UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E GEOCIÊNCIAS - ICEG

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

# CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA:
## uma sequência didática para o Ensino Médio

Rejane Padilha Quedi
Luiz Marcelo Darroz

Passo Fundo, 2019

CIP – Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Q3c Quedi, Rejane Padilha

Conceitos básicos de estatística : uma sequência didática para o ensino médio / Rejane Padilha Quedi, Luiz Marcelo Darroz. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2019.

6 Mb ; PDF. – (Produtos Educacionais do PPGECM).

Inclui bibliografia.

ISSN 2595-3672

Modo de acesso gratuito: http://www.upf.br/ppgecm Este material integra os estudos desenvolvidos junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), na Universidade de Passo Fundo (UPF), sob orientação do Prof. Dr. Luiz Marcelo Darroz.

1.Matemática (Ensino médio). 2. Aprendizagem.
3. Estatística educacional. 4. Prática de ensino. I. Darroz, Luiz Marcelo. II. Titulo. III. Série.

CDU: 372.851

Bibliotecária responsável Juliana Langaro Silveira – CRB 10/2427

## LISTA DE QUADROS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

## 1. APRESENTAÇÃO

Atualmente a Estatística desempenha uma importante função na sociedade contemporânea. Ela tem se demonstrado uma excelente ferramenta para o desenvolvimento de competências essenciais para as tomadas de decisões do mundo moderno. Neste sentido, evidencia-se a necessidade de desenvolvimento de estratégias e metodologias de ensino que possam promover aprendizagens significativas, duradouras e profundas nos estudantes da Educação Básica.

Desta forma, e buscando uma alternativa para o ensino de Estatística em uma realidade que exige dos estudantes a capacidade de sintetizar e analisar uma grande quantidade de informações, este trabalho apresenta uma sequência didática para o ensino dos conceitos básicos de Estatística em nível médio.

A sequência, que se estrutura nos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel, destina-se a professores de Matemática do Ensino Médio e compreende, em origem da Estatística, noções de população e amostra, tabulação de dados e os conceitos de média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão para dados em série e agrupados, distribuídos em três etapas. Na primeira etapa, denominada "Estatística: Origem e Elementos Básicos" almeja-se abordar o histórico do surgimento da Estatística, construir os conceitos de população, amostra, coleta dados, elaboração de tabelas e estabelecimento da diferença entre dados em série e dados agrupados; na segunda etapa, intitulada "Dados em Série" busca-se tratar a informação apresentada em série. Espera-se que seja estabelecida a compreensão sobre a determinação de medidas de tendência central como média aritmética, moda e mediana e também desvio médio e desvio padrão; e, a terceira etapa, que apresenta como título "Dados Agrupados" tem como objetivo tratar a informação apresentada para dados agrupados e estabelecer a compressão sobre a determinação das medidas de tendência central, média aritmética, moda e mediana, e, também desvio médio e desvio padrão.

Nesse sentido, este texto estrutura-se da seguinte forma: no próximo capítulo é apresentada resumidamente, aos professores que utilizarão em suas aulas as atividades propostas, a Teoria da Aprendizagem Significativa preconizada por David Paul Ausubel, e que fundamenta a sequência didática; em seguida são apresentadas três etapas da sequência didática – nestas busca-se estabelecer um diálogo através de "balõezinhos" com o professor de Matemática do Ensino Médio –; e na última parte são arrolados um conjunto de questões sobre os conceitos desenvolvidos na proposta.

Por fim, cabe ressaltar que esse material consiste no produto desenvolvido como pré-requisito parcial para a obtenção do título de mestre de um dos autores, na linha de pesquisa Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino de Ciências e Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade de Passo Fundo (UPF).

## 2. A Teoria da Aprendizagem Significativa

O pressuposto central da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel é de que o fator isolado mais importante, e que influencia a aprendizagem, é aquilo que o aprendiz já sabe. (MOREIRA; MASINI, 2001, p.17)

O objetivo desta teoria é a ocorrência da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel, este tipo de aprendizagem é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo (estrutura hierárquica de conceitos). Neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, aquilo que o aprendiz já sabe, a qual Ausubel define como subsunçor, existente na estrutura cognitiva (estrutura hierárquica de conceitos).

Em outras palavras, a Aprendizagem Significativa ocorre quando a nova informação ancora-se (interage) em subsunçores relevantes preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. Esse processo de ancoragem da nova informação resulta em crescimento e modificação do conceito subsunçor. Isso significa que os subsunçores existentes na estrutura cognitiva podem ser abrangentes e bem desenvolvidos ou limitados e pouco diferenciados, dependendo da frequência e da intensidade com que ocorre a aprendizagem significativa em conjunção com um dado subsunçor. À medida que esses novos conceitos forem aprendidos de maneira significativa, de forma não literal e nem arbitrária, ocorre um crescimento e elaboração dos conceitos subsunçores iniciais, ou seja, conforme a aprendizagem começa a ser significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e capazes de ancorar mais informações.

Para Ausubel, a aprendizagem significativa contrapõe-se fundamentalmente à aprendizagem mecânica. Esta é definida como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes e existentes na estrutura cognitiva. Neste caso, a informação é armazenada de forma arbitrária, isto é, ocorre sem que haja interação entre a nova informação e o que o estudante já sabe. O conhecimento assim adquirido fica arbitrariamente distribuído na estrutura cognitiva sem relacionar-se a conceitos subsunçores específicos.

Para facilitar a ocorrência da Aprendizagem Significativa, Ausubel recomenda o uso de organizadores prévios. Estes são materiais introdutórios apresentados antes do próprio material a ser aprendido, que servem de ponte para a nova aprendizagem e levam ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. O uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para manipular a estrutura cognitiva a fim de facilitar a ocorrência da Aprendizagem Significativa. Neste sentido, Ausubel salienta que os organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem ao passo que funcionam como “pontes cognitivas” que permitem que os estudantes superem o limite entre o que já sabem e aquilo que eles precisam saber, antes de poder realizar a tarefa apresentada.

Ainda, de acordo com Moreira e Masini, (2001), Ausubel, considera que duas condições são necessárias para a ocorrência da Aprendizagem Significativa. A primeira é que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, ou seja, que o que se pretende ensinar seja relacionável à sua estrutura de conhecimento do aprendiz de forma não-arbitrária e não-literal (substantiva). Isto significa que na estrutura cognitiva do aprendiz devem estar disponíveis os conceitos subsunçores específicos com os quais o novo material é relacionável.

A segunda condição, é que o aprendiz manifeste uma disposição de relacionar o novo material de maneira substantiva e não-arbitrária à sua estrutura cognitiva. Segundo o teórico, se uma das duas condições não for satisfeita, ocorrerá uma aprendizagem mecânica.

Enquanto a aprendizagem significativa ocorre, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados em decorrência de sucessivas interações. Do ponto de vista ausubeliana, o desenvolvimento de conceitos é facilitado quando os elementos mais gerais, mais inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar. Logo, segundo Ausubel, o princípio diferenciação progressiva deve ser levado em conta ao se programar o conteúdo, quer dizer, as ideias mais gerais e mais inclusivas da disciplina devem ser apresentadas no início para, somente então, serem progressivamente diferenciadas, em termos de detalhe e especificidade.

Além disso, o teórico indica que a instrução deve também explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais e aparentes. Isso deve ser feito para se atingir o que Ausubel chama de reconciliação integrativa.

Por fim, de acordo com Ausubel, a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica a posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. A melhor maneira de procurar evidências de compreensão significativa é formular questões e problemas de uma maneira nova e não familiar, que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido.

Assim, a partir do que foi exposto, pode-se inferir que o papel do professor na facilitação da aprendizagem significativa envolve pelo menos quatro tarefas fundamentais: identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino; averiguar quais os subsunçores relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado que o aprendiz deve ter em sua estrutura cognitiva; propor atividades didáticas que possibilitem que o novo conhecimento se relacione aos subsunçores especificamente relevantes e ensinar utilizando recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa.

**A Sequência Didática**

### 3.1. Estatística: Origem e Elementos Básicos

Esta etapa tem como objetivo abordar o histórico do surgimento da Estatística, construir os conceitos de população, amostra, coleta de dados, elaboração de tabelas e estabelecimento da diferença entre dados em série e dados agrupados. Sugere-se que a etapa seja desenvolvida em três horas-aula.

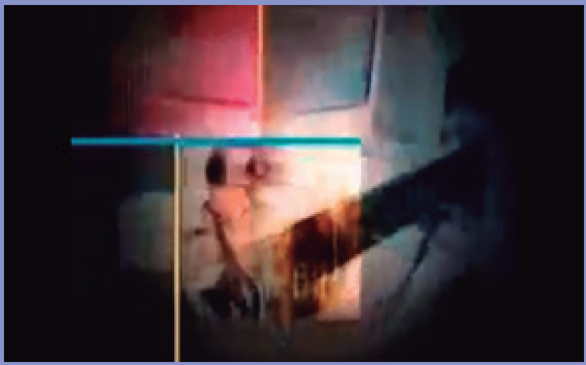
Para isso, a primeira parte da etapa consiste em averiguar os conhecimentos subsunçores dos estudantes. Neste sentido, o professor deve iniciar entregando uma folha de ofício aos estudantes para que eles escrevam, individualmente, tudo o que eles sabem sobre Estatística. No final, essas anotações devem ser entregues ao professor para que ele possa identificar os conhecimentos prévios dos estudantes.

Os dados aqui evidenciados devem servir de âncora para os conteúdos que serão abordados na sequência.

O estabelcimento da ponte entre os conhecimentos evidenciados pelos estudantes e os assuntos relacionados à origem da Estatística, população e amostra, coleta de dados, tabulação de dados e diferença entre dados em série e dados agrupados será efetivado a partir da visualização do vídeo História da Estatística, que se encontram em

**https://www.youtube.com/watch?v=jCzMPL7Ub2k**

**Professor!**
**A imagem corresponde à tela inicial abertura do vídeo.**



Este vídeo, servirá de organizador prévio e possui duração de 3 minutos e 10 segundos. Ele apresenta a ideia de quão antiga foi a necessidade da utilização de cálculos estatísticos, além de evidenciar a noção dos conceitos a serem desenvolvidos.

Após a visualização do vídeo, sugere-se que seja proporcionado um tempo ao grande grupo para o estabelecimento de um diálogo entre os estudantes, que devem comentar sobre o que assistiram. No decorrer desta discussão o professor deve propor uma pesquisa sobre a idade das pessoas, objetivando coletar dados para discussão e análise dos conteúdos que serão desenvolvidos na sequência. Para tal, sugere-se que ele pergunte aos estudantes como eles fariam para coletar essa informação.

Professor! Aproveite os questionamentos dos estudantes para mediar a construção dos conceitos.

A partir das respostas dadas pelos estudantes, pode-se desenvolver os conteúdos levando os estudantes a compreender que todas as pessoas seriam a população, e que se deve estabelecer critérios ou prioridades para determinar que pessoas pretende-se atingir. Esse grupo da população seria a amostra.

No decorrer da atividade, e buscando promover a diferenciação progressiva dos conceitos de amostra e população, deve-se solicitar aos estudantes que se dividam em dois grupos e coletem informações relativas à idade e altura de seus colegas. Um grupo deve fazer a coleta das idades e outro da altura, uma vez que todos deverão participar da pesquisa. Considera-se que o trabalho será mais interessante para o estudante se este participar do processo todo, iniciando pela escolha das informações a serem coletadas. Após a coleta, os dados devem ser socializados.

A turma poderá ser dividida em mais grupos se achar necessário. Além disso, poderão ser coletadas outras informações como peso, número de irmãos, renda dos pais, entre outros.

A partir disso, e, fazendo uso dos dados, buscar-se-á construir com os estudantes a concepção de que o tratamento da informação se dá pela amostra. Isto é, fortalece-se a compreensão de que a amostra corresponde a uma parte significativa da população.

Após o estabelecimento dos conceitos de população e amostra, deve-se buscar a compreensão dos dados em série e dados agrupados com os conceitos subsunçores evidenciados na primeira parte da etapa. Para isso, o professor deve solicitar aos estudantes  que organizem duas tabelas.  A primeira deve conter os dados em série e, a segunda, os dados devem estar agrupados.

Essas tabelas, que contêm distribuições tabulares, devem apresentar um título, um corpo (tabela) e uma fonte. O corpo da tabela, com os dados em série, consiste em uma lista de dados e o corpo da tabela para dados agrupados, os mesmos dados são agrupados pela quantidade de vezes que ele aparece.

O quadro 1 e a tabela 1 podem servir de modelo para a atividade indicada.

Lembre-se que: O TÍTULO deve responder a três perguntas: O QUE? ONDE? QUANDO?

Quadro 1: Quadro para dados em série
Idade (anos) dos estudantes Turma X, Escola NNNN, março/2018
Passo Fundo, RS

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 16 | 17 | 18 | 15 | 15 | 14 | 18 |
| 19 | 17 | 16 | 15 | 16 | 15 | 14 | 16 | 16 | 15 |
| 17 | 17 | 18 | 16 | 15 | 14 | 18 | 19 | 17 | 16 |

Fonte: Estudantes Turma X

FONTE é a origem dos dados.

Tabela 1: Tabela para dados agrupados

Idade (anos) dos estudantes Turma X, Escola NNNN, março/2018
Passo Fundo, RS

| Idade | Estudantes |
|---|---|
| 14 | 3 |
| 15 | 6 |
| 16 | 8 |
| 17 | 6 |
| 18 | 5 |
| 19 | 2 |

Fonte: Estudantes Turma X

Ao término da construção das tabelas, o professor deve estabelecer um diálogo com a turma para que os estudantes percebam a diferença entre dados em série e dados agrupados. Como forma de fortalecer a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e promover a assimilação dos conceitos estudados, sugere-se que os grupos socializem as tabelas organizadas e avaliem as informações nelas contidas.

Como término da etapa e com o intuito de identificar se os estudantes aprenderam significativamente os conceitos abordados na etapa, sugere-se que seja solicitado que os mesmos respondam à situação problema (Quadro 2).

Professor!
Terá indícios de que o estudante aprendeu significativamente se ele responder corretamente este problema, pois a situação exige que o estudante transfira os conhecimentos estudados em novos contextos.

Quadro 2: Atividade para identificar se o estudante aprendeu significativamente os conceitos abordados na primeira etapa

Os números a seguir são os pontos por bolas recebidas pelo Time "Bola da Mágica" do Município X em competição de Baseball durante um período recente de 30 anos.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 155 | 118 | 140 | 129 | 155 | 118 |
| 122 | 126 | 129 | 122 | 78 | 145 |
| 145 | 109 | 126 | 126 | 140 | 122 |
| 119 | 122 | 114 | 118 | 134 | 122 |
| 119 | 112 | 109 | 134 | 145 | 109 |

Com base nas informações, quem seria a população e a amostra? Construa uma distribuição tabular para dados em série e outra, com os dados agrupados.

Fonte: Elaborado pelos autores

Se preferir, pode propor outra situação problema. Porém, tome cuidado para que esta apresente elementos capazes de fazer com que o estudante consiga aplicar os conteúdos estudados a outros contextos.

### 3.2. Dados em Série

Esta etapa tem como objetivo tratar a informação apresentada em série. Espera-se que, nesta, seja estabelecida a compreensão sobre a determinação de medidas de tendência central como, média aritmética, moda e mediana e também desvio médio e desvio padrão. Para isso, indica-se que a etapa seja desenvolvida em cinco horas-aula.

Assim, inicialmente, para verificar os conhecimentos subsunçores dos estudantes, o professor entregará a cada participante o exercício apresentado no Quadro 3.

Quadro 3: Exercício para a identificação dos conceitos subsunçores relativos à média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão para dados em série.

Uma equipe do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 11 dias intercalados no mês de agosto de 2018. Esse tipo de mecanismo é rotineiro, uma vez que os dados servem de referência para estudos e análises de tendências climáticas ao longo dos meses.

| Dia do Mês | °C |
|---|---|
| 1 | 15,5 |
| 3 | 14 |
| 5 | 13,5 |
| 7 | 18 |
| 9 | 19,5 |
| 11 | 20 |
| 13 | 13,5 |
| 15 | 13,5 |
| 17 | 18 |
| 19 | 20 |
| 21 | 18,5 |

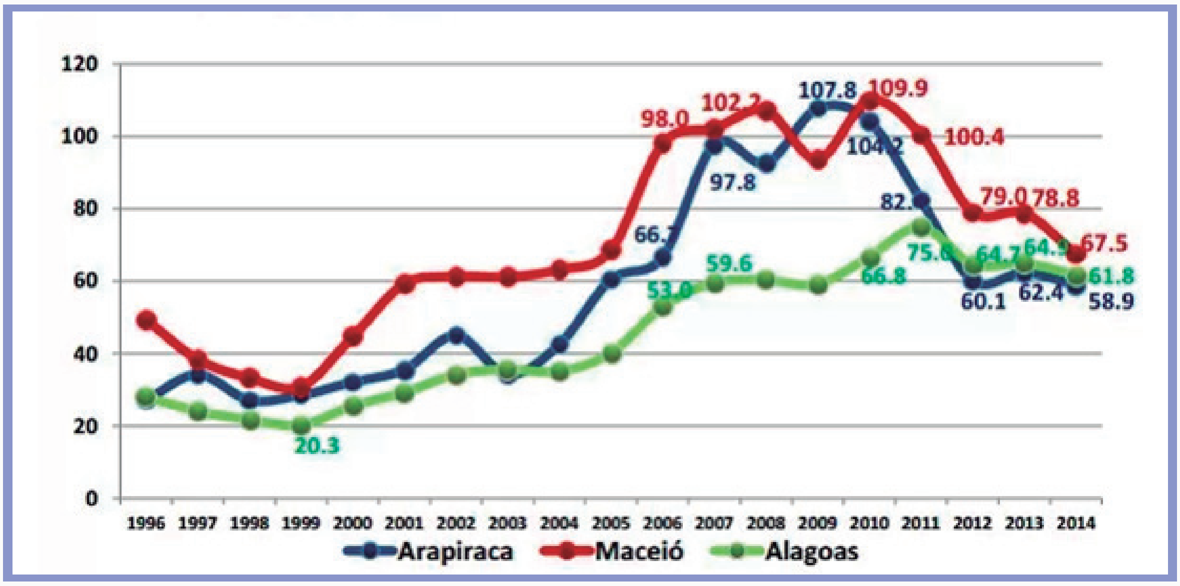
Em relação à temperatura, encontre o valor da média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão.

Fonte: Fictícia

Este exercício deve ser resolvido individualmente pelos estudantes e entregue ao professor para que seja analisado na tentativa de evidenciar os conceitos subsunçores dos participantes.

Visando estabelecer uma ligação entre os conceitos evidenciados no exercício anterior e os assuntos que serão abordados na etapa, deve-se utilizar o gráfico da reportagem “AL registra 61,8 mortes a cada 100 mil habitantes em 2014, aponta Secretaria” como organizador prévio. A Figura 1 está disponível no endereço eletrônico http://g1.globo.com/al/alagoas/noticia/2015/02/al-registra--618-mortes-cada-100-mil-habitantes-em-2014-aponta-secretaria.html, e é fruto de uma pesquisa realizada sobre o número de homicídios registrados em Alagoas no ano de 2014, segundo o Boletim Mensal da Estatística Criminal de Alagoas, divulgado pela Secretaria de Estado da Defesa Social e Ressocialização (SEDRES). O levantamento aponta uma média de 61,8 assassinatos a cada 100 mil habitantes.

Figura 1: Série histórica da quantidade de homicídios por 100 mil habitantes, de 1996-2014




Fonte: Boletim Mensal da Estatística Criminal de Alagoas (2014)

Professor, saliente para os estudantes a necessidade de compreender a informação contida no gráfico.

A partir da leitura do gráfico, o professor deve retomar a pesquisa realizada na primeira etapa sobre a idade dos estudantes participantes, uma vez que os dados desta tabela estão em série.

Professor! Esses dados são os coletados pelos estudantes sobre a idade dos colegas.

Com estes dados, e para promover a diferenciação progressiva, o professor deve, inicialmente, estabelecer um espaço para a discussão de como os estudantes imaginam que esses valores podem ser representados. No decorrer da discussão, o professor deve reforçar a concepção de que cada idade corresponde a um estudante e, que para a generalização pode-se identificar esses valores por $x_i$ . Neste caso, **i** assume valor de 1 até 30, pois no caso do exemplo são 30 estudantes, número que será representado por **n**. Salienta-se ainda a necessidade de que o professor evidencie que para dar um tratamento melhor à informação deve-se ordenar os valores em tabelas. Assim, solicita-se que os estudantes estruturem dados como demonstrado no Quadro 1.

Quadro 1: Idade (anos) dos estudantes Turma X, Escola NNNN, março/2018
Passo Fundo, RS

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 16 | 17 | 18 | 15 | 15 | 14 | 18 |
| 19 | 17 | 16 | 15 | 16 | 15 | 14 | 16 | 16 | 15 |
| 17 | 17 | 18 | 16 | 15 | 14 | 18 | 19 | 17 | 16 |

Fonte: Estudantes Turma X

**$x_i$ - os valores**
**n - quantidade de valores = 30**

Após a compreensão de como ordenar valores, passa-se ao estudo de Medidas de Tendência Central. Para tal, o professor deve estabelecer um diálogo com os estudantes acerca de como se determina a média aritmética.

A partir dos comentários efetuados no decorrer da conversa, o professor deve construir com os estudantes a concepção de que média aritmética é definida através da soma ( $\Sigma$ ) de todos os valores e a divisão pela quantidade. Como se sabe que os valores são representados por $x_i$ e a quantidade por **n**, deve-se construir com os estudantes a generalização desse raciocínio através da equação:

Esse símbolo chama-se SIGMA é a ordem da soma, ou seja, a letra $\Sigma$ é usada na matemática, como símbolo de um somatório.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(x_i)}{n}$$

Como forma de promover a reconciliação integradora dos assuntos abordados até o momento, a discussão deve ser ampliada e o professor deve motivar os estudantes a determinar a média das idades da turma. Tendo em vista que as idades já estão coletadas, espera-se que os estudantes percebam que para tal é necessário apenas somar as idades de todos os estudantes e dividir por trinta.

$$\overline{X} = \frac{14+14+14+15+15+15+15+15+15+16+16+16+16+16+16+16+16+17+17+17+17+17+17+18+18+18+18+18+19+19}{30}$$

$$\overline{X} = \frac{490}{30}$$

$$\overline{X} = 16{,}33 \text{ anos}$$

Com a média determinada, deve-se estabelecer um diálogo para que os participantes compreendam o significado do número determinado. Isto é, da média de idade dos estudantes da turma.

Professor!
Como a unidade dos dados é em "anos", a unidade da resposta também deve ser em "anos", ou seja 16,33 anos. Se desejar saber o equivalente em meses, de 0,33 anos, deverá fazer uma regra de tês para transformar anos em meses.

Uma vez compreendido o conceito de média aritmética, passa-se ao conceito de moda. Como primeira atividade desta parte, e visando promover a diferenciação progressiva, o professor deve apresentar uma sequência de números em série e indagar aos estudantes sobre o número que se repete mais vezes na série.

As respostas devem levar os estudantes à compreensão de que a moda trata dos valores quanto ao número de repetições. Isto é, se existe mais de um valor que se repete na mesma quantidade e essa quantidade for a maior, tem-se mais de uma moda.

Para exemplificar, considere a série:

5, 6, 4, 4, 5, 2, 6, 1, 1, 5, 6

1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

$M_{o1}=5$ $M_{o2}=6$

A partir dos dados do Quadro 1, o professor deve solicitar ao estudante que determine a moda destes dados

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante e o conteúdo de moda, deve-se solicitar que eles determinem a moda dos valores do Quadro 1.

DICA!

Fique atento, se ordenarmos os valores será mais fácil verificarmos o(s) valor(es) que mais está repetido.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 |
| 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 |

Logo, neste grupo de 30 estudantes teremos $M_o = 16 \text{ anos}$ que significa que neste grupo a idade que mais aparece é 16 anos.

Para demonstrar a diferenciação progressiva dos assuntos relacionados com as medidas de tendência central, passa-se a estudar o conceito de mediana. A fim de esta belecer a interação entre os conceitos subsunçores e conteúdos destinados para esta parte, o professor deve perguntar aos estudantes qual número divide a série em duas partes iguais. Cabe ao professor salientar que a série precisa estar ordenada. Ainda, deve-se iniciar um diálogo no qual o professor indague aos estudantes qual o número que divide a série em duas partes iguais. A partir das respostas dos estudantes será construída a compressão de que quando a quantidade de valores é par, a mediana é a média entre os valores centrais. Dessa forma, obtém-se a mediana somando os dois valores centrais e dividindo por dois. Se a quantidade de valores for ímpar, a mediana será o elemento central.

Para tal, o professor deve retomar novamente ao Quadro 1 e determinar a mediana dos valores contidos.

**Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante e o conteúdo de mediana, deve-se solicitar que eles determinem a mediana dos valores do Quadro 1.**

**ATENÇÃO!**

A série obrigatoriamente deverá estar ordenada

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 |
| 17 | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 |

$$M_e = \frac{16+16}{2} = 16 \text{ anos}$$

Ao determinarmos, $M_e = 16 \text{ anos}$, estamos determinando que é no valor 16 que a série se divide em duas partes iguais.

Muito bem!
Já sabemos determinar as MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL, média aritmética, moda e mediana para DADOS EM SÉRIE.

Dando continuidade aos objetivos propostos a partir desta parte da etapa, inicia-se o estudo relacionado ao desvio médio e ao desvio padrão.

Nesse sentido, para proporcionar a diferenciação progressiva, o professor deve apresentar uma nova situação que contém dados fictícios sobre as notas de dois estudantes em dez disciplinas. Esses dados podem ser evidenciados tal como os contidos no Quadro 4:

Quadro 4: Notas de Marta e Carlos em dez disciplinas

| Disciplina | Marta | Carlos |
|---|---|---|
| Matemática | 9,0 | 7,5 |
| Física | 8,5 | 7,0 |
| Química | 8,0 | 7,0 |
| Biologia | 8,0 | 10,0 |
| Português | 8,0 | 8,0 |
| História | 7,5 | 10,0 |
| Geografia | 8,5 | 10,0 |
| Inglês | 9,5 | 9,5 |
| Redação | 8,5 | 8,5 |
| Filosofia | 9,5 | 7,5 |

Fonte: Elaborado pelos autores

Depois que os estudantes tiverem visualizado a tabela e compreendido a temática da nova situação, o professor pode solicitar que eles calculem a média das notas dos estudantes fictícios Marta e Carlos.

Lembre-se que para determinarmos a média devemos somar as notas e dividir pela quantidade das mesmas.

Com as médias obtidas deve-se concluir, através de um diálogo com os estudantes que, mesmo com notas diferentes nas disciplinas, pode-se ter a mesma média. Logo, deve-se inserir na tabela apresentada os valores determinados. Recomenda-se que os dados sejam inseridos na última linha da tabela, como no Quadro 5.

Quadro 5: Notas e média aritmética de Marta e Carlos em dez disciplinas

| Disciplina | Marta | Carlos |
|---|---|---|
| Matemática | 9,0 | 7,5 |
| Física | 8,5 | 7,0 |
| Química | 8,0 | 7,0 |
| Biologia | 8,0 | 10,0 |
| Português | 8,0 | 8,0 |
| História | 7,5 | 10,0 |
| Geografia | 8,5 | 10,0 |
| Inglês | 9,5 | 9,5 |
| Redação | 8,5 | 8,5 |
| Filosofia | 9,5 | 7,5 |
| **MÉDIA** | **8,5** | **8,5** |

Fonte: Elaborado pelos autores

Ainda no diálogo estabelecido, o professor precisará discutir com os estudantes a diferença de cada nota em relação à média das notas de Marta e de Carlos. Desta forma, ele estabelecerá a oportunidade da ocorrência da reconciliação integradora dos conceitos de desvios, como demonstrado no Quadro 6.

Com isso, estaremos introduzindo a discussão referente aos conceitos de desvio médio e desvio padrão.

Toma-se aqui cada nota $X_i$ menos o valor da média $\overline{X}$ e coloca-se em valor absoluto para que o resultado não seja negativo e para que a soma dos desvios não seja zero. Isto vai nos dar o DESVIO, que é o quanto cada nota se distanciou em relação ao valor da média.

Quadro 6: Desvios das notas de Marta

| Disciplina | Marta | $\lvert X_i - \overline{X}\rvert$ |
|---|---|---|
| Matemática | 9,0 | $\lvert 9,0 - 8,5\rvert = 0,5$ |
| Física | 8,5 | $\lvert 8,5 - 8,5\rvert = 0,0$ |
| Química | 8,0 | $\lvert 8,0 - 8,5\rvert = 0,5$ |
| Biologia | 8,0 | $\lvert 8,0 - 8,5\rvert = 0,5$ |
| Português | 8,0 | $\lvert 8,0 - 8,5\rvert = 0,5$ |
| História | 7,5 | $\lvert 7,5 - 8,5\rvert = 1,0$ |
| Geografia | 8,5 | $\lvert 8,5 - 8,5\rvert = 0,0$ |
| Inglês | 9,5 | $\lvert 9,5 - 8,5\rvert = 1,0$ |
| Redação | 8,5 | $\lvert 8,5 - 8,5\rvert = 0,0$ |
| Filosofia | 9,5 | $\lvert 9,5 - 8,5\rvert = 1,0$ |
| $\overline{X}$ | **8,5** | **5,0** |

Fonte: Elaborado pelos autores

$$\sum \lvert X_i - \overline{X}\rvert = 5,0$$

Os resultados apresentados no Quadro 6 devem ser construídos juntamente com os estudantes. Isto é, o professor deve mediar um diálogo no qual se evidencie que a soma dos desvios, das notas de Marta, foi 5,0, e que se efetuar a média dos desvios obtém-se o desvio médio, determinado através da divisão da soma dos desvios pela quantidade de desvios. Logo, o desvio médio para as notas de Marta é $\frac{5,0}{10} = 0,50$ nota. Por fim, o professor deve auxiliar os estudantes a concluir que a generalização do desvio médio é:

$$D_M = \frac{\sum |X_i - \overline{X}|}{n}$$

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos subsunçores e o conteúdo de desvio médio, deve-se solicitar que os estudantes determinem o desvio médio das notas de Carlos.

Desvios das notas de Carlos.

| Disciplina | Carlos | $\lvert X_i - \overline{X} \rvert$ |
|---|---|---|
| Matemática | 7,5 | $\lvert 7,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ |
| Física | 7,0 | $\lvert 7,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ |
| Química | 7,0 | $\lvert 7,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ |
| Biologia | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ |
| Português | 8,0 | $\lvert 8,0 - 8,5 \rvert = 0,5$ |
| História | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ |
| Geografia | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ |
| Inglês | 9,5 | $\lvert 9,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ |
| Redação | 8,5 | $\lvert 8,5 - 8,5 \rvert = 0,0$ |
| Filosofia | 7,5 | $\lvert 7,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ |
| $\overline{X}$ | **8,5** | **11,0** |

Teremos que o desvio médio das notas de Carlos será: $D_M = \frac{11}{10} = 1,1$ nota

Ainda pertencendo a esta etapa, tem-se o desvio padrão. Para levar os estudantes à compreensão significativa deste conceito, o professor deve retomar os dados ontidos no Quadro 6 e determinar o desvio padrão (Quadro 7). Para tal, e para não ter valores negativos, deve-se elevar ao quadrado os valores dos desvios de cada nota de Marta, como demonstrado no Quadro 7. A diferenciação progressiva será estabelecida a partir da discussão de que o desvio padrão é um parâmetro muito usado e que indica o grau de variação de um conjunto de elementos.

Deve-se elevar o valor do desvio ao quadrado (para não termos valor negativo). Como o mesmo será elevado ao quadrado, trocamos o módulo por parênteses.

Quadro 7: Cálculo do quadrado dos desvios das notas de Marta para determinar o desvio padrão

| Disciplina | Marta | $\lvert X_i - \overline{X} \rvert$ | $(X_i - \overline{X})^2$ |
|---|---|---|---|
| Matemática | 9,0 | $\lvert 9{,}0 - 8{,}5 \rvert = 0{,}5$ | $(0{,}5)^2 = 0{,}25$ |
| Física | 8,5 | $\lvert 8{,}5 - 8{,}5 \rvert = 0{,}0$ | $(0{,}0)^2 = 0{,}00$ |
| Química | 8,0 | $\lvert 8{,}0 - 8{,}5 \rvert = 0{,}5$ | $(0{,}5)^2 = 0{,}25$ |
| Biologia | 8,0 | $\lvert 8{,}0 - 8{,}5 \rvert = 0{,}5$ | $(0{,}5)^2 = 0{,}25$ |
| Português | 8,0 | $\lvert 8{,}0 - 8{,}5 \rvert = 0{,}5$ | $(0{,}5)^2 = 0{,}25$ |
| História | 7,5 | $\lvert 7{,}5 - 8{,}5 \rvert = 1{,}0$ | $(1{,}0)^2 = 1{,}00$ |
| Geografia | 8,5 | $\lvert 8{,}5 - 8{,}5 \rvert = 0{,}0$ | $(0{,}0)^2 = 0{,}00$ |
| Inglês | 9,5 | $\lvert 9{,}5 - 8{,}5 \rvert = 1{,}0$ | $(1{,}0)^2 = 1{,}00$ |
| Redação | 8,5 | $\lvert 8{,}5 - 8{,}5 \rvert = 0{,}0$ | $(0{,}0)^2 = 0{,}00$ |
| Filosofia | 9,5 | $\lvert 9{,}5 - 8{,}5 \rvert = 1{,}0$ | $(1{,}0)^2 = 1{,}00$ |
| $\overline{X}$ | **8,5** | **5,0** | **4,00** |

Fonte: Elaborado pelos autores

$$\Sigma(X_i - \overline{X})^2 = 4{,}0$$

Os resultados apresentados na tabela acima devem ser construídos juntamente com os estudantes. Ou seja, o professor precisa mediar um diálogo no qual se evidencie que a soma dos quadrados dos desvios foi 4,0, e que se efetuar a raiz quadrada da divisão, para voltar à unidade original, da soma dos quadrados dos desvios pelo número de desvios, tem-se o desvio padrão.

O valor do desvio padrão será a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios, ou seja $\sqrt{\frac{4,0}{10}} = 0,63$ nota

Por fim, estabelecendo a assimilação do conceito de desvio padrão, o professor deve auxiliar os estudantes a concluir que a generalização do desvio padrão é:

$$\text{DP ou s} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}}$$

Professor! A fim de consolidar a interação entre os conceitos subsunçores e o conteúdo de desvio padrão e ainda promover a assimilação do assunto, solicite aos estudantes que determinem o desvio padrão das notas de Carlos.

Cálculo do quadrado dos desvios das notas de Carlos para determinar o desvio padrão.

| Disciplina | Carlos | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| Matemática | 7,5 | $\lvert 7,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ | $(1,0)^2 = 1,00$ |
| Física | 7,0 | $\lvert 7,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| Química | 7,0 | $\lvert 7,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| Biologia | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| Português | 8,0 | $\lvert 8,0 - 8,5 \rvert = 0,5$ | $(0,5)^2 = 0,25$ |
| História | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| Geografia | 10,0 | $\lvert 10,0 - 8,5 \rvert = 1,5$ | $(1,5)^2 = 2,25$ |
| Inglês | 9,5 | $\lvert 9,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ | $(1,0)^2 = 1,00$ |
| Redação | 8,5 | $\lvert 8,5 - 8,5 \rvert = 0,0$ | $(0,0)^2 = 0,00$ |
| Filosofia | 7,5 | $\lvert 7,5 - 8,5 \rvert = 1,0$ | $(1,0)^2 = 1,00$ |
| $\bar{x}$ | **8,5** | **11,0** | **14,50** |

O desvio padrão das notas de Carlos será: $s = \sqrt{\dfrac{14,50}{10}} = 1,20 \text{ nota}$

Pode-se concluir que o desempenho de Marta é mais regular que o de Carlos, pois o desvio padrão das suas notas foi menor que o de Carlos.

Muito bem, muito bem!
Já avançamos! Além de determinar a média aritmética, moda e mediana, sabemos também encontrar o desvio médio e o desvio padrão para DADOS EM SÉRIE.

Como fechamento desta etapa e, na busca por identificar se os estudantes aprenderam significativamente os conceitos abordados, sugere-se que seja solicitado aos aprendizes que respondam a uma nova situação contida no Quadro 8.

Quadro 8: Atividade para identificar indícios da Aprendizagem Significativa dos conceitos abordados na segunda etapa

Os dados a seguir representam as exportações de determinado páis (em bilhões de dólares) para 10 países em um ano recente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Argentina | 130,3 | Itália | 234,2 |
| Cingapura | 61,3 | Bélgica | 23,0 |
| Chile | 41,1 | China | 65,2 |
| Austrália | 19,8 | Malásia | 12,6 |
| Brasila | 24,4 | Arábia Saudita | 7,8 |

a) Este grupo de países será incluído no rol de países com maior exportação se sua média aritmética for maior que a mediana e se os valores de exportação forem modal. Esse grupo entrará no rol de países com maior exportação?

b) Para ter maior credibilidade, o grau de variação deste conjunto de valores de exportação deve ser inferior à média aritmética dos valores. Esse grupo terá credibilidade?

Fonte: Fictícia

Professor!
Se preferir pode propor outra situação problema. Porém, tome cuidado para que esta apresente elementos capazes de fazer com que o estudante consiga aplicar os conteúdos estudados a outros contextos.

Como exercícios de fixação, você poderá utilizar a coleta de dados realizada pelos estudantes em aula sobre a idade dos colegas (Quadro1). Lembre: OS DADOS EM SÉRIE!

### 3.3. Dados Agrupados

O objetivo desta etapa é tratar a informação apresentada para dados agrupados e estabelecer a compreensão sobre a determinação das medidas de tendência central, média aritmética, moda e mediana, e também desvio médio e desvio padrão. Nesse sentido, sugere-se que a etapa seja desenvolvida em seis horas-aula.

Inicialmente, para verificar os conhecimentos subsunçores dos estudantes, recomenda-se que os mesmos sejam divididos em duplas, de modo aleatório, e o professor entregue para cada dupla o exercício do Quadro 9.

Quadro 9: Exercício para a identificação dos conceitos subsunçores relativos à média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão para dados agrupados

A distribuição dos salários de uma Empresa W, do Município X, em junho de 2018 é dada na seguinte tabela:

| Salários em R$ | Número de Funcionários |
|---|---|
| 1 000,00 | 5 |
| 1 200,00 | 10 |
| 2 000,00 | 11 |
| 5 000,00 | 6 |
| 10 500,00 | 3 |
| Total | 36 |

Com base nas informações da tabela, determine a média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão dos salários dos funcionários.

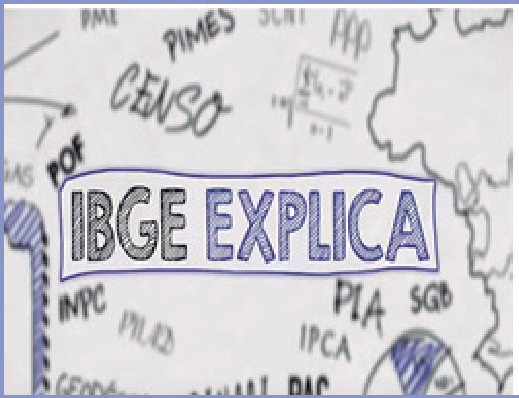
Fonte: Elaborado pelos autores

Este exercício deve ser resolvido pelas duplas de estudantes e, em seguida, entregue ao professor para que seja analisado na tentativa de evidenciar os conceitos subsunçores dos aprendizes.

Pretendendo constituir uma ligação entre os conceitos evidenciados no exercício anterior e os assuntos que serão abordados na etapa, deve-se utilizar o vídeo intitulado "IBGE explica" como um organizador prévio. O vídeo se encontra no endereço https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOIIMBk e tem duração de 5 minutos e 38 segundos.

O vídeo relata o conceito e como se determinam alguns índices estatísticos, servindo de ponte entre os conceitos subsunçores e os conceitos que serão trabalhados nesta etapa.

Vídeo:




A partir da visualização do mesmo, o professor retoma a pesquisa realizada na primeira etapa sobre a idade dos estudantes, uma vez que os dados desta tabela estão agrupados.

Professor!
Os dados coletados pelos estudantes sobre a idade dos colegas.

Para promover a diferenciação progressiva, o professor deve, inicialmente, estabelecer um espaço para a discussão de como os estudantes imaginam que esses valores possam ser representados. No decorrer da discussão, sugere-se que o professor reforce que cada idade corresponde a um estudante e que esses valores podem ser identificados por $x_i$ ,visto que, neste caso, **i** assume valor de 1 até 30, pois no exemplo são 30 estudantes, número que será representado por **n**. Salienta-se, ainda, a necessidade de o professor evidencie que, para dar um tratamento melhor à informação deve-se ordenar que os valores em tabelas com os dados agrupados, ou seja, deve-se agrupar pelo número de vezes que cada valor $x_i$, está se repetindo. Isso será representado pela frequência absoluta, $f_i$ . Assim, solicita-se que os estudantes construam tabelas como a Tabela 1.

Tabela 1: Idade (anos) dos estudantes Turma X, Escola NNNN, março/2018
Passo Fundo, RS

| Idade | Estudantes |
|---|---|
| 14 | 3 |
| 15 | 6 |
| 16 | 8 |
| 17 | 6 |
| 18 | 5 |
| 19 | 2 |

Fonte: Estudantes Turma X

$x_i$ – as idades

$f_i$ – quantidade vezes que cada valor se repete.

Após a compreensão de como agrupar os valores, passa-se ao estudo de medidas de tendência central. Para tal, o professor deve estabelecer um diálogo com os estudantes acerca de como se determina a média aritmética de dados agrupados. A partir dos comentários efetuados no decorrer da conversa, o professor deve construir com os estudantes a concepção de que média aritmética é definida através da soma ( $\sum$ ) do produto de cada valor pela quantidade de vezes que ele se repete, divido pela quantidade total de valores. Como se sabe que os valores são representados por $f_i$, a quantidade de repetições por $x_i$ e a quantidade total por **n**, deve-se construir com os estudantes a generalização desse raciocínio através da equação:

$$\overline{X} = \frac{\sum\left(x_i . f_i\right)}{n}$$

A partir da compreensão anterior, a discussão deve ser ampliada e o professor precisa motivar os estudantes a determinar a média das idades da turma como forma de promover a reconciliação integradora dos assuntos abordados até o momento. Tendo em vista que as idades já estão coletadas, espera-se que os estudantes percebam que para tal é necessário apenas somar o produto das idades pelo número de vezes que cada uma aparece e dividir por trinta.

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos subsunçores do estudante e o conteúdo de média aritmética, deve-se solicitar que eles determinem a média aritmética dos valores da Tabela 1, conforme disposto abaixo,

Cálculo da média aritmética para dados agrupados.

| **Idade -** $x_i$ | **Estudantes -** $f_i$. | $x_i.f_i$ |
|---|---|---|
| 14 | 3 | 14 x3= 42 |
| 15 | 6 | 15x6= 90 |
| 16 | 8 | 16x8= 128 |
| 17 | 6 | 17x6= 102 |
| 18 | 5 | 18x5= 90 |
| 19 | 2 | 19x2= 38 |
| **Σ** | **30** | **490** |

$$\overline{X} = \frac{490}{30} = 16{,}33 \text{ anos}$$

Com a média aritmética de dados agrupados determinada, se estabelece um diálogo para que os participantes compreendam o significado do resultado.

Professor, lembre-se que os dados são os mesmos da etapa anterior, porém estão agrupados, logo chegam ao mesmo resultado da média aritmética.

Uma vez compreendido o conceito de média aritmética, passa-se ao conceito de moda para dados agrupados. Como primeira atividade desta parte, e objetivando promover a diferenciação progressiva, o professor deve apresentar uma sequência de números agrupados e indagar aos estudantes sobre o número que mais vezes se repete na sequência. As respostas devem levar os estudantes à compreensão de que moda trata dos valores quanto ao número de repetições. Isso se evidencia pelo maior valor na frequência absoluta. Isto é, se o maior valor de $f_i$ aparecer mais de uma vez, tem-se mais de uma moda.

Nesse sentido, a partir dos dados apresentados anteriormente na Tabela 1, o professor deve solicitar aos estudantes que determinem a moda destes dados.

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos subsunçores do estudante e o conteúdo de moda, deve-se solicitar que eles determinem a moda dos valores da Tabela 1.

| **Idade -** $x_i$ | **Estudantes -** $f_i$. |
|---|---|
| 14 | 3 |
| 15 | 6 |
| 16 | 8 |
| 17 | 6 |
| 18 | 5 |
| 19 | 2 |
| **Σ** | **30** |

$M_o = 16$ anos

Logo, neste grupo de 30 estudantes a idade que mais aparece é 16 anos.

A fim de estabelecer a diferenciação progressiva dos assuntos relacionados com as medidas de tendência central passa-se a estudar o conceito de mediana. Para estabelecer a interação entre os conceitos subsunçores e conteúdos destinados para esta parte, o professor pode perguntar aos estudantes qual número divide a tabela em duas partes iguais. Ainda, deve-se estabelecer um diálogo no qual o professor indague aos estudantes qual o número que divide a tabela em duas partes iguais. A partir das respostas dos estudantes será construída a compreensão de que para se determinar a mediana deve-se dividir o **n** por dois para se achar a metade da tabela e, consequentemente, o valor que ocupa essa posição. Para isso, deve-se encontrar uma nova variável chamada de frequência acumulada $\mathbf{F_i}$ , que é obtida acumulando os valores da frequência absoluta $f_i$ .

Se o resultado da divisão for um número inteiro, a mediana é a média da posição resultante com a sua subsequente, e se for um número não inteiro é a posição seguinte.

Exemplo:

| $x_i$ | $f_i.$ | $F_i.$ |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 6 | 10 |
| 7 | 2 | 12 |
| **Σ** | **12** | |

$$M_e = \frac{n}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$M_e = \frac{6^a + 7^a}{2}$$

$$M_e = \frac{5+5}{2}$$

$$M_e = 5$$

| $x_i$ | $f_i.$ | $F_i.$ |
|---|---|---|
| 15 | 3 | 3 |
| 18 | 12 | 15 |
| 25 | 2 | 17 |
| **Σ** | **17** | |

$$M_e = \frac{n}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

$$M_e = 8{,}5 = 9^a$$

$$M_e = 18$$

Para tal, o professor deve retomar novamente o quadro anterior e determinar a mediana dos valores nele contidos.

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante, o conteúdo de mediana e, assim, promover a assimilação dos conceitos, deve-se solicitar que eles determinem a mediana dos valores da Tabela 1, conforme o exposto abaixo.

Frequência aculuIada para determinar a mediana.

| **Idade - $x_i$** | **Estudantes - $f_i$.** | **$F_i$.** |
|---|---|---|
| 14 | 3 | 3 |
| 15 | 6 | 9 |
| 16 | 8 | 17 |
| 17 | 6 | 23 |
| 18 | 5 | 28 |
| 19 | 2 | 30 |
| **Σ** | **30** | |

$$M_e = \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15^{a}$$

$$M_e = \frac{15^{a}+16^{a}}{2} = \frac{16+16}{2} = 16 \text{ anos}$$

Logo, neste grupo de 30 estudantes, a idade que divide a tabela em duas partes iguais é 16 anos.

Muito bem!
Já sabemos determinar as MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL, média aritmética, moda e mediana, para DADOS AGRUPADOS.

Dando sequência aos objetivos propostos, inicia-se, a partir deste ponto, o estudo relacionado ao desvio médio e ao desvio padrão.

Desse modo, e com o intuito de proporcionar a diferenciação progressiva, o professor deve apresentar uma nova situação que contém dados fictícios sobre a produção em quilogramas de 50 produtos. Esses dados fictícios podem ser semelhantes aos contidos no quadro a seguir

Quadro 10: Produção em quilogramas de 50 produtos

| Produção(kg) | Produtos |
|---|---|
| 10,0 | 8 |
| 12,5 | 9 |
| 13,6 | 8 |
| 15,0 | 4 |
| 17,0 | 5 |
| 18,5 | 4 |
| 19,7 | 3 |
| 20,5 | 5 |
| 21,0 | 2 |
| 22,8 | 2 |

Fonte: Elaborado pelos autores

Após os estudantes terem visualizado a tabela e compreendido a nova situação, o professor deve solicitar que eles calculem a média da produção.

Lembre-se que para determinarmos a média devemos somar o produto de cada valor ( $x_i$ ) pela quantidade de vezes que ele se repete ( $f_i$ ) dividido pela quantidade total de valores (n).

Com a média obtida, sugere-se que a mesma seja inserida na última linha da tabela, como no Quadro 11.

Quadro 11: Produção e média aritmética em quilogramas de 50 produtos

| Produção(kg) | Produtos |
|---|---|
| 10,0 | 8 |
| 12,5 | 9 |
| 13,6 | 8 |
| 15,0 | 4 |
| 17,0 | 5 |
| 18,5 | 4 |
| 19,7 | 3 |
| 20,5 | 5 |
| 21,0 | 2 |
| 22,8 | 2 |
| $\overline{X}$ | **15,39** |

Fonte: Elaborado pelos autores

Ainda, no diálogo estabelecido, o professor precisará discutir com os estudantes a diferença existente entre cada valor da produção com relação à média, estabelecendo, desta forma, a oportunidade da ocorrência da reconciliação integradora dos conceitos de desvios, como demonstrado no Quadro 12.

Com isso, estaremos introduzindo o conceito de desvio médio e desvio padrão.

Tem-se aqui cada nota $X_i$ menos o valor da média $\overline{X}$ coloca-se em valor absoluto para que o resultado não seja negativo e para que a soma dos desvios não seja zero. Isto vai nos dar o DESVIO, que é o quanto cada valor de produção oscilou em relação ao valor da média.

Esta coluna representa cada desvio multiplicado pelas vezes que ele se repete.

Quadro 12: Cálculo do desvio médio para a produção

| Produção(kg) - $x_i$ | Produtos - $f_i$ | $\|X_i - \overline{X}\|$ | $f_i.\|X_i - \overline{X}\|$ |
|---|---|---|---|
| 10,0 | 8 | $\|10,0 - 15,39\| = 5,39$ | 8 x 5,39 = 43,12 |
| 12,5 | 9 | $\|12,5 - 15,39\| = 2,89$ | 9 x 2,89 = 26,01 |
| 13,6 | 8 | $\|13,6 - 15,39\| = 1,79$ | 8 x 1,79 = 14,32 |
| 15,0 | 4 | $\|15,0 - 15,39\| = 0,39$ | 4 x 0,39 = 1,56 |
| 17,0 | 5 | $\|17,0 - 15,39\| = 1,61$ | 5 x 1,61 = 8,05 |
| 18,5 | 4 | $\|18,5 - 15,39\| = 3,11$ | 4 x 3,11 = 12,44 |
| 19,7 | 3 | $\|19,7 - 15,39\| = 4,31$ | 3 x 4,31 = 12,93 |
| 20,5 | 5 | $\|20,5 - 15,39\| = 5,11$ | 5 x 5,11 = 25,55 |
| 21,0 | 2 | $\|21,0 - 15,39\| = 5,61$ | 2 x 5,61 = 11,22 |
| 22,8 | 2 | $\|22,8 - 15,39\| = 7,41$ | 2 x 7,41 = 14,82 |
| **Σ** <br> $\overline{X}$ **= 15,39** | **50** | | **170,02** |

Fonte: Elaborado pelos autores

$$\Sigma\left[f_i.\left|X_i - \overline{X}\right|\right] = 170,02$$

Os resultados apresentados no Quadro 12 necessitam ser construídos juntamente com os estudantes. Isto é, o professor deve mediar um diálogo no qual se evidencie que a soma do produto dos desvios pelas vezes que cada um se repete foi 170,02, e que se for efetuada a divisão pela quantidade total de produtos obtém-se o desvio médio. Logo, o desvio médio para os valores de produção é $\frac{170{,}02}{50} = 3{,}40$ kg. Por fim, o professor deve auxiliar os estudantes a concluir que a generalização do desvio médio é:

$$D_M = \frac{\sum\left[f_i . \left|X_i - \overline{X}\right|\right]}{n}$$

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante e o conteúdo de desvio médio, deve-se solicitar que eles determinem o desvio médio dos valores do Quadro 2, conforme quadro abaixo:

Cálculo do desvio médio para as notas dos estudantes.

| **Idade** $x_i$ | **Estudantes** $f_i$. | $\left\|X_i - \overline{X}\right\|$ | $f_i . \left\|X_i - \overline{X}\right\|$ |
|---|---|---|---|
| 14 | 3 | $\|14 - 16{,}33\| = 2{,}33$ | 3 x 2,33 = 6,99 |
| 15 | 6 | $\|15 - 16{,}33\| = 1{,}33$ | 6 x 1,33 = 7,98 |
| 16 | 8 | $\|16 - 16{,}33\| = 0{,}33$ | 8 x 0,33 = 2,64 |
| 17 | 6 | $\|17 - 16{,}33\| = 0{,}67$ | 6 x 0,67 = 4,02 |
| 18 | 5 | $\|18 - 16{,}33\| = 1{,}67$ | 5 x 1,67 = 8,35 |
| 19 | 2 | $\|19 - 16{,}33\| = 2{,}67$ | 2 x 2,67 = 5,34 |
| **Σ** | **30** | | **35,32** |

$\overline{X} = 16{,}33$ anos  Logo, neste grupo de 30 estudantes o desvio médio é

$D_M = \frac{35{,}32}{30} = 1{,}18$ nota

Ainda pertencendo a esta etapa, temos o desvio padrão. Para levar os estudantes à compreensão deste conceito, o professor deve retomar os dados contidos no Quadro 13 e determinar o desvio padrão. Para tal e para que os valores não fiquem negativos, deve-se elevar ao quadrado os valores dos desvios de cada valor da produção. A diferenciação progressiva será estabelecida a partir da discussão de que o desvio padrão é um parâmetro muito usado que indica o grau de variação de um conjunto de elementos (Quadro 13).

Devemos elevar o valor do desvio ao quadrado. Como será elevado ao quadrado trocamos o módulo por parênteses.

Nesta coluna, multiplicamos o desvio ao quadrado pelo número de produtos $f_i$.

Quadro 13: Cálculo do desvio padrão para a produção

| Produção(kg) $x_i$ | Produtos $f_i$ | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i.(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 10,0 | 8 | $\lvert 10,0 - 15,39 \rvert = 5,39$ | $(5,39)^2 = 29,05$ | 8 x 29,05 = 232,40 |
| 12,5 | 9 | $\lvert 12,5 - 15,39 \rvert = 2,89$ | $(2,89)^2 = 8,35$ | 9 x 8,35 = 75,15 |
| 13,6 | 8 | $\lvert 13,6 - 15,39 \rvert = 1,79$ | $(1,79)^2 = 3,20$ | 8 x 3,20 = 25,60 |
| 15,0 | 4 | $\lvert 15,0 - 15,39 \rvert = 0,39$ | $(0,39)^2 = 0,15$ | 4 x 0,15 = 0,60 |
| 17,0 | 5 | $\lvert 17,0 - 15,39 \rvert = 1,61$ | $(1,61)^2 = 2,59$ | 5 x 2,59 = 12,95 |
| 18,5 | 4 | $\lvert 18,5 - 15,39 \rvert = 3,11$ | $(3,11)^2 = 9,67$ | 4 x 9,67 = 38,68 |
| 19,7 | 3 | $\lvert 19,7 - 15,39 \rvert = 4,31$ | $(4,31)^2 = 18,58$ | 3 x 18,58 = 55,74 |
| 20,5 | 5 | $\lvert 20,5 - 15,39 \rvert = 5,11$ | $(5,11)^2 = 26,11$ | 5 x 26,11 = 130,55 |
| 21,0 | 2 | $\lvert 21,0 - 15,39 \rvert = 5,61$ | $(5,61)^2 = 31,47$ | 2 x 31,47 = 62,94 |
| 22,8 | 2 | $\lvert 22,8 - 15,39 \rvert = 7,41$ | $(7,41)^2 = 54,91$ | 2 x 54,91 = 109,82 |
| **Σ** | **50** | | | **744,43** |
| $\bar{x} = \mathbf{15,39}$ | | | | |

Fonte: Elaborado pelos autores

$$\Sigma\left[f_i.(x_i - \bar{x})^2\right] = 744,43$$

Os resultados apresentados no quadro acima devem ser construídos juntamente com os estudantes. Ou seja, o professor deve mediar um diálogo em que se evidencie que a soma do produto dos quadrados dos desvios pelo número de produtos foi 744,43, e que ao efetuar a raiz quadrada tem-se o desvio padrão.

O desvio padrão da produção é

$$\sqrt{\frac{744{,}43}{50}} = 3{,}86 \text{ Kg}$$

Por fim, o professor deve auxiliar os estudantes a concluir que a generalização do desvio padrão é:

$$\text{DP ou s} = \sqrt{\frac{\Sigma\left[f_i . \left(X_i - \overline{X}\right)^2\right]}{n}}$$

Professor! Para fortalecer a interação entre os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do estudante e o conteúdo de desvio padrão, deve-se solicitar que eles determinem o desvio padrão dos valores do quadro que segue.

Cálculo do desvio médio para a idade dos estudantes.

| **Idade** $x_i$ | **Estudantes** $f_i$. | $\lvert X_i - \overline{X} \rvert$ | $(X_i - \overline{X})^2$ | $f_i.(X_i - \overline{X})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 3 | $\lvert 14 - 16{,}33 \rvert = 2{,}33$ | $2{,}33^2 = 5{,}43$ | $3 \times 5{,}43 = 16{,}29$ |
| 15 | 6 | $\lvert 15 - 16{,}33 \rvert = 1{,}33$ | $1{,}33^2 = 1{,}77$ | $6 \times 1{,}77 = 10{,}62$ |
| 16 | 8 | $\lvert 16 - 16{,}33 \rvert = 0{,}33$ | $0{,}33^2 = 0{,}11$ | $8 \times 0{,}11 = 0{,}88$ |
| 17 | 6 | $\lvert 17 - 16{,}33 \rvert = 0{,}67$ | $0{,}67^2 = 0{,}45$ | $6 \times 0{,}45 = 2{,}70$ |
| 18 | 5 | $\lvert 18 - 16{,}33 \rvert = 1{,}67$ | $1{,}67^2 = 2{,}79$ | $5 \times 2{,}79 = 13{,}95$ |
| 19 | 2 | $\lvert 19 - 16{,}33 \rvert = 2{,}67$ | $2{,}67^2 = 7{,}13$ | $2 \times 7{,}13 = 14{,}26$ |
| **Σ** | **30** | | | **58,70** |

$\overline{X} = 16{,}33$ anos

Logo, neste grupo de 30 estudantes o desvio padrão das idades é

$$s = \sqrt{\frac{58{,}70}{30}} = 1{,}40 \text{ anos}$$

Muito bem, muito bem!
Já avançamos! Além de determinar a média aritmética, moda e mediana, sabemos também encontrar, desvio médio e desvio padrão para DADOS AGRUPADOS.

Como fechamento desta etapa, e com o intuito de verificar se os estudantes aprenderam significativamente os conceitos abordados até aqui, sugere-se que seja solicitado que os estudantes respondam a uma nova situação contida no Quadro 14.

Quadro 14: Atividade para identificar indícios da Aprendizagem Significativa dos conceitos abordados na terceira etapa

A ausência de controle na fabricação podem também resultar em perdas de energia através das paredes da geladeira. Essas perdas, em função da espessura das paredes são apresentadas:

| Espessura das paredes (cm) | Perda térmica mensal (kWh) |
|---|---|
| 2 | 55 |
| 4 | 25 |
| 6 | 35 |
| 10 | 10 |

a) Para que aconteça uma perda térmica mensal menor, em caráter experimental, estão classificando a espessura das paredes nessas condições: $\overline{X} - D_m + s$.
Este grupo atenderia as condições?
b) Neste grupo, a espessura que se concentra a maior perda térmica é o mesmo valor onde se divide os dados pela metade. A afirmação é verdadeira? Justifique.

Fonte: Fictícia

Professor! Se preferir pode propor outra situação problema. Porém, tome cuidado para que esta apresente elementos capazes de fazer com que o estudante consiga aplicar os conteúdos estudados a outros contextos.

**4. Situações problema**

Neste item é apresentado um conjunto de dez situações problema[1] dos conteúdos abordados no decorrer da sequência didática. Todas as situações buscam oferecer um novo contexto para aplicação dos conceitos desenvolvidos nas etapas.

Professor!
Utilize as situações problema propostas para promover a assimilação dos conceitos das etapas.

Situação problema relacionada à média aritmética, moda e mediana para dados em SÉRIE.

1. A tabela abaixo contém as áreas construídas, medidas em metros quadrados ($m^2$), de vinte residências de uma certa região são:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 402 | 302 | 402 | 390 |
| 280 | 290 | 380 | 300 |
| 330 | 280 | 250 | 283 |
| 402 | 300 | 283 | 250 |
| 385 | 304 | 402 | 280 |

a) A média de área construída durante muito tempo nesta região foi de 345 $m^2$. Este grupo de moradores está nesta média ou determinaram uma nova média de área construída para esta região?
b) Para analisar o perfil deste novo grupo de moradias, podemos verificar qual é a área mais construída e a área que separa em dois grupos iguais esses valores de área? Se sim, quais são essas características?

[1]Todos os dados das situações problema foram extraídos dos seguintes autores: Giovanni; Bonjorno; Giovanni Junior (2002), Levin (2002), Milone (2006), Paiva (1999), Silva (2006), Triola (1999).

Situação problema relacionada a desvio médio e desvio padrão para dados em SÉRIE.

2. As idades dos jogadores de um time de basquete são 18, 23, 19, 20, e 21 anos. Para que o time participe de determinado campeonato as idades dos jogadores devem pertencer a este intervalo Dm < 1,5 < s. O time de basquete participará do campeonato?

Situação problema relacionada a desvio padrão para dados AGRUPADOS.

3. Dois atiradores x e y obtiveram numa competição de vinte tiros, num alvo em que 50 pontos é exatamente no centro do alvo, 30 pontos na faixa anterior ao centro, 20 pontos na anterior e 10 pontos na faixa mais afastada do centro do alvo e zero se for fora do alvo, os seguintes resultados:

Escores dos atiradores X e Y, Campeonato Z, março/2018

| **Atirador** | **Resultado** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **50** | **30** | **20** | **10** | **0** |
| x | 4 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| y | 6 | 3 | 5 | 3 | 3 |

Fonte: Fictícia

Qual dos atiradores têm o desempenho mais regular?

Situação problema relacionada à média aritmética para dados em SÉRIE.

4. (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

Situação problema relacionada à média aritmética, moda, mediana, desvio médio e desvio padrão para dados em AGRUPADOS.

5. Um banco selecionou ao acaso 25 contas de pessoas físicas em uma agência, em determinado dia, obtendo os seguintes saldos em dólares:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 52 500,00 | 18 300,00 | 35 700,00 | 43 800,00 | 22 150,00 |
| 6 830,00 | 3 250,00 | 17 603,00 | 25 500,00 | 28 000,00 |
| 16 323,00 | 42 130,00 | 27 606,00 | 18 300,00 | 12 521,00 |
| 28 000,00 | 31 452,00 | 39 610,00 | 22 500,00 | 7 380,00 |
| 28 000,00 | 22 150,00 | 14 751,00 | 39 512,00 | 17 603,00 |

Essa seleção tem por objetivo proporcionar ao cliente uma redução na taxa de juro em seu cheque especial, mas para isso com os valores agrupados, o grupo de valores deve obedecer a seguinte condição como valor do saldo: $\overline{X} - M_O + M_e - (D_M - s)$. Algum cliente será beneficiado? Se sim, quantos?

## Situação problema relacionada à média aritmética, moda e mediana para dados em AGRUPADOS.

6. Os escores das atitudes em relação a pessoas mais velhas de 30 estudantes foram arranjados na distribuição de frequência simples a seguir (escores mais altos indicam atitudes mais favoráveis em relação a pessoas mais velhas).

Escores das atitudes em relação a pessoas mais velhas
Escola Z, Passo Fundo, maio/2018

| Valor do escore da atitude | Frequência |
|---|---|
| 7 | 3 |
| 6 | 4 |
| 5 | 6 |
| 4 | 7 |
| 3 | 5 |
| 2 | 4 |
| 1 | 1 |
| **Σ** | **30** |

Fonte: Fictícia

a) Estipulou-se que, para serem consideradas atitudes aceitáveis em relação ao tratamento com pessoas mais velhas, a média dos escores deve ser superior a cinco. Este grupo de 30 estudantes apresenta atitudes aceitáveis em relação às pessoas mais velhas?

b) O escore que representa a maior frequência entre os estudantes está abaixo da média?

c) O valor do escore da atitude que divide a distribuição em duas partes iguais é menor que a moda?

Situação problema relacionada à média aritmética e desvio padrão para dados AGRUPADOS.

7. Um caminhão vazio tem massa de 3000 kg. Ele será carregado com 480 caixas de 10kg cada, 350 caixas de 8 kg cada, 500 caixas de 4 kg cada e 800 caixas de 5 kg cada. O motorista do caminhão tem massa de 80 kg e a lona de cobertura da carga possui 5 kg. Se este caminhão tem que passar por uma balança que só permite passagens a caminhão com, no máximo, a soma de cinco vezes a massa do caminhão com cinco vezes a média da carga e com duas vezes o valor do desvio padrão da
V carga. Este caminhão passará na

Situação problema relacionada à média aritmética e desvio padrão para dados em SÉRIE.

8. Um fabricante de autopeças está próximo de fechar um grande contrato com uma montadora. O ponto-chave é a garantia da qualidade de seus produtos, especialmente o diâmetro (em mm) dos eixos produzidos. A montadora selecionou uma amostra aleatóriade seis eixos para testar as especificações requeridas. Os valores encontrados estão descritos a seguir:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Diâmetro (mm): | 93,9 | 94,4 | 93,7 | 93,5 | 94,8 | 9 3,7 |

Para que o contrato seja fechado a condição é de que o valor da média aritmética mais o valor do desvio padrão não excedam a 95 mm. O fabricante de autopeças fechará o contrato?

Situação problema relacionada à moda e mediana para dados em SÉRIE.

9. Os valores abaixo referem-se ao tempo de vida útil (meses) de uma amostra aleatória de treze ferramentas de corte em um processo industrial

Vida útil (meses): 84 63 72 96 72 105 110

Para que determinado experimento seja considerado satisfatório, o tempo de vida útil deve apresentar a moda igual à mediana. O experimento será considerado satisfatório?

Situação problema relacionada à média aritmética e desvio padrão e moda para dados em AGRUPADOS.

10. Em uma pesquisa para verificar o consumo de refrigerantes foi levantado o consumo semanal (litros) por pessoa (per capita), aproximado, em janeiro de 2018, em uma cidade do litoral, obtendo

Consumo semanal (litros) per capita– Janeiro/2018

| Consumo semanal (litros) | Número de pessoas |
|---|---|
| 0,5 | 10 |
| 1,0 | 25 |
| 1,5 | 9 |
| 2,0 | 7 |
| 2,5 | 6 |

Fonte: Fictícia

Para que o consumo de refrigerante seja considerado abusivo, o experimento considera que o consumo de $\overline{X}+s-M_O$ deva ser superior ao valor da mediana. O consumo nesta cidade foi abusivo?

Confira aqui suas respostas:

1. a) Este grupo de moradores determinaram uma nova média de área construída de 324,75 m$^2$.
b) Sim podemos, a área mais construída é de 402 m$^2$ e a área central é 301 m$^2$.

2. Sim, o time participará do campeonato, pois 1,44 < 1,5 < 1,72.

3. O atirador que tem o desempenho mais regular é o atirador A.

4. São 40 homens e 80 mulheres.

5. Não. ($\overline{X}-M_O+M_e-(D_M-s)$ = 21 624,77)

6. a) Não. ($\overline{X}$ = 4,23)
   b) Sim. (Mo = 4)
   c) Não. (Me = 4)

7. Não passará, pois a soma de cinco vezes o peso do caminhão com cinco vezes a média da carga e com duas vezes o valor do desvio padrão da carga é igual a 15 036,59 kg e o caminhão entrará na balança com 16 695 kg.

8. Sim, o fabricante de autopeças fechará o contrato, pois a média aritmética mais o valor do desvio padrão é igual a 94,45 mm.

9. O experimento não será considerado satisfatório, pois a Mo = 72 meses e a Me = 84 meses.

10. O consumo nesta cidade não foi abusivo, pois $\overline{X}+s-M_O$ = 0,88 e Me = 1.

## REFERÊNCIAS

BOLETIM Mensal da Secretaria Estatística Criminal de Alagoas. **AL registra 61,8 mortes a cada 100 mil habitantes em 2014.** Publicado em: 15 fev. 2015. Atualizado em: 18 fev. 2015. Disponível em: <http://g1.globo.com/al/alagoas/noticia/2015/02/al-registra-618-mortes-cada-100-mil-habitantes-em-2014-aponta-secretaria.html>. Acesso em: 14 mar. 2018.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR; José Ruy. **Matemática fundamental:** uma nova abordagem: ensino médio. São Paulo: FTD, 2002. v. único.

HISTÓRIA da Estatística. Publicado em: 18 ago. 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jCzMPL7Ub2k>. Acesso em: 14 mar. 2018. Vídeo: 5min e 38seg.

IBGE Explica INPC e IPCA. Publicado em: 08 abr. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOIIMBk>. Acesso em: 14 mar. 2018. Vídeo: 3min e 10seg.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. **Estatística aplicada.** Tradução Luciane Paulete Viana. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

_________. **Estatística aplicada.** Trad. e rev. técnica Cyro de Carvalho Patarra. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

LEVIN, Jacck; FOX, James Alan; FORDE David Rip. **Estatística para Ciências Humanas.** Trad. Jorge Ritter. Rev. técnica Fernanda Bonafini. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

MILONE, Giuseppe. **Estatística:** geral e aplicada. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

MOREIRA; MASINI, Elcie Fortes. Salzano. **Aprendizagem Significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1 ed. São Paulo, Editora Moderna, 1999.

SILVA, Ermes Medeiros da. et al. **Estatística para os cursos de Economia, Administração, Ciências Econômicas.** 3. ed. São Paulo, Editora Atlas, 2006. v. 1.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à estatística.** 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999.

## SOBRE OS AUTORES

**Rejane Padilha Quedi** - Professora da Universidade de Passo Fundo. Graduação em Matemática (LP) e Ciência da Computação (Bacharelado). Especialização em Educação Matemática e mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade de Passo Fundo.

**Luiz Marcelo Darroz** - Docente do Curso de Física (LP), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade de Passo Fundo. Doutor em Educação em Ciências na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Nossos colaboradores:

**Márcia Zanella Rheinheimer -** designer gráfico
**Tarsila Battistella -** revisão de texto