

---

Tiago dos Santos Façanha  
José Tarcisio Costa Filho  
Guilherme Alencar Barreto

**UMA NOVA METODOLOGIA  
PARA SÍNTESE DE FILTROS  $H_2$  E  $H_\infty$**

---

Tiago dos Santos Façanha  
José Tarcisio Costa Filho  
Guilherme Alencar Barreto

# UMA NOVA METODOLOGIA PARA SÍNTESE DE FILTROS $H_2$ E $H_\infty$

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Rafael Sandrini Filho  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

#### **Ciências Biológicas e da Saúde**

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.ª Dr.ª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### **Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### **Conselho Técnico Científico**

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.ª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará  
Prof. Msc. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof.ª Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.ª Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
F137n	Façanha, Tiago dos Santos Uma nova metodologia para síntese de filtros $H_2$ e $H_\infty$ [recurso eletrônico] / Tiago dos Santos Façanha, José Tarcisio Costa Filho, Guilherme Alencar Barreto. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019.  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-588-4 DOI 10.22533/at.ed.884190209  1. Álgebra. 2. Funções algébricas – Filtro $H_2$ . 3. Funções algébricas – Filtro $H_\infty$ . I. Costa Filho, José Tarcisio. II. Barreto, Guilherme Alencar. IV. Título.  CDD 512
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Jeová Deus por ter me abençoado e me dado forças para superar os momentos mais difíceis.

Aos meus pais, José Valter Façanha e Maria Celeste dos Santos Façanha, que me deram todas as condições necessárias para que pudesse chegar até aqui, pois nada seria possível sem o amor e a dedicação deles e de todos os outros familiares.

Ao Professor Dr. José Tarcísio pelo interesse, confiança, orientação, incentivo e paciência.

Ao Professor Msc. André Luiz pelo incentivo e auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Aos outros professores e colegas de laboratório, ITTI/IFCE e CENTAURO/UFC, pelo incentivo, companheirismo, amizade e aos momentos de descontração compartilhados durante este período de desenvolvimento pessoal, momentos especiais que certamente guardarei e lembrarei com bastante orgulho.

A todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Teleinformática que de forma direta ou indireta participaram do desenvolvimento deste trabalho.

A FUNCAP pelo auxílio financeiro durante o mestrado.

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	<b>1</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>2</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>3</b>
Introdução.....	3
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>7</b>
Fundamentos Matemáticos .....	7
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>31</b>
Nova Metodologia para Síntese do Filtro de Kalman .....	31
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>52</b>
Nova Metodologia para Síntese do Filtro Robusto .....	52
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>58</b>
Conclusão e Trabalhos Futuros .....	58
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>60</b>
<b>APÊNDICE A</b> .....	<b>64</b>
Bibliografia de R. E. Kalman.....	64
<b>APÊNDICE B</b> .....	<b>65</b>
Desenvolvimento das Equações do Filtro de Kalman.....	65
<b>APÊNDICE C</b> .....	<b>73</b>
Conceitos de Otimização.....	73
<b>APÊNDICE D</b> .....	<b>82</b>
Condicionamento de Matrizes .....	82,
<b>SOBRE OS AUTORES</b> .....	<b>85</b>

A solução do problema de filtragem possui uma importância indiscutível dentro da engenharia, como pode ser visto em uma gama de artigos encontrados na literatura, baseados nas equações algébricas de Riccati. Neste contexto, propomos uma nova metodologia para solucionar o problema de filtragem, utilizando-se dos princípios de otimização convexa e dualidade a fim de obter uma forma quadrática estável, para obtenção de forma direta do filtro, com horizonte de tempo reduzido para aplicações em tempo real, em norma  $H_2$  e  $H_\infty$  com propriedades de convergência, estabilidade numérica e soluções bem condicionadas. A principal vantagem deste método em relação aos tradicionais é a possibilidade de se obter uma família de ganhos em alguns casos até melhores, se comparados aos obtidos via abordagens convencionais utilizando as equações de Riccati. Apresentaremos alguns exemplos ilustrativos para evidenciar a eficiência da metodologia proposta por comparar e discutir os resultados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações Algébricas de Riccati, Filtro  $H_2$  e Filtro  $H_\infty$

The solution to the problem of filtering has an indisputable importance in engineering, as can be seen in a range of articles in literature, based on algebraic Riccati equations. We therefore propose a new methodology to solve the problem of filtering, closed loop, using the principles of convex optimization and duality in order to obtain a quadratically stable, to obtain the direct form filter with reduced time horizon for real-time applications in standard and convergence properties, numerical stability and well-conditioned solutions. The main advantage of this method over traditional is the possibility of obtaining a family of gains that in some cases even better compared to those obtained via conventional approaches using the Riccati equations. Present some illustrative examples to demonstrate the efficiency of the proposed methodology for comparing and discussing the results.

**KEYWORDS:** Algebraic Riccati Equation,  $H_2$  Filter and  $H_\infty$  Filter.



O estudo da solução do problema de filtragem (WILLIAM, 1999) possui uma importância indiscutível dentro da engenharia, como pode ser visto em uma gama de artigos encontrados na literatura. Desde meados do século vinte até então, vimos o desenvolvimento e o constante aprimoramento de técnicas para tratar os mais diversos casos, desde os problemas lineares mais simples, até os de filtragem robusta com a incerteza da característica estocástica do ruído ou modelagem imprecisa do sistema. O objetivo do projeto de filtros é criar um sistema que reproduza sinais de interesse, reconstituídos com a menor influência possível do ruído presente nos sinais de entrada do filtro. O estudo do problema de filtragem ótima aplicada a sistemas lineares invariantes no tempo começa com Wiener (1949). Em seu trabalho, Wiener abordou o problema no domínio da frequência sob um ponto de vista estocástico. Kalman (1960, ver bibliografia no apêndice A), a partir da representação do sistema em espaço de estados, resolveu o mesmo problema para o caso mais geral em que os parâmetros do sistema são não-estacionários, podendo variar com o tempo. No caso estacionário, foco deste trabalho, os filtros de Wiener e Kalman coincidem e produzem erro mínimo em norma  $H_2$  (BASAR, 1995). Tal filtro possui ordem igual à do sistema original e proporciona uma solução recursiva e probabilística ótima para sistemas dinâmicos lineares, empregando métodos baseados na equação de Riccati (WILLIAM, 1999). A qualidade da estimativa produzida pode ser avaliada através da norma do erro de estimação resultante e, normalmente, a norma  $H_2$  é utilizada com essa finalidade. Esse tipo de estimação ótima, no entanto, requer o conhecimento exato dos sinais atuantes no sistema (KWAKERNAAK, 1972).

O problema de filtragem em norma  $H_\infty$ , ao contrário do caso  $H_2$ , começou a ganhar destaque nas últimas décadas (BASAR, 2001). O problema consiste em projetar um filtro que minimize o valor máximo do ganho de energia entre a entrada do sistema e o erro de estimação por ela provocado (ZHOU, 1996), (SHAKED, 1992). Por serem menos sensíveis a variações de parâmetros do que os estimadores de variância mínima, os filtros  $H_\infty$ , passaram a ter ampla aplicação em situações que requerem robustez. Por exemplo, quando o sistema original apresenta algum tipo de

incerteza quando as características estatísticas dos sinais envolvidos no problema não são perfeitamente conhecidas (SHAKED, 1992). Em geral, filtragem em norma  $H_2$  é um caso particular da filtragem em norma  $H_\infty$  em regime estacionário quando não há incerteza nas características estatísticas dos sinais envolvidos.

No entanto, há muitos fatores que justificam a reconsideração do método dos mínimos quadrados para a filtragem em norma  $H_2$  de aplicações em tempo real. Em primeiro lugar, os limites computacionais dos anos 60 que demandavam uma formulação recursiva, tem atualmente quase que desaparecido devido ao avanço contínuo das tecnologias computacionais e do emprego dos métodos de otimização convexa presentes na literatura. A metodologia de programação quadrática (PQ), por exemplo, tem reduzido consideravelmente o tempo necessário para resolver problemas de programação não-linear. Adicionalmente, o desenvolvimento de algoritmos eficientes baseado em otimização convexa tem permitido um acréscimo significativo de pesquisa na análise e síntese de estimadores de estados em que, o projeto de filtragem em norma  $H_2$  e  $H_\infty$  tem sido reduzido ao problema de obter uma solução definida não-negativa da equação algébrica de Riccati (ARE), ratificando a estreita relação entre tal equação e o problema de filtragem linear.

Neste contexto, esta dissertação tem como objetivo a proposição de um novo método de estimação de estado sem o emprego das equações algébricas de Riccati, baseado em programação quadrática via regiões de confiança (TRS – *Trust Regions subproblems*), para a obtenção de forma direta de uma família de ganhos de filtro em norma  $H_2$  e, por extensão, de filtro em norma  $H_\infty$  de sistemas lineares em tempo discreto e invariantes no espaço de estados. Esta metodologia resulta em problemas de otimização convexa computacionalmente mais simples, apresentando propriedades de estabilidade numérica e matrizes bem condicionadas e um bom potencial para tratar problemas de filtragem e controle (FAÇANHA, 2010). Em adição, uma das principais vantagens deste novo método é a possibilidade de projeto de filtros subótimos com horizonte de tempo de reduzido para aplicações em tempo real. Não encontramos na literatura um algoritmo recursivo de estimação em norma  $H_2$  com horizonte de tempo reduzido que seja capaz de determinar um filtro de horizonte de tempo arbitrário para o qual o erro de estimação apresente norma mínima.

## 1.1 Objetivos da Dissertação

Esta dissertação trata especificamente de problemas de filtragem ( $H_2$  e  $H_\infty$ ) considerando sistemas lineares em tempo discreto representados por modelos no espaço de estados com os seguintes objetivos gerais e específicos.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Propor uma nova metodologia para síntese de filtros de Kalman e filtros Robustos via otimização convexa.

### 1.1.2 *Objetivos Específicos*

- Formular um novo algoritmo para solução do problema de filtragem, independente das equações de Riccati, baseado em princípios de dualidade e estratégias de condicionamento de matriz, via subproblemas de regiões de confiança.
- Enunciar teoremas matemáticos que garantam a equivalência entre as equações de Riccati obtidas via nova metodologia e a tradicional.
- Compor uma família de soluções de ganho para atender a necessidade do projeto do filtro.
- Comparar via simulações, a abordagem proposta com abordagens tradicionais via equações de Riccati.

### 1.1.3 *Organização Geral desta Dissertação*

Esta dissertação está distribuída em cinco capítulos e quatro apêndices. Um breve comentário acerca dos demais capítulos será feito a seguir.

- **Capítulo 2:** Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo, apresentaremos os fundamentos teóricos a serem utilizados no decorrer da dissertação envolvendo normas, valores singulares, princípios de dualidade, regiões de confiança, Filtros de Kalman e Filtros Robustos.

- **Capítulo 3:** Nova metodologia para Síntese de Filtro de Kalman

Neste capítulo, apresentaremos como contribuição desta dissertação uma metodologia para solução do problema de filtragem independente das equações de Riccati. Obteremos essa metodologia através de teoremas matemáticos em forma quadrática estática, equivalente ao Lagrangeano do sistema. Esta forma quadrática estática será reescrita em um modelo de horizonte reduzido via estratégia de regularização através de regiões de confiança a fim de se gerar uma família de ganhos para o filtro com uma boa estabilidade numérica e soluções bem condicionadas. Ao final do capítulo, apresentaremos dois exemplos para analisarmos as principais vantagens e desvantagens da nova metodologia em relação à metodologia de referência.

- **Capítulo 4:** Nova metodologia para Síntese de Filtro Robusto

Neste capítulo, estenderemos a metodologia proposta no capítulo 3 para obtenção de uma família de ganhos para filtros robustos e através de simulações realizaremos uma análise comparativa da metodologia proposta com a metodologia de referência para fins de aplicação em projetos de filtros robustos.

- **Capítulo 5:** Conclusão e Trabalhos Futuros

Por fim, finalizaremos este trabalho apresentando algumas conclusões e discutiremos algumas extensões dos resultados obtidos.

- **Apêndice A**

Apresentaremos um resumo da Bibliografia de Rudolf Emil Kalman.

- **Apêndice B**

Apresentaremos o desenvolvimento matemático das equações do Filtro Kalman.

- **Apêndice C**

Apresentaremos os fundamentos de otimização.

- **Apêndice D**

Apresentaremos alguns casos de análise de condicionamento da matriz  $H$ .

#### *1.1.4 Produção Científica*

Durante o desenvolvimento deste trabalho tivemos como produção científica o seguinte artigo:

Façanha, T. S.; Costa Filho, J. T.; Carneiro, A.L. Uma Nova Metodologia para Síntese de Filtro de Kalman. SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2010.

Apresentaremos neste capítulo os fundamentos teóricos a serem utilizados no decorrer da dissertação envolvendo princípios de norma e valores singulares que serão utilizadas para análise, verificação de desempenho e estabilidade de sistemas. Analisaremos os conceitos de dualidade e minimização de quadráticas via região de confiança para resolvermos o problema de filtragem  $H_2$  e  $H_\infty$ . Também analisaremos os principais conceitos sobre os filtros  $H_2$  e  $H_\infty$ .

### 2.1 Normas $H_2$ e $H_\infty$

As teorias de estimação de estado  $H_2$  e  $H_\infty$  fazem grande uso de *normas*, que são medidas do tamanho de um vetor ou de uma matriz.

#### 2.1.1 Normas de vetores

**Definição 2.1.** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $x$  e  $y \in V$ , a função  $\|\bullet\|$  é dita ser uma norma em  $V$  se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1)  $\|x\| \geq 0$ .
- 2)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- 3)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$ .
- 4)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Esta definição é geral e se aplica, não somente a vetores, mais também a matrizes.

**Definição 2.2.** Seja  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  um vetor de  $n$  elementos pertencentes aos números reais. A definição geral da norma deste vetor é (DOYLE, 1996):

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (2.1)$$

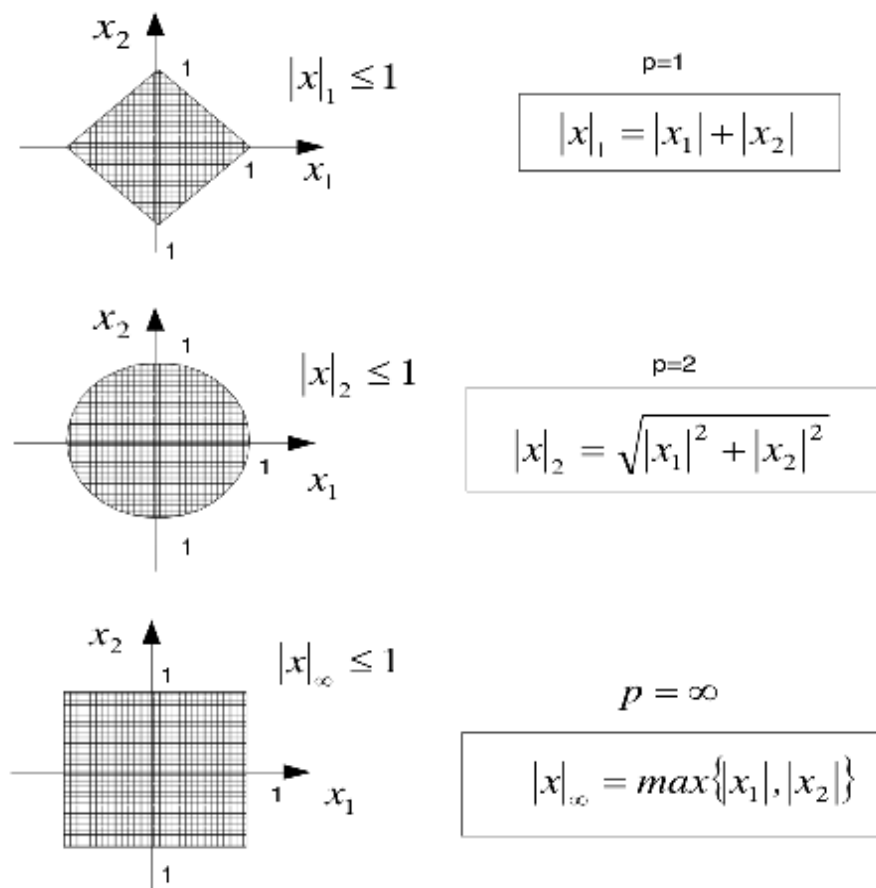
Somente três *normas-p*, obtidas pelo conjunto  $p$  para 1, 2 ou  $\infty$  são comumente usados:

Nome	Fórmula	Comentários
norma - 1	$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n  x_i $	Somatório dos valores absolutos
norma - 2	$\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n  x_i ^2}$	Raiz quadrada do somatório dos valores absolutos quadrado.
norma - $\infty$	$\ x\ _{\infty} = \max_i  x_i $	Máximo valor absoluto

Tabela 2.1 – Resumo de normas de vetores

### Ilustração geométrica:

Na Figura abaixo é visto uma ilustração do lugar geométrico das três normas para vetores bidimensionais ( $n = 2$ ).



### 2.1.2 Normas de Matrizes

Estendendo o alcance de normas de vetores para matrizes requer o entendimento do papel destas matrizes como *operador linear*, decisivo na teoria de estimação de estado com muitas variáveis.

Recordando a definição de multiplicação de matrizes tem-se: para uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

de  $m$ -linha e  $n$ -coluna no espaço  $\mathfrak{R}^{m \times n}$  e para um vetor de saída  $y \in \mathfrak{R}^m$  e um vetor de entrada  $x \in \mathfrak{R}^n$ , escreve-se  $y = Ax$  onde cada elemento do vetor de entrada é dado por  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ , sendo que  $a_{ij}$  é o elemento da matriz  $A$  na linha  $i$  e coluna  $j$ . Pode-se definir normas úteis para matrizes em termos do ganho do vetor norma de  $x$  para  $y$ . Isto é, a razão da norma de saída  $y$  e a entrada  $x$  mede o ganho de  $A$  como um operador linear, de entrada no espaço  $\mathfrak{R}^n$  e saída no espaço  $\mathfrak{R}^m$ . Desde que esta relação não é sempre fixa, mas depende da escolha de  $x$ , usa-se o máximo ganho possível da norma do vetor de entrada para o vetor de saída:

$$\|A\|_p = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathfrak{R}^n}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad (2.2)$$

A norma da matriz definida neste método é chamada de norma *induzida*, pois é induzida pela escolha da norma do vetor. Existem três normas de matriz induzida comumente usadas, correspondentes a normas de vetores para  $p = 1, 2$  e  $\infty$

Nome	Fórmula	Comentários
norma -1	$\ A\ _1 = \max_j \sum_{i=1}^m  a_{ij} $	Máximo somatório dos valores absolutos das colunas.
norma -2	$\ A\ _2 = \bar{\sigma}(A)$ ou $\ A\ _2 = [\max \lambda_i(A^T A)]^{1/2}$	Máximo valor singular, denotado de $\bar{\sigma}(\cdot)$ . $\max \lambda_i(A^T A)$ é o máximo autovalor de $A^T A$ . Achar Autovalor $\lambda_1, \lambda_2$ : $\det(\lambda I - A) = 0$
norma - $\infty$	$\ A\ _\infty = \max_i \sum_{j=1}^n  a_{ij} $	Máxima soma da linha (valor absoluto).

Tabela 2.2 – Resumo de normas de matrizes

Do ponto de vista teórico, para um sistema, as normas induzidas têm a interpretação de ganhos de amplificação entrada/saída. Outra norma de matriz freqüentemente usada é a norma Frobenius. Ela é definida como:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{traço}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

### 2.1.3 Norma $H_2$ para Sistemas Discretos

A norma  $H_2$  de uma matriz de transferência  $G(s)$  é definida por (VIDYASAGAR, 1993):

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \text{TR} \{ G^T(e^{jw}) G(e^{jw}) dw \} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

e a correspondente temporal:

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr} ( g_i^T g_i ) \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

em que a operação de integração utilizada no caso contínuo aparece substituída pelo somatório. As mesmas propriedades e interpretações discutidas no caso contínuo podem ser transpostas para o caso discreto.

### 2.1.4 Norma $H_2$ para Sistemas

A norma  $\infty$  da função de transferência da matriz  $G(s)$  pode ser definida por (ZHOU, 1996; SHARED, 1992):

$$\|G\|_{\infty} = \max_{w \in \mathfrak{R}} \|G(e^{jw})\| \quad (2.5)$$

e a correspondente temporal

$$\|G\|_{\infty} = \max_{w \in \mathfrak{R}} \frac{\|Gu(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad (2.6)$$

em que  $u(t)$  é um vetor sinal de entrada e  $(Gu)(t) = y(t)$  é o correspondente vetor sinal de saída de  $G$ . A norma-2 representa a energia do sinal. A norma- $\infty$  da função de transferência dá o ganho máximo possível se o ganho é medido usando a norma-2. A norma  $\infty$  é uma *norma induzida*.

### 2.1.5 Valores singulares

O valor singular de uma matriz  $A$  é definido por:



$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

em que  $\sigma_i(A)$  representa o  $i$ -ésimo autovalor de  $A^T A$ , e  $A^T$  é a transposta conjugada de  $A$ .

O máximo valor singular  $\sigma_M$  fornece a norma espectral de uma matriz, isto é, seja  $A$  uma matriz, então:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_M(A^T A)}$$

Uma matriz é dita ser grande se seu menor valor singular  $\sigma_m$  for grande, e pequena se seu maior valor singular  $\sigma_M$  é muito pequeno, isto é:

Matriz grande:  $\sigma_m \gg 1$

Matriz pequena:  $\sigma_M \ll 1$

A seguir têm-se algumas propriedades dos valores singulares:

- 1)  $\sigma_M(A) = \|A\|$
- 2)  $\sigma_m(A) = \sqrt{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|^2}$
- 3)  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_m}$
- 4)  $0 \leq \sigma_m(A) \leq \sigma_M(A)$
- 5)  $\sigma_M(A+B) \leq \sigma_M(A) + \sigma_M(B)$ ;  $B \in C^{n \times m}$
- 6)  $\sigma_m(A+B) \leq \sigma_m(A) + \sigma_m(B)$
- 7)  $|\sigma_M(A) - 1| \leq \sigma_M(I+A) \leq \sigma_M(A) + 1$
- 8)  $|\sigma_m(A) - 1| \leq \sigma_m(I+A) \leq \sigma_m(A) + 1$
- 9)  $\sigma_M(AB) \leq \sigma_M(A)\sigma_M(B)$

## 2.2 Dualidade Entre Controlabilidade E Observabilidade

Nesta seção, apresentaremos os principais conceitos da dualidade entre controlabilidade e observabilidade.

Considerando um sistema linear e invariante no tempo, de ordem  $n$ , com  $p$  sinais de entrada e  $q$  sinais de saída, pode-se escrever a representação de variáveis de estado sem ruído na forma matricial como:

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k \quad (2.8)$$

$$y_k = C.x_k + D.u_k \quad (2.9)$$

onde:

$x_k$ : vetor de estados ( $n \times 1$ ).

$u_k$ : vetor de sinais de entrada ( $p \times 1$ ).

$y_k$ : vetor de sinais de saída ( $q \times 1$ ).

$A$ : Matriz dinâmica ( $n \times n$ ).

$B$ : Matriz de entrada ( $n \times p$ ).

$C$ : Matriz de saída ( $q \times n$ ).

$D$ : Matriz do sistema ( $q \times p$ ), geralmente essa matriz é nula.

A figura 2.1 mostra a representação gráfica do sistema em variáveis de estado.

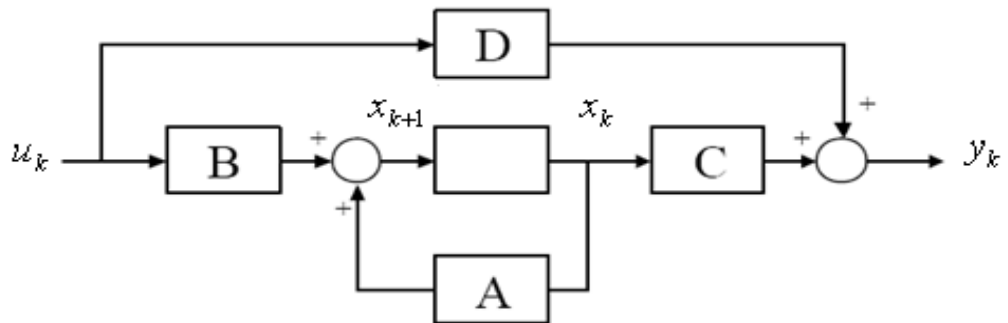


Figura 2.1 - Representação do sistema em variáveis de estado

**Teorema 2.1.** Um sistema dinâmico linear invariante no tempo é controlável se, e somente se, qualquer das seguintes condições equivalentes for satisfeita:

1. O par  $(A, B)$  é controlável.
2. O posto (rank) da matriz de controlabilidade  $C_x$  é de mesma ordem que a matriz  $A$ .

$$C_x = \left[ B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B \right] \quad (2.10)$$

3. A matriz  $W_c = \int_0^{\infty} \exp(At)BB^T \exp(A^T t) dt \left( = \sum_{m=0}^{\infty} A^m BB^T (A^T)^m \right)$  for definida positiva.
4. A matriz complexa  $[A - \lambda I, B]$  tem posto  $n$  para  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
5. Os autovalores de  $(A + BK)$  podem ser escolhidos livremente através de uma escolha adequada de  $K$ .

**Prova.** Ver referência (PALHARES, 2000), (ZHOU, 1996).

**Teorema 2.2.** Um sistema dinâmico linear invariante no tempo é observável se,

e somente se, qualquer das seguintes condições equivalentes for satisfeita:

1. O par  $(A, C)$  é observável.
2. O posto (rank) da matriz de Observabilidade  $O_x$  é de mesma ordem que a matriz  $A$ . Nota-se que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , onde  $n$  indica a ordem do sistema.

$$O_x = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

3. O sistema é observável se, e somente se, a matriz  $W_o(t) = \int_0^t \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt \left( = \sum_{m=0}^{\infty} (A^T)^m C^T C A^m \right)$  for não singular para qualquer  $t > 0$ .
4. A matriz complexa  $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$  tem posto  $n$  para  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
5. Os autovalores de  $(A + LC)$  podem ser escolhidos livremente através de uma escolha adequada de  $L$ .
6.  $(A', C')$  é controlável.

**Prova.** Ver referência (PALHARES, 2000), (ZHOU, 1996).

**Teorema 2.3.** Considerando o sistema dinâmico expresso nas equações (2.8) e (2.9). Seja  $(A, B, C, D)$  as matrizes que compõe o modelo de espaço de estado do sistema, sua dualidade será  $(A^T, C^T, B^T, D^T)$ . Portanto, o par  $(A, B)$  é controlável se, e somente se, o par  $(A^T, B^T)$  for observável.

**Prova:**  $(A, B)$  é controlável se, e somente se:

$$W_c = \sum_{m=0}^{\infty} A^m B B^T (A^T)^m$$

for não singular para qualquer  $t > 0$ . O par  $(A^T, B^T)$  é observável se, e somente se, trocando  $A$  por  $A^T$  e  $C$  por  $B^T$ .

$$W_o = \sum_{m=0}^{\infty} A^m B B^T (A^T)^m$$

for não singular para qualquer  $t > 0$ .

## 2.3 Minimização de Quadráticas

Uma vez que os problemas de filtragem neste trabalho serão resolvidos via forma quadrática estática conforme definido em (2.12), apresentaremos a seguir os fundamentos teóricos envolvendo minimização de quadráticas.

### 2.3.1 Formulação do Problema

Dada a matriz simétrica  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , o vetor  $b \in \mathbb{R}^n$  e a constante  $c \in \mathbb{R}$ , consideraremos o seguinte problema de otimização:

$$\min f(s) = \frac{1}{2} s^T H s + b^T s + c \quad (2.12)$$

Se  $f(s) = \frac{1}{2} s^T H s + b^T s + c$ , então  $\nabla f(s) = Hs + b$  e  $\nabla^2 f(s) = H$  para todo  $s \in \mathbb{R}^n$ . Portanto, de acordo com os conceitos de otimalidade de segunda ordem e convexidade (Apêndice C), podemos classificar facilmente os pontos estacionários de (2.12). Com efeito, se  $s^*$  é um ponto minimizador local, necessariamente teremos  $H = \nabla^2 f(s^*) \geq 0$ . Por outro lado, se  $H \geq 0$ , temos que a Hessiana  $\nabla^2 f(s)$  é semi-definida positiva para todo  $s \in \mathbb{R}^n$  e, em conseqüência,  $f$  é uma função convexa. Portanto, se  $H > 0$  e  $s^*$  um ponto estacionário, necessariamente será um minimizador global.

**Lema 2.1** – Se  $H > 0$  e  $s^*$  um ponto estacionário de (2.12), então  $s^*$  é um minimizador global de (2.12).

Para resolver o problema (2.12) temos à disposição uma variedade de métodos tanto diretos como, por exemplo, a decomposição espectral ou fatoração de Cholesky, quanto iterativos a exemplo do método dos gradientes conjugados. No entanto, o uso de tais métodos incorre, freqüentemente, em um custo operacional intolerável ou problemas de instabilidade numérica (LAUB, 1991), além de que, a solução de (2.12) via gradientes conjugados podem ser intoleravelmente lenta em problemas de grande porte, se o número de condição da matriz Hessiana ( $H$ ) é grande.

Nesses casos, o método baseado em região de confiança vem sendo recentemente utilizado para “regularizar” o problema (2.12), de modo que a matriz Hessiana ( $H$ ) passe a ter um número de condição menor. A estratégia, de modo geral, consiste em se construir um problema (2.13) equivalente ao original (2.12), porém bem condicionado e apresentando soluções estáveis, conforme detalharemos na seção a seguir.

### 2.3.2 Método das Regiões de Confiança

As primeiras idéias envolvendo regiões de confiança surgiram em um artigo

de Levenberg (KASSAM, 1985), e posteriormente foram retomadas por Marquardt<sup>1</sup> (LANCASTER, 1995) que apresentou, pela primeira vez, a estrutura de subproblemas de regiões de confiança, que permitiram a Powell (NAMARVAR, 2003) desenvolver um algoritmo de regiões de confiança para a resolução de problemas de minimização sem restrições. Os métodos de regiões de confiança vêm sendo utilizados na implementação de redes neurais (LIU, 2004), reconhecimento de imagens (LEVENBERG, 1944) e, principalmente, como subproblemas auxiliares para resolução de problemas mal condicionados (LAUB, 1991), (OGATA, 1994), como aqui é o caso. Há uma vasta teoria que trata da convergência dos métodos de regiões de confiança (EBIHARA, 2004), (NAMARVAR, 2003), (NASCIMENTO, 2007), (OLIVEIRA, 2006), (PEDREGAL, 2004), atribuindo-lhes um fundamento algébrico bastante intuitivo com fortes propriedades de convergência e comprovada eficiência numérica (DOYLE, 1978), (LAUB, 1991) e (ROJAS, 1985).

Neste trabalho, utilizaremos as idéias subjacentes à regularização, constantes aos métodos de regiões de confiança, para obtermos uma família de ganhos com características de robustez que não podem ser obtidas por métodos tradicionais de Riccati.

## 2.4 Procedimentos de Regularização

Nesta seção, consideraremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(s) = \frac{1}{2} s^T H s + b^T s + c \\ & \|s\| \leq \Delta \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde:  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$  e  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , convenção adotada daqui em diante.

Recentemente, alguns autores utilizaram (2.13) como uma maneira de “regularizar” o problema de minimizar uma quadrática irrestrita, pois a estrutura muito especial do problema (2.13) proporciona caracterizações dos minimizadores muito mais poderosos que no caso geral de minimização restrita (LAUB, 1991). A idéia é que, quando  $H$  é mal condicionada, a solução exata de (2.12) carece de sentido, por ser extremamente sensível aos erros dos dados, ou ao arredondamento. Por outro lado, o problema (2.13) é bem condicionado se  $\Delta$  não é grande. Portanto, substituir (2.12) por (2.13) assegura uma maior estabilidade numérica uma vez que (2.13) é bem condicionada para pequenos valores do raio  $\Delta$ . Para obtermos um subproblema (2.13) que forneça uma solução para (2.12) apresentando matrizes bem condicionadas e convergência garantida, consideraremos os seguintes teoremas a seguir.

<sup>1</sup> Dando origem ao algoritmo de Levenberg-Marquardt.

**Teorema 2.4.** Seja o problema (2.13), se o vetor  $\bar{s}^* \in \beta [0, \Delta]$  é a solução para (2.13) então  $\bar{s}^*$  é uma solução para a equação da forma:

$$(H + \mu I)\bar{s}^* = -b \quad (2.14)$$

Onde:  $(H + \mu I) \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\mu(\Delta - \|\bar{s}^*\|) = 0$ .

**Prova:** O problema (2.13) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\bar{s}) \\ & \bar{s}^T \bar{s} \leq \Delta^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como  $\bar{s}^*$  é a solução de (2.13),  $\bar{s}^*$  satisfaz as condições de KKT (Karush - Kuhn-Tucker) para (2.15), ou seja, há um  $\mu \geq 0$  tal que:

$$H\bar{s}^* + b + \mu\bar{s}^* = 0$$

e

$$\mu(\bar{s}^{*T}\bar{s}^* - \Delta^2) = 0$$

Portanto,  $\bar{s}^*$  e  $\mu$  verificam (2.14). Para que  $(H + \mu I) \geq 0$ , consideraremos inicialmente que  $\bar{s}^* \neq 0$ . Como  $\bar{s}^*$  é a solução de (2.13),  $\bar{s}^*$  também é minimizador global de  $f(\bar{s})$  sujeito a  $\|\bar{s}\| = \|\bar{s}^*\|$ . Então:

$$f(\bar{s}) \geq f(\bar{s}^*) \text{ para todo } \bar{s} \text{ tal que } \|\bar{s}\| = \|\bar{s}^*\| \text{ para todo } \bar{s} \text{ tal que } \|\bar{s}\| = \|\bar{s}^*\| \quad (2.16)$$

Substituindo (2.14) em (2.16), temos:

$$\frac{1}{2}\bar{s}^T H\bar{s} - \bar{s}^*(H + \mu I)\bar{s} = \frac{1}{2}\bar{s}^* H\bar{s}^* - \bar{s}^*(H + \mu I)\bar{s}^* \quad (2.17)$$

Rearranjando (2.17), temos:

$$\frac{1}{2}(\bar{s} - \bar{s}^*)^T (H + \mu I)(\bar{s} - \bar{s}^*) \geq 0$$

para todo  $\bar{s}$  tal que  $\|\bar{s}\| = \|\bar{s}^*\|$ . Como  $\bar{s}^* \neq 0$ , as direções  $\bar{s} - \bar{s}^*$  tais que

$\|\bar{s}\| = \|\bar{s}^*\|$  envolvem todas as direções do espaço exceto os ortogonais a  $\bar{s}^*$ . Agora, qualquer vetor ortogonal a  $\bar{s}^*$  é o limite de uma seqüência de vetores  $v_k$  para as quais  $v_k^T (H + \mu I) v_k \geq 0$ . Portanto, passando ao limite, a expressão  $v^T (H + \mu I) v \geq 0$  valem também para os vetores  $v$  ortogonais a  $\bar{s}^*$ . Portanto,  $(H + \mu I) \geq 0$ .

Se  $s^* = 0$ , por (2.14) temos que  $b = 0$ . Então  $s^* = 0$  é minimizador local de:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \bar{s}^T H \bar{s} + c \\ \text{s.a} \quad & \|\bar{s}\| \leq \Delta \end{aligned}$$

uma vez que  $H \geq 0$  e  $v^T (H + \mu I) v \geq 0$  vale para todo  $v \in \mathbb{R}^{nN}$  com  $\mu = 0$ .

No teorema acima, mostramos que, num minimizador global (2.13), a Hessiana do Lagrangeano deve ser semidefinida positiva globalmente, e não apenas restrita a um subespaço (PEDREGAL, 2004), (BOYD, 1994).

O próximo teorema fornece as condições suficientes que garantem que  $\bar{s}^*$  é solução de (2.13).

**Teorema 2.5** - Sejam  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\bar{s}^* \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo (2.14) tais que:

$$(H + \mu I) \bar{s}^* = -b \quad \text{com} \quad (H + \mu I) \geq 0 \quad (2.18)$$

Com  $H$  semi-definida positiva.

1) Se  $\mu = 0$  e  $\|\bar{s}^*\| \leq \Delta$ , então  $s^*$  é a solução de (2.13).

2) Se  $\|\bar{s}^*\| = \Delta$ , então  $s^*$  é a solução de:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{s} \in \mathbb{R}^n} \quad & M(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{s}^T H \bar{s} + c \\ \text{s.a} \quad & \|\bar{s}\| = \Delta \end{aligned}$$

3) Se  $\mu \geq 0$  e  $\|\bar{s}^*\| = \Delta$ , então  $s^*$  é a solução de (2.13). Além disso, se

$(H + \mu I)$  é definida positiva,  $s^*$  é único em (1), (2) e (3).

**Prova:** Se  $\mu$  e  $s^*$  satisfazem (2.18),  $s^*$  é minimizador da quadrática:

$$M(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{s}^T (H + \mu I) \bar{s} + \bar{s}^T b + \tilde{c}$$

Logo:

$$M(\bar{s}) \geq M(\bar{s}^*) + \frac{\mu}{2} (\bar{s}^{*T} \bar{s}^* - \bar{s}^T \bar{s}) \quad (2.19)$$

Para todo  $\bar{s} \in \square^n$ . De (2.19) segue-se:

$$M(\bar{s}) \geq M(\bar{s}^*) + \frac{\mu}{2} (\bar{s}^{*T} \bar{s}^* - \bar{s}^T \bar{s}) \quad (2.20)$$

Para todo  $\bar{s} \in \square^n$ . As afirmações i), ii) e iii) são conseqüências imediatas de (2.20). A unicidade segue de (2.19), pois se  $(H + \mu I) \geq 0$ , a desigualdade é estrita para  $\bar{s} \neq \bar{s}^*$ .

Os teoremas 2.4 e 2.5 mostram que, se há uma solução  $\bar{s}^*$  para o problema (2.13) situado na fronteira da bola,  $\beta[0, \Delta]$ , esta deve satisfazer com seu multiplicador correspondente  $\mu$ , as seguintes equações:

$$(H + \mu I) \bar{s}^* = -b, \|\bar{s}^*\| = \Delta \quad (2.21)$$

com  $\mu \geq 0$  e  $(H + \mu I) \geq 0$ .

Se  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  são os autovalores de  $H$ , a condição  $H + \mu I \geq 0$  é equivalente a  $\mu \geq -\lambda_1$ . Assim, as limitações sobre o multiplicador  $\mu$ , para detectarmos as soluções na fronteira, se resumem em:

$$\mu \geq \max\{0, -\lambda_1\} \quad (2.22)$$

Portanto, para encontrarmos soluções de (2.13) na superfície da bola basta perceber que  $\mu \geq 0$  uma vez que  $H$  é definida positiva, portanto, o sistema  $(H + \mu I) \bar{s}^* = -b$  tem como solução única  $\bar{s}^* = -(H + \mu I)^{-1} b$  uma vez que, neste caso,  $(H + \mu I)$  é não singular. Então, encontrar  $\mu \geq 0$  satisfazendo (2.21) é equivalente a resolver:

$$\|(H + \mu I)^{-1} b\| = \Delta \quad (2.23)$$

**Observação 2.1.** Alguns algoritmos para obtenção dos valores de  $\mu$  podem ser encontrados em (BOYD, 2004), (COUTINHO, 2005), (LEVENBERG, 1944) e (LIU,



2004).

## 2.5 Filtro $H_2$ (Filtro de Kalman)

O Filtro de Kalman (KALMAN, 1960) é, porém, considerado por muitos o grande avanço da teoria de estimação do século vinte. Muitas realizações desde sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele. A Filtragem de Kalman vem sendo aplicada em áreas tão diversas quanto: aeroespacial, navegação marítima, instrumentação de usinas nucleares, modelamento demográfico, astronomia, meteorologia, economia e indústria em geral.

O filtro de Kalman é um estimador para o problema gaussiano linear quadrático. Tal problema consiste na estimação dos estados instantâneos de um sistema linear dinâmico com ruído gaussiano por meio de medições linearmente relacionadas aos estados e também contaminadas por ruído branco. Na prática, o filtro de Kalman é um conjunto de equações que oferece uma solução computacional eficiente para os métodos dos mínimos quadrados.

Quando as características da perturbação e do ruído são condizentes com as suposições usadas no desenvolvimento do filtro de Kalman, ou seja, são variáveis aleatórias brancas e suas densidades espectrais são precisamente conhecidas, o filtro de Kalman consiste no processo ótimo de estimação de estados no sentido dos mínimos quadrados e da mínima variância. No caso estacionário, o filtro de Kalman coincide e produz erro mínimo em norma  $H_2$ . Entretanto, é difícil ter informações sobre as propriedades estocásticas das perturbações a priori. Neste caso, a estimação de estados baseada no critério dos mínimos quadrados pode sofrer uma degradação por causa das incertezas estatísticas das perturbações (TAKABA, 1996).

O Filtro de Kalman discreto é um algoritmo linear, recursivo e de variância mínima para a estimação dos estados desconhecidos de um sistema dinâmico a partir de medições discretas, corrompidas por ruído. Estado, neste contexto, se refere a qualquer quantidade de interesse envolvido no processo dinâmico. Assim, esse filtro é um procedimento iterativo representado em varias etapas de processamento, conforme podemos observar na figura 2.2.

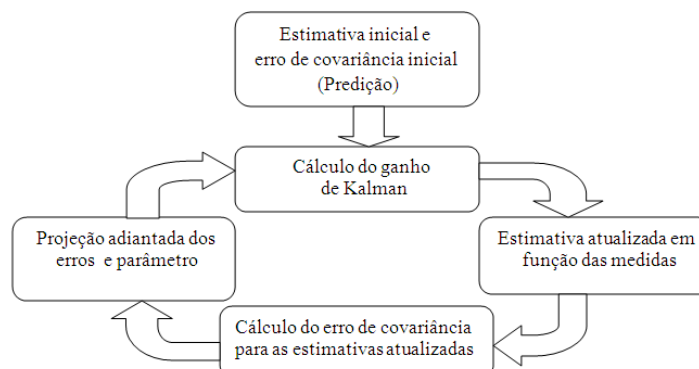


Figura 2.2 – Malha usual do Filtro de Kalman

Visto que para o desenvolvimento do algoritmo devem-se considerar algumas propriedades estatísticas das variáveis aleatórias Gaussianas contaminadas com perturbações do sistema e ruídos de medida (GREG, 2001). Estas propriedades dão base matemática para o desenvolvimento das principais equações do Filtro  $H_2$ , conforme podemos observar no Apêndice B.

### 2.5.1 Formulação do Problema e Resumo do Algoritmo do Filtro $H_2$

Considere a descrição do sistema dinâmico invariante em tempo discreto exposto nas equações (2.24) e (2.25).

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \quad (2.24)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k v_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (2.25)$$

Assume-se que o ruído de processo,  $w_k \in \mathbb{R}^n$ , e o ruído de medida,  $v_k \in \mathbb{R}^m$ , são variáveis aleatórias independentes, brancas, de média zero e com distribuição de probabilidade gaussiana. Suas matrizes de correlação são assumidas conhecidas e são representadas por  $Q_w$  e  $R$ , respectivamente.

Apesar de não ser muito trivial encontrar os valores de  $Q_w$  e  $R$ , é importante que estas reflitam a precisão relativa existente entre o modelo dinâmico e o modelo de medição. Isto significa, por exemplo, que se as medições são precisas e o modelo dinâmico é impreciso, os elementos da matriz  $Q_w$  devem ser maiores que aqueles de  $R$ . Em particular, se as medições são perfeitas,  $R = 0$  e se o modelo dinâmico é perfeito,  $Q_w = 0$ . Obviamente, isto não acontece na prática e mesmo se ocorresse, um filtro de Kalman não seria a ferramenta mais apropriada para resolver este problema.

O vetor de estados a ser estimado é  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , enquanto que  $y_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de medidas. É importante lembrar que o ruído de processo é usado para descrever tanto os erros ocorridos no processo quanto as incertezas no modelo de estados. As matrizes  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  e  $D_k$  possuem dimensões adequadas e a estimativa inicial  $x_0$  é  $\bar{x}_0$ , sem perda de generalidade.

A estabilidade do filtro de Kalman resulta da iteração da equação de Riccati que é dado pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.6.** (Estabilidade Exponencial do Filtro de Kalman) O filtro de Kalman é nominalmente e exponencialmente estável devido o par  $(A, C)$  ser observável e  $(A, Q_w^{1/2})$  ser estabilizável,  $R > 0$  e  $Q_w > 0$ .

**Prova.** Ver referências (SOUZA, 1986) e (VICENT, 1991).

Como já foi comentado, o filtro de Kalman é o processo ótimo de minimização do erro quadrático de estimação de estados, já que o erro de estimação é causado pelas perturbações, construídas pelas incertezas na estimativa inicial do vetor de estados e pelos ruídos de processo e de medida, o problema consiste em determinar a estimativa  $\hat{x}_k$  do vetor de estados através do seguinte processo de otimização (SAYED, 2001):

$$\min_{x_0, w, v} J_{H_2}(x_0, w, v) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi}^2 + \sum_{k=0}^K (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) \quad (2.26)$$

Sujeito as equações (2.24) e (2.25), e sendo  $\Pi$  uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial.

O filtro de Kalman estima o vetor de estados de um processo através de um controle com realimentação de estados. Por isso, suas equações são recursivas, o que torna o processo de estimação de estados menos dispendioso em termos de esforço computacional.

Pelo fato de o filtro de Kalman ter sido vastamente estudado e aplicado em diversos problemas, o desenvolvimento matemático do processo de otimização anunciado na equação (2.26) é detalhadamente descrito no apêndice B.

Segue abaixo, na Tabela 2.3, um resumo das equações do filtro de Kalman.

Equações do Filtro de Kalman Discreto	
Preditor (Estimativa a priori)	$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$
Recursão de Riccati	$P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Q_w B_{k-1}^T$
Cálculo da estimativa (atualização do estado)	$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$
Cálculo da covariância (atualização da covariância)	$P_{k/k} = (I - K_k C_k) P_{k/k-1}$
Ganho de Kalman	$K_k = P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T + R)^{-1}$

Tabela 2.3 – Resumo das Equações do Filtro de Kalman

## 2.6 Filtro $H_\infty$

O filtro  $H_\infty$  pode ser definido como um problema de minimização da máxima energia do erro de estimação devido a qualquer tipo de perturbação, ou seja, sem o conhecimento das características estatísticas dos ruídos. A otimalidade do filtro de Kalman está fundamentada em algumas aplicações particulares, onde há a necessidade de conhecimento das características do ruído de processo e de medida.

No entanto, na maioria das aplicações, estas informações não estão disponíveis ou não estão bem modeladas. Assim, não podemos garantir um bom desempenho para este filtro. Enquanto isso, o filtro  $H_\infty$  garante um bom desempenho numa determinada faixa de variação do erro de estimação. Visto que a norma  $H_\infty$  é uma norma  $L_2$  induzida, o problema de otimização  $H_\infty$  pode ser considerado como um problema de otimização minimax (SHARED, 1992).

Então é necessário obter um ganho que minimize o efeito da perturbação sobre a saída regulada. Nesta seção, faremos uma apresentação das características do filtro  $H_\infty$  e apresentaremos as equações que definem o filtro robusto para sistemas dinâmicos em tempo discreto.

### 2.6.1 Formulação do Problema

Nós consideraremos o sistema dinâmico discreto no tempo:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \quad x_0 = 0 \quad (2.27)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k v_k \quad k = 1, 2, 3, K \quad (2.28)$$

Onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^q$  são os vetores de estado e medição, respectivamente. Considera-se o ruído do processo,  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , e o ruído da medida,  $v_k \in \mathbb{R}^q$ , estas variáveis são desconhecidas, visto que são sinais arbitrários em  $L_2[0, K]$ . O ruído do processo é utilizado para descrever tanto erros ocorridos no processo, como também para descrever as incertezas do modelo de estados. Assumimos que  $D_k$  é não-singular, então  $R_k = D_k \cdot D_k^T > 0$  e que as matrizes  $A_k, B_k, C_k$  e  $D_k$  possuem dimensões apropriadas.

Este sistema não possui entrada controlada. Então, temos que estimar o vetor de estados,  $x_k$ , e também a saída regulada do sistema,  $z_k$ . Defini-se estimar  $z_k \in \mathbb{R}^p$  por:

$$z_k = L_k x_k \quad (2.29)$$

Consideramos  $\hat{z}_k$  como a estimativa de  $z_k$  baseada em  $\{y_0, \dots, y_k\}$ . Também supomos que a estimativa do estado inicial  $x_0$ , a priori, é definido por  $\bar{x}_0$ . A matriz  $L_k$  possui dimensão apropriada.

A estimativa,  $\hat{z}_k$ , tenta minimizar o erro de estimação ao quadrado,  $\sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_k\|^2$ , enquanto se tenta maximizar o erro de estimativa ao quadrado das perturbações do sistema. A partir dos valores arbitrários de  $\|w_k\|$ ,  $\|v_k\|$  e  $\|x_0\|$  que determinam o maior erro de estimação, podemos definir a função custo,  $J$ , como:

$$J_{H_\infty}(\hat{z}; x_0, w, v) = \sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_k\|^2 - \gamma^2 \left( \sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 + \sum_{k=0}^N \|v_k\|^2 + \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right) \quad (2.30)$$

Então, o problema da filtragem  $H_\infty$  é encontrar as estimativas  $\hat{x}_k$  e  $\hat{z}_k$  que satisfaçam:

$$\sup \frac{\sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_k\|^2}{\sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 + \sum_{k=0}^N \|v_k\|^2 + \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2} < \gamma^2 \quad (2.31)$$

A constante positiva  $\gamma$  representa a magnitude de uma penalidade com relação à perturbação e  $\Pi$  é uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial,  $x_0$ . Assim, este problema consiste em determinar às estimativas  $\hat{x}_k$  e  $\hat{z}_k$  que satisfaçam,  $J_{H_\infty}(\hat{z}; x_0, w, v) \leq 0$ , sujeitos a  $\sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 + \sum_{k=0}^N \|v_k\|^2 + \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \neq 0$ .

O problema da filtragem  $H_\infty$  pode ser formulado como um problema minimax da função custo  $J_{H_\infty}(\hat{z}; x_0, w, v)$ . Ao compararmos a função custo na equação (2.30) com a função custo utilizada para o filtro de Kalman em (2.26), notamos que a equação (2.26) é parte da equação (2.30), onde a função custo do filtro  $H_\infty$  pode ser reescrita como:

$$J_{H_\infty}(\hat{z}; x_0, w, v) = \sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_k\|^2 - \gamma^2 \{J_{H_2}(x_0, w, v)\} \quad (2.32)$$

Desta forma, quanto maior é o valor do parâmetro  $\gamma$  em comparação com a energia do erro de estimação, menor é a influencia da minimização com respeito a  $\hat{z}_k$  no processo de estimação. Portanto, para valores elevados do parâmetro  $\gamma$ , o filtro  $H_\infty$  tende a se aproximar do filtro de Kalman. Como este parâmetro indica o limite superior de energia dos erros de estimação devido às perturbações e incertezas, ele pode ser usado para determinar o grau de robustez do filtro.

Continuando a formulação do problema do filtro  $H_\infty$ , com a utilização da equação (2.28), que relaciona o vetor de medida,  $y_k$ , ao ruído de medida,  $v_k$ , obtem-se:

$$v_k = D_k^{-1}(y_k - C_k x_k) \quad (2.33)$$

Desenvolvendo a norma,  $\|v_k\|^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^2 &= v_k^T v_k = (y_k - C_k x_k)^T \cdot (D_k^T D_k)^{-1} \cdot (y_k - C_k x_k) \\
&= (y_k - C_k x_k)^T \cdot (R_k)^{-1} \cdot (y_k - C_k x_k) \\
&= \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Então, substituindo as equações (2.29) e (2.34) na equação (2.30) podemos reescrever a função custo do filtro  $H_\infty$ :

$$\begin{aligned}
J_{H_\infty}(\hat{z}; x_0, w, v) &= \sum_{k=0}^N \|L_k x_k - \hat{z}_k\|^2 - \gamma^2 \left( \sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right) \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Assim, o problema minimax entre  $\hat{z}_k$  e  $(x_0, w_k, v_k)$  passa a ser entre  $\hat{z}_k$  e  $(x_0, w_k, y_k)$ . As estimativas ótimas são denotadas, respectivamente, por  $\hat{z}_k^*$  e  $(x_0^*, w_k^*, y_k^*)$ .

O ruído de processo ou perturbação do pior caso é representado por  $w_k^*$ . O ruído de medida do pior caso,  $v_k^*$ , corresponde à medida  $y_k^*$ . A solução ótima do problema minimax é definida por  $(\hat{z}_k^*, x_0^*, w_k^*, y_k^*)$ .

Para maximizar a equação (2.35) em relação  $x_0$  e  $w_k$ , obtemos a seguinte função hamiltoniana da equação (2.35).

$$\begin{aligned}
H_k &= \frac{1}{2} \gamma^{-2} \cdot \|L_k x_k - \hat{z}_k\|^2 - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \|w_k\|^2 + \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right\} + \lambda_{k+1}^T (A_k x_k + B_k w_k) \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Seja  $(x_k^*, \lambda_k^*)$  a trajetória ótima de  $(x_k, \lambda_k)$  que corresponde à perturbação do pior caso  $w_k^*$ . Verificam-se as seguintes condições necessárias de otimalidade:

1. Condição de estado:

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = x_{k+1}^* \Rightarrow x_{k+1}^* = A_k x_k^* + B_k w_k^*$$

2. Condição do hamiltoniano:

$$\frac{\partial H_k}{\partial w_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ -\frac{1}{2} w_k^T w_k + \lambda_{k+1}^T B_k w_k \right\} = 0 \Rightarrow w_k^* = B_k \lambda_{k+1}^*$$

3. Condição de co-estado:  $\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = \lambda_k^*$

$$\lambda_k^* = \gamma^{-2} L_k^T L_k x_k^* - \gamma^{-2} L_k^T \hat{z}_k + A_k^T \lambda_{k+1}^* + C_k^T R_k^{-1} y_k - C_k^T R_k^{-1} C_k x_k^*$$

4. Condição de contorno:  $\frac{\partial H_0}{\partial x_0} = \lambda_0^*$

$$\lambda_0^* = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ -\frac{1}{2} (x_0^T - \bar{x}_0^T) \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \right\}$$

assim, temos:

$$x_0^* = \bar{x}_0 + \Pi \lambda_0^*$$

As equações encontradas a partir da verificação das condições necessárias de otimalidade constituem um problema de TPBVP (*Two Point Boundary Values Problem*) (SHARED,1995)(TAKABA, 1996).

$$\begin{bmatrix} I_n & -B_k B_k^T \\ 0 & A_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ \lambda_{k+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ C_k^T R_k^{-1} C_k - \gamma^{-2} L_k^T L_k & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^* \\ \lambda_k^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_k^T R_k^{-1} y_k + \gamma^{-2} L_k^T \hat{z}_k \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x_0^* = \bar{x}_0 + \Pi \lambda_0^* \\ \lambda_{k+1}^* = 0 \end{matrix}$$

A partir da análise destas condições de otimalidade no hamiltoniano da função custo do filtro robusto (2.36) e após algumas manipulações algébricas, podemos obter as equações do filtro, bastante conhecida na literatura atual (TAKABA, 1996) e descritas na Tabela 2.4.

Equações do Filtro $H_\infty$ (Filtro Robusto)	
Saída Regulada do Sistema	$z_k = L_k \hat{x}_{k k-1}$
Ganho de Kalman	$K_k = P_{k k-1} C_k^T (C_k P_{k k-1} C_k^T + R)^{-1}$
Cálculo da estimativa (atualização do estado)	$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k k-1})$
Cálculo da covariância (atualização da covariância)	$P_{k+1} = A_k P_k E_k^{-1} A_k^T + B_k B_k^T, \quad P_0 = \Pi$
	$E_k = I_n + (C_k^T R_k^{-1} C_k - \gamma^{-2} L_k^T L_k) P_k$

Tabela 2.4 – Resumo das Equações do Filtro  $H_\infty$

## 2.7 Dualidade entre Filtro de Kalman e o Regulador Linear Quadrático

O exemplo melhor conhecido da dualidade entre estimação e controle é a dualidade entre o filtro de Kalman e o regulador linear quadrático (NAIDU, 2002). Este significado teórico torna possível a aplicação de algoritmos de estimação em problemas de controle e vice-versa. Neste trabalho, esta dualidade é considerada na dedução desta nova metodologia de síntese do filtro de Kalman.

Seguindo a notação adotada para a formulação do problema de filtro de Kalman, apresentamos sucintamente o seguinte problema de controle ótimo de sistema dinâmico invariante no tempo:

$$\text{Sistema Dinâmico: } x_{k+1} = Ax_k + Hu_k + Bw_k \quad (2.37)$$

$$\text{Função Custo: } J(x_k, u_k, k) = \frac{1}{2} x_N^T Q x_N + \frac{1}{2} u_k^T R u_k \quad (2.38)$$

Para a obtenção do controlador ótimo é também empregada uma função quadrática:

$$v(x_k, k) = \frac{1}{2} x_k^T V_k x_k \quad (2.39)$$

Definindo a equação de Bellman (BERTSEKAS, 1996), temos:

$$\frac{1}{2} x_k^T V_k x_k = \min_u \left\{ \frac{1}{2} u_k^T R u_k + x_k^T Q x_k + \frac{1}{2} (Ax_k + Hu_k)^T V_{k+1} (Ax_k + Hu_k) \right\} \quad (2.40)$$

Minimizando analiticamente o hamiltoniano, resultando em:



$$u_k = -(R + H^T V_{k+1} H)^{-1} H^T V_{k+1} A x_k \quad (2.41)$$

Substituindo a equação (2.41) na equação de Bellman, encontraremos a equação de Riccati em tempo discreto:

$$V_k = Q + A^T V_{k+1} A - A^T V_{k+1} H (R + H^T V_{k+1} H)^{-1} H^T V_{k+1} A \quad (2.42)$$

onde, podemos observar que a equação (2.42) é idêntica a equação do cálculo de  $P_{k/k-1}$  descrita na tabela 2.3.

### Relação entre as Equações de Riccati discreta e contínua

Para o regulador linear quadrático, a equação de Riccati em tempo contínuo pode ser definida, utilizando as equações de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) (PANDY, 2001):

$$-\dot{V} = Q + A^T V + VA - VHR^{-1}H^T V \quad (2.43)$$

Para o filtro de Kalman-Bucy (MORTENSEN, 1968), a equação de Riccati em tempo contínuo é dada como:

$$\dot{S} = C^T (DD^T)^{-1} C - A^T S - SA - SBR^{-1}B^T S \quad (2.44)$$

onde  $S$  é a inversa da matriz de covariância.

Comparando a equação de Riccati para o regulador linear quadrático (2.43) e filtro de Kalman (2.44), obtemos a dualidade de Kalman em tempo contínuo na Tabela 2.5:

Regulador Linear Quadrático	Filtro de Kalman
$V$	$P^{-1}$
$A$	$-A$
$HR^{-1}H^T$	$BR^{-1}B^T$
$Q$	$C^T (DD^T)^{-1} C$

Tabela 2.5 – Dualidade: Filtro Kalman (informação) e LQR

Porém, é possível obtermos uma nova forma de dualidade entre controle e estimação. Seja a inversa da matriz de covariância  $S = P^{-1}$ . Esta correspondência

resulta numa equivalência entre  $V$  e  $P^{-1}$  (TODOROV, 2006). Vamos o explorar o fato de que, se  $S$  uma matriz simétrica definida positiva, a derivada no tempo de sua inversa é:

$$\frac{d}{dt}[S^{-1}] = -S^{-1}\dot{S}S^{-1} \quad (2.45)$$

Substituindo  $S = P^{-1}$  na equação (2.44), obtemos:

$$\dot{P} = -P^{-1}\dot{S}P^{-1} \quad (2.46)$$

Na equação de Riccati (2.44) substituímos  $S^{-1}$  por  $P$ , temos:

$$\dot{S} = C^T(DD^T)^{-1}C - A^T P^{-1} - P^{-1}A - P^{-1}BR^{-1}B^T P^{-1} \quad (2.47)$$

Substituindo a equação (2.47) na (2.46) e organizando os termos, obteremos a seguinte equação de Riccati para filtros:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -P[C^T(DD^T)^{-1}C - A^T P^{-1} - P^{-1}A - P^{-1}BB^T P^{-1}]P \\ \dot{P} &= BR^{-1}B^T + AP + PA^T - PC^T(DD^T)^{-1}CP \end{aligned} \quad (2.48)$$

Assim, comparando esta nova forma da equação de Riccati (2.48) com a equação (2.43), nota-se:

Regulador Linear Quadrático	Filtro de Kalman
$V$	$P$
$A$	$A^T$
$H$	$C^T$
$R$	$DD^T$
$Q$	$BR^{-1}B^T$

Tabela 2.6 – Dualidade: Filtro de Kalman e LQR

Esta dualidade não pode ser generalizada, é especificamente entre filtros e controle LQR Gaussiano (NAIDU, 2002). Nesta seção, observamos a dualidade entre o filtro e o controle LQR em tempo contínuo mais também se pode considerar esta mesma relação em tempo discreto, através de uma aproximação de Euler.

$$x_k \leftarrow x(k\Delta), A \leftarrow (I + \Delta A), B \leftarrow (I + \Delta B), R \leftarrow \Delta R, Q \leftarrow \Delta Q \quad (2.49)$$

onde  $\Delta$  é o intervalo de tempo, utilizado na aproximação de Euler para mapear um sistema contínuo em um sistema discreto, ou seja, obter uma solução exata para o controle LQR em tempo discreto.

Analisaremos uma relação entre as equações de Riccati para controle LQR em tempo contínuo e discreto, conforme mostrado na proposição 2.1. Desta relação fica evidente que a equação de Riccati em tempo discreto (2.43) possui mais termos do que a equação de Riccati em tempo contínuo (2.44).

**Proposição 2.1.** As equações de Riccati em tempo contínuo e tempo discreto descritas pela equação (2.50) são idênticos no limite  $\Delta \rightarrow 0$

$$\frac{V_k - V_{k+1}}{\Delta} = Q + A^T V_{k+1} + V_{k+1} A - V_{k+1} H (R + \Delta H^T V_{k+1} H)^{-1} H^T V_{k+1} + \frac{o(\Delta^2)}{\Delta} \quad (2.50)$$

onde  $o(\Delta^2)$  são os termos de segunda ordem.

**Prova:** Substituir as matrizes da equação (2.42) com seus análogos em tempo contínuo (2.49) obtemos:

$$\begin{aligned} V_k &= \Delta Q + (I + \Delta A)^T V_{k+1} (I + \Delta A) - (I + \Delta A) V_{k+1} \Delta H (\Delta R + \Delta H^T V_{k+1} H)^{-1} \Delta H^T V_{k+1} (I + \Delta A) \\ &= \Delta Q + V_{k+1} + V_{k+1} \Delta A + \Delta A^T V_{k+1} + \Delta^2 A^T V_{k+1} A \\ &\quad + (V_{k+1} \Delta H + \Delta^2 V_{k+1} \Delta H) (\Delta R + \Delta^2 H^T V_{k+1} H)^{-1} (\Delta H^T V_{k+1} + \Delta^2 H^T V_{k+1} A) \end{aligned}$$

Eliminando os termos de segunda ordem, temos:

$$V_k = \Delta Q + V_{k+1} + \Delta V_{k+1} A + \Delta A^T V_{k+1} - \Delta V_{k+1} H (R + \Delta H^T V_{k+1} H)^{-1} H^T V_{k+1}$$

Reorganizando os termos e incluindo o termo de segunda ordem  $o(\Delta^2)$ , temos:

$$\frac{V_k - V_{k+1}}{\Delta} = Q + A^T V_{k+1} + V_{k+1} A - V_{k+1} H (R + \Delta H^T V_{k+1} H)^{-1} H^T V_{k+1} + \frac{o(\Delta^2)}{\Delta}$$

Tirando o limite  $\Delta \rightarrow 0$ , obtemos a equação de Riccati em tempo contínuo (2.43).

## 2.8 Comentário Final

Neste capítulo, analisamos os aspectos mais importantes que serão empregados

na estruturação da nova metodologia para filtros, referentes normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , dualidade, minimização de quadráticas, regiões de confiança, procedimentos de regularização de (2.21), sistema observável e filtro  $H_2$  e  $H_\infty$ .

No capítulo a seguir, apresentaremos um novo método para a solução do problema de filtragem aplicando dualidade, sem recorreremos as tradicionais equações de Riccati, e demonstraremos a equivalência entre o método proposto e o convencional para filtros.

## NOVA METODOLOGIA PARA SÍNTESE DO FILTRO DE KALMAN

Este capítulo tem como objetivo propor um novo método em estimação de estados, baseado em programação quadrática, para a obtenção de forma direta de filtro em norma  $H_2$ . Uma das principais vantagens deste novo método é a possibilidade de ser obter projetos de filtros com horizonte de tempo de reduzido para aplicações em tempo real.

Ao final do capítulo, apresentaremos dois exemplos didáticos para ilustrar as principais vantagens do novo método. Esta metodologia, com consistência algébrica (boas propriedades de estabilidade numérica e matrizes bem condicionadas) subjacente, possibilitar-nos a obter uma família de resultados subótimos para filtros, em alguns casos, até melhores que as obtidas via solução recursiva de Riccati.

### 3.1 Condições de Otimalidade

A partir da notação do problema de filtragem adotada no capítulo II, considere a seguinte função custo do filtro de Kalman (2.26):

$$J_{H_2}(x_0, w, v) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 + \sum_{k=0}^N \|v_k\|^2$$

Continuando a formulação do problema do filtro de Kalman, com a utilização da equação (2.25), que relaciona o vetor de medida,  $y_k$ , ao ruído de medida,  $v_k$ , obtém-se:

$$v_k = D_k^{-1}(y_k - C_k x_k) \quad (3.1)$$

Desenvolvendo a norma,  $\|v_k\|^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^2 &= v_k^T v_k = (y_k - C_k x_k)^T \cdot (D_k^T D_k)^{-1} \cdot (y_k - C_k x_k) \\
&= (y_k - C_k x_k)^T \cdot (R_k)^{-1} \cdot (y_k - C_k x_k) \\
&= \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Então, substituindo a equação (3.2) na equação (2.26) podemos reescrever a função custo do filtro  $H_2$ :

$$J_{H_2}(x_0, w, v) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|w_k\|_{R_k}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 \tag{3.3}$$

Assim, o problema de minimização da função custo do filtro  $H_2$  passa a ser determinada em relação a  $(x_0, w_k, y_k)$  e não mais em  $(x_0, w_k, v_k)$ . Para minimizar  $J_{H_2}$  em relação à  $x_0$  e  $w_k$ , formamos o hamiltoniano:

$$H_k = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 + \|w_k\|_{R_k}^2 + \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \lambda_{k+1}^T (A_k x_k + B_k w_k) \tag{3.4}$$

Verificando as condições necessárias de otimalidade, temos:

**Condição de estado:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1}^* = A_k x_k^* + B_k w_k^* \tag{3.5}$$

**Condição Hamiltoniano:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial w_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \frac{1}{2} w_k^T R_k w_k + \lambda_{k+1}^T B_k w_k \right\} = 0 \Rightarrow w_k^* = -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} \tag{3.6}$$

**Condição Co-Estado:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = \lambda_k^* \Rightarrow \lambda_k^* = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -\frac{1}{2} (y_k^T - x_k^T C_k^T) R_k^{-1} (y_k - C_k x_k) + \lambda_{k+1}^T A_k x_k \right\}$$

$$\lambda_k = C_k^T R^{-1} C_k x_k + A_k \lambda_{k+1} \tag{3.7}$$

### Condição Contorno:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_0} = \lambda_0^* \Rightarrow \lambda_0^* = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ -\frac{1}{2} (x_0^T - \bar{x}_0^T) \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \right\} \quad (3.8)$$

Visto que o problema é convexo, estas condições são necessárias e suficientes. Assim, devido à inexistência de procedimentos de recorrência, os cálculos de  $w_k$  e  $x_k$  em (3.6) e (3.7), depende somente de  $\lambda_{k+1}$ , assim:

$$w_k^* = -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.9)$$

$$x_k = Q^{-1} (\lambda_k^* - A^T \lambda_{k+1}) \quad (3.10)$$

$$x_N = Q^{-1} \lambda_N^* \quad (3.11)$$

### 3.2 Particularidade da Formulação do Problema de Filtragem

Considerando  $\hat{x}_k$  ser uma estimativa de  $x_k$ , baseado na medição de  $\{y_0, \dots, y_k\}$ , podemos reescrever a equação (3.1):

$$v_k = D_k^{-1} C_k (x_k - \hat{x}_k) \quad (3.12)$$

Definindo  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$  como sendo o vetor dos resíduos entre os estados reais e os estimados. Podemos reescrever a função custo (3.3) do filtro:

$$J_{H_2}(\tilde{x}_0, w, v) = \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|\tilde{x}_k\|_Q^2 + \sum_{k=0}^N \|w_k\|_{R_k}^2 \quad (3.13)$$

onde  $Q = C_k^T R^{-1} C_k$ .

Empregando os resultados descritos nas Tabelas (2.5) e (2.6), podemos redefinir  $Q = B_k R^{-1} B_k^T$  e a função lagrangeana do sistema como:

$$l(\tilde{x}_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \left( \|\tilde{x}_k\|_Q^2 + \|w_k\|_{R_k}^2 \right) + \lambda_{k+1}^T (A_k^T x_k + C_k^T w_k - \tilde{x}_{k+1}) \quad (3.14)$$

### 3.3 Formulação Dual via Programação Quadrática

O problema de filtragem ótima discreta envolve uma solução iterativa de uma seqüência de sistemas resultantes da discretização de um processo contínuo, representado por equações diferenciais parciais que descrevem seu comportamento

dinâmico. De modo geral, em intervalos de tempo menores tornam mais precisa a aproximação discreta, porém aumentam o número de variáveis de estado. Para obtenção de soluções eficientes, há a necessidade de explorar estruturas matriciais especiais.

Neste trabalho, estendemos o conceito da teoria de dualidade para estabelecer relações entre estruturas algébricas resultantes de transformações duais de um conjunto de equações dinâmicas complexas em um conjunto de equações estáticas mais simples. Assim, consideraremos o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{k+1}} L(\lambda_{k+1}) \\ \text{s.a. } \nabla_{x,w} l(\tilde{x}_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{onde, } L(\lambda_{k+1}) = \min_{w_k, x_k} l(x_k, w_k, \lambda_{k+1}, k).$$

Podemos reescrever este problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{k+1}} \min_{w_k, x_k} l(\tilde{x}_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) \\ \text{s.a. } \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^n \\ \tilde{x}_0 = \xi \\ \tilde{x}_N = Q^{-1} \lambda_N^* \\ w_k^* = -R^{-1} C_k \lambda_{k+1}^* \\ \tilde{x}_k = Q^{-1} (\lambda_k^* - A \lambda_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A solução dual pode ser obtida numericamente por técnicas do tipo gradiente (DOYLE, 1978), entretanto é computacionalmente dispendioso, pois envolve uma grande quantidade de cálculos. Para reduzirmos os custos computacionais e simplificarmos o processo, propomos dada a concavidade estrita da função  $\nabla L(\lambda_{k+1})$ , uma reformulação do problema dual dinâmico de modo a obtermos uma forma quadrática estática definida no teorema a seguir.

**Teorema 3.1** – Dada a concavidade da função dual  $\nabla L(\lambda_{k+1})$  e as restrições dadas por (3.16), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:



$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \bar{\lambda} &\in \mathbb{R}^{nN} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde,  $\tilde{H}_{nN \times nN}$  é uma matriz simétrica por bloco tridiagonal, definida positiva e formada por  $N^2$  blocos de dimensões  $n \times n$ ,  $\tilde{b}$  é um vetor de dimensões  $nN \times 1$ ,  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  e  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{nN}$  dado por:

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_N]^T \in \mathbb{R}^{nN} \quad (3.18)$$

**Prova:** Para obter a forma quadrática estática da equação (3.17), iniciamos com a substituição das restrições dadas na equação (3.16) na equação (3.14) em seguida, expandimos os termos do somatório para os valores de  $k=0,1,\dots,N-1$ , conforme podemos observar abaixo:

**Para  $k=0$ :**

$$l(\tilde{x}_0, w_0, \lambda_1, 0) = \frac{1}{2} \tilde{x}_N^T Q \tilde{x}_N + \frac{1}{2} [\tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + w_0^T R w_0] + \lambda_1^T [A_0^T \tilde{x}_0 + C_0^T w_0 - \tilde{x}_1]$$

$$\therefore \tilde{x}_N^T Q \tilde{x}_N = \lambda_N^T Q^{-1} Q Q^{-1} \lambda_N = \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N$$

$$\therefore w_0^T R w_0 = (-R^{-1} C_0 \lambda_1^*)^T R (-R^{-1} C_0 \lambda_1^*) = \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda_1^T [A_0^T \tilde{x}_0 + C_0^T w_0 - \tilde{x}_1] &= \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 + \lambda_1^T C_0^T w_0 - \lambda_1^T \tilde{x}_1 \\ &= \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 + \lambda_1^T C_0^T (-R^{-1} C_0 \lambda_1) - \lambda_1^T [Q^{-1} (\lambda_1 - A \lambda_2^T)] \\ &= \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 - \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 - \lambda_1^T Q^{-1} \lambda_1 + \lambda_1^T Q^{-1} A \lambda_2^T \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} l(\tilde{x}_0, w_0, \lambda_1, 0) &= \frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 \\ &\quad + \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 - \lambda_1^T Q^{-1} \lambda_1 + \lambda_1^T Q^{-1} A \lambda_2^T \end{aligned}$$

Utilizaremos um artifício matemático para incluir no somatório os termos  $(-\lambda_1^T Q^{-1} \lambda_1 + \lambda_1^T Q^{-1} A \lambda_2^T)$ .

**Para  $k=1$ :**

Podemos definir a equação quadrática estática como:

$$\begin{aligned}
L(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 + \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 \right] \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T C_k^T R^{-1} C_k \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1}^T A_k^T \tilde{x}_k - \lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k \right. \\
&\left. + \lambda_k^T Q^{-1} A_k \lambda_{k+1} \right] + \left[ -\lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \lambda_N^T Q^{-1} A_k \lambda_{N+1} \right]
\end{aligned}$$

Onde:

$$\therefore \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 + \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 \right] \text{ para o instante } k = 0.$$

$$\therefore \left[ -\lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \underbrace{\lambda_N^T Q^{-1} A_k \lambda_{N+1}}_0 \right] \text{ para o instante } k = (N-1).$$

$$\begin{aligned}
\therefore \tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k &= [Q^{-1}(\lambda_k - A_k \lambda_{k+1})]^T Q [Q^{-1}(\lambda_k - A_k \lambda_{k+1})] \\
&= [\lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k - \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} \lambda_k - \lambda_k^T Q^{-1} A_k \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} A_k \lambda_{k+1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lambda_{k+1}^T A_k^T \tilde{x}_k &= \lambda_{k+1}^T A_k^T [Q^{-1}(\lambda_k - A_k \lambda_{k+1})] \\
&= \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} \lambda_k - \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} A_k \lambda_{k+1}
\end{aligned}$$

Assim a equação quadrática estática pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
L(\bar{\lambda}) &= -\frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 + \lambda_1^T A_0^T \tilde{x}_0 \right] \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \left[ -\frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} A_k^T \lambda_{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T (C_k^T R^{-1} C_k + A_k^T Q^{-1} A_k) \lambda_{k+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Agrupando os termos segundo os vetores adjuntos, obtemos a matriz  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} V_1 & W & 0 & \dots & 0 \\ W^T & V_2 & W & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & W^T & V_N \end{bmatrix}$$

Ao calcular os valores de cada termo da matriz, temos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= -C^T R^{-1} C - Q^{-1} \\
V_2 &= V_1 - A^T Q^{-1} A \\
V_3 &= V_2 \\
W &= Q^{-1} A \\
c &= \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 \\
b &= \begin{bmatrix} A^T x_0 & 0_{nx1} & \cdots & 0_{nx1} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Portanto, a forma quadrática estática está definida:

$$\max_{\bar{\lambda}} L(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T H \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T b + c$$

Visto que maximizar  $L(\bar{\lambda})$  é equivalente a minimizar  $-L(\bar{\lambda})$  na mesma região do espaço (POWER, 1984). Considerando  $M(\bar{\lambda}) = -L(\bar{\lambda})$ , teremos:

$$\begin{aligned}
\min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\
s.a \quad \bar{\lambda} &\in \mathbb{R}^{nN}
\end{aligned}$$

onde:  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$  e  $\tilde{c} = -c$ .

**Observação 3.1:** A matriz  $\tilde{H}$  é definida positiva. Pois, por definição, temos que  $Q = Q^T > 0$  e  $R = R^T > 0$ , assim, como a soma de uma matriz definida positiva ( $R$ ) com uma semi-definida positiva ( $Q$ ) é uma matriz definida positiva, ao considerarmos  $\bar{V}_1 = -V_1$ , temos então que  $V_1 > 0$ . Utilizando a mesma argumentação para  $V_2 > 0$  e  $V_3 > 0$ .

A seguir, apresentaremos o Lema 3.1, referente ao complemento de Schur, para ratificarmos nossa argumentação a favor de  $\tilde{H}$  ser definida positiva. Podemos encontrar algumas aplicações e demonstrações do Lema 3.1 em Boyd (1996), Cruz (1996), Feingold (1962), Kassam (1995) e Wang (1998).

**Lemas 3.1 (Complemento de Schur)** - Para a matriz simétrica  $\Pi$  :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{W} & 0 \\ \bar{W}^T & \bar{V}_2 & \bar{W} \\ 0 & \bar{W}^T & \bar{V}_3 \end{bmatrix}$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

- i.  $\Pi > 0$
- ii.  $\bar{V}_1 > 0$
- iii.  $\bar{V}_2 > 0$
- iv.  $\bar{V}_3 > 0, \bar{V}_3 - \bar{W}^T \bar{V}_2^{-1} \bar{W} > 0$

Através da argumentação inicial, observação 3.1, temos que os blocos da diagonal principal de  $\tilde{H}(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3)$  são definidos positivos e pelo Lema 3.1, sem perda de generalidade, o conjunto  $\{\bar{V}_1 > 0, \bar{V}_2 - \bar{W}^T \bar{V}_1^{-1} \bar{W} > 0\}$  é equivalente à:

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{W} \\ \bar{W}^T & \bar{V}_2 \end{bmatrix} > 0$$

Pois a matriz:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & 0 \\ 0 & \bar{V}_2 - \bar{W}^T \bar{V}_1^{-1} \bar{W} \end{bmatrix}$$

É definida positiva se, e somente se,  $\bar{V}_1 > 0$  e  $\bar{V}_2 - \bar{W}^T \bar{V}_1^{-1} \bar{W} > 0$ . Neste sentido, ao definirmos uma matriz inversível  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{W}^T \bar{V}_1^{-1} & I \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$\tilde{\Pi} = T \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{W} \\ \bar{W}^T & \bar{V}_2 \end{bmatrix} T^T$$

Então, podemos concluir que a matriz  $\tilde{H}$  é definida positiva e, portanto, por extensão temos  $\Pi > 0$  e  $\tilde{H} > 0$ .

### 3.4 Novo Algoritmo para Equação Algébrica de Riccati

Apresentaremos a seguir, para projeto de filtro de Kalman, uma extensão de dois teoremas propostos em Nascimento (2007) para se obter uma solução alternativa da equação algébrica de Riccati e uma matriz de ganho de Kalman  $F$ . Nestes teoremas

está garantida a existência de uma solução da equação de Riccati recursiva que é idêntica a solução clássica baseada, por exemplo, em programação dinâmica (KIRK, 1970). Para a nova síntese do filtro de Kalman, apresentamos somente a forma equivalente dos teoremas propostos para a solução equação de Riccati, explorando o resultado teórico da dualidade entre estimação e controle.

**Teorema 3.2** – Ao considerarmos um problema de filtragem, existe uma função matricial  $P_N$ , tal que:

$$P_N = A\bar{H}_{11}A^T + Q \quad (3.20)$$

Para o menor valor do índice de desempenho dado por:

$$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \min_{w_k} J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T P_N \tilde{x}_0 \quad (3.21)$$

**Prova:** Para provar o teorema 3.2, necessitamos do seguinte valor ótimo de  $\bar{\lambda}^*$  dado pela equação (3.17):

$$\nabla_{\lambda} M(\bar{\lambda}) = \tilde{H}\bar{\lambda} - b = 0$$

Organizando os termos:

$$\bar{\lambda}^* = \tilde{H}^{-1}b \quad (3.22)$$

Na formulação matricial da equação (3.22), temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \cdots & \bar{H}_{1N} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} & \cdots & \bar{H}_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}_{N1} & \cdots & \cdots & \bar{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ 0_{nx1} \\ \vdots \\ 0_{nx1} \end{bmatrix}$$

Ou

$$\lambda_1 = \bar{H}_{11}A^T x_0, \dots, \lambda_N = \bar{H}_{N1}A^T x_0 \quad (3.23)$$

Considerando, sem perda de generalidade,  $N = 2$ , temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}$$

Portanto, temos a seguinte identidade:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 & W \\ W^T & \bar{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Assim, a equação (3.13) pode ser reescrita para  $N = 2$ ,  $k = 0, 1, 2$  obteremos:

$$J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ w_o \\ w_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ w_o \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Substituindo as restrições (3.16) na equação (3.25), temos:

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ Q^{-1} \lambda_2 \\ -R^{-1} C \lambda_1 \\ -R^{-1} C \lambda_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ Q^{-1} \lambda_2 \\ -R^{-1} C \lambda_1 \\ -R^{-1} C \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Definindo alguns termos:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ Q^{-1} \lambda_2 \\ -R^{-1} C \lambda_1 \\ -R^{-1} C \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

A equação:

$$J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + \frac{1}{2} \Gamma^T \Phi \Gamma \quad (3.26)$$

Então, substituindo  $\lambda_1 = \bar{H}_{11} A^T \tilde{x}_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21} A^T \tilde{x}_0$  na equação (3.26), teremos:

$$\begin{aligned} J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) &= \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{11} (\bar{V}_1 \bar{H}_{11} - W \bar{H}_{21}) A^T \tilde{x}_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{21} (\bar{V}_2 \bar{H}_{21} + W^T \bar{H}_{11}) A^T \tilde{x}_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ao considerar a matriz identidade (3.24) e a equação (3.27), temos:

$$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{11} (I_{n \times n}) A^T \tilde{x}_0 + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{21}^T (0_{n \times n}) A \tilde{x}_0 \quad (3.28)$$

Organizando os termos:

$$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T (A \bar{H}_{11} A^T + Q) \tilde{x}_0 \quad (3.29)$$

Assim, para  $k=0,1,\dots,N-1$  e estrutura citada na equação (3.29) permanece inalterada. Portanto, concluímos que a partir da equação (3.21), a matriz  $P_N$  fornece o custo mínimo, quando está definida na forma:

$$P_N = A \bar{H}_{11} A^T + Q \quad (3.30)$$

**Proposição 3.1** – Ao considerarmos a equação do sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T A \tilde{x}_k \\ &= (A_k^T + C_k^T A) \tilde{x}_k \\ &= A_{\hat{F}}^T \tilde{x}_k \\ &= (A_{\hat{F}}^T)^k \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

É possível definir o ganho  $\hat{F}$  :

$$\begin{aligned} \hat{F} &= (C_k^T A)^+ (\Theta - A_k^T) \\ &= (C_k^T A)^+ [Q^{-1} (\bar{H}_{11} A_k^T - A_k \bar{H}_{21} A_k^T) - A_k^T] \quad (3.31) \end{aligned}$$

**Prova:** Para  $N = 2$ , sem perda de generalidade, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Ou seja, a exemplo de (3.23), temos  $\lambda_1 = \bar{H}_{11} A^T x_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21} A^T x_0$ .  
Portanto de

$$\tilde{x}_1 = \left( A_{\hat{F}}^T \right)^k \tilde{x}_0$$

Ao considerarmos a equação das restrições (3.16), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ &= Q^{-1}(\bar{H}_{11}A - A\bar{H}_{21}A^T)\tilde{x}_0 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$x_k = (\Theta)^k x_0$$

Portanto:

$$x_1 = (\Theta)^k x_0 \text{ e } A_{\hat{F}}^T = \Theta$$

E, como gostaríamos:

$$\hat{F} = (C^T)^+ [\Theta - A^T] \quad (3.33)$$

**Teorema 3.3-** Para garantir a existência da matriz C que satisfaça (3.32):

$$\Theta = Q^{-1}(\bar{H}_{11} - A\bar{H}_{21})A^T$$

Existe  $\hat{F}$ , a solução de (3.31), se e somente se:

$$U_1^T (C_k^T A_k \hat{F}) = 0 \quad (3.34)$$

onde:

$$C^T = [U_0 \quad U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Visto que a matriz  $U = [U_0 \quad U_1]$  é ortogonal e  $Z$  é não singular. Então,  $\hat{F}$  é dado explicitamente por:

$$\hat{F} = Z^{-1}U_0^T (\Theta - A^T) \quad (3.36)$$

**Prova:** Consideramos que C tem posto completo. Isto implica na existência da decomposição em (3.35). A partir de (3.31),  $\hat{F}$  deve satisfazer:

$$C^T \hat{F} = \Theta - A^T$$



Multiplicando as equações por  $U^T$ , temos:

$$\begin{aligned} Z\hat{F} &= U_0^T (\Theta - A^T) \\ 0 &= U_1^T (\Theta - A^T) \end{aligned}$$

Pelo qual (3.34) e (3.35) seguem diretamente.

**Comentário 3.2.** A equação (3.36) implica que  $\hat{F}$  existe se, se e somente se,  $\mathfrak{R}\{\hat{F} - A^T\} \subset \mathfrak{R}\{C^T\} \equiv \mathfrak{R}\{U_0\}$  onde  $\mathfrak{R}\{\cdot\}$  é o espaço range. Para a decomposição em (3.35) de  $C^T$ , pode-se utilizar, por exemplo, decomposição por valores singulares (FARIAS, 1998), em que  $Z = \Sigma V^T$ , onde  $\Sigma = \text{diagonal}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ , é uma matriz positiva e  $V$  é uma matriz ortogonal. Outro método de fatorização que pode ser empregado é a decomposição  $QR$ , e neste caso,  $Z$  é a matriz triangular superior.

**Comentário 3.3.** Uma alternativa para calcularmos o ganho  $\hat{F}$  é realizarmos uma alocação de pólos, com o objetivo de incluir todos os autovalores do sistema em malha fechada em uma sub-região do plano convexo, através da determinação de uma lei de estimação conveniente. A localização dos pólos do sistema está diretamente relacionada com os índices de desempenho do sistema. Para alocar arbitrariamente todos os pólos do sistema é necessário que todas as variáveis de estado possam ser medidas ou observadas com sucesso, ou seja, o sistema deve ser completamente observável. Existem funções do Matlab para calcular este ganho, a partir da informação de  $(A_k^T, C_k^T A_k)$  e da localização desejada para os pólos. Neste trabalho utilizamos o comando  $place(A_k^T, C_k^T A_k, P)$ , este algoritmo empregado na função  $place$  encontra uma solução robusta para sistemas com múltiplas entradas. Mesmo para sistemas com uma única entrada recomenda-se o uso da função  $place$ .

A Tabela 3.2, mostra um resumo entre a solução de Riccati ( $P_{RIC}$ ) e a nova metodologia ( $P_{PQ}^{new}$ ) abordada:

Modelo do sistema	$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k \\ \bar{y}_k &= B_k^T \tilde{x}_k + D_k^T v_k \end{aligned}$
Função custo	$J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_N^T Q \tilde{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k + w_k^T R w_k]$
Solução Otimizada	$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T (A\bar{H}_{11}A^T + Q)\tilde{x}_0$
$P_{RIC}$	$P = APA^T - APC^T [C^T PC + R]^{-1} CPA^T + Q$
$P_{PQ}^{new}$	$P = A\bar{H}_{11}A^T + Q$
Ganho Kalman	$K = PC^T [R + CPC^T]^{-1}$
Ganho FCF	$\hat{F} = (C^T)^+ [Q^{-1}(\bar{H}_{11}A^T - A\bar{H}_{21}A^T) - A^T]$

Tabela 3.1 – Comparação entre Filtro via Riccati e nova metodologia

Embora o algoritmo proposto necessite da inversa da matriz Hessiana ( $\tilde{H}$ ), conforme definido na equação (3.22), temos que esta matriz inversa pode ser calculada *off-line* utilizando diversos métodos numéricos tais como: fatorização de House-Holder (FILHO, 2003), rotação de Givens (FILHO, 2003), fatorização de Cholesky (CAMPOS, 2008) e decomposição em valores singulares (FILHO, 2004).

A aplicação direta de algoritmos de otimização não linear estática à problemas dinâmicos pode resultar em métodos de otimização com problemas de estabilidade numérica. Considerando o condicionamento do sistema e a possibilidade de resolvermos o problema (3.17) em dimensões reduzidas da Hessiana ( $\tilde{H}$ ) garantiremos resultados mais significativos. Assim, os requerimentos de desempenho computacional para fins de aplicação do algoritmo em tempo real seriam satisfeitos, considerando-se as relevantes questões de instabilidade numérica e soluções imprecisas concernentes a um sistema mal condicionado. Para amenizar o problema de um sistema mal condicionado, podemos conferir uma análise de casos envolvendo o número de condição do sistema exposto no apêndice D.

Em adição, como veremos neste e no capítulo seguinte o ajuste no número de condição (vide análise detalhada do número de condição no apêndice D) será importante para gerarmos uma família de ganhos para filtros  $H_2$  e  $H_\infty$ . Notaremos na seção a seguir, que as estratégias de regularização possibilitarão boas probabilidades de estabilidade numérica e aplicações on-line do algoritmo proposto para horizonte de tempo reduzido, implicando na redução dimensional da matriz ( $\tilde{H}$ ).

### 3.5 Estratégia de Subproblemas de Região de Confiança - TRS

Nesta seção, propomos uma estratégia para obtermos um problema equivalente ao original (3.17) de tal forma que o mesmo seja resolvido através de subproblemas de TRS, para os quais a matriz Hessiana ( $\tilde{H}$ ) tenha dominância bloco diagonal (OLIVEIRA, 2000), (URREA, 2008) e possamos trabalhar com dimensões reduzidas da matriz ( $\tilde{H}$ ). Portanto, definimos o seguinte problema de programação não linear baseado em regiões de confiança:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \|\bar{\lambda}\| &\leq \Delta, \Delta > 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Onde :  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$ ,  $\tilde{c} = -c$

A estrutura especial do problema (3.37) proporciona características dos minimizadores muito mais poderosos que no caso geral de minimização irrestrita (LAUB, 1991), pois conforme exposto no Capítulo 2, ao resolvermos sucessivas vezes

o problema (3.37) nos aproximamos da solução citada em (3.17), considerando que temos de garantir a existência de uma solução  $\bar{\lambda}^*$ .

### 3.6 Proposição do Filtro via Otimização *On-line*

Através dos experimentos realizados, verificamos que para  $N$  pequeno o erro do resíduo  $\|\nabla M(\bar{\lambda})\|$  é reduzido tornando a matriz  $(\tilde{H})$  melhor condicionada. Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz  $(\tilde{H})$ , de  $nN$  para  $nd$ , onde  $d \ll N$ , o que possibilita diminuir seu número de condição e ratifica o fato de que podemos resolver este problema de otimização convexa (3.17) por intervalos (LAUB, 1991), ao se resolver sucessivas vezes o problema (3.37). Por este critério, ao considerarmos  $d = 2$  com  $\hat{\lambda}^* = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$  teremos então o problema (3.37) aproximado do problema (3.17), assim:

$$\left( \begin{bmatrix} C^T R^{-1} C + Q^{-1} & -Q^{-1} A \\ -A^T Q^{-1} & C^T R^{-1} C + Q^{-1} + A^T Q^{-1} A \end{bmatrix} + \mu I_{2n \times 2n} \right) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Então, é possível conseguir dominância no bloco diagonal aumentando-se o valor de  $\mu$  e, por conseguinte, boas propriedades de convergência e uma maior estabilidade numérica. É claro que a relação entre os valores de  $Q$  e  $R$  na matriz  $\hat{H}$  em (3.38) também pode garantir dominância estrita bloco diagonal (FARIAS, 1998), ou seja:

$$\sum_{k \neq j}^2 \|\hat{H}_{kk}^{-1} \hat{H}_{kj}\| < 1$$

Onde:  $\hat{H}_{kk}$ ,  $\hat{H}_{kj}$  são submatrizes  $(n \times n)$  de  $\hat{H}$ .

Notemos que quando  $\mu \rightarrow \infty$ , ou mais especificamente,  $\mu > \max\{0, -\sigma_1\}$ , a matriz  $(\hat{H} + \mu I)$  tende para:

$$\begin{bmatrix} C^T R^{-1} C + Q^{-1} + \mu I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & C^T R^{-1} C + Q^{-1} + A^T Q^{-1} A + \mu I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Portanto, com as perturbações causadas pelo parâmetro  $\mu$ , é possível situar os autovalores de  $\bar{H}$ , dentro de uma região de confiança:

$$\bar{H} = (\hat{H} + \mu I)^{-1} \quad (3.40)$$

Assim, torna-se possível reduzir a dimensão do sistema e garantir soluções

estáveis e bem condicionadas. Então, obtemos de forma semelhante ao teorema 3.1, o algoritmo que viabilize a obtenção de ganhos para modelos considerando a matriz Hessiana de ordem reduzida. A partir de  $\Theta = Q^{-1}(\bar{H}_{11} - A\bar{H}_{21})A^T$  é possível através de ajustes em  $\mu$  situar os pólos da matriz  $\Theta$  numa determinada região.

### 3.7 Análise e resultados

Nesta seção, apresentaremos dois exemplos para ilustrarmos a nova metodologia. Analisaremos os resultados comparativos entre a abordagem do Filtro de Kalman convencional via as equações de Riccati e a nova metodologia.

#### Exemplo 1

Considerando um exemplo didático, temos o seguinte sistema abaixo:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + 0.1w_k \\y_k &= x_k + v_k \\x_0 &= 1\end{aligned}$$

Neste caso, consideraremos a matriz  $\Gamma = 1$ , com ruído  $w_k = 0$  para ver a sensibilidade do filtro  $v_k = D_k^{-1}(y_k - C_k x_k)$ .

O ruído de medição  $v_k$  é visto como ruído branco gaussiano com média zero. Na Figura 3.1 e 3.2, mostraremos a simulação dos resultados para as seguintes matrizes de correlação:  $R = 0,01$  e  $Q_w = 1$ .

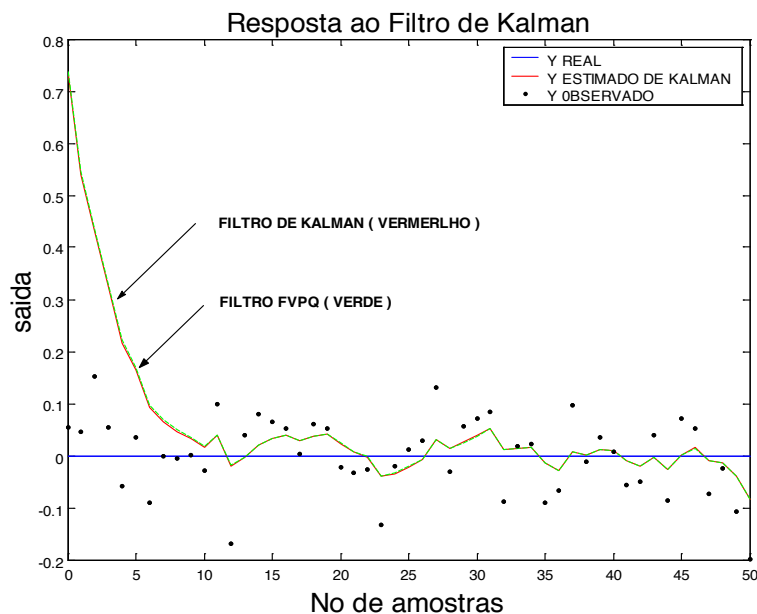


Figura 3.1 – Erro de Estimção entre Kalman x  $F_{VPQ}$ :  $\mu = 10$  e  $N_{int.} = 2$

Na figura 3.1, observamos que para  $\mu = 10$  e  $N_{int.} = 2$ , temos o mesmo erro de

estimação para o filtro de Kalman utilizando as Equações Matriciais de Riccati e o filtro com a nova metodologia  $F_{VPQ}$ . Realizou-se uma redução de condição de  $H$ , conforme o valor de  $N_{int.}$  e/ou ajustamos o valor do parâmetro  $\mu$ .

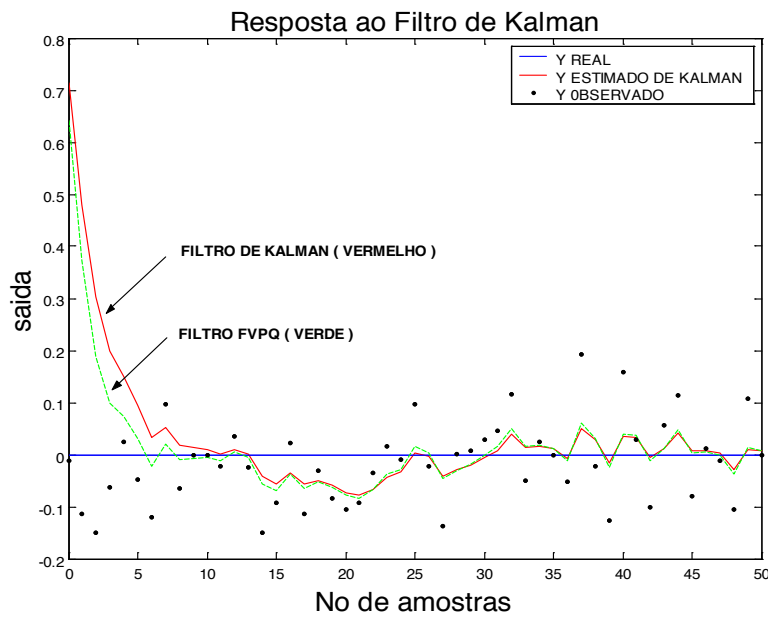


Figura 3.2 – Erro de Estimação entre Kalman x  $F_{VPQ}$  :  $\mu=20$  e  $N_{int.} = 2$

Na Figura 3.2, observamos que para  $\mu=20$  e  $N_{int.} = 2$ , temos uma solução com o Filtro  $F_{VPQ}$  relativamente melhor do que o Filtro de Kalman convencional, onde a metodologia proposta tende mais rapidamente a seguir o sinal real. Também temos a vantagem que a nova proposta tem uma redução computacional significativa em relação a o Filtro de Kalman baseado nas Equações de Riccati. Na Tabela 3.2, temos uma análise do condicionamento da matriz  $H$ .

Total de iterações	Valor de $\mu$	$\begin{pmatrix} \lambda_{max} \\ \lambda_{min} \end{pmatrix}$	Condicionamento $H$	Ganho Kalman / FCF
$N_{int.} = 18$	$\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 408,2343 \\ 11,8316 \end{pmatrix}$	34,5037	0,2824 / 0,2824
$N_{int.} = 2$	$\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 272,9145 \\ 49,3077 \end{pmatrix}$	5,5349	0,1743 / 0,1743
$N_{int.} = 2$	$\mu = 10$	$\begin{pmatrix} 282,9145 \\ 59,3077 \end{pmatrix}$	4,7703	0,2782 / 0,2782
$N_{int.} = 2$	$\mu = 20$	$\begin{pmatrix} 292,9145 \\ 69,3077 \end{pmatrix}$	4,2263	0,3542 / 0,3542

Tabela 3.2– Análise de condicionamento da matriz  $H$ .

## Exemplo 2

Foram utilizados dois conjuntos de vídeo, sendo um experimento controlado em

laboratório e outro utilizando vídeos recuperados a partir do projeto Caviar (FISHER, 2002), sendo um vídeo outdoor a partir de um movimento em linha reta.

O primeiro experimento utilizou o movimento de uma esfera com uma câmera posicionada em uma posição superior. A esfera realizou um movimento retilíneo uniforme (MRU), com perturbações, gerando um vídeo com 42 frames e 11frames por segundo (fps). Os valores de inicialização das matrizes relacionadas às equações de estado e as covariâncias do ruído  $R$  são mostradas no sistema abaixo:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_k \\
 y_k &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4] x_k + v_k \\
 R &= \begin{bmatrix} 5.62 & -3.82 \\ -3.82 & 2.63 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

As covariâncias da perturbação  $Q$  e do erro de medida  $P$  são inicializadas, respectivamente, com matrizes identidades multiplicadas com valores pequenos (0.001) e altos (1000).

Foram testados os valores para  $\mu=5$  e  $\mu=20$ . A Figura 3.3 mostra os resultados de rastreamento obtidos. Observamos na Figura 3.3:

- (a) A primeira estimativa do Filtro de Kalman (vermelho) é bem mais próximo do que a estimativa do  $F_{VPQ}$  (azul), quando comparado com o real (verde).
- (b) A iteração ( $i=16$ ), observamos que o filtro de Kalman e  $F_{VPQ}$  estão com estimativas próximos ao real.
- (c) Foi inserido uma perturbação que desacelerou o movimento da esfera na iteração ( $i=26$ ). Neste caso, observamos o  $F_{VPQ}$  com uma estimativa mais precisa do que Filtro de Kalman.
- (d-f) Realizamos o mesmo experimento para  $m=20$ . Concluimos, a partir destes experimentos, que o  $F_{VPQ}$  possui maior sensibilidade a perturbação do movimento em relação ao filtro de Kalman.

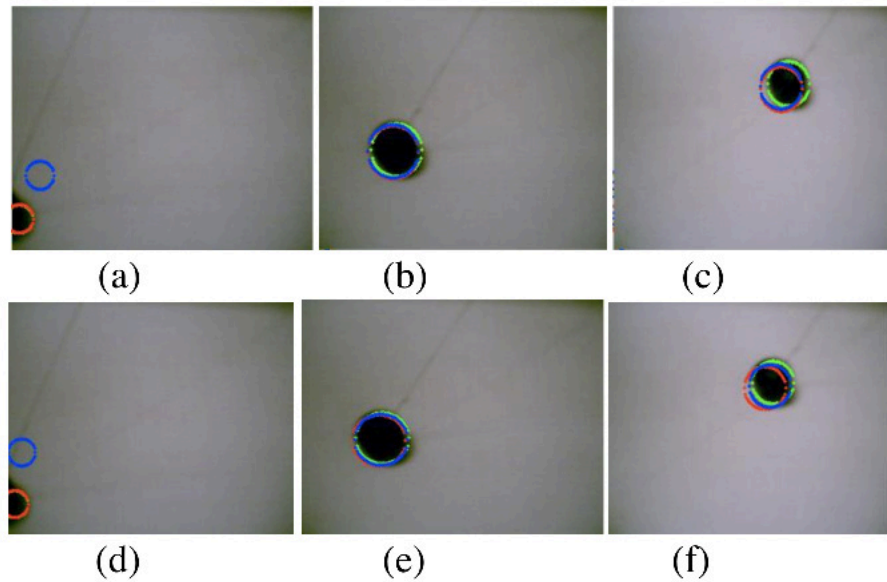


Figura 3.3 - Comparação rastreamento entre Filtro de Kalman e  $F_{VPQ}$  :  
(a-c)  $\mu = 5$ ; (d-f)  $\mu = 20$ .

No Segundo experimento, foi utilizado um vídeo outdoor, obtido no projeto CAVIAR (FISHER, 2002) onde o movimento de um ser humano se aproxima ao retilíneo uniforme. Este vídeo possui total de 170 frames a 15 fps. Utilizando a inicialização definida na equação (3.41), apenas modificando o valor de  $R$  para atender ao comportamento observado do experimento, observamos na Figura 3.4:

- (a) Na iteração 31, uma diferença entre as estimativas do filtro de Kalman (vermelho) e  $F_{VPQ}$  (azul) em relação ao real (verde), resultado de uma maior convergência do  $F_{VPQ}$ .
- (b) Na iteração 60, o filtro  $F_{VPQ}$  ainda apresenta um melhor resultado em relação ao Filtro de Kalman.
- (c) Mesmo na iteração 135, quando o filtro de Kalman conta com um numero suficiente de iterações para uma estimativa mais confiável, observamos o  $F_{VPQ}$  com melhores resultados utilizando apenas 2 iterações.

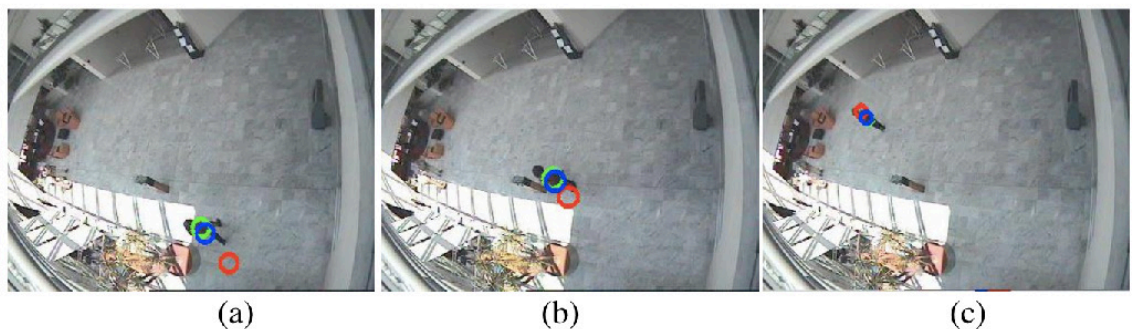


Figura 3.4 - Vídeo percurso em linha reta. (a)  $i=31$ , (b)  $i=60$ , (c)  $i=135$

Podemos observar as comparações entre os filtros de Kalman e  $F_{VPQ}$ , das

trajetórias nos eixos X e Y na Figura 3.5(a-b), respectivamente. Notamos que para ambas as trajetórias os resultados dos estados estimados a partir do  $F_{VPQ}$  são mais próximos da trajetória real do que àqueles estimados pelo filtro de Kalman.

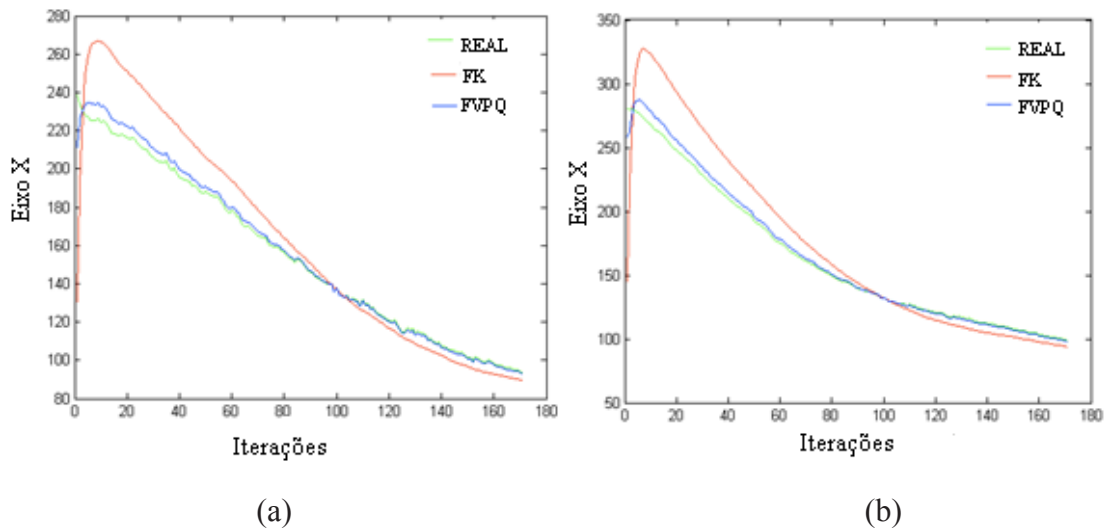


Figura 3.5 – Trajetórias no eixo X e Y

Na Figura 3.6 (a-b) observamos o gráfico de dispersão dos dois filtros nos eixos X e Y respectivamente. Quando comparados em relação ao gráfico de dispersão, os pontos de trajetória do  $F_{VPQ}$  se apresentam com maior convergência em relação aos pontos do FK.

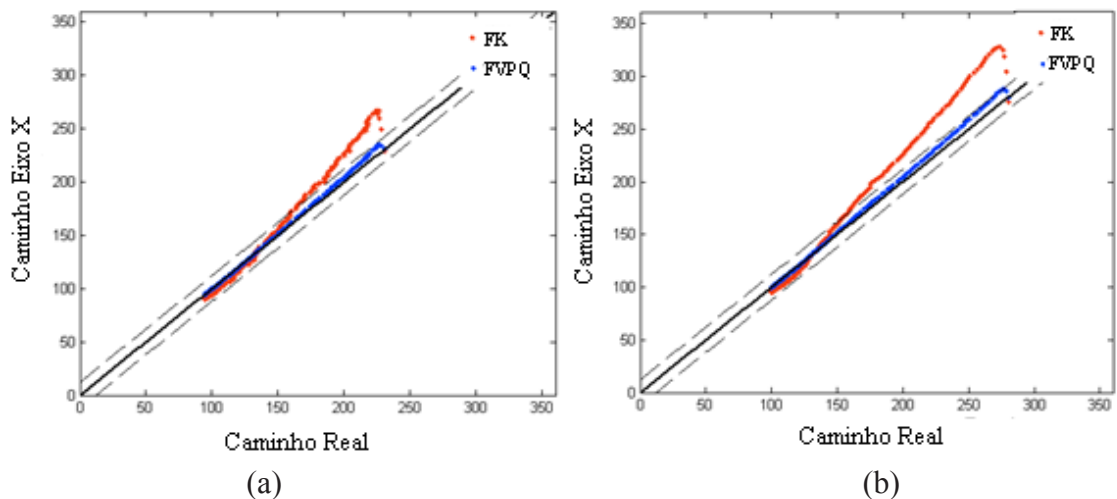


Figura 3.6 – Dispersão no eixo X e Y

Utilizamos também descritores estatísticos como erro médio quadrático, correlação e Desvio Padrão para fins de comparação dos dois métodos. Os resultados podem ser observados na Tabela 3.3. Notamos que, para todos os descritores estatísticos utilizados, o  $F_{VPQ}$  obteve melhores resultados para os dois eixos.



Descritores	FK-X axis	FK-Y axis	FCF-Y axis	FCF-X axis
Bias	9.5777	11.9708	1.6197	2.0224
RMSE	18.0160	22.9459	3.0837	3.9618
Correlação	0.9967	0.9968	0.9998	0.9998

Tabela 3.3– Descritores Estatísticos

### 3.8 Comentário Final

Neste capítulo, apresentamos uma nova metodologia para síntese de filtro de Kalman em tempo discreto, que possibilitam a obtenção de uma família de ganhos, como uma solução alternativa ao filtro de Kalman convencional, via equações de Riccati. Apresentamos exemplos e simulações com o objetivo de compararmos a nova proposta com as soluções convencionais do filtro de Kalman, a fim de ressaltar as vantagens do novo método, com eficiência no tocante as condições de desempenho, estabilidade, e principalmente, a característica de flexibilidade no sentido de se poder obter uma família de soluções eficientes através de ajustes no parâmetro  $\mu$ .

No próximo capítulo, reescreveremos esta metodologia para filtros  $H_\infty$ , mostrando que o novo método resguarda todas as vantagens apresentadas na solução do problema  $H_2$  e que também possui um bom potencial para tratar problemas envolvendo incertezas.

## NOVA METODOLOGIA PARA SÍNTESE DO FILTRO ROBUSTO

O objetivo fundamental da teoria de filtragem é buscar a robustez dos sistemas, ou seja, garantir não somente um bom desempenho, mais também a estabilidade frente às eventuais incertezas sobre o sistema, isto é um requisito indispensável em qualquer projeto. Neste capítulo, será desenvolvida a nova metodologia para solução de filtros em norma  $H_\infty$ . Visto que os filtros robustos são alternativas interessantes para a maioria dos problemas de filtragem em norma  $H_2$ , onde as equações do filtro robusto são muitos similares às do filtro  $H_2$ . Assim, podemos dizer que o filtro  $H_\infty$  nada mais é do que uma versão modificada do filtro de Kalman (ou filtro  $H_2$ ), pelo uso de um parâmetro  $\gamma$ , constante positiva, que representa o fator de robustez.

Neste contexto, inicialmente estenderemos a metodologia proposta no Capítulo 3 para a obtenção de uma família de ganhos na filtragem  $H_\infty$  e, ao final, através de um exemplo realizaremos uma análise comparativa da metodologia proposta com a convencional, para fins de aplicação em projetos práticos de filtragem robusta. Assim, as demonstrações para as proposições e teoremas serão omitidas, devido à similaridade com as proposições apresentadas no capítulo anterior.

### 4.1 Formulação Dual via Programação Quadrática

Portanto, conforme a estratégia via dualidade apresentada no capítulo 3, temos a seguinte função dual  $L(\lambda_{k+1})$  a ser maximizada:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{k+1}} L(\lambda_{k+1}) = \max_{\lambda_{k+1}} \min_{w_k, \tilde{x}_k} & \sum_{k=0}^{N-1} [\|\tilde{x}_k\|_Q^2 - \gamma^2 \|w_k\|_R^2 \\ & + \lambda_{k+1}^T (A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k - \tilde{x}_{k+1})] \\ & + \frac{1}{2} \tilde{x}_N^T Q \tilde{x}_N \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sujeito as restrições:

$$w_k^* = \gamma^{-2} R^{-1} C_k \lambda_{k+1}^* \quad (4.2)$$

$$\tilde{x}_k = Q^{-1} (\lambda_k - A \lambda_{k+1}) \quad (4.3)$$

$$x_N = Q^{-1} \lambda_N^* \quad (4.4)$$

onde  $\|\tilde{x}_k\|_Q^2 = \tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k$  e  $\|w_k\|_R^2 = w_k^T R w_k$

Segundo o teorema 3.1, o problema (2.30) pode ser reformulado no seguinte problema de otimização estática:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \bar{\lambda} &\in \square^{nN} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Onde:  $\tilde{H}_{nN \times nN}$  é uma matriz simétrica bloco tridiagonal, definida positiva e formada por  $N^2$  blocos de dimensões  $n \times n$ ,  $\tilde{b}$  é um vetor de dimensões  $nN \times 1$ ,  $\tilde{c} \in \square$  e  $\bar{\lambda} \in \square^{nN}$  dado por:

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_N]^T \in \square^{nN}$$

Substituindo as restrições dadas pelas equações (4.2) a (4.4) na equação (4.1), de modo que obtemos:

$$\begin{aligned} l(\bar{\lambda}) &= -\frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \frac{1}{2} \xi^T Q \xi - \frac{1}{2} \lambda_1^T [C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T C] \lambda_1 + \lambda_1^T A^T \xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \{-\lambda_{k+1}^T (A_k^T Q^{-1} A - \gamma^{-2} C_k^T C + C_k^T R^{-1} C_k) \lambda_{k+1} + \lambda_k^T Q^{-1} A \lambda_{k+1}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \{\lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k + \lambda_{k+1}^T A^T Q^{-1} \lambda_k\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Onde:  $x_0 = \xi$ .

Desenvolvendo o somatório para  $k \in K$ , obtemos a matriz  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} V_1 & W & 0 & \dots & 0 \\ W^T & V_2 & W & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & W^T & V_3 \end{bmatrix}$$

Ao calcular os valores de cada termo da matriz, temos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= -(C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T R^{-1} C + Q^{-1}) \\
V_2 &= V_1 - A^T Q^{-1} A \\
V_3 &= V_2 \\
W &= Q^{-1} A \\
c &= \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 \\
b &= \left[ A^T x_0 \quad 0_{nxn} \quad \cdots \quad 0_{nxn} \right]^T
\end{aligned}$$

Portanto, a forma quadrática estática, conforme a proposição 3.1:

$$\min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c}$$

$$s.a \quad \bar{\lambda} \in \square^{nN}$$

onde:  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$  e  $\tilde{c} = -c$ .

## 4.2 Estratégia de Regularização

Neste ponto, de forma semelhante à estratégia adotada no capítulo anterior podemos reescrever a (4.5):

$$\min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}_k) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c}$$

$$s.a \quad \|\bar{\lambda}\| \leq \Delta, \Delta > 0$$

Sendo possível conseguir a dominância bloco diagonal aumentando-se o valor de  $\mu$  e, em adição, situar os autovalores de  $(\tilde{H} + \mu I)^{-1}$  dentro de uma região desejada.

## 4.3 Proposta para Filtros $H_\infty$ via Otimização *on-line*

Ao considerarmos  $d = 2$  com  $\hat{\lambda}^* = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$  teremos então o problema aproximado ao problema (4.5):

$$\left( \begin{bmatrix} C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T R^{-1} C + Q^{-1} & -Q^{-1} A \\ -A^T Q^{-1} & (C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T R^{-1} C + Q^{-1}) + A^T Q^{-1} A \end{bmatrix} + \mu I_{2n \times 2n} \right) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \tilde{x}_0 \\ 0_{nxn} \end{bmatrix}$$

Onde :

$$\lambda_1 = \bar{H}_{11} A^T \tilde{x}_0 \quad (4.7)$$

$$\lambda_2 = \bar{H}_{21} A^T \tilde{x}_0 \quad (4.8)$$

Conforme já mencionado no capítulo anterior, a medida  $\mu \rightarrow \infty$ , a matriz  $(\tilde{H} + \mu I)^{-1}$  tende para:

$$\begin{bmatrix} (C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T C + Q^{-1}) + \mu I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & (C^T R^{-1} C - \gamma^{-2} C^T C + Q^{-1} + A^T Q^{-1} A) + \mu I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Portanto, com o ajuste de  $\mu$ , é possível situar os autovalores de  $(\tilde{H} + \mu I)^{-1}$  dentro de uma região desejada.

Após as considerações feitas até aqui, propomos um novo algoritmo para o projeto de filtros robusto, considerando o índice de desempenho, através de soluções bem condicionadas e numericamente estáveis.

### Calculo do Ganho $F$

De forma semelhante ao capítulo 3, consideramos as equações (4.3), (4.7) e (4.8) para  $k = 0$  de modo que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (A_f^T) \tilde{x}_0 \\ &= Q^{-1} (\lambda_1 - A \lambda_2) \\ &= Q^{-1} (\bar{H}_{11} - A \bar{H}_{21}) A^T \\ &= \Theta \tilde{x}_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_f &= \Theta \\ (A_k^T + C_k^T A_k F_2) &= \Theta \\ F_2 &= (C_k^T A_k)^+ (\Theta - A_k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

para.  $\Theta = Q^{-1} (\bar{H}_{11} - A \bar{H}_{21}) A^T$

A partir de  $\Theta = Q^{-1} (\bar{H}_{11} - A \bar{H}_{21}) A^T$  de modo que possamos através de ajustes em  $\mu$  situar os pólos da matriz  $\Theta$  numa determinada região.

## 4.4 Análise e Resultados

Nesta seção, apresentaremos um exemplo para ilustrarmos a nova metodologia para filtros  $H_\infty$ . Analisaremos os resultados comparativos entre a abordagem do Filtro

### Exemplo 1

Considerando um exemplo didático, temos o seguinte sistema abaixo:

$$x_{k+1} = x_k + 0.1w_k, \quad x_0 = 1$$

$$y_k = x_k + v_k$$

$$z_k = x_k$$

Neste caso, consideraremos a matriz  $\Pi=1$ , com ruído  $w_k = 0$  para ver a sensibilidade do filtro  $v_k = D_k^{-1}(y_k - C_k x_k)$ . Na Figura 4.1, mostraremos a simulação dos resultados para as seguintes matrizes de correlação:  $R = 0,09$  e  $Q_w = 1$ .

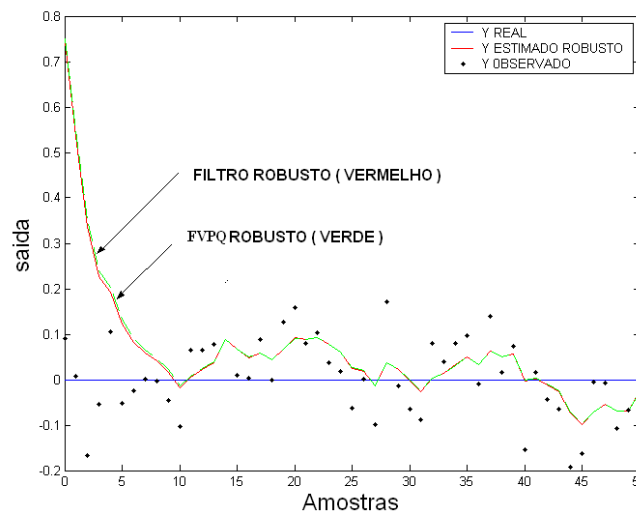


Figura 4.1 – Erro de Estimação: Filtro  $H_\infty \times F_{VPQ}$  robusto:  $\mu = 0$  e  $\gamma = 1.25$

Na figura 4.1, observamos que para  $\mu = 0$  e  $\gamma = 1.25$ , temos o mesmo erro de estimação para o filtro Robusto ( $N_{int} = 18$ ) convencional via equações de Riccati e o filtro com a nova metodologia,  $F_{VPQ}$  Robusto ( $N_{int} = 18$ ). O ganho calculado pelo filtro robusto via Riccati e  $F_{VPQ}$  Robusto é o mesmo,  $K = 0.6180$ . Ao diminuir o valor do parâmetro de robustez  $\gamma$  (1.25 para 0.2) e realizarmos uma variação da matriz de correlação  $R$  (0.09 para 0.01), podemos observar:

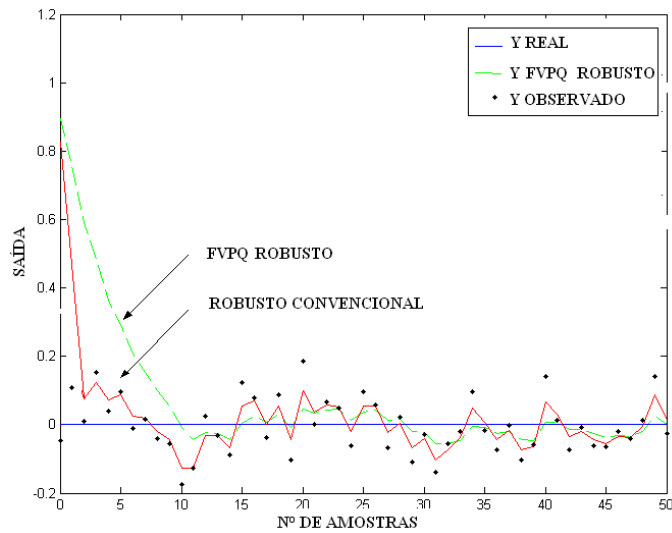


Figura 4.2 – Erro de Estimação entre Kalman x  $F_{VPQ} : \mu=3$  e  $N_{int.} = 2$

Na Figura 4.2, observamos que para  $\mu=3$  e  $N_{int.}=2$ , temos uma solução com o filtro  $F_{VPQ}$  robusto relativamente melhor do que o Filtro Robusto convencional, onde a metodologia proposta tende a seguir o sinal real de forma mais estável. Nota-se também uma redução computacional significativa da nova metodologia em relação a o filtro Robusto via equações de Riccati.

#### 4.5 Comentário Final

Neste capítulo, apresentamos uma nova proposta para solução do problema de filtragem robusta. A matriz de ganho é obtida sem a necessidade do uso de equações de Riccati que em projetos de filtro nem sempre as ARE apresentam uma solução estabilizante para o sistema. Esta metodologia proposta proporciona um projeto de filtros muito mais simples, cuja metodologia da utilização de horizonte de tempo de ordem reduzida e os ajustes do parâmetro  $\mu$  conferiram boas condições de estabilidade e desempenho robusto. Neste sentido, foram obtidas soluções eficientes sem o emprego das equações de Riccati.

A nova metodologia aumenta a robustez do filtro, garantindo uma flexibilidade no sentido de se poder obter uma família de ganhos eficientes através do ajuste do parâmetro  $\mu$  mesmo em casos que as soluções via equações de Riccati não apresentam soluções estabilizáveis.

## CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação tratou da solução de problemas de filtragem  $H_2$  e  $H_\infty$ . Observamos que a solução proposta para filtragem é dual a solução dos problemas de LQR. De modo geral, os tratamentos dos problemas abordados aqui se deram em dois níveis. O primeiro tratou a obtenção de estruturas algébricas matriciais especiais e os resultados teóricos consistentes que levem à solução das equações algébricas de Riccati. O segundo referiu-se à extensão de tais resultados a filtros  $H_2$  e  $H_\infty$  em tempo discreto com horizonte reduzido para aplicações em tempo real. Com a obtenção deste algoritmo, possibilitou uma solução alternativa, em alguns casos até melhores quando comparadas a solução do problema de filtragem em norma  $H_2$  e  $H_\infty$  via equações de Riccati.

Utilizamos dos princípios de otimização convexa e dualidade a fim de obtermos uma forma quadrática estática, equivalente ao Lagrangeano associado ao sistema, que foi resolvido através de procedimentos de regularização, via regiões de confiança. Para ressaltar as vantagens da nova abordagem, utilizamos uma aplicação em processamento de imagens que exige fortes requerimentos de desempenho computacional, de estabilidade numérica e de tempo real. Para atender a estes requerimentos, esta nova metodologia possibilitou obter, de forma simples, uma família de ganhos eficientes através do ajuste do parâmetro  $\mu$  de acordo com as características desejadas para o projeto do filtro.

### 5.1 Contribuições

Neste sentido, destacamos as seguintes contribuições:

- Nova metodologia para solução das ARE, ampliando o escopo teórico e científico das soluções alternativas às de Riccati.
- Emprego da nova metodologia para solução eficaz dos problemas de filtragem em norma  $H_2$  e  $H_\infty$ .
- Utilização de formar quadráticas com dimensões reduzidas, que possibilitam bom condicionamento e projetos alternativos a filtragem em aplicações de otimização *on-line*.



- Com esta metodologia, os parâmetros livres (matrizes de ponderação) podem ser fixados, sem a necessidade de ajuste exaustivo, pois o parâmetro escalar  $\mu$  pode ser usado como instrumento para adequar o sistema de filtragem às condições de robustez de desempenho e estabilidade.

## 5.2 trabalhos Futuros

Algumas possíveis extensões dos resultados da dissertação são:

- Propor a formulação e solução de problemas de jogos dinâmicos do ponto de vista estático.
- Estender a nova metodologia para solução do problema de filtragem mista.
- Estudar novas aplicações de filtragem robusta.
- Estender esta nova metodologia para solução de problemas de filtragem para casos não estacionários.

- BAZARRA, M.; Serali, H. D.; Shetty, C. M. **Nolinear Programming: Theory and Algorithms**. John Wiley and Sons, New York, 1993.
- BAZAR, T. **Paradigms for Robustness in Controller and Filter Design**, *International Symposium on Economic Dynamics and Control*, Klagenfurt, Austria, 2001.
- BAZAR, T.; Bernhard, P. **Optimal Control and Related Minimax Design Problems**, 2° edição, Birkhäuser, 1995.
- BERTSEKAS, D.; Tsitsiklis, J. **Neuro-dynamic Programming**. Athenas Scientific, Belmont, MA, 1996.
- BITTANTI, S. **History and Prehistory of the Riccati Equation**, *In: IEEE Control and Decision Conference*, 3th, Proceedings, p.1599-1604, Kobe, 1996.
- BITTANI, S.; Laub, A. and Willems, J. C. eds. **The Riccati Equation**, Springer Verlag, 1991.
- BOYD, S.; Ghaoui, L. E.; Feron, E.; Balakrishnan, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- BOYD, S.; Vandenberghe, L. **Convex Optimization**, Cambridge University Press, 2004.
- BOSCO, J. ; Amaral, W. C. **Filtro de Kalman**, Editora UNICAMP, 2004.
- BRYSON, A. E. **Kalman filter divergence and aircraft motion estimations**, *Int. J. Guidance Control*, vol.1, n°1, pp. 71-79, 1988.
- CAMPOS L. E. D. **Um Estudo sobre Fatorização de Matrizes e a Resolução de Sistemas Lineares**, UNICAMP, 2008.
- COSTA FILHO, J. T. **Uma Contribuição ao Controle Ótimo de Alto Desempenho**. Tese submetida ao Departamento de Engenharia de Eletricidade da UFMG para concurso de Professor Titular na área de Automação e Controle, 1997.
- COUTINHO, M.; Coutinho D. F.; Barbosa, K. A. **A New Strategy to the Multiobjective Control of Linear Systems**, *In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on decision and Control, and the European Control Conference, IEEE*, Seville, Spain, p.3742-3746, 2005.
- CRUZ, J.J. **Controle Robusto Multivariável**, EDUSP, 1996
- DOYLE, J. C.; **Guaranteed margins for LQG regulators**, *In: IEEE Transactions on Automatic Control*, v.23, n.4, p.756-757, 1978.
- EBIHARA, Y.; Hagiwar, T. **On Model Redution Using LMIs**, *In:IEEE Transaction in Automatic Control*, v. 49, p. 1187-1191, 2004.
- FARIAS, D. P. **Otimização e Controle de Sistemas com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos**, Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1998.

- FILHO, L. A. V. **Filtragem Ótima Robusta em Sistemas Dinâmicos**. Dissertação de Mestrado da Engenharia Elétrica, UNICAMP, 2004.
- FILHO, A. A. **Análise de Sistemas Dinâmicos**. ITA, 2003.
- FISHER, R. **Project Caviar: Context Aware Vision using Image-based Active Recognition**, 2002.
- FEINGOLD, G.; Varga, R. S. **Block Diagonally Dominant matrices and Generalizations of the Gerschgorin Circle Theorem**, *Pacific Journal of Mathematics*, n.12, p.1241-1250, 1962.
- FRIEDLANDER, A. **Elementos de Programação Não-Linear**, Editora UNICAMP, 1996.
- FAÇANHA, T. S.; Costa Filho, J. T.; Carneiro, A.L. Uma Nova Metodologia para Síntese de Filtro de Kalman. SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2010.
- GREG, W.; Gary, B. **An Introduction to the Kalman Filter**. *University of North Carolina at Chapel Hill*, Los Angeles, August, 2001.
- HOCKING, L. M. **Optimal Control: An introduction to the theory and applications**, Oxford, 1991.
- JACQUOT, R. G. **Modern Digital Control System**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.
- KALMAN, R. E. **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**, *Trans. ASME - Basic Engineering*, pp 35-45 , 1960.
- KASSAM, S. A.; Poor, H. V. **Robust Techniques for Signal Processing: A survey**, *In: Proceedings IEEE*, v.73, p.433-481, 1985.
- KAWAOKA, F. R. R. **Redução de Modelos de Sistemas Discretos**, *Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica*, UNICAMP, 2004.
- KWAKERNAAK, H.; Sirvan, R. **The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 79-86, 1972
- KASSAM, S. A.; Poor, H. V. **Robust Techniques for Signal Processing: A Survey**, *In: Proceedings IEEE*, v.73, pp. 483-481, 1985.
- KENNETH, L. **Optimization**, New York, Springer, 2004.
- KIRK, D. **Optimal Control Theory**, Prentice-Hall, 1970.
- LANCASTER, P.; Rodman, L. **Algebraic Riccati Equations**, Oxford University Press, 1995.
- LAUB, A. **Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations**. *In the Riccati Equation, Bittanti, S., A. Laub, and J. Willems, Eds, Berlin: Springer-Verlang*, p. 163-196, 1991.
- LEVENBERG, K. A. **Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares**, *Quarterly of Applied Mathematics*, v.2, p.164-168, 1944.
- LIU, G. P.; Yang, J. B.; Whidborne, J. F. **Multiobjective Optimisation and Control**, *Research Studies Press*, Great Britain, 2004.
- MARTÍNEZ J. M.; Santos S. A. **Métodos Computacionais de Otimização**, *XX Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, 1995.

- MEHRAN, G. **Dogleg trust-region application in electrical impedance tomography**, *In: Journal Physial. Meas*, v.28, pp. 555-572, 2007.
- MORTENSEN, R. **Maximu-likelihood recursive nonlinear filtering**. Optimazation Theory and Application. pp. 386 – 394. 1968.
- NAIDU, D. S. **Optimal Control Systems**. Idaho State University. Pocatello, 2002.
- NAMARVAR, H. H.; Berger T. W. **An Efficient Training Algoritm for Dynamic Synapse Neural Networks Using Trust Region Methods**, *Neural Networks*, v.16, pp.585-591, 2003.
- NASCIMENTO, V. A.; Costa Filho, J. T. **A Nice Method for Linear Quadratic Regulator Problem**, *6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, UNESP, 2007.
- NASCIMENTO, V. A. **Uma Contribuição ao Controle Robusto de Sistemas Dinamicos Multivariáveis**, Dissertação de Mestrado, UFC, 2007.
- OGATA, K. **Designing Linear Control System with Matlab**, Prentice-Hall, 1994.
- OLIVEIRA, M. C. **Controle de Sistemas Lineares baseados nas desigualdades matriciais lineares**, *Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica*, UNICAMP, 2000.
- OLIVEIRA, R. C. L. F. **Estudo de Robustez em Sistemas Lineares pode meio de relaxações em termos de Desigualdades Matriciais Lineares**, *Tese de Doutorado*, UNICAMP, 2006.
- PANDY, M. **Computer modeling and simulation of human movement**. Annual Review of Biomedical Engineering 3. Pp. 245 – 273, 2001
- PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. Third Edition, 1991.
- PALHARES, R. M. **Introdução ao Controle Robusto**, UFMG, 2000.
- PEDREGAL, P. **Introduction to Optimization**, *Texts in Applied Mathematics*, Springer Verlag, New York, 2004.
- POWER, M. J. D. **On the global convergence of trust region algorithms for unconstrained minimization**, *Mathematical Programming*, v.29, p.297-303, 1984.
- ROBERT, P. B., VINCENT W.; MICHAEL, G. **Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's G.P.C**, Prentice Hall Professional Technical Reference, 1991.
- ROJAS, M.; Sorensen, R. B.; byrd, R. H. **A family of trust region based algoritmos for unconstrained minimization with strong global convergence properties**, *SIAM J. Num.*, v. 22, p.47-67, 1985.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw Hill. 1996.
- SAYED, A. H. **A Framework for State-Space estimation with Uncertain Models**, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n° 7, p.998-1013, Julho, 2001.
- SINGH, M. G.; TITLI, A. **Systems: Decomposition, Optimization and Control**. Pergamon Press, 1978.
- SHARED, U. e Theodor, Y. **"-  $H_{\infty}$  Optimal Estimation: A Tutorial"**, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, v.2, pp.2278-2286, Dezembro, 1992.

SHARED, U. e Souza C. E., “**Continuons-Time Tracking Problems in and  $H_\infty$  Setting: A Game Theory Approach,**” *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n°5, pp.841-852, Maio 1995.

SOUZA, C. E.; GEVERS, M. R.; GOODWIN, G. C. **Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.31, p.831-838. 1986.

TAMARIZ, A. D. R. **Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estado,** Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica e Computação, UNICAMP, 2005.

TAKABA, K. “**Studies on  $H_\infty$  Filtering Problems for Linear Discrete-Time Systems,**” Tese de Doutorado, Kyoto University, Janeiro 1996.

TODOROV, E. **Optimal Control Theory.** University of California San Diego, 2006.

TIKHOMIROV, V. M. **Stories about Maxima and Minima,** *American Mathematical Society*, 1990.

THORNTON, C. L.; Bierman, G. J. **Numerical comparison of Kalman filter algorithms: Orbit determination case study,** *Automatica*, vol.13, pp.23-25, 1977.

URREA, L. J. **Um Método para Região de Confiança para minimização Irrestrita,** *Tese de Mestrado*, UNICAMP, 2008.

WILLIAN, S. L., “**The Control( Handbook),**” pp. 596 - 598, 1999.

WANG, J.; W. **A Multilayer Recurrent Neural Network for Solving Continuous-time Algebraic Riccati Equations,** *Neural Networks*, v.11, p.939-950, 1998.

ZHOU, K.; Doyle, J. C.; Glover, K. **Robust and Optimal Control,** Prentice-Hall, 1996.

## BIBLIOGRAFIA DE R. E. KALMAN

Rudolf Emil Kalman, filho de Otto e Ursula Kalman nasceu em Budapest, Hungria, em maio de 1930. Sua família mudou-se para os Estados Unidos durante a segunda guerra mundial.

Kalman recebeu o grau de bacharel e mestre em Engenharia Elétrica no MIT (*Massachusetts Institute of Thechnology*) em 1953 e 1954 respectivamente. Seu orientador era Ernest Adolph Guillemin e o tema da sua dissertação era o comportamento das soluções de equações de diferença de segunda ordem. Depois disso, Kalman obteve o título de Doutor em Ciência na Universidade de Columbia em 1957. Nesta época, a Columbia era bem conhecida pelos trabalhos em teoria de controle liderados por John R. Ragazzini e Lotfi A. Zadeh.

Suas principais posições incluem: pesquisador no R.I.A.S. (*Research Institute for Advanced Study*) em Baltimore, entre 1958-1964, professor da Universidade de Stanford entre 1964-1971, e professor pesquisador e diretor do *Center for Mathematical System Theory* da Universidade da Flórida entre 1971 a 1992. Além disso, desde 1973, Kalman também lecionou a cadeira de Teoria Matemática de Sistemas no ETH (*Swiss Federal Institute of Technology*) em Zurich.

Ele foi merecedor de numerosos prêmios, incluindo a medalha de honra do IEEE (1974), a Medalha do Centenário do IEEE (1984), o Prêmio de Kyoto em Alta Tecnologia da Fundação Inamori do Japão (1985), o Prêmio Steele da Sociedade Americana de Matemática (1987) e o Prêmio Ballman (1997). Kalman é membro da Academia Nacional de Ciências (EUA), Academia Nacional de Engenharia (EUA) e Academia Americana de Artes e Ciências. Além disso, é membro estrangeiro das Academias Húngara, Francesa e Russa de Ciências e recebeu muitos doutorados honorários.

Kalman é casado com Constantina nee Stavrou com quem tem dois filhos, Andrew e Elisabeth.

## DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman pode ser definido a partir de um sistema que pode ser descrito por duas equações que compõem um modelo geral de um sistema dinâmico discreto, da seguinte forma:

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k w_k \quad x_0 = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad k = 1, 2, 3, K \quad (\text{B.2})$$

A Tabela abaixo resume as principais equações para obtenção do Filtro de Kalman Discreto -FKD.

Equações do Filtro de Kalman Discreto		Nº
Preditor (Estimativa a priori)	$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$	B.4
Recursão de Riccati	$P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + G_{k-1} Q G_{k-1}^T$	B.8
Cálculo da estimativa (atualização do estado)	$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1})$	B.16
Cálculo da covariância (atualização da covariância)	$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}$	B.20
Ganho de Kalman	$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1}$	B.21

Tabela B.1 – Resumo das Equações do Filtro de Kalman

Serão descritos a seguir o desenvolvimento das equações do filtro de Kalman:

### Passo 1 – Cálculo dos estados estimados a priori (Predição).

Considerando a equação dinâmica (B.1) e tornando a média condicional dos dois lados da equação, temos:

$$E[x_k / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = A_{k-1} E[x_{k-1} / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] + G_{k-1} [w_{k-1} / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] \quad (\text{B.3})$$

Porém, desde que  $w_{k-1}$  seja independente de  $v_k, w_{k-2}, \dots, w_0$  e  $x_0$  e  $x_0$ , ele é independente de  $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ , tal que:

$$E[w_{k-1} / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = E[w_{k-1}] = 0$$

Assim, a Eq. (B.3) fica reduzida a:

$$E[x_k / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = A_{k-1} E[x_{k-1} / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}]$$

Que corresponde a:

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \quad (\text{B.4})$$

**Passo 2: Cálculo da matriz de covariância do erro de predição a priori**

A matriz de covariância para o **erro de predição de 1 passo**, pode ser determinada, como:

$$P_{k/k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k/k-1})(x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] \quad (\text{B.5})$$

A través da propriedade dos vetores aleatórios Gaussianos (SINGH, 1978), garante que o **erro de predição**  $(x_k - \hat{x}_{k/k-1})$  é independente da seqüência  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ , de tal forma que a matriz de covariância da Eq. (B.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_{k/k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k/k-1})(x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T] \quad (\text{B.6})$$

O erro de predição pode ser descrito assim:

$$x_k - \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) + G_{k-1}w_{k-1} \quad (\text{B.7})$$

Para calcularmos a matriz de covariância a priori,  $P_{k/k-1}$ , substituímos a Eq. (B.7) na Eq. (B.6), assim temos:

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} &= E\{[A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) + G_{k-1}w_{k-1}][A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) + G_{k-1}w_{k-1}]^T\} \\ &= E[A_{k-1}x_{k-1}(A_{k-1}x_{k-1})^T - A_{k-1}x_{k-1}(A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1})^T + A_{k-1}x_{k-1}(G_{k-1}w_{k-1})^T \\ &\quad - A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1}(A_{k-1}x_{k-1})^T + A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1}(A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1})^T - A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1}(G_{k-1}w_{k-1})^T \\ &\quad + G_{k-1}w_{k-1}(A_{k-1}x_{k-1})^T - G_{k-1}w_{k-1}(A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1})^T + G_{k-1}w_{k-1}(G_{k-1}w_{k-1})^T] \end{aligned}$$

Colocando os termos em evidência e considerando que  $E[x_{k-1}w_{k-1}] = 0$ , desde que  $x_{k-1}$  seja uma função de  $x_0$  e de  $w_0, w_1, \dots, w_{k-2}$ , mas não de  $x_{k-1}$ . Na soma  $x_{k-1}$  tem média zero e também:



$$E[\hat{x}_{k-1/k-1} w_{k-1}^T / Y_{k-1}] = \hat{x}_{k-1/k-1} E[w_{k-1/k-1}^T] = \hat{x}_{k-1/k-1} E[w_{k-1}^T] = \mathbf{0}$$

Teremos:

$$\begin{aligned} &= E\left\{ \underbrace{A_{k-1} x_{k-1} (A_{k-1} x_{k-1})^T}_{A_{k-1} x_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) A_{k-1}^T} - \underbrace{A_{k-1} x_{k-1} (A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1})^T}_0 + \underbrace{A_{k-1} x_{k-1} (G_{k-1} w_{k-1})^T}_0 \right. \\ &\quad - \underbrace{A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (A_{k-1} x_{k-1})^T}_{A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) A_{k-1}^T} + \underbrace{A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (A_{k-1} x_{k-1/k-1})^T}_0 - \underbrace{A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (G_{k-1} w_{k-1})^T}_0 \\ &\quad \left. + \underbrace{G_{k-1} w_{k-1} (A_{k-1} x_{k-1})^T}_0 - \underbrace{G_{k-1} w_{k-1} (A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1})^T}_0 + \underbrace{G_{k-1} w_{k-1} (G_{k-1} w_{k-1})^T}_{G_{k-1} Q G_{k-1}^T} \right\} \\ &= A_{k-1} x_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) A_{k-1}^T - A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) A_{k-1}^T + G_{k-1} Q G_{k-1}^T \\ &= E\left\{ \underbrace{A_{k-1} x_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1})^T A_{k-1}^T}_{A_{k-1} E\{(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1})^T\} A_{k-1}^T} - \underbrace{A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1})^T A_{k-1}^T}_0 + G_{k-1} Q G_{k-1}^T \right\} \end{aligned}$$

A matriz covariância do erro de predição de 1 passo, possa ser determinada pela expressão abaixo, chamada de **Recursão de Riccati**.

$$P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + G_{k-1} Q G_{k-1}^T \quad (\text{B.8})$$

**Passo 3 – Predição de um passo da estimativa a posteriori (Atualização do estado).**

Neste passo deseja-se expressar a estimativa de  $x_k$  dado as medidas até  $t_k$ , ou seja, dado a seqüência de medidas de saída  $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k\} = Y_k$ . Para fazer isto, determina-se a densidade de probabilidade condicional:

$$p(x_k / y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k) = p(x_k / Y_k)$$

Notando que se pode reescrever esta densidade de probabilidade condicional como:

$$p(x_k / Y_k) = p(x_k / Y_{k-1}, y_k)$$

onde separa-se a saída da última medição de todas as medidas da seqüência  $Y_{k-1}$ . Aplicando o teorema de *BAYES* para esta expressão, isto conduz para a seguinte relação:

$$p(x_k / Y_k) = p(x_k / Y_{k-1}, y_k) = \frac{p(x_k, Y_{k-1}, y_k)}{p(Y_{k-1}, y_k)} = p(y_k / x_{k-1}) \frac{p(x_k, Y_{k-1})}{p(Y_{k-1}, y_k)} = p(y_k / x_k, Y_{k-1}) \frac{p(x_k / Y_{k-1})}{p(y_k / Y_{k-1})} \quad (\text{B.9})$$

Considerando a equação (B.2) e observando que o conhecimento de  $x_k$  implica que a única quantidade aleatória é  $v_k$  que é independente de  $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$  (desde que  $\{v_k\}$  seja uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e  $v_k$  seja independente de  $x_0$  e  $w_0, w_1, \dots, w_k$ ), pode-se então escrever:

$$p(y_k / x_k, Y_{k-1}) = p(y_k / x_k)$$

Substituindo na equação (B.9) obtém-se:

$$p(x_k / Y_k) = \frac{p(y_k / x_k) p(x_k / Y_{k-1})}{p(y_k / Y_{k-1})} \quad (\text{B.10})$$

Nesta ordem, para determinar a **máxima estimativa a posteriori** usando a expressão acima, somente será necessário avaliar a densidade de probabilidade do numerador desde que o denominador não seja uma função explícita de  $x_k$ .

Para avaliar a densidade de probabilidade condicional  $p(y_k / x_k)$ , considera-se a equação de observação (B.2). Para um dado  $x_k$ ,  $y_k$  é um vetor aleatório Gaussiano de média.

$$E[y_k / x_k] = H_k [x_k / x_k] + E[v_k / x_k]$$

que resulta:

$$E[y_k / x_k] = H_k [x_k]$$

desde que:

$$E[v_k / x_k] = E[v_k] = 0$$

A matriz de covariância do erro é dada por:

$$E[(y_k - H_k x_k)(y_k - H_k x_k)^T] = E[v_k v_k^T] = R$$

Então se pode escrever a densidade de probabilidade  $p(y_k / x_k)$  da seguinte forma:

$$p(y_k / x_k) = K e^{-\frac{1}{2}(y_k - H_k x_k)^T R^{-1}(y_k - H_k x_k)} \quad (\text{B.11})$$

onde  $K$  é uma constante de normalização.

A densidade de probabilidade é Gaussiana de média  $\hat{x}_{k/k-1}$  e covariância  $P_{k/k-1}$ , assim:

$$p(x_k / Y_{k-1}) = K' e^{-\frac{1}{2}(x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T P_{k/k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k/k-1})} \quad (\text{B.12})$$

de tal forma que a densidade de probabilidade a posteriori  $p(y_k / x_k)$  pode ser escrita assim:

$$p(x_k / Y_k) = K'' e^{-\frac{1}{2}[(y_k - H_k x_k)^T R^{-1}(y_k - H_k x_k) + (x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T P_{k/k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k/k-1})]} \quad (\text{B.13})$$

Aqui,  $K''$  também leva em conta o denominador  $p(y_k / Y_{k-1})$  da equação. (B.10).

A fim de desenvolver a estimativa máxima a posteriori, pode-se derivar o logaritmo do expoente da equação (B.13) em relação à  $x_k$  e iguala-se a zero para obter a estimativa ótima  $\hat{x}_{k/k}$ . Assim, obtém-se:

$$\frac{\partial(x-y)^T Q(x-y)}{\partial x} = 2Q(x-y) = H_k^T R^{-1}(y_k - H_k x_k) - P_{k/k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k/k-1}) = 0$$

para  $x_k = \hat{x}_{k/k}$

$$\begin{aligned} (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1}) \hat{x}_{k/k} &= H_k^T R^{-1} y_k + P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1} \\ \hat{x}_{k/k} &= (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} (H_k^T R^{-1} y_k + P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1}) \\ \hat{x}_{k/k} &= \underbrace{(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1}}_M H_k^T R^{-1} y_k + \underbrace{(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1}}_M P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1} \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Considerando  $(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} = M$  e usando o Lema da Inversão de Matriz, temos:

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k) \rightarrow M M^{-1} = M (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k) \\ &\rightarrow I = M P_{k/k-1}^{-1} + M H_k^T R^{-1} H_k \rightarrow M P_{k/k-1}^{-1} = I - M H_k^T R^{-1} H_k \end{aligned}$$

Assim, o segundo termo da equação (B.14), temos:

$$\begin{aligned} M P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1} &= (I - M H_k^T R^{-1} H_k) \hat{x}_{k/k-1} \\ &= (M M^{-1} - M H_k^T R^{-1} H_k) \hat{x}_{k/k-1} \\ &= M M^{-1} \hat{x}_{k/k-1} - M H_k^T R^{-1} H_k \hat{x}_{k/k-1} \\ &= \hat{x}_{k/k-1} - (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} H_k \hat{x}_{k/k-1} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Substituir (B.15) em (B.14) vem:

$$\hat{x}_{k/k} = (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} y_k + \hat{x}_{k/k-1} - (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} H_k \hat{x}_{k/k-1}$$

Organizando os termos, a equação pode ser reescrita assim:

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (\text{B.16})$$

Esta expressão nos habilita a atualizar o valor de estimação de estado dado uma nova observação.

Finalmente, calcula-se a variância do erro de estimação. Nota-se que:

$$\hat{x}_{k/k} = (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} (H_k^T R^{-1} y_k + P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1})$$

e

$$y_k = H_k x_k + v_k$$

Logo:

$$x_k - \hat{x}_{k/k} = x_k - (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} (H_k^T R^{-1} H_k x_k + H_k^T R^{-1} v_k + P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1} + P_{k/k-1}^{-1} x_k - P_{k/k-1}^{-1} x_k)$$

Simplificando a equação, temos:

$$x_k - \hat{x}_{k/k} = -(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} [H_k^T R^{-1} v_k - P_{k/k-1}^{-1} (x_k - \hat{x}_{k/k-1})]$$

e

$$P_{k/k} = E[(x_k - \hat{x}_{k/k})^T (x_k - \hat{x}_{k/k})]$$

Usando as expressões acima e notando que  $v_k$  e  $x_k$  são independentes, sendo  $v_k$  um ruído de média zero e, também, que  $v_k$  e  $\hat{x}_{k/k-1}$  são independentes, obtém-se:

$$P_{k/k} = (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} \quad (\text{B.17})$$

As expressões (B.16) e (B.17) envolvem a inversão de matrizes  $n \times n$ , onde  $n$  é a ordem do vetor de estado. Porém, desde que o vetor observação seja usualmente de ordem baixa, é possível converter estas inversões de matrizes para ordens menores de si mesmas, usando o Lema de inversão de matrizes e realizando algumas manipulações algébricas, temos:

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k) \rightarrow MM^{-1} = M(P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k) \\ I &= MP_{k/k-1}^{-1} + MH_k R^{-1} H_k^T \rightarrow P_{k/k-1} = M + MH_k R^{-1} H_k^T P_{k/k-1} \\ P_{k/k-1} H_k &= MH_k (I + R^{-1} H_k^T P_{k/k-1} H_k) \\ &= MH_k R^{-1} (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} &= MH_k R^{-1} (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k) (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} \\ P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} &= MH_k R^{-1} \\ P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} H_k^T &= MH_k R^{-1} H_k^T \\ P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} H_k^T &= M(M^{-1} - P_{k/k-1}^{-1}) = MM^{-1} - MP_{k/k-1}^{-1} \\ P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} H_k^T P_{k/k-1} &= P_{k/k-1} - MP_{k/k-1}^{-1} P_{k/k-1} \\ P_{k/k-1} H_k (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} H_k^T P_{k/k-1} &= P_{k/k-1} - M \\ M &= P_{k/k-1} - P_{k/k-1} H_k^T (R + H_k^T P_{k/k-1} H_k)^{-1} H_k P_{k/k-1} \end{aligned}$$

Assim, pode-se reescrever a expressão da equação. (B.17):

$$(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1} H_k P_{k/k-1}$$

e para a expressão (B.16) precisa-se avaliar que a igualdade abaixo é verdadeira

$$(H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1} \quad (\text{B.18})$$

O segundo membro da equação (B.18) foi obtido como visto na demonstração

abaixo:

$$M = (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1} H_k^T R^{-1} \quad \times (H_k^T R^{-1})^{-1}$$

$$M \cdot (H_k^T R^{-1})^{-1} = (H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1})^{-1}.$$

Elevando à potência negativa vem

$$M^{-1} \cdot H_k^T R^{-1} = H_k^T R^{-1} H_k + P_{k/k-1}^{-1} \quad \times (P_{k/k-1})$$

$$M^{-1} \cdot H_k^T R^{-1} P_{k/k-1} = H_k^T P_{k/k-1} R^{-1} H_k + I \quad \times (R)$$

$$M^{-1} \cdot H_k^T P_{k/k-1} = H_k^T P_{k/k-1} H_k + R$$

Elevando à potência negativa, temos:

$$(M^{-1} H_k^T P_{k/k-1})^{-1} = (H_k^T P_{k/k-1} H_k + R)^{-1} \quad \times (H_k^T P_{k/k-1})$$

$$M = (H_k^T P_{k/k-1} H_k + R)^{-1} H_k^T P_{k/k-1}$$

Como pode ser visto, a equação acima é o segundo membro da equação (B.18).

Usando a igualdade acima, obtêm-se as duas novas relações a seguir.

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (\text{B.19})$$

e

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1} H_k P_{k/k-1} \quad (\text{B.20})$$

As equações (B.4), (B.8), (B.16), (B.20) constituem as equações do filtro ótimo de variância mínima linear desenvolvido por Kalman e Bucy.

A equação (B.19) nos habilita calcular a estimativa ótima no instante  $k$ , dadas as medidas  $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$  usando a predição de um passo e a diferença entre a **saída atual**  $y_k$  e a **saída predita**  $H_k \hat{x}_{k/k-1}$ . A diferença  $(y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1})$  é chamada de “Processo de Inovação” que reflete a discrepância entre a medida atual  $y_k$  e as medidas previstas  $H_k \hat{x}_{k/k-1}$ . Em um resíduo de média zero, as duas medidas estão em completo acordo. A diferença  $(y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1})$  é ponderada pelo seguinte termo:

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1} \quad (\text{B.21})$$

A matriz (ou vetor)  $K_k$  é o fator de ponderação e usualmente chamado de “**Ganho do Filtro de Kalman**”, que minimiza o erro de covariância *a posteriori*. O fator  $K_k$  minimiza os termos individuais da diagonal principal de  $P_k$ , pois estes termos representam as variâncias dos erros de estimação dos elementos do vetor de estado que está sendo estimado.

Uma forma do resultado de  $K$  que minimiza (B.20) é determinada por (GREG, 2001):

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R)^{-1}$$

Analisando a equação acima se vê que, quando o erro de covariância das medidas  $R$  se aproxima de zero, o ganho  $K$  pesa mais fortemente no resíduo (erro de estimação) e a medida atual  $y_k$  é cada vez mais confiável, enquanto a medida predita  $H_k \hat{x}_{k/k-1}$  cada vez menos confiável, ou seja:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H_k^{-1}$$

Por outro lado, quando o erro de covariância da estimativa *a priori*  $P_{k/k-1}$  se aproxima de zero, o ganho  $K$  pesa menos fortemente no resíduo (erro de estimação) e a medida atual  $y_k$  é cada vez menos confiável, enquanto a medida predita  $H_k \hat{x}_{k/k-1}$  é cada vez mais confiável, ou seja:

$$\lim_{P_{k/k-1} \rightarrow 0} K_k = 0$$

## CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO

Consideraremos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(s) \\ \text{s.a.} \quad & s \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo,  $s$  é o vetor com as variáveis de decisão e o conjunto  $\Omega$ , freqüentemente definido por um conjunto de igualdades e desigualdades, é o *conjunto factível* no qual os pontos de  $\Omega$  serão os *pontos factíveis* de (C.1).

As soluções de  $s^* \in \Omega$  do problema (C.1) serão chamados de minimizadores e os valores correspondentes  $f(s^*)$  são os *mínimos* do problema. Sucintamente, dizemos que:

O  $s^*$  é minimizador global de (C.1) se  $f(s^*) \leq f(s)$  para todo  $s \in \Omega$ . Neste caso,  $f(s^*)$  é chamado de mínimo de  $f$  em  $\Omega$ .

O  $\bar{s}$  é minimizador local de (C.1) se existe  $\xi > 0$  tal que  $f(\bar{s}) \leq f(s)$  para todo  $s \in \Omega$  tal que  $\|s - \bar{s}\| \leq \xi$ .

As condições que garantem a existência de um minimizador global para o problema (C.1) são dadas pelo teorema de Bolzano-Weierstrass<sup>1</sup>.

**Teorema C.1** – Se  $\Omega$  é compacto, e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe  $s^* \in \Omega$  minimizador global do problema (C.1).

A seguir apresentaremos algumas definições e teoremas relativos às chamadas condições de otimalidade do problema (C.1). Consideraremos  $f \in C^k(\Omega)$  para expressar que  $f(\cdot)$  têm derivadas contínuas até a ordem  $k$  no conjunto que contém  $\Omega$ .

<sup>1</sup> Karl W. T. Weierstrass matemático alemão do século XVIII, considerado o pai da análise moderna e Bernhard P. J. N. Bolzano teólogo, filósofo e matemático checo.

## C.1 Otimização

### C.1.1 Minimização com Restrições de Igualdade

Consideraremos para  $f, h \in C^1(\Omega)$  o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min & f(s) \\ \text{s.a.} & h(s) = 0 \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Onde:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Omega = \{s \in \mathbb{R}^n \mid h(s) = 0\}$

Com o intuito de apresentarmos soluções vis os clássicos métodos de Lagrange a fim de obtermos um problema sem restrição, temos que os gradientes de  $f(s)$  e  $h_i(s)$  tal que  $1 < i < m$  são dados por:

$$\nabla f(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(s)}{\partial s_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(s)}{\partial s_n} \end{pmatrix}, \quad \nabla h(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(s)}{\partial h_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h(s)}{\partial h_n} \end{pmatrix}$$

O jacobiano das restrições é dado por:

$$\nabla h(s) = (\nabla h_1(s) \quad \nabla h_2(s) \quad \cdots \quad \nabla h_m(s))$$

As Hessianas de  $f(s)$  e  $h_i(s)$  tal que  $1 < i < m$  são dados por:

$$F(s) = \nabla^2 f(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s_n \partial s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s_1 \partial s_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s_n^2} \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \nabla^2 H(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_n \partial s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_1 \partial s_n} & \cdots & \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_n^2} \end{pmatrix}$$

**Definição C.1** – Dizemos que  $s \in \Omega = \{s \in \mathbb{R}^n \mid h(s) = 0\}$  é um ponto regular se o posto de  $\nabla h(s)$  é igual a  $m$ , ou seja,  $(\nabla h_1(s) \quad \nabla h_2(s) \quad \cdots \quad \nabla h_m(s))$  é um conjunto linearmente independente.



As demonstrações dos teoremas C.2 a C.7 podem ser encontradas em (BAZAR, 2001).

### C.1.2 Multiplicadores de Lagrange e Condições Necessárias de 1º Ordem

**Teorema C.2** – Se  $s^*$  é minimizador local regular de (C.2) então existem os multiplicadores de lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tais que:

$$\nabla f(s^*) + \lambda^T \nabla h(s^*) = \mathbf{0}$$

Assim, as condições necessárias de 1º ordem:

$$\nabla f(s^*) + \lambda^T \nabla h(s^*) = \mathbf{0} \quad (\text{C.3})$$

Juntamente com as restrições:

$$\nabla h(s^*) = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

Consiste em um total de  $n + m$  equações nas incógnitas  $s^*$  e  $\lambda$ . Por conseguinte, os possíveis minimizadores para o problema (C.2) serão os pontos estacionários ou críticos que, que, simultaneamente, resolvem (C.3) e (C.4).

**Definição C.2** – Chamamos de lagrangeano associado ao problema (C.2) à função:

$$l(s, \lambda) = f(s) + \lambda^T h(s) \quad (\text{C.5})$$

De modo que as condições necessárias de 1º ordem podem ser expressas da seguinte forma:

$$\nabla_s l(s, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\text{C.6})$$

$$\nabla_\lambda l(s, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\text{C.7})$$

### C.1.3 Condições Necessárias de 2º Ordem

**Teorema C.3** – Suponhamos que  $f, h \in C^2$  e  $s^*$  é minimizador local regular de (C.2). Então existem os multiplicadores de lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tais que:

$$\nabla f(s^*) + \lambda^T \nabla h(s^*) = 0$$

Se denotarmos por  $E$  o plano tangente,  $E = \{q : \nabla h(s^*)q = 0\}$ , então a matriz:

$$L(s^*) = F(s^*) + \lambda^T \nabla H(s^*)$$

É semi-definida positiva em  $E$ , isso é,  $q^T L(s^*)q \geq 0, \forall q \in E$ , onde:

$$L(s^*) = \nabla^2 l(s, \lambda)$$

### C.1.4 Condições Suficientes de 2º Ordem

**Teorema C.3** – Se  $f, h \in C^2$ ,  $s^* \in \Omega$  satisfaz as condições necessárias de primeira ordem para (C.2) e  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e  $s^*$  é minimizador local estrito para (C.2)

$$q^T L(s^*)q > 0, \forall q \neq 0 \in M$$

A seguir apresentaremos as condições de Karush, Kunh<sup>2</sup> e Tucker<sup>3</sup> que consistem em uma extensão dos métodos clássicos dos multiplicadores Lagrange e visam desenvolver as condições necessárias e suficientes para um problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade, transformando-o em um problema de otimização sem restrição.

### C.1.5 Minimização com Restrições Gerais

Consideraremos o seguinte problema geral de otimização:

$$\min f(s) \quad (C.8)$$

$$s.a. \quad h(s) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (C.9)$$

$$c_k(s) \leq 0, k = 1, 2, \dots, p \quad (C.10)$$

$$s \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (C.11)$$

Onde:  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

é a função objetivo;  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  são, respectivamente, as restrições de igualdade e desigualdade que formam o espaço de soluções

<sup>2</sup> Harold Kunh é professor de matemática na universidade de Princeton e possui contribuições em programação não linear e teoria dos jogos.

<sup>3</sup> Albert William Tucker, falecido em 1995, deixou importantes contribuições nas áreas de topologia, teoria dos jogos e programação não-linear.

factíveis em  $\Omega$ .

### C.1.6 Condições de Karush-Kunh-Tucker

O resultado teórico mais importante em otimização não linear recebe o nome de condições de Karush-Kunh-Tucker (KKT) (MEHRAN, 2007). Uma vez que estas condições permitem estabelecer relações entre as derivadas da função objetivo e as derivadas das funções que definem as restrições.

Em trabalhos independentes Karush e Kunh (JACQUOT, 1994), respectivamente em 1939 e 1951, apresentaram as condições de otimalidade de primeira ordem para que um dado ponto no espaço possa ser considerado um ponto ótimo.

### C.1.7 Condições Gerais de KKT

**Teorema C.5** – Suponhamos que  $[f(s), h(s), c_k(s)] \in C^1$  e seja  $s^*$  um minimizador local regular de (C.8) sujeito às restrições (C.9), (C.10) e (C.11). Seja ainda,  $I = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid c_i(s) = 0\}$ . De modo que  $\nabla h(s) \cup \{\nabla c_i(s^*), i \in I\}$  é um conjunto linearmente independente. Então existem únicos multiplicadores de Kun-Tucker  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  e  $\mu_i \geq 0$  para todo  $i \in I$ , tais que:

$$\nabla f(s^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(s^*) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla c_k(s^*) = 0$$

Desta forma, se  $S$  é um ponto regular e minimizador para o problema (C.8), definindo  $\mu_i = 0$  se  $i \notin I$ , podemos reescrever as condições de KKT da seguinte forma:

$$\nabla f(s^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(s^*) + \sum_{k=1}^l \mu_k \nabla c_k(s^*) = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$h_i(s^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{C.13})$$

$$c_k(s^*) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{C.14})$$

$$\mu_k c_k(s^*) = 0, \quad k = 1, \dots, l \quad (\text{C.15})$$

$$\mu_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, l \quad (\text{C.16})$$

As  $n + m + p$  equações formam um sistema não linear nas incógnitas  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu \in \mathbb{R}^p$ . As soluções deste sistema que satisfazem (C.15) e (C.16) são os pontos estacionários de (C.8).

### C.1.8 Condições de 2º Ordem

#### Condições Necessárias

**Teorema C.6** – Suponhamos que  $[f(s), h(s), c_k(s)] \in C^2$  e  $s^*$  um ponto regular das restrições sujeito às restrições (C.9), (C.10) e (C.11). Se  $S$  é um ponto de mínimo para o problema (C.8), então existem os multiplicadores  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \geq 0$ , tais que:

$$L(s^*) = F(s^*) + l^T H(s^*) + m^T C(s^*) \quad (C.17)$$

É semi definida positiva no espaço  $M = \{q : \nabla h(s^*)q = 0, \nabla c_v(s^*)q = 0, \forall v \in V\}$ , onde:

$$L(s^*) = \nabla^2 l(s^*, \lambda, \mu)$$

$$C(s^*) = \nabla^2 c(s^*)$$

$$V = \{v : c_v(s^*) = 0, \mu_v > 0\}$$

Para

$$l(s^*, \lambda, \mu) = f(s) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(s) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i(s)$$

### Condições Suficientes

**Teorema C.7** – Seja  $[f(s), h(s), c_k(s)] \in C^2$  e se  $s^*$  satisfaz a condição necessária de 1º ordem para (C.8) e, além disso,  $q^T L(s^*)q > 0, \forall q \neq 0 \in M$ , então  $s^*$  é minimizador local estrito para o problema (C.8).

Na seção a seguir apresentaremos as definições e propriedades concernentes à convexidade e dualidade, uma vez que do ponto de vista teórico, convexidade e dualidade fornecem estruturas sob as quais resultados relevantes sobre como algoritmos podem ser obtidos (KIRK, 1970).

## C.2 Condições de Otimalidade

Convexidade é um dos conceitos chave em análise matemática. Com hipóteses de convexidade, as condições necessárias de otimalidade passam a ser suficientes. Em outras palavras, todo ponto estacionário torna-se uma solução do problema. Em particular, qualquer minimizador local é global. Além disso, no caso convexo podemos desenvolver a teoria da dualidade em sua forma mais completa, isto é, associar ao problema original (primal) outro problema, chamado dual, que sob certas hipóteses é equivalente ao original e às vezes é mais fácil de resolver.

Recentemente, a teoria da dualidade é obtida como uma regra central no desenvolvimento e unificação da teoria de otimização, devido a originalidade da

mesma e a implementação de novos algoritmos para o tratamento de uma grande classe de problemas práticos (KIRK, 1970) e (MEHRAN, 2007).

### C.2.1 Convexidade: Definições e Propriedades

As definições e teoremas a seguir garantem a existência de um único minimizador global para um problema sob a hipótese da convexidade.

**Definição C.3** – O conjunto  $Z \subset \mathbb{R}^n$  é chamado um conjunto convexo se para quaisquer  $s, \bar{y} \in Z$  e para todo  $\rho \in [0,1]$ ,  $[\rho s + (1-\rho)\bar{y}] \in Z$ .

**Definição C.4** – Se  $Z$  é um conjunto convexo,  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função convexa se para todo  $s, \bar{y} \in Z$ ,  $\rho \in [0,1]$ .

$$f(\rho s + (1-\rho)\bar{y}) \leq \rho f(s) + (1-\rho) f(\bar{y})$$

**Definição C.5** – Chamamos de problema de programação convexa:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(s) \\ \text{s.a.} \quad & s \in Z \end{aligned}$$

Onde  $Z$  é um conjunto convexo e  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função convexa.

**Teorema C.8** - Em um problema de programação convexa, todo minimizador local é global. O conjunto dos minimizadores é convexo. Se  $f$  é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.

**Teorema C.9** – Se o problema de minimização com restrição de igualdade e desigualdade (C.8) é um problema de programação e em  $s^*$  valem as KKT gerais (Teorema C.5), então  $s^*$  é um minimizador global.

### C.2.2 Dualidade: Definições e Propriedades

Do ponto de vista prático, dualidade aparece como uma ferramenta poderosa na busca de soluções ótimas. Além disso, há uma estreita relação entre dualidade e convexidade (LAUB, 1991), (MEHRAN, 2007), (KIRK, 1970) e (HOCKING, 1991) como veremos no Teorema C.10 a seguir.

**Definição C.6** – Chamamos o problema dual de (C.8) sujeito às restrições (C.9), (C.10) e (C.11) ao problema:

$$\begin{aligned}
& \min \quad l(s, \lambda, \mu) \\
& \text{s.a.} \quad \nabla_s l(s, \lambda, \mu) = 0 \\
& \quad \quad \mu \geq 0
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Onde:

$$l(s, \lambda, \mu) = f(s) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(s) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i(s)$$

Podemos, portanto, reescrever (C.8), como:

$$\begin{aligned}
& \max \quad l(s, \lambda, \mu) = f(s) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(s) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i(s) \\
& \text{s.a.} \quad \nabla f(s) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(s) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla c_i(s) \\
& \quad \quad \mu \geq 0
\end{aligned} \tag{C.19}$$

### C.2.3 Gap de Dualidade

**Definição C.7** – Dado o problema primal (C.8) podemos definir o problema dual como (MEHRAN, 2007), (KENNETH, 2004):

$$\begin{aligned}
& \max \quad \theta(\mu, \lambda) \\
& \text{s.a.} \quad \mu \geq 0
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Onde a chamada função dual  $\theta$  é definida no par de multiplicadores  $(\mu, \lambda)$  por:

$$\theta(\mu, \lambda) = \inf_s [f(s) + \mu c(s) + \lambda h(s)]$$

**Proposição C.1** - Uma vez que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \in C^1$ . Sempre teremos que:

$$\max \{f(s) : c(s) \leq 0, h(s) = 0\} \leq \min \{f(s) : c(s) \leq 0, h(s) = 0\}$$

À diferença, temos:

$$\min\{f(s) : c(s) \leq 0, h(s) = 0\} - \max \{ \theta(\mu, \lambda) : \mu \geq 0 \}$$

Damos o nome de  $gap^4$  de dualidade.

**Prova:** Ver referência (HOCKING, 1991).

4 Termo em inglês que significa abertura, intervalo.

Quando não ocorre a situação de *gap*, o problema primal e dual coincidem em seus pontos de mínimo e máximo, respectivamente. Conforme assegura o Teorema a seguir.

**Teorema C.10** – Suponhamos que o problema (C.8) é tal que as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  são convexas em  $\mathbb{R}^n$  e que  $s^*$  é um ponto KKT com os multiplicadores correspondentes  $\mu^*$  e  $\lambda^*$ . Então  $(s^*, \lambda^*, \mu^*)$  é a solução dual (C.20). Além disso, o valor objetivo primal e dual coincidem, isto é,  $f(s^*) = \theta(\lambda^*, \mu^*)$ . Ou seja, não há gap de dualidade.

**Prova:** Ver referência (KAWAOKA, 2004).

## CONDICIONAMENTO DE MATRIZES

Considerar os seguintes casos envolvendo o número de condição de um sistema do tipo:

$$\bar{H}\bar{\lambda} = \tilde{b}$$

### Caso 1

O vetor independente  $\tilde{b}$  é alterado para  $\tilde{b} + \partial\tilde{b}$  e  $\bar{H}$  é mantido inalterado. Supor que a solução de  $\bar{\lambda}^*$  seja alterada para  $\bar{\lambda}^* + \delta\bar{\lambda}^*$ . Assim, temos:

$$\bar{H}(\bar{\lambda}^* + \delta\bar{\lambda}^*) = (\tilde{b} + \partial\tilde{b}) \Rightarrow \bar{H}\delta\bar{\lambda}^* = -\partial\tilde{b}$$

A partir de uma norma consistente:

$$\|\delta\bar{\lambda}^*\| \leq \|\bar{H}^{-1}\| \|\partial\tilde{b}\| \text{ e } \|\tilde{b}\| = \|\bar{H}\bar{\lambda}^*\| \leq \|\bar{H}\| \|\bar{\lambda}^*\| \quad (\text{D.1})$$

Combinando as equações (E.1) obtemos:

$$\frac{\|\delta\bar{\lambda}^*\|}{\|\bar{\lambda}^*\|} \leq \|\bar{H}\| \|\bar{H}^{-1}\| \frac{\|\partial\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|}$$

A quantidade  $\frac{\|\delta\bar{\lambda}^*\|}{\|\bar{\lambda}^*\|}$  mede a alteração relativa no vetor solução  $\bar{\lambda}^*$ , enquanto  $\frac{\|\partial\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|}$  é a alteração relativa no vetor  $\tilde{b}$ . Assim, podemos verificar que a razão entre a alteração relativa na solução e a alteração no vetor  $\tilde{b}$  é limitada pelo número  $\|\bar{H}\| \|\bar{H}^{-1}\|$  também conhecido com *número de condição* de  $\bar{H}$  ( $\text{cond}(\bar{H})$ ).

### Caso 2

A matriz  $\bar{H}$  é alterada para  $\bar{H} + \Delta\bar{H}$  e o vetor  $\tilde{b}$  é mantido inalterado. Supor que



a solução de  $\bar{\lambda}^*$  seja alterada para  $\bar{\lambda}^* + \delta\bar{\lambda}^*$ . Assim, temos:

$$(\bar{H} + \Delta\bar{H})(\bar{\lambda}^* + \delta\bar{\lambda}^*) = -\tilde{b} \Rightarrow (\bar{H} + \Delta\bar{H})\delta\bar{\lambda}^* = -\Delta\bar{H}\bar{\lambda}^*$$

e

$$\delta\bar{\lambda}^* = -(\bar{H} + \Delta\bar{H})^{-1} \Delta\bar{H}\bar{\lambda}^* \quad (D.2)$$

Considerando que  $\|\bar{H}\|\|\bar{H}^{-1}\| \leq 1$ . Então é possível mostrar que:

$$(\bar{H} + \Delta\bar{H})^{-1} = (I + \Pi)\bar{H}^{-1}$$

Onde:

$$\|\Pi\| \leq \frac{\|\bar{H}^{-1}\Delta\bar{H}\|}{1 - \|\bar{H}^{-1}\Delta\bar{H}\|}$$

Considerando a norma em ambos os lados da equação (D.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\delta\bar{\lambda}^*\| &\leq (1 + \|\Pi\|)\|\bar{H}^{-1}\|\|\Delta\bar{H}\|\|\bar{\lambda}^*\| \\ &\leq \frac{\|\bar{H}^{-1}\|\|\Delta\bar{H}\|\|\bar{\lambda}^*\|}{1 - \|\bar{H}^{-1}\|\|\Delta\bar{H}\|} \end{aligned}$$

### Caso 3

A matriz  $\bar{H}$  é alterada para  $\bar{H} + \Delta\bar{H}$  e o vetor  $\tilde{b}$  é alterado para  $\tilde{b} = \partial\tilde{b}$  e a solução  $\bar{\lambda}^*$  é alterada para  $\bar{\lambda}^* + \delta\bar{\lambda}^*$ . Considerando que  $\bar{H} + \Delta\bar{H}$  é não-singular, então é possível mostrar que:

$$\frac{\|\delta\bar{\lambda}^*\|}{\|\bar{\lambda}^*\|} \leq \left( \frac{\|\bar{H}\|\|\bar{H}^{-1}\|}{1 - \|\bar{H}\|\|\bar{H}^{-1}\|\frac{\|\Delta\bar{H}\|}{\|\bar{H}\|}} \right) \left( \frac{\|\Delta\bar{H}\|}{\|\bar{H}\|} + \frac{\|\partial\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|} \right) \quad (D.3)$$

Ao se observar o efeito das perturbações aditivas nos casos acima, é notório a importância do número de condição para analisar se um sistema é ou não mal condicionado, considerando que o sistema do tipo mostrado na equação (3.20) é medido pelo número de condição, pois ele dá a máxima ampliação que a variação relativa da

solução pode sofrer frente a uma perturbação ou no vetor de termos independentes ou na matriz dos coeficientes. Então, um problema é denominado como mal condicionado ou numericamente instável se pequenas alterações nos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final.

**Comentário D.1:** Como definido anteriormente o número de condição é dependente de uma norma, em geral, se uma matriz é bem ou mal condicionada com relação a uma norma, ela é também bem ou mal condicionada com relação a algumas outras normas (FARIAS, 1998). Para verificarmos a condicionamento de um sistema, devemos considerar a equação (D.3). Por razão de simplicidade, suponha que:

$$\frac{\|\Delta \bar{H}\|}{\|\bar{H}\|} = \frac{\|\partial \tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|} = 10^{-d}$$

Assim,  $\frac{\|\delta \bar{\lambda}^*\|}{\|\bar{\lambda}^*\|}$  é aproximadamente menor ou igual a  $2 \cdot \text{cond}(\bar{H}) \cdot 10^{-d}$ . Se o erro relativo nos dados é de  $10^{-d}$  e se o erro relativo na solução deve ser garantido para menor ou igual  $10^{-t}$ , então  $\text{cond}(\bar{H})$  tem de ser igual ou menor a  $\frac{1}{2} 10^{d-t}$ . Por exemplo, suponhamos que  $d = 5$  e uma precisão de 0.001 é desejada, assim  $\text{cond}(\bar{H}) \leq \frac{1}{2} 10^2 = 50$ . Neste caso, um sistema é bem condicionado se  $\text{cond}(\bar{H})$  é menor ou igual a 50.

## **SOBRE OS AUTORES**

**TIAGO DOS SANTOS FACANHA** Possui graduação em Tecnologia em Telemática (2006) e Especialização em Ensino à Docência (2015) pelo Instituto Federal do Ceará/IFCE, mestrado em engenharia de Teleinformática pela Universidade Federal do Ceará / UFC (2010). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal do Ceará/IFCE. Tem experiência na área de Sistemas de Computação (Arquitetura, Sistemas e Programação), Filtragem (Kalman, Estendido, Robusta, e Distribuída) e Engenharia Eletrônica (Digital, Projetos e Embarcados).

**JOSÉ TARCISIO COSTA FILHO** Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Ceará (1985), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (1988) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (1992). Atualmente é professor titular da Universidade Federal do Ceará. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Automação Eletrônica de Processos Elétricos e Industriais, atuando principalmente nos seguintes temas: Instrumentação e controle, automação Industrial, controle de motores, Robótica Móvel, Jogos Dinâmicos e identificação de sistemas.

**GUILHERME ALENCAR BARRETO** Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Ceará, mestrado em Engenharia Elétrica pela Escola de Engenharia de São Carlos/USP (1998) e doutorado em Engenharia Elétrica, também pela Escola de Engenharia de São Carlos/USP (2003), com período de doutorado-sanduiche na Universidade de Bielefeld (Alemanha). É professor associado do Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará. Sua principal área de pesquisa é Inteligência Computacional e Aprendizado de Máquinas com aplicações em robótica, identificação e controle de sistemas dinâmicos e reconhecimento de padrões. É membro da Sociedade Brasileira de Inteligência Computacional (SBIC), tendo sido seu diretor presidente no biênio 2015-2017, e da Sociedade Brasileira de Automática (SBA). É editor-chefe do periódico Learning & Nonlinear Models (L&NLM), editado pela SBIC, desde 2009. É também editor-associado dos periódicos Applied Intelligence (Springer), International Journal of Machine Learning and Cybernetics (Springer), International Journal of Innovative Computing and Applications (Inderscience) e Frontiers. Atualmente é o coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática - PPGETI (CAPES 6), Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-588-4

