UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO-UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO – IE

EM BUSCA DOS LOGARITMOS NA COMPARAÇÃO ENTRE TERMOS DE DIFERENTES SEQUÊNCIAS

Guia Didático para Docentes

Daniela Mendes Vieira da Silva[1]
Dora Soraia Kindel[2]

Seropédica
2016

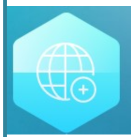
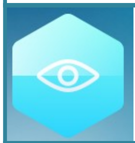
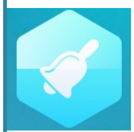
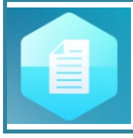
[1] Mestranda-PPGEDUCIMAT-UFRRJ.
[2] Docente-PPGREDUCIMAT-UFRRJ

APRESENTAÇÃO

O presente guia didático se constitui no produto resultante de uma dissertação de Mestrado Profissional[3] e visa compartilhar dividir com professores do ensino médio um conjunto de tarefas para a introdução do conceito de logaritmos assim como a fundamentação teórica que permitiu a construção do mesmo.

RELAÇÃO DE ÍCONES

Para facilitar o manuseio deste guia criamos ícones[4] que funcionam como indicadores de ações requisitadas durante o estudo do mesmo.

Indicadores de ações requisitadas durante o estudo	
	**SAIBA MAIS.** Apresenta informações adicionais sobre o tema abordado de forma a possibilitar a obtenção de novas informações ao que já é referenciado.
	**REVEJA.** Indica a necessidade do leitor rever conceitos ou procedimentos abordados anteriormente.
Indicadores de orientações do autor	
	**IMPORTANTE.** Aponta uma observação significativa. Pode ser encarado como um sinal de alerta que o orienta o leitor a prestar atenção à informação indicada. Os itens marcados como importantes estarão em negrito.
	**PROCEDIMENTO.** Indica um conjunto de ações (um passo a passo) a ser realizado em sala de aula.

[3]Dissertação de mestrado:Comparação de sequências: uma proposta para conceituar logaritmos e descobrir suas propriedades, Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática-Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, orientadora Dora Soraia Kindel, 2016.

[4]Ícones desenhados por IconsFlow (https://iconsflow.com/dashboard).

SUMÁRIO

UNIDADE 1:

INTRODUÇÃO

O tema em foco surge a partir das necessidades curriculares da instituição que abriga a pesquisa que originou este guia e na qual atuo como professora. Trata-se de uma escola técnica em telecomunicações em que há uma demanda do corpo técnico da escola por um trabalho bem fundamentado na formação do conceito de logaritmo, uma vez que todas as unidades de medidas utilizadas em telecomunicações são derivadas dos logaritmos nas bases binária, neperiana e decimal.

As áreas de análise e projetos de sistemas e medidas em telecomunicações requerem o uso intensivo do decibel[5]. Algumas das equações, tais como o teorema de Shanon, que limita a taxa máxima de um canal e atenuação em espaço livre são calculadas por logaritmos respectivamente binário e decimal. A própria teoria da informação, base das telecomunicações é definida por um logaritmo na base binária. O logaritmo está permeado em todas as disciplinas do curso técnico em telecomunicações[6]e, principalmente, nas disciplinas sistemas de telecomunicações, redes de fibra ótica, sistemas de satélite, infraestrutura. (NAVAS, 2015).

Para que a aprendizagem dos estudantes e não o conteúdo esteja em primeiro plano, uma vez que o estudo de logaritmos é uma necessidade do currículo técnico dos estudantes pesquisados buscamos o distanciamento do Ensino Tradicional Vigente - ETV a respeito do qual sabemos que:

> [...] no ensino tradicional vigente, aqui denominado ETV, o aluno se mantém numa situação de "fazer de conta" que está entendendo, para que o professor possa chegar mais rapidamente, sem digressões ou interrupções, à solução "oficial". O aluno, ao invés de procurar descobrir se estaria em condições de oferecer uma solução possível, concentra-se em "adivinhar" a que solução o professor pretende chegar ou qual resposta quer ouvir. Não há lugar para o significado, mas apenas para uma negociação mútua a respeito do que se supõe que deva ser entendido

[5] Definido a partir do logaritmo na base 10.
[6] Oferecido pela escola que abriga esta pesquisa.

(SILVA, 1998, p.1).

O ETV se enquadra no paradigma do exercício, ou seja, numa prática excessiva de tarefas cuja resposta é única e já sabida, em que se espera do aluno uma solução desta tarefa, inclusive, muitas vezes percorrendo até mesmo um caminho pré-determinado até ela. Esse paradigma se diferencia do cenário para investigação que se apresentou como uma opção para o rompimento com o mesmo, no qual os estudantes são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada.

Observamos que fazer a movimentação do paradigma do exercício em direção ao cenário para investigação se constituiu em um auxiliar para o enfraquecimento da autoridade da sala de aula nos moldes do ETV e a engajar os estudantes ativamente em seus processos de aprendizagem. Entendemos, portanto, que caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os estudantes em ação e reflexão. Postura desejada por nós neste trabalho (SKOVSMOSE, 2000).

OBJETIVO

Nosso objetivo com este guia didático é o de compartilhar com outros docentes os frutos de nossa pesquisa que discute uma introdução ao conceito de logaritmos por investigação através da escrita e da fala dos estudantes participantes. Pretendemos aqui apresentar aos aos professores um conjunto de tarefas para a introdução ao conceito de logaritmos como operações entre expoentes.

ESTRUTURA DO GUIA

Iniciamos este guia com a apresentação, objetivo e estrutura do trabalho na presente unidade.

Na segunda unidade apresentamos a fundamentação teórica da investigação em sala de conjunto de tarefas aliada aos cenários para investigação, pois é a partir destes referenciais que elaboramos o conjunto de tarefas que apresentaremos mais adiante.

A terceira unidade apresenta os logaritmos como operações entre expoentes o que se mostra fundamental para a compreensão da unidade 4 onde o conjunto de tarefas é apresentado detalhadamente neste guia.

A quarta unidade traz o conjunto de tarefas para a introdução ao conceito de logaritmos por investigação. Encerramos o guia com a bibliografia consultada para a confecção deste trabalho e no apêndice disponibilizamos o conjunto de tarefas na versão para ser impresso para o aluno.

UNIDADE 2:

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma sala de aula pode ser vista/pensada de várias formas. A organização de uma sala de aula pode ser arrumada em fila, círculo, grupos de 3 ou 4 estudantes e de outras formas mais. Assim como as propostas também podem variar. Ou seja, o professor pode apresentar questões do tipo exercícios dentro da tríade Definição-Exemplo-Exercícios, característica do ensino tradicional, pode introduzir o tema a partir de um vídeo debate sobre o tema, ou ainda em grupo com tarefas abertas (tarefas com uma gama de respostas possíveis ou mesmo sem respostas conhecidas em cuja vivência pode levar os estudantes a pesquisas não explicitadas no enunciado) ou fechadas (tarefas com resposta única e conhecida, normalmente tal resposta é disponibilizada o estudante em um gabarito ao final do livro/apostila/aula). Entretanto, diversas pesquisas (D'amore, 2007; Ponte 1995; Skovsmose 2000) tem questionado a eficácia da tríade Definição-exemplo, exercícios e tem trazido alternativas a esta proposta de ensino tão difundida em nossas salas de aula ainda hoje.

CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

Apresentamos aqui os cenários para investigação de Skovsmose e são os ambientes de aprendizagem e os cenários de investigação de Skovsmose (2000) em que o mesmo propõe que ações tomadas em sala para a produção de significado

Segue abaixo um quadro ilustrativo indicando os seis ambientes possíveis elencados por Skovsmose a partir da conjugação entre as mencionadas referências e paradigmas:

	Paradigma do exercício	**Cenário para Investigação**
Referência à Matemática pura	(1)	(2)
Referência à Semi realidade	(3)	(4)
Referência ao Mundo real	(5)	(6)

Quadro 1: Ambientes de Aprendizagem

Fonte: (SKOVSMOSE, 2000, p.8)

Os ambientes 1 e 2 estão inseridos dentro da matemática pura:

As tarefas no ambiente 1 são do tipo "resolva", "determine", ligue a coluna da esquerda à da direita". Questões do tipo "Calcule o valor de log100, Determine o valor de $\log_2 4$" ilustram esse cenário.

Já as tarefas no ambiente 2 são constituídas por questões abertas contextualizadas. O conjunto de tarefas que disponibilizamos no apêndice 1 deste guia ilustra este ambiente.

Apesar dos exercícios dos ambientes (1) e (2) estarem ligados à Matemática pura, é a forma com que se aborda e a maneira como se trabalha cada um é o que os diferencia.

Entendemos que o ambiente de aprendizagem (2), em que baseamos nosso trabalho, traz uma abordagem diferente para a abordagem da Matemática pura, propiciando ao aluno investigar sobre o assunto abordado uma vez que apresentamos um conjunto de situações problemas, sobre as quais os estudantes precisam comparar e identificar semelhanças e diferenças entre elas em busca de regularidades, de propriedades do conceito de logaritmos. Neste ambiente não existe resposta única e às vezes é possível que não exista resposta, a importância está no percurso e não no destino. Não desenvolveremos neste guia os cenários 3,4,5 e 6 nos limitando a registrar a sua existência pois tal desenvolvimento foge ao escopo deste guia.

INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA

A investigação Matemática facilita a construção do raciocínio matemático dos estudantes uma vez que se constitui em momentos variados que os levam a: levantar questões, formular, testar e justificar conjecturas e a avaliar seu raciocínio. Sendo esperado destes que construam reflexões, segundo Ponte (1995):

> **A realização de tarefas exploratórias na conjunto de tarefas de Matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência Matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos estudantes, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por estudantes de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (CUNHA & PONTE, 1995, p. 161).**

A investigação Matemática também se ocupa da resolução de problemas uma vez que segundo Ponte (2016) [7] ambas pertencem à mesma categoria de prática de ensino.

> **Na minha perspectiva, as tarefas mais vocacionadas para servir de base a investigações Matemáticas podem ser consideradas como "problemas". Existem passagens de vários livros de Polya, por exemplo, em "*Mathematical Discovery*", em que são apresentadas e discutidas tarefas de investigação. Por isso, penso que se pode considerar a investigação na sala de conjunto de tarefas como uma forma de trabalho que se enquadra na resolução de problemas (PONTE, 2016, manuscrito).**

O problema muito se diferencia do exercício uma vez que ele propicia o surgimento de reflexões na construção de conceitos matemáticos. Por problema entendemos que:

> Tem-se, por outro lado, um problema quando uma, ou mais, das regras ou um, ou mais dos procedimentos necessários ainda não estão na bagagem cognitiva do responsável por resolvê-lo; na ocasião, algumas dessas regras ou algum desses procedimentos podem inclusive estar em via de explicitação; às vezes, é a própria sucessão de operações necessárias para resolver o problema que demandará um ato criativo por parte de quem precisa resolvê-lo (D'AMORE, 2007, p. 286).

Quanto aos exercícios sabemos que os mesmos possuem respostas únicas e, portanto, podem não levar os estudantes a reflexões aprofundadas. O esquema abaixo explicita a diferença entre problema e exercício.

[7] Notas de palestra.

	Problema	**Exercício**
No ensino	□ Instrumento de aquisição de conhecimento	□ Instrumento para consolidar conhecimentos e habilidades
	□ Objeto de ensino	□ Instrumento para inferir conhecimentos e habilidades
Privilegia	□ Processos	□ Produtos
O professor	□ Escolhe os problemas	□ Escolhe os exercícios
	□ Segue os processos	□ Corrige e avalia os produtos
O sujeito tem um papel	□ Produtivo	□ Executivo

Quadro 2– Diferenças entre problemas e exercícios

(DAMORE e ZAN *apud* D'AMORE, 2007, p. 300)

Como nos interessamos pela aprendizagem como processo, fizemos a opção pelo uso de problemas para o conjunto de tarefas que apresentamos neste guia.

UNIDADE 3:

O QUE SÃO LOGARITMOS AFINAL?

Encontramos em uma crônica de Carlos Heitor Cony[8] uma tradução para o inconsciente coletivo que explicita a pouca familiaridade em abordar os logaritmos quando ele diz que,

> Minhas relações com as Matemáticas nunca foram boas – e exagero ao falar em Matemáticas, no plural e na maiúscula. Nem mesmo a elementar aritmética privou de muita intimidade com meu impenetrável cérebro. Por todos os chamados bancos escolares que lustrei em minhas andanças, sempre deixei a merecida fama de refratário aos números, às operações, às frações e às regras de três. Não cito os logaritmos porque seria um escárnio de minha parte mencionar tais entidades[...] (CONY, 2005, p 13-14).

e que exemplifica algumas reações de nossos estudantes ao tema.

Briggs e Napier, no início do século XVII, observaram que era possível operar com os expoentes de potências. Ou seja, transforma multiplicações e divisões de potências em adições e subtrações de expoentes para encontrar o resultado da potência. Esta observação se constituiu em uma revolução tecnológica uma vez que esta descoberta permitiu que os cálculos dos grandes números com os quais os astrônomos lidam permitindo avanços inquestionáveis para a ciência[9].

LOGARITMOS, EXPOENTES E PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

Iniciamos nossa caminhada analisando uma tabela que relaciona uma Progressão Aritmética a uma P.G. (quadro 4).

---

[8] Carlos Heitor Cony é um cronista e escritor brasileiro, ocupa a cadeira de número 3 da Academia Brasileira de Letras.

[9] Mais informações em (IEZZI, 2010; LIMA, 1980; PAIVA, 2009).

Coluna	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Termo daPA.	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Termo da P.G.	...	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	...

Quadro 4: Tabela P.A. e P.G. relacionadas

Observamos que, quando multiplicamos os termos da P.G.das colunas 6 e 7 por exemplo, obtemos como resultado o valor que fica na mesma coluna da soma dos termos da P.A. das referidas colunas e o mesmo vale para divisões entre termos da P.G.e subtrações do termo da P.A..

Então qual é a relação? Podemos ver que existe uma base de uma potência que elevada ao termo da P.A. é igual ao termo da P.G. da mesma coluna.

A partir da análise do quadro acima fazemos a seguinte generalização: A base 2 elevada ao termo da P.A. é igual ao termo da P.G., escrevendo tal afirmação em escritura algébrica: se nomearmos o termo da P.G. de "*a*" e o termo da P.A. de "*x*" temos $2^x = a$. Ora, esta é a equação exponencial a qual nos referimos no início da nossa busca pela compreensão dos logaritmos aqui proposta, e se testarmos outras tabelas[10] podemos ampliar essa generalização, substituindo o 2 para uma base qualquer que chamamos de *b*, encontrando a seguinte equação exponencial: $b^x = a$.

Mas e o logaritmo, como surge neste contexto? Logaritmo[11]é o nome que John Napier deu aos expoentes de uma potência, ou seja, logaritmo é um expoente (PAIVA, 2009). Vendo desta maneira alcançamos uma generalização do próprio logaritmo, ou seja, é possível reescrever a equação exponencial $\boldsymbol{b^x = a}$ de forma que o logaritmo se apresente (IEZZI, 2010).

[10] Desde que na mesma coluna coincidam os valores 0 para a P.A. e 1 para a P.G., isto tem um objetivo claro uma vez que qualquer número diferente de zero elevado a zero é igual a 1.
[11] O vocábulo *logarithmus* foi criado por Napier a partir das palavras gregas: logos, que significa "razão" ou "cálculo", e *"arithmós"*, que significa número, para maiores esclarecimentos vide Paiva (2009).

Reescrevendo $b^{x} = a$ em língua natural, temos: Uma base *b*, elevada a um logaritmo é igual a um número *a*.

Usando a notação de Napier, podemos escrever $b^{x} = a$ como $\log_{b} a = x$ que significa a mesma coisa, ou seja, que o expoente (logaritmo) de um número *a* em uma base *b* é igual a *x*

Assim: em $\log_{b} a$ o expoente leva o nome de logaritmo, o número *a* recebe o nome de logaritmando e o número *b* recebe o nome de base.

Por definição, $\log_{b} a$ tem algumas restrições que consistem na base b ser maior que zero e diferente de um e que o logaritmando seja maior que zero.

Visando explorar possíveis limitações apresentamos adiante alguns cenários:

Cenário 1: Base igual a um: Não existe vantagem em estabelecermos uma base igual a 1 pois seja qual for o expoente o logaritmando é sempre igual a 1, desta forma chegamos ao caso único $\log_{1} 1$ que não nos leva a lugar algum. Sendo este o motivo pelo qual a restrição para a base unitária.

Cenário 2: Base igual a zero. Para compreender esta base propomos o quadro 5:

P.G.	0^{-4}	0^{-3}	0^{-2}	0^{-1}	0^{0}	0^{1}	0^{2}	0^{3}	0^{4}
P.A.	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Quadro 5: Logaritmo de base zero

Observando as duas linhas vemos que para zero elevado a expoentes negativos, encontramos uma indefinição uma vez que a divisão por zero não existe. E $0^{-n} = (1/0)^{n}$.

Para o termo zero elevado a zero, temos uma indeterminação. Isto significa que não há resposta para esta operação.

Nos demais termos também identificamos problema pois $0^{n}, 0^{p}$ pode ser qualquer termo da P.G. para *n* e *p* estritamente positivos.

Cenário 3: Base negativa: não existe resposta para $\log_{-a} a$ pois além de existirem expoentes que transformem essa base $-a$ no logaritmando *a* em alguns casos, como por exemplo:

$\log_{-2} 4 = x$, ou seja, se x for igual a 2 a relação é válida pois $(-2)^2 = 4$ (o expoente par garante a correção do sinal do logaritmando). Entretanto, como em matemática basta um contraexemplo para invalidar uma relação vemos aqui que o mesmo não acontece para $\log_{-2} 8 = x$ pois $(-2)^3 = -8$ (expoentes ímpares conservam o sinal da base). Este contraexemplo $\log_{-2} 8 = x$ inviabiliza a possibilidade da existência de uma base menor que zero portanto.

Cenário 4: Logaritmando igual a zero: observe que não é possível resolver $\log_a 0$, uma vez que não existe número real que elevado a outro número real qualquer resulte em zero, a única possibilidade seria a própria base ser igual a zero mas isso nos leva a 0^0 que é uma indeterminação[12], inviabilizando a possibilidade da existência de um logaritmando nulo e também a própria base igual a zero. Um exemplo numérico para este cenário é $\log_0 2 = x$, daqui é possível observar que não existe resposta possível para esta situação uma vez que não existe nenhum expoente que transforme zero em 2.

Cenário 5: logaritmando negativo: observe que não existe resposta para $\log_a -a$ pois não existe um expoente que transforme essa base a no logaritmando $-a$, inviabilizando a possibilidade da existência deste. Um exemplo numérico seria $\log_2 -8 = x$, observe que não há nenhum expoente que transforme 2 em -8, nem mesmo o expoente -3 que o transformaria e 1/8, que de modo algum corresponde a -8.

Observamos aqui que os 5 cenários explicitam as restrições para $\log_b a$.

LOGARITMO E POTENCIAÇÃO[13]

Observe as sequências:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1/32	1/16	1/8	1/4	½	1	2	4	8	16	32	64	128

Quadro 6: Progressões relacionadas

12 Algo que não tem resposta em Matemática.

13 É importante revisar o tema potenciação para o bom aproveitamento deste item.

Podemos associar cada elemento da P.G. com um elemento correspondente do conjunto dos números inteiros (Z). Assim o termo 16 da P.G. de razão 2 está associado ao 4 conjunto Z.

Em outras palavras tomando o elemento zero do conjunto Z associado ao elemento 1 da P.G. temos que o lugar que 16 ocupa na sequência do 2 é 4.

Matematicamente podemos expressar esta associação de duas formas:

1) $2^4 = 16$, onde 4 é a posição que 16 ocupa em Z e 2 é a razão da P.G.
2) $\log_2 16 = 4$, ou seja, qual é o lugar que 16 ocupa na sequência do 2?

Assim, a partir daí é possível encontrar cada elemento associado a alguma operação entre expoente, por exemplo: $\log_2 8$, observamos a tabela é fácil ver que 8 ocupa o lugar 3 logo seu logaritmo é 3.

Se o 8 não estivesse na tabela eu poderia utilizar soma de expoentes(multiplicação de potências de bases iguais) para determinar seu logaritmo, ora, como 8 é igual à multiplicação de 2 por 4, por exemplo, basta somar seus expoentes para determinar o lugar do 8.

Reescrevendo 2 e 4 em forma de potências de base 2 temos: $2^1.2^2=2^{1+2}$, ou seja, utilizando a multiplicação de potências de mesma base podemos observar que o lugar que 8 ocupa na tabela é o 3.

Pudemos verificar o que acontece com $\log_2 8$ pois ele está grafado na tabela. O que acontece para números não grafados na tabela como o $\log_2 512$. 512 que não está visível na tabela 1, mas que a exemplo do $\log_2 8$, podemos escrever como produto de dois outros números: $512 = 8 . 64$ ou $512 =16 . 32$...

Como nem sempre é fácil sabermos quais são os fatores do número então podemos recorrer à tabela 1 utilizando o expoente da base a qual corresponde o número.

Fatorando 512 observamos que este é igual a dois elevado a 9. A partir daí podemos buscar quais expoentes na base dois somados resultam no expoente 9.

Utilizando a tabela encontramos, os expoentes 3 e 6 que somados dão 9 associados aos números 8 e 64 respectivamente.

Ora, como 8 .64= 512 podemos reescrever esta operação da seguinte forma: $2^3 . 2^6 = 2^9$. Ou seja, ao invés de fazermos a multiplicação de 8 por 64 basta que somemos seus expoentes utilizando a regra de multiplicação de bases iguais $2^3 . 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$.

Operando diretamente com os logaritmos (expoentes) podemos simplificar esta operação para 3 + 6 = 9.

Assim podemos reescrever $\log_2 512$ como sendo $\log_2 (8.64) = \log 28 + \log 264$, ou simplesmente usando a tabela 3 + 6 = 9.

Com base nestas observações elaboramos um conjunto de tarefas que possibilitassem aos estudantes descobrir estas relações e elaborar um texto relatando suas descobertas.

UNIDADE 4:

CONJUNTO DE TAREFAS

O conjunto de tarefas (quadro 7) resultante de nossa dissertação de mestrado que aqui apresentamosé composto de três momentos: 1) O primeiro dedicado a construir a motivação dos participantes em empreender uma investigação matemática, dele faz parte a tarefa 1, o segundo dedicado à matemática em si, dele fazem parte as tarefas 2, 3 e 4 e o terceiro dedicado à avaliação do conjunto de tarefas como um todo, dele faz parte a tarefa 5. A vivência do conjunto como um todo pode ser feita em 7 aulas. Para a aplicação do conjunto de tarefas propomos a divisão da turma em grupos de não mais do que 4 estudantes, pois grupos maiores facilitam a dispersão (KINDEL, 2013).

Tarefa	**Tarefa**	**Função**
1	Caixas misteriosas	Disparadora
2	Investigação de sequências	Investigação em uma perspectiva livre
3	Coordenação de sequências	Exploração orientada
4	Formalização da vivência	Sistematização em uma perspectiva diretiva
5	Avaliação	Avaliação das tarefas anteriores: Avaliação de percurso e de conteúdo

Quadro 7: Tarefas do conjunto e suas funções

O QUE HÁ NAS CAIXAS MISTERIOSAS?

O objetivo desta primeira tarefa é o de levar seus participantes a externar suas observações por meio da fala e da escrita, estimular suas inferências a partir do que individualmente ou em grupo é observado, despertar a motivação para a busca de consenso em torno de um problema apresentado, no caso o problema em questão é descobrir que objetos estão ocultos em cada caixa misteriosa analisada. Esta tarefa é realizada em 50 minutos, ou seja, uma aula.

> Tarefa: As caixas misteriosas consistem em seis caixas opacas lacradas, com estas em mãos vocês devem empreender uma investigação dividida em duas etapas, a primeira dedicada à observação, anotação e proposição de um palpite para o que está escondido no interior das caixas. O segundo se constitui em uma plenária no qual se busca o consenso entre os palpites de todos os grupos participantes, nesta seus grupos podem concordar uns com os outros e mudar seus palpites caso algum ou alguns outros grupos o convençam de seus argumentos.

Fonte: (*Science Museum*, 2016, sem página)

Ao percorrer de maneira informal as etapas do método científico, preparamos o caminho para a investigação matemáticavisando o aprendizado deste conceito.

EXPLORANDO SEQUÊNCIAS

A tarefa 2 consiste na exploração de uma tabela contendo sequências numéricas diversificadas. O seu objetivo é levar os participantes a buscarem regularidades nas referidas sequências uma vez que estas se constituem em uma propriedade fundamental para a construção do conceito de logaritmo. A aplicação desta tarefa é feita em 100 minutos, ou seja, duas aulas.

Tarefa: Observem a tabela adiante e baseados nela respondam as perguntas 1 a 5:

a	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
b	1	5	25	125	625					
c	0	4	8	12	16					
d	1	3	P	27	81	243	729	2187	6561	19683
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683
J	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
k	1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512
l	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

1) Comparem as linhas entre si, analisem cada uma delas e escrevam pelo menos cinco frases sobre o que observaram.
2) Completem as linhas das letras *b* e *c*.
3) O que acontece entre os elementos de uma mesma sequência? Expliquem sua resposta. E em seguida, encontrem mais três elementos para cada uma delas.
4) Se quisermos continuar cada uma das linhas, acrescentando elementos à esquerda, como devemos proceder?
5) Comparem todas as linhas com a sequência da letra f. O que observam?

COMPARANDO SEQUÊNCIAS

Na tarefa 3, os participantes relacionam sequências da tabela utilizada na tarefa anterior buscando regularidades entre elas. Nosso objetivo aqui é que os participantes percebam que um caminho para completar as sequências é a utilização de operações entre expoentes e também abrir caminho para o trabalho com o conceito de logaritmos abordando especificidades de sua definição[14] sem, no entanto, abordá-la diretamente uma vez que o conjunto em questão visa trabalhar com a introdução a este conceito, esta tarefa é feita em 100 minutos, ou seja, duas aulas.

Tarefa: Observem a tabela preenchida na atividade anterior e relacionem as linhas desta escrevendo o que observam:

1) Linhas A e F
2) Linhas D e F
3) Linhas D e G
4) Linhas H e F
5) Linhas E e F
6) Linhas I e J
7) Existem outras duplas de linhas que vocês compararam? O que observam nelas?

CONSTRUINDO OS LOGARITMOS

Na tarefa 4, os estudantes são convidados a formalizar as inferências levantadas nas tarefas 2 e 3. Nosso objetivo aqui é identificar o lugar de um número em uma tabela, identificar cada uma das propriedades do logaritmo trabalhando a ideia de lugar na tabela e associar que o lugar de um número na tabela é o mesmo que encontrar o $\log_b a$. Esta tarefa é feita em 100 minutos, ou seja, duas aulas.

[14] Um logaritmo pode ser definido por $a^x=b$, isso implica em que $x=\log_a b$, sendo que b e a são maiores que zero e a é diferente de um e maior que zero. Temos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando ou antilogaritmo e x é o logaritmo (IEZZI *et al* 2010; PAIVA, 2009) .

Tarefa: Utilizando a tabela abaixo responda às questões 1 e 2:

A	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
B	1/32	1/16	1/8	¼	1/2	1	2	4	8	32	64
C	1/243	1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243
D	1/1024	1/256	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64	256	1024
E	1/3125	1/625	1/125	1/25	1/5	1	5	25	125	625	3125
F	1/100000	1/10000	1/1000	1/100	1/10	1	10	100	1000	10000	100000

Questão 1:Se estabelecemos, utilizando a linha A como referência, o lugar que 32 ocupa na sequência de 2 temos a posição 5. Formalizando esta frase podemos substituí-la por $\log_2 32$. Utilizando o enunciado encontre o lugar de:

a) $\log_2 64=$ *(O lugar que 64 ocupa na sequência de 2)*
b) $\log_3 81=$ *(O lugar que 81 ocupa na sequência de 3)*
c) $\log_4 1/16=$ *(O lugar que 1/16 ocupa na sequência de 4)*
d) $\log_5 125=$
e) $\log 1/1000=$
f) $\log_4 256=$
g) $\log_2 256=$
h) $\log_{10} 1000=$

*$\log_{10} 100 = \log 100$ *(Toda vez que nos referimos ao lugar de um número na sequência de 10, o registro fica simplificado como log do número sem escrever a base, Istoé, log 100).*

Questão 2: É possível encontrar o lugar de um logaritmo de maneira indireta. Aqui propomos 4 maneiras, utilizando cada uma delas responda às letras a, b e c utilizando cada um dos itens abaixo como modelo:

i) $\log_2 32 = \log_2 4.8 = 2 + 3 = 5$, ou seja, $\log a.b = \log a + \log b$
a) $\log_4 64=$
b) $\log_2 64=$
c) $\log_2 1024=$

ii) $\log_2 8 = \log_2 32 : 4 = 5 - 2 = 3$, ou seja, $\log a:b = \log a - \log b$
a) $\log_5 1/125=$
b) $\log_5 1/625=$
c) $\log_3 9=$

iii) $\log_2 4^2 = 2. \log_2 4 = 2.2 = 2^2 = 4$, ou seja, $\log a^b = b.\log a$
a) $\log_2 4^{2=}$
b) $\log_4 4^2=$
c) $\log_3 3^2=$

iv) $\log_4 16 = \log_2 16/ \log_2 2 = 4/1 =4$, , ou seja, $\log_b a = (\log_c a) /(\log_c b)$
a) $\log_2 32=$
b) $\log_2 64=$
c) $\log_3 81=$

REFLETINDO SOBRE AS TAREFAS

Para o fechamento do conjunto de tarefas propomos duas avaliações para as tarefas anteriores:

AVALIAÇÃO DO PERCURSO

Aqui o objetivo de coletar as impressões e sugestões dos participantes para a melhoria do conjunto como um todo. Uma sugestão para este fechamento é a aplicação do questionário que elaboramos em nossa dissertação de mestrado (figura 4). Esta tarefa dura cerca de 15 minutos.

Tarefa:

1. Avalie, de forma individual, o conjunto de tarefas vivenciado:

	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Péssimo
Conteúdo:					
Clareza na apresentação					
Materiais disponibilizados					
Duração					
Ambiente					

2. Qual atividade mais gostou e por que?
3. O que você achou da matemática apresentada desta forma?
4. Na sua opinião quão é o ponto positivo? E o negativo?
5. Sugestões e críticas

AVALIAÇÃO CONCEITUAL

Aqui o objetivo reunir as inferências dos estudantes em torno da definição e propriedade dos logaritmos. Propomos aqui que os alunos respondam, com suas próprias palavras as perguntas sugeridas. Esta tarefa dura cerca de 15 minutos.

Tarefa: Responda às perguntas a seguir.

O logaritmo pode ser negativo, zero ou um? Por quê?

a) A base de um logaritmo pode ser negativa, zero ou um? Por quê?
b) O que é o logaritmo na sua opinião?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATISTA, Adriana Maria da Silva Barbosa; SPINILLO, Alina Galvão. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. Estud. psicol. (Natal), Natal, v. 13, n. 1, p. 13-21, Abr. 2008.

CONY, C.H. CéstlaGuerre!”. Antologia de Crônicas, org. Herberto Sales, 3ª ed., São Paulo: Ediouro, 2005, p. 13-14

CUNHA, H. OLIVEIRA, H. PONTE, J.P. Investigações Matemáticas na sala de conjunto de tarefas. Actas do ProfMat95, Lisboa: APM, 1995 (p. 161-167)

IEZZI *et al*. Matemática Ciência e Aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

D’AMORE, B. Elementos de didática da Matemática. Tradução de Maria Cristina BonomiBarufi. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2007.

IGLIORI, S.B.C. MARANHÃO,M.C. Registros de Representação e Números Racionais do livro: Aprendizagem de Matemática. In: Silvia Dias Alcântara Machado (org) Aprendizagem de Matemática – Registros de Representação Semiótica: Campinas SP: Papirus, 2013.p. 57-70.

KINDEL, D.S. Investigações em Sala de Conjunto de tarefas de Matemática: a Geometria Fractal e as Sequências Numéricas Infinitas Xi Encontro Nacional de Educação Matemática Curitiba – Paraná, 20 a 23 de julho de 2013 Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X.

LIMA, E.L. Logaritmos. Rio de Janeiro: SBM, 1980.

LIMA, F. Dica saudável, bolor no laboratório de Matemática. Revista Cálculo, São Paulo, n. 49, p. 21- 25, fev. 2014.

NAVAS, M.G.M. Medidas em telecomunicações e eletrônica, Ed. SENAC, Rio de Janeiro, 2015.

PONTE, J.P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, Investigações Matemáticas em Sala de Conjunto de tarefas. Autêntica. Belo Horizonte. 2005.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Bolema. Ano 13, n. 14, 2000. p. 66 a 91.

_______________. Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade, tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Cortez Editora, São Paulo, 2007.

SILVA. S. F.; NÚÑEZ. I. B.. O Ensino por problemas e trabalho experimental dos estudantes - reflexões teórico-metodológicas. Revista Química Nova, v.25, n.6b, p.1197-1203, dez. 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo. php?script=sci_arttext&pid=S0100- 40422002000700023.

SILVA, Maria Regina Gomes da. Avaliação: um contrato de trabalho. Interface (Botucatu), Botucatu , v. 2, n. 2, p. 155-172, Feb. 1998 . Disponível em <http://www.scielosp.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-32831998000100009&lng=en&nrm=iso>. Acesso em abr. 2016

SIMÕES, M., SÔNEGO, D. A coisa sem sentido faz sentido há séculos. Revista Cálculo, São Paulo. Fascículo 33, p.43-54. Out, 2013.

APÊNDICE: CONJUNTO DE TAREFAS PARA IMPRESSÃO

Tarefa 1: O que há nas Caixas Misteriosas?

Vocês estão recebendo seis caixas opacas lacradas, com estas em mãos vocês devem utilizar seus sentidos para observar, anotar e propor um palpite para o que está escondido no interior das caixas, posteriormente discutiremos coletivamente os palpites de vocês.

Tarefa 2: Explorando sequências

Observem a tabela adiante e baseados nela respondam as perguntas 1 a 5:

a	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
b	1	5	25	125	625					
c	0	4	8	12	16					
d	1	3	P	27	81	243	729	2187	6561	19683
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683
J	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
k	1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512
l	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

1) Comparem as linhas entre si, analisem cada uma delas e escrevam pelo menos cinco frases sobre o que observaram.
2) Completem as linhas das letras *b* e *c*.
3) O que acontece entre os elementos de uma mesma sequência? Expliquem sua resposta. E em seguida, encontrem mais três elementos para cada uma delas.
4) Se quisermos continuar cada uma das linhas, acrescentando elementos à esquerda, como devemos proceder?
5) Comparem todas as linhas com a sequência da letra f. O que observam?

Tarefa 3: Comparando Sequências

Observem a tabela preenchida na atividade anterior e relacionem as linhas desta escrevendo o que observam:

1) Linhas A e F
2) Linhas D e F
3) Linhas D e G
4) Linhas H e F
5) Linhas E e F
6) Linhas I e J
7) Existem outras duplas de linhas que vocês compararam? O que observam nelas?

Tarefa 4: Construindo os logaritmos

Utilizando a tabela abaixo responda às questões 1 e 2:

A	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
B	1/32	1/16	1/8	¼	½	1	2	4	8	32	64
C	1/243	1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243
D	1/1024	1/256	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64	256	1024
E	1/3125	1/625	1/125	1/25	1/5	1	5	25	125	625	3125
F	1/100000	1/10000	1/1000	1/100	1/10	1	10	100	1000	10000	100000

Questão 1: Se estabelecemos, utilizando a linha A como referência, o lugar que 32 ocupa na sequência de 2 temos a posição 5. Formalizando esta frase podemos substituí-la por $\log_2 32$. Utilizando o enunciado encontre o lugar de:

i) *$\log_2 64$= (O lugar que 64 ocupa na sequência de 2)*

j) *$\log_3 81$= (O lugar que 81 ocupa na sequência de 3)*

k) *$\log_4 1/16$= (O lugar que 1/16ocupa na sequência de 4)*

l) *$\log_5 125$=* n) *$\log_4 256$=* p) *$\log_{10} 1000$=*

m) *log 1/1000=* o) *$\log_2 256$=*

*$\log_{10}100$ = *log 100 (Toda vez que nos referimos ao lugar de um número na sequência de 10, o registro fica simplificado como log do número sem escrever a base, Istoé, log 100).*

Questão 2: É possível encontrar o lugar de um logaritmo de maneira indireta. Aqui propomos 4 maneiras, utilizando cada uma delas responda às letras a, b e c utilizando cada um dos itens abaixo como modelo:

v) $\log_2 32 = \log_2 4.8 = 2 + 3 = 5$, ou seja, *log a.b = log a + log b*

d) $\log_4 64$= e) $\log_2 64$= f) $\log_2 1024$=

vi) $\log_2 8 = \log_2 32 : 4 = 5 - 2 = 3$, ou seja, *log a:b = log a - log b*

d) $\log_5 1/125$= e) $\log_5 1/625$= f) $\log_3 9$=

vii) $\log_2 4^2 = 2. \log_2 4 = 2.2 = 2^2 = 4$, ou seja, *$\log a^b = b.\log a$*

d) $\log_2 4^{2=}$ *e)* $\log_4 4^2$= *f)* $\log_3 3^2$=

viii) $\log_4 16 = \log_2 16/ \log_2 2 = 4/1 =4$, , ou seja, *$\log_b a = (\log_c a) /(\log_c b)$*

d) $\log_2 32$= e) $\log_2 64$= f) $\log_3 81$=

Tarefa 5: Avaliação

1.Avaliação de Percurso:

1. Avalie, de forma individual, o conjunto de tarefas vivenciado:

	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Péssimo
Conteúdo:					
Clareza na apresentação					
Materiais disponibilizados					
Duração					
Ambiente					

2. Qual atividade mais gostou e por quê?
3. O que você achou da matemática apresentada desta forma?
4. Na sua opinião quão é o ponto positivo? E o negativo?
5. Sugestões e críticas

2. Avaliação Conceitual:

Responda às perguntas a seguir.

c) O logaritmo pode ser negativo, zero ou um? Por quê?
d) A base de um logaritmo pode ser negativa, zero ou um? Por quê?
e) O que é o logaritmo em sua opinião?