_A = y_A = 18$

Imagem 15. Aluno A_{18} (15ª questões)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise das questões sobre equação geral da reta, continuamos a encontrar erros de tratamento das informações o que há indício de falta de base das operações básicas. Mas com relação à conversão de informações novamente não encontramos registro, o que continuamos a observar uma evolução grande na resolução das atividades o que há indício que o uso da lógica de programação na sequência didática levou os resultados a serem bastante efetivos também nas atividades de equação geral da reta.

Na análise feita do registro da escrita dos Alunos com relação à 16ª questão, alguns alunos apresentaram certa dificuldade ao fazer o tratamento das questões ao realizar as operações, isso pode ser caracterizado, segundo a teoria da semiótica de Duval (2011), como um problema de tratamento, o que há indício de falta de conhecimento das operações de matemática básica, como ver na imagem (16) das escritas do aluno A_{19}.



4) ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

1. Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico. Num experimento, em que a potência dissipada pelo resistor, permitiu construir um gráfico da temperatura T em função do tempo t, como mostra a figura abaixo.

A taxa de aumento da temperatura T (ºC) é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (500; 60) e (1000; 80) como mostra no gráfico acima. Nesse caso, determine a equação geral da reta que passa por esses pontos.

01- $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 500 & 60 & 1 \\ 1000 & 80 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 500 & 60 \\ 1000 & 80 \end{matrix} = 0$

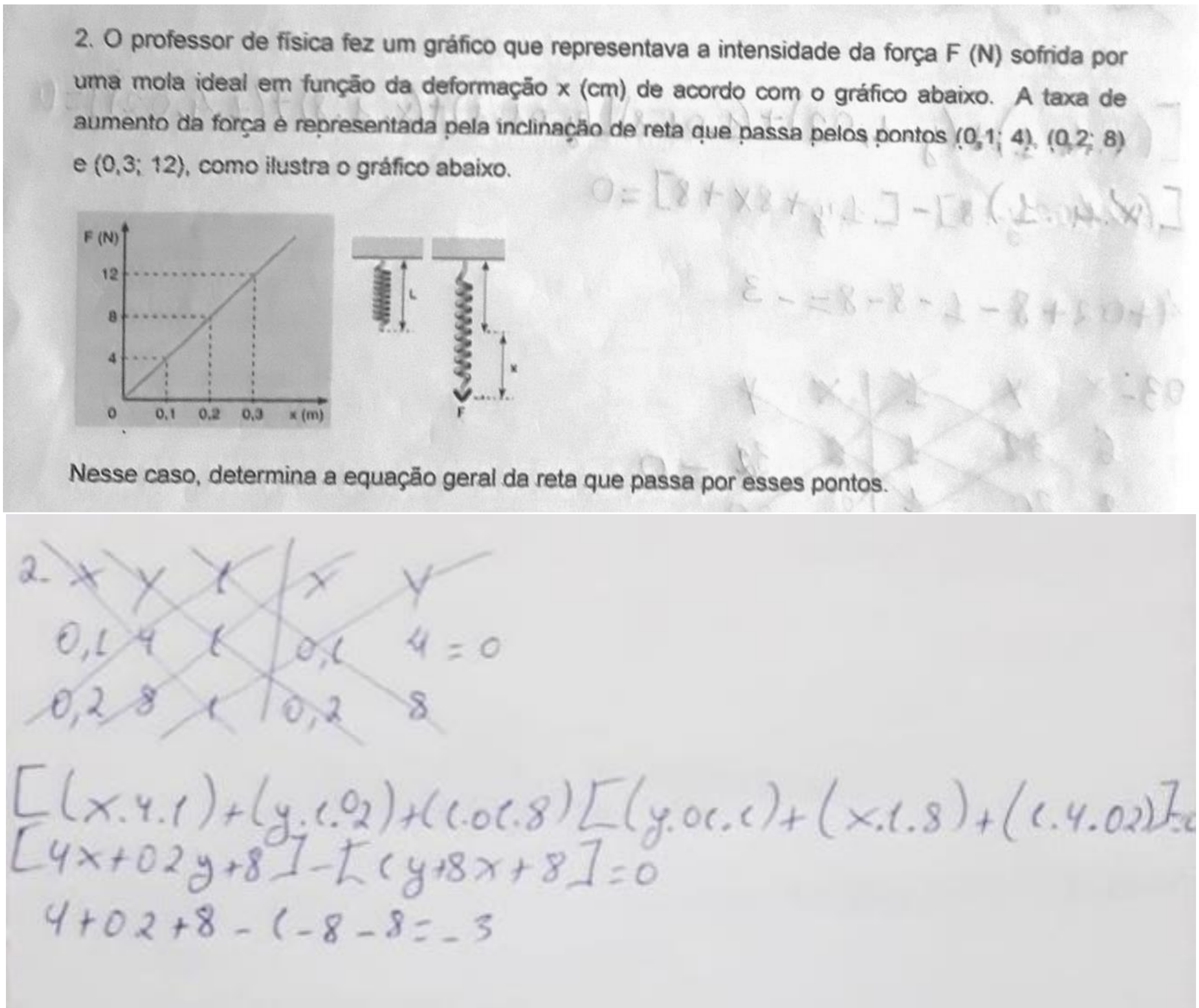
$[(x.60.1)+(y.1.1000)+(1.500.80)]-[(y.500.1)+(x.1.80)+(1.60.1000)]=0$

$[60x+1\ 1000y+40{,}000]-[500y+80x+60{,}000]=0$

$60x+1000y+40{,}000-500y-80-60{,}000=460$

Imagem 16. Aluno A_{19} (16ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise feita do registro da escrita dos Alunos com relação à 17ª questão, verificamos que alguns alunos apresentaram certa dificuldade ao fazer o tratamento das questões ao realizar as operações, isso pode ser caracterizado, segundo a teoria da semiótica de Duval (2011), como um problema de tratamento, o que há indício de falta de conhecimento das operações de matemática básica, como na imagem (17) das escritas do aluno A_{13}. O que não ocorreu nessa questão com relação a conversão do problema para a escrita, o que há indício de um bom entendimento no desenvolvimento da sequência didática, pois nas resoluções observou-se o uso da lógica de programação e os resultados foram bastante efetivos.

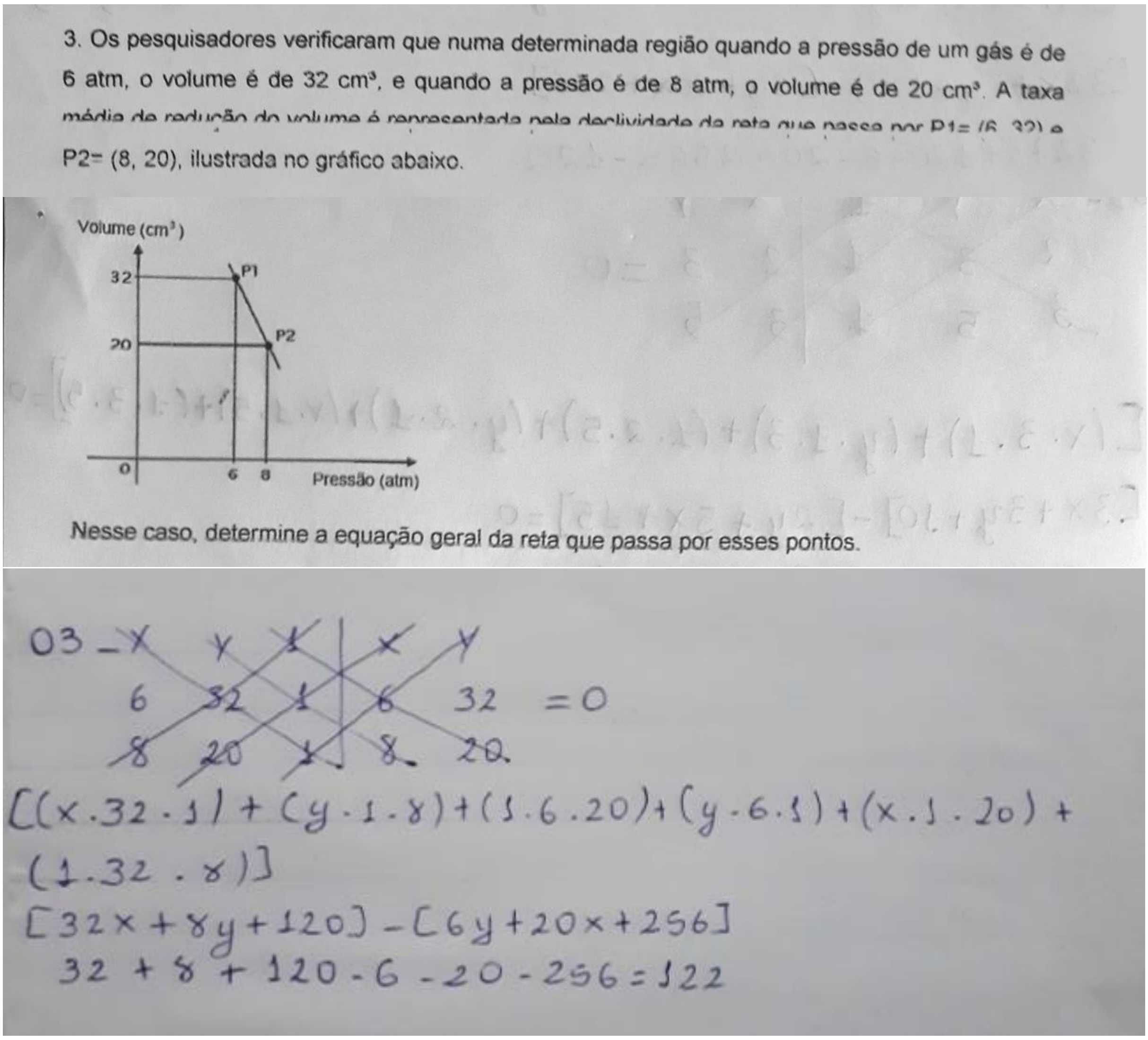

2. O professor de física fez um gráfico que representava a intensidade da força F (N) sofrida por uma mola ideal em função da deformação x (cm) de acordo com o gráfico abaixo. A taxa de aumento da força é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (0,1; 4), (0,2; 8) e (0,3; 12), como ilustra o gráfico abaixo.

Nesse caso, determina a equação geral da reta que passa por esses pontos.

[(x.4.1)+(y.1.02)+(1.01.8)][(y.01.1)+(x.1.8)+(1.4.02)]=0
[4x+02y+8]-[1y+8x+8]=0
4+02+8-(-8-8=-3

Imagem 17. Aluno A_{13} (17ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise feita do registro da escrita dos Alunos com relação à 18ª questão, verificamos que alguns alunos apresentaram certa dificuldade ao fazer o tratamento das questões ao realizar as operações, isso pode ser caracterizado, segundo a teoria da semiótica de Duval (2011), como um problema de tratamento, o que há indício de falta de conhecimento das operações de matemática básica, como na imagem (18) das escritas do aluno A_{21}. O que não ocorreu nessa questão com relação a conversão do problema para a escrita, o que há indício de um bom entendimento no desenvolvimento da sequência didática, pois nas resoluções observou-se o uso da lógica de programação e os resultados foram bastante efetivos.


3. Os pesquisadores verificaram que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 6 atm, o volume é de 32 cm³, e quando a pressão é de 8 atm, o volume é de 20 cm³. A taxa média de redução do volume é representada pela declividade da reta que passa por P1= (6, 32) e P2= (8, 20), ilustrada no gráfico abaixo.

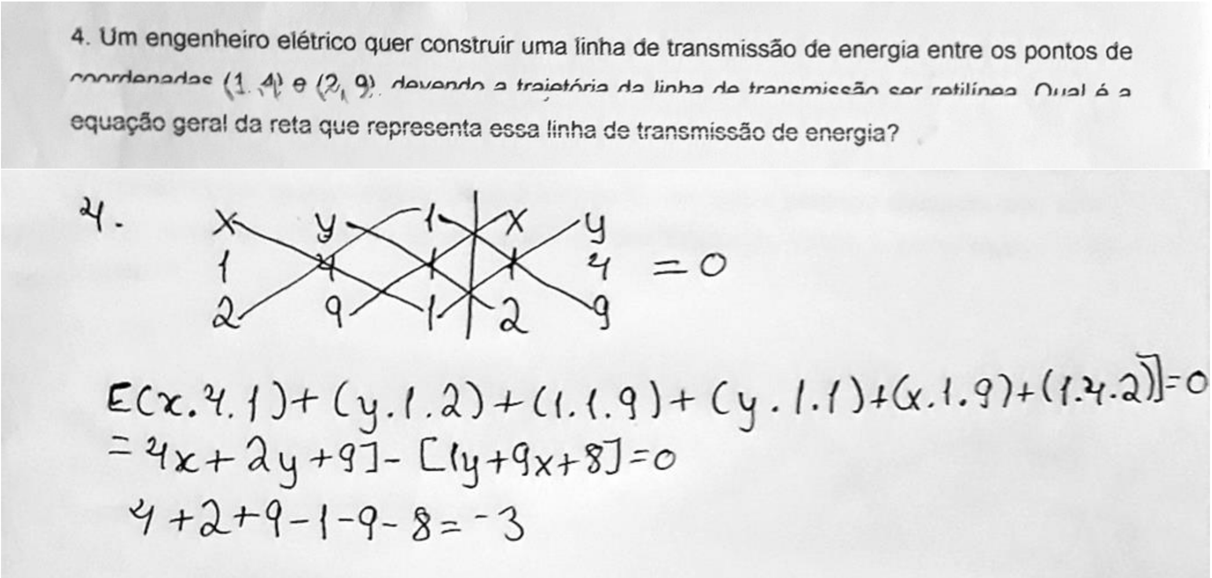
Nesse caso, determine a equação geral da reta que passa por esses pontos.

03 _ x y 1 x y
6 32 1 6 32 = 0
8 20 1 8 20

[(x.32.1) + (y.1.8)+(1.6.20)+(y.6.1)+(x.1.20)+
(1.32.8)]
[32x+8y+120]-[6y+20x+256]
32 + 8 + 120 - 6 - 20 - 256 = 122

Imagem 18. Aluno A_{21} (18ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise feita do registro da escrita dos Alunos com relação à 19ª questão, verificamos que alguns alunos apresentaram certa dificuldade ao fazer o tratamento das questões ao realizar as operações, isso pode ser caracterizado, segundo a teoria da semiótica de Duval (2011), como um problema de tratamento, o que há indício de falta de conhecimento das operações de matemática básica, como na imagem (19) das escritas do aluno A_{23}. O que não ocorreu nessa questão com relação a conversão do problema para a escrita, o que há indício de um bom entendimento no desenvolvimento da sequência didática, pois nas resoluções observou-se o uso da lógica de programação e os resultados foram bastante efetivos.


4. Um engenheiro elétrico quer construir uma linha de transmissão de energia entre os pontos de coordenadas (1, 4) e (2, 9), devendo a trajetória da linha de transmissão ser retilínea. Qual é a equação geral da reta que representa essa linha de transmissão de energia?

4.

$$\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 9 \end{array} = 0$$

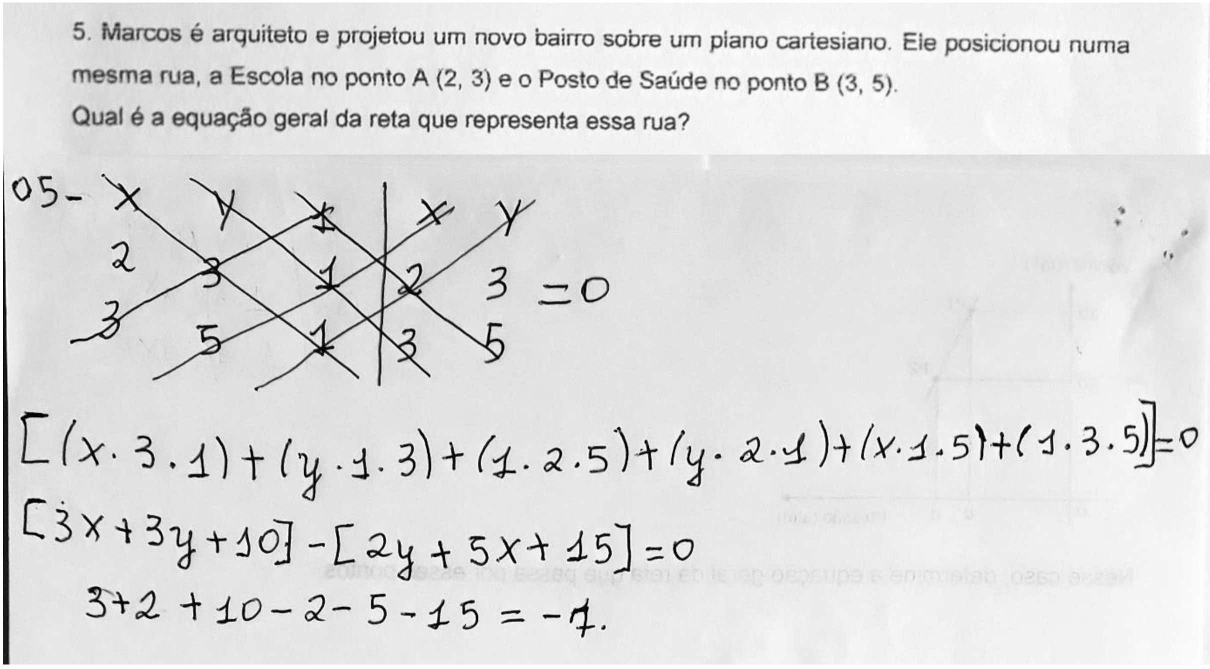
E(x.4.1)+(y.1.2)+(1.1.9)+(y.1.1)+(x.1.9)+(1.4.2)]=0

=4x+2y+9]-[1y+9x+8]=0

4+2+9-1-9-8=-3

Imagem 19. Aluno A_{23} (19ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise feita do registro da escrita dos Alunos com relação à 20ª questão, verificamos que alguns alunos apresentaram certa dificuldade ao fazer o tratamento das questões ao realizar as operações, isso pode ser caracterizado, segundo a teoria da semiótica de Duval (2011), como um problema de tratamento, o que há indício de falta de conhecimento das operações de matemática básica, como na imagem (20) das escritas do aluno A_{19}. O que não ocorreu nessa questão com relação a conversão do problema para a escrita, o que há indício de um bom entendimento no desenvolvimento da sequência didática, pois nas resoluções observou-se o uso da lógica de programação e os resultados foram bastante efetivos.



5. Marcos é arquiteto e projetou um novo bairro sobre um plano cartesiano. Ele posicionou numa mesma rua, a Escola no ponto A (2, 3) e o Posto de Saúde no ponto B (3, 5).
Qual é a equação geral da reta que representa essa rua?

05- $\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$[(x \cdot 3 \cdot 1)+(y \cdot 1 \cdot 3)+(1 \cdot 2 \cdot 5)+(y \cdot 2 \cdot 1)+(x \cdot 1 \cdot 5)+(1 \cdot 3 \cdot 5)]=0$

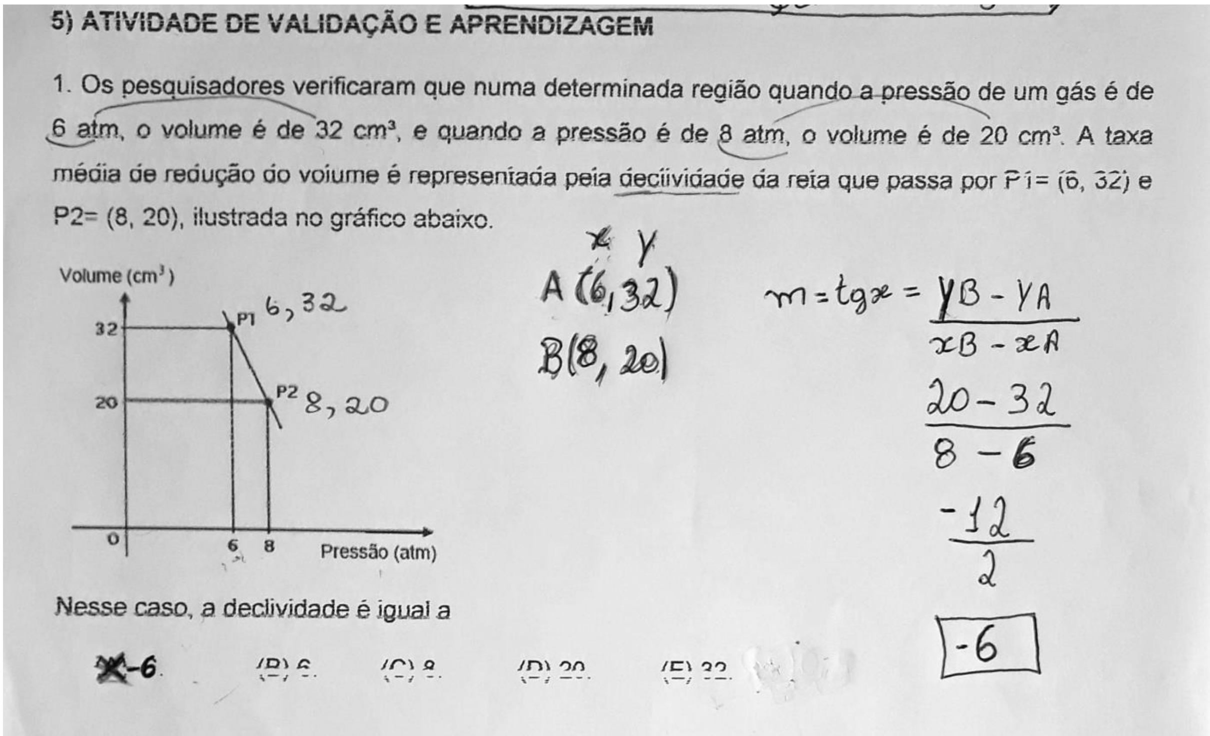
$[3x+3y+10]-[2y+5x+15]=0$

$3+2+10-2-5-15=-7.$

Imagem 20. Aluno A_{19} (20ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise das questões sobre coeficiente angular da reta, como nas atividades anteriores, continuamos a encontrar erros de tratamento das informações o que há indício de falta de base das operações básicas. Mas com relação à conversão de informações novamente não encontramos registro, o que continuamos a observar uma evolução grande na resolução das atividades o que há indício que o uso da lógica de programação na sequência didática levou os resultados a serem bastante efetivos também nas atividades de coeficiente angular da reta.

Na análise da 21ª questão não observamos erros tanto de conversão como de tratamento, e podemos perceber o uso da lógica de programação, o que há indício que a sequência didática fez com que os resultados fossem bastante efetivos, como podemos acompanhar na imagem (21) do aluno A_8.



5) ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO E APRENDIZAGEM

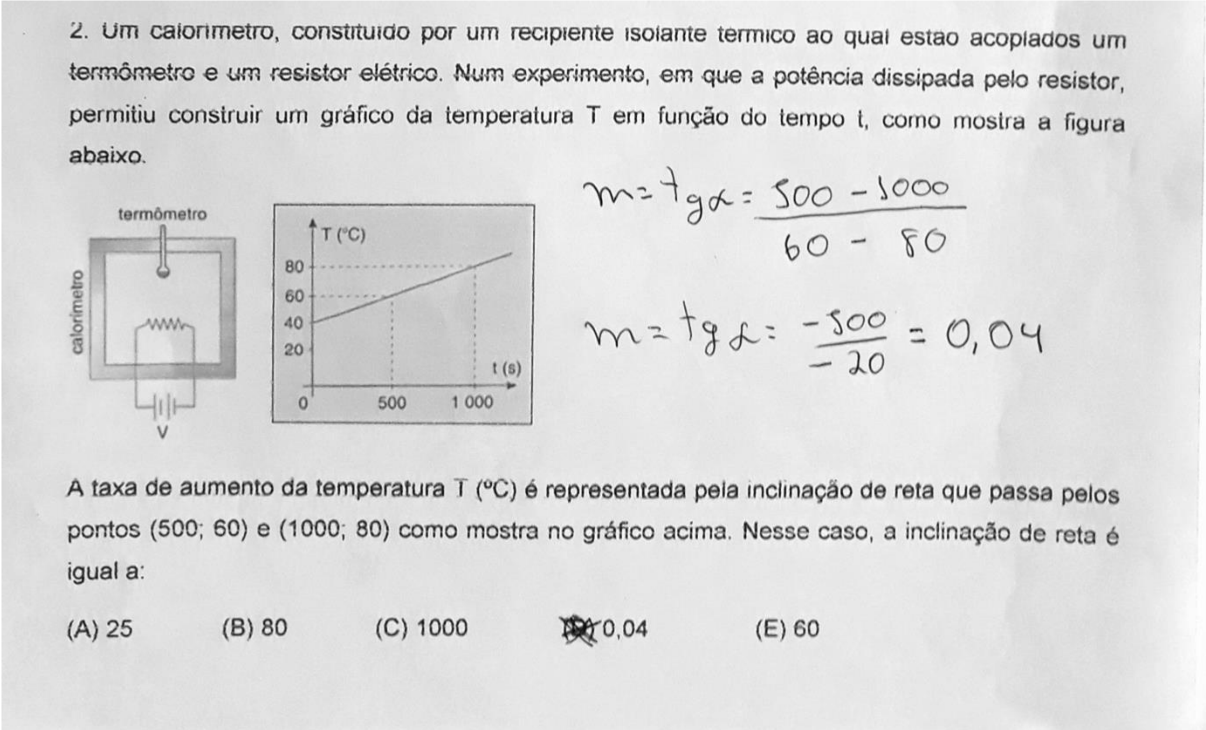
1. Os pesquisadores verificaram que numa determinada região quando a pressão de um gás é de 6 atm, o volume é de 32 cm³, e quando a pressão é de 8 atm, o volume é de 20 cm³. A taxa média de redução do volume é representada pela declividade da reta que passa por P1= (6, 32) e P2= (8, 20), ilustrada no gráfico abaixo.

Nesse caso, a declividade é igual a

(A) -6. (B) 6. (C) 8. (D) 20. (E) 32.

Imagem 21. Aluno A_8 (21ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Durante as análises feitas na 22ª questão, pode-se notar que só o aluno A_{24} apresentou limitações relativas à interpretação dos dados do texto da referia questão, como podemos observar na imagem (22), nota-se que esse aluno cometeu um erro de transformação relativo à conversão na hora de interpretar a questão. Já a maioria dos alunos como podemos observar, usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, conseguiram um resultado bastante efetivo, sendo que nenhum deles errou por tratamento de informação.


2. Um calorímetro, constituído por um recipiente isolante térmico ao qual estão acoplados um termômetro e um resistor elétrico. Num experimento, em que a potência dissipada pelo resistor, permitiu construir um gráfico da temperatura T em função do tempo t, como mostra a figura abaixo.

$$m = tg\alpha = \frac{500 - 1000}{60 - 80}$$

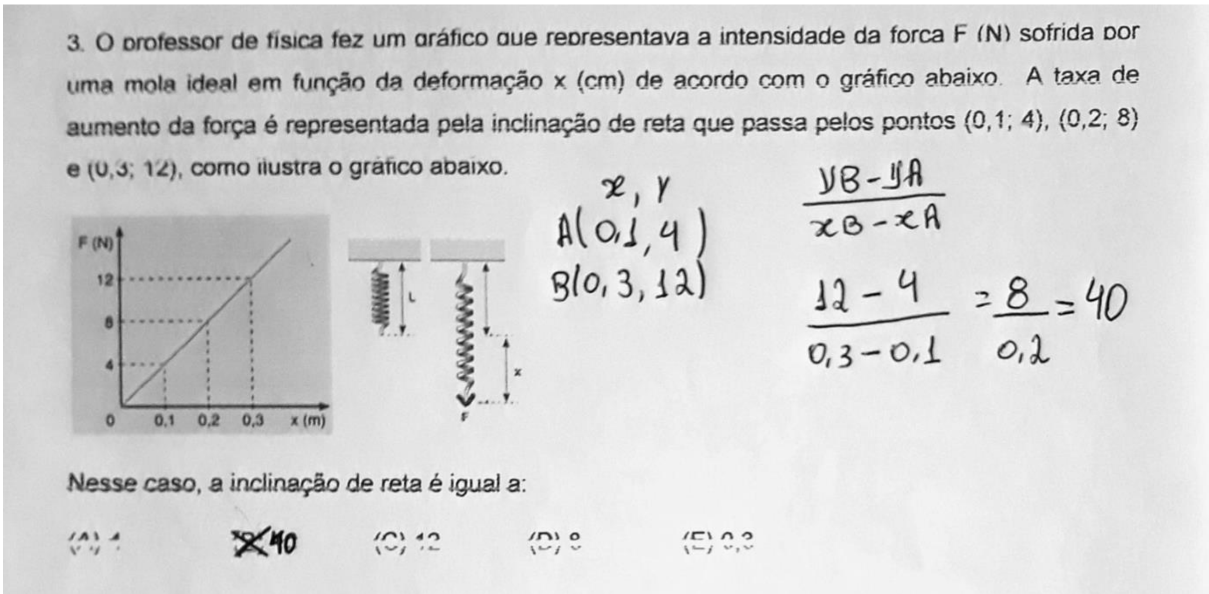
$$m = tg\alpha = \frac{-500}{-20} = 0,04$$

A taxa de aumento da temperatura T (ºC) é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (500; 60) e (1000; 80) como mostra no gráfico acima. Nesse caso, a inclinação de reta é igual a:

(A) 25 (B) 80 (C) 1000 (D) 0,04 (E) 60

Imagem 22. Aluno A_{24} (22ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 23ª questão não encontramos erros nem de conversão e nem de tratamento de informação, e podemos observar foi o uso da lógica de programação como foi ensinado na sequência didática, o que deve levado a esse resultado bastante efetivo, como podemos ver na imagem (23) das anotações do aluno A_{22}.


3. O professor de física fez um gráfico que representava a intensidade da força F (N) sofrida por uma mola ideal em função da deformação x (cm) de acordo com o gráfico abaixo. A taxa de aumento da força é representada pela inclinação de reta que passa pelos pontos (0,1; 4), (0,2; 8) e (0,3; 12), como ilustra o gráfico abaixo.

x, y

$A(0{,}1, 4)$

$B(0{,}3, 12)$

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

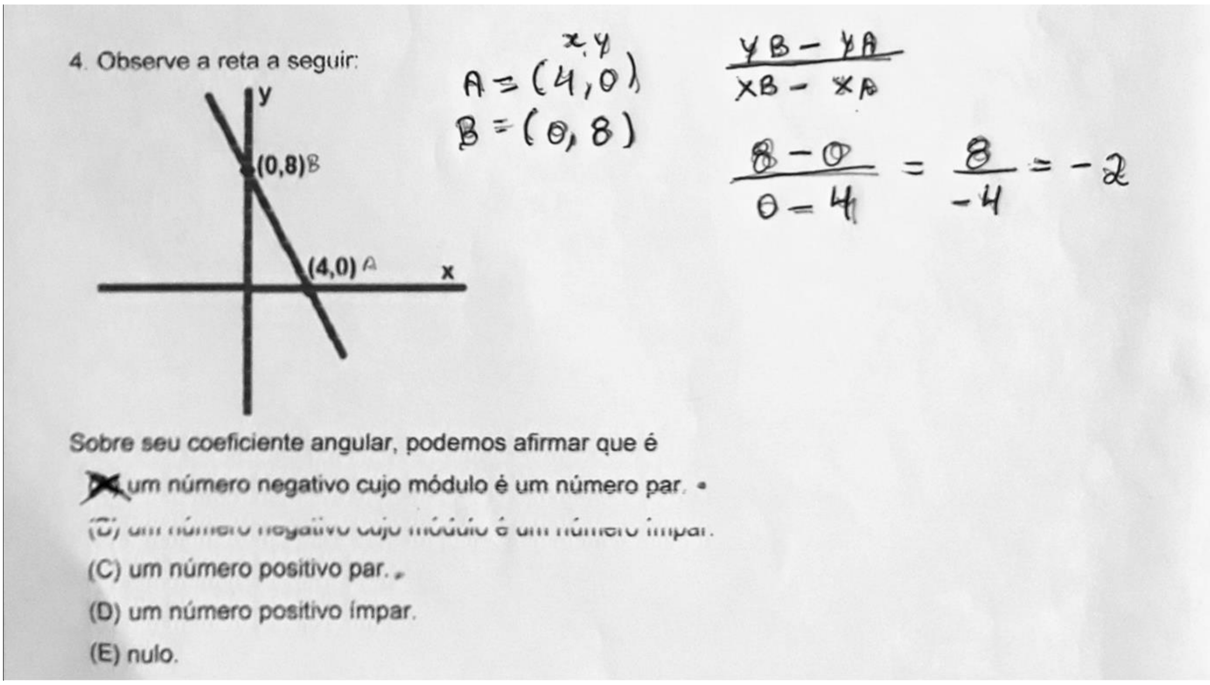
$\frac{12-4}{0{,}3-0{,}1} = \frac{8}{0{,}2} = 40$

Nesse caso, a inclinação de reta é igual a:

(A) 4 (B) 40 (C) 12 (D) 8 (E) 0,3

Imagem 23. Aluno A_{22} (23ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Na análise da 24ª questão não encontramos, novamente, erros nem de conversão e nem de tratamento de informação, e podemos observar o uso da lógica de programação como foi ensinado na sequência didática, o que deve levado a esse resultado bastante efetivo, como podemos ver na imagem (24) das anotações do aluno A_{22}.


4. Observe a reta a seguir:

x, y

$A = (4, 0)$

$B = (0, 8)$

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$\frac{8-0}{0-4} = \frac{8}{-4} = -2$

Sobre seu coeficiente angular, podemos afirmar que é

(A) um número negativo cujo módulo é um número par.
(B) um número negativo cujo módulo é um número ímpar.
(C) um número positivo par.
(D) um número positivo ímpar.
(E) nulo.

Imagem 24. Aluno A_{22} (24ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Nas questões sobre distância de um ponto a uma reta analisadas observou-se, nas resoluções, que a maior dificuldades na resolução desses problemas se deu durante a transformação dos signos por meio de tratamento da informação, pois, os mesmos não conseguiram desenvolver operações básicas. Sendo que a maioria usando a mesma lógica de programação usada na sequência didática, conseguiram um resultado bastante efetivo.

Na 25ª questão observou-se nas resoluções, que alguns alunos tiveram dificuldades na resolução desse problema durante a transformação dos signos por meio da conversão de significados numéricos, pois, os mesmos não conseguiram abstrair os dados contidos nos textos da questão propostas, e isso, é visível na resolução do aluno A_{16}, e isso reflete uma grande dificuldade desse aluno na hora de efetuar a conversão dos signos, podemos ver isso na imagem (25).

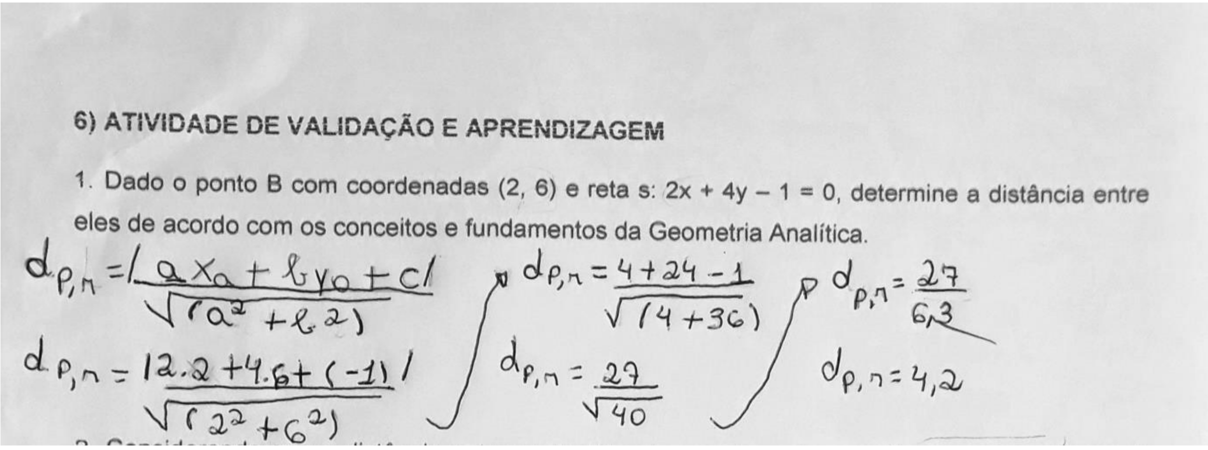
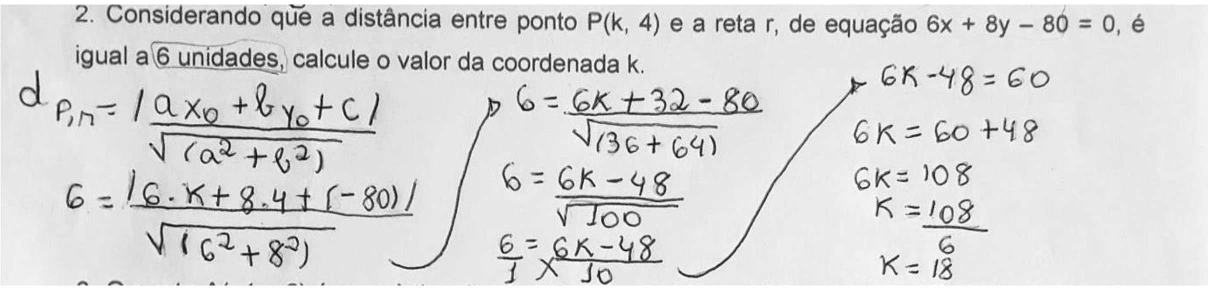


Imagem 25. Aluno A_{16} (25ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Por outro lado, na 26ª questão, observa-se que os alunos conseguiram identificar os dados, mas alguns não conseguiram usar a definição de equação modular, o que indica que esses alunos mostraram uma limitação em expressar a resolução de uma questão por meio do uso de uma linguagem matemática usada como pré-requisito natural na resolução desses tipos de questões, de acordo com os registros escritos apresentados na imagem (26) das escritas do aluno A_{31} abaixo.


2. Considerando que a distância entre ponto P(k, 4) e a reta r, de equação 6x + 8y – 80 = 0, é igual a 6 unidades, calcule o valor da coordenada k.

$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

$6 = \frac{|6.K + 8.4 + (-80)|}{\sqrt{(6^2+8^2)}}$

$6 = \frac{6K + 32 - 80}{\sqrt{(36+64)}}$

$6 = \frac{6K - 48}{\sqrt{100}}$

$\frac{6}{1} = \frac{6K-48}{10}$

$6K - 48 = 60$

$6K = 60 + 48$

$6K = 108$

$K = \frac{108}{6}$

$K = 18$

Imagem 26. Aluno A_{31} (26ª questão)
Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Portanto, no geral das análises feitas dos registros de representação semiótica presentes nas resoluções das questões analisadas dos alunos supramencionados, constatou-se que a maioria dos erros foi por transformações, e apresentaram problemas de conversão, o que há indícios de dificuldades em retirar os dados das questões e, por isso não conseguirem identificar de forma clara os dados contidos nos textos dessas questões. Além do mais, alguns desses alunos, como é o caso dos alunos, A_1, A_6, A_{15} e A_{19} apresentaram alguma limitação na hora de tratar corretamente os dados por meio dos cálculos numéricos das questões propostas o que significa que esses cometeram, durante o processo de transformação dos registros de representação semiótica, o que há indícios de erros na hora de tratar os dados, bem como, na hora de interpretar esses dados de forma correta.

Em suma, percebeu-se, nessas análises que dos 32 (trinta e dois) alunos que tiveram suas resoluções analisadas por meio da semiose de suas escritas, uma porcentagem pequena não conseguiu fazer a conversão dos dados e, o tratamento das operações aritméticas durante a resolução dessas questões o que há indícios de que esses alunos apresentaram alguma limitação em interpretar os dados dessas questões. Além desse fator limitante, há indícios de dificuldades nas operações básicas de aritmética envolvendo números inteiros.

A análise dos registros de representação semiótica, segundo Raymond Durval, apontam problemas que os alunos possuem com relação à interpretação e, a falta de base, principalmente envolvendo domínio de operações básicas, o que explica o baixo aproveitamento de alguns alunos nas atividades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término desta pesquisa ao alcançarmos nosso objetivo, verificar se a aprendizagem de geometria analítica torna-se mais satisfatória, a partir de uma sequência didática com construção de aplicativos, que envolvam dados georreferenciados, foi possível responder ao nosso problema de pesquisa: **A construção de aplicativos, a partir de uma sequência didática, voltada para o ensino de geometria analítica, e que envolve dados georreferenciados torna a aprendizagem, desse assunto, mais satisfatória?** Constatamos isso quando analisamos os registros de voz dos alunos, onde concluímos que a atividade foi boa e tem efeitos positivos no que tange a formação do aluno como cidadão conhecedor dos fenômenos que o cerca, ou seja, ela é interessante para se usar em aplicações e estudos futuros. Por outro lado, se pode perceber durante as análises dos registros de representação semiótica que alguns alunos erraram as questões propostas no momento de fazer a transformação dos registros e na hora de convertê-los ou na hora de tratar e interpretar o significado dos dados e das operações para se chegar a um resultado satisfatório das questões como se pode constatar nas análises realizadas nos registros das escritas dos alunos feitas por meio das representações semióticas.

A análise da Semiótica de Duval foi capaz de evidenciar que essa atividade tem um alto grau de dificuldade que envolve interpretação e manipulação. Nesse sentido, ratifica-se que os registros semióticos de Duval apontam que a maioria dos erros dos alunos se deu por interpretação, manipulação, erros de transformação e falta de conhecimento com relação aos cálculos básicos de matemática o que significa que esses alunos apresentaram uma grande falta de domínio de aritmética, além da falta de base, principalmente nas operações que envolvem números inteiros ou radiciação o que mostra que alguns alunos não conseguiram retirar os dados e, identificar os dados qualitativos o que demonstra que a ineficiência das atividades propostas se deu, não por ela ser insuficiente mais pelo contrário, se deu por ela ter um alto nível que envolve a interpretação e a manipulação, principalmente na interpretação.

Nesse sentido, é importante ressaltar que as atividades pelo seu alto grau de complexidade, como constatado na validação, foram capazes de expor as deficiências de alguns alunos, quando contrastadas com as afirmações dos alunos da turma piloto, isto é, nota-se que esses alunos apresentaram deficiência em matemática básica, em leitura e interpretação.

Assim, a atividade proposta serviu como um "exame de tomografia", expondo todas as características da turma e, como em todo processo de aprendizagem, deve ser acompanha de atividades complementares que venham suprir as necessidades apontadas durante as análises feitas. Por tanto, a atividade, pelo que foi proposto, é sim mais eficaz para uma aprendizagem mais eficiente de geometria analítica, principalmente no que tange a educação e formação do aluno como cidadão do mundo.

Percebe-se, portanto, que as análises dos registros das escritas dos alunos por meio da Semiótica de Duval apontam algumas deficiências desses alunos na questão de interpretação, de manipulação e de domínio de base conforme se pôde notar nas análises feitas dos registros das escritas desses. Por outro lado, em favor da atividade, a análise micro genética aponta que esse tipo de atividade que envolve essas questões é favorável à formação do aluno como cidadão que tem amplo conhecimento do que esta ao seu redor. Nesse sentido, a análise micro genética mostra por meio dos recortes de voz dos alunos, que eles, realmente, gostaram e se sentiram bem em estudar matemática relacionada a fenômenos envolvendo problemas de seu dia a dia. Além disso, a análise micro genética mostra que esses alunos ficaram envolvidos e interessados pelo conteúdo de geometria analítica, pois, sentiram sendo educados com um conhecimento amplo que vai muito além só da teoria, mas que está inserido nos seus contextos diário.

Além disso, nos trabalhos estudados, percebeu-se que nos últimos 5 (cinco) anos no Brasil, há nos resultados das pesquisas realizados uma grande necessidade de se enfatizar sobre a apropriação adequada de teorias pertinentes a linguagem de geometria analítica as quais, segundo as pesquisas realizadas nesse estudo, mostraram que a aplicação de tarefas ajudaram os alunos a diminuir o uso de formulas instigando estes a recorrerem ao uso da linguagem natural, do registro numérico e de figuras tais como gráficos, figuras geométricas e tabelas.

Nos trabalhos analisados é possível notar uma tendência forte em ressignificar o ensino de geometria analítica, no intuito de torná-lo o mais experimental possível e proporcionar aos alunos uma nova experiência no que tange as mais diversas inserções, importância e aplicação que este assunto tem com as inúmeras áreas de conhecimento, historicamente e didaticamente.

Assim, deseja-se que em estudos futuros haja um melhoramento dessas atividades em trabalhos, ou seja, que futuramente, antes de uma aplicação dessas atividades envolvendo questões de georreferenciamento com questões que envolvam esse nível de conhecimento, e o pesquisador possa trabalhar questões preliminares que objetivem a recuperação da base e do conhecimento matemático do aluno e, treino com a interpretação.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, Michèle. **Ingèniere didactique**. RDM, V9, n3, p231-308,1988. DOUADY, Régine. Jeux de qudres et dialectique outil-objet. RDM, V7.2, pp 5- 31,1986.

ÁVILA, G. **Objetivos do ensino da matemática**. Revista do Professor de Matemática. SBM, NO 27, 1995.

BACCA, Paula Cristina. 2013. 127f. **Geometria Analítica na educação básica: Primeiros Passos no Plano Cartesiano**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Regional de Blumenau, Santa Catarina, 2013. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2013/355721_1_1.pdf. Acesso em 24/05/2016. Às 08:51.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**. Dynamics, Blumenau, v. 2,n. 7, p. 55-83, abril/jun, 1994.

______________, **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2 ed. São Paulo: Contexto, 2004.

______________. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p

______________. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade no ensino de Matemática na engenharia: uma proposta metodológica e curricular**. 1997. 305 f. Tese(Doutorado) - Curso de Engenharia de Produção e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

_________________. **Modelagem Matematica & implicacao no ensino e na aprendizagem de matematica**. 2. ed. Blumenau: Edfurb, 2004.

________________. **Modelagem matemática no ensino**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BIEMBINGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BLUM, W.; NISS, M. **Aplied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68. 1991.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de Ciências Biológicas**. In: BORBA, M. C. Calculadoras gráficas e Educação Matemática. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999. p. 95-113.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodos de la ditactique des mathemáthiques. Recherches en didactique des Mathemátiques**, vol.9, nº 3,pp309- 336.Grenoble,1986.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1997

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio(PCNs).** Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia. SETEC/ PECNEM,1997. Disponível em: <http://www.gente.eti.https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF8#q=Par%C3%A2metros+Curriculares+Nacionais+Ensino+M%C3%A9dio:+Ruy+Leite+Berger+Filho%3B+Avelino+Romero+Sim%C3%B5es+Pereira%3B+Eny+Marisa+Maia++ br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1571.pdf. A cesso em 12/07/2015. Às 20:45.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1997

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio(PCNs).** Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia. SETEC/ PECNEM,1997. Disponível em: <http://www.gente.eti.https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF8#q=Par%C3%A2metros+Curriculares+Nacionais+Ensino+M%C3%A9dio:+Ruy+Leite+Berger+Filho%3B+Avelino+Romero+Sim%C3%B5es+Pereira%3B+Eny+Marisa+Maia++ br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1571.pdf. A cesso em 12/07/2015. Às 20:45.

BRASIL. MEC. SEMT. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

CANDAU, V. M. **Reinventar a escola**. 2a edição. Petrópolis: Vozes. 2000.259 p.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. **Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio**. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

COMTE, **A Discurso sobre o Espirito Positivo**. Porto Alegre, Globo/EDUSP, 1976.

CORREIA, Warley Machado. 2011. 169f. **Aprendizagem Significativa, Explorando Alguns Conceitos De Geometria Analitica: Pontos e Retas**. Dissertação(Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade

Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2446. Acesso em 24/05/2016. Às 09:18.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA**. Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010.

D'AMBROSIO, U.; BARROS, J. P. D.. **Computadores, Escola e Sociedade**. São Paulo: Scipione, 1990.

DAVIS, Philip. J.; HERSH, Reuben. **O sonho de Descartes**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1998.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas**. In: CAMPOS, Tânia M.M. (Org.). v.1. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FAZENDA, Ivani C. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia**. São Paulo: Loyola,1979.

FAZENDA, Ivani C. **Interdisciplinaridade: um projeto em parceria**. São Paulo: Loyola,1991.

FAZENDA, Ivani C. (org.). **Interdisciplinaridade na formação de professores: da teoria à prática**. Canoas: Ed. ULBRA, 2006.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Metodologia da pesquisa educacional**. 11. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

FIEGENBAUM, Joseane. 2015. 143f. **Elementos De Geometria Analítica: Uso do Aplicativo Grafeq na Reprodução de Obras de Arte**. Dissertação(Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT)- Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), 2015. Disponível em: http://cascavel.ufsm.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7625. Acesso em 24/05/2016. Às 09:15.

FRANCHI, R. H. O. L.. **Caracterização de ambientes de aprendizagem da Matemática através da Informática**. In: 3º Colóquio sobre História e Tecnologia no

Ensino de Matemática, 2006, São Paulo. Resumos do 3º Colóquio sobre História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2006.

GÓES, M. C. R. (2000). **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. In Relações de ensino – análises na perspectiva histórico-cultural. Cadernos Cedes, Campinas, 20, 50, pp. 9-25.

GONDIM, Sônia Maria Guedes. **Grupos focais com técnica de investigação qualitativa:desafios metodológicos. 2003**. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/paideia/v12n24/04.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2016.

GONZÁLEZ, Rey F. (1997). **Epistemología cualitativa y subjetividad**. São Paulo: EDUC.

GONZÁLEZ, Rey F. (2002). **Pesquisa qualitativa em psicologia: caminhos e desafios**. São Paulo: Pioneira.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, Brasília. Anais... Brasília: RIBIE, 1998.

GUEDES, Paulo Cezar Camargo. 2013. 68f. **Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao Ensino da Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado Profisional em Matemática)- Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=00290909708&d=20160525092550&h=eb4015f853b157bdf88aa626ab27c76de09000bb. Acesso em 08/03/2016. Às 11:12.

HALBERSTADT, Fabrício Fernando. 2015. 174f. **A Aprendizagem da Geometria Analítica do Ensino Médio e suas Representações Semióticas no GRAFEQ**. Dissertação (Program de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: http://cascavel.ufsm.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7617. Acesso em 24/05/2016. ÀS 11:08.

HURT, P. D. **Science education for the 21st Century**. School Science and Mathematics, v. 100, n. 6, p. 282-287, out/2000.

JAPIASSU, Hilton. Prefácio. In: FAZENDA, Ivani Catarina Arantes (Org.). **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia?** São Paulo: Loyola, 1979.

JAPIASSU, Hilton. **O sonho transdisciplinar e as razões da filosofia**. Rio de Janeiro: Imago, 2006.

KELMAN, Celeste Azulay; BRANCO, Angela Uchôa . **Análise microgenética em pesquisa com alunos surdos**. Rev. Bras. Ed. Esp., p. 93-106, v.10, n.1.

LEITE, Leonardo de Souza. 2015. 128f. **Cônicas e gráficos de funções de uma variável**. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio) – Pontefícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=resultado&nrSeq=26149@1. Acesso em 24/05/2016. Às 11:21.

LUMINATI, Emerson Roberto. 2015. 98f. **A Matemática dos Sistemas de Localização por Satélites**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, 2015. Disponível em: http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/cathedra/31-08-2015/000844571.pdf. Acesso em 24/05/2016. Às 10:41.

NAVARRO, P. & Díaz, C. (1994). **Análisis de contenido**. In J. M. Delgado & J. Gutiérrez. Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales (pp. 177-223). [s.n.t].

NAVARRO, Érica Patrícia. 2013. 60f. **Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática Com Atividades de Aplicação em Geometria Analítica: O Ponto e a Reta**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/224/2011_00063_ERICA_PATRICIA_NAVARRO.pdf?sequence=1. Acesso em 24/05/2016. Às 21:48.

NETO, Irineu Fava. 2013. 49f. **Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Naciona) - Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto. 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/94275. Acesso em 24/05/2016. Às 08:41.

MARINS, Leonardo de Souza. 2013. 47f. **O Uso do Geogebra no Ensino da Geometria Analitica: Estudo da Reta**. Dissertação (Instituto de Matematica e Estatistica Programa de Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás. 2013. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3183. Acesso em 24/05/2016. Às 10:13.

MARTIMIANO, Paulo César. 2013. 58f. **Da Batalha Naval à Geometria Analítica**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) - Universidade Federal De São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5951. Acesso em 24/05/2016. Às 09:32.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino de Matemática por atividades: uma aliança entre o**

Construtivismo e a História da Matemática. 2001. Tese (Doutorado) - Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas: Papirus, 1997.

OLIVEIRA, Carlos Andre Neiva de. 2013. 46f. **O Uso do Geogebra no Ensino da Geometria Analitica: Estudo da Circunferência**. Dissertação (De-partamento de Matematica e Estatística da UFG) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, 2013. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3237. Acesso em 18/05/2016. Às 08:52.

OLIVEIRA, Francisco Diego Moreira. 2014. 62f. **O Software GeoGebra como Ferramenta para o Ensino da Geometria Analítica**. Dessertação (Programa de Pós-Graduação em Matematica) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais: Artes. Brasília, 1997. MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, 1997. Mossoró, Rio Grande do Norte, 2014. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1146/2012_00927_FRANCISCO_DIEGO_MOREIRA_OLIVEIRA.pdf?sequence=1. Acesso em 24/05/2016. Às 22:21.

PEREIRA, Ana Paula Lorenço. 2013. 87f. Futebol: **A Geometria Analítica no Campo**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5957. Acesso em 24/05/2016. Às 11:13.

PCNs+ (Ensino Médio). **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

RIGHETTO, Luzia Francisca Pedrazzi. 2015. 67f. **Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/127714. Acesso em 24/05/2016. Às 10:31.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. **A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos**. In: Maria Inês Marcondes; Ivanilde Apoluceno de Oliveira; Elizabeth Teixeira. (Org). Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação. 1. Ed. Belém: EDUEPA, 2011, v.1, p. 145-160.

SANTOS, Fabrício Veras dos. 2014. 62f. **Algumas Aplicações do KIG no Estudo da Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=62686208368&d=20160525090435&h=32be0d1e941a5c48d3da26d170834b5346562d49. Acesso em 08/03/2016. Às 11:10.

SANTOS, Ivan Nogueira dos. 2011. 165f. **Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/Diss_Ivan_Nogueira_dos_Santos.pdf. Acesso em 18/05/2016. Às 08:55.

SEGURA, Claudia Santos codato.2013. 111f. **Releitura de Obras de Arte pelo Viés da Geometria Analítica: Uma Proposta Interdisciplinar para o Ensino da Matemática**. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade estadual de Londrina, Londrina 2013. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000185870. Acesso em 24/05/2016. Às 21:45.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SILVA, Sérgio Ferreira. 2015. 81f. **Geometria Analítica: Caminho para Aprendizagem**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=resultado&nrSeq=25720@2. Acesso em 18/05/2016. Às 08:48.

SISPAE – Sistema Paraense de Avaliação Educacional. Disponivel em: <http:\\vunesp.com.br/resports/Relatorio SISPAE.aspx?=SEPA1401:>Acesso em 25 de janeiro de 2016, às 22:00.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2001. 160 p.

SOUZA, Ricardo Antonio de. **A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função**. 2011. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) -Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

SOUZA, Santos B. (1989). **Introdução a uma ciência pós-moderna**, (3ª ed.). Rio de Janeiro: Graal.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. **Teaching experiment methodology: Underlying Principles and Essential Elements**. In LESH, R.; KELLY, A.E. (Ed.). Research design in mathematics and science education. Hillsdate, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-309.

VALENTE, J. A. (Org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: UNICAMP / NIED, p. 89-99, 1999.

VEIGA, S. M. & Rech, D. (Orgs.). (2001). **Associações: como constituir sociedades civis sem fins lucrativos**. Rio de Janeiro: DP&A: Fase.

APÊNDICE

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Tv Djalma Dutra s/n – Telégrafo
www.UEPA.com.br