Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

NATANAEL DE OLIVEIRA MOTA

APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém – PA

2019

NATANAEL DE OLIVEIRA MOTA

APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Dr. Natanael Freitas Cabral.

Belém – PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Mota, Natanael de Oliveira

Aprendizagem de progressões aritméticas: suas aplicações por meio de sequência didática / Natanael de Oliveira Mota; orientador Natanael Freitas Cabral, 2019

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

1. Progressões aritméticas. 2. Sequência didática. 3.Prática de ensino. I. Cabral, Natanael Freitas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 513.4

NATANAEL DE OLIVEIRA MOTA

OBS. Esta folha será substituída pela folha com a assinatura dos membros da banca em PDF, que será enviada em anexo.

APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data da Avaliação: 02/05/2019

Banca Examinadora:

______________________________________. Orientador
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas–Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN-RN
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Examinador Externo
Prof. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Educação - Universidade Nacional de Rosário – Argentina
Escola Tenente Rêgo Barros – Comando da Aeronáutica

Belém – PA

2019

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Pai Celestial, que é a razão máxima de nossa existência e fé. “Senhor, minha gratidão a ti, pois a cada passo senti tua presença”.

Aos meus pais Emanoel de Oliveira Mota e Maria Sebastiana Ferreira Mota que foram meus primeiros “mestres”, e que deram tudo de si para que eu tornasse-me um homem honrado. “Sobretudo, o bom exemplo para nunca desistir dos objetivos diante das adversidades da vida.” “A vocês minha profunda gratidão e amor eterno”.

Aos meus amados filhos: Nathan Emanuel, Nátila, Aimee e Caio. À minha esposa Bruna Ferreira pela compreensão de minhas constantes ausências em momentos familiares, e “muito obrigado pelo amor, carinho e apoio recebidos de vocês”. Aos queridos netos “Henry, Giovana, Luís Felipe e Pietro.” Obrigado pela honra de me tornar avô.

Aos meus irmãos: Samuel, Tancrêdo Zenas e Ana Débora. “A companhia e o incentivo recebido de vocês foram fundamentais para mais esta vitória”. E, aos meus sobrinhos que sempre proporcionaram alegria.

Aos meus sogros Edmilson e Eliete de Almeida “Sei que posso contar com vocês sempre e muito obrigado por tudo”. A Sra. Mary Marcionila, “obrigado por suas incansáveis orações, pois elas deram-me ânimo nas horas difíceis”. Também agradeço a Sra. Joana Ferreira, avó de minha esposa, por seus sábios conselhos, frutos de experiências de seus 81 de vida (em memória).

Aos colegas desta jornada, por tudo que aprendemos e que isto seja luz para a nossa nova caminhada. Especialmente aos amigos Rosinaldo Cardoso, Luiz Carlos, Tonival, Maurício Macêdo e Saul, por tudo que partilhamos, pelo que juntos sofremos, pela amizade que foi solidificada no dia a dia, e que esta seja sempre maior do que a distância que de agora em diante possa nos separar. A todos os Doutores, pois sei que o trabalho com o Ser humano é árduo, exige dedicação e experiência e todos souberam exercer com competência e profissionalismo. Em especial, ao professor e Dr. Natanael Freitas Cabral, orientador deste estudo. “Obrigado pela paciência nas horas de dúvidas”.

MOTA, N. O. **Aprendizagem de Progressões Aritméticas**: Suas aplicações por meio de Sequência Didática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo geral elaborar um projeto com atividades envolvendo Progressões Aritméticas (PA) aplicadas como Sequência Didática em uma amostra de alunos de 1º Ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual de Belém do Pará. O tema “Aprendizagem de Progressões Aritméticas: suas aplicações por meio de Sequência Didática”, focaliza a aplicação das Progressões Aritméticas (PA), e sua escolha decorreu do interesse do pesquisador, pois enquanto professor de Matemática questiona os métodos tradicionais utilizados em sala de aula que dificultam a aquisição dos conhecimentos por parte dos alunos, os quais desenvolvem aversão pela matemática (69 %), conforme resultados da pesquisa. Além disso, o Mestrado Profissional em Ensino da Matemática dá ênfase à linha de pesquisa voltada para assuntos da Matemática Básica, aplicados com sequência didática, embasada no modelo das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC), Cabral (2017). A metodologia escolhida foi a de pesquisa na didática da matemática, apoiada na Engenharia Didática a qual dá possibilidades ao pesquisador de incluir a parte experimental com base em realizações didáticas. Usou-se a Análise Micro genética na investigação da construção de conhecimentos. Este estudo traz célebres autores como referências: CABRAL, 2017; LUTZ, 2012; ZABALA, 2007 E VALLE et al, 2008, entre outros. O experimento foi positivo e significativo, os resultados mostram que os alunos que participaram, tiveram um bom desempenho nas atividades aplicadas o que comprova que a metodologia utilizada resgatou nos alunos a motivação, o interesse e acima de tudo a auto-estima, além do entendimento dos conceitos e propriedades do tema.

Palavras-chave: Método. Engenharia Didática. Sequência Didática. Progressões Aritméticas.

MOTA, N. O**. Learning of Arithmetic Progressions**: Its Applications by means of Didactic Sequence. Dissertation (Professional Master's in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2019.

ABSTRACT

This study has as general objective to elaborate a project with activities involving Arithmetic Progressions (AP) applied as Didactic Sequence in a sample of students of 1st Year of High School, in a state public school in Belém do Pará. The theme "Learning of Arithmetic Progressions : his applications through Didactic Sequence ", focuses on the application of Arithmetic Progressions (AP), and his choice was the interest of the researcher, because as a teacher of Mathematics questions the traditional methods used in the classroom that hinder the acquisition of knowledge by part of the students, who develop aversion for mathematics (69%), according to the results of the research. In addition, the Professional Master in Mathematics Teaching emphasizes the research line focused on Basic Mathematics subjects, applied with didactic sequence, based on the Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC), Cabral (2017). The chosen methodology was the one of research in didactics of mathematics, supported in Didactic Engineering which gives possibilities to the researcher to include the experimental part based on didactic accomplishments. Micro Genetic Analysis was used in the investigation of the construction of knowledge. This study brings famous authors as references: CABRAL, 2017; LUTZ, 2012; ZABALA, 2007 AND VALLE et al, 2008, among others. The experiment was positive and significant, the results show that the students who participated had a good performance in the applied activities, which proves that the methodology used rescued the students motivation, interest and, above all, self-esteem, besides understanding concepts and properties.

Keywords: Method, Didactic Engineering. Sequence, Didactics, Progressions, Arithmetic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho parte do pressuposto de que as dificuldades de aprendizagem em matemática que os alunos têm, estão intimamente ligadas ao método inadequado usado em sala de aula, pois a escola enquanto ambiente responsável de socialização de saberes não fornece os estímulos necessários para determinadas ações inovadoras, as quais possibilitarão motivações aos educandos, visto que, o fazer pedagógico ainda hoje é centralizado em metodologias tradicionais. Por esse motivo surgiu à escolha do tema “Aprendizagem de Progressões Aritméticas e suas aplicações por meio de Sequência Didática”, cujo estudo focaliza a aplicação das Progressões Aritmética (PA). Pois, o curso de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática exige que a linha de pesquisa volte-se para assuntos da Matemática Básica, aplicando uma sequência didática em determinados assuntos.

Assim, este estudo tem como objetivo geral elaborar um projeto cujas atividades serão aplicadas com uma Sequência Didática, em turmas de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, que até então utilizam o método tradicional da aprendizagem para o referido assunto. O projeto é centralizado na metodologia de pesquisa na didática da matemática, a qual é importante porque inclui a parte experimental, com base em realizações didáticas, ou seja, apresenta concepção, realização, observação e análise de sequência didática, conseguindo informações importantes acerca do fato pesquisado. Quando a Engenharia Didática é empregada como meio para o ensino, o pesquisador usa uma sequência de atividades, no caso, uma sequência didática, buscando assim a organização na aprendizagem nos discentes, fato que poderá ser comprovado por suas etapas.

Para a aplicação da Sequência Didática teremos o auxílio da Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos. E, o professor ao usar a Engenharia Didática, permite que sua ação pedagógica seja objeto de investigação, pois:

> A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e pratica. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido. (PAIS, 2002, p. 99)

Portanto, o presente estudo, trata-se, sem dúvida de um tema da grande atualidade e evidente relevância social, técnica e científica. E, para tal empreendimento optou-se por uma pesquisa bibliográfica e outra de campo, ambas fundamentadas na abordagem qualitativa, tal abordagem, segundo Minayo (2015) proporciona a produção do conhecimento durante o desenvolvimento da própria pesquisa em curso. A Pesquisa de campo está apoiada também na abordagem quantitativa, tendo-se entrevistado 100 (cem) alunos do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Belém do Pará. Essa fase da pesquisa foi feita no período de 21 a 25 de Agosto de 2017, (diagnóstico das turmas). O método escolhido para investigação está embasado na Microgenética que se “expandiu como método investigativo na Europa e EUA”. (FLYNN; PINE; LEWIS, 2006, p. 152- 155). No Brasil, as pesquisas na área de Educação como teses, dissertações e artigos que utilizam o “método Microgenético” na forma de “análise Microgenética” dos dados. Góes, (2000) Também se refere à abordagem metodológica Microgenética como “análise Microgenética”. Assim, se fará uma análise descrevendo-se em detalhes os resultados obtidos, visto que, a pesquisa descritiva é aquela que segundo Rúdio, (2002) *apud* Costa e Costa (2011, p. 36) é a mais tradicional e que “descreve as características de uma determinada população ou fenômeno, e os interpreta”. O tipo de citação escolhido foi o de autor-data. A revisão bibliográfica será feita mediante leitura sistemática, com fichamento de obras, ressaltando os pontos abordados pelos autores pertinentes ao assunto em questão. Além da observação em lócus.

Sabe-se que metodologia adequada em sala de aula facilita a aprendizagem dos alunos, basta olhamos para nossos estudantes sentados em uma cadeira, observando o professor com suas aulas tradicionais percebe-se, nitidamente, em grande parte o desânimo em seu rosto. “É difícil relacionar teoria e prática se o estudante não vivenciar momentos reais em que será preciso analisar o cotidiano” (MAFUANI, 2011). É momento de achar outras formas que sejam atraentes para o seu aprendizado em assuntos de tamanha importância da Matemática.

> Por isso os investimentos nas pesquisas no sentido de diversificar propostas metodológicas alternativas para o ensino de Matemática tomam cada vez mais espaço na literatura da área. De um modo geral o que tem sido apontado por essas pesquisas é a necessidade de que o aluno saia da postura passiva fortalecida pelo modelo tradicional de ensino – *ênfase na tríade definição, exemplo e exercício* – e adote uma postura mais ativa, participativa, em colaboração com seus pares aprendizes e com o professor que assume uma conduta de provocador e organizador de ideias. (CABRAL, 2017, p.10).

Quando tratamos de uma matemática convencional, o que mais importa aos alunos é que os resultados das avaliações lhes tragam a aprovação do final de ano. Aprendem a resolver problemas somente para as respostas já estabelecidas, obtidas por meio de memorização das fórmulas e regras formais que são repassadas em sala de aula de forma tradicional, esse modelo de ensino de matemática sem contextualização impede que este desenvolva habilidades e competências necessárias ao seu desenvolvimento enquanto sujeito reflexivo.

Para que o Ensino das Progressões Aritméticas proporcione ao aluno habilidades e conhecimentos no campo da matemática, é necessário que o professor utilize uma metodologia que parta do concreto para o abstrato (Mendes, 2006) e se elabore uma proposta didático-pedagógica, que promova situações investigativas em sala de aula tornando o aluno um ser ativo e crítico e com capacidade de generalizar o conhecimento matemático nas diversas situações.

Com a aplicação do material concreto que é um recurso didático e motivador, irá ajudar o aluno a compreender melhor o Ensino das Progressões Aritméticas, em suas dúvidas mais frequentes. Utilizando situações problemas, para que se torne mais claro o conteúdo e faça-o entender que desde as séries iniciais já se aplicava o Ensino das Progressões Aritméticas, quando se tratava dos Números Naturais, os números pares ou ímpares ou qualquer outro tipo de contagem. Sobre o referido recurso didático Spinillo e Magina (2004, p.11) opinam que o material concreto não é o único e nem o mais importante para a compreensão matemática do aluno, porém, isto não significa que deva ser abolido da sala de aula.

Também os PCN citam a relação da necessidade de contextualização, interdisciplinaridade e conexão entre saberes matemáticos. Sabe-se que os alunos ao chegarem ao Ensino Médio já possuem uma bagagem considerável de conhecimentos matemáticos, cabendo aos professores no seu fazer pedagógico, criarem condições satisfatórias para que esses conhecimentos fluam e sirvam de pressupostos para novos conteúdos. Assim, derrubando o velho mito de que o ensino de matemática é um bicho de sete cabeças.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático (...). Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. (...) As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções... (PCN, 2002, p.255).

Portanto, o PCN justifica a relação da contextualização e interdisciplinaridade na tentativa de permitir conexões de diferentes conceitos matemáticos. Além disso, as atividades têm que estabelecer ligações entre os conteúdos matemáticos, fazendo com que o discente crie suas próprias suposições com base no seu conhecimento e com o que está em construção durante a atividade, através da comunicação com outros alunos da turma, com o auxílio do professor, ou seja, as atividades de investigação facilitarão a criatividade dos alunos, testarão hipóteses para a resolução de problemas e, concluindo com Valle (2008), "apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões". (VALLE et al, 2008, p.5).

> O desenvolvimento de investigações em sala de aula representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno porque este passa a constituir-se em sujeito de conhecimento, isto é, alguém que sente prazer de participar da produção/ criação das ideias matemáticas. Para o professor porque pode encontrar nas investigações matemáticas um modo significativo de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a Matemática, levando os alunos a se interessarem matemática é um trabalho que o professor pode desenvolver, em sala de aula ou fora dela, com o objetivo de um ensino mais significativo e que desperte a pelas aulas de álgebra, fato pouco comum, atualmente, em nossas escolas. (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTÓVÃO, 2005, p.21).

Os autores acima, ressaltam o desenvolvimento do aluno em participar e construir suas próprias ideias através da matemática a partir da interação do professor em dar significado ao trabalho estabelecido sobre os interesses cativantes do ensino.

A memorização das fórmulas e conteúdos muitas vezes se caracteriza como aprendizagem mecânica (MOREIRA, 1982), sem estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos. O assunto das Progressões Aritméticas na visão dos pesquisadores se encaixa nessa situação, pois esse conteúdo possui algumas fórmulas e conceitos que podem ser construídos através das conjecturas criadas de forma autônoma, mas acabam terminando em aulas desgastantes que não geram o interesse do aluno.

Além disso, em discussões entre os pesquisadores, identificamos que, devido ao conteúdo de sequências numéricas estarem como um dos últimos assuntos abordado no livro didáticos do Dante, (2004) primeiro ano do Ensino Médio, muitos professores não dão a devida importância e acabam não aprofundando esse conteúdo que servirá de base no aprendizado de outros temas como matemática financeira, teoria de números, reprodução de bactérias, entre outras. Assim, a proposta é que se faça um trabalho investigativo, com uma sequência didática estruturada onde os alunos criarão padrões matemáticos, usando conhecimento de situações que estão incluídas na natureza das Progressões Aritméticas, descobrindo por si só e deduzindo assim o conhecimento da mesma e posteriormente demonstrando as fórmulas e generalizações sobre tal.

Portanto, este estudo é um projeto de intervenção pedagógica para o nível de Ensino Médio, que foi desenvolvido durante sua execução realçando essas três ideias chave subjacentes: (a) todos os alunos podem gostar de matemática (b) a matemática é a ciência dos padrões (c) a descoberta de padrões é uma estratégia poderosa de resolução de problemas, o qual, posteriormente pode ser usado como subsídio por professores de matemática. O referido estudo está estruturado em sete capítulos.

O primeiro capítulo discute, de forma teórica, a Engenharia Didática na Pesquisa, concepção, análise a priori das situações da Engenharia Didática, a experimentação, análise posteriori, validação e sequência didática e a idade mental da criança, passos para o sucesso de uma sequência didática, o histórico da sequência didática no Brasil, a análise microgenética e a análise do discurso.

O segundo capítulo mostra a revisão de literatura sobre o ensino da progressão aritmética, o trabalho dos pesquisadores no assunto, os livros didáticos aplicados em sala de aula, a dificuldade da aprendizagem dos alunos egressos e o diagnóstico dos professores.

O terceiro capítulo discorre sobre a Progressão Aritmética enquanto conteúdo, as sequências e séries numéricas, o histórico e a definição da Progressão Aritmética, sua fórmula do termo geral, a classificação de uma Progressão Aritmética, a interpolação Aritmética, a soma dos termos de uma PA, e Progressões Aritméticas de segunda ordem.

O quarto capítulo traz uma proposta pedagógica, ou seja, o Projeto de Aplicação de Sequência Didática descreve minuciosamente a metodologia empregada na pesquisa de campo bem como as atividades desenvolvidas de acordo com os objetivos traçados neste estudo.

No quinto e último capítulo, considera-se que os resultados esperados para essa aplicação da Sequência Didática em Progressão aritmética contribuam para a reflexão nossa da práxis pedagógica, e que também sirvam de base para novos estudos à cerca das dificuldades de aprendizagem de matemática, e assim, o ensino transforme-se em um processo significativo para seus alunos.

Tendo como objetivo geral, elaborar um Projeto Pedagógico cujas atividades sobre as Progressões Aritméticas serão aplicadas com sequência didática, em turmas de 1º ano do Ensino Médio, que até então utilizam o método tradicional da aprendizagem do referido assunto.

> Por isso os investimentos nas pesquisas no sentido de diversificar propostas metodológicas alternativas para o ensino de Matemática tomam cada vez mais espaço na literatura da área. De um modo geral o que tem sido apontado por essas pesquisas é a necessidade de que o aluno saia da postura passiva fortalecida pelo modelo tradicional de ensino – *ênfase na tríade definição, exemplo e exercício* – e adote uma postura mais ativa, participativa, em colaboração com seus pares aprendizes e com o professor que assume uma conduta de provocador e organizador de ideias. (CABRAL, 2017, p.10)

A ênfase do autor trata de dar significado às três fases que definem a relação participativa do modelo de pesquisa que materializa a diversificação e fortalece o professor como autor e coordenador de ideias.

Para a aplicação da Sequência Didática teremos o auxílio da Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos, bem como as definições de Análise do discurso. A partir daí a sequência abordará o ensino de Progressão aritmética e a pesquisa sobre a conduta relacionada às dificuldades, resultados e conclusões sobre o mesmo, tratar-se-á acerca da história e suas definições progredindo então, para a sequência didática e seus respectivos modos de experimentação e resultados, sendo estes descritos segundo o processo de análise da aplicação. Finalmente, abordar-se-á os indicativos do processo e a confirmação da Sequência didática, na tentativa de concluir de forma sucinta as considerações sobre o mesmo.

Define-se que o objetivo geral é elaborar um Projeto Pedagógico cujas atividades sobre as Progressões Aritméticas serão aplicadas com sequência didática, em turmas de 1º ano do Ensino Médio, que até então utilizam o método tradicional da aprendizagem do referido assunto.

1 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Nossa escolha de pesquisa é conhecida na Educação Matemática como Engenharia Didática, pois acreditamos ser bastante adequada para o tipo de pesquisa que queremos realizar.

1.1 METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Essa metodologia de pesquisa nasceu na década de 1980 e segundo ARTIGUE (1988) a mesma pode ser usada como uma metodologia de pesquisa para o ensino.

A metodologia de pesquisa na didática da matemática é importante, pois incluía parte experimental, com base em realizações didáticas, ou seja, apresenta concepção, realização, observação e análise de sequências didáticas, conseguindo informações importantes acerca do fato pesquisado.

Quando a Engenharia Didática é empregada como meio para o ensino, o pesquisador usa uma sequência de atividades, no caso, uma sequência didática, buscando assim a organização na aprendizagem nos discentes, fato que poderá ser comprovado por suas etapas.

O professor ao usar a Engenharia Didática, permite que sua ação pedagógica seja objeto de investigação.

> A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e pratica. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido. (PAIS, 2002, p. 99)

A Engenharia Didática determina produções para o ensino por conta de resultados de pesquisa, e também específica uma metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Sua contribuição para o ensino é muito importante para a fundamentação teórica, de modo que o professor consiga formar a ligação entre esta e a prática.

1.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA NA PESQUISA

A Engenharia Didática, vista como uma metodologia de pesquisa caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação.

> A noção de Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática no início dos anos 80, a proposta foi uma metodologia que se caracterizava por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, um trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ARTIGUE, 1996, p. 196).

Artigue (1996), em sua consideração acima, aborda sobre a proposta pautada em um esquema experimental que, em sua metodologia, empregava a realização da didática próxima aos conhecimentos de domínio mais elevado, como a engenharia, apoiando o ideal de trabalhar parâmetros mais complexos de uma determinada ciência. Portanto, a Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

Suas fases são:

- Análise preliminar
- Concepção e análise a priori das situações da engenharia didática
- Experimentação
- Análise a posteriori e validação

1.2.1 Análise preliminar

Sua metodologia é fundamentada nos pressupostos da Engenharia Didática as análises preliminares, pode comportar os seguintes objetos de discussão:

- Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- O ensino usual e seus efeitos;

- As concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- As condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- A consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- O estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Segundo Artigue (1988), cada uma dessas fases é aprofundada durante trabalho de pesquisa. Portanto a expressão "análises preliminares" não significa que após o início da outra fase não se possa retomá-las, logo o termo "preliminar" ou "prévia" é relativo, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. Na realidade, deve ser um trabalho simultâneo com as demais fases da pesquisa. Estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a análise a priori e construção da sequência de ensino.

1.2.2 Concepção e análise a priori das situações da Engenharia Didática

Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis potenciais que serão manipuladas pelo pesquisador:

- As variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e
- As variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

Esses dois tipos de variáveis são de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático que está sendo estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e a dimensão didática. O objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Na análise a priori devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação a-didática desenvolvida. Segundo Brousseau citado por Silva (2008) o planejamento de uma situação didática precisa ter momentos onde o aluno se encontra sozinho diante do problema a resolver e sem a intervenção do professor. Para o autor este momento é considerado como fase a-didática, onde o aluno deve relacionar-se com um problema a partir de seus próprios conhecimentos, desafiado pelo problema e não com a resposta oferecida pelo professor.

- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

1.2.3 Experimentação

A fase da experimentação é o momento de se colocar em funcionamento tudo o que foi construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação.

Em nossa pesquisa a validação das hipóteses ocorrerá com a aplicação da sequência didática e conforme o desempenho dos alunos terá um teste de verificação para averiguar o que esses alunos aprenderam após a aplicação dessa sequência.

1.2.4 Análise a posteriori e validação

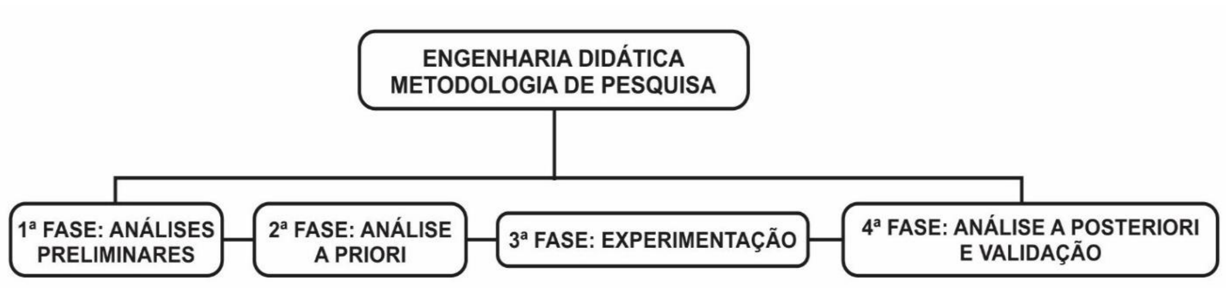
É uma fase que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação. A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em foco. Ela é uma etapa feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:

- a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador.

- os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori.

Assim, a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

Figura 1 – Fases da Engenharia Didática



Fonte: Adaptado pelo autor (2018).

1.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Sequência didática é, segundo as considerações de Zabala (2007) “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18). Portanto, pode-se afirmar que se trata de atividades que respeitam determinadas disposições e uma base articulada para o cumprimento de um objetivo.

> "[No âmbito da Engenharia Didática,] uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula." (PAIS, 2011: p.102).

O autor acima confirma essas especificidades que denominam as análises prévias para engajar conceitos e dar significado ao que não se considera frequente ou comum dentro da rotina dos alunos. Assim, para compreender o valor pedagógico e as razões que justificam uma sequência didática é necessário identificar suas fases, as atividades que a constitui e as relações que estabelecem com o objeto de conhecimento, visando atender o que o aluno precisa.

A Educação Matemática vem mostrando que a Sequência Didática forma a interação entre aluno e professor, e tem como objetivo a construção de determinado conceito matemático. Para Teixeira e Passos (2013) a sequência didática é uma série de situações estruturadas ao longo de certa quantidade de aulas visando tornar possível a aquisição de determinado saber. A quantidade de aulas deve ser relativa às necessidades e dificuldades dos alunos que são heterogêneas. Portanto, cabe ao professor dar atenção às especificidades cotidianas, para que posso considerar em sua interação dentro de sala de aula.

Segundo Pommer (2008) em uma sequência didática as respostas dos alunos podem ser diferentes ao que o professor espera. E assim o professor poderá estimular os alunos, que poderão ver onde tiveram falha e ao mesmo tempo impulsioná-lo para que o mesmo continue o trabalho até que construa o resultado esperado, assumindo uma posição mais ativa em relação ao conhecimento. Com isso a sequência didática

Vista como uma ferramenta de ensino onde o professor cria situações didáticas mais próximas dos alunos baseado nos conhecimentos que eles já possuem.

Para isso, as situações criadas pelo professor em uma sequência didática são previamente planejadas, para que haja uma maior compreensão do que se pretende ensinar, objetivando que o discente se mostre mais ativo em relação a aprendizagem. Esse planejamento pode ser entendido como uma maior disposição do professor em organizar suas aulas e colaborando o desenvolvimento das habilidades e competências necessárias aos educandos para que ele estabilize o conhecimento que o professor pretende ensinar.

Na visão de Leal (2011), a utilização da sequência didática percebe-se uma melhor aprendizagem do aluno, já que o conhecimento é construído por ele próprio, e por outro lado o professor também acaba aprendendo, visto que no ato da elaboração de uma sequência didática acabam surgindo dificuldades e ele de forma antecipada, consegue resolver com mais facilidade.

1.3.1 A estrutura de nossa Sequência Didática – Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC)

A elaboração de nossa Sequência Didática para o ensino de Matemática da educação básica é proposta por Cabral (2017) através da formulação de Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC).

> Minha motivação inicial como professor de um curso de licenciatura sempre foi procurar estimular meus alunos para que pudessem no exercício da profissão docente, ensinar a Matemática de um modo diferente daquele com o qual haviam sidos ensinados. Meu investimento era no sentido de criar uma possibilidade alternativa que ao mesmo tempo em que os afastasse da ditadura do modelo tradicional – *definição, exemplo e exercício* – os aproximasse de uma prática discursiva dialógica promotora de interações verbais reflexivas que pudesse, em alguma dimensão, gerar condições para que os alunos explorassem regularidades e, mesmo intuitivamente, pudessem perceber a necessidade e a utilidade de se estabelecer generalizações. (CABRAL, 2017, p. 39).

Segundo as considerações de Cabral (2017), as UARCs são montadas passo a passo, sedo que a de primeira geração (UARC-1) será o “ponto de partida”, não necessitando ser um problema, como ocorre de um modo geral. A segunda e as demais UARCs de gerações superiores são criadas baseadas na UARC-1 e o aluno, em tese, potencializa sua capacidade de reconstrução conceitual em cada UARC construída.

1.3.2. A Sequência Didática e a idade mental da criança

Segundo Vygotsky (1998), a idade mental da criança pode ser medida a partir das tarefas que ela pode fazer sozinha, na qual ele denomina de Zona de Desenvolvimento Real, já as tarefas que a criança consegue fazer somente com a ajuda de uma pessoa mais experiente, denomina-se de Zona de Desenvolvimento Potencial. Entre estas duas zonas, há uma terceira zona: a Zona de Desenvolvimento Proximal (JÓFILI, 2002). Nota-se com isso que o uso da sequência didática está definido tanto com as teorias da Educação Matemática, Didática da Matemática e as teorias da Psicologia da Educação. No entanto, o presente trabalho tem como escopo investigar as potencialidades que o uso delas pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem de Progressão Aritmética.

1.3.3. Passos para uma Sequência Didática

É muito importante um planejamento para o sucesso da Sequência didática definindo o tema, fazendo a sondagem inicial, utilizar critérios para encandear as etapas estimar o tempo que dura a sequência, organizar a turma, flexibilizar as atividades e avaliar o que a turma aprendeu.

> Em termos de modelo estrutural de acordo com a concepção da Escola de Genebra para (DOLZ; NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, P.98) esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: *apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final.* (CABRAL, 2017, p.33)

1ª fase - Apresentação do projeto: Momento em que o professor apresenta aos alunos as atividades e os estudos que irão realizar.

2ª fase - Produção inicial: Os alunos, já informados sobre o projeto, irão expor o que sabem e pensam sobre o assunto, por meio de produção de texto, conversas, etc. A produção inicial trata-se de uma avaliação prévia e é através dela que o professor conhece as dificuldades dos alunos e obtém meios de estabelecer quais atividades deverão ser empregadas na sequência didática.

3ª fase - Os módulos: Atividades (exercícios e pesquisas) planejadas metodicamente, com a finalidade de desenvolver as capacidades do aluno. Os módulos devem ser direcionados às dificuldades encontradas na produção inicial dos alunos e visando a superação dessas dificuldades, devem propor atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma.

4ª fase - Produção final: Avaliação do que conseguiram aprender no decorrer da sequência didática. Comparação entre produção inicial e produção final.

1.3.4 A Sequência Didática no Brasil

As sequências didáticas estão ganhando cada vez mais espaços com a nova geração de materiais didáticos elaborados pelas editoras mais novas no Brasil, diferentemente das editoras tradicionais que, muitas vezes, apenas reformulam seu material editorial. Já essas novas editoras passaram a criar materiais inovadores utilizando materiais organizados entre si e com esses critérios. Como resultado tem acontecido uma melhoria no impacto educacional das soluções propostas.

Os professores de matemática devem problematizar o que ensinam buscando a compreensão dos alunos em meio a um processo contínuo de construção dos saberes. Os alunos devem ser levados a um processo de desequilíbrio e equilíbrio sobre o que pensam saber, pois só assim conseguirão perceber a complexidade dos objetos matemáticos estudados. Como já mencionado a engenharia didática é uma das abordagens tratadas na Didática da Matemática que se caracteriza como uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula. Ao se desenvolver uma pesquisa no campo da educação matemática tendo como princípio metodológico a engenharia didática, articula-se a construção do saber matemático a uma prática diante de uma sequência didática experimental, Ou seja, caracteriza a engenharia didática como sendo um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de uma sequência de ensino"

1.4 ANÁLISE MICROGENÉTICA

A deliberação do presente tópico se dá através de diversos autores, alguns renomados como o caso do seu principal precursor Vigotsky (1997b; 1998; 1999; 2009a; 2009b) que será estudado mais profundamente no tópico seguinte, tratando-se de uma interface de conhecimentos sobre qual a melhor forma de método investigativo experimental para uma abordagem crítica de um processo sistematizado, no que se faz interessante dentro da presente pesquisa, o contexto escolar para um determinado propósito.

Segundo abordagem histórica sobre a análise microgenética, Tomio, Schroeder e Adriano (2017) citando o trabalho de Vigotsky (2010), instituem o ano de 1920, na Rússia, como o ano em que a Psicologia evidenciara-se sobre duas diretrizes: psicologia causal explicativa da ciência natural, a qual abordava os processos psicológicos inferiores e a psicologia intencional descritiva que considerava de relevância os processos psicológicos superiores. A partir de então, Vigotsky foi o responsável por implementar uma terceira vertente que propunha uma união "da psicologia das ciências naturais com os processos superiores advindos da experiência cultural, baseado nos fundamentos de Karl Marx, como uma nova ciência que estudasse a psique humana" (TOMIO, SCHROEDER E ADRIANO, 2017 p. 32).

Estabelecendo uma união de diferentes vertentes baseadas em convívios e estudos sobre o entendimento imaterial pautado nas características presente.

A microgenética então, se expandiu como método investigativo na Europa e EUA (FLYNN; PINE; LEWIS, 2006). No Brasil, as pesquisas na área de Educação como teses, dissertações e artigos que utilizam o "método Microgenético" na forma de "análise microgenética" dos dados. Góes (2000) refere-se à abordagem metodológica microgenética como "análise microgenética" e define como:

> [...] uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 9).

Portanto, para efeito expressivo que denota a Análise Microgenética sobre a análise do autor acima, pode-se validar como uma associação que envolve meios desenvolvidos para determinado fim que são orientados, segundo o mesmo, "para os detalhes das ações; para as interações e cenários socioculturais; para o estabelecimento de relações entre microeventos e condições macrossociais." Assim, esta análise evidencia um estudo articulado em procedimentos que fazem jus "a inter-relação entre os microeventos e as condições macrossociais." (BARBOZA & ZANELLA, 2005 p. 194)

Gatti (2012) considera ainda que a partir dos anos oitenta se intensificou os cursos de pós-graduação, no Brasil e com isso se originaram os grupos de pesquisa, na área educacional para as sequências contínuas que acontecem entre sujeitos no cotidiano da escola, com estudos qualitativos e colaborativos. As autoras reforçam o diálogo dos pesquisadores em Educação com especialistas de outras áreas do conhecimento e práticas profissionais e o surgimento de novas modalidades de investigação, ampliando a área com outras perspectivas teórico-metodológicas.

Barboza & Zanella (2005) demonstram a eficiência deste processo a partir da seguinte consideração retirada da pesquisa que delibera sobre ação catadores na construção do conhecimento dentro desta análise, a ver:

> Através da análise microgenética foi possível refletir criticamente acerca do momento histórico vivido pela associação. Ao analisarmos a trama dialógica do encontro, recorreu-se a informações sobre a situação econômica, política, social e cultural vivida por estes sujeitos e pelas condições concretas da associação, considerando suas necessidades, dificuldades, impasses e perspectivas, bem como as angústias, sonhos, desejos e o movimento de potência e/ou impotência de ação dos catadores no que diz respeito à construção da sua cidadania. (BARBOZA & ZANELLA, 2005 p. 194-195)

O reconhecimento do âmbito de análises na educação tem ainda manifestado estudos reproduzidos de forma mais ativa nos últimos anos. Gatti (2012) exemplifica, em sua pesquisa, três entendimentos associados a intercadência de identificação dentro deste campo sob uma perspectiva de interesse científico na busca por exercer parte no campo das ciências humanas e sociais. São elas: “das denominações e conceitos utilizados, a própria ideia de campo e as questões de identidade e formas investigativas. Este último aspecto se liga aos caminhos da pesquisa em educação e às suas relações com o social. ” (GATTI, RBPAE - v. 28, n. 1, p. 13-34, jan/abr. 2012)

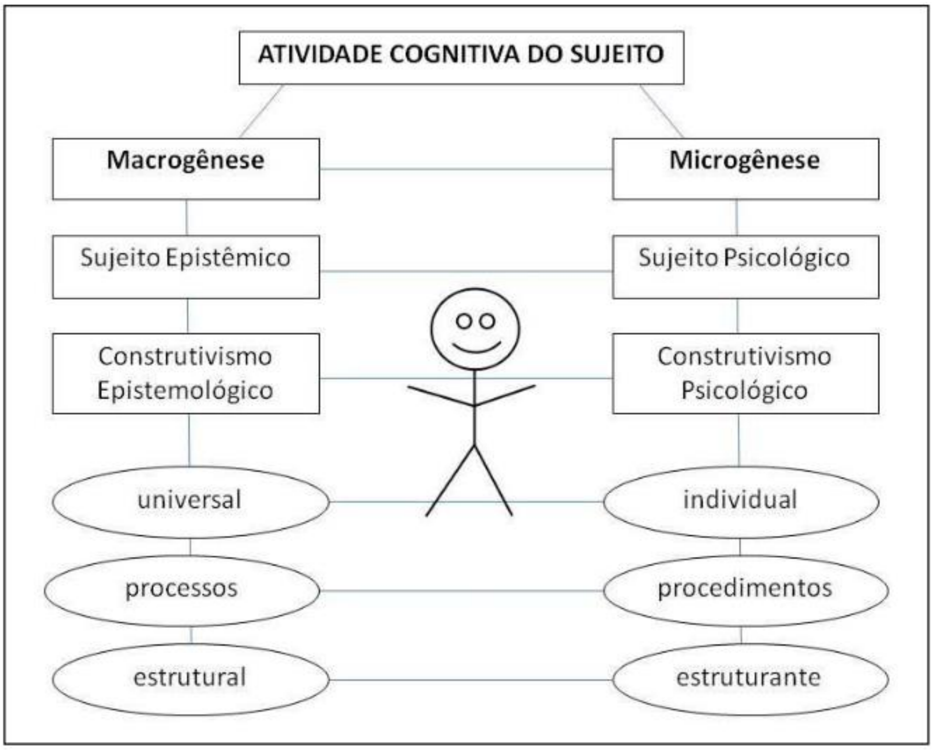
1.4.1 As contribuições metodológicas de Vygotsky e a análise microgenética

Para Vygotsky (1984), “o método é, ao mesmo tempo, pré-requisito e produto, o instrumento e o resultado do estudo”, (VYGOTSKY, 1984, p. 74). Trata-se de uma visão abrangente, à qual ele vincula a possibilidade de vários tipos de investigação e diretrizes metodológicas amplas que buscam atender a duas teses fundamentais: de que a gênese das funções psicológicas está nas relações sociais e de que a constituição do funcionamento humano é socialmente mediada, num curso de desenvolvimento que abrange evoluções e, sobretudo, revoluções. Essas teses distinguem suas proposições de outras teorias em que, de um lado, o “genético” é fragilmente relacionado ao meio social e, de outro, o desenvolvimento é concebido como um curso de etapas progressivas. [...]

Portanto, no que concerne ao método, à investigação não pode descolar-se de uma visão sociogenética, histórico-cultural e semiótica do ser humano, sendo que as proposições conceituais e metodológicas devem ser interdependentes e congruentes teoricamente. (GOÉS, Cadernos Cedes, ano XX, nº 50, Abril/00, p.12). Com isso, busca-se esclarecer a enunciação metodológica baseada em conceito como análises que apresentam-se mutuamente apropriada especulativamente.

Segundo Goés (2000), a definição de “micro” aponta para o espaço de tempo escolhido, pontuando a intencionalidade do pesquisador sobre o objeto a ser analisado e não ao significado conceitual relativo a “pequeno”, mas a um determinado tempo destacado e minuciosamente observado, analisado e transcrito. Para uma melhor compreensão, segue abaixo uma figura que esquematiza as abordagens macrogenéticas e microgenéticas da atividade cognitiva do sujeito: (CABRAL, Cristiane Pelisolli, 2010, p.57).

Figura 2 - Representação sobre a atividade cognitiva do sujeito



Fonte: Pelisolli, Cristiane (2010)

1.4.2. Análise do Discurso

Sabe-se que a linguagem é uma prática social indisponível nas civilizações humanas. Pois, a comunicação faz parte de nosso cotidiano, sendo a linguagem verbal e escrita a marca do progresso das sociedades ágrafas. A perfeita comunicação capacita o sujeito a agir, reagir e também interferir no meio social onde ele está inserido. Tal fato é notário na comunidade escolar, a qual tem como objetivo formar os cidadãos aptos para exercerem a sua cidadania. Porém, alguns fatores dificultam o processo de ensino- aprendizagem, sobretudo, no ensino das ciências exatas.

A disciplina “matemática’’ torna-se a grande vilã no que diz respeito aos alunos absorverem conhecimentos de certos conteúdos. Para solucionar tal problema pesquisadores dedicam suas vidas em pesquisas de novas metodologias e estratégias para obterem a solução e tornar a aprendizagem prazerosa da referida disciplina.” O ato-processo de ensinar e aprender é complexo [...]. Essa natureza complexa está consolidada no mar de subjetividade das interações sociais, das capacidades dos discursos comunicacionais existentes entre os humanos que, ainda desafia pesquisadores em todo o mundo’’ (CABRAL,2017, p. 9).

A obra acima citada discorre sobre Sequências Didáticas como uma nova metodologia para favorecer o ensino-aprendizagem da matemática. Esta, segundo Cabral, (op cit) por ser de natureza formal, abstrata e axiomática desafia os professores transmitirem alguns conteúdos de forma que os alunos consigam entender.

O impasse gira em torno do fazer pedagógico, que se por um lado, o professor trabalhar a matemática com o rigor científico como é a disciplina com sua formalidade, a clientela escolar demonstra mais dificuldades. E, se por outro lado, se o professor amenizar tal formalidade e priorizar os interesses de seus alunos, ele, o professor, naturalmente ferirá os interesses da matemática. Assim, a busca por um equilíbrio vislumbra á aplicabilidade da metodologia Sequência Didática, a qual facilitará o ensino da matemática de uma maneira mais eficaz, mais simples em que os alunos captem as abstrações de forma menos angustiantes, diferentes de como acontecem quando a disciplina é desenvolvida centralizada em métodos tradicionais.

Com base nessa visão de Cabral (2017), pode-se observar que em sua dissertação sobre o tema ele trata de valores antagônicos como interesses da matemática versos interesses dos alunos. Fato que traz um encadeamento de ideias, isto é, o texto estruturado em diferentes elementos com sentidos coesos e coerentes. Na organização do corpus, há segmentações claras e fundamentação teórica objetiva. Pois, seu discurso tem base em outros pesquisadores que abordam na temática, assim seu texto traz outra marca a polifonia, ou seja, a intertextualidade (relação do texto com outros textos).

O texto com um todo da obra é dissertativo argumentativo. A persuasão aparece em seu discurso quando Cabral (2017) coloca-se como um dos autores sociais que vivenciou e vivencia a experiência de sala de aula enquanto professor de matemática do ensino médio e ensino fundamental. Desse modo, outro elemento aparece nessa análise de seu discurso, as marcas identitárias ao empregar os verbos na primeira pessoa do singular como “(...) minha experiência profissional (...)” (CABRAL, 2017, p. 11). E “(...). Estou usando esse termo polissêmico (...). (CABRAL, 2017, p. 12). Com efeito, há maior legitimidade no discurso do referido autor, no que ficou subtendido a categoria de julgamento e compromisso com o processo de convergência metodológica tradicional para a inovação de um ensino eficaz da matemática e para isso “o professor precisa se fazer entender” (CABRAL, 2017, p. 9). Para tanto, o profissional precisa lançar mão de empréstimos de metodologia próprias de outras disciplinas como SD – Sequência Didática, esta utilizada em Língua Portuguesa. Pois,

> (...) As articulações estruturais dessas SD pretendem favorecer a criação de um ambiente no qual “(...) os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar”. (KFOURI; D’ AMBRÓSIO, 2006, p. 2 apud CABRAL, 2017, p. 10).

Na análise do discurso de Cabral (2017) percebe-se a formação discursiva do autor a partir do seu esclarecimento sobre a realidade sócio- histórica e ideológica, e que esta sua obra tem importante relevância social no meio acadêmico porque é um subsídio aos professores de matemática para que inovem sua postura em sala de aula.

Só assim a educação sistemática terá sentido na vida dos estudantes quando a escola cumprir o seu papel social ao mudar o velho paradigma sócio-histórico de alunos passivos para sujeitos autônomos e participativos de seus próprios conhecimentos.

2 SOBRE O ENSINO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Neste capítulo vamos apresentar uma investigação mais detalhada sobre o assunto, a visão de alguns pesquisadores com seus trabalhos acadêmicos, a proposta dos livros didáticos, a dificuldade encontrada pelos alunos egressos quanto a aprendizagem e a opinião dos professores de Matemática do Ensino Médio a respeito do ensino da Progressão Aritmética.

2.1 REVISÃO DE LITERATURA

Este tópico ressalta a revisão de literatura, através de levantamento bibliográfico, para que este trabalho possa está inserido no processo do ensino aprendizagem em Progressão Aritmética e seja de suma importância à formação cidadã.

2.1.1. Os Trabalhos dos Pesquisadores sobre Progressão Aritmética

O trabalho de César Augusto Sverberi Carvalho [s. d.], relata os resultados da primeira sessão de uma sequência didática aplicada para alunos de uma 1ª série do Ensino Médio. Esta sequência didática faz parte de uma pesquisa que tem por objetivo verificar se é possível dar condições para que alunos generalizem termos de uma progressão aritmética (PA) e, em caso afirmativo, se esta generalização permite que estes alunos construam uma fórmula para o termo geral. O artigo apresenta discussão com teorias que fundamentaram tal pesquisa e descreve a metodologia “Engenharia Didática”, descrita por Artigue (1996), que foi utilizada para elaborar, aplicar e analisar a sequência didática.

A metodologia do autor foi montada para que os alunos generalizam termos de progressões aritméticas, atividades baseadas em observação e generalização de padrões foram desenvolvidas e propostas. Para aplicação e análise de tais atividades, foram utilizadas fases da Engenharia Didática definidas por Artigue (1996). Machado (2002) conta que a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com uma dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise a priori, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino. Esta autora salienta que a engenharia didática se caracteriza também pelo registro dos estudos feitos sobre um caso em questão e pela validação da pesquisa, feita sobretudo internamente, pois baseia-se na confrontação entre uma análise a priori e uma análise a posteriori. O autor propõe uma sequência didática com atividades que contemplasse observação de sequências diversas para posterior investigação de uma regra de generalização dos termos de progressões aritméticas. Neste artigo ele apresenta as atividades e resultados da primeira sessão da sequência didática, composta por três atividades.

A Atividade 1 propiciou aos alunos observação de diferentes padrões de sequências. Segundo Lee (1996), a chave para o sucesso em atividades de generalização de padrões parece estar na observação e esta deve ser pertinente à questão proposta. Assim, considero que na maior parte das sequências houve observações pertinentes. As poucas observações não esperadas, como a identificação do ciclo como termo, não comprometem os resultados obtidos. Como a Atividade 2 tinha por objetivo possibilitar uma observação mais profunda e muitas duplas fizeram associações pertinentes, acredito que esse objetivo foi cumprido. A percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto de ideias, segundo Mason (1996). Como a atividade privilegiava a descrição das sequências, isto colaborou para que o aluno percebesse as sequências como objetos passíveis de várias interpretações. Para a terceira atividade, pode-se dizer que as duas primeiras fases do processo investigativo em generalização de padrões sugeridas por Herbert e Brown (1997) foram contempladas pelos alunos - a procura do padrão e o reconhecimento do mesmo. Por mais que não tenham construído fórmula, o pensamento algébrico se fez presente no raciocínio utilizado pelos alunos que identificaram um termo distante do primeiro termo, pois segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico não se expressa de uma única forma e pode se manifestar através da linguagem aritmética. Pode-se dizer então que esses alunos anteriormente citados atingiram a terceira fase do processo investigativo de Herbert e Brown (1997), correspondente à generalização do padrão proposto.

Em suas considerações finais o autor relata que a sessão inicial da sequência didática proposta, pode-se dizer que os alunos demonstraram facilidade em indicar o próximo termo de sequências diversas, pois ocorreram apenas quatro respostas não previstas, relativas a uma PA com razão negativa. Os alunos souberam observar e associar características a diversos tipos de sequências. No entanto, a característica de uma PA – diferença constante entre um termo e o sucessor – não foi compreendida por muitos alunos, tanto para a PA com razão positiva quanto para a PA com razão negativa. Os resultados dessa sessão indicam que o trabalho com progressões aritméticas deve contemplar a discussão de sua característica principal e a observação de vários tipos de sequências para confrontar as diferenças entre estas e as particularidades de uma PA. Poucos alunos conseguiram construir um esquema generalizador dos termos de uma PA, mas outros chegaram perto de construir um esquema. Isso indica que alunos conseguem generalizar termos de uma PA e esta generalização pode ser utilizada para levá-los à construção de uma fórmula para o termo geral.

Roney Rojer Ortiz Garcia (2013) apresenta este trabalho que trata da aplicação da progressão aritmética - P.A. na matemática financeira envolvendo uma simulação de financiamento de imóvel. Essa simulação será feita no site disponível pela Caixa Econômica Federal onde os alunos terão contato com termos técnicos, adiantando um conhecimento que adquiriria apenas na vida adulta quando iniciasse suas transações bancárias. Também conhecerão o sistema de amortização constante – SAC e relembrarão os significados de juro e taxa de juro. Aprenderão os conceitos de amortização e prestação e ao final, concluirão porque a disposição das prestações da tabela SAC determinam uma progressão aritmética e verão que para determinar prestações futuras ou a soma de todas as prestações há a necessidade de dominar o conhecimento sobre P.A.

Certamente, a maioria de nós precisará fazer um financiamento para comprar o primeiro carro ou o primeiro imóvel, pois, o crédito foi facilitado e o valor destes bens é alto em comparação com o salário mínimo vigente.

Para se candidatar a um financiamento de imóvel em um banco a pessoa deve conhecer as condições e prazos de pagamento para saber se ela tem condições de arcar com as prestações do financiamento. Antes de ir ao banco para fazer uma consulta o candidato pode fazer simulações em sítios do próprio banco que estão disponíveis na internet fornecendo informações sobre os valores a serem financiados, os prazos para quitar a dívida, além de outros detalhes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) estabelecem que:

> [...] para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (BRASIL.2002, p. 129)

Ao fazer uma simulação de financiamento, as pessoas ficam em geral confusas com certos termos que são utilizados.

Segundo o PCN+,

> [...] no ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL. 2002, p.111).

Roney coloca que uma boa parte da população vai financiar seu imóvel e isto não é ainda um fato para a maioria dos jovens alunos do Ensino Médio, mas certamente suas famílias estarão envolvidas em situações destes financiamentos.

É de se esperar que estes jovens que ainda não ingressaram no mercado de trabalho desconheçam muitos conceitos e termos utilizados nos simuladores de financiamento e provavelmente suas famílias não saibam justificar as formas, vantagens e desvantagens. Estes alunos do EM terão a oportunidade de perguntar, por exemplo, “O que significa FGTS?”, “Por que as parcelas diminuem?”, “Quanto eu pagarei no total pelo financiamento?”, entre outras indagações, tornando-os críticos para questionar abusos e analisar dentre muitas, a proposta mais vantajosa.

A proposta do autor, nesse trabalho é fazer um ensino destacando e utilizando tabelas do sistema de amortização constante para ser aplicada no Ensino Médio na qual o estudante deverá ser capaz de fazer simulações de financiamentos em um sítio de um banco nacional da internet e ser ainda capaz de justificar os procedimentos utilizados pelo banco com os conceitos de Progressão Aritmética.

A proposta de metodologia do autor é apresentada aos alunos do ensino médio após terem trabalhado o conceito de termo geral e soma de termos de uma progressão aritmética e apliquem o que aprenderam em uma situação que grande parte dos brasileiros se vê obrigado a passar: financiar um imóvel.

Roney propõe os seguintes recursos: Sala de tecnologia, projetor, internet.

A aula deve se passar na sala de tecnologia e o professor deve projetar o mesmo site que os alunos estão acessando. É muito importante para o rendimento da aula que a sala esteja preparada com o site www.caixa.gov.br aberto em todos os computadores e com o projetor preparado para o professor.

Esta aula deve servir apenas para estimular a curiosidade dos alunos e não deve ser comentado nada sobre progressão aritmética, deixando-os investigar por conta própria até que alguns concluam que as parcelas têm ligação direta com ela e esbocem uma resposta.

Este autor faz suas considerações finais, com a apresentação de uma proposta de atividade ao Ensino Médio envolvendo a progressão aritmética na simulação de um financiamento habitacional, mais especificamente, no estudo do sistema de amortização constante. Preparando uma aula para despertar sua curiosidade, levar o aluno a um problema real, e guia-lo para além de conhecer o financiamento do tipo SAC, entender o porquê de suas prestações estarem dispostas numa PA. Deparamo-nos com um vocabulário totalmente diferente do que somos acostumados, ampliamos nossas ideias sobre operações bancárias, e colocamos em prática tudo que tínhamos aprendido sobre progressão aritmética.

Sebastião Archila (2008) em seu trabalho “Construção do termo geral da Progressão Aritmética pela observação e generalização de padrões” escreve que tem sido amplamente divulgada o mau desempenho dos alunos do Ensino Médio em relação a questões de Matemática e especialmente da Álgebra. Por outro lado, os resultados de pesquisas, como os de Vale e Pimentel (2005) e de Machado (2006), entre outros, enfatizam a importância do trabalho com a observação e generalização de padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que pode auxiliar na superação desse problema. Essa situação e a sugestão levou o autor a investigar se alunos da segunda série do Ensino Médio frente a atividades de observação e generalização de padrões de sequências constroem uma fórmula para o termo genérico de uma Progressão Aritmética. Para a coleta de dados, e para isso elaborou uma sequência didática embasada nos pressupostos da Engenharia Didática, conforme descrita por Machado (2008). Sebastião realizou três sessões com a participação de alguns de seus alunos, todos voluntários. Para a conclusão levou em conta somente os resultados das análises do desempenho de 11 alunos que estiveram presentes em todas as 3 sessões. Os resultados lhe levaram a concluir que, embora os alunos tenham expressado em linguagem natural uma fórmula para o termo geral, isso não foi suficiente para converterem esse resultado para uma forma simbólica algébrica.

Sebastião cita que em seus 17 anos em que leciona na rede Pública Estadual de Ensino de São Paulo lhe fez perceber a grande falta de motivação dos alunos em aprender matemática e a insatisfação dos professores de matemática em ensinar. Pois, para alguns professores, os alunos são os culpados pelos péssimos resultados na aprendizagem matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental de 5a a 8a séries declaram que a álgebra é um ótimo instrumento para que os alunos desenvolvam suas capacidades de generalização e abstração, mas que a forma como os professores abordam esse ensino não garante a aprendizagem dos alunos.

Estas constatações me fizeram Sebastião ingressar em um curso de pós-graduação stricto sensu para melhor compreender os problemas do ensino de álgebra.

Dessa forma, decidiu elaborar uma sequência didática que possibilitasse aos alunos observar e generalizar padrões. Isso para investigar se alunos da 2a série do Ensino Médio, que ainda não tivessem trabalhado com Progressões Aritméticas PA, vivenciando essa sequência didática, desenvolveriam estratégias que os levassem a construir uma fórmula para o termo geral de uma PA.

A Metodologia de Sebastião expõe os artigos e documentos que analisou durante seu percurso na pós-graduação e que de algum modo influenciaram suas análises.

Perez (2006) elaborou e aplicou uma sequência didática envolvendo generalização de padrões a nove alunos voluntários de uma escola pública da rede estadual de ensino de São Paulo.

Dos nove alunos, dois eram da primeira série, quatro eram da segunda série e três, da terceira série do Ensino Médio. Então, ela formou uma dupla de alunos da primeira série, duas duplas de alunos da segunda série e uma tríade de alunos da terceira série.

As atividades foram aplicadas em duas sessões, cada sessão com a duração de 60 minutos.

A intenção de Perez foi investigar se alunos do Ensino Médio, por meio da generalização de padrões, conseguiriam resolver situações-problema.

A autora relata que houve grande envolvimento dos alunos, considerando que eram todos voluntários.

Segundo Perez (2006, p.114), “Por meio da análise dos resultados [...] os alunos pesquisados tiveram uma imagem mais positiva da matemática, tendo a oportunidade de desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos”.

A intenção desse trabalho não era de ensinar como resolver situações que envolvessem generalização de padrões, mas pela devolutiva dos problemas a autora relata que os alunos avançaram bastante os seus conhecimentos em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Almeida (2006) realizou uma pesquisa com cinco professores de escolas públicas. Foi realizada uma entrevista com cada professor, com a duração de 50 minutos cada. Eram cinco atividades com nível crescente de dificuldades.

O objetivo da pesquisa era investigar se professores do Ensino Fundamental de escolas públicas trabalhavam com atividades que envolvessem generalização de padrões e, se o fizessem, como procediam, quais estratégias de resoluções eles previam que seus alunos utilizariam.

Foram selecionados quatro professores: dois lecionavam apenas no Ensino Fundamental e dois, no Ensino Médio e Fundamental.

A pesquisadora realizou uma entrevista piloto com um quinto professor, visando aprimorar o roteiro.

Segundo relatos da autora, verificou-se diversidade no tempo de docência dos professores entrevistados, e os professores com menos tempo lecionavam apenas no Ensino Fundamental.

Dos cinco professores entrevistados, apenas o da entrevista piloto declarou que não tinha conhecimentos dos assuntos tratados na olimpíada de matemática de 2005.

A pesquisadora relata em sua dissertação que os professores que conhecem as olimpíadas e que participam de cursos de capacitação oferecidos pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo têm maior disposição em trabalhar atividades envolvendo generalização de padrões.

E também comenta que com as análises foi possível concluir que, em geral, os professores consideravam que seus alunos resolveriam todas as questões, mas declararam que eles resolveriam de forma intuitiva (contagem ou desenho).

Segundo Almeida:

[...] os professores trabalham senão de maneira sistemática ao menos esporadicamente com tema em sala de aula do ensino público. O esporádico é sugerido pelo fato de esperarem que, em geral, seus alunos resolvam de forma intuitiva os problemas e por dizerem que trabalhariam aquelas atividades em sala de aula de outra forma (ALMEIDA, 2006, p. 90).

A pesquisadora conclui dizendo que a intenção dos professores é levar o aluno a uma generalização na linguagem natural, sem se preocupar com uma linguagem mais refinada.

A leitura dessa dissertação fez Sebastião pensar se alunos da 2ª série do Ensino Médio da rede pública estadual de São Paulo conseguiriam generalizar a fórmula do termo geral das progressões aritméticas (linguagem algébrica).

Modanes (2003) elaborou e aplicou uma sequência didática a 32 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de São Paulo.

Foram elaboradas oito atividades envolvendo sequências de padrões geométricos.

A pesquisadora relata em sua dissertação que acredita que a partir das análises dos erros dos alunos é possível identificar algumas razões que tornam a aprendizagem da álgebra tão difícil.

O trabalho visava apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio das sequências de padrões geométricos.

Modanes buscava confirmar por meio dessas atividades a hipótese de que as sequências de padrões geométricos podem propiciar melhores resultados quando se procura introduzir nos alunos o pensamento algébrico.

As análises deixaram claro que nas primeiras atividades os alunos tiveram muitas dificuldades em trabalhar em dupla, pois apenas um aluno da dupla resolvia.

O trabalho de Márcio Macário da Cunha (2013) tem como objetivo fixar o conceito de progressão aritmética através de atividades envolvendo fractais famosos como, por exemplo, a curva de Koch, o floco de neve, o triângulo de Sierpinski e árvore bifurcada. Todos esses fractais são introduzidos de forma simples e detalhados. Outro objetivo não menos importante que o primeiro é o de oferecer uma motivação para o estudo de progressões em nível de ensino médio. Também é apresentada uma atividade prática envolvendo fractais, realizada através de dobraduras. Toda a teoria e atividades estão em linguagem simples e acessível aos professores e estudantes da educação básica. Antes das atividades estão os aspectos históricos e a fundamentação teórica sobre sequências, progressões aritméticas e geométricas e posteriormente de fractais.

Segundo Márcio, a Geometria Fractal permite a integração de vários campos da matemática e de outras ciências. A ideia de estudá-la deve-se ao fato de ser mais precisa do que a geometria euclidiana para representar formas da natureza tais como nuvens, montanhas, mapas, flores, árvores entre outras. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o lado experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais. Seu trabalho tem o objetivo principal de fixar e motivar o estudo de progressões aritméticas e geométricas através do estudo de fractais.

O ensino das progressões é atualmente trabalhado fora do contexto de funções, apenas utilizando fórmulas prontas e aplicando-as em problemas trabalhados ano após ano. Nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir de um contexto histórico e não tem ligação com a realidade dos nossos alunos.

O autor faz suas considerações finais deste trabalho com o objetivo principal de provocar nossos alunos com algo desconhecido, mas com a preocupação de utilizar conhecimentos matemáticos acessíveis aos do Ensino Médio.

Outro objetivo também foi o de fixar os conceitos de progressão aritmética e geométrica através de alguns fractais famosos como, por exemplo, curva de Koch, floco de neve, triângulo de Sierpinski e árvore bifurcada. O conceito Geometria Fractal é relativamente novo se comparado a outros conceitos da matemática. Em um mundo desprovido de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos. Ela também vem se mostrando uma ferramenta extremamente útil para muitas ciências como mineralogia, biologia, ecologia, economia, engenharia, geologia, na indústria entre outras. O autor espera ter contribuído de alguma forma a todos aqueles que dispuseram de tempo e paciência para a leitura de sua obra.

O trabalho de Jean Duarte Farias (2015) que é a “Inter-relação entre Progressão Aritmética e Função: Uma nova visão para o Ensino Médio” trata de uma proposta de abordagem das sequências, em especial, as progressões aritméticas para o ensino médio, em que procurou-se expor o tema de forma contextualizada e objetiva, realizando-se uma inter-relação das sequências com as funções, utilizando um pouco da História Matemática, exemplos do cotidiano e curiosidades matemáticas, fazendo também algumas interpretações geométricas do tema. Inicialmente faz-se uma abordagem dos conceitos necessários ao desenvolvimento do tema visando mostrar a relevância do assunto, fazendo uma coletânea dos assuntos que envolvem as sequências, tais como: definição de corpo, definição de corpo ordenado, definição de séries numéricas e propriedades, limite de sequências e propriedades e o conceito de funções com algumas propriedades. A seguir, estudam-se formas de buscar padrões nas sequências utilizando-se a sequência de Fibonacci e o número Euler e por fim, uma abordagem do assunto progressões aritméticas, fazendo uma relação com as funções, utilizando-se a divisibilidade, quadrado mágico, função quadrática, juros simples e o estudo da posição em função do tempo onde se relacionam as disciplinas de Matemática e Física. O texto segue como base as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio que prevê que o assunto não deve ser tratado como um tópico independente e evitar cálculos desnecessários utilizando apenas aplicações de fórmulas.

Esse autor afirma que a investigação de padrões não deve ficar restrita aos pesquisadores e às cadeiras acadêmicas das universidades, a escola pode sim ter o papel de construtor do conhecimento, fazendo que o aluno investigue, relacione conteúdos e assim desfazer a ideia de que a escola é um lugar para meros espectadores, mas sem abandonar o formalismo que a matemática necessita para a construção do conhecimento. Com isso, proporcionar um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a realidade e experiências dos estudantes, descobrindo relações, encontrando conexões e fazer generalizações dos temas abordados é um desafio aos docentes.

As progressões aritméticas e geométricas podem ser definidas como, respectivamente, função afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não reconhece as funções já estudadas. Devem se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem o simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”).

Apesar dessas orientações, o que se vê na realidade, na maioria dos livros didáticos para o ensino médio, o tratamento do assunto sequências e progressões como sendo um capítulo a parte do assunto funções. Assim, o presente trabalho busca trazer algumas opções para o docente trabalhar o assunto, tratando o tópico sequência relacionado ao conceito de funções.

Jean Duarte ressalta a importância da utilização das sequências a todo momento, seja na numeração das casas, nos dias da semana ou mesmo em sala de aula quando é feita a chamada dos alunos, todas essas sequências seguem um padrão para a sua construção. Uma forma de se introduzir o tema sequências, dentre as quais será destacado as progressões aritméticas, se refere ao estudo de padrões matemáticas, utilizando fatos que ocorrem no dia a dia do aluno, a história da Matemática, com o estudo de sequências conhecidas, aplicações financeiras vivenciadas pela sociedade e algumas curiosidades matemáticas.

Lembra, em seu trabalho, registros de sequências na história (Boyer), desde o Egito antigo, antes da era cristã. Com o problema das cheias do rio Nilo os egípcios perceberam que as inundações se davam em períodos iguais, o que representa uma sequência de um determinado fato.

Também relembra que no início do ensino médio são repassados os conceitos de conjuntos numéricos, intervalos na reta real, números reais, funções e sequências. Como o presente trabalho tem o objetivo de relacionar o conceito de funções ao de sequências, foram abordados alguns conceitos necessários para o desenvolvimento do mesmo.

Jean, em suas considerações finais, coloca que o ensino na disciplina de Matemática passa por grandes desafios, com a era da informação, uma simples abordagem formal de determinado conteúdo, pode ser vista em qualquer site que o discente procure, deste modo é papel do professor mostrar aos estudantes as várias maneiras de incorporar a matemática a sua vida diária e propor diferentes tratamentos de determinado tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar pensamentos e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em que quase todas as atividades humanas. No ensino médio procura-se preparar o educando para a vida, seja para a sequência dos estudos ou para ter a capacidade de resolver problemas cotidianos, assim sendo, desenvolver a habilidade de fazer observações e tomar as decisões mais adequadas e sensatas para sua vida.

Jean explica com coerência que a escolha do tema sequência se deu após uma auto crítica de como era trabalhado o tema. Se bem observarmos pouquíssimos são os professores que têm essa preocupação exposta pelo autor em trabalhar as inter-relações do tema com as funções, pois na sua definição esta relação fica clara. Inicialmente um formalismo matemático para embasamento do estudo das sequências, se fez necessário, e também o fato de não repetir processos de aprendizagem, onde há utilização de fórmulas e cálculos muitas vezes desnecessários e cansativos aos discentes.

2.1.2 A análise do Livro Didático

Eliane Aparecida Martins de Almeida (2013), apresenta neste artigo alguns resultados de uma pesquisa de mestrado que investigou como os livros didáticos propõem o estudo das Progressões Aritméticas. Os livros analisados constam no catálogo do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (2009) e, além disso, foram utilizados pelas escolas estaduais do município de Cuiabá em 2010. Como opção metodológica, a autora adotou uma pesquisa qualitativa, com ênfase em análise documental. Para realizar os estudos nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999) e na Teoria dos Jogos de Quadros de Douady (1992). A partir disso, verificamos se as praxeologias das obras condizem com as propostas dos documentos oficiais. E o que se observou é que nenhuma das obras analisadas é “completa”, de forma a contribuir efetivamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudos das progressões.

Para realizar a análise a pesquisadora optou por selecionar o capítulo referente às progressões aritméticas. Um dos motivos dessa opção decorre do mapeamento, o qual nos apontou que nenhuma pesquisa aborda em livros didáticos do Ensino Médio as Progressões aritméticas, ou seja, os estudos que tratam desse assunto não foram explorados suficientemente. Além disso, as progressões Aritméticas exerceram relevância para o desenvolvimento da Matemática e atualmente ainda continuam desempenhando funções importantes. Se o seu estudo for bem explorado, pode incitar no aluno a capacidade de conjecturar e generalizar. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) indicam a percepção de regularidades em situações-problema que conduzem à generalização como uma perspectiva para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Outra importância das Progressões

Aritméticas decorre das suas diversas aplicações. Entre elas, podemos citar o seu emprego em estudos da Biologia, da Botânica e da Matemática financeira. De modo geral, os estudos de Progressões Aritméticas articuladas ao de funções afim, caracteriza-se como um recurso alternativo para modelar algumas situações da vida real. Deste modo, as conexões de interesses pelas Progressões Aritméticas, e livros didáticos, nos conduziram a enunciar o problema da pesquisa de mestrado: Como os livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio propõem o estudo das Progressões Aritméticas? Tendo em vista a natureza do problema a ser pesquisado, adotou-se a abordagem qualitativa como metodologia, com análise documental. Para estudar o documento caracterizamos a forma de registro das Progressões Aritméticas empregando as Praxeologias de Chevallard (1999), que além de ser contemplado como referencial teórico também forneceu elementos para realizar os estudos em livros didáticos selecionados para esta pesquisa. A partir disso, articulamos as praxeologias presentes nos livros didáticos com as propostas dos documentos oficiais e os Jogos de Quadros propostos por Douady (1992). Neste texto apresentamos algumas sugestões dos documentos oficiais, uma breve explanação sobre a TAD, a Teoria dos Jogos de Quadros, os critérios para análise e alguns resultados da pesquisa.

Para realizar a análise a autora optou por selecionar o capítulo referente às Progressões Aritméticas. Um dos motivos dessa opção decorre do mapeamento, o qual nos apontou que nenhuma pesquisa aborda em livros didáticos do Ensino Médio as Progressões Aritméticas, ou seja, os estudos que tratam desse assunto não foram explorados suficientemente. Além disso, as Progressões Aritméticas exercem uma relevância para o desenvolvimento da Matemática e atualmente ainda continuam desempenhando funções importantes. Deste modo, as conexões de interesses pelas Progressões Aritméticas, e livros didáticos, lhe conduziu a enunciar o problema da pesquisa de mestrado: Como os livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio propõem o estudo das Progressões Aritméticas? A partir da elaboração do problema estabeleceu-se o objetivo central da pesquisa que foi investigar como os livros didáticos propõem o estudo das Progressões Aritméticas. Tendo em vista a natureza do problema a ser pesquisado, adotou-se a abordagem qualitativa como metodologia, com análise documental. Para estudar o documento a pesquisadora caracterizou a forma de registro das Progressões Aritméticas empregando as Praxeologias de Chevallard (1999), que além de ser contemplado como referencial teórico também forneceu elementos para realizar os estudos em livros didáticos selecionados para esta pesquisa. A partir disso, articulamos as praxeologias presentes nos livros didáticos com as propostas dos documentos oficiais e os Jogos de Quadros propostos por Douady (1992). Neste texto apresenta algumas sugestões dos documentos oficiais, uma breve explanação sobre a TAD, a Teoria dos Jogos de Quadros, os critérios para análise e alguns resultados da pesquisa.

Os critérios estabelecidos no processo de seleção dos livros foram: pertencer ao catálogo do PNLEM (2009); ser utilizado pelas escolas estaduais do município de Cuiabá que atendem o Ensino Médio. Desse modo, foram analisados quatro livros do primeiro ano do Ensino Médio: LD1 – Matemática: contexto e aplicações – Dante; LD2 – Matemática – Paiva; LD3 – matemática aula por aula – Xavier e Barreto; LD4 – Matemática completa – Giovanni e Bonjorno. Destacamos que ao referirmos aos livros empregamos as siglas LD1, LD2, LD3 e LD4.

Para Eliane Aparecida o objetivo central desta pesquisa foi investigar como os livros didáticos propõem o estudo do conteúdo sequências no primeiro ano do Ensino Médio. No contexto de desenvolver o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, os documentos oficiais destacam a importância de se trabalhar atividades sobre a resolução de problemas diversificados, que incentivam a elaboração de conjecturas, estímulo da observação de regularidades com a generalização de padrões, os quais são elementos essenciais do conhecimento matemático. Os documentos oficiais recomendam ainda que o estudo do conteúdo sequências deva dar ênfase na fórmula do termo geral. Apesar de não dizerem como, a autora acredita que não deveriam ser dadas as fórmulas prontas, mas sim oferecer diversas situações para que os próprios alunos as deduzam, contribuindo dessa forma para desenvolver o pensamento algébrico. Em geral, a parte conceitual é toda exposta nas obras, sem dar margem à criatividade dos alunos e tarefas que incentivam a observar regularidades, com o uso da linguagem algébrica para representá-las não são propostas com muita frequência no capítulo que trata das Progressões Aritméticas. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ indicam a necessidade de garantir uma abordagem das sequências vinculada à ideia de função. Essa articulação entre os conteúdos é proposta pelos LD1 e LD2 na parte conceitual. Porém, são raras as tarefas propostas que aproximam progressões e funções. Nesse aspecto, as obras desenvolvem um tópico sobre o assunto, o que representa um fator relevante para os estudos. De acordo com os documentos oficiais, essa é talvez a única oportunidade dos alunos ampliarem o conceito de adição para um número infinito de parcelas, aumentarem sua compreensão sobre a adição e ter a oportunidade de se defrontarem com as ideias de convergência e de infinito no Ensino Médio. Dentre os livros selecionados para esta pesquisa, observamos que o LD2 é o que mais apresenta equilíbrio entre os blocos de tarefas, com maior consonância com os documentos oficiais em relação ao capítulo das progressões. A obra propõe algumas tarefas que se aplicam a algumas situações.

Os estudos evidenciam que os LD1 e LD3 propõem um excesso de tarefas dos gêneros calcular, determinar, que se tornam repetitivas. As tarefas mais interessantes são apresentadas no final do capítulo, nas atividades adicionais e questões de vestibulares. Evidenciamos que o LD3 é o livro mais utilizado no município de Cuiabá, no entanto, não temos clareza da razão da escolha desse material. Convém destacar que não analisamos outros capítulos, mas conforme o catálogo do PNLEM (2009), tal obra não é a que possui um maior índice de aspectos positivos na síntese avaliativa. Constatamos que a atividade algébrica do capítulo referente às progressões ainda é a “letrista” tradicional. As técnicas utilizadas nas praxeologias pouco estimulam a investigação dos alunos, principalmente nos LD3 e LD4. Verificamos que embora apresentem uma diversidade de tarefas, as obras selecionadas para esta investigação atendem parcialmente as recomendações dos documentos oficiais no capítulo referente às progressões. Assim, consideramos como elemento caracterizador do pensamento algébrico, a percepção de regularidades, as tentativas de expressar a estrutura de uma situação-problema, com o processo de generalização. Nesse sentido, enfatizamos a importância de articular progressões com funções afins para modelar situações. As tarefas podem ser de contextos puramente matemáticos, ou podem ser vinculadas às situações da vida real. O importante é que elas sejam bem selecionadas, sejam instigantes, que se apresentem como um desafio aos alunos. Deste modo, esta pesquisa remete a reflexões a respeito das praxeologias expostas nos livros didáticos que podem influenciar nas praxeologias dos professores, bem como os possíveis efeitos sobre a aprendizagem dos alunos, o que acresce contribuições proeminentes para a Educação Matemática. Vale notar que os documentos oficiais apontam alguns caminhos que podem não ser os únicos. Então, cabe ao professor selecionar o livro que considerar mais adequado, segundo sua opinião e de acordo com os alunos que tem na escola, tendo em mente a necessidade de ao se planejar as aulas recorrer a mais de um livro didático.

2.2 PESQUISA SOBRE A DIFICULDADE DA APRENDIZAGEM DE PA DOS ALUNOS EGRESSOS

A presente pesquisa é descritiva, de cunho qualitativo e quantitativo apoiada em coleta de dados através de uma pesquisa bibliográfica e de outra realizada em campo com questionário estruturado. Além de observação em lócus. Optou-se pela metodologia da Didática da Engenharia porque possibilitou a experiência de se trabalhar teoria e prática simultaneamente, e de se obter os resultados a partir da análise microgenética.

> Pesquisa descritiva procura descobrir a frequência com que ocorre determinado fenômeno com a melhor precisão possível onde os dados são coletados em seu habit natural, não consta em documentos e precisam ser coletados e registrados ordenadamente para seu estudo. (CERVO, BERVIAN E SILVA, (2007, p. 60) *apud* KLSSMANN, 2013, p. 20).

A pesquisa de campo foi realizada no período de 21 a 25 de agosto de 2017, em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio na cidade de Belém, Estado do Pará.

No primeiro momento foi feita uma visita na escola onde fora apresentado o Projeto à direção e coordenação pedagógica. Em seguida, teve-se uma conversa informal com os professores de Matemática do Ensino Médio, e um deles, logo de pronto aceitou que três de suas turmas fossem nosso laboratório.

Em outro momento foi feita uma visita nas respectivas turmas, cujo objetivo foi de informar aos alunos sobre o projeto. Sobretudo, que a finalidade não era avaliá-los para "reprová-los" ou atribuir notas, e sim avaliar uma metodologia inovadora que os ajudaria a construir o seu próprio conhecimento com mais autonomia, ou seja, uma maneira de facilitar a aprendizagem dos assuntos trabalhados em Matemática. E para aguçar a curiosidade dos alunos, usou-se a contação da história da matemática, desde o seu surgimento até a evolução através do tempo. Em seguida foi dado um questionário para cada aluno para que levassem para casa e trouxessem na próxima aula.

> Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática; esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidades do homem, diante do contexto da época. Tal desenvolvimento ocorreu em diversas culturas e, portanto, através de diferentes pontos de vistas. (LORENZATO, 2010, p.107 *apud* REINALDO, 2017, p. 53).

Quanto à técnica e instrumentos de coleta de dados para esta pesquisa contamos com a aplicação de um questionário com 21 questões, que pode ser visualizado, na íntegra, no ANEXO B, sendo das mais usuais técnicas para obtenção de dados, o questionário é composto por um conjunto ordenado de perguntas, apresentadas e respondidas por escrito, e pode ser definido como uma técnica de investigação social composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado (GIL, 2008), é um instrumento de coleta de informação, utilizado numa Sondagem ou Inquérito.

O questionário tem bastante relevância para que este trabalho se concretizasse, pois, possibilita a investigação do fenômeno que se investiga, levando em conta os conhecimentos como: o perfil quanto à faixa etária da idade do aluno, a série que cursava o seu gênero, a escolaridade do pai e da mãe, a profissão dos pais ou responsáveis. Em seguida, havia perguntas em relação a sua vida estudantil e sua afeição em relação à disciplina Matemática, e se durante o período em que está como estudante já ficou em dependência alguma vez, com que frequência estuda Matemática, quem lhe ajuda com a disciplina como está o seu entendimento em sala de aula com relação a Matemática, a forma como vem sendo avaliado pelo seu professor e os recursos que o docente utiliza para a melhor fixação do conteúdo e o seu acesso aos recursos tecnológicos e em especial as suas dificuldades na aprendizagem de Progressão Aritmética (PA). Usou-se também a técnica de observação em lócus, enquanto procedimento possibilita o pesquisador coletar dados objetivos e subjetivos.

Com posse dos dados coletados, partimos para a análise dos mesmos usando a tabulação de dados, estes divididos em subgrupos, e para melhor compreensão mostrada em estatística (textos gráficos), faz uma descrição perfeita do fenômeno pesquisado e as variações encontradas, estas representadas com ilustrações. Além de análise textual, pois, de acordo com Lakatos (2003) o método de disposição de dados em tabelas facilita muito a análise.

2.2.1 Resultados da pesquisa dos Alunos

A coleta de dados foi feita com cem (100) alunos do 2º e 3º Anos do Ensino Médio, ou seja, alunos que já estudaram o assunto Progressão Aritmética, em uma escola pública estadual na cidade de Belém (Pará).

2.2.2 Perfil social dos alunos

Com base nos 100 alunos entrevistados verificamos que o percentual da faixa etária das idades dos alunos Egressos foi: Entre 16 e 18 anos igual a 84,10% e entre 19 e 20 anos igual a 15,90%. E quanto ao gênero desses alunos (100 alunos): 50% Masculino e 50% Feminino.

Com bases nos dados acima, percebe-se facilmente a defasagem série/idade de uma porcentagem representativa dos sujeitos pesquisados, fato resultante de repetências escolar e conforme informações verbais, na maioria das vezes a reprovação foi em matemática.

A escolaridade de seus responsáveis, a maioria absoluta, possui no máximo o Ensino Médio, sendo ele completo 39% e abaixo disso 55% para o pai ou responsável masculino e a mãe ou responsável feminino, 40% com Ensino Médio completo e 56%, abaixo disso. Ou seja, a, cerca de apenas 5%, em média dos seus pais foram além do Ensino Médio, refletindo com isso no desempenho dos filhos em sua vida escolar.

De acordo com uma pesquisa inédita no Brasil, filhos de pais analfabetos ou que não terminaram o Ensino Fundamental têm uma chance até 480% maior de ter baixo desempenho escolar quando comparados aos filhos de pais com curso superior completo. Segundo pesquisa de Goulart (2010) cuja explicação para a essa influência está no estímulo que as crianças recebem dentro de casa.

É importante ressaltar que nessa pesquisa de campo, dois alunos (considere Aluno 1 e Aluno 2) citaram a escolaridade de seus pais e profissão da seguinte maneira:

Aluno 1:

- Pai com Ensino Superior Completo, mas não exerce a função.
- Mãe com Pós Graduação Completa, profissão de Vendedora.

Aluno 2:

- Pai com Pós Graduação Completo, mas trabalha na área de Segurança.
- Mãe com Pós Graduação Completa e está desempregada.

Quando se fez a pergunta sobre a profissão ou ocupação de seu responsável masculino, os alunos entrevistados responderam conforme o quadro 1 descreve:

Quadro 1 - Profissão do Responsável Masculino
(continua)

Profissão/ocupação	**Quantidade**	**Frequência**
Agente de portaria	3	3%
Ajudante de pedreiro	2	2%
Aposentado	3	3%
Área da saúde	2	2%
Autônomo	9	9%
Auxiliar administrativo	2	2%
Bancário	1	1%
Comerciante	1	1%
Comerciário	11	11%
Contabilidade	1	1%
Desempregado	5	5%
Dono do lar	1	1%
Eletricista	1	1%
Empresário	1	1%
Feirante	3	3%
Garçom	2	2%
Gerente	2	2%
Marceneiro	2	2%
Mecânico	2	1%
Militar	4	4%
Motorista	2	2%

(conclusão)

Profissão/ocupação	Quantidade	Frequência
Não declarou	7	7%
Operário	6	6%
Pedreiro	13	13%
Pintor	3	3%
Porteiro	1	1%
Professor	3	3%
Secretário	1	1%
Segurança	3	3%
Técnico em eletrônica	1	1%
Vigilância sanitária	1	1%
Vendedor	1	1%

Fonte: Elaborado pelo autor (2017).

Na resposta quanto a profissão ou ocupação de seu responsável feminino, veja o quadro 2:

Quadro 2 - Profissão do Responsável Feminino

(continua)

Profissão/ocupação	Quantidade	Frequência
Aposentada	1	1%
Autônoma	5	5%
Auxiliar administrativa	3	3%
Cabelereira	2	2%
Comerciária	9	9%
Desempregada	5	5%
Empregada doméstica	32	32%
Funcionária pública	4	4%
Garçonete	2	2%
Gerente	1	1%
Não declarou	13	13%
Pedagoga	1	1%
Professora	2	2%

(conclusão)

Profissão/ocupação	Quantidade	Frequência
Promotora de venda	3	3%
Recepcionista	3	3%
Técnica em enfermagem	3	3%
Vendedora	11	11%

Fonte: Elaborado pelo autor (2017).

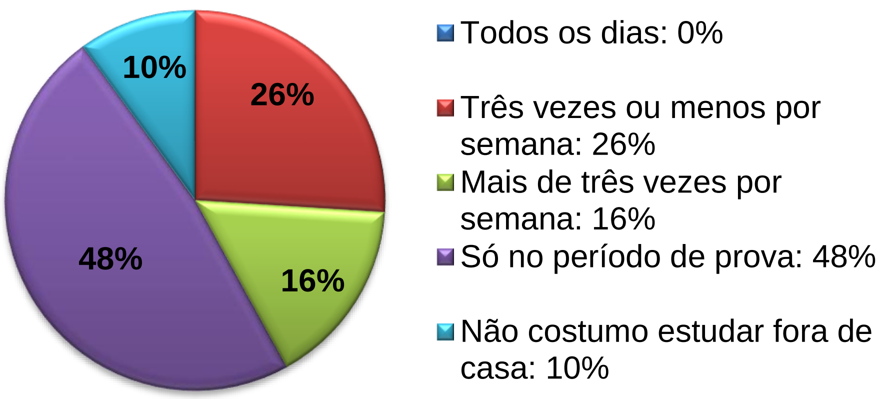
Os quadros 1 e 2, mostram que os responsáveis pelos alunos pesquisados, possuem empregos com baixo poder aquisitivo e isso evidencia na implicação do desempenho dos filhos na escola, conforme a citação exposta no perfil. (GOULART, 2010).

2.2.3 A dificuldade na escola

Em relação a dependência de Matemática, 34% dos alunos do 2º Ano já ficaram e 66%, não. Enquanto que os alunos do 3º Ano, 67% já ficaram e 33%, não.

O gráfico 1, mostra a frequência com que esses alunos costumam estudar Matemática:

Gráfico 1 - Frequência de estudo de Matemática fora de casa

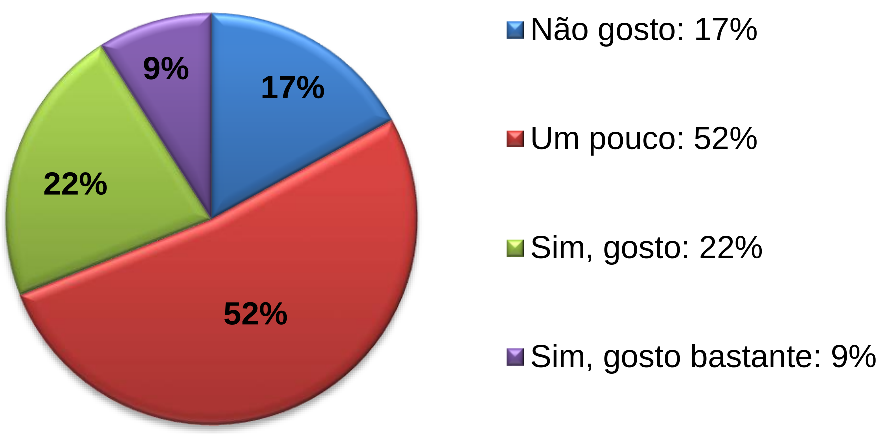


Fonte: Elaborado pelo autor (2017).

Eis aí um bom motivo pelo qual o aluno do ensino médio, tende a tirar somente a nota necessária para sua aprovação e assim deixando de fixar o conteúdo ministrado em sala. Observe que 48% (gráfico 1), estuda só para fazer aprova, o que pode ser um prejuízo futuro, fazendo com que boa parte deles parem antes mesmo da conclusão daquela etapa.

Em relação a afinidade que esses alunos egressos que foram entrevistados, o gráfico 2, mostra que:

Gráfico 2 - Afinidade por Matemática



Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Note que desses alunos, 69% não têm afinidade com Matemática (gráfico 2). Reis (2005), revelando que é fácil observar no contexto educacional a difícil relação entre aluno e Matemática. Afirma que, em todos os níveis de ensino, muitos enfatizam dizendo que não apreciam esta disciplina, e que até alunos com rendimento satisfatório revelam tal rejeição, que não têm entusiasmo ao resolver situações problemas de Matemática e que as aulas são entediantes. Revelam ainda não compreender o professor. Reconhecem que talvez, por ser tão rígida, provoca certa aversão, estabelecendo uma relação ríspida, às vezes até traumática que resulta em dificuldade, desinteresse e repúdio.

O quadro 3 mostra a resposta dos alunos ao serem questionados sobre quem mais lhes ajudava nas tarefas de Matemática.

Quadro 3 - Quem mais ajuda nas tarefas de Matemática

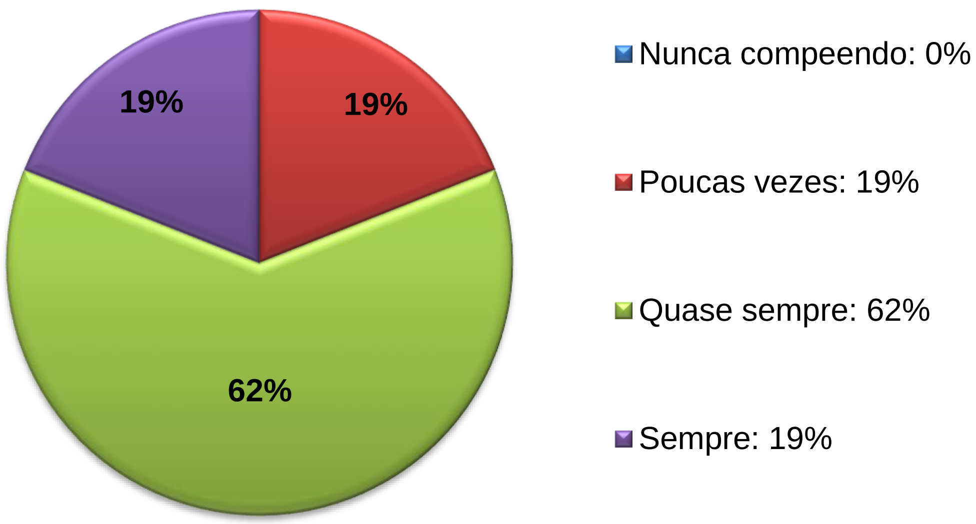
Resposta	Quantidade	Frequência
Professor particular	10	10%
Pai ou responsável (masc.)	10	10%
Mãe ou responsável (fem.)	3	3%
Irmão	9	9%
Costumo estudar sozinho(a)	60	60%
Outro	8	8%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

A maioria dos alunos de escolas públicas, tem pais com baixo poder aquisitivo, fazendo com que os mesmos não possam contratar professores particulares, para aprimorar seus conhecimentos. Verifique que (tabela 3), 60% costumam estudar sozinho.

Ao serem perguntados se compreendem as explicações dadas nas aulas de matemática, obtivemos os seguintes resultados:

Gráfico 3 - Compreensão nas explicações dadas nas aulas de Matemática



Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Segundo a pesquisa, quando se pergunta: quantos nunca compreendem as explicações de Matemática, o número de alunos é zero (ver gráfico 3), provavelmente pelo fato se se sentirem constrangidos, já que na pergunta referente ao gosto pela matemática, 17% responderam que não gostam (ver gráfico 3).

No quadro 4, temos as principais formas de avaliação que o professor de Matemática costuma solicitar, segundo os alunos entrevistados:

Quadro 4 - Formas de avaliação do professor de Matemática.

Avaliação	Quantidade	Frequência
Prova oral	0	0%
Prova escrita	85	85%
Auto avaliação	6	6%
Fichas de observação	0	0%
Produções no caderno	4	4%
Outra	5	5%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Nessa pesquisa, a forma de avaliar o aluno, mostra com clareza que é o método tradicional, 85% são avaliados com prova escrita (ver quadro 4).

O quadro 5, apresenta a resposta dos alunos de como costumam se sentir quando estão diante de uma avaliação em Matemática.

Quadro 5 - Sensação diante da Avaliação de Matemática

Resposta	Quantidade	Frequência
Entusiasmado	3	3%
Com medo	29	29%
Com raiva	0	0%
Tranquilo	25	25%
Preocupado	31	31%
Sinto calafrios	9	9%
Outro (nervoso, inseguro)	3	3%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Mesmo que 1/4 dos alunos sintam-se tranquilo, 60% sentem medo e preocupação, diante da avaliação de Matemática, o que nos leva a refletir que precisamos mudar esse quadro.

2.2.4 A Aprendizagem dos Alunos Egressos em Progressão Aritmética

É importante que o aluno perceba que as definições, as demonstrações e os encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (PCN, 2002, p.252).

Ao serem abordados sobre o modelo inicial de Progressão Aritmética dado pelo professor, 85% dos alunos entrevistados disseram que começa pela definição seguido de exemplos e exercícios, veja o quadro abaixo:

Quadro 6 - Modelo inicial de Progressão Aritmética dado pelo professor

Resposta	Quantidade	Frequência
Começando pela definição, seguida de exemplos e exercícios	85	85%
Começando com uma situação-problema para depois introduzir o assunto	10	10%
Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	2	2%
Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos	3	3%
Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas	0	0%
Outra metodologia	0	0%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

A Progressão Aritmética é uma sequência numérica, bastante interessante e que não necessita que inicie pela definição, como a maior parte dos professores de Matemática o fazem, verificamos que na pesquisa (quadro 6) há uma comprovação desse fato, mas sabemos que para motivar os alunos, poderíamos produzir várias situações problemas, sem ao menos citar a definição e sem dúvida alguma, deixaria os alunos muito mais motivados, para dar sequência ao assunto.

O quadro 7 mostra a resposta dos alunos da pesquisa sobre o método utilizado pelo professor para fixar o conteúdo estudado em Progressão Aritmética.

Quadro 7 - Método do Professor para fixar o conteúdo de Progressão Aritmética

Método	Quantidade	Frequência
Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos	67	67%
Apresentava jogos envolvendo o assunto	3	3%
Mandava resolver os exercícios do livro didático	21	21%
Não propunha questões de fixação	2	2%
Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver	7	7%
Propunha a resolução de questões por meio de softwares	0	0%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Observa-se que até aqui, o aluno responde de que forma o seu professor expõe suas aulas em sala de aula, e mais uma vez ocorre métodos tradicionais, ou apresenta uma apostila com exercícios ou utiliza o livro didático: 67% e 21% respectivamente (quadro 7).

No que se refere o grau de dificuldade em aprender Progressão Aritmética (PA), observe a resposta dos alunos que responderam à pesquisa, no quadro abaixo:

Quadro 8 **-** Grau de dificuldades em aprendizagem de Progressão Aritmética

(continua)

Assuntos de PA	Quadro de Dificuldades						
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil	Não lembro	Sem resposta
Identificação de uma PA, através da sequência	22%	32%	25%	17%	0%	2%	2%
Identificar a Razão da PA	12%	35%	30%	17%	2%	1%	3%
Definição de uma PA	5%	26%	30%	32%	4%	2%	1%

(conclusão)

Assuntos de PA	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil	Não lembro	Sem resposta
Classificação da PA	8%	23%	29%	25%	8%	5%	2%
Fórmula do Termo Geral da PA	2%	16%	34%	28%	12%	5%	3%
Reconhece as Propriedades da PA	0%	10%	26%	28%	15%	19%	2%
Interpolação Aritmética	0%	5%	16%	28%	13%	35%	3%
Fórmula da Soma dos Termos de uma PA:	1%	14%	35%	27%	8%	13%	2%
Resolver Problemas de PA:	3%	16%	33%	25%	12%	9%	2%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Pelo quadro 8, percebemos que a maioria dos alunos considera Progressão Aritmética acessível quando se trata de identificar uma PA, verificar sua razão e até mesmo entendem sua definição, em contrapartida nos demais assuntos, com envolvimento de fórmulas, propriedades e problemas de PA, demonstram maiores dificuldades na aprendizagem.

O quadro 9 logo em seguida o quadro 10 mostram o acesso à internet e os recursos tecnológicos utilizados pelos alunos pesquisados:

Quadro 9 - Acesso à internet

Acesso à internet	Quantidade	Frequência
Não possuo	7	7%
Sim, somente em casa	19	19%
Sim, somente pelo celular	42	42%
Sim, pelo celular e tenho WiFi em casa	32	32%

Fonte**:** Elaborado pelo autor (2017)

Quanto ao uso de recursos tecnológicos, quais dos seguintes equipamentos você costuma utilizar?

Quadro 10 - O uso de recursos tecnológicos

Recurso Tecnológico	Frequência de utilização				
	Sempre	Quase sempre	As vezes	Raramente	Nunca
Você utiliza o computador pessoal para fazer suas atividades escolares.	20%	16%	22%	20%	22%
Você faz pesquisas na internet através do computador.	22%	17%	24%	26%	11%
Você acessa internet no celular pessoal para fazer atividades escolares.	31%	24%	26%	9%	10%
Você utiliza redes sociais de relacionamento no celular	31%	25%	11%	3%	30%
Você utiliza aplicativos de Mensagens instantâneas	61%	16%	2%	7%	14%
Você tira dúvidas com o professor através de mensagens por celular	2%	2%	4%	11%	81%
Você utiliza calculadora científica para estudar matemática	4%	7%	13%	20%	56%

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Ainda é considerável o percentual de aluno que nunca utilizou o computador pessoal para fazer suas atividades escolares (22%), é o que mostra o quadro 10 ou pelo fato de não possuírem ou pela própria falta de interesse mesmo. Quanto a pesquisa através do computador, 11% responderam que nunca fizeram. Nessa pesquisa também notamos que o aluno ainda tem dificuldades de aproximação com o professor quanto aos recursos tecnológicos, veja que 81% dos discentes nunca tiraram dúvidas através de mensagens por celular.

2.2.5 Conclusões a respeito da pesquisa dos Alunos Egressos

Podemos observar com muita clareza, na pesquisa, o quanto se precisa fazer para resolver o problema das escolas públicas em nosso estado, é um trabalho árduo, mas temos a missão de nos comprometermos de não pararmos por aqui, afinal esse trabalho de pesquisa, foi muito gratificante e nos deu a noção e um alerta de uma possível falência da escola pública.

As dificuldades que foram relatadas pelos alunos, nessa pesquisa com relação a Matemática, com foco na aprendizagem das Progressões Aritmética, nos levam a pensar que devemos nos apresentar de uma maneira bastante eficaz no processo de ensino e aprendizagem, pois o objetivo dessa pesquisa foi de perceber as dificuldades que o aluno enfrenta na escola, em vários aspectos, mas principalmente em relação as metodologias nada convincentes que ainda são aplicadas em sala.

Como a aprendizagem é um processo cognitivo, cada pessoa tem à sua maneira própria de adequação. Em relação a construção do conhecimento na ação e interação com o meio, segundo Vygotsky (1989), o professor com sua grande capacidade, pode influenciar bastante na aprendizagem do aluno.

2.3 DIAGNÓSTICO DOS PROFESSORES

Neste capítulo, temos os resultados da consulta de 28 professores de Matemática na Educação Básica de escolas públicas e/ou privadas da Região Metropolitana de Belém-PA, em pleno exercício de suas funções ao que se refere o ensino das Progressões Aritméticas, tanto em sala de aula como fora dela. A coleta das informações foi obtida, através de um questionário (Anexo D), onde 25 professores responderam por correio eletrônico, via e-mail e apenas 3 de forma presencial. Queríamos também ressaltar, que pretendíamos registrar a opinião de mais professores, porém houve recusa por parte de alguns.

2.3.1 Descrição dos dados

Em relação a idade dos professores entrevistados, obtivemos os seguintes resultados:

Quadro 11 - Faixa etária dos Professores

Idade (em anos)	Frequência
De 26 a 30	22%
De 31 a 35	28%
De 36 a 40	25%
De 41 a 45	11%
De 46 a 50	7%
Acima de 50	7%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Considerando os resultados do quadro 11 e dividindo em duas faixas: de 26 a 40 anos e de 41 ou mais anos, o percentual da primeira faixa que equivale em 75% comprova o esperado, um número alto de professores mais jovens em atividade, ministrando aulas de Matemática na Educação Básica.

Dos 28 professores que foram consultados, 24 são do sexo masculino e 4 do sexo feminino, uma outra realidade notória em relação a disciplina Matemática.

Quanto ao tipo de escola (Municipal, Estadual, Federal ou privada), em que os professores pesquisados trabalham, veja o quadro 12:

Quadro 12 - Rede escolar

Tipo de Escola (Rede de Ensino)	Quantidade	Frequência
Somente Privada	2	7%
Somente Federal	0	0%
Somente Estadual	15	54%
Somente Municipal	2	7%
Privada, uma ou mais Pública	3	11%
Federal e Estadual	2	7%
Federal e Municipal	1	4%
Estadual e Municipal	3	11%
Federal, Estadual e Municipal	0	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

O quadro 12 mostra que a quantidade de professores que trabalham em uma única rede de ensino é grande, com, aproximadamente 68%. O que pode nos levar a perceber que o fato disto ocorrer seja por conta da disciplina Matemática comportar uma carga horária ainda mais alta do que já existia nas escolas.

Em se tratando dos professores entrevistados, todos possuem Licenciatura Plena em Matemática, visto que em dezembro de 1996, aprofundaram-se as diferentes propostas para a formação de professores. O objetivo era de elevar os níveis de qualidade da educação, havendo um grande empenho por parte do governo e de setores das universidades em fazer cumprir o parágrafo 40 do artigo 87 das Disposições Transitórias da Nova LDB que diz: “Até o fim da Década, somente serão admitidos professores habilitados em nível superior ou formados por treinamento em serviço" (BRASIL, 1996). O quadro 13, mostra a situação desses professores da pesquisa com relação a sua formação acadêmica:

Quadro 13 - Formação Acadêmica dos Professores

Formação Acadêmica	Frequência
Somente Graduação	7%
Especialização em andamento	11%
Especialização	4%
Mestrado em andamento	57%
Mestrado	14%
Doutorado em andamento	7%
Doutorado	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

A maior parte dos professores entrevistados (quadro 13) estão em uma formação continuada. No Brasil, a formação continuada de professores foi marcada por tendências que surgiram de diferentes concepções de educação e sociedade presentes na realidade brasileira. Para Fusari (1998) e Nóvoa (1992), as ideias de formação continuada são vistas como etapa de um único processo:

> [...] apontam para a necessidade de se avançar e criar um novo paradigma, no qual a formação do educador se efetive num continuum, processo em que a formação inicial, a formação contínua, a prática profissional, os saberes da profissão e a carreira profissional sejam elementos articulados entre si (FUSARI, 1998, p.538-9; NÓVOA, 1992).

A formação continuada, segundo a LDB 9394/96, tende a assegurar aos profissionais da educação o aperfeiçoamento da profissão por meio da intervenção institucional pública (municipal ou estadual), como rezam os artigos:

Artigo 87 (das disposições transitórias) - Cada município e supletivamente, o Estado e a União, deverá: Parágrafo III- realizar programas de capacitação para todos os professores em exercício, utilizando, também para isso, os recursos da educação a distância. Artigo 67 (dos profissionais da educação) – Os sistemas de ensino promoverão a valorização dos profissionais da educação, assegurando-lhes, inclusive nos termos dos estatutos e dos planos de carreira do magistério público (BRASIL, 1996).

Observa-se que nas últimas décadas, há um incentivo para os profissionais da educação continuar aprendendo sobre seu campo profissional e sua formação continuada passou a ser vista como uma das estratégias fundamentais para o processo de construção de um novo perfil profissional de professor, seguindo a linha de raciocínio com base, por exemplo, em Gatti (1997) e Freire (1996).

A respeito do tempo de atuação em sala de aula, a pesquisa mostra que a maioria dos professores de Matemática consultados possuem experiência com mais de 6 anos de sala de aula, como mostra a descrição do quadro 14:

Quadro 14 - Experiência em Sala de Aula

Tempo de Atuação em Sala de Aula (Ano)	**Frequência**
Menos de 1 Ano	7%
01 a 05	11%
06 a 10	21%
11 a 15	36%
16 a 20	14%
21 a 25	7%
26 a 30	4%
31 a 35	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Quanto ao assunto de Progressão Aritmética, os professores entrevistados disseram, em sua maioria absoluta (64,28%), que iniciam Progressão Aritmética pela definição seguido de exercícios, já cerca de 28% deles, com uma situação problema para em seguida iniciar o assunto, os que iniciam com jogos, são apenas 7,14% e nenhum deles utiliza qualquer outra metodologia, veja os resultados no quadro 15:

Quadro 15 - Método de Introdução a PA

(continua)

Método como inicia PA	**Frequência**
Pela definição seguida de exemplos e exercícios	64%
Com uma situação problema para depois introduzir o assunto	29%
Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o mesmo	7%

(conclusão)

Método como inicia PA	Frequência
Com jogos para depois sistematizar os conceitos	0%
Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas	0%
Outra metodologia	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Com relação à fixação de conteúdos estudados em PA, o recurso utilizado pelos professores da pesquisa é a utilização de uma lista de exercícios e o uso dos exercícios propostos nos livros didáticos com um alto percentual de 86% aproximadamente. Veja a disposição no quadro 16:

Quadro 16 - Método para fixar os conteúdos de PA

Como Costuma Fixar os Conteúdos de PA	Frequência
Apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos	50%
Apresenta jogos envolvendo o assunto	7%
Mandar resolver os exercícios do livro didático	36%
Não propõe questões de fixação	0%
Manda os alunos procurarem questões sobre o assunto para resolver	7%
Propõe a resolução de questões por meio de softwares	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Os quadros 15 e 16 mostram que, nesta pesquisa, nenhum professor utiliza ainda os métodos tecnológicos para ajudar na aprendizagem e fixação de conteúdos importantes de matemática como Progressão Aritmética, de acordo com Kenski (2007), existe um novo tipo de sociedade tecnológica que é determinada pelos avanços das tecnologias digitais de comunicação e informação.

> [...] crianças nascem e crescem manuseando as tecnologias que estão ao seu alcance. [...] A era da informação é fruto do avanço das novas tecnologias que estocam, de forma prática, o conhecimento e gigantescos volumes de informações. [...] Estas novas tecnologias permitem-nos acessar não apenas conhecimentos transmitidos por palavras, mas também por imagens, sons, vídeos, dentre outros. (VIANA, 2004, p. 11, 12)

Diante desta situação é que os professores precisam de formação para interagir com uma geração mais atualizada e mais informada, pois a sociedade tem avançado a cada dia.

O quadro 17, relata o grau de dificuldades dos alunos na aprendizagem do assunto Progressão Aritmética, na opinião dos professores que fizeram parte desta pesquisa:

Quadro 17 - Dificuldade de aprendizagem dos alunos em PA

Conteúdo	**Você ensinou?**		**Nível de dificuldade de aprendizagem**				
	Sim	**Não**	**Muito Fácil**	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito difícil**
Sequências Numéricas	74%	26%	28%	40%	27%	5%	0%
Definição de PA	100%	0%	16%	38%	28%	18%	0%
Cálculo da Razão da PA	100%	0%	18%	40%	32%	10%	0%
Classificação da PA	90%	10%	16%	34%	42%	8%	0%
Termo geral da PA	100%	0%	10%	36%	40%	14%	0%
Propriedades da PA	36%	64%	13%	37%	38%	12%	0%
Interpolação Aritmética	42%	58%	12%	36%	36%	16%	0%
Soma dos termos de uma PA finita	100%	0%	8%	30%	44%	16%	2%
PA de Segunda Ordem	25%	75%	2%	34%	38%	18%	8%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Fazendo uma comparação das respostas dos alunos egressos e dos professores entrevistados em relação ao Nível de Dificuldade de Aprendizagem apenas na definição, termo geral e soma dos termos de uma PA com os itens: Fácil, Regular e Difícil, apresentamos o quadro 18:

Quadro 18 - Comparação das respostas Aluno x Professor

Conteúdo	**Dificuldade de aprendizagem (Aluno x Professor)**					
	Fácil		**Regular**		**Difícil**	
	Aluno	**Professor**	**Aluno**	**Professor**	**Aluno**	**Professor**
Definição de PA	26%	38%	30%	28%	32%	18%
Termo geral da PA	16%	36%	34%	40%	28%	14%
Soma dos termos da PA	14%	30%	35%	44%	27%	16%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O quadro 18 nos mostra que apenas a definição de PA no item regular, onde o aluno egresso respondeu 30% e o professor 28%, houve aproximação nas respostas. Nos demais itens não há uma sintonia entre Aluno e Professor a respeito dos conteúdos abordados, por isso a necessidade de se encontrar métodos adequados para a aplicação dos conteúdos em sala de aula. Um dos problemas apontados por especialistas é a formação dos professores. Com um currículo considerado deficiente comparado a outros países, implica na baixa qualidade do ensino médio.

Segundo Rico (2015), a especialista em educação Paula Louzano, comparou o currículo brasileiro com os de oito países, entre eles, Estados Unidos, Portugal e Chile e concluiu que a formação dos professores é ruim, segundo ela, tem ausência de uma orientação mais específica que determine o que deve ser ensinado em cada disciplina e a cada ano.

> Segundo o governo, 270 mil professores da educação básica em todo o país estão frequentando cursos de formação e outros 50 mil recebem bolsas para melhorar as técnicas de ensino.
> “Como somos um país de dimensões continentais e como o nosso, as nossas ambições são ambições muito grandes, nós reconhecemos que precisamos continuar trabalhando nessa linha para avançar muito mais”, declara Romeu Caputo, da Secretaria de Educação básica do MEC.” (G1, 2013).

Não é difícil observar que, segundo a pesquisa do G1, ainda há um precariedade na formação de professores no que diz respeito à organização das próprias ideias afim de transpassar o seu conhecimento para os alunos, o que gera, inevitavelmente, uma repercussão negativa no estímulo proporcionado e consequentemente um desprazer em frequentar a escola.

Quanto ao grau de dificuldade das questões de Progressão Aritmética, proposta no questionário, o quadro 19 mostra a opinião dos professores, em quais questões os alunos apresentam maior dificuldades em resolver.

Quadro 19 - Dificuldades das Questões Propostas Segundo os Professores

QUESTÃO	**GRAU DE DIFICULDADE (FREQUÊNCIA)**				
	Muito Fácil	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito Difícil**
Questão 1 (ANEXO D)	0%	39%	50%	11%	0%
Questão 2 (ANEXO D)	11%	18%	71%	0%	0%
Questão 3 (ANEXO D)	4%	21%	64%	11%	0%
Questão 4 (ANEXO D)	11%	46%	43%	0%	0%
Questão 5 (ANEXO D)	0%	39%	61%	0%	0%
Questão 6 (ANEXO D)	0%	7%	43%	50%	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quando se trata de Progressão Aritmética, que é um assunto muito utilizado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o nível de questões, segundo os professores pesquisados é considerado entre fácil e regular, onde há uma concentração percentual muito alta, com exceção da questão 6 (ANEXO D) onde 50% considerou-a difícil, possivelmente por ser uma questão que apresenta um texto e isso reflete um desgaste ao aluno por conta de sua grande dificuldade de interpretação. Nas provas avaliativas tais como concursos e provas do governo que medem o nível de aprendizado, a matemática é uma das disciplinas mais temidas pelos alunos, pelo fato de eles apresentarem um mau desempenho e pouco domínio do conteúdo. Além do que, é caracterizada como uma disciplina abstrata devido ao fato de os estudantes terem muita dificuldade na aplicabilidade do dia a dia, dificultando ainda mais o processo de aprendizagem.

> Atribui-se à natureza complexa do conhecimento matemático o desenvolvimento de ansiedade e de atitudes negativas por parte dos estudantes em relação à Matemática. Observa-se que, de outra feita, esta mesma crença possa gerar uma atitude oposta: a de descaso e de racionalização diante do desinteresse do aluno em se apropriar de conhecimento tão hermético, onde a expectativa é de que poucos possam se sair bem. Neste sentido, não haveria razão para o aluno se preocupar com seu desempenho ou mesmo investir no aprendizado de Matemática esforço maior do que o mínimo exigido para aprovação. (CORRÊA; MACLEAN, 1999, p. 174)

Essa deficiência na interpretação de texto e falta de prática de leitura, infelizmente, é um dos maiores empecilhos no aprendizado de matemática.

3 A PROGRESSÃO ARITMÉTICA COMO CONTEÚDO

Neste capítulo, apresentamos os conteúdos de Progressão Aritmética com um rigor mais aprofundado em relação ao que é cobrado do aluno, mesmo sabendo que o nosso tema principal é a Sequência Didática voltada para o 1º Ano do Ensino Médio, mas também por entender que contribuirá bastante na formação do Professor. As referências utilizadas aqui foram: Boyer (1996), Lima (2011), Ávila (1999), Aranha e Rodrigues (1994) e Hazzan e Iezzi (2012).

3.1 UM POUCO DE HISTÓRIA DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Quando se trata de matemática, pensa-se imediatamente em números e este desde suas origens primitivas surgiram como forma de **Sequências**, o que nos leva a pensar na importância dessas sequências como contribuição para o avanço da matemática que temos hoje, pois sabemos que os conjuntos dos números naturais e inteiros, por exemplo, são nada mais que sequências numéricas. Segundo BOYER (1996), "O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica" e se tratando da progressão aritmética, o autor comenta da seguinte forma:

> Uma parte típica do *Aryabhatiya*[1] é a que trata de progressões aritméticas, e contém regras arbitrárias para achar a soma dos termos numa progressão e determinar o número de termos de uma progressão, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos. (BOYER, 1996, p. 144).

As sequências numéricas estão relacionadas com o processo de contagens e com os sistemas de numeração, por isso é comum encontrarmos documentos das civilizações antigas envolvendo vários tipos de padrões e sequência.

---

[1] *Aryabhatiya ou Aryabhatiyam, um tratado astronômico sânscrito, é a magnum opus e único trabalho sobrevivente conhecido do matemático indiana do século quinto, Ariabata.*

3.2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NUMÉROS REAIS

Para compreendermos a Progressão Aritmética primeiramente partiremos do conceito de Sequências.

Segundo Ávila(1999, p.16), uma *sequência numérica* $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é uma função f, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos, sendo $f\colon n \longmapsto f(n) = a_n$. Em que o número n é o índice e a_n o *n-ésimo* elemento da sequência, ou *termo geral*.

Esse autor também utiliza o exemplo da sequência dos números pares positivos, $a_n = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e ainda a sequência dos números ímpares positivos com $a_n = 2n - 1$, sendo $n = 1, 2, 3, \dots$ e ressalta que nem sempre o termo geral de uma sequência é dado por uma fórmula, embora sempre haja uma lei de formação que permitirá determinar o termo geral da sequência dada. Observe o caso das aproximações decimais por falta, de $\sqrt{2}$ que formam uma sequência infinita:

$a_1 = 1{,}4$

$a_2 = 1{,}41$

$a_3 = 1{,}414$

$a_4 = 1{,}4142$

$a_5 = 1{,}41421$

$a_6 = 1{,}414213$

... ...

Na sequência dos números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …; Ávila(1999, p.16) ressalta que não existe fórmula para o seu termo geral, mas que todos os termos estão determinados na condição de definição dos números primos.

Para Lima(2011, p.100), sequência numérica é definida da seguinte forma, *uma sequência de números reais* é uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, defenida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor de $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, serárepresentado por x_n e chamado de *termo de ordem **n***, ou *n-ésimo termo* da sequência.

Escreve-se com as seguintes notações:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- (x_n), para indicar a sequência x.

Esse autor ressalta para não confundir a sequência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos e sugere para este conjunto a notação $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

A função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva: pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$.

Segundo Lima, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ pode ser finito, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento, em que $x_n = a \in \mathbb{R} \,/\, n \in \mathbb{N}$.

Se a sequência (x_n) for injetiva, ou seja $m \neq n$ com $x_m \neq x_n$, então é uma sequência de termos *dois a dois distintos*.

A sequência $(\boldsymbol{x_n})$ é limitada quando o conjunto dos seus termos for limitado, neste caso, quando existem números reais **a**, **b** onde $a \leq x_n \leq b \,/\, n \in \mathbb{N}$. Com isso todos os termos da sequência são elementos do intervalo [a, b].

Todo intervalo [a, b] está contido num intervalo da forma [– c, c], com $c > 0$ (intervalo simétrico). Para ver isto, basta tomar $c = \max\{|a|, |b|\}$. Como a condição $x_n \in [-\ c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, vemos que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Conclui-se que se (x_n) é limitada se, e somente se $(|x_n|)$ é limitada.

***Observação* 1:** Quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada*.

Sequência limitada superiormente e inferiormente

- Sequência (x_n) é ***limitada superiormente*** quando existe um número real **b**, onde $x_n \leq \boldsymbol{b}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem a semi-reta $(-\infty, b]$.
- Sequência (x_n) é ***limitada inferiormente*** quando existe $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{a} \leq x_n$, ou seja, $x_n \in [\boldsymbol{a}, +\infty)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

***Observação* 2:** Verifica-se que uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente, ou seja:

$$\boxed{(\boldsymbol{x_n})\text{ é } \boldsymbol{limitada} \iff \boldsymbol{x_n} \leq \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x_n}}$$

3.2.1. Sequências Crescentes e Decrescentes

- $(\boldsymbol{x_n})$ será dita decrescente se $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $(\boldsymbol{x_n})$ será dita não crescente se $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $(\boldsymbol{x_n})$ será dita crescente se $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $(\boldsymbol{x_n})$ será dita não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemplo 1. Considere a sequência de Lucas[2] (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, …), definiremos do seguinte modo:

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, ..., x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall\, n \geq 3$

Como $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} > x_n$.

Portanto esta sequência é crescente.

Exemplo 2. Prove que a sequência $x_n = \frac{3n+2}{2n+1}$ é decrescente.

Solução: Vamos provar que $a_{n+1} - a_n < 0$, qualquer que seja n.

$$x_{n-1} - x_n = \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)+1} - \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{(3n+5)(2n+1)-(2n+3)(3n+2)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$x_{n-1} - x_n = \frac{6n^2+13n+5-6n^2-13n-6}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-1}{(2n+3)(2n+1)}$$

Portanto $x_{n-1} - x_n < 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então (x_n) é decrescente.

As sequências decrescentes, não crescentes, crescentes e não decrescentes são chamadas ***sequências monótonas***.

Teorema: *Toda sequência monótona e limitada é convergente*.

Apresentamos a demonstração baseada em Ávila(1999, p.26), para tanto Consideremos, para fixar as ideias, uma sequência não decrescente (a_n) (portanto, limitada inferiormente pelo elemento a_1). A hipótese de ser limitada significa que ela é *limitada superiormente*; logo, seu conjunto de valores possui supremo *S*. Vamos provar que esse número *S* é o limite de a_n.

---

[2] ***François Édouard Anatole Lucas****; (04 de abril de 1842 - 3 de outubro de 1891) foi um matemático francês. Lucas é conhecido por seu estudo da sequência de Fibonacci . As sequências relacionadas Lucas e os números de Lucas são nomeados após ele. (Da Wikipédia, a enciclopédia livre)*

Dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da sequência, com um certo índice *N*, tal que $S - \varepsilon < aN \leq S$. Ora, como a sequência é não decrescente, $aN \leq a_n$ para todo $n > N$, de sorte que $n > N \Longrightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$, que é o que desejávamos demonstrar.

3.2.2 Subsequências

Uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tem como *subsequência* de x, a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$.

Nota: Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$ ou $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x \mid \mathbb{N}'$.

É importante ressaltar que Lima(2011, p.102), ao falar de uma subsequência x', informa que não é uma sequência, pois seu domínio $\mathbb{N}'$ não é necessariamente igual a $\mathbb{N}$. Mas deve-se considerar x' como uma função definida em $\mathbb{N}$.

Escreve-se com as seguintes notações:

- $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$
- $x' = (x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, em geral esta é a mais utilizada, por ser mais simples.
- $x' = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$

Para melhor entendimento, apresentamos o exemplo seguinte:

Considere a sequência (x_n), dada por $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \dots)$.

Verifique que a partir desta sequência, podemos obter duas subsequências.

Observe que o $x_{2n-1} = -\frac{1}{2n}$ e $x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$, portanto a sequência dada admite as seguintes subsequências:

a) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8} \dots)$.

b) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots)$.

3.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Aqui, apresentamos o conteúdo de Progressão Aritmética de forma mais detalhada por acreditarmos ser importante fazer uma abordagem mais profunda, com o intuito de contribuir na formação do professor. Utilizou-se como referências as obras de Aranha e Rodrigues (Progressões Aritméticas e Geométricas - 1994), Hazzan, Samuel; Iezzi, Gelson – Atual (Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 4 – 8ª Ed. 2012)

Chama-se Progressão Aritmética (PA) a uma sequência (finita ou infinita) em que qualquer termo (a partir do segundo) menos o seu antecessor tem resultado constante denominada de razão (r) da PA. Ou seja,

$$a_{n+1} - a_n = r.\ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}.$$

3.3.1 Definição de Progressão Aritmética

Chama-se *progressão aritmética* (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Em que a e r são números reais dados.

São exemplos de progressões aritméticas:

a) A sequência formada pelos números naturais (1, 2, 3, 4, ...) é uma progressão aritmética, já que a diferença entre cada termo, a partir do segundo, com o anterior é constante e igual 1.
b) A sequência formada pelos números ímpares (1, 3, 5, 7, ...) é uma progressão aritmética de razão 2.
c) A sequência (0, – 2, – 4, – 6, – 8, …) é uma progressão aritmética de razão – 2.
d) A sequência (4, 4, 4, 4, 4, …) é uma progressão aritmética de razão *zero*.

Uma outra forma de definir uma progressão aritmética, seria que cada termo a partir do segundo, se obtém somando ao anterior a diferença r. Sendo assim, $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Uma fórmula de recorrência.

Concluímos por esta equação que, uma progressão aritmética é um caso particular de uma sequência recorrente, em que se conhecendo os valores de a_1 e r, fica perfeitamente determinada e podemos obter os demais termos, usando esta fórmula, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nota: Se em uma progressão aritmética, conhecermos apenas a razão, mas não o primeiro ou outro termo da mesma, não a tornará completamente definida. Essa condição só será satisfeita se conhecermos o primeiro ou qualquer outro termo e a razão, caso contrário, teremos para a equação de recorrência várias progressões aritméticas condicionadas ao valor inicial.

É importante ressaltar que em uma Progressão Aritmética

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

Temos que: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$

Os dois exemplos a seguir referem-se a definição de PA.

O primeiro da UFRGS. Os números que exprimem o lado, a altura e a área de um triângulo equilátero estão em PA, nessa ordem. A altura desse triângulo mede:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3} - 1$

c) $2(\sqrt{3} - 1)$

d) $4 - \sqrt{3}$

e) $4 + \sqrt{3}$

Para resolvermos esta atividade, devemos ter o conhecimento em Geometria Plana das fórmulas da altura e da área de um triângulo equilátero que são respectivamente, $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

Do problema dado, temos a seguinte PA:

$$\left(L, \frac{L\sqrt{3}}{2}, \frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Como o problema pede o valor da altura do triângulo, e para isso temos que achar o valor de L. Aplicando a ideia de razão, descrita na definição de PA, temos:

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} - L = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2L\sqrt{3} - 4L}{4} = \frac{L^2\sqrt{3} - 2L\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = L^2\sqrt{3} - 2L\sqrt{3} - 2L\sqrt{3} + 4L \Rightarrow L^2\sqrt{3} - 4L\sqrt{3} + 4L = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}L^2 + \left(4 - 4\sqrt{3}\right)L = 0$$

O que resulta em uma equação incompleta do segundo grau. Colocando o L em evidência para facilitar os cálculos, descobrimos que as raízes são:

$L_1 = 0$ e $L_2 = \frac{12-4\sqrt{3}}{3}$

Como a atividade é de Geometria, não podemos ter o valor de L como ZERO, então vale só L_2 como resposta.

Substituindo o valor de L, que foi encontrado, na fórmula da altura (h), teremos:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{12 - 4\sqrt{3}}{3}\right).\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12\sqrt{3} - 12}{6}$$

$$h = 2\sqrt{3} - 2 \ ou \ h = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Portanto a resposta é alternativa “C”.

O segundo, é solicitado a prova de que se (a^2, b^2, c^2) é uma progressão aritmética, então $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ também e progressão aritmética e reciprocamente.

Solução: Provemos primeiramente que se (a^2, b^2, c^2) é PA, então $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ também o é:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{a+c} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{b+c-a-c}{(a+c)(b+c)} \\ r_2 = \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a+c} = \dfrac{a+c-a-b}{(a+b)(a+c)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{b-a}{(a+c)(b+c)} \\ r_2 = \dfrac{c-b}{(a+b)(a+c)} \end{cases}$$

Como (a^2, b^2, c^2) é PA, temos que:

$r = b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow (b+a)(b-a) = (c+b)(c-b) \Rightarrow \frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a} = k$

(admitamos que $b + c \neq 0$ e $a + b \neq 0$ senão não existirá a sequência analisada)

Obtemos desta forma que $r_1 = \frac{k}{a+c}$ e $r_2 = \frac{k}{a+c}$. Então $r_1 = r_2$, logo concluímos que $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ é PA.

Provemos a recíproca:

Como $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ é PA, obtemos

$$r = \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} \Rightarrow \frac{b-a}{c+b} = \frac{c-b}{b+a} \Rightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Logo (a^2, b^2, c^2) é uma PA.

3.3.2 Fórmula do Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Demonstração: De acordo com a equação $a_{n+1} = a_n + r$, admitindo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão r, podemos escrever:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

$a_5 = a_4 + r$

$\dots\dots\dots$

$a_n = a_{n-1} + r$

Somando membro a membro as n−1 igualdades, teremos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n = a_1 + r + a_2 + ra_3 + r + a_4 + r + \cdots + a_{n-1} + r$$

Ou ainda,

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + r + r + r + r + \cdots + r$$

Note que “r” se multiplica $(n-1)$ vezes.

Somando $-(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{n-1})$ a ambos os membros, obtém-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$$

Tal fórmula é conhecida como o **termo geral** da progressão aritmética.

Teorema 1. Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão de r, então

$a_n = a_1 + (n-1).r$, ∀n ∈ ℕ.

Demonstração: Usaremos o princípio de indução para fazermos a demonstração. Para n = 1, temos $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r = a_1 + 0 = a_1$. Temos que para n = 1 a sentença é verdadeira.

Supondo que a fórmula seja válida para algum n > 1 ∈ ℕ, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1).r$

Mostraremos que é válida para n + 1:

Temos:

$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + [(n-1)+1].r = a_1 + [(n+1)-1].r$

Portanto, $a_n = a_1 + (n-1).r$ é válida ∀n ∈ ℕ.

As cinco atividades a seguir nos evidenciam diversas formas de aplicar e/ou manusear o termo geral:

1) Determinar o 19º termo da PA (2, 5, 8, ...)

Solução: Sabendo que $a_1 = 2$, $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 3$. De acordo com a equação $a_n = a_1 + (n-1).r$ temos: $a_{19} = a_1 + (19-1).r = a_1 + 18.r = 2 + 18.3 = 2 + 54 = 56$.

Logo, o 19º termo da PA é 56.

2) Encontre o trigésimo termo da PA, cujo sexto termo é igual a 12 e a razão 4.

Solução: Do problema tem-se que $a_6 = 12$ e r = 4, logo

$a_{30} = a_6 + (30-6).4 = 12 + 14.4 = 12 + 56 = 68$

Portanto, o trigésimo termo é igual a 68.

Observação. Algumas vezes em problemas de PA é conveniente trocar a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1).r$ por $a_n = a_0 + n.r$

3) Um carro popular novo custa R$ 40 000,00 em uma concessionária. Seu valor diminui R$ 2.000,00 a cada ano de uso. Qual será o valor desse carro após completar 6 anos de uso?

Solução: Seja n o número de anos de uso do carro. Neste caso o carro apresenta um valor inicial antes de ser usado e é conveniente que escrevamos $a_n = a_0 + n.r$, onde a_0 é o valor inicial do carro e a_n é o valor do carro após n anos de uso. Como o carro é desvalorizado em R$ 2.000,00 a cada ano de uso, teremos r = −2000. Assim,

$$a_n = a_0 + n.r$$

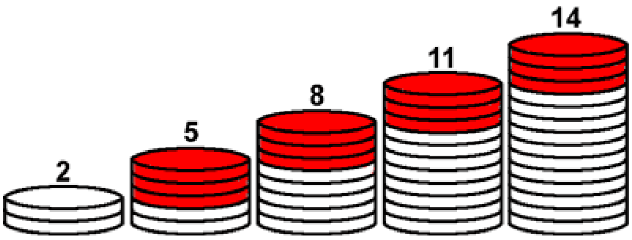
$$a_6 = 40000 + 6.(-2000)$$

$$a_6 = 40000 - 12000$$

$$a_6 = 28000$$

Portanto, após 6 anos de uso, o valor do carro será de R$ 28 000.

4) Observe a imagem:



O primeiro monte, contém 2 moedas. As moedas em destaque, correspondem ao ao que acresceu em cada monte em relação ao monte anterior, sendo esta quantidade denominada de razão (r). Considerando que o primeiro monte seja a_1, o segundo monte seja a_2 e assim sucessivamente. Quantas moedas deverá conter o trigésimo sexto monte, se novos montes forem formados com a mesma lógica da figura?

Solução: Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, temos:

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_{36} = 2 + (36-1).3$

$a_{36} = 2 + 35.3$

$a_{36} = 2 + 105$

$a_{36} = 107$

Portanto, no 36º monte deverá conter 107 moedas.

5) Prove que, se (a_n) é uma PA de termos positivos verifica-se a relação

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Solução: Vamos racionalizar cada parcela da soma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} \cdot \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} \cdot \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_{n-2}}+\sqrt{a_{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}} =$$

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{a_3-a_4} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2}-a_{n-1}} + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}$$

Como (a_n) é uma PA, logo $a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_2 + r$ e assim por diante. Com isso, temos:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_1-r} + \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_2-a_2-r} + \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_3-r} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2}-a_{n-2}-r} + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_{n-1}-r} =$$

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{-r} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}}{-r} + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-r} =$$

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}+\cdots+\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right) =$$

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)$$

Multiplicando agora por: $\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)$, fica:

$$-\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=-\frac{1}{r}\left(\frac{(\sqrt{a_1})^2-\left(\sqrt{a_n}\right)^2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=-\frac{1}{r}\left(\frac{a_1-a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=$$

Como $a_n = a_1 + (n-1).r$, resulta em:

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{a_1-a_1-(n-1).r}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=-\frac{1}{r}\left(\frac{-(n-1).r}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}\right)=\frac{\boldsymbol{n-1}}{\sqrt{\boldsymbol{a_1}}+\sqrt{\boldsymbol{a_n}}}$$

Portanto, se (a_n) é uma PA a relação é válida.

3.3.3 Classificação das Progressões Aritméticas

Classificamos as progressões aritméticas como:

a) Crescentes - são aquelas em que cada termo é maior que o anterior. Isso acontece quando r > 0.

Demonstração: De acordo com a Definição, uma sequência é crescente se, $a_{n+1} > a_n$. (Desigualdade d.1)

Da equação 2, para uma PA tem-se $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo esse resultado em d.1, temos:

$$a_n + r > a_n$$

$$a_n + r - a_n > 0$$

$$r > 0$$

Portanto, uma PA é crescente se e, somente se, r > 0.

b) Constantes - são aquelas em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior. Isso acontece quando r = 0.

Demonstração: Se cada termo é igual ao anterior, então

$$a_n + 1 = a_n$$

$$a_n + 1 - a_n = 0$$

Assim temos,

$$a_n + r - a_n = 0$$

$$r = 0$$

Portanto, uma PA é constante se e, somente se, r = 0.

c) Decrescentes - são aquelas em que cada termo é menor que o anterior. Isso acontece quando r < 0.

Demonstração: De acordo com a Definição, uma sequência é decrescente se, $a_{n+1} < a_n$. (Desigualdade d.2)

Para uma PA temos $a_{n+1} = a_n + r$, substituindo essa informação na desigualdade d.2, tem-se:

$$a_n + r < a_n$$

$$a_n + r - a_n < 0$$

$$r < 0$$

Portanto, uma PA é decrescente se e, somente se, r < 0.

Os dois exemplos a seguir, referem-se à classificação da PA.

1) Classificar as seguintes progressões aritméticas:

a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

b) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

Solução: Vamos calcular a razão da PA:

a) $r = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}$, PA crescente.

b) $r = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} = \frac{15}{12} - \frac{16}{12} = -\frac{1}{12}$, PA decrescente.

2) Classifique a progressão aritmética $(x^2 + 2, x^2 + x, \ldots)$:

Solução: Calculemos a razão desta PA.

$r = x^2 + x - (x^2 + 2) \Rightarrow r = x^2 + x - x^2 - 2 \Rightarrow r = x - 2.$

Logo, se: $\begin{cases} x > 2, \ a\ PA \text{ é } crescente \\ x < 2, a\ PA \text{ é } decrescente \\ x = 0, a\ PA \text{ é } constante \end{cases}$

Observação. Sejam "a" e "r" ∈ R. Considere $x_1 = a$, $x_2 = a + r$, $x_3 = a + 2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n-1).r$. Dessa forma a sequência (x_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo "a" e razão "r".

Se r = 0, então (x_n) é constante e, portanto, limitada. Logo $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Se r > 0, então (x_n) é crescente e, portanto, limitada inferiormente.

Se r < 0, então (x_n) é decrescente e, portanto, limitada superiormente.

3.3.4 Notações Especiais na Progressão Aritmética

a) Para 3 termos: $(x, x+r, x+2r)$ ou $(x-r, x, x+r)$

b) Para 4 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r)$ ou $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$, onde $y=\frac{r}{2}$.

c) Para 5 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$ ou

$$(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$$

3.3.5 Propriedades de uma Progressão Aritmética

a) 1ª Propriedade: Numa Progressão Aritmética finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a a_1+a_n. Sendo assim, em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k,\ a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_k+a_{n-k+1}$$

Demonstração: Considere a_k e a_{n-k+1} dois termos quaisquer equidistante dos extremos. Pela fórmula do termo geral da PA, temos:

$$\begin{cases} a_k=a_1+(k-1).r \\ a_{n-k+1}=a_1+[(n-k+1)-1].r=a_1+(n-k).r \end{cases}$$

e, portanto, $a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1).r+a_1+(n-k).r=$

$$=2a_1+[(k-1)+(n-k)].r=a_1+\underbrace{a_1+(n-1).r}_{a_n}=a_1+a_n\ ,$$

e deste modo fica demonstrado esta propriedade.

b) 2ª Propriedade: Em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos.

Simbolicamente, temos a $PA=(a_1, a_2, a_3, a_4,\ a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, sendo que: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n\geq 2$.

Demonstração: Pela definição de PA, sabemos que

$$\left.\begin{matrix} a_n-a_{n-1}=r \\ a_{n+1}-a_n=r \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n \Rightarrow 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ e, assim demonstra-se esta propriedade.

Observação: Esta propriedade pode ser escrita de um modo mais amplo por:

$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, onde a_{n-k} e a_{n+k}, são dois termos quaisquer equidistantes na PA.

c) 3ª Propriedade: Em uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots, a_n, \dots)$, onde a_p e a_q são dois termos quaisquer, é válida a seguinte propriedade:

$$a_n = a_p + (n - p).r$$

Demonstração: Tem-se da fórmula do termo geral que $a_n = a_1 + (n - 1).r$. Assim, $a_p = a_1 + (p - 1).r \Rightarrow a_1 = a_p - (p - 1).r \Rightarrow a_1 = a_p - p.r + r$

Substituindo este resultado na equação do termo geral, obtém-se: $a_n = a_p - p.r + r + (n - 1).r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + r + n.r - r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + n.r$, portanto, $a_n = a_p + (n - p).r$

d) 4ª Propriedade: Se $k, m, p\ e\ q$ são índices de termos quaisquer de uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots)$ não constante, então:

$k + p = m + q$ se e, somente se, $a_k + a_p = a_m + a_q$.

Demonstração: Considere r a razão da PA $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots)$, logo:

$a_k + a_p = a_m + a_q \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + (k - 1).r + a_1 + (p - 1).r = a_1 + (m - 1).r + a_1 + (q - 1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow (k - 1).r + (p - 1).r = (m - 1).r + (q - 1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow (k - 1 + p - 1)r = (m - 1 + q - 1).r \Rightarrow$

$\Rightarrow k + p - 2 = m + q - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + p = m + q,$

como queríamos demonstrar.

Para entendermos melhor essas propriedades, apresentamos os seguintes exemplos:

1) Determine x e depois escreva a PA no seguinte caso: $(x;\ 2x - 2;\ 20, \dots)$.

Solução: Aplicando a 2ª propriedade de PA, temos:

$$2x - 2 = \frac{x + 20}{2} \Rightarrow 4x - 4 = x + 20 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

Logo a PA é $(8, 14, 20, 26, \dots)$.

2) Numa PA, $a_6 = 10$ e $a_{15} = 37$, então a razão dessa PA é:

Solução: Sabemos que na PA dada a_{15} e a_6, podem ser considerados a_n e a_p, então aplicando em $a_n = a_p + (n - p).r$, temos:

$a_{15} = a_6 + (15 - 6).r \Rightarrow a_{15} = a_6 + 9.r \Rightarrow 37 = 10 + 9.r \Rightarrow 9.r = 27 \Rightarrow r = 3.$

Portanto, a razão dessa PA é 3.

3.3.6 Interpolação Aritmética

Em uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são denominados extremos e os demais termos são chamados de meios.

Interpolar k meios aritméticos entre os extremos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, consiste em determinar quais k números devem ser inseridos entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ de forma que se tenha uma PA de $k+2$ termos.

Desta forma podemos considerar $a_1 = \alpha$ e $a_{k+2} = \beta$.

De um modo geral, se desejamos inserir k meios aritméticos entre os extremos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, teremos a PA $(\alpha, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \beta)$. Pelo termo geral da PA, temos: $\beta = \alpha + (k+1).r$, onde $r = \frac{\beta-\alpha}{k+1}$.

Segue um exemplo para o melhor entendimento de interpolação, inserir 6 meios aritméticos entre −3 e 18.

Solução: Sabendo que k = 6, A = −3 e B = 18 a PA ficará totalmente determinada quando encontrarmos o valor da razão, assim:

$$r = \frac{18-(-3)}{6+1} = \frac{21}{7} = 3$$

Inserindo os 6 meios aritméticos teremos a PA (−3, 0, 3, 9, 12, 15, 18).

3.3.7 Soma dos termos de uma PA finita

Dada a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Demonstração: Somando membro a membro as igualdades, temos:

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$(I)\ 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Sabemos que numa Progressão Aritmética, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$, portanto na expressão (I), temos: $2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\ vezes}$,ou seja,

$2S_n = n.(a_1 + a_n)$ e finalmente:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Demonstração por indução finita:

Para n = 1, temos:

$S_1 = \frac{(a_1+a_1).1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$ (verdade!)

Supondo que $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ seja verdadeira para algum $n > 1 \in \mathbb{N}$, faremos a verificação da validade para $n + 1$. Temos que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + 2.a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

Como $a_{n+1} = a_1 + n.r$, teremos

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + (a_1 + n.r) + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_1 + a_n.n + n.r + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n + 1) + n(a_n + r) + a_{n+1}}{2}$$

Por outro lado, sabemos que $a_{n+1} = a_n + r$, assim:

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n+1) + n.a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

Portanto, $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Também podemos chegar a fórmula da soma dos termos de PA finita de um modo bastante prático.

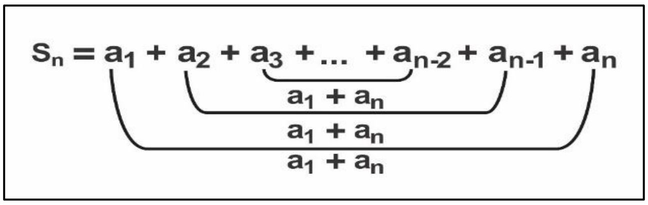
Vamos considerar a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. E representar por (S_n) a soma dos termos dessa PA utilizando uma anedota (Boyer, 1996, p.343) bem conhecida sobre Carl Friedrich Gauss[3] ainda criança, por volta dos seus 10 anos. Seu professor de matemática querendo manter a classe ocupada, mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem (1+2+3+⋯+99+100) e que deixassem seus trabalhos em sua mesa assim que terminassem a tarefa, Gauss imediatamente apresentou sua ardósia afirmando que já havia terminado. O professor sem fazer muito caso observava os demais que trabalhavam em grande intensidade. Finalmente o professor verificou os resultados e a ardósia de Gauss era a única correta com a resposta 5050.

Gauss com apenas dez anos, talvez não soubesse, mas havia calculado mentalmente a soma dos termos da progressão aritmética (1 + 2 + 3 + ⋯ + 98 + 99 + 100). Note que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98$ e a soma de todos os demais equidistantes é igual a 101.

Baseado nessa lógica, percebemos facilmente que em PA, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, observe a representação abaixo.

---

[3] Famoso físico e matemático alemão (1777-1855) - conhecido como o Príncipe da matemática, contribuiu muito em diversas áreas da ciência. Em 1801 lançou uma das suas mais importantes publicações: *Disquisitiones Arithmeticae*, um livro dedicado a teoria algébrica dos números.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O que nos faz perceber imediatamente que:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}$$

Assim, temos a fórmula da soma dos “n” termos de uma PA:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

$S_n = soma\ dos\ n\ termos$

$a_1 = primeiro\ termo$

$a_n = n - ésimo$

$n = número\ de\ termos$

Apresentamos três exemplos, para uma melhor compreensão da soma dos termos finitos de uma PA:

1) Um médico recomenda ao seu paciente em tratamento que tome uma dose diária de certo medicamento. A dosagem será administrada da seguinte forma: no primeiro dia tomará 100 mg do medicamento, no segundo dia 95 mg, no terceiro 90 mg e assim será a cada dia de tratamento, reduzindo a dosagem de 5 mg em relação ao dia anterior.

Sabendo que o tratamento durou uma semana, qual foi a dosagem total ingerida por esse paciente?

Solução: Para esta questão precisamos encontrar a soma da quantidade em mg de medicamento tomada pelo paciente durante sete dias. Nesse caso temos uma PA de 7 termos, onde $a_1 = 100$ e $r = -5$, assim teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow a_7 = 100 + 6.(-5) = 100 - 30 = 70$$

Aplicando na fórmula da soma dos termos de uma PA, temos,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_7).7}{2}$$

$$S_n = \frac{(100 + 70).7}{2}$$

$$S_n = \frac{170.7}{2}$$

$$S_n = 595$$.

Logo, ao final do tratamento, o paciente terá tomado $595\,mg$ do medicamento.

2) (FGV /2017/RJ) Os números naturais, a partir do 1, foram escritos em ordem e arrumados em duas colunas, A e B, como no quadro a seguir:

	A	**B**
Linha 1	1	2
Linha 2	3,4	5,6
Linha 3	7, 8, 9	10, 11, 12
Linha 4	13, 14, 15, 16	17, 18, 19, 20
Linha 5	21, 22, 23, 24, 25	26, 27, 28, 29, 30
Linha …	…	…

Na linha n, o conjunto dos elementos da coluna A será representado por L_nA, e o da coluna B, por L_nB.

a) Mostre que o último elemento de L_nA é um quadrado perfeito.

b) Calcule a soma dos elementos de $L_{10}B$.

Solução:

a) Note que o último elemento da linha 4, pode ser escrito por:

$a_4 = 2(1 + 2 + 3) + 4 = 16$, assim como o da linha 5 por: $a_5 = 2(1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 25$. Então, o último elemento de L_{nA} será escrito por: $a_n = 2\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) + n$. Assim, $a_n = 2\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + n = n(n-1) + n = n^2 - n + n = n^2$, portanto o último elemento de L_{nA} é sempre um quadrado perfeito.

Solução:

c) Seguindo a lógica de L_nA, o último elemento de $L_{10}A$ é $10^2 = 100$. Assim $L_{10}B = (101, 102, 103, \dots, 110)$, logo

$S_{10} = \frac{(101 + 110).10}{2} = \frac{2110}{2} = 1055$

Assim, a soma dos elementos de $L_{10}B$ é 1055.

3) Um saco contém 1000 balas de menta. Retiram-se 10 balas na primeira vez, 15 na segunda, 20 na terceira, e assim sucessivamente.

a) Determinar quantas balas sobrarão na caixa após a 15ª retirada.

b) Seguindo esse padrão, no máximo, quantas retiradas podem ser feitas?

Solução:

a) Montamos a seguinte PA (10, 15, 20, 25, …), vamos determinar quantas balas serão retiradas na 15ª vez:

$a_{15} = a_1 + 14.r = 10 + 14.5 = 10 + 70 = 80$

Calculando a soma de todas as retiradas até a15ª, temos:

$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}).15}{2} = \frac{(10 + 80).15}{2} = \frac{90.15}{2} = 45.15 = 675$

Portanto, se no saco haviam 1000 balas e foram retiradas 675, restarão 325 balas.

b) O número máximo de retiradas é o "n" da fórmula da soma dos termos da PA. Completando o que temos em $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$, sendo que:

$a_n = a_1 + (n-1).r = 10 + (n-1).5 = 10 + 5n - 5 = 5n + 5$, fica:

$$1000 = \frac{(10 + 5n + 5).n}{2}$$

$$2000 = (5n + 15).n$$

$$5n^2 + 15n - 2000 = 0$$

$$n^2 + 3n - 400 = 0$$

Resolvendo a equação, teremos $n_1 = -21{,}55$ e $n_2 = 18{,}55$. Sendo "n" um número natural, então devemos analisar $n = 18{,}55$ e isso nos dá duas possibilidades: $n = 18$ ou $n = 19$. Seguindo o padrão, se forem feitas 19 retiradas não terão balas suficientes no saco. Portanto a quantidade máxima de retiradas será 18.

3.3.8 Proposições importantes na Progressão Aritmética

Proposição 1. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n.

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento do termo geral da PA. Como $a_n = a_1 + (n-1).r = a_1 + n.r - r \Rightarrow a_n = r.n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$ o polinômio é de grau 1, se $r = 0$ o polinômio é de grau menor que 1.

Portanto, se (a_n) é uma progressão aritmética, onde $a_n = an + b$, então $a = r$ e $b = a_1 - r \Rightarrow a_1 = a + b$.

Observação. $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ é uma restrição da função quadrática em n.

Proposição 2. A soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por um polinômio em $\boldsymbol{n}$.

Demonstração: Analisemos o desenvolvimento de S_n, assim,

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1).r].n}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r).n}{2} = \frac{2na_1 + n^2r - rn}{2} = \frac{n^2r + 2na_1 - rn}{2}$$

Logo,

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$

Se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio de grau 2 em $\boldsymbol{n}$, sem termo independente, se

$r = 0$, então S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Portanto, se $S(n) = an^2 + bn$ é a soma n primeiros termos de uma progressão aritmética, então $a = \frac{r}{2}$ e $b = a_1 - \frac{r}{2} \Rightarrow b = a_1 - a \Rightarrow a_1 = a + b$.

3.3.9 Progressões Aritméticas de segunda ordem

Dada a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, \dots)$. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária, ou seja, de razão não nula r.

Teorema. Uma sequência de números reais (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau, na variável n.

Demonstração: Considerando que a sequência dada (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por $(Y_n) = (\Delta x_n) = (x_2 - x_1;\ x_3 - x_2;\ x_4 - x_3; \dots;\ x_n - x_{n-1}; \dots) = (y_1;\ y_2;\ y_3; \dots;\ y_n; \dots)$ é uma progressão aritmética não-estacionária. Assim, $(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$ é a soma dos "$n - 1$" primeiros termos da progressão aritmética (Y_n) e que será representado por um polinômio do segundo grau, na variável n. Se simplesmente somarmos todos os termos da sequência (Y_n), teremos:

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_n - x_1$$

$$x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$$

Assim, o termo geral da sequência (x_n) também será expresso por um polinômio do segundo grau, na variável "$\boldsymbol{n}$". E se esse termo geral da sequência numérica (x_n) for expresso por $x_n = an^2 + bn + c$, com a, b e c constantes reais, então seu operador (Δ) será:

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, que substituindo, teremos:

$$\Delta x_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) \Rightarrow$$

$$\Delta x_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c \Rightarrow$$

$$\Delta x_n = 2an + a + b$$

De forma geral, Δx_n é expresso por um polinômio do primeiro grau, na variável $\boldsymbol{n}$. Logo, Δx_n é uma progressão aritmética não estacionária e, por definição, (x_n) é uma **Progressão Aritmética de Segunda Ordem.**

Os dois exemplos a seguir reforçam o entendimento de uma PA de segunda ordem.

1) A sequência $(a_n) = (2, 6, 12, 20, 30, 42, \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois os números formados pela diferença entre cada par de termos, forma uma nova sequência.

A saber: $(\Delta a_n) = (4, 6, 8, 10, 12, \dots)$ que é uma progressão aritmética de razão 2.

2) Qual o 20º termo da sequência $(3, 6, 12, 21, 33, \dots)$?

Solução: Na prática, apliquemos a fórmula: $a_n = a_1 + S_{n-1}$, onde a_1 é a primeira ordem e S_{n-1} a segunda ordem.

Achando a PA de segunda ordem, temos: $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$. Para acharmos o 20º termo da sequência, vamos encontrar o S_{19} da PA:

$a_{19} = a_1 + 18.r \Rightarrow a_{19} = 3 + 18.3 \Rightarrow a_{19} = 57$, então,

$$S_{19} = \frac{(3+57).19}{2} \Rightarrow S_{19} = \frac{60.19}{2} \Rightarrow S_{19} = 30.19 \Rightarrow S_{19} = 570.$$

Aplicando em $a_n = a_1 + S_{n-1}$, fica: $a_{20} = 3 + 570$, portanto:

O vigésimo termo da sequência é 573.

Importante: Veja a relação de uma PA com as funções de grau **n**.

Dada a PA (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...), vamos substituir os termos dessa PA em cada função abaixo e em seguida fazer a diferença entre os termos obtidos, até que se alcance valores constantes.

Primeira função: $f(x) = 3x + 2$, substituindo os valores, temos:

$$f(3) = 3.3 + 2 = 11$$

$$f(5) = 3.5 + 2 = 17$$

$$f(7) = 3.7 + 2 = 23$$

$$f(9) = 3.9 + 2 = 29$$

$$f(11) = 3.11 + 2 = 35$$

$$f(13) = 3.13 + 2 = 41$$

....

Sequência gerada: (11, 17, 23, 29, 35, 41, ...), diferença entre os termos: (6, 6, 6, 6, 6, ...). Portanto a função do 1º grau gerou uma PA de primeira ordem.

Segunda função: $f(x) = x^2 - 3$, substituindo os valores:

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

$$f(5) = 5^2 - 3 = 22$$

$$f(7) = 7^2 - 3 = 46$$

$$f(9) = 9^2 - 3 = 78$$

$$f(11) = 11^2 - 3 = 118$$

$$f(13) = 13^2 - 3 = 166$$

....

Sequência gerada: (6, 22, 46, 78, 118, 166, ...), diferença entre os termos:

(16, 24, 32, 40, 48, ...), diferença dos termos:

(8, 8, 8, 8, ...), logo a função do 2º grau gerou uma PA de segunda ordem.

Terceira função: $f(x) = x^3 + 2$, substituindo os valores:

$$f(3) = 3^3 + 2 = 29$$

$$f(5) = 5^3 + 2 = 127$$

$$f(7) = 7^3 + 2 = 345$$

$$f(9) = 9^3 + 2 = 731$$

$$f(11) = 11^3 + 2 = 1333$$

$$(13) = 13^3 + 2 = 2199$$

....

Sequência gerada: (29, 127, 345, 731, 1333, 2199, ...), diferença entre os termos:

(98, 218, 386, 602, 866, ...), diferença dos termos:

(120, 168, 216, 264 ...), diferença entre os termos:

(48, 48, 48, ...), a função do 3º grau gerou uma PA de terceira ordem.

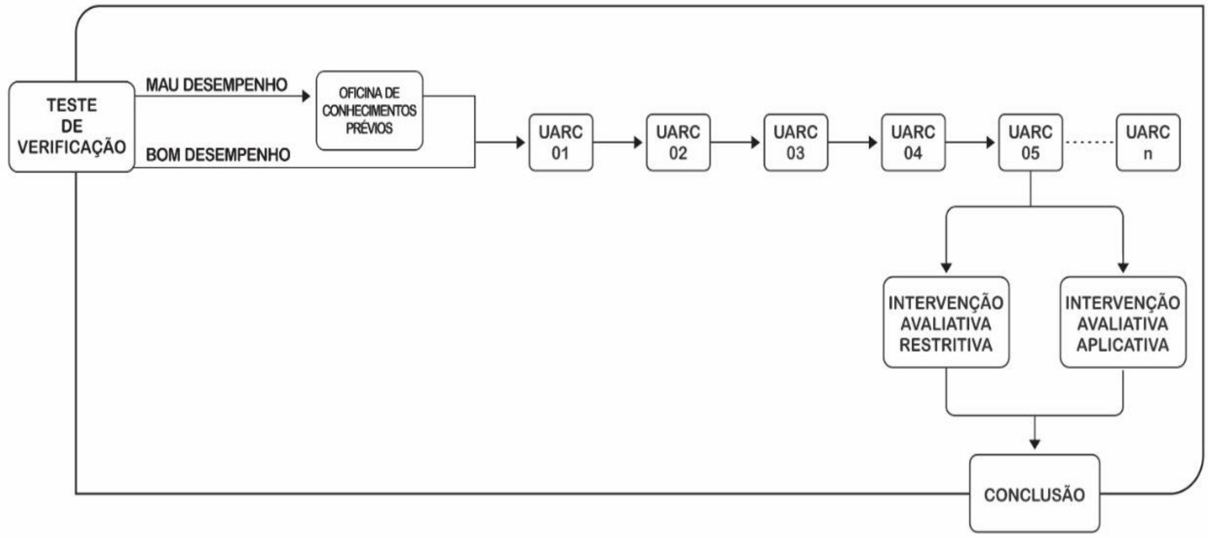
Percebemos, então que quando substituímos os termos de uma PA em uma função de grau “n”, a PA gerada é de ordem “n”.

4 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Neste capítulo vamos apresentar uma sequência didática com cinco atividades proposta para ensino das Progressões Aritméticas, elaborada e estruturada no modelo proposto por Cabral (2017), onde cada atividade será intitulada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) e em cada uma dessas UARCs será definido o título, o objetivo e os procedimentos para sua devida realização. Para ajudar no entendimento dessas atividades, faremos um teste (Apêndice B) para verificação do conhecimento dos alunos e em seguida a aplicação de uma oficina de conhecimentos básicos, no conteúdo das sequências numéricas, como pré-requisitos para um melhor entendimento do assunto investigado. Ao finalizar as aplicações das UARCs, faz-se a aplicação da Intervenção Avaliativa Restritiva que aferem a aprendizagem do aluno nos aspectos fundamentais do saber matemático e a Intervenção Avaliativa Aplicativa ligadas a Resolução de Problemas de Aplicação aos diversos contextos reais para finalmente concluir o processo.

O diagrama a seguir, mostra os caminhos de nossa Sequência Didática.

Figura 3 – Processo da Sequência Didática de Progressão Aritmética



Fonte: Elaborado pelo Autor, 2019.

4.1 DIAGNÓSTICO INICIAL

Na aplicação da sequência didática para o ensino das Progressões Aritméticas, sugerimos ao professor que irá utilizá-la, a atenção para alguns conhecimentos elementares com operações básicas com os números reais, para compreender sequências numéricas e conseguir um melhor entendimento em Progressão Aritmética. Assim, propomos um teste contendo oito questões com esses pré-requisitos, que pode ser consultado no Apêndice B. Cada aluno, receberá uma folha contendo as questões e terá um tempo, aproximadamente, de 50 minutos para a entrega.

Se o professor observar que os alunos ao qual se submeteram ao teste, obtiveram um resultado satisfatório, a eles poderá ser aplicada, de imediato, a sequência didática, caso o resultado tenha demonstrado um baixo rendimento desses alunos, deverá ser aplicada uma oficina desses conhecimentos básicos, para um melhor nivelamento e em seguida a aplicação da sequência didática.

Importante: Cada professor é livre para aplicar o teste ou mesmo a oficina da maneira que lhe seja mais conveniente, com sua sala de aula.

4.2 METODOLOGIA E CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Considerando a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), elaboramos uma sequência didática composta de 05 atividades, visando o ensino das Progressões Aritméticas no modelo proposto por Cabral (2017), a cada atividade, ou seja, a cada UARC, deve ocorrer uma intervenção formalizante pelo professor, a fim de fixar as ideias (re)construídas e em seguida, proceder uma intervenção avaliativa, com a intenção de tornar o ensino das Progressões Aritméticas mais atrativo, com a finalidade de minimizar as dificuldades de aprendizagem apontadas pela literatura sobre Progressões Aritméticas. Esta Sequência Didática será aplicada em uma escola pública, na cidade de Belém do Pará. Claro, respeitando todas as fases da Teoria das Situações Didáticas.

4.3 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A mesma consta de 05 UARCs estruturadas da seguinte forma:

- UARC 1: SEQUÊNCIA NUMÉRICA REGULAR
- UARC 2: RECONHECENDO UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA
- UARC 3: CLASSIFICAÇÃO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

- UARC 4: TERMO GERAL DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA
- UARC 5: PROPRIEDADES DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

4.4 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta fase da pesquisa, produzimos uma sequência didática no estudo da Progressão Aritmética que será aplicada a um grupo de 18 alunos que cursam o 1º ano do Ensino Médio na Escola Pública, em Belém, Estado do Pará.

4.4.1 UARC 1 – Sequência Numérica Regular

Título: Sequência numérica regular a partir de sua lei de formação
Objetivo: Reconhecer uma sequência numérica regular e sua lei de formação
Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.
[Intervenção Inicial 01] Observando a sequência de números em destaque:

0; 2; 6; 14; 30; 62; …

Responda as questões de [I_r – 01] até [I_r – 05] dadas abaixo.

[I_r – 01] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação desta sequência?
( ) Sim
( ) Não

[I_r – 02] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o
R: ____
____
____

[I_r – 03] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?
( ) Sim
( ) Não

[I_r – 04] Baseado na sua resposta do item [I_r – 02], qual número ocuparia o lugar imediatamente após o elemento 62?

R: ____

[I_r – 05] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na [I_R – 02]:

R: ____

[Intervenção Inicial 02] Iniciando com o 1° elemento escrito na tabela, preencha os espaços destinados aos outros elementos, a partir do 2° e até o sexto elemento, obedecendo o procedimento a seguir:

"multiplique por 3 o elemento anterior e adicione duas unidades".

Tabela dos elementos da sequência obtida

1° elemento	2° elemento	3° elemento	4° elemento	5° elemento	6° elemento
1					

Responda as questões de [I_r – 06] e [I_r – 07].

[I_r – 06] Nesta sequência, há entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 07] Apresente a expressão matemática que represente o padrão descrito na tabela:

R: ____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 1

Sequência Numérica Regular a partir de sua Lei de Formação é uma sequência numérica que admite um termo qualquer (termo geral, a_n) a partir de relações entre seus termos e sua posição, obedecendo uma determinada lei.

Análise a priori: Com esta UARC 1, esperamos que os alunos possam ser capazes de desenvolver as sequências através da lei que lhe foi informada e possa encontrar a regularidade da sequência.

4.4.2 UARC 2 – Reconhecendo uma Progressão Aritmética

Título: Reconhecimento de uma Progressão Aritmética (PA)
Objetivo: Reconhecer quando uma sequência numérica é uma Progressão Aritmética e formalizar o seu conceito.
Procedimento: Analise as sequências dadas e faça o que se pede.

[Intervenção Inicial] Observe as seguintes sequências numéricas A e B a seguir e responda:

Sequencia A (3, 7, 15, 31, 63, …)

Sequencia B (2, 5, 8, 11, 14, …)

[I_r – 01] As sequencias A e B são sequências numéricas regulares:

( ) Sim

( ) Não

[I_r – 02] Descubra e descreva a expressão matemática dessas sequências:

Sequencia A: ____

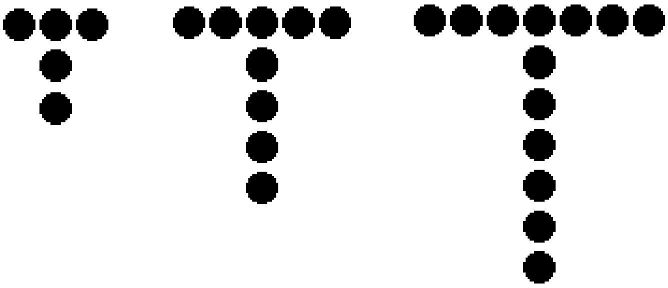
Sequencia B: ____

[I_r – 03] Qual das sequências A ou B, a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: ____

[I$_e$ – 04] Observe a seguinte imagem da figura 1

Figura 1:



Fonte:
http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/progressoes/progressao_aritmetica/images/progressao_aritmetica_ufsm.gif

Responda:

a) O que você observa quanto ao número de "bolinhas" que formam cada T?
R: ____

b) O T posterior é formado por quantas "bolinhas" a mais do que o T anterior?
R: ____

c) Este valor a mais a cada T formado posteriormente, é constante?

( ) Sim

( ) Não

[I$_e$ – 05] Desenhe, no espaço abaixo, o 4º T da sequência da figura 1. Quantas bolinhas ele tem?

Número de bolinhas: ______________________

[I_e – 06] Complete o quadro abaixo que relaciona a ordem da figura 1 e o número de bolinhas que cada T ela possui.

Ordem	1	2	3	4	5	6
Número De bolinhas						

[I_r – 07] Na sequência do quadro de [I_E – 06], a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: ____

[I_r – 08] Sem a construção do desenho, pode-se dizer que o 8º T da figura 1 tem quantos pontos?

R: ____

[I_r – 09] O T que possui 37 bolinhas, baseado na figura 1, ocupa qual posição na sequência?

R: ____

[I_r – 10] Escreva uma expressão matemática para descobrir o número de bolinhas de acordo com a posição que ela ocupa na sequência.

R: ____

[I_e – 11] Preencha o quadro, baseado na seguinte sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots, a_{k-1}, a_k)$:

Expressão	Valor de "x"
$a_2 = a_1 + x$	
$a_3 = a_2 + x$	
$a_4 = a_3 + x$	
$a_6 = a_5 + x$	
$a_k = a_{k-1} + x$	

Descreva que o que ocorreu com o valor de "x":

R: ____

____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 2

Progressão Aritmética (P.A) é uma sequência numérica (finita ou infinita) em que qualquer termo (a_n), a partir do segundo (a_2) é o antecessor somado a um valor constante representado por "r", denominado de **Razão**, que é a diferença entre o termo posterior e o termo imediatamente antecessor.

Análise a priori: Com esta UARC 2, esperamos que os alunos, já com informações prévias da UARC anterior, possam ser capazes de reconhecer e entender que as sequências dadas, formam Progressões Aritméticas.

4.4.3 UARC 3 – Classificação da Progressão Aritmética

Título: Classificando a Progressão Aritmética

Objetivo: Identificar se PA é crescente, decrescente ou constante.

Procedimento: Leia as instruções a seguir e responda

[Intervenção Inicial] Preencha as tabelas, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Aritmética e suas devidas razões (r) e responda:

[I_r – 01] O primeiro termo é “6” e a razão “4”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

( ) Sempre crescente

( ) Constante

( ) Sempre Decrescente

[I_r – 02] O primeiro termo é “10” e a razão é “– 3”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

( ) Sempre crescente

( ) Constante

( ) Sempre Decrescente

[I$_r$ – 03] O primeiro termo é “4” e a razão é “0”:

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo

Ao atribuir um valor nulo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

( ) Sempre crescente

( ) Constante

( ) Sempre Decrescente

[I$_e$ – 04] Complete o quadro para cada PA apresentada

	PA	**Razão**	**Classifique se é crescente, decrescente ou constante**
PA1	(1, 5, 9, 13, 17, 21)		
PA2	(30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5)		
PA3	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)		
PA4	(- 6, - 9, - 12, - 15, …)		
PA5	(- 6, -3, 0, 3, 6, …)		
PA6	(- 8, - 8, - 8, - 8, …)		
PA7	$(4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6, \ldots)$		

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 3

Classifica-se uma PA, pela sua **Razão:**

Se **r** > **0**, a PA é **Crescente**.

Se **r** = **0**, a PA é **Constante**.

Se **r** < **0**, a PA é **Decrescente**.

Análise a priori: A UARC 3, foi elabora para que os alunos ao verificarem o valor da razão de cada Progressão Aritmética analisada, possam reconhecer se a mesma é Crescente quando r > 0, Decrescente quando r < 0 ou Constante se r = 0.

4.4.4 UARC 4 – Termo Geral da Progressão Aritmética

Título: Termo geral da Progressão Aritmética

Objetivo: Descobrir o termo geral da PA.

Procedimento: Análise as informações abaixo e responda as questões

[I_r – 01] Dada a Progressão Aritmética $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$, complete o quadro

Expressão $\boldsymbol{a_n - a_1}$	**Valor obtido**	**Razão**	**Relação entre o valor obtido e a Razão**
$a_1 - a_1$	0	3	0 = (1-1).3
$a_2 - a_1$	3	3	3 = (2-1).3
$a_3 - a_1$			
$a_4 - a_1$			
$a_5 - a_1$			
…..	….	….	….
$a_n - a_1$	X		

[Ir – 02] Na PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots, n)$, preencha o quadro com os dados para encontrar os termos da sequência proposta na atividade:

Posição do Termo	**Representação do termo**	**Valor do termo**	**Relação entre cada termo com o 1º termo e a razão**
1º	$\boldsymbol{a_1}$	**3**	a_1
2º	$\boldsymbol{a_2}$	**5**	$a_2 =$ 3 + (2-1).2
3º	$\boldsymbol{a_3}$	**7**	$a_3 =$ 3 + (3-1).2
4º			
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
nº			

Observe que em uma P.A o termo geral (a_n) relaciona o primeiro termo (a_1), a posição que ele ocupa (n) e a razão (r).

[Ir – 03] Neste contexto de [Ir – 02], qual o valor deve ser colocado entre parênteses na Expressão para encontrarmos o termo geral de uma P.A?

a) $a_n = a_1 + (\qquad\qquad).r$

b) $a_n = a_2 + (\qquad\qquad).r$

c) $a_n = a_3 + (\qquad\qquad).r$

d) $a_n = a_p + (\qquad\qquad).r$

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

A expressão $a_n = a_1 + (\,n - 1).r$

é denominada de **termo geral de uma P.A.**

Com ela podemos encontrar o valor de um **termo qualquer** da P.A a partir do **primeiro termo** e da **razão**.

Análise a priori: Com essa UARC 4, esperamos que os alunos possam desenvolver o conhecimento a respeito da fórmula do termo geral da PA. Acreditamos que nessa UARC os alunos enfrentarão dificuldades, mas ao final da mesma irão alcançar o seu objetivo.

4.4.5 UARC 5 – Propriedades da Progressão Aritmética

Título: Propriedades da PA

Objetivo: Entender e aplicar as propriedades de PA.

Procedimento: Análise as situações abaixo e responda as questões.

1. **Primeira propriedade da PA.**

[Intervenção Inicial 01] Observe a PA (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) e responda:

[I_r – 01] Qual é o valor da soma de:

a) a_1 com a_8?

R:____________________

b) a_2 com a_7?

R: ____________________

c) a_3 com a_6?

R: ____________________

d) a_4 com a_5?

R: ____________________

[I_r – 02] Descreva o que você percebeu com essas somas?

R: ____

[I_r – 03] Seja a PA (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41).

Fazendo os mesmos procedimentos que foram feitos na [Intervenção Inicial 01]. Você pode comparar a resposta encontrada aqui com a resposta da questão anterior?

R: ____

2. Segunda propriedade da PA

[Intervenção Inicial 02] Considere a PA (3, 9, 15, 21, 27, 33)

[Ir – 04] Qual a média aritmética dos valores de a_1 com a_3?

R: ______________________

[Ir – 05] O valor encontrado pertence a sequência dada?

( ) Sim

( ) Não

[Ir – 06] Caso a resposta de [IR – 05] seja "sim", em qual termo está situado o valor da média aritmética de a_1 com a_3?

R: _______________________

[Ie – 07] Encontre a média aritmética entre os termos:

a) a_2 e a_4

R: _____________

b) a_3 e a_5

R: _____________

c) a_4 e a_6.

R: _____________

[Ie – 08] Os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** são termos da Sequência dada?

( ) Sim

( ) Não

[Ie – 09] Que posição eles ocupam na PA?

R: ____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 5

Primeira propriedade: Numa PA finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistantes dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$.

Segunda Propriedade: Tomando-se quaisquer três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a media aritmética dos outros dois.

Análise a priori: Na aplicação da UARC 5, esperamos que os alunos verifiquem a importância das propriedades, aqui colocadas, nas Progressões Aritméticas.

5 PROCESSO PARA ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os procedimentos que levaram a realização da aplicação da Sequência didática serão abordados no presente tópico, tendo como objetivo perpassar as informações necessárias para o entendimento da metodologia empregada, focando nas análises dos períodos que fazem referência ao processo anterior, de aplicação e posterior a esta.

A realização das atividades sobre Progressão Aritmética, foi aplicada em 5 Unidades Articuladas durante a média de seis aulas. Porém, anterior à aplicação das UARCs de fato, foi necessário à aplicação de um teste inicial que dependendo do resultado poderiam ou não se submeter a uma oficina para sintonizarmos o nível de conhecimento dentre os alunos em concernir-se ao conteúdo requerido para realização.

Assim, serão compreendidas nos próximos tópicos os conteúdos acima mencionados, detalhados de forma perceptiva e transcritos a partir desta percepção.

5.1 METODOLOGIA ANTERIOR À APLICAÇÃO

Após pesquisas sobre a possibilidade de realização da sequência didática, pois requeria escolas que ofertassem turmas de ensino médio em período regular, de preferência, em escola pública, foi selecionada e escolhida uma localizada no Bairro do CDP, município de Belém, estado de Pará.

Selecionada a escola, foram feitas visitas prévias com o objetivo de comunicar ao corpo administrativo a intenção de validar uma pesquisa a nível de mestrado naquela instituição de ensino. Tendo conhecimento de um profissional de matemática que, atualmente, trabalhava na presente escola, fui verificar a possibilidade de atuar em uma de suas turmas. Foi solicitado ao professor responsável por ministrar as aulas de matemática ao ensino médio, sob uma conversa de cunho informal, que concedesse uma de suas turmas durante algumas horas em alguns poucos dias, pois não queria que os alunos se sentissem um sentimento maçante ou enfadonho que prejudicasse de forma negativa a avaliação, explicando o procedimento que seria aplicado, o mesmo concordou com a realização do trabalho.

Aceita a proposta, ficamos de comunicar os alunos sobre o evento que perpassaria posterior aos tramites que validariam e daria acesso às informações, para isso, contamos com o auxílio do professor regente e perpassamos as informações aos alunos, explicando com detalhes e esclarecendo as dúvidas durante o tempo de aproximadamente 45 minutos.

Posteriormente, foi solicitado à secretaria do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PMPEM o ofício solicitado pela secretaria para a efetiva permissão e determinados os detalhes do processo de aplicação das atividades, visto que fora acordado anteriormente com o professor de matemática que a proposta da pesquisa fosse efetuada em um dos horários e em alguns dias de sua regência.

Em Apêndice A poderão ser observadas as atividades do teste de verificação do desempenho individual de acordo com o documento apresentado e preenchidos pelos alunos no dia que iniciamos procedimentos anteriores às aplicações das UARCs.

O teste de verificação do conhecimento de conteúdos básicos necessários para a aplicação da Sequência Didática de PA, deu a oportunidade de criar um quadro avaliativo que será apresentado na sequência da pesquisa, teve sua duração limitado ao tempo de 45 minutos de uma aula de matemática.

Quadro 20 – Resultado do Teste Inicial

Alunos	**Questões do Teste de verificação (ver cópia anexa)**								**Desempenho Individual (Frequência)**
	Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	
A	E	E	E	E	E	E	E	C	13%
B	E	E	E	E	C	E	E	E	13%
C	C	E	C	E	E	E	C	C	50%
D	E	E	E	E	C	E	E	E	13%
E	E	E	C	E	E	E	E	C	25%
F	E	E	E	E	E	E	E	E	0%
G	E	E	E	E	C	E	E	E	13%
H	C	E	C	E	C	E	E	E	38%
I	E	E	E	E	E	E	E	E	0%
J	E	E	E	E	E	E	E	C	13%
K	E	E	E	E	E	E	E	E	0%
L	E	E	E	E	C	E	E	C	25%
M	E	E	E	E	E	E	E	C	13%
N	E	E	E	E	E	E	E	E	0%
O	E	E	E	E	E	E	E	C	13%
P	E	E	E	E	E	E	E	E	0%
Q	C	E	C	E	C	E	E	C	50%
R	E	E	E	E	C	E	E	E	13%
Alunos com êxito	3	0	4	0	7	0	1	8	
Frequência de acerto das questões	17%	0%	22%	0%	39%	0%	6%	44%	

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2019.

O resultado do quadro acima nos deixou bastante preocupado com o desempenho dos alunos que se submeteram ao processo, o número de questões erradas foi muito elevado, note que dos 18 alunos que participaram da Sequência Didática, de um modo geral, tiveram um baixíssimo rendimento no teste de verificação com apenas 2 alunos acertando 50% das questões e ninguém acima disso, demonstrando a grande fragilidade do ensino na tentativa de perpassar conhecimentos prévios e requisitos para uma melhor aprendizagem posterior. Prosseguindo nossa análise, é possível perceber que, em sua maioria, não acertaram nenhuma questão do teste proposto, definindo então um total de 5 alunos que correspondem a 28%, aproximadamente, desse total. Além disso, se somarmos os que não acertaram nenhuma com os que acertaram apenas uma questão, temos um percentual bastante elevado, com cerca de 78% no total. É fácil notar a grande dificuldade dos alunos ao lidarem com as questões propostas, o que deve alertar, a partir dos números obtidos, que existe um déficit muito alto de conteúdos necessários à nossa sequência didática. Com isso, os alunos tiveram a necessidade se se submeter à uma oficina de conhecimentos básicos na forma de aula expositiva juntamente com um material (APÊNDICE B) que foi dado a cada um deles, para então adentrar-se no processo de aplicação da nossa sequência didática, o qual falaremos nos próximos tópicos.

5.2 PROCESSO DURANTE A APLICAÇÃO

Posteriormente a realização dos procedimentos necessários para qualificar a percepção dos alunos com o assunto, foi estabelecido os dias de aplicação das sequências de exercícios comunicada e aceita pelos alunos do 1º ano do ensino médio. Os dias de aplicação das sequências foram estabelecidos que aconteceriam em 4 momentos, durante os dias do mês de janeiro, nas datas de 21, 22, 23 e 25 respectivamente.

Em um primeiro momento, foi necessário a realização de uma oficina que ministrasse os conteúdos mínimos necessários para a aplicação da sequência didática proposta na pesquisa. Para isso, contou-se com a realização desta durante duas aulas de 45 minutos na data de 21 de janeiro de 2019 (segunda-feira), onde foram discutidos os assuntos mais relevantes de educação financeira, com o objetivo de elevar o grau de conhecimento dentre os alunos participantes, que totalizaram 18 pessoas dispostas a realizar as atividades.

Inicialmente, é válido destacar que foram executadas duas das cinco UARCs que faz jus à pesquisa, estabeleceu-se que seriam trabalhadas em conjunto durante o período de duas aulas por dia de aplicação.

Desta forma salienta-se para efeito informativo que, no último dia de aplicação, ocorreu de tratarmos as 3 UARCs que restavam, portanto, haverão, na sequência de tópicos, dois encontros referentes a dois dias de aplicação com duração de seis horas/aulas, três por dia.

A seguir, poderão ser observadas e analisadas os fatos ocorridos durante as intervenções aplicadas na turma alvo da pesquisa.

5.2.1 Primeiro encontro – Aplicação das UARC 1 e UARC 2

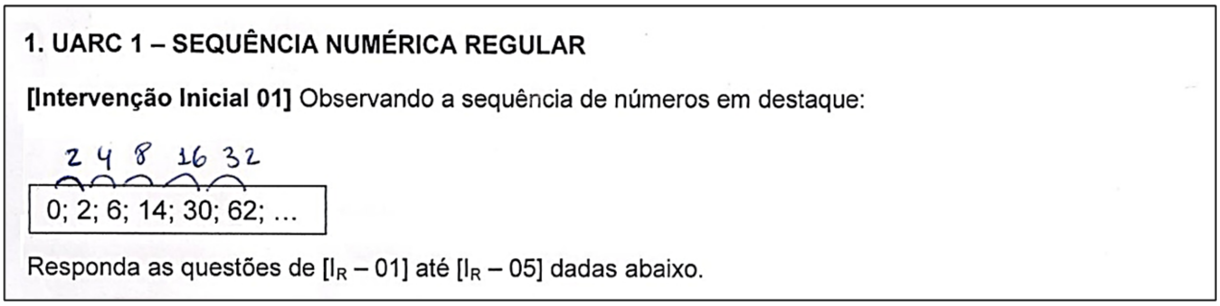
Nosso primeiro encontro aconteceu no dia 20 de janeiro de 2019 (terça-feira) entre os horários de 8 às 11 e meia do turno da manhã. Foram esclarecidos os procedimentos que seriam submetidos naquele momento e como seria a realização da nossa primeira atividade referente às UARCs 1 e 2. Obteve-se 18 alunos dispostos a realizar as atividades, divididos em duplas, um total de nove equipes.

A seguir serão apresentados os tópicos que fazem jus à sequência de Intervenções pré-estabelecidas de acordo com os objetivos da pesquisa, a conferir.

5.2.1.1 Intervenção Inicial (*Ii*)

A intervenção, em um contexto abrangente, caracteriza-se por ser um procedimento que tem como objetivo mediar certo conhecimento e informação, intencionalmente através do desenvolvimento das aulas de professores sobre o que se deseja perpassar aos alunos, desta forma, segundo Marconni Oliveira (2018) a **Intervenção Inicial** qualifica nosso primeiro desafio, pois trata-se de um "discurso didático-dialógico que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito" (OLIVEIRA, 2018 p. 40) nas figuras a seguir, poderão ser observados os instrumentos de intervenção usados na pesquisa observados no primeiro grupo, o qual chamaremos de grupo A para melhor sintonizar as figuras digitalizadas a partir do resultado das interferências das duas UARCs, a conferir.

Figura 4 – Intervenção Inicial da UARC 1 – Grupo A



1. UARC 1 – SEQUÊNCIA NUMÉRICA REGULAR

[Intervenção Inicial 01] Observando a sequência de números em destaque:

2 4 8 16 32

0; 2; 6; 14; 30; 62; …

Responda as questões de [I_R – 01] até [I_R – 05] dadas abaixo.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 5 – Intervenção Inicial da UARC 1 – Grupo A

[Intervenção Inicial 02] Iniciando com o 1° elemento escrito na tabela, preencha os espaços destinados aos outros elementos, a partir do 2° e até o sexto elemento, obedecendo o procedimento a seguir:

"multiplique por 3 o elemento anterior e adicione duas unidades". $3x+2$

Tabela dos elemento da sequência obtida

1° elemento	2° elemento	3° elemento	4° elemento	5° elemento	6° elemento
1	5	17	53	161	485

$3.1+2=5$
$3.5+2=17$
$3.17+2=53$
$3.53+2=$
$159+2=161$

$3.161+2=$
$483+2=485$

Responda as questões de [I_r – 06] e [I_r – 07].

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 6 – Intervenção Inicial da UARC 2 – Grupo A

2. UARC 2 – RECONHECENDO UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

[Intervenção Inicial] Observe as seguintes sequências numéricas A e B a seguir e responda:

4 8 16 32

Sequencia A (3, 7, 15, 31, 63, …)

3 3 3 3

Sequencia B (2, 5, 8, 11, 14, …)

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

5.2.1.2 Intervenção Reflexiva (*Ir*)

Segundo Marconni Oliveira (2018) a intervenção Reflexiva "sempre se materializa por meio de um questionamento", ou seja, faz com que o aluno indague a questão e reflita sobre as consequências da ação que se desenvolve para além dos objetivos que se esperam. Concluindo que é uma forma de estimular e orientar o aluno "a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências". (OLIVEIRA, 2018 p. 41).

As figuras que seguirão a sequência entrarão em consonância com o que foi discutido no texto acima, tendo como objetivo verificar as questões absorvidas das UARCs 1 e 2, respectivamente, a conferir.

Figura 7 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 01] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação desta sequência?

(X) Sim

( ) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 8 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 02] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

R: O padrão foi o crescimento de uma potência de base 2.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 9 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 03] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

(X) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 10 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 04] Baseado na sua resposta do item [I_r – 02], qual número ocuparia o lugar imediatamente após o elemento 62?

R: 0, 2, 6, 14, 30, 32, 126

$$\begin{array}{r} 62 \\ +\ 64 \\ \hline 126 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 11 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 05] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na [I_r – 02]:

R: $2x + 2$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 12 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 06] Nesta sequência, há entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

( ) Sim

(X) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 13 – Intervenção Reflexiva da UARC 1 – Grupo A

[I_r – 07] Apresente a expressão matemática que represente o padrão descrito na tabela:

R: $3x + 2$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 14 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 01] As sequencias A e B são sequências numéricas regulares:

(X) Sim

( ) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 15 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 02] Descubra e descreva a expressão matemática dessas sequências:

Sequencia A: $2x + 1$

Sequencia B: $x + 3$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 16 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 03] Qual das sequências A ou B, a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: B

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 17 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 07] Na sequência do quadro de [I_e – 06], a partir do segundo termo, apresenta entre dois termos consecutivos uma diferença constante?

R: Sim

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 18 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 08] Sem a construção do desenho, pode-se dizer que o 8º T da figura 1 tem quantos pontos?

R: 33

21, 25, 29, 33

4 4 4

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 19 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 09] O T que possui 37 bolinhas, baseado na figura 1, ocupa qual posição na sequência?

R: posição nove

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 20 – Intervenção Reflexiva da UARC 2 – Grupo A

[I_r – 10] Escreva uma expressão matemática para descobrir o número de bolinhas de acordo com a posição que ela ocupa na sequência.

R: $a_n = a_{n-1} + 4$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

5.2.1.3 Intervenção Exploratória (*Ie*)

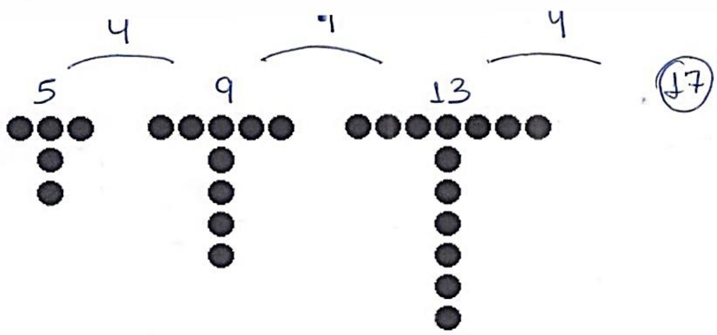
Apesar desta (Ie) estar ausente na primeira UARC, Oliveira (2018 p. 41) afirma que a Intervenção Exploratória “tem como finalidade aprofundar o olhar do aluno a respeito das respostas obtidas nas intervenções reflexivas (*Ir*)”. Portanto, pode-se concluir que o objetivo é tentar requisitar o aluno a efetuar um processo anteriormente refletido, questionado.

Assim, na sequência da pesquisa, poderão ser visualizadas as figuras que fazem jus ao processo descrito, podemos observar então as respostas dos alunos do Grupo A.

Figura 21 – Intervenção Exploratória da UARC 2 – Grupo A

[I_e – 04] Observe a seguinte imagem da figura 1

Figura 1:



Fonte:
http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/progressoes/progressao_aritmetica/images/progressao_aritmetica_ufsm.gif

Responda:

a) O que você observa quanto ao número de “bolinhas” que formam cada T?
R: aumenta 4 bolinhas sempre

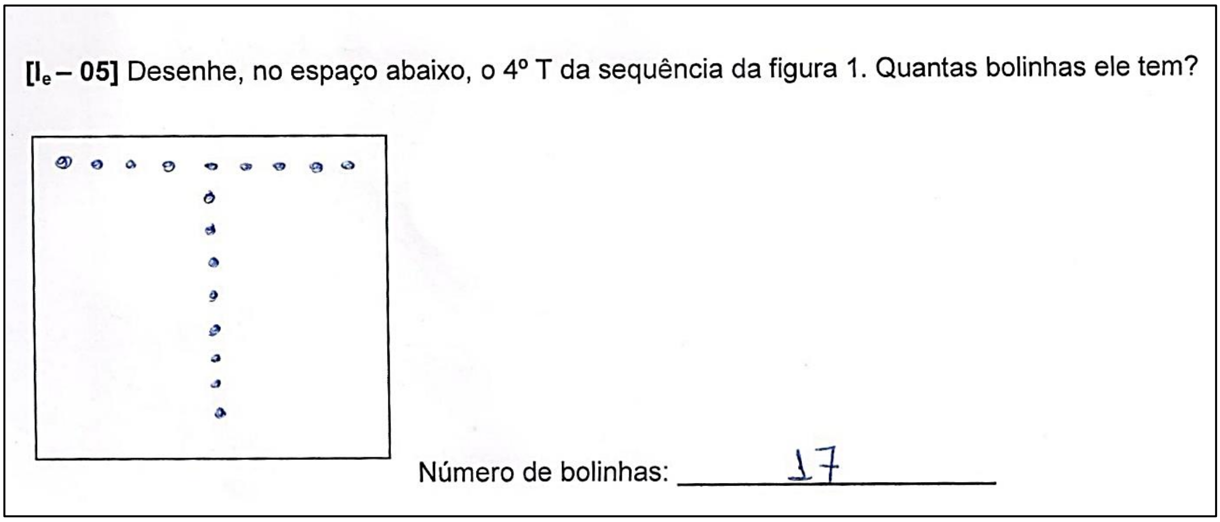
b) O T posterior é formado por quantas “bolinhas” a mais do que o T anterior?
R: 4

c) Este valor a mais a cada T formado posteriormente, é constante?

(X) Sim

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 22 – Intervenção Exploratória da UARC 2 – Grupo A

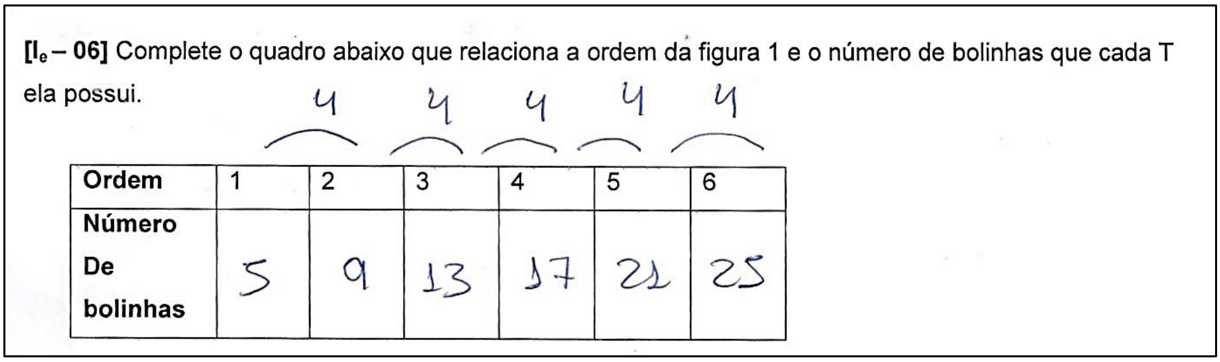


[I_e – 05] Desenhe, no espaço abaixo, o 4º T da sequência da figura 1. Quantas bolinhas ele tem?

Número de bolinhas: 17

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 23 – Intervenção Exploratória da UARC 2 – Grupo A



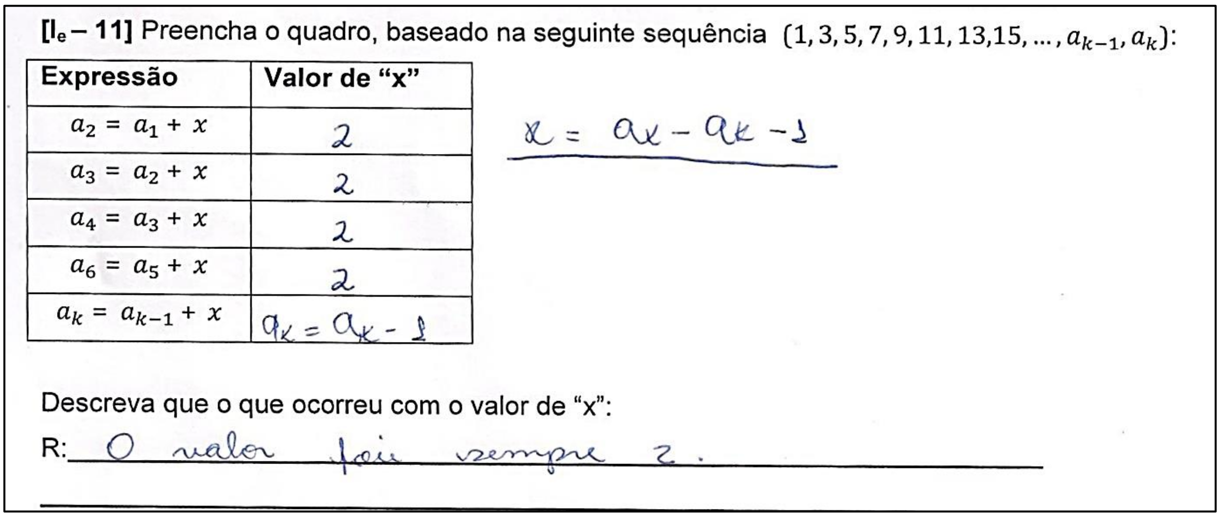
[I_e – 06] Complete o quadro abaixo que relaciona a ordem da figura 1 e o número de bolinhas que cada T ela possui.

4 4 4 4 4

Ordem	1	2	3	4	5	6
Número De bolinhas	5	9	13	17	21	25

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 24 – Intervenção Exploratória da UARC 2 – Grupo A



[I_e – 11] Preencha o quadro, baseado na seguinte sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots, a_{k-1}, a_k)$:

Expressão	**Valor de "x"**
$a_2 = a_1 + x$	2
$a_3 = a_2 + x$	2
$a_4 = a_3 + x$	2
$a_6 = a_5 + x$	2
$a_k = a_{k-1} + x$	$a_k = a_k - 1$

$x = a_k - a_k - 1$

Descreva que o que ocorreu com o valor de "x":

R: O valor foi sempre 2.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

5.2.2 Segundo encontro – Aplicação das UARC 3, UARC 4 e UARC 5.

Nosso segundo encontro aconteceu logo após o dia 20 de janeiro de 2019, assim, dia 21 estivemos reunidos novamente, entre os mesmos horários, compreendendo às 8 até 11 e meia do turno da manhã. Foram esclarecidos, novamente, os procedimentos e como seria a realização da nossa segunda atividade referente às UARCs 3, 4 e 5. Obteve-se novamente um total de 18 alunos na realização das atividades, divididos em duplas, um total de nove equipes.

A seguir serão apresentados os tópicos que fazem jus às próximas sequências de atividades proposta, seguindo a sequência de Intervenções pré-estabelecidas de acordo com os objetivos da pesquisa, a conferir.

5.2.2.1 Intervenção Inicial (*Ii*)

Consideradas estímulos iniciais sobre as regularidades funcionais da primeira fase de um processo, a intervenção inicial segue a busca por despertar o interesse empírico-intuitivo entre os alunos. A fase inicial que antecede as reflexões e questionamentos, serão dispostas para observação na sequência do presente tópico e poderá ser observada a ausência desta em uma das UARCs, na UARC 4, a seguir.

Figura 25 – Intervenção Inicial da UARC 3 – Grupo A

3. UARC 3 – CLASSIFICAÇÃO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

[Intervenção Inicial] Preencha as tabelas, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Aritmética e suas devidas razões (r) e responda:

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 26 – Intervenção Inicial da UARC 5 – Grupo A

5. UARC 5 – PROPRIEDADES DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1. Primeira propriedade da PA.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8

[Intervenção Inicial 01] Observe a PA (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) e responda:

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 27 – Intervenção Inicial da UARC 5 – Grupo A

2. Segunda propriedade da PA

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6

[Intervenção Inicial 02] Considere a PA (3, 9, 15, 21, 27, 33)

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

5.2.2.2 Intervenção Reflexiva (*Ir*)

A intervenção reflexiva se materializa através do questionamento, principalmente na presença do estímulo que busque refletir os aspectos e pensar em hipóteses afim de verificar possíveis consequências. As figuras a seguir farão jus a esse aspecto de reflexão, são os recortes de uma das equipes que busca dispor essas informações adquiridas na pesquisa.

Figura 28 – Intervenção Reflexiva da UARC 3 – Grupo B

[I_r – 01] O primeiro termo é "6" e a razão "4":

$6+4=10$

$10+4=14.$

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
6	10	14	18	22

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

(X) Sempre crescente

( ) Constante

( ) Sempre Decrescente

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 29 – Intervenção Reflexiva da UARC 3 – Grupo B

[I_r – 02] O primeiro termo é "10" e a razão é "– 3":

$10-3=7$

$7-3=4$

$4-3=1$

$1-3=-2$

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
19	7	4	1	-2.

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

( ) Sempre crescente

( ) Constante

(X) Sempre Decrescente

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 30 – Intervenção Reflexiva da UARC 3 – Grupo B

[I$_r$ – 03] O primeiro termo é "4" e a razão é "0":

Tabela dos elemento da PA obtida

1°Termo	2°Termo	3°Termo	4°Termo	5° Termo
4	4	4	4	4

Ao atribuir um valor nulo para a razão da PA, observa-se que a mesma será:

( ) Sempre crescente

(X) Constante

( ) Sempre Decrescente

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 31 – Intervenção Reflexiva da UARC 4 – Grupo B

4. UARC 4 – TERMO GERAL DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

[I$_r$ – 01] Dada a Progressão Aritmética $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$, complete o quadro

Expressão $a_n - a_1$	Valor obtido	Razão	Relação entre o valor obtido e a Razão
$a_1 - a_1$	0	3	0 = (1-1).3
$a_2 - a_1$	3	3	3 = (2-1).3
$a_3 - a_1$	6	3	6 = (3-1). 3
$a_4 - a_1$	9	3	9 = (4-1). 3
$a_5 - a_1$	12	3	12 = (5-1). 3
…..	….	….	….
$a_n - a_1$	X	3	x = (n-1). 3

→ 7 - 1 = 6

→ 10 - 1 = 9

→ 13 - 1 = 12

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 32 – Intervenção Reflexiva da UARC 4 – Grupo B

[I$_r$ – 02] Na PA ($3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots, n$), preencha o quadro com os dados para encontrar os termos da sequência proposta na atividade:

$a_1\ a_2\ a_3$

Posição do Termo	Representação do termo	Valor do termo	Relação entre cada termo com o 1º termo e a razão
1º	a_1	3	a_1
2º	a_2	5	$a_2 = 3 + (2-1).2$
3º	a_3	7	$a_3 = 3 + (3-1).2$
4º	a_4	9	$a_4 = 3+(4-1).2$
5º	a_5	11	$a_5 = 3+(5-1).2$
6º	a_6	13	$a_6 = 3+(6-1).2$
7º	a_7	15	$a_7 = 3+(7-1).2$
8º	a_8	17	$a_8 = 3+(8-1).2$
9º	a_9	19	$a_9 = 3+(9-1).2$
nº	a_n	n	$a_n = a_1 + (n-1)$

Observe que em uma P.A o termo geral (a_n) relaciona o primeiro termo (a_1), a posição que ele ocupa (n) e a razão (r).

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 33 – Intervenção Reflexiva da UARC 4 – Grupo B

[I$_r$ – 03] Neste contexto de [I$_r$ – 02], qual o valor deve ser colocado entre parênteses na Expressão para encontrarmos o termo geral de uma P.A?

a) $a_n = a_1 + (\ n-1\ ).r$

b) $a_n = a_2 + (\ n-2\ ).r$

c) $a_n = a_3 + (\ n-3\ ).r$

d) $a_n = a_p + (\ n-p\ ).r$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 34 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 01] Qual é o valor da soma de:

a) a_1 com a_8?

R: $a_1 + a_8 = 10 + 80 = 90$

b) a_2 com a_7?

R: $a_2 + a_7 = 20 + 70 = 90$

c) a_3 com a_6?

R: $a_3 + a_6 = 30 + 60 = 90$

d) a_4 com a_5?

R: $a_4 + a_5 = 40 + 50 = 90$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 35 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 02] Descreva o que você percebeu com essas somas?

R: O RESULTADO É SEMPRE 90

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 36 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 03] Seja a PA (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41).

Fazendo os mesmos procedimentos que foram feitos na [Intervenção Inicial 01]. Você pode comparar a resposta encontrada aqui com a resposta da questão anterior?

R: NA PRIMEIRA TODOS OS VALORES FORAM SOMADOS.
NA SEGUNDA SOBROU UM VALOR QUE É A METADE
DA SOMA DESSES VALORES.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 37 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 04] Qual a média aritmética dos valores de a_1 com a_3?

R: 9

$\frac{3+15}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 38 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 05] O valor encontrado pertence a sequência dada?

(X) Sim

( ) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 39 – Intervenção Reflexiva da UARC 5 – Grupo B

[I_r – 06] Caso a resposta de [I_r – 05] seja “sim”, em qual termo está situado o valor da média aritmética de a_1 com a_3?

R: a_2

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

5.2.2.3 Intervenção Exploratória (*Ie*)

Neste tópico temos a finalidade, como professores, de aprofundar o olhar dos alunos sobre as questões reflexivas, já não se abastecem por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação de procedimentos da parte dos alunos. As figuras a seguir farão merecimento à intervenção exploratória e suas considerações sobre o grupo B, a conferir.

Figura 40 – Intervenção Exploratória da UARC 3 – Grupo B

[I_e – 04] Complete o quadro para cada PA apresentada

	PA	**Razão**	**Classifique se é crescente, decrescente ou constante**
PA1	(1, 5, 9, 13, 17, 21)	4	CRESCENTE
PA2	(30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5)	-5	DECRESCENTE
PA3	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	0	CONSTANTE
PA4	(- 6, - 9, - 12, - 15, ...)	-3	DECRESCENTE
PA5	(- 6, -3, 0, 3, 6, ...)	3	CRESCENTE
PA6	(- 8, - 8, - 8, - 8, ...)	0	CONSTANTE
PA7	$(4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6, \ldots)$	1/2	CRESCENTE.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 41 – Intervenção Exploratória da UARC 5 – Grupo B

[I_e – 07] Encontre a média aritmética entre os termos:

a) a_2 e a_4

R: 15 $\rightarrow \frac{9+21}{2} = \frac{30}{2} = 15$

b) a_3 e a_5

R: 21 $\rightarrow \frac{15+27}{2} = \frac{42}{2} = 21$

c) a_4 e a_6.

R: 27 $\rightarrow \frac{21+33}{2} = \frac{54}{2} = 27$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 42 – Intervenção Exploratória da UARC 5 – Grupo B

[I_e – 08] Os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** são termos da Sequência dada?

(X) Sim

( ) Não

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 43 – Intervenção Exploratória da UARC 5 – Grupo B

[I_e – 09] Que posição eles ocupam na PA?

R: $15 = a_3$, $21 = a_4$ e $27 = a_5$.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Com isso, encerramos nossa análise de algumas amostras das respostas dos alunos sobre as intervenções conseguintes à proposta. Daremos introdução aos indicativos e confirmação de aprendizagem durante a aplicação da sequência didática no tópico que se segue.

6 INDICATIVOS DE APRENDIZAGEM

No presente tópico serão abordados a conjuntura dos fatos vivenciados através da transcrição dos diálogos capitados com áudios gravados através de um aparelho telefônico durante a aplicação da sequência didática, desta forma, estabeleceu-se que a descrição seguirá o critério de desenvolver a estrutura dos diálogos através de episódios e segmentos que estabelecerão as intervenções referentes ao dia de aplicação com o objetivo de sintonizar os procedimentos e identificar os registros de indícios de aprendizagem.

Quadro 21 - Estrutura de estudo dos diálogos

EPISÓDIO	SEGMENTO
EPISÓDIO 1 (UARC 1)	De 1 a 4
EPISÓDIO 2 (UARC 2)	5
EPISÓDIO 3 (UARC 3)	De 6 a 9
EPISÓDIO 4 (UARC 4)	De 10 a 9
EPISODIO 5 (UARC 5)	De 12 a 13

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2019.

6.1 INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM DURANTE A APLICAÇÃO DA SEQUÊCIA DIDÁTICA

EPISÓDIO 1

Segmento 1

Nosso primeiro encontro, inicialmente, os alunos foram orientados sobre os procedimentos da nossa primeira atividade, a UARC 1. A turma que, normalmente, contam com mais de 20 alunos, apresentavam somente 18 para realização da sequência didática, assim, eles foram orientados a dividirem-se em duplas e nove materiais para preenchimento seriam distribuídos dentre os participantes. Após se organizarem, cada dupla teve acesso ao seu material e iniciou-se efetivamente a pesquisa.

Segmento 2

A intervenção acontece inicialmente com um diálogo de apresentação e logo damos início a atividade proposta na primeira UARC.

Quadro 22 – Trecho do Diálogo - Análise do Grupo 1 – Intervenção Inicial da UARC 1

Professor: A primeira UARC, diz assim: sequência numérica regular. Você vai destrinchar para verificar o que seria uma sequência numérica regular. Depois você vai para a segunda, que é, reconhecendo uma progressão aritmética, mas primeiro, a sequência numérica regula. **(Alunas resolvem a questão)** **Professor**: ... a parti do segundo termo é observado algum padrão para a formação dessa sequência? Ele só não é padrão quando for uma ordem que cresceu desajustada. Aí, você descreve como estás fazendo. **Aluna B**: quanto é sessenta e dois menos trintas? **Professor**: 32.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O diálogo apresentado na sequência faz jus a esta fase, sobre a análise de uma intervenção inicial, na tentativa de exemplificar parte desse processo, chamaremos os alunos de A e/ou B.

Segmento 3

Nesta etapa, damos ênfase na questão voltada ao questionamento, exemplificando, na sequência dessa atividade, a perspectiva da Intervenção Reflexiva. No momento em que os alunos são estimulados a questionar, refletindo dentro das circunstancias da atividade, suas consequências. O trecho transcrito foi incluso na tentativa de subsidiar essas informações e é referente a quarta questão da primeira UARC.

Quadro 23 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 1 – Intervenção Reflexiva da UARC 1

Aluna B: Qual o número que ocuparia o lugar imediatamente depois do elemento sessenta e dois? **Professor**: O que tu achas, que deveria ser? Pode ver o crescimento como foi. O que percebe, que essa sequência aqui, é o que? **Aluna B**: Múltiplo de dois. **Professor**: No caso, está sendo dobrado, então se tu dobrar esse, quem vai ser ele? **Aluna B**: Tipo, tem quer ser dois vezes o trinta e dois? **Professor**: Não é dobro, ou seja, dois vezes dois? **Aluna B**: Quatro. **Professor**: Dois vezes quatro? **Aluna B**: Oito. **Professor**: Quando chegar aqui, dois vezes trinta e dois, quem é o dobro? **Aluna B** (tenta resolver) **Professor**: Está, aí você encontra esse resultado e pega aqui, zero mais dois, dois mais quatro, seis mais oitos? **Aluna B**: Quatorze **Professor**: Quatorze mais dezesseis é trinta, trinta mais trinta e dois é sessenta e dois. Aí você vê quem vai ser o próximo... **Aluna B**: ... para fazer a somatória para achar o resultado **Professor**: Isso. **Alunas**: Tentam resolver a questão... **Aluna B**: Agora falta achar o após o trinta e dois **Professor**: E quem seria? Quanto que deu? **Aluna B**: Sessenta e quatro **Professor**: E tu soma com que? **Aluna B**: Trinta e dois **Professor**: E quanto daria? **Aluna B**: 96. (Resposta)

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Pode-se perceber que a primeira equipe analisada em áudio tem um pouco de dificuldade em verificar a consequência do processo da quarta questão da UARC 1, é válido ressaltar que o trecho em destaque traz de si uma essência em fazer com que o aluno B se questione sobre a perspectiva requerida e matem o objetivo de chegar a uma conclusão, caracterizando uma ação interativa que explora algumas vertentes.

Segmento 4

Após o desenvolvimento das questões referentes à primeira UARC, houve um momento de refletir-se acerca do que havíamos visto até então.

Quadro 24 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 1 – Finalização da UARC 1

Professor: o que vocês conseguiram entender dessa primeira uarc? Deu para perceber que existem sequências numéricas que não tem regularidade? E deu para perceber também, que existe uma lei matemática quanto ela tem regularidade? E com isso a gente fecha a primeira uarc, que dá a ideia, que a parti de uma regularidade, tem que ter uma? **Aluna B**: uma sequência? **Professor**: sim, essa sequência que mantém uma regularidade, tem que existir uma lei matemática. Essa lei matemática que, designou a sequência regular. **Aluna B:** vamos lá, a lei é três vezes um mais dois. **Professor**: conseguiu? No caso, como ele descreve assim, multiplique por três o elemento anterior e adicione duas unidades. Então, você descobriu que seria como? **Aluna B**: três vezes um mais dois. **Professor**: para o um e para o próximo? Tipo aqui, três vezes o cinco mais dois e próximo? **Aluna B:** três vezes o dezessete mais dois. Eu comecei a parti do dois aqui **Professor**: tá, mas como você faria uma lei matemática? Você sabe que vai multiplicar por três, e o que mais? **Aluna B**: adicionar duas unidades **Professor:** mas quem você vai multiplicar por três? **Aluna B**: o um.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O trecho do diálogo expressa essa reação, seu andamento direciona o momento de conclusão da nossa UARC 1, abrindo espaço para troca de conhecimentos e reflexão acerca do conteúdo perpassado, tirando as dúvidas apresentadas pela aluna do diálogo, finalizando nosso primeiro momento da pesquisa.

EPISÓDIO 2

Segmento 5

Neste seguimento, dar-se-á ênfase às características reflexivas da UARC 2, na tentativa de exemplificar através de um trecho do diálogo que salienta os princípios da intervenção reflexiva. O trecho é referente ao seguimento a partir da oitava questão da UARC 2.

Quadro 25 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 1 – Intervenção Reflexiva da UARC 2

Professor: sem a construção do desenho, pode se dizer que o oitavo T da figura, tem quantos pontos? **Aluna A**: quarenta e três? **Professor:** não sei. A sete seria quanto? **Aluna A**: vinte e nove? **Professor:** muito bem. Então o oitavo seria quanto? **Aluna A**: trinta e três? **Professor**: isso. Você preencheu? (Incompreensível). Quando você preenche esse valor, ele ti faz uma pergunta aqui em relação a sequência. O que ele diz aqui? **Aluna A**: ao atribuir um valor positivo (Incompreensível). **Professor:** será o que? **Aluna A**: (Áudio Incompreensível) **Professor**: ela tá decrescendo? Ela se manteve constante? **Aluna A:** ela cresceu. **Professor**: então ela é sempre? **Aluna A**: ela é sempre crescente. **Professor**: pronto. Você vai preenchendo as outras. Por exemplo, quem é o primeiro termo? Quem é a razão? **Aluna A**: menos três. **Professor**: quem você acha que seria o próximo? **Aluna A:** sete. **Professor**: isso. E quem é o próximo? Aluna, quanto é um menos três? **Aluna A:** (incompreensível) **Professor:** o que tu percebeste nessa progressão aritmética? Ao atribuir um valor negativo da razão, o que você observou? **Aluna A**: que ela é decrescente. **Professor**: isso. Vamos finalizar a outra. Aqui, quanto é o primeiro termo? **Aluna A**: quatro. **Professor**: isso, põe aqui. E quem é a razão? **Aluna A**: zero. **Professor**: muito bem. E a razão e zero, quem vai ser o próximo? **Aluna A:** oito. **Professor**: quanto é aqui? Não é zero? Então, quanto é quatro mais zeros? **Aluna A**: quatro.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O trecho acima transcrito vem com a finalidade de demonstrar uma parte da intervenção reflexiva da nossa segunda UARC, nota-se através do diálogo a necessidade de questionamento, enfatizando a materialização da proposta reflexiva. Finalizamos nosso dia de atividades posteriormente ao diálogo.

EPISÓDIO 3

Segmento 6

Nosso segundo encontro, aconteceu no dia seguinte, os alunos foram orientados sobre os procedimentos da nossa segunda atividade, as UARCs 3, 4 e 5, finalizando nossa etapa de pesquisa. Novamente, pode-se contar com os 18 estudantes para a realização desta nova sequência didática, assim, eles foram orientados, e uniram-se em duplas. Após se organizarem, cada dupla teve acesso ao seu material e iniciou-se efetivamente a pesquisa.

Segmento 7

Após um breve diálogo inicial de orientação dos devidos procedimentos, demos início de fato ao conteúdo que seria resolvido nesta etapa. O trecho do diálogo seguinte fará jus a nossa intervenção inicial que consiste num breve discurso didático-dialógico sob a análise do Grupo 2, a conferir.

Quadro 26 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Inicial da UARC 3

Professor: vamos dar continuidade na nossa sequencia didática. Agora nós vamos pra Uarc 03, onde vamos classificar as progressões aritméticas. A primeira intervenção diz assim: Preencha as tabelas que são dadas. Aí você vai responder. A primeira intervenção reflexiva diz assim: o primeiro termo é seis e a razão é quatro. Aí você preenche a tabela. **Aluno C**: ok.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O diálogo acima demonstra a relação inicial que consiste em subsidiar o professor à introdução do assunto que se dá início para, posteriormente, fazer o uso da intervenção reflexiva de acordo com os prosseguimentos seguintes. Assim, o próximo segmento será responsável por dar ênfase à etapa comentada. A conferir.

Segmento 8

Os alunos foram orientados a ficar resolvendo as atividades para, posteriormente, iniciarmos os diálogos de respostas às questões especificadas no trabalho.

Quadro 27 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Reflexiva da UARC 3

Professor: o primeiro termo é?
Aluno C: seis e o segundo termo é dez.
Professor: por que?
Aluno C: por que a razão é quatro e o termo é seis, então eu diminuo uma pela outra.
Professor: mais você vai diminuir o primeiro termo da razão?
Aluno C: não, eu vou somar.
Professor: ah, você vai somar. Então o próximo seria quem?
Aluno C: seis, dez, quatorze, dezoito, etc.
Professor: ah sim, mas o que ocorre, essa progressão aritmética é o que?
Aluno C: é crescente.
Professor: ela sempre vai ser crescente?
Aluno C: sempre.
Professor: beleza. Então agora veremos a intervenção dois. Ele diz que o primeiro termo é dez e a razão é menos três. Quem seria o primeiro termo?
Aluno C: dez.
Professor: ok. Mas se a razão é menos três, o que vai acontecer com os próximos?
Aluno C: vamos diminuir. Do termo dez vamos diminuir menos três
Professor: isso e o que ocorre?
Aluno C: dez, menos sete, menos quatro.
Professor: menos quatro o próximo?
Aluno C: não, é quatro.
Professor: certo e aí?
Aluno C: aí, quatro menos três vai dar um.
Professor: isso.
Aluno C: aí, um menos três é igual a menos dois.
Professor: beleza, então já preenchemos essa tabela. E o que você percebeu messe caso em que, a razão é menos três? Ela é crescente, constante ou decrescente?
Aluno C: é sempre decrescente.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Com isso, cabe validar as intervenções seguintes, expressas no diálogo acima, que faz jus às intervenções reflexivas, na tentativa de estimular o estudante ao questionamento que são objetivos destas ultimas.

Segmento 9

A continuidade do diálogo apresenta, de forma bem direta, a intervenção exploratória, que se inicia a partir do processo de reflexão da intervenção anterior. Desta maneira, dar-se-á prosseguimento através da exposição do diálogo conseguinte para melhor representatividade desta questão e encerramento da nossa primeira atividade.

Quadro 28 – Trecho de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Exploratória da UARC 3

Professor: ta, então olha só, eu vou ti dar uma intervenção exploratória, que é a quatro e você vai montar. Monte o quadro que ta aí e assim que você montar, eu faço as perguntas a você.
Aluno D: certo. Mas professor, tira uma dúvida que estou tendo na PA 07?
Professor: qual a pergunta?
Aluno D: é que ela é menos três e eu queria saber?
Professor: mais a PA três que ta dando menos três?
Aluno D: não, é a PA 04
Professor: ah, a PA 04. Ela dá três por que você subtrai o segundo termo do primeiro? Quem é o segundo termo?
Aluno D: é o menos nove.
Professor: e o primeiro?
Aluno D: menos seis.
Professor: aí você vai fazer o menos nove menos o menos seis?
Aluno D: ah, entendi.
Professor: e quando dá a razão?
Aluno C: menos três.
Professor: então nesse caso ela é o que?
Aluno D: decrescente.
Professor: e você conseguiu formar as outras?
Aluno D: consegui, você pode ver aqui na PA 01, a razão deu quatro.
Professor: então ela é o que?
Aluno D: é crescente.
Professor: perfeito. Quanto deu a PA 07?
Aluno D: ela deu meio.
Professor: ela é crescente ou decrescente?
Aluno C: ela é constante.
Professor: constante? A razão deu meio, então seria constante?
Aluno C: não, professor. Agora seria crescente.
Professor: por que seria crescente? Quando deu a razão?
Aluno C: deu meio.
Professor: Então ela vai crescer ou ser constante?
Aluno C e D: ela vai crescer.
Professor: perfeito, então, com essa intervenção exploratória, a gente consegue formalizar o crescimento, ou seja, a classificação da PA. Concluímos que quando a razão for positiva ela vai ser sempre crescente, quando a razão for igual a zero ela vai ser sempre constante e quando a razão for negativa ela vai ser sempre decrescente, certo?
Aluno C: certo.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A intervenção exploratória, apresentada no quadro acima, vem com o intuito de demonstrar o processo de solicitação ao estudante em respeito às respostas obtidas na intervenção reflexiva.

EPISÓDIO 4

Segmento 10

Conseguinte aos quesitos relacionados à UARC 3 e finalização da mesma, deu-se início a próxima etapa, a UARC 4, cujo objetivo inicia-se a partir das questões reflexivas. Desta maneira, o diálogo seguinte dará merecimento a esse conceito a partir do ponto de vista dos alunos C e D do mesmo grupo de análise da UARC anterior, a seguir.

Quadro 29 – Trecho demonstrativo de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Reflexiva da UARC 4

Professor: então vamos iniciar a quarta UARC, onde ela fala do termo geral da progressão aritmética. Por exemplo, se eu perguntar a intervenção reflexiva 01, quem é a progressão? **Aluno D**: um, quatro, sete, dez e treze. **Professor**: perfeito. Cada um desses termos aqui, por exemplo, para você quem é o primeiro termo? **Aluno D**: é o A1 **Professor:** e o quatro? **Aluno D e C**: A2 **Professor**: e o sete? **Aluno C**: A3 **Professor**: e o dez? **Aluno D:** A4 **Professor**: e assim sucessivamente, correto? Ele dá um quadro aqui e manda preencher. Ele diz aqui A n é a expressão geral, pode ver que ele fica em função de quem? **Aluno C**: A1. **Professor:** isso, muito bem. Então na primeira ideia, aqui quanto ele está fazendo? **Aluno C**: A1 menos A1. **Professor:** o valor da quanto? **Aluno C:** zero. **Professor:** isso, pode ver que o quadro fornece essas informações. E a razão deu quanto? **Aluno D:** três. **Professor:** perfeito. E nessa segunda aqui, o que ele pede? **Aluno C**: A2 menos A1. **Professor**: e aí, quando deu? **Aluno C:** três. **Professor:** e a razão foi quanto? **Aluno C**: três também. **Professor:** e o próximo é quem? **Aluno D:** A3 menos A1. **Professor:** quanto deu? **Aluno C**: seis. **Professor**: e a razão? **Aluno C**: três.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O diálogo estabelece a finalidade de questionar os interesses das questões para com os estudantes, afim de questionar e dar suporte à proposta da intervenção, analisando o trecho acima em destaque, é possível observar o estímulo gerado e a participação dos alunos da equipe em solucionar os questionamentos.

Segmento 11

Dando sequência ao desenvolvimento das atividades da UARC 4, considera-se para efeito da pesquisa que o seguimento diálogo dará oportunidade de observação ao trecho que encerra o andamento desta proposta. Assim, o próximo quadro poderá demonstrar o comentado, a conferir.

Quadro 30 – Trecho demonstrativo de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Reflexiva da UARC 4

Professor: muito bem. Vamos analisar a próxima intervenção que é a 03. Essa última, ela diz que an é igual a quem? **Aluno D:** A1. **Professor**: quem fica dentro dos parênteses? **Aluno D**: n menos 1. **Professor**: que são os ternos bases. E nessa D, seria quem? An é igual a quem? **Aluno C**: A2. **Professor**: e quem ficou dentro dos parênteses? **Aluno C:** ele menos 2. **Professor**: e essa terceira que é An igual a três, quem ficou dentro dos parênteses? **Aluno C:** n menos três. **Professor:** quando você pega um an que é igual a p. Quem fica dentro dos parênteses? **Aluno C**: n menos p. **Professor**: e todos eles sap multiplicados por quem? **Aluno D:** pelo R. **Professor:** e quem é esse R? **Aluno D:** a razão. **Professor**: muito bem. A gente formaliza, certo? E verifica que quando tiver a expressão an igual a um mais dentro de um parêntese n menos um vezes r, a gente vai denominar como termo geral da PA, e com ela a gente pode encontrar o valor de um termo qualquer da PA, desde que seja dado o primeiro termo e a razão. Tudo certo? **Alunos C e D**: sim. **Professor**: ok então.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Observa-se, em particular, a essência em fazer com que os alunos D e C, da equipe analisada no diálogo acima, questionem-se sobre a perspectiva requerida com o objetivo de chegar a uma conclusão, caracterizando uma ação interativa e participativa.

EPISÓDIO 5

Segmento 12

A proposta deste próximo segmento segue o intuito de explicitar a iniciação da próxima UARC, chegando a fase final da nossa experiência, foi transcrito o diálogo com o grupo 2 para exemplificar o contato e intervenção da UARC 5, a conferir.

Quadro 31 – Trecho demonstrativo de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Inicial da UARC 5

Professor: Agora finalizando, vamos para quinta e última UARC, que fala das propriedades da progressão aritmética. Nós vamos trabalhar apenas com duas e a primeira propriedade ri dá uma intervenção inicial. Ela diz para observar essa PA e quem é essa PA? **Aluno C**: dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta. **Professor**: perceba que ela parou aí. Então ele pede para você responder, por exemplo, A1 com A8? **Aluno C**: a soma, ne? **Professor:** é.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Com isso, é válido ressaltar que a análise a seguir foi transcrita para melhor visualização desta etapa da intervenção, assumindo caráter de Intervenção Inicial.

Segmento 13

A proposta segue normalmente com êxito, apesar da turma demonstrar cansaço, a representação do diálogo a seguir, segue a próxima intervenção, a Reflexiva, presente no processo da UARC 5, concluindo nosso dia de atividades.

Quadro 32 – Trecho demonstrativo de diálogo - Análise do Grupo 2 – Intervenção Reflexiva da UARC 5

Aluna C: A1 é dez mais A8 que é oitenta. Professor: quanto deu? Aluna C: noventa. Professor: isso, aí na B diz assim, A2 com A7, quem é? Aluna C: vinte mais setenta. Professor: quanto deu? Aluna C: noventa. Professor: ok. Agora C ele pede pra você somar quem? Aluna C: A3 com A6. Professor: quanto dá? Aluna C: trinta mais sessenta. Professor: quanto deu? Aluna C: noventa. Professor: ok. A última ele pede pra você somar o que? Aluna C: A4 e o A5. Professor: quanto deu? Aluna C: noventa.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

O quadro acima conclui nossa proposta fazendo jus ao momento final da pesquisa e busca concretizar a demonstração da intervenção reflexiva proposta. O próximo tópico dará início ao processo avaliativo na tentativa de fazer com que fique clara as potencialidades observadas.

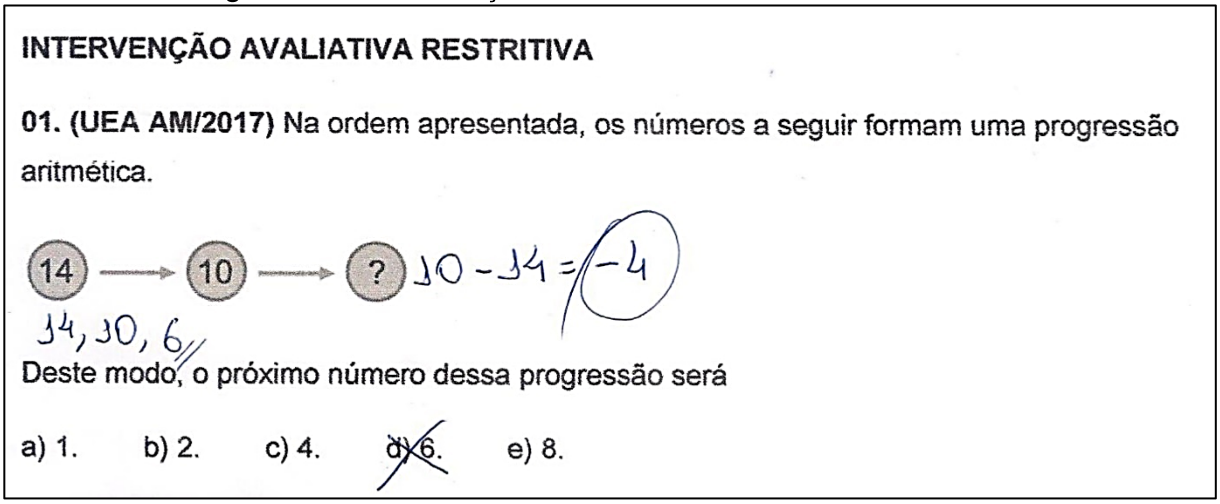
6.2 INTERVENÇÃO AVALIATIVA

Após a aplicação das 5 UARCs em Progressão Aritmética e suas devidas formalizações, foi aplicada a Intervenção Avaliativa Restritiva e Aplicativa, chamadas por Cabral (2017) de *Intervenções Auxiliares*, em um único material de apoio (APÊNDICE C) para evidenciar as potencialidades das Intervenções Iniciais aplicadas nas UARCs.

Observe o desempenho dos alunos nas Intervenções Avaliativas Restritivas que, segundo Cabral (2017), aferem as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais: O que é o objeto matemático em estudo e como se justificam e operam os algoritmos decorrentes.

Na primeira questão Restritiva, todos os alunos tiveram êxito (figura 45), até por se tratar de uma questão bem direta de PA.

Figura 44 – Intervenção Avaliativa Restritiva 01 – Aluno A_1



INTERVENÇÃO AVALIATIVA RESTRITIVA

01. (UEA AM/2017) Na ordem apresentada, os números a seguir formam uma progressão aritmética.

14 → 10 → ? 10 - 14 = -4

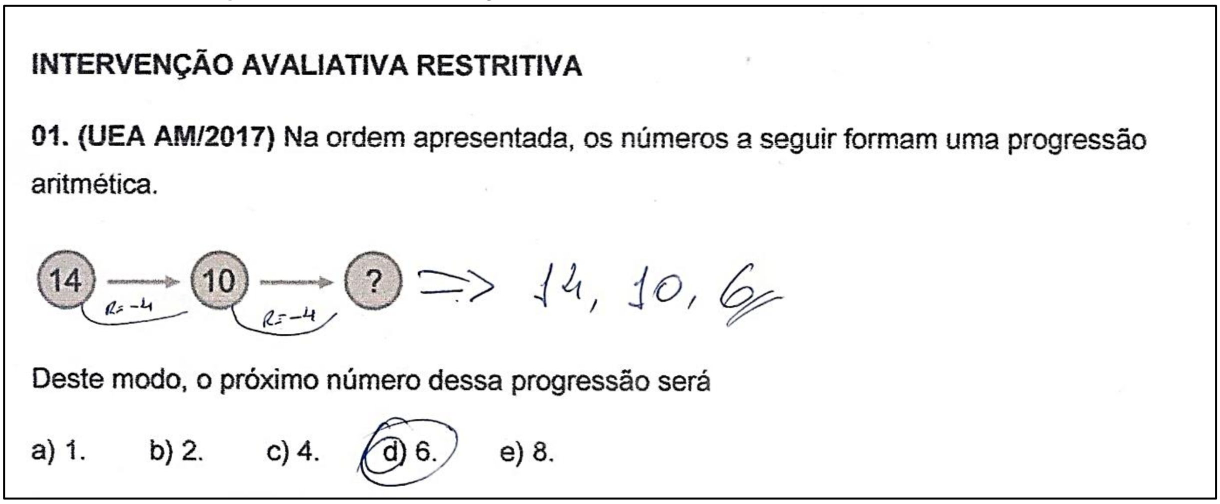
14, 10, 6

Deste modo, o próximo número dessa progressão será

a) 1. b) 2. c) 4. d) 6. e) 8.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 45 – Intervenção Avaliativa Restritiva 01 – Aluno B_1



INTERVENÇÃO AVALIATIVA RESTRITIVA

01. (UEA AM/2017) Na ordem apresentada, os números a seguir formam uma progressão aritmética.

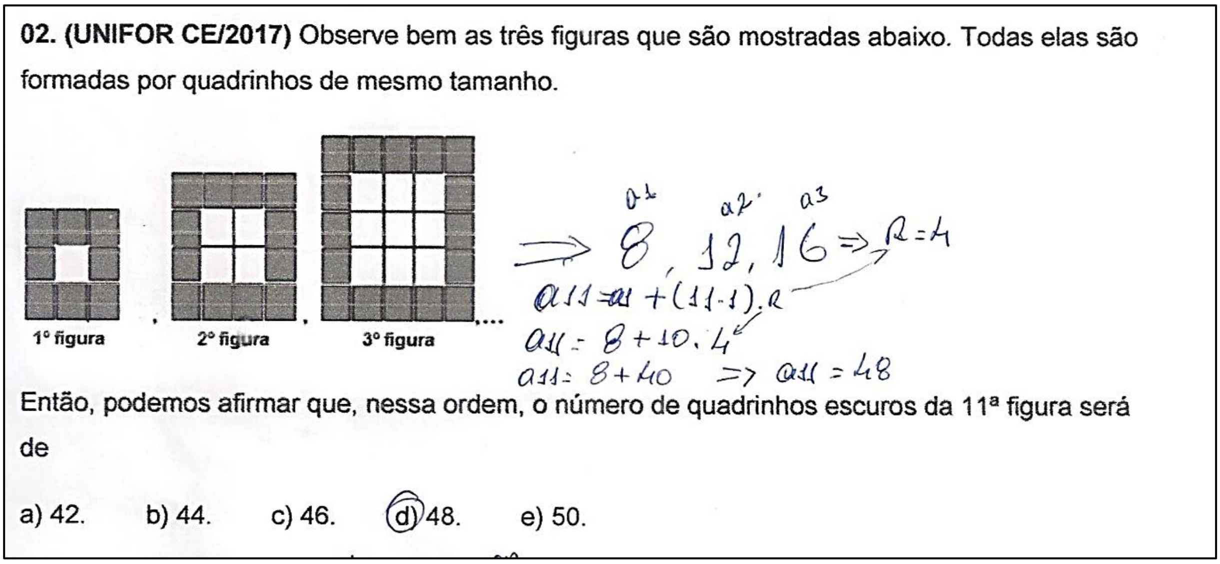
Deste modo, o próximo número dessa progressão será

a) 1. b) 2. c) 4. d) 6. e) 8.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A segunda questão Restritiva foi resolvida pela maioria dos alunos, com apenas dois deles que não conseguiram a finalização correta.

Figura 46 – Intervenção Avaliativa Restritiva 02 – Aluno B_1



02. (UNIFOR CE/2017) Observe bem as três figuras que são mostradas abaixo. Todas elas são formadas por quadrinhos de mesmo tamanho.

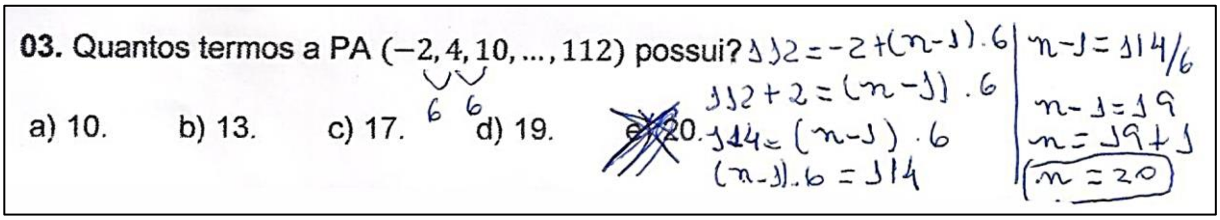
Então, podemos afirmar que, nessa ordem, o número de quadrinhos escuros da 11ª figura será de

a) 42. b) 44. c) 46. d) 48. e) 50.

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na Intervenção Restritiva 03, alguns alunos ficaram com dificuldades no entendimento e após a releitura da questão tiveram um bom desempenho.

Figura 47 – Intervenção Avaliativa Restritiva 03 – Aluno D_1


03. Quantos termos a PA $(-2, 4, 10, \ldots, 112)$ possui?

a) 10. b) 13. c) 17. d) 19. e) 20.

$112 = -2 + (n-1) \cdot 6$

$112 + 2 = (n-1) \cdot 6$

$114 = (n-1) \cdot 6$

$(n-1) \cdot 6 = 114$

$n - 1 = 114/6$

$n - 1 = 19$

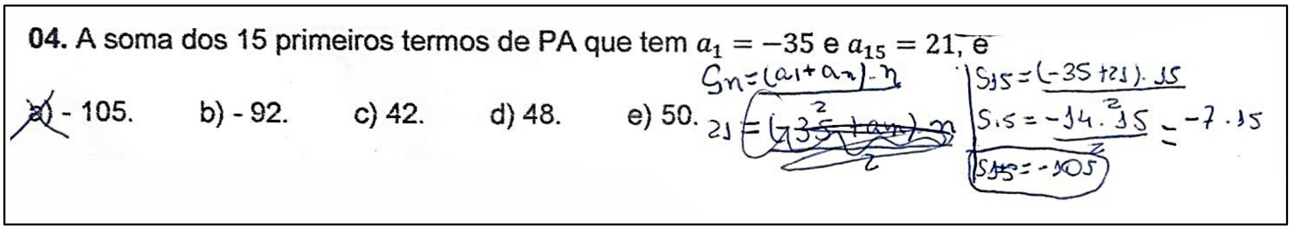
$n = 19 + 1$

$n = 20$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na quarta Avaliação Restritiva, percebemos no cálculo produzido pelos alunos A_2 e C_3 (figuras 49 e 50) que embora tenham semelhanças, os procedimentos finais diferem, mas chegam a mesma conclusão.

Figura 48 – Intervenção Avaliativa Restritiva 04 – Aluno A_2


04. A soma dos 15 primeiros termos de PA que tem $a_1 = -35$ e $a_{15} = 21$, é

a) - 105. b) - 92. c) 42. d) 48. e) 50.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

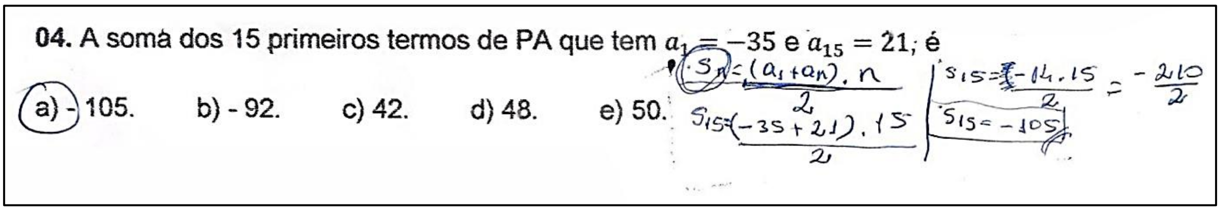
$S_{15} = \frac{(-35 + 21) \cdot 15}{2}$

$S_{15} = \frac{-14 \cdot 15}{2} = -7 \cdot 15$

$S_{15} = -105$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Figura 49 – Intervenção Avaliativa Restritiva 04 – Aluno C_3


04. A soma dos 15 primeiros termos de PA que tem $a_1 = -35$ e $a_{15} = 21$, é

a) - 105. b) - 92. c) 42. d) 48. e) 50.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{15} = \frac{(-35 + 21) \cdot 15}{2}$

$S_{15} = \frac{-14 \cdot 15}{2} = \frac{-210}{2}$

$S_{15} = -105$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Já nas Intervenções Avaliativas Aplicativas, Cabral (2017) enfatiza que elas têm por finalidade a *Resolução de Problemas de Aplicação*. Nesta, o nível de avaliação é mais elevado e o aluno precisa mostrar suas noções conceituais associadas às propriedades operacionais nas situações que envolvam os diversos contextos reais.

Nesta primeira questão Aplicativa, percebemos que de fato houve uma dificuldade maior em relação as Restritivas, mas ainda assim teve um número de acerto por parte dos alunos, bastante satisfatório. Veja na figura 51, a resolução de um aluno:

Figura 50 – Intervenção Avaliativa Aplicativa 01 – Aluno B1

INTERVENÇÃO AVALIATIVA APLICATIVA

01. (UNIFOR CE/2017) Em virtude da grande crise que está afetando o Brasil durante os dois últimos anos, com um reflexo muito grande no desemprego (mais de 13 milhões de pessoas sem emprego, dados do próprio governo), uma empresa em processo de restauração, e para se manter em atividade, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo será utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo Trabalhado (em anos)	Valor da Indenização (em Reais)
1	450
2	950
3	1450
4	1950

(450, 950, 1450, 1950) R = 500

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot R$

$a_{15} = 450 + (15-1) \cdot 500$

$a_{15} = 450 + 14 \cdot 500$

$a_{15} = 450 + 7000$

$a_{15} = 7450$

Baseado na tabela acima proposta pela empresa, podemos afirmar que um funcionário com 15 anos de trabalho na empresa receberia uma indenização em reais de

a) 6.950 b) 7.100 c) 7.450 d) 8.100 e) 8.900

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A Intervenção Aplicativa 02, apresentou um bom resultado após eles perceberem que precisava transformar as unidades de quilômetros para metros, estabelecida com o propósito de aprofundar os debates e contribuir com compreensão de desafios vivenciados nos momentos da intervenção.

Figura 51 – Intervenção Avaliativa Aplicativa 02 – Aluno D1

02. (IFBA/2017) A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia.

Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

21000m

(1000, 1400, 1800, ..., 21000)

Extraído de: http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/ em 26/08/2016

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot R$

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento, que consistia em correr 1000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, esse atleta irá atingir a distância diária de 21 km no:

a) 54º dia b) 53º dia c) 52º dia d) 51º dia e) 50º dia

$21000 = 1000 + (n-1) \cdot 400$

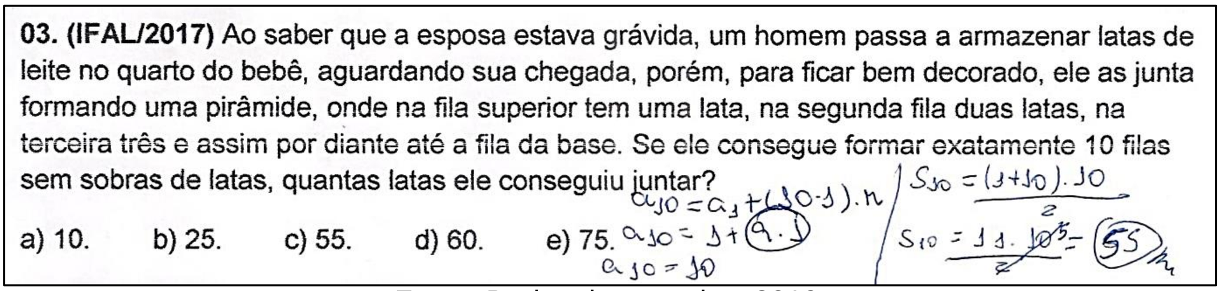
$21000 - 1000 + (n-1) \cdot 400$

$2000/400 = n-1 \rightarrow n = 51$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A Intervenção Aplicativa 03 (figura 53) foi a que teve o menor número de erros com apenas três alunos que não tiveram êxito total.

Figura 52 – Intervenção Avaliativa Aplicativa 03 – Aluno A_2



03. (IFAL/2017) Ao saber que a esposa estava grávida, um homem passa a armazenar latas de leite no quarto do bebê, aguardando sua chegada, porém, para ficar bem decorado, ele as junta formando uma pirâmide, onde na fila superior tem uma lata, na segunda fila duas latas, na terceira três e assim por diante até a fila da base. Se ele consegue formar exatamente 10 filas sem sobras de latas, quantas latas ele conseguiu juntar?

a) 10. b) 25. c) 55. d) 60. e) 75.

$a_{10} = a_1 + (10-1).r$

$a_{10} = 1 + (9.1)$

$a_{10} = 10$

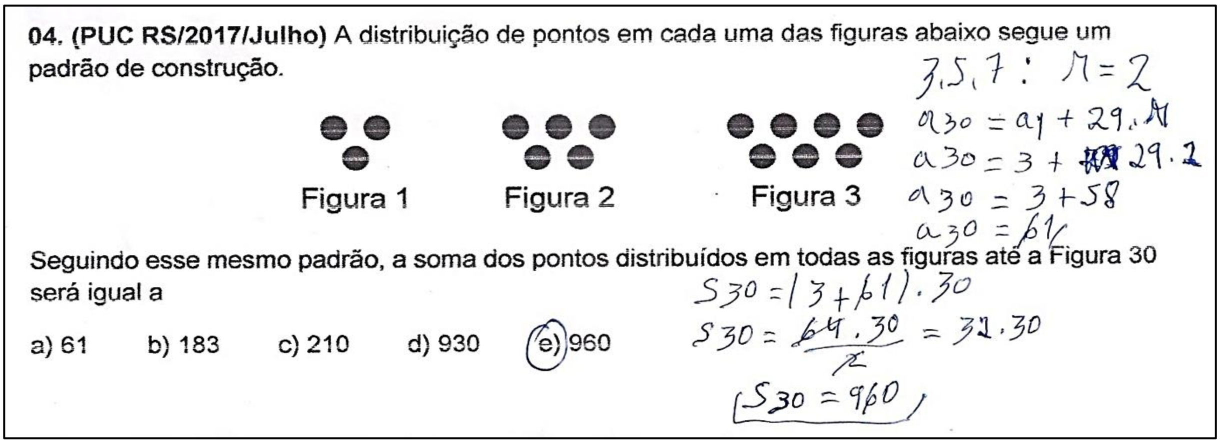
$S_{10} = \frac{(1+10).10}{2}$

$S_{10} = \frac{11.\cancel{10}^5}{\cancel{2}} = 55$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Na quarta e última Intervenção Aplicativa, também houve bom desempenho dos alunos. Na figura 54 temos o cálculo feito pelo aluno D_1, e mostra que houve competência no entendimento da atividade.

Figura 53 – Intervenção Avaliativa Aplicativa 04 – Aluno D_1



04. (PUC RS/2017/Julho) A distribuição de pontos em cada uma das figuras abaixo segue um padrão de construção.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Seguindo esse mesmo padrão, a soma dos pontos distribuídos em todas as figuras até a Figura 30 será igual a

a) 61 b) 183 c) 210 d) 930 e) 960

$3, 5, 7 : r = 2$

$a_{30} = a_1 + 29.r$

$a_{30} = 3 + 29.2$

$a_{30} = 3 + 58$

$a_{30} = 61$

$S_{30} = \frac{(3+61).30}{2}$

$S_{30} = \frac{64.30}{\cancel{2}} = 32.30$

$S_{30} = 960$

Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Após a aplicação da Intervenção Avaliativa, tanto Restritiva quanto aplicativa, observamos o grande diferencial na resolução das atividades propostas, visto que antes da aplicação da Sequência Didática no Ensino da Progressão Aritmética, os alunos tiveram um desempenho muito baixo conforme mostrou o Teste de Verificação (Apêndice A). Dessa forma podemos considerar com total segurança a validade de nossa Sequência Didática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como princípio as dificuldades de aprendizagem dos alunos, intimamente ligadas aos métodos de ensino empregados nas escolas, uma vez perpassado inadequadamente pelos professores, dentro do âmbito da matemática, não havendo o estimulo necessário como ações inovadoras.

Portando, pode-se afirmar que a estudante ao iniciar um processo de aprendizagem matemática na escola, precisa envolver-se com as atividades, onde ao manipulá-las seja construído o conhecimento de forma significativa. Pode-se afirmar que a aplicação de nossa Sequência Didática foi favorável e possibilitou aos alunos as descobertas e entendimento de conceitos e propriedades, diferentemente do método tradicional aplicado nas escolas, nesse caso com a Progressão Aritmética, que assim como os demais assuntos, é de bastante relevância para a Matemática, tanto na sala de aula como nos concursos públicos, ou dos vestibulares em geral como, por exemplo, o próprio ENEM e pelo próprio efeito de aprendizagem.

Nosso estudo teve como base a aplicação de uma oficina de conhecimentos prévios, após a análise investigativa de níveis de conteúdos assimilados pelos alunos alvo da pesquisa prática, para assim conseguirmos introduzir de forma adequada a sequência didática proposta, afim de descrever nossa análise qualitativa do desenvolvimento da pesquisa.

Com isso, foi possível observar as dificuldades de aprendizagens na matemática que se relacionam com o processo de ensino e abordagens dos conteúdos estudados, uma vez que compete ao professor, descobrir novos e detalhados materiais para inserir no planejamento de sua sequência didática, afim de despertar o conhecimento e estimular o raciocínio dos estudantes. Além disso, o professor se conscientiza que o trabalho pautado nesta metodologia facilitará o ensino da resolução de cálculos, no caso da Matemática, além de instigá-lo a ser um pesquisador do raciocínio de seus alunos.

Entender Progressão Aritmética é ter boa noção de Padrões, Sequências numéricas e Juros Simples e um melhor entendimento no estudo das Funções Afins, avançando para as Progressões Geométricas para a compreensão das Funções Exponenciais e os Juros Compostos.

A intensão, antes de tudo, é pela melhoria social através da educação. Acredita-se que esse trabalho pode contribuir para a aprendizagem e gerar discussões para o aprimoramento do ensino em sala de aula. Afinal, é dever da escola, enquanto instituição responsável pela educação sistematizada, buscar meios para não estimular a saída de alunos que têm dificuldades de aprendizagem, não só em matemática, mas que, sobretudo, adote outra posição revendo os métodos e estratégias para que os alunos sintam motivação em estudar, pois só assim a escola, verdadeiramente, será uma agente transformadora da realidade. Especialmente na rede pública, na qual se encontra uma grande quantidade de crianças e jovens menos favorecidos em relação ao acompanhamento ou reforço extra-classe.

As atividades tiveram como princípio estabelecer ligações entre os conteúdos matemáticos, fazendo com que os discentes criassem suas próprias suposições com base no seu conhecimento através da comunicação com outros alunos da turma, com o auxílio do professor. Essa interação professor-aluno e aluno-aluno teve uma importância bastante significativa para o processo ensino-aprendizagem e, segundo os dados analisados em nossa pesquisa, a potencialidade do uso da Sequência Didática para o ensino da Progressão Aritmética foi comprovada, portanto, podemos afirmar a questão de pesquisa foi respondida.

A presente pesquisa tratou de um projeto de intervenção pedagógica para o nível de Ensino Médio, que foi desenvolvido durante sua execução realçando três ideias chave: todos os alunos podem gostar de matemática, a matemática é a ciência dos padrões e a descoberta de padrões como uma estratégia poderosa de resolução de problemas, que posteriormente podem ser usados como subsídios por professores de matemática. Pois, cabe a cada um de nós professores, ajudar os nossos alunos a superarem suas dificuldades, orientando-os a desenvolver a curiosidade, fazerem questionamentos, avaliando-se no percurso do processo ensino-aprendizagem para que percebendo seus avanços, suas limitações e também o seu potencial para se tornar um cidadão crítico , participativo, reflexivo e responsável na construção de um mundo mais justo onde as pessoas tenham realmente direito à educação para todos, uma educação pública de qualidade. Além disso, o professor precisa se preocupar com sua formação continuada, além da utilização de uma linguagem bastante acessível ao aprendizado do aluno.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, ELIANE APARECIDA MARTINS DE. **Progressões Aritmética e Geométricas: Praxeologias em Livros Didáticos**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho de 2013.

ALMEIDA, M. M. M de. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores**. 2006. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ALMOLOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Editora UFPR. 2014.

ARANHA, Álvaro Zimmermann. **Progressões Aritiméticas e Geométricas** / Álvaro Zimmermann, Manuel Benedito Rodrigues. 2ª ed. rev. melhor. São Paulo: Policarpo, 1994. (Exercícios de Matemática v. 3).

ARCHILIA, SEBASTIÃO. **Construção do termo geral da Progressão Aritmética pela observação e generalização de padrões**. 2008. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ARTIGUE, M. (1988): **“Ingénierie Didactique”**. Recherches en **Didactique des** Artigue, M. (1996) “Engenharia Didáctica”, In: **DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS.**

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Introdução à análise matemática.** São Paulo: Blucher, 1999.

BARBOZA, D. ZANELLA, A. V. **Integrando análise de conteúdo e análise microgenética em pesquisas no campo psi: a constituição do sujeito como foco.** Revista *PSICO*, Porto Alegre, PUCRS, v. 36, n. 2, pp. 189-196, maio/ago. 2005.

BOYER, CARL B., Livro: **História da Matemática.** Editora Edgard Blücher Ltda. 1996.

BRASIL. **Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm Acesso em: 02 de novembro de 2018.

________. **PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** As ciências da natureza e a matemática, 2002.

BROSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: conteúdos e Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget. Autêntica: Belo Horizonte, 2011.

CABRAL, CRISTIANE PELISOLLI. **Uma Abordagem Microgenética da Construção do Conhecimento.** Porto Alegre 2010.

CABRAL, NATANAEL FREITAS. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração/ Natanael Freitas Cabral. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

_____________ **O papel das Interações Professor-aluno na construção da solução Sólido-aritmética otimizada de um jogo com regras**. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Pará. Belém, Pará, 2004.

CARVALHO, CEZAR AUGUSTO SVERBERI. **Generalizações e Progressões Aritméticas: Uma experiência com alunos do Ensino Médio.** XII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e VIII Encontro Latino Americano de Pós-Graduação – Universidade do Vale do Paraíba. [s/d].

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CORRÊA, J; MACLEAN, M. **Aprendendo a ler e a escrever: a narrativa das crianças sobre a alfabetização.** Psicologia Reflexão e Crítica, v.12, 1999.

COSTA, Marco Antônio F. da; **COSTA,** Maria de Fátima Barrozo da. **Projeto de Pesquisa: Entenda e Faça.** 3. Ed. Petrópolis- RJ: Vozes, 2012.

CUNHA, MÁRCIO MACÁRIO DA. **Progressões Aritméticas, Geométricas e Fractais**. 2013. Disponíveis em: http://www.apm.pt/portal/em.php?id=21384&rid=21344 (Associação de professores de matemática de Portugal -descobrindo a magia dos fractais com cortes de papel).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Ensino Médio. 1 ed. São Paulo: Ática, 2004. 320p.

DOUADY, Regine. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères, IREM, n.6, Topiques Editins, jan, 1992.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues.** Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1995 (tese de doutorado).

FARIAS, JEAN DUARTE. **Inter-relação entre Progressão Aritmética e Função: Uma nova visão para o Ensino Médio.** PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, 2015.

FIORENTINI, D. FERNANDES, F. CRISTOVÃO, E. **Um Estudo das Potencialidades Pedagógicas das investigações Matemáticas no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.** Faculdade de Educação: Unicamp.2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/FiorentiniFernandes-Cristovao2.doc. Acesso em: 10 ago.2018.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar.** Revista Quadrimestral Pro-Posições, Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79 – 91, mar. 1993.

FLYNN, E.; PINE, K.; LEWIS, C. **The microgenetic method**: time for change? *The Psychologist, 19(3),* 152-155.

FREIRE, P**. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FUSARI, J. C. **Formação contínua de professores: o papel do Estado, da universidade e do sindicato**. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 9., 1998, Águas de Lindóia. Conferências, mesas-redondas e simpósios. Petrópolis: Vozes, 1998.

G1. **Especialistas dizem que formação de professores é deficiente no Brasil**. 01 de agosto de 2013. Disponível em: http://g1.globo.com/bom-dia-brasil/noticia/2013/08/especialistas-dizem-que-formacao-de-professores-e-deficiente-no-brasil.html Acesso em: 20 de fev de 2019.

GARCIA, RONEY ROJER ORTIZ. **Progressão Aritmética aplicada no financiamento de imóveis.** 2013. CAIXA, Caixa Financia Despesas de Cartório e ITBI no Crédito Imobiliário. Disponível em: <http://www1.caixa.gov.br/imprensa/imprensa_release.asp?codigo=7012516> Acesso em: 30 mar. 2017.

GATTI, B. **A formação de professores e carreira**: problemas e movimentos de renovação. Campinas, SP: Autores Associados, 1997.

GATTI, BERNARDETE A., RBPAE - **A Construção Metodológica da Pesquisa em Educação**: desafios Methodological construction of research in education: challenges v. 28, n. 1, p. 13-34, jan/abr. 2012.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa: Ensino Médio**. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005a. LIMA, Elon Lages. Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

GÓES, M. C. R. de. **A Abordagem Microgenética na Matriz Histórico-Cultural:** Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes, ano XX, n. 50. abril, p. 9-25, 2000, ISSN 1678-7110.

GOULART, Nathalia. **Receber recompensas demais atrapalha o desempenho escolar:** Pesquisa inédita revela o comportamento e a saúde mental da população infanto-juvenil, 2010. Disponível em: < https://veja.abril.com.br/educacao/receber-recompensas-demais-atrapalha-o-desempenho-escolar/> acesso em: 20/01/2019.

HERBERT, K.; BROWN, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. Teaching Children Mathematics, v. 3, p. 340-345, 1997. http://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/ciencias-da-natureza-matematica-e-suastecnologias-mais.pdf> Acesso em: 16/04/2017.

IEZZI, G. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências Matrizes Determinantes Sistemas. Vol 4. 2ª Ed. Editora Atual. 2012.

JÓFILI, Zélia. Piaget, Vygotsky. **Freire e a Construção do Conhecimento na Escola.** Disponível em: http//sis.posugf.com.br/sistema/rota/rotas_1/115/document/mod_001/objetos/piaget_vigotsky_paulo_freire.pdf. Acesso em 15/03/2018**.**

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. Campinas, SP: Papirus, 2007.

KFOURI, William; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Explorar e investigar para aprender matemática através da modelagem matemática.** In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES EM PÓS - GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, 10, 2006, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2006. Disponível em:http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/09 -02.pdf Acesso em: 19 jan. 2011.

KLASSMANN**,** Liane Maria griolo. **O Lúdico no Processo de Aprendizagem de Crianças na Educação Infantil**. 2013. 36 páginas. Monografia (Especialização em Educação: métodos e técnicas de ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Mediana, 2013.

LAKATOS, E.M., MARCINI, M. A. Fundamentos de metodologia. 5. ed. - São Paulo: Atlas, 2003.

LEAL, CRISTIANNI ANTUNES. **Sequência Didática**: brincando em sala de aula- uso de jogos cooperativos no ensino de ciências. (2011).

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.87-106.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. v.1.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LUTZ, M. R. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Estatística a Alunos do Ensino Médio na Modalidade PROEJA.** Porto Alegrete: UFRGS, 2012. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A.(Org.). Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 – 212.

______________ O aluno de quinta série é capaz de perceber e descrever regularidade em um padrão? Revista Prove, São Paulo: Páginas & Letras, n. 5, nov. 2006.

MAFUANI, F. **Estágio e sua Importância para a Formação do Universitário**. Instituto de Ensino superior de Bauru. 2011. Disponível em: http://www.iesbpreve.com.br/base.asp?pag=noticiaintegra.asp&IDNoticia=125 Acesso em: de abril de 2018.

MEIRELLES, E. **Como organizar sequências didáticas**. Nova Escola, 2014. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1493/como-organizar-sequencias-didaticas Acesso em: 15 janeiro 2019.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

MEC, Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologia (PCN+). Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598 %3 Apublicacoes&Itemid=859>. Acesso em: 31 mar. 2018.

MENDES, Iran Abreu**. Números: o simbólico e o racional na história.** Natal: Editorial Flecha do Tempo, 2005.

MINAYO, M. C. de S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 17ª ed. Petrópolis. RJ: Vozes, 2015.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais** PCN – Ensino Médio, Brasília: 2002.

MODANES, L. **Das Seqüências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 92 f.

MOREIRA, M. A. e MASINI, E.F.S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de aprendizagem de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes. 1982.

NÓVOA, Antônio. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

OLIVEIRA, M. A. P. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial.** Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Universidade do Estado do Pará, 2018.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autentica 2002.

______________. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa.* 3 e.d. Belo Horizonte: Autêntica., 2011.

PAIVA, Manoel. Matemática: Ensino Médio. Vol. 1. São Paulo: Moderna, 2009.

PEREZ, E. P. Z. Alunos do ensino médio e a generalização de padrões. 2006. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática**: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares**: Um desafio motivador para alunos do Ensino Médio. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP, 2008.

REINALDO, REGIANE DA SILVA. **Formação continuada de professores dos anos iniciais:** proposições ao ensino do sistema de numeração decimal. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação Ciências e Matemáticas-Mestrado Profissional**,** do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), como requisito avaliativo para obtenção do título de mestra. 2017. 101 f.

RICO, Rosi. **"A maioria dos países foca no que ensinar e tende a dar autonomia no como" - Após estudo internacional, pesquisadora considera que o atual modelo curricular brasileiro gera desigualdade.** NOVA ESCOLA, Edição 33, 14 de Agosto de 2015. 5 páginas. Disponível em < file:///C:/Users/Monique%20Almeida/Downloads/a-maioria-dos-paises-foca-no-que-ensinar-e-tende-a-dar-autonomia-no-comopdf.pdf> Acesso em 20 de fevereiro de 2019.

RÚDIO, Franz Victor. **Introdução ao projeto de pesquisa científica.** 30 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br>. Acesso em: 20 nov. 2017.

SILVA, M. de O. P. da. **As relações didático-pedagógicas no ensino de Geometria com o software Cabre Geometre**. Curitiba, 2008. Disponível em: < www.portaleducacao.com.br/educacao/artigos/48778/a-situacao-a-didatica-proposta-porbrousseau >. Acesso em 07/02/2018.

Site, QUEM É FIBONACCI, Disponível em < http:/www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm > acesso em 15/03/2017.

SPINILLO, Alina Galvão; MAGINA, Sandra. **Alguns "mitos" sobre a educação matemática e suas consequências para o Ensino Fundamental.** In: Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula, São Paulo: Coleção SBEM, v. 2, 2004.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp: v. 21, n. 39, p. 135- 169 2013. Disponível em:

https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602. Acesso em 20/fevereiro/2018.

TOMIO, D. SCHROEDER, E. ADRIANO, G. A. C. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural.** *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, Set./Dez. 2017.

VALE, I. et.al. Os padrões no Ensino da Álgebra. Escola Superior de Educação de Viana do Castelo - LIBEC, 2008.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. Revista Educação e Matemática, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov/dez, 2005.

VIANA, M. A. P. **Internet na Educação: Novas formas de aprender, necessidades e competências no fazer pedagógico.** In: MERCADO, L. P. L. (Org.) *Tendências na utilização das tecnologias da informação e comunicação na educação.* Maceió: EDUFAL, 2004. 228p.

VYGOTSKY. L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

_____________. *Formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

_____________. O desenvolvimento psicológico na infância. São Paulo: Martins Fontes, 1998b.

_____________. Psicologia pedagógica. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

ZABALA, Antoni (2007). **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani F. da Rosa – Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICE A – TESTE DE VERIFICAÇÃO

Universidade do Estado do Pará
Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática

Mestrando: Natanael de Oliveira Mota
Público alvo: Estudantes de uma turma do 1º ano do Ensino Médio
Local: Escola Pública Estadual
Teste sobre conteúdos matemáticos pré-requisitos para a aprendizagem de Progressão Aritmética

Aluno: ______________________________ Data: _____ / _____ / _______

Matemática Financeira

01. (UERJ/2018)

Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras.

O valor de x é igual a:

a) 0,0125 b) 0,005 c) 0,025 d) 0,05

Operações com Números Inteiros

02. (FCM MG/2017/Julho) Uma enfermeira acompanha um paciente hospitalizado. O médico, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 4 em 4 horas, remédio B, de 3 em 3 horas e remédio C, de 6 em 6 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 9 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão simultânea desses remédios?

a) 6 horas do dia seguinte.

b) 9 horas do dia seguinte.

c) 12 horas do mesmo dia.

d) 21 horas do mesmo dia.

03. (FUVEST SP/2017) Sejam *a* e *b* dois números inteiros positivos. Diz-se que *a* e *b* são equivalentes se a soma dos divisores positivos de *a* coincide com a soma dos divisores positivos de *b*. 16 e 25. Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

(   ) Falso

(   ) Verdadeiro

04. (CEFET PR/2017) Sendo n um número natural, $n \neq 0$, assinale a alternativa verdadeira.

a) O número $n^2 + 3$ é sempre um número ímpar.

b) O número n^3 é sempre divisível por 3.

c) O número n(n – 1) é sempre ímpar.

d) O mínimo múltiplo comum entre n e 2n é sempre um número par.

e) O máximo divisor comum entre n e 2n é 2n.

Operações com Números Reais

05. (IFAL/2017) Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e xy = 2.

a) 27 b) 31 c) 38 d) 49 e) 54

06. (CEFET PR/2017) Um fazendeiro possui dois terrenos quadrados de lados x e y, sendo x > y. Represente na forma de um produto notável a diferença das áreas destes quadrados.

a) (x + y).(x + y) b) (x + y).(x – y) c) (x – y).(x – y) d) $(x + y)^2$ e) $(x – y)^2$

Problemas

07. (IFSC/2017) Um cliente foi ao caixa do banco do qual é correntista e sacou R$ 580,00. Sabendo-se que a pessoa recebeu toda a quantia em 47 notas e que eram apenas notas de R$ 5,00 e de R$ 20,00, é CORRETO afirmar que a pessoa recebeu

a) 25 notas de R$ 5,00 e 22 notas de R$ 20,00.

b) 20 notas de R$ 5,00 e 27 notas de R$ 20,00.

c) 23 notas de R$ 5,00 e 24 notas de R$ 20,00.

d) 27 notas de R$ 5,00 e 20 notas de R$ 20,00.

e) 24 notas de R$ 5,00 e 23 notas de R$ 20,00.

08. (IFSC/2017) Além de oferecer cursos gratuitos de Ensino Médio e Graduação, entre outros, o IFSC também oferece a seus alunos e à comunidade a chance de participação em aulas de Teatro, Prática de Orquestra e Coral.

Sabendo que uma determinada atividade do Coral do IFSC, incluindo tempo de viagem e apresentação, teve início às 21h47min e terminou às 05h22min da manhã do dia seguinte, assinale a alternativa CORRETA, que apresenta o tempo total de duração da atividade:

a) 505 minutos

b) 385 minutos

c) 455 minutos

d) 515 minutos

e) 985 minutos

APÊNDICE B – OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Conjuntos:

1) Descreva os conjuntos numéricos:

Conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N} = \{$

Conjunto dos Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{$

Conjunto dos Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{$

Conjunto dos Números Irracionais: $\mathbb{I} = \{$

Representação em diagrama dos conjuntos numéricos:

Conclusão:

2) Se um determinado conjunto possui 7 elementos, quantos subconjuntos ele possui?

R: ____________________

3) (UNITAU SP) Sabendo-se que um conjunto A possui 512 subconjuntos, é CORRETO afirmar que o número de elementos de A é

a) 9

b) 15

c) 28

d) 36

e) 54

4) (PUC RJ) Considere o conjunto A = {3,5}. Sabendo que $B \cap A = \{3\}$ e $B \cup A = \{1,2,3,4,5\}$, determine o conjunto B.

a) B = {1,2,3}

b) B = {1,2,4}

c) B = {1,2,3,4}

d) B = {1,2,3,5}

e) B = {1,2,3,4,5}

5) Os conjuntos X = {0,4,5,6,7,x} e Y = {1,3,6,8,x,y} possuem o mesmo número de elementos e X ∩ Y = {2,6,7}. Para os elementos x e y, o valor numérico de 5x – 2y é

a) – 4.
b) – 2.
c) 0.
d) 26.
e) 31.

Função afim: É toda função polinomial do primeiro grau. Formalmente escrita por:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função afim se existem dois números reais ***a*** e ***b*** que satisfaçam a condição: $\forall x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, onde $y = f(x) = ax + b$

Aplicações:

1) Preencha o quadro de cada função dada:

a) $f(x) = 2x - 3$

x	***y=f(x)***	***(x, y)***
- 1		
0		
1		
2		
3		

b) $f(x) = -x + 2$

x	***y=f(x)***	***(x, y)***
- 1		
0		
1		
2		
3		

a) $f(x) = 6$

x	***y=f(x)***	***(x, y)***
- 1		
0		
1		
2		
3		

2) Supondo que você é um vendedor, cujo salário mensal é de R$ 1.600,00. Porém, a cada produto vendido você ganha uma comissão de 5%, ou 0,05 vezes o valor do produto. A função que descreverá, em função do valor vendido durante o mês é do tipo afim, e será descrita pela lei:

3) Um atleta ao ser submetido a um determinado treino específico apresenta, ao longo do tempo, ganho de massa muscular. A função $P(t) = P_0 + 0,19\ t$, expressa o peso do atleta em função do tempo ao realizar esse treinamento, sendo P_0 o seu peso inicial e t o tempo em dias.
Considere um atleta que antes do treinamento apresentava 60 kg e que necessita chegar ao peso de 65 kg, em um mês. Fazendo unicamente esse treinamento, será possível alcançar o resultado esperado?

4) Uma certa indústria produz peças de automóveis. Para produzir essas peças a empresa possui um custo mensal fixo de R$ 10 200,00 e custos variáveis com matéria prima e demais despesas associadas à produção. O valor dos custos variáveis é de R$ 0,40 por cada peça produzida.
Montar a função que define o custo de produção $C_p(x)$:

Sequências numéricas:

1) Montar as seguintes sequências:

a) Sequência 1, somar com 6 (2, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

b) Sequência 2, subtrair de 4 (10, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

c) Sequência 3, multiplicar por 2 (3, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

d) Sequência 4, dividir por 2 (480, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

2) Observe as sequências e complete-as:

a) (2, 4, 6, 8, 10, ___)

b) (2, 5, 9, 14, 20, 27, ___)

c) (10, 6, 2, -2, -6, ___)

d) (24, 12, 6, ___)

e) (12, 8, 4, ___)

f) (16, 8, 4, ___)

g) (-35, -30, -25, ___)

3) Das sequências da questão 6, qual a característica de cada uma?

a) ____

b) ____

c) ____

d) ____

e) ____

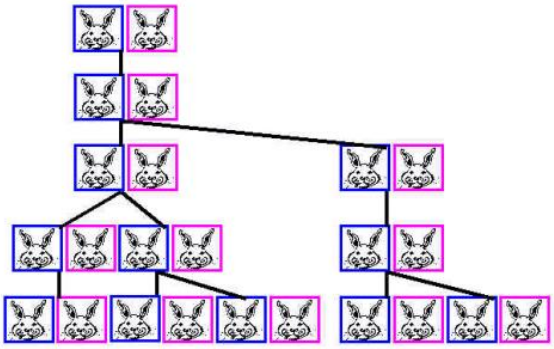
f) ____

g) ____

4) A sequência a seguir é uma sequência especial conhecida por Sequência de Fibonacci, em homenagem a Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), matemático italiano, de grande influência na idade média. Muitos consideram Fibonacci como o maior matemático da idade média. Introduziu os algarismos arábicos na Europa, observou essa sequência na natureza e a descreveu.

http://www.math.ethz.ch/fibonacci/Eroeffnung

Em 1202, aos 32 anos ele escreveu o "Liber Abaci" (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo) que é um tratado completo sobre métodos e problemas algébricos. Nesse livro, foi proposto um problema sobre coelhos que se tornou muito conhecido. Esse foi o primeiro modelo matemático de descrição do crescimento de populações. “Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?”



http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/coelhos.htm

Observe a situação descrita na tabela, e complete-a.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de casais	1	1	2	3	5							

Analisando os termos da sequência descreva o que você percebeu que cada termo, após os dois primeiros?

R:____

____

APÊNDICE C – INTERVENÇÃO AVALIATIVA RESTRITIVA E APLICATIVA

RESTRITIVA:

01. (UEA AM/2017) Na ordem apresentada, os números a seguir formam uma progressão aritmética.

Deste modo, o próximo número dessa progressão será

a) 1.

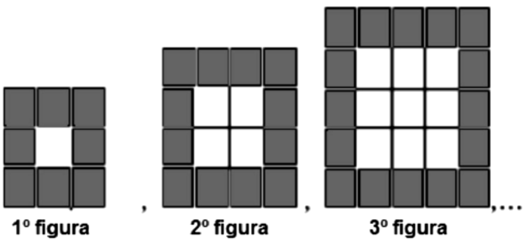
b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

02. (UNIFOR CE/2017) Observe bem as três figuras que são mostradas abaixo. Todas elas são formadas por quadrinhos de mesmo tamanho.



Então, podemos afirmar que, nessa ordem, o número de quadrinhos escuros da 11ª figura será de

a) 42.

b) 44.

c) 46.

d) 48.

e) 50.

03. Quantos termos a PA $(-2, 4, 10, \dots, 112)$ possui?

a) 10.

b) 13.

c) 17.

d) 19.

e) 20.

04. A soma dos 15 primeiros termos de PA que tem $a_1 = -35$ e $a_{15} = 21$, é

a) - 105.

b) - 92.

c) 42.

d) 48.

e) 50.

APLICATIVA:

01. (UNIFOR CE/2017) Em virtude da grande crise que está afetando o Brasil durante os dois últimos anos, com um reflexo muito grande no desemprego (mais de 13 milhões de pessoas sem emprego, dados do próprio governo), uma empresa em processo de restauração, e para se manter em atividade, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo será utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo Trabalhado (em anos)	Valor da Indenização (em Reais)
1	450
2	950
3	1450
4	1950

Baseado na tabela acima proposta pela empresa, podemos afirmar que um funcionário com 15 anos de trabalho na empresa receberia uma indenização em reais de

a) 6.950

b) 7.100

c) 7.450

d) 8.100

e) 8.900

02. (IFBA/2017) A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia.

Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

Extraído de: http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/ em 26/08/2016

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento, que consistia em correr 1000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, esse atleta irá atingir a distância diária de 21 km no:

a) 54º dia

b) 53º dia

c) 52º dia

d) 51º dia

e) 50º dia

03. (IFAL/2017) Ao saber que a esposa estava grávida, um homem passa a armazenar latas de leite no quarto do bebê, aguardando sua chegada, porém, para ficar bem decorado, ele as junta formando uma pirâmide, onde na fila superior tem uma lata, na segunda fila duas latas, na terceira três e assim por diante até a fila da base. Se ele consegue formar exatamente 10 filas sem sobras de latas, quantas latas ele conseguiu juntar?

a) 10.

b) 25.

c) 55.

d) 60.

e) 75.

04. (PUC RS/2017/Julho) A distribuição de pontos em cada uma das figuras abaixo segue um padrão de construção.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Seguindo esse mesmo padrão, a soma dos pontos distribuídos em todas as figuras até a Figura 30 será igual a

a) 61 b) 183 c) 210 d) 930 e) 960

ANEXO A – TCLE DOS ALUNOS EGRESSOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Aluno(a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa a nível de Mestrado, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Natanael de Oliveira Mota** (orientando) e **Natanael Freiras Cabral** (orientador), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA), Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a vocês. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e de assinatura de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **NATANAEL DEOLIVEIRA MOTA** (natanaelseis@gmail.com) ou **NATANAEL FREITA CABRAL** (natanfc61@yahoo.com.br). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo sem Fio. Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, ________ de _______________ de 20____

____

Assinatura do Pesquisador

Eu, aluno(a)____,

aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____________________________ ___________________________________

Assinatura do Aluno(a) Assinatura do Responsável do aluno(a)

ANEXO B – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS EGRESSOS

Prezado(a) aluno(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Idade: __________

2. Série: __________

3. Gênero:

( ) Masculino ( )Feminino

4. Tipo de escola

( ) Pública Municipal

( ) Pública Estadual

( ) Pública Federal

5. Qual a escolaridade do seu **Pai** ou **responsável Masculino** (Até que nível estudou)?

(Marque apenas uma opção)

( ) Nenhum

( ) Fundamental incompleto

( ) Fundamental completo

( ) Ensino Médio incompleto

( ) Ensino Médio completo

( ) Ensino Superior completo

( ) Pós-Graduação completo

6. Qual a escolaridade da sua **Mãe** ou **responsável Feminino** (Até que nível estudou)?

(Marque apenas uma opção)

( ) Nenhum

( ) Fundamental incompleto

( ) Fundamental completo

( ) Ensino Médio incompleto

( ) Ensino Médio completo

( ) Ensino Superior completo

( ) Pós-Graduação completo

7. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino? ____

8. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino? ____

9. Você está ou já esteve em dependência em Matemática?

( ) Sim, Estou (atualmente) em dependência em Matemática

( ) Sim, já estive (no passado) em dependência em Matemática

( ) Não. Nunca fiquei de dependência em Matemática

10. Com que frequência você costuma estudar matemática fora da escola?

( ) Todos os dias

( ) Mais de 3 vezes por semana

( ) Costumo estudar 3 vezes ou menos por semana

( ) Só no período de prova

( ) Não costumo estudar fora da escola

11. Você gosta de Matemática?

( ) Não gosto

( ) Um Pouco

( ) Sim. Gosto

( ) Sim. Gosto bastante

12. Quem mais lhe ajuda nas tarefas de matemática?

(Marque mais de uma opção, se necessário)

( ) Professor particular

( ) Pai ou Responsável (Masc)

( ) Mãe ou Responsável (Fem)

( ) Irmão

( ) Costumo estudar sozinho

( ) Outro:_________________

13. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?

( ) Sempre

( ) Quase sempre

( ) Poucas vezes

( ) Nunca compreendo

14. Quais as principais formas de avaliação o (a) professor (a) de matemática costuma solicitar a você?

(Marque mais de uma opção, se necessário)

( ) Prova oral

( ) Prova escrita

( ) Auto avaliação

( ) fichas de observação

( ) produções no caderno

( ) Outros. Qual:__________________________

15. Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação em Matemática? (Marque no máximo 2 opções)

( ) Entusiasmado ( ) Tranquilo

( ) Com Medo ( ) Preocupado

( ) Com Raiva ( ) Sinto Calafrios

( ) Outros: _______________________________

16. Quando você estudou Progressão Aritmética (PA), a maioria das aulas foram:

( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios.

( ) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto.

( ) Criando um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.

( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos.

( ) Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas.

( ) Outra metodologia: ____

17. Para fixar o conteúdo estudado de Progressão Aritmética (PA), o seu professor (a):

( ) Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos

( ) Apresentava jogos envolvendo o assunto

( ) Mandava resolver os exercícios do livro didático

( ) Não propunha questões de fixação

( ) Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.

( ) Propunha a resolução de questões por meio de softwares.

18. Como você gostaria de aprender Progressão Aritmética (PA)?

Assunto	Frequência de utilização				
	Sempre	Quase sempre	As vezes	Raramente	Nunca
Através de aulas expositivas e consulta ao livro didático					
Através de situação problema para introduzir o assunto					
Através de experimentações práticas do dia-a-dia					
Através de Jogos para depois sistematizar os conceitos					
Através de Software para resolução de PA					
Através de aplicativos para smartphone					

19. No que se refere o grau de dificuldade em aprender Progressão Aritmética (PA), preencha o quadro abaixo:

(Marque com um X)

Quadro de dificuldades dos alunos em relação a aprendizagem de Progressão Aritmética

		Quadro de Dificuldades					
Nº	**Assunto/Habilidades**	**Muito Fácil**	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito Difícil**	**Não lembro**
01	Identificação de uma PA, observando a sequência:						
02	Identificar a Razão da PA:						
03	Definição de uma PA:						
04	Classificação da PA Crescente:						
05	Classificação da PA Decrescente:						
06	Classificação da PA Constante:						
07	Fórmula do Termo Geral da PA:						
08	Reconhece as Propriedades da PA:						
09	Interpolação Aritmética:						
10	Fórmula da Soma dos Termos de uma PA:						
11	Resolver Problemas de PA:						

20. Você possui acesso a internet?

( ) Não possuo ( )Sim, somente em casa ( )Sim, somente pelo celular

( )Sim, pelo celular e tenho WiFi em casa

21. Quanto ao uso de recursos tecnológicos, quais dos seguintes equipamentos você costuma utilizar?

Assunto	Frequência de utilização				
	Sempre	Quase sempre	As vezes	Raramente	Nunca
Você utiliza o computador pessoal para fazer suas atividades escolares.					
Você faz pesquisas na internet através do computador.					
Você acessa internet no celular pessoal para fazer atividades escolares.					
Você utiliza redes sociais de relacionamento no celular					
Você utiliza aplicativos de Mensagens instantâneas					
Você tira dúvidas com o professor através de mensagens por celular					
Você utiliza calculadora científica para estudar matemática					

ANEXO C – TCLE DOS PROFESSORES

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Professor(a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA sob a responsabilidade dos pesquisadores **Natanael de Oliveira Mota** (orientando) e **Natanael Freiras Cabral** (orientador), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

A sua colaboração será de permitir que as atividades sejam realizadas em sua turma e auxiliar os pesquisadores durante a execução das atividades, dentre outras. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **NATANAEL DEOLIVEIRA MOTA** (natanaelseis@gmail.com) ou **NATANAEL FREITA CABRAL** (natanfc61@yahoo.com.br). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo sem Fio. Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, _______ de _______________ de 20___

____

Assinatura do pesquisador

Eu, professor(a) ____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do professor participante da pesquisa

ANEXO D – QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES

Prezado (a) Professor (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino aprendizagem da Matemática. Para tanto, necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. Idade: _______

2. Gênero:

( ) Masculino

( ) Feminino

3. Você possui graduação em?

( ) Matemática

( ) Outros, Qual ________________________________

4. Tipo de escola que trabalha?

( ) Pública Municipal

( ) Pública Estadual

( ) Pública Federal

( ) Privada

5. Qual sua formação acadêmica?

( ) Somente Graduação

( ) Especialização (em andamento)

( ) Especialização

( ) Mestrado (em andamento)

( ) Mestrado

( ) Doutorado (em andamento)

( ) Doutorado

6. Qual o seu tempo desserviço como professor (a) da disciplina de Matemática?

( ) Menos de um ano

( ) 01 a 05 anos

( ) 06 a 10 anos

( ) 11 a 15 anos

( ) 16 a 20 anos

( ) 21 a 25 anos

( ) 26 a 30 anos

( ) 31 a 35 anos

7. Em quantas escolas você trabalha?

( ) 1 escola

( ) 2 escolas

( ) 3 escolas

( ) mais de 3 escolas

8. Em quais séries você lecionou a disciplina de Matemática?

( ) 6º ano do EF

( ) 7º ano do EF

( ) 8º ano do EF

( ) 9º ano do EF

( ) 1º ano do EM

( ) 2º ano do EM

( ) 3º ano do EM

9. Em quais séries você está lecionando a disciplina de Matemática?

( ) 6º ano do EF

( ) 7º ano do EF

( ) 8º ano do EF

( ) 9º ano do EF

(   ) 1º ano do EM

(   ) 2º ano do EM

(   ) 3º ano do EM

10. Qual o número médio de alunos por turma?

a) no ensino fundamental:

(   ) de 15 a 20 alunos

(   ) de 21 a 35 alunos

(   ) de 36 a 45 alunos

(   ) de 46 a 55 alunos

(   ) mais de 55 alunos

b) no ensino médio:

(   ) de 15 a 20 alunos

(   ) de 21 a 35 alunos

(   ) de 36 a 45 alunos

(   ) de 46 a 55 alunos

(   ) mais de 55 aluno

11. Você exerce outra função remunerada além de professor?

(   ) Não

(   ) Sim. Quais? ________________________________

12. Durante sua formação inicial (graduação) você participou de alguma disciplina sobre o ensino das Progressões Aritméticas?

(   ) Não

(   ) Sim. Qual? ________________________________

13. Você participou de eventos e/ou treinamentos que envolveram o conteúdo de Progressão Aritmética?

(   ) Não

(   ) Sim

14. Em relação às atividades que exerce em sala de aula, você participou de algum curso nos últimos 2anos?

( ) Não

( ) Sim. Qual? ______________________________

15. Quais as principais formas de avaliação você costuma solicitar? (Marque mais de uma opção, se necessário)

( ) Prova oral

( ) Prova escrita

( ) Testes

( ) Produções no caderno

( ) Outros

16. Como você costuma se sentir quando está aplicando uma avaliação em Matemática? (Marque no máximo 2 opções).

( ) Entusiasmado

( ) Tranquilo

( ) Preocupado

( ) Outros

17. Quando você ensina Progressão Aritmética, a maioria das aulas inicia:

( ) Pela definição seguida de exemplos e exercícios

( ) Com uma situação problema para depois introduzir o assunto

( ) Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o mesmo

( ) Com jogos para depois sistematizar os conceitos

( ) Utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas

( ) Outra metodologia

18. Para fixar o conteúdo estudado de Progressão Aritmética, você costuma:

( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos

(   ) Apresentar jogos envolvendo o assunto

(   ) Mandar resolver os exercícios do livro didático

(   ) Não propor questões de fixação

(   ) Mandar os alunos procurarem questões sobre o assunto para resolver

(   ) Propor a resolução de questões por meio de softwares

19. Você já realizou um estudo sobre Progressão Aritmética por meio de atividades/ experimentos?

(   ) Não

(   ) Sim. Quais resultados foram obtidos? ________________________________

20. Quantas aulas normalmente você gasta para trabalhar o assunto de Progressão Aritmética?

Resposta: ______________________

21. No que se refere ao grau de dificuldade dos alunos em aprender o assunto de Progressão Aritmética, preencha o quadro a seguir (Marque com um X).

Conteúdo	**Você ensinou?**		**Nível de dificuldade de aprendizagem**				
	Sim	**Não**	**Muito Fácil**	**fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito difícil**
Sequências Numéricas							
Definição de PA							
Cálculo da Razão da PA							
Classificação da PA							
Termo geral da PA							
Propriedades da PA							
Interpolação Aritmética							
Soma dos termos de uma PA finita							
PA de Segunda Ordem							

22. Quanto ao uso de recursos tecnológicos, quais dos seguintes equipamentos você costuma utilizar para aulas?

Recursos que utiliza	**Frequência de utilização**				
	Sempre	Quase sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
Você utiliza computador pessoal.					
Você faz pesquisas na internet através do computador.					
Você acessa internet do seu celular.					
Você participa de grupos escolares com aplicativos de Mensagens.					
Você tira dúvidas dos alunos através de mensagens por celular.					
Você utiliza calculadora científica em sala.					

23. Classifique as questões abaixo quanto ao grau de dificuldade:

1) Nas sequências numéricas a seguir, quais mantem uma regularidade?

a) $(1, 4, 8, 13, 19, \dots)$ b) $(4, 6, 10, 14, 19\ \dots)$ c) $(2, 6, 12, 21, 34, 52, \dots)$

d) $(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 5, 7, \frac{18}{2}, \dots)$ e) $(-3, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4, 6\ \dots)$

Nível de dificuldade para resolver a questão 1:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

2) Verifique quais das sequências numéricas a seguir, são Progressões Aritméticas:

a) $(2, 3, 6, 10, 12, 15, \dots)$ b) $(4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots)$ c) $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$

d) $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ e) $(3, 7, 11, 15, 19, \dots)$ f) $(7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots)$

Nível de dificuldade para resolver a questão 2:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

3) Em cada uma das Progressões Aritméticas seguintes, diga se ela é crescente, decrescente ou constante:

a) $(3, 3, 3, 3, 3, \dots)$ b) $(\frac{17}{10}, \frac{29}{20}, \frac{6}{5}, \dots)$ c) $(3 - 2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, \dots)$

d) $(\frac{1}{2+\sqrt{3}}, 2 - \sqrt{3}, \dots)$ e) $(7 - 4\pi, 4 - 3\pi, 1 - 2\pi, \dots)$

Nível de dificuldade para resolver a questão 3:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

4) Determine a razão da PA em que $a_3 = -33$ e $a_9 = 39$.

Nível de dificuldade para resolver a questão 4:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

5) Determine o 22^{o} termo da PA em que $a_4 = 5$ e $r = -\frac{5}{6}$.

Nível de dificuldade para resolver a questão 5:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

6) Um alpinista, ao escalar uma montanha sobe 800m na primeira hora e em cada hora seguinte ele ascende 20m menos que na hora anterior. Quantas horas ele levaria para alcançar uma altitude de 5840m?

Nível de dificuldade para resolver a questão 6:

( ) Muito Fácil ( ) Fácil ( ) Regular ( ) Difícil ( ) Muito Difícil

ANEXO E – OFÌCIO DE AUTORIZAÇÃO

E.E.E.F.M. PROF. ANTONIO GOMES MOREIRA JUNIOR
RESOLUÇÃO
Nº 433/2013 CEE-PA
Nº 496/2013 CEE-PA
BELÉM-PA

APÊNDICE – Modelo de Autorização Dirigida ao Diretor

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática.
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

UEPA

Pesquisador/Aluno: NATANAEL OLIVEIRA MOTA
E-mail: natanaelseis@gmail.com Telefone: (91) 984446714
Orientador: Prof. Dr. NATANAEL FREITAS CABRAL

Prezado (a) Diretor (a): ALZIANA PENA PANTOJA

Solicitamos a participação da E.E.E.F.M. PROF. ANTONIO GOMES MOREIRA JUNIOR em uma pesquisa que será desenvolvida pelo Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará – campus CCSE.

O objetivo deste trabalho é mostrar o quanto é importante o uso de algumas metodologias alternativas para o ensino de Matemática, especificamente no estudo de Progressões Aritméticas, para motivar e desenvolver o ensino aprendizagem neste ramo do conhecimento.

Os instrumentos que utilizaremos para a obtenção dos dados serão: Sequência Didática, Material Concreto, videogravação e fotos. Todas as informações serão usadas somente para os fins desta pesquisa e preservaremos o anonimato. Para que a escola possa ser nosso campo de pesquisa precisamos de sua autorização.

AUTORIZAÇÃO

Eu, ALZIANA PENA PANTOJA, diretor (a) desta unidade escolar dou a minha autorização para NATANAEL OLIVEIRA MOTA utilizar as informações contidas na Sequência Didática, Material Concreto, gravações e fotos para os fins da pesquisa científica que será realizada. Estou ciente que a privacidade será mantida em sigilo.

Alziana Pena Pantoja
Diretora
Portaria 7151/17
Matrícula: 54195197-3

Assinatura do (a) diretor (a) da unidade escolar

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n, Telégrafo
66113-200 – Belém – PA
www.uepa.br