Matemática

Análise Matemática

Cleiton Batista Vasconcelos
Manoel Américo Rocha

EdUECE

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Matemática

Análise Matemática

Cleiton Batista Vasconcelos
Manoel Américo Rocha

2ª edição
Fortaleza - Ceará

EdUECE

2019

Geografia
História
Educação Física
Química
Ciências Biológicas
Artes Plásticas
Computação
Física
Matemática
Pedagogia

Editora Filiada à

ABEU
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893
Internet: www.uece.br – E-mail: eduece@uece.br

Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais
Fone: (85) 3101-9962

Sumário

Apresentação 5

Capítulo 1 – Números racionais e números irracionais..7

1. Os números inteiros 9

1.1. Construção axiomática[3] dos números naturais 10

2. Os números racionais 12

2.1. Representação fracionária5 dos números racionais..............................12

2.2 Representação decimal dos números racionais 14

3. Os números irracionais 21

3.1. Números reais 23

Capítulo 2 – Conjuntos finitos e conjuntos enumeráveis 27

1. Conjuntos finitos 29

1.1. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito 31

1.2. A adição de números naturais..34

1.3. A multiplicação de números naturais 38

1.4 Conjuntos infinitos...40

1.5. Conjuntos limitados...41

2. Conjuntos enumeráveis 42

2.1. A enumerabilidade de Q 46

Capítulo 3 – Números reais...51

1. A reta numérica real...53

2. A incompletude de Q 55

3. Os números reais: um corpo ordenado completo 59

3.1. O corpo dos números reais 59

3.2. R é um corpo ordenado...60

Capítulo 4 – O conceito de sequência de números reais 65

1. O conceito de sequência de números reais 65

1.1 Alguns exemplos de sequência 66

2. Convergência de sequências 66

Sobre os autores..69

Apresentação

Este livro tem por objetivo servir como base de apoio ao estudo da “Análise Matemática “para os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade à distância.

Assim, ele difere na forma e conteúdo dos livros de Análise Matemática direcionados aos Cursos de Bacharelado, onde a abrangência do conteúdo e o rigor das demonstrações devem ser maiores.

Por razões didáticas, o texto contém algumas apresentações de uma maneira intuitiva e informal, com pouca ou nenhuma demonstração, mas dando ao leitor (aluno) uma visão clara e ao mesmo tempo abrangente dos tópicos que se propõe a apresentar.

Costuma-se dizer que a Análise Matemática é um Curso de Cálculo mais formal pois ela trata do mesmo conteúdo, mas, devido à maturidade já adquirida pelo aluno ao longo do curso, é apresentada de forma mais rigorosa.

Este Curso de Análise aqui apresentado, não inclui o estudo das derivadas e das integrais, se limitando em quatro capítulos ao estudo dos números, conjuntos numéricos, sequências numéricas, séries numéricas, limites e continuidade.

Os autores

Capítulo 1

Números racionais e números irracionais

Objetivo

- Nesta unidade, mostraremos a existência dos números reais, a partir da construção de um número com representação decimal infinita[1] e não periódica para, em seguida, estudarmos as suas principais propriedades. Iniciando nosso estudo pelos números naturais, inteiros e racionais, faremos uma construção axiomática dos números naturais, a partir dos axiomas de Peano, dando uma visão de números ordinais para esses números. Em seguida, definiremos os números racionais como quociente entre dois inteiros, sendo o divisor não nulo, apresentando suas representações fracionária e decimal. A partir da representação decimal dos números racionais, mostraremos a existência dos números irracionais, construindo, assim o conjunto dos números reais.

[1]Aqui, estamos utilizando a expressão “infinito” de forma intuitiva. Posteriormente, definiremos mais precisamente o que vem a ser um conjunto infinito.

1. Os números inteiros

Desde há muito tempo conhecemos os números naturais e os números inteiros. Eles estão presentes em várias situações do nosso dia a dia, notadamente, mas não exclusivamente, naquelas relacionadas com ordenação e com contagem. Quando dizemos que 20 (vinte) times disputam a primeira divisão do campeonato brasileiro ou que existem 5 (cinco) vogais, estamos utilizando os números naturais em situações de contagem. Quando dizemos que o time A foi o 1º (primeiro) colocado ou que a letra u é a 5a (quinta) vogal, estamos empregando os números naturais em situações de ordenação.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra N, seus elementos são chamados de números naturais e são indicados pelos símbolos 1, 2, 3, 4,... Temos, portanto, que o conjunto dos números naturais é dado por

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Em ambos os casos, as reticências indicam que esses números continuam indefinidamente, ou seja, que o conjunto dos números naturais é infinito.

Na realidade, além de infinito, o conjunto dos números naturais é ilimitado[2] superiormente, ou seja, dado qualquer número natural n, é sempre possível encontrar outro número natural maior do que n.

Observemos que, de acordo com a nossa escolha, o 0 (zero) não foi considerado um número natural. Essa é uma escolha possível e bastante natural na análise, pois faz com que o elemento 1 seja o primeiro número natural, o 2 seja o segundo, o 3 seja o terceiro, etc., coincidindo com a ideia de que, em uma sequencia, o primeiro termo seja representado por a1; o segundo por a2; e assim por diante. Observemos também que, assim procedendo, o conjunto dos números naturais não terá elemento neutro para a adição, uma vez que, como sabemos esse elemento é o zero.

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z e possui como elementos os números que são indicados pelos símbolos 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3,... Assim, podemos escrever:

Z = {...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}.

Novamente, as reticencias indicam a infinitude do conjunto dos números inteiros que, além de infinito, é ilimitado tanto inferior, quanto superiormente. Com isso, queremos dizer que, dado um número inteiro n, sempre é possível encontrar outros números inteiros n1 e n2, tais que n1 seja menor do que n e n2 seja maior do que n.

1.1. Construção axiomática[3] dos números naturais

É possível construir de forma axiomática o conjunto dos números naturais, conforme veremos a seguir.

Para tanto, usaremos a axiomatização de Peano[4]. Essa axiomatização nos permite estudar os números naturais como números ordinais, isto é, como resultantes de uma ordenação, e não como números cardinais, resultantes de contagem. O estudo dos números naturais do ponto de vista dos números cardinais, isto é, resultantes de contagem, será feito quando do estudo mais detalhado dos conjuntos finitos.

Em sua axiomatização, Peano assumiu a existência de um conjunto não vazio N, cujos elementos são chamados de números naturais, e de uma função s: $N \longrightarrow N$, que associa a cada número natural n o número natural s(n), chamado de sucessor de n, e que possui as seguintes propriedades:

P1: s: $N \longrightarrow N$ é injetora.

Isto é, dados os números naturais m e n, com $m \neq n$, tem-se $s(m) \neq s(n)$.

P2: N – s(N) é um conjunto unitário.

Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Esse número é chamado de “um” e denotado pelo símbolo 1.

P3: (Princípio da indução)

Se $X \subset N$ é tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$, tem-se que $s(n) \in X$, então $X = N$.

Com esses entes primitivos (conjunto não vazio e função sucessor) e estes três postulados (P1, P2 e P3) é possível construir toda a teoria dos números naturais que conhecemos.

[2]A noção de conjunto ilimitado superiormente é outra expressão que está sendo utilizada de forma intuitiva e que será mais bem precisada, posteriormente.

[3]Axiomatizar um sistema ou uma teoria é escolher um conjunto bem definido de objetos e relações entre esses objetos, que serão chamados de entes primitivos, e de propriedades que devem ser aceitas e “respeitadas” para, a partir deles, determinarmos e provarmos todos os demais resultados dessa teoria.

[4]Giuseppe Peano (1858 - 1932) foi um matemático italiano que nasceu em Cuneo, estudou em Turin e deu grande contribuição à Matemática, notadamente nos campos da análise matemática, lógica, teoria dos conjuntos, equações diferenciais e análise vetorial. Em 1889, publicou seus famosos axiomas que definiram os números naturais em termos de conjuntos.

O princípio da indução (propriedade P3) muitas vezes é utilizado para demonstrarmos certos resultados ou propriedades que são válidos para todos ou quase todos os números naturais. Aqui, a expressão “quase todos” significa para todos exceto uma quantidade finita deles.

Uma demonstração em que se utilize o princípio da indução é chamada de demonstração por indução.

Como exemplo de uma demonstração por indução, vejamos os exemplos 1 e 2 que seguem.

Exemplo 1. Vamos mostrar por indução que o sucessor de um número natural não pode ser igual a esse número. Isto é, vamos mostrar que dado um número natural n, tem-se, obrigatoriamente, $n \neq s(n)$. Para tanto, consideremos o conjunto X, dado por $X = \{n \in N \ ; \ n \neq s(n)\}$. Temos que $1 \in X$, pois $1 \neq s(n)$, para todo natural n, uma vez que $1 \in N - s(N)$. Tomemos agora n pertencente ao conjunto X e vamos mostrar que s(n) também pertence a X. Uma vez que $n \in X$, n   s(n) e, como s é injetiva, temos que $s(n) \neq s(s(n))$ e, portanto, s(n) pertence a X. Assim, X é um subconjunto de N, tal que: (i) $1 \in X$; e (ii) se $n \in X$, então $s(n) \in X$. Logo, pela propriedade P3, ou seja, pelo princípio de indução, X = N e, consequentemente, $n \neq s(n)$, $\forall \ n \in N$.

No exemplo 2 a seguir usaremos um resultado relacionado à adição de números naturais, mesmo tal operação ainda não tendo sido definida. Usaremos também que o sucessor de um número natural n é dado por n + 1.

Exemplo 2. Vamos mostrar por indução que a soma dos n primeiros números naturais ímpares pode ser dada por n^2. Seja o conjunto $X = \{n \in N \ ; \ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n^{-1}) = n^2\}$. Observemos inicialmente que considerando o número 1 como a “soma” do primeiro número ímpar e observando que $1^2 = 1$, temos que $1 \in X$. Observe agora que $2 \in X$, pois a soma dos 2 primeiros números ímpares é 22 , uma vez que 1 + 3 = 4; $3 \in X$, pois a soma dos 3 primeiros números ímpares é $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$. Seja agora $n \in X$ e vamos mostrar que $s(n) \in X$. Dizer que $n \in X$ significa dizer que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Mostrar que $s(n) = n + 1 \in X$ significa mostrar que a vale a igualdade $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2$. Usando o fato de que $n \in X$, o primeiro membro da igualdade fica $n^2 + [2(n + 1) - 1]$, ou seja, $n^2 + 2n + 1$, que é igual a $(n + 1)^2$. Assim, X é tal que (i) $1 \in X$; e (ii) se $n \in X$, então $s(n) \in X$. Logo, pelo princípio da indução, X = N e, consequente, a soma dos n primeiros números ímpares pode ser dada por n^2.

Outra aplicação para o princípio da indução é na definição de certos entes e de operações matemáticas. Quando definimos utilizando o princípio da indução, dizemos que temos uma definição por indução ou por recorrência.

Os exemplos a seguir nos mostram como utilizar a indução para definir uma função e a adição de números naturais.

Exemplo 3. Definamos uma função $f: N \longrightarrow N$ por $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ e $f(n) = 2f(n - 1)+f(n - 2)$, para $n \geq 3$. Assim, temos que $f(3) = 2f(2) + f(1) = 2 \times 4+2 = 10$; $f(4) = 2f(3) + f(2) = 2 \times 10 + 4 = 24$; e assim por diante.

Exemplo 4. A adição de números naturais pode ser definida por recorrência ou indução, como segue: Dados os números naturais m e n, e denotando por s(1) = 2, s(2) = 3, s(3) = 4, s(4) = 5,..., a soma de m com n, nessa ordem, é definida por: m+1 = s(m);

$m + 2 = s(m + 1) = s(s(m)) = s^2(m);$

$m + 3 = s(m + 2) = s(s^2(m)) = s^3(m);$

.

.

.

$m + s(n) = s(m + n) = s^{s(n)}(m).$

Para refletir

1. Mostre por indução sobre n que a soma dos n primeiros números naturais pares pode ser dada por n(n+1).
2. Defina por indução a multiplicação de dois números naturais m e n.
3. Mostre por indução o princípio da boa ordenação, que afirma: Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.
4. Defina por indução uma função $f: N \longrightarrow N$, tal que f(n) = n!.
5. Dados os números naturais a e b, mostre que existe um número natural m, tal que ma > b.
6. Sejam M um número natural e $X \subset N$, tal que: (i) $M \in X$; (ii) se $m \in X$, então $m + 1 \in X$. Mostre que X contém todos os números naturais maiores do que ou iguais a M.
7. Mostre que se $n \in N$ e $n \geq 4$, então $n! > 2n$.
8. Seja $a \in N$. Mostre por indução sobre n que $a^{n+1} – 1 = (a – 1)(a^n + a^{n-1} +...+ a + 1)$.
9. Seja P(n) a afirmação:
P(n): $1 + 2 + +...+ n = (2n + 1)^2/8$. Mostre que se P(k) for verdadeira, então P(k+1) também é verdadeira.
10. Prove a desigualdade de Bernoulli: $(1 + x)n \geq 1 + nx$, para todo $x \geq -1$ e para todo $n \in N$.

2. Os números racionais

Além dos números naturais e dos números inteiros, muitas vezes nos deparamos com números como: 3/4; 0,25; 1/6; 0,253; etc. Esses números são chamados de números racionais e serão mais bem trabalhados no que segue.

2.1. Representação fracionária[5] dos números racionais

Tomando os números que podem ser escritos na forma a/b, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, obtemos os números racionais em sua representação fracionária.

O conjunto dos números racionais é representado pela letra Q e, portanto, temos que

$Q = \{ a/b \; ; \; a, b \in Z, b \neq 0 \}.$

Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 01. Número racional é todo número que pode ser escrito na forma a/b, em que a e b são números inteiros, e b é diferente de zero.

Na realidade, cada número racional pode ser pensado como uma classe de equivalência da relação f, definida como segue:

f: a/b f c/d se, e somente se, ad = bc,

em que ad e bc indicam, respectivamente, o produto de a por d e o produto de b por c.

Essa relação que chamamos de f, em geral, é denotada pelo sinal de igualdade, e falamos que as frações a/b e c/d são iguais ou equivalentes e escrevemos a/b = c/d para indicar que as frações a/b e c/d são equivalentes pela relação f, ou seja, que ad = bc.

[5]Estamos utilizando a representação fracionária de um número racional como se fosse o próprio número e faremos isso ao longo de todo nosso texto.

Por exemplo,

Exemplo 5. Uma vez que vale a igualdade 3 x 6 = 2 x 9, temos que 3/2 = 9/6; 6/2 = 9/3; 6/9 = 2/3; 9/6 = 3/2; entre outras equivalências.

Exemplo 6. Como 4 x (-1) = (-2) x 2, temos: (-1)/(-2) = 2/4; 4/(-2) = 2/(-1); (-2)/(-1) = 4/2; entre outras equivalências.

Para refletir

1. Defina relação de equivalência em um conjunto não vazio E.
2 Dê exemplos de relações de equivalência no conjunto Z dos números inteiros.
3. Dados uma relação de equivalência f em um conjunto E, e $x \in E$, defina a classe de equivalência de x módulo f.
4. Determine as classes de equivalência das relações definidas no exercício 02.
5. Determine frações equivalentes às frações: (a) 2/3; (b) 3/4; (c) 1/5; (d) 1/5 e 2/3, ao mesmo tempo; (e) 2/3 e 3/4, ao mesmo tempo.
6. Determine condições suficientes para que uma fração seja equivalente às frações: (a) 3/5; (b) 2/6.
7. Determine uma fração equivalente a 4/5 e tal que: (a) seu numerador seja igual a 12; (b) seu denominador seja igual a 30; (c) seu numerador seja 12 e seu denominador seja 30.
8. Mostre que existe uma e apenas uma fração equivalente a 3/5 cujo numerador seja 30.
9. Determine uma fração equivalente a 2/9 tal que a soma de seu numerador com seu denominador seja 110.
10. Sabendo que as frações 19/11 e m/n são equivalentes, determine os valores de m e de n para os quais 11m + 31n = 550.

Dos exemplos anteriores, podemos induzir que cada número racional possui um representante que, em sua forma fracionária, pode ser escrito na forma a/b, em que a e b são números inteiros com b > 0. Com isso, a definição de número racional pode ser reescrita como segue.

Definição 2. Número racional é todo número que pode ser escrito na forma a/b, em que a e b são inteiros, com b > 0.

a) A infinitude dos números racionais

Sabemos que todo número racional pode ser escrito na forma a/b, em que a e b são inteiros e b é maior do que zero. Sabemos também que os números racionais a/b e c/d são iguais se, e somente se, ad = bc.

$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$.

Assim, os números racionais a/2 e c/2 serão iguais se, e somente se, 2a = 2c ou, equivalentemente, a = c.

$a/2 = c/2 \Leftrightarrow 2a = 2c \Leftrightarrow a = c$.

Isto nos garante que os números racionais 1/2; 2/2; 3/2; 4/2; 5/2;... são, todos, distintos e que o conjunto dos números racionais é infinito. Além de infinito esse conjunto é ilimitado, tanto superior quanto inferiormente.

b) A inclusão de Z em Q

Dentre os números racionais, um subconjunto merece destaque e especial atenção. É o subconjunto dos racionais que podem ser representados na forma a/1, em que a é um número inteiro, quais sejam,

..., -4/1, -3/1, -2/1, -1/1, 0/1, 1/1, 2/1, 3/1,...

Esses números podem ser pensados como uma cópia dos números inteiros e, com isso, podemos dizer que $Z \subset Q$, ou seja, que todo número inteiro é um número racional.

Exemplo 7. O número racional -4/1 corresponde ao inteiro -4; o número racional 3/1 corresponde ao inteiro 3; e o racional 0/1 corresponde ao inteiro 0.

Exemplo 8. Como -4/1 = -8/2, o racional -8/2 também corresponde ao inteiro -4.

Exemplo 9. O racional ad/d, em que a e d são inteiros, sendo $d \neq 0$, corresponde ao inteiro a, uma vez que ad/d = a/1, pois vale a igualdade ad x 1 = a x d.

2.2 Representação decimal dos números racionais

Na representação de um número racional na forma de fração, digamos a/b, são utilizados dois números inteiros. O número a é chamado de numerador e o número b é chamado de denominador da fração. É possível dividirmos o numerador pelo denominador de uma fração, obtendo outra representação para esse número racional.

Exemplo 10. No número racional 3/4, ao dividirmos o numerador pelo denominador, ou seja, ao dividirmos 3 por 4, obtemos o número 0,75, que é uma representação decimal do número racional representado por 3/4.

Exemplo 11. No número racional 4/2, ao dividirmos 4 por 2, obtemos o número inteiro 2, que é a representação decimal do número racional representado por 4/2. Lembremos que vale a igualdade 4/2 = 2/1, uma vez que 4 x 1 = 2 x 2. Assim, 2 é a representação decimal do número racional 2/1, justificando a inclusão de Z em Q, sugerida anteriormente.

Exemplo 12. No número racional 1/2, ao dividirmos 1 por 2, obtemos o número 0,5, que é a representação decimal do número racional representado por 1/2.

Na representação decimal de um número racional, o número que vem antes da vírgula é chamado de parte inteira do número racional, e o número que vem depois da vírgula é chamado de parte fracionária do número racional.

Exemplo 13. A parte inteira do número racional 23,586 é 23 e sua parte fracionária é 586.

Exemplo 14. No número 0,25, a parte inteira é 0 (zero) e a parte fracionária é 25.

Quadro 1

PARTE INTEIRA E PARTE FRACIONÁRIA DO NÚMERO RACIONAL $A_1A_2...A_N,A_1A_2A_3...A_R$.	
Parte inteira	$A_1A_2...A_n$
Parte fracionária	$a_1a_2a_3...a_r$

a) A forma de decimal exata e a forma de dízima periódica

Alguns números racionais se encontram na forma a/b em que b é uma potência de 10, por exemplo: 7/10, 3/100, 17/1000, etc.; outros, como por exemplo: 3/5, 5/4, 7/8, são tais que possuem uma fração equivalente na qual o denominador é uma potência de 10. A fração 3/5 é equivalente a 6/10; 5/4 é equivalente 125/100; e 7/8 é equivalente a 875/1000.

A forma decimal desses números racionais é fácil de ser encontrada, como se pode perceber.

Quadro 2

REPRESENTANDO FRAÇÕES DECIMAIS COMO NÚMEROS DECIMAIS			
Forma Fracionária	**Forma Decimal**	**Expoente da Potência de 10 do Denominador**	**Número de Casas Decimais**
7/10	0,7	1	1
3/100	0,03	2	2
17/1000	0,017	3	3
25/10	2,5	1	1
3/5 = 6/10	0,6	1	1
5/4 = 125/100	1,25	2	2
7/8 = 875/1000	0,875	3	3

Nos exemplos anteriores, as representações decimais encontradas são os numeradores das frações com uma vírgula entre seus algarismos, separando a parte inteira da parte fracionária (ex.: 2,5 e 1,25), ou estes numeradores precedidos de zeros (ex.: 0,7 e 0,03), de tal forma que a quantidade de algarismos na parte fracionária da representação seja sempre igual ao expoente da potência de 10 do denominador da fração.

Assim, é possível induzir que a representação decimal de um número racional cujo denominador (de sua representação fracionária) é uma potência de 10 (de expoente n, digamos) consiste de:

o número correspondente ao numerador da fração com uma vírgula entre seus algarismos, de tal forma que a parte fracionária da representação decimal possua n algarismos; ou

o número correspondente ao numerador precedido de algarismos 0 (zero), de tal forma que a parte fracionária da representação decimal possua n algarismos.

Exemplo 15. A representação decimal do número racional 1/4 é 0,25. De fato, 1/4 é equivalente à fração 25/100 e 100 = 102. Assim, a representação decimal de 1/4 deverá ter 2 algarismos na parte fracionária. Como o numerador da fração é 25 que só possui 2 algarismos, a representação decimal de 1/4 deverá ser 0,25 e, neste caso, tivemos que acrescentar 1 algarismo 0.

Exemplo 16. A representação decimal do número racional 6/5 é 1,2. De fato, 6/5 é equivalente à 12/10 e, portanto, sua representação decimal terá 1 ($10 = 10^1$) algarismo na parte fracionária. O numerador da fração em questão é 12 e, portanto, a vírgula vai ficar entre o 1 e o 2.

Mas nem todos os números racionais possuem uma representação fracionária na qual o denominador é uma potência de 10. De fato, os únicos fatores primos que se encontram nas potências de 10 são 2 e 5, uma vez que, como sabemos, 10 = 2 x 5. Assim, se no denominador da fração aparece algum outro fator primo que não o 2 ou 5, e este fator não pode ser cancelado com algum fator do numerador da fração, então esse número racional não vai possuir uma fração equivalente cujo denominador seja uma potência de 10.

Exemplo 17. O número racional 2/3 não possui fração equivalente cujo denominador seja potência de 10, pois seu denominador possui o fator 3 como fator primo.

Exemplo 18. O fator 7 que aparece no denominador do número 14/35 pode ser cancelado com o fator 7 que aparece no seu numerador e, portanto, 14/35 é equivalente a 2/5 que, por sua vez, é equivalente a 4/10.

A representação decimal de números racionais que possuem representação fracionária cujo denominador é uma potência de 10 é dita um número decimal exato ou, simplesmente, um decimal exato. Para os demais números racionais, a representação decimal é infinita e é chamada de dízima periódica.

Em qualquer dos casos, a representação decimal do número racional pode ser obtida pela divisão do numerador pelo denominador.

Exemplo 19. A representação decimal do número racional 2/3 é 0,666..., em que as reticências indicam que a divisão não está encerrada e poderia continuar indefinidamente sempre com 6 no quociente. Isso pode ser visto a partir da divisão do 2 por 3, como segue:

(i) inicialmente, dividimos o 2 por 3 e obtemos 0 (zero) no quociente;

(ii) para continuarmos a divisão, acrescentamos 0 ao dividendo e dividimos 20 por 3, obtendo 6 no quociente e 2 para resto;

(iii) acrescentamos 0 ao dividendo e dividimos outra vez 20 por 3, obtendo 6 no quociente e 2 para resto;

(iv) acrescentamos 0 ao dividendo e dividimos outra vez 20 por 3, obtendo 6 no quociente e 2 para resto; e assim por diante.

Exemplo 20. A representação decimal do número racional 5/7 é 0,714285714285... (aqui, as reticências indicam que o número 714285 se repete no quociente, indefinidamente). Isso pode ser visto ao efetuarmos a divisão de 5 por 7, como segue:

(i) inicialmente, dividimos o 5 pelo 7 e obtemos 0 no quociente, que é a parte inteira do número decimal;

(ii) continuamos a divisão, dividindo 50 por 7; obtemos 7 para quociente e o resto 1;

(iii) continuamos a divisão, dividindo 10 por 7; obtemos 1 para quociente e o resto 3;

(iv) continuamos..., dividindo 30 por 7; obtemos 4 para quociente e o resto 2;

(v) continuamos..., dividindo 20 por 7; obtemos 2 para quociente e o resto 6;

(vi) continuamos..., dividindo 60 por 7; obtemos 8 para quociente e o resto 4;

(vii) continuamos..., dividindo 40 por 7; obtemos 5 para quociente e o resto 5;

(viii) continuamos..., dividindo 50 por 7; obtemos 7 para quociente e o resto 1.

Observemos que retornamos ao passo (ii), no qual tínhamos que dividir 50 por 7, obtendo 7 para quociente e resto 1. Isso significa que repetiremos os passos (iii), (iv), (v), (vi) e (vii), recaindo no passo (viii) que é igual ao (ii). Assim, todos os restos e quocientes obtidos nesses passos irão se repetir, dando origem a um número decimal infinito e periódico.

No exemplo 20, anterior, o número racional 5/7 deu origem a um número decimal infinito e periódico, chamado de dízima periódica. Isso ocorreu porque os restos possíveis de uma divisão por 7 são 0 (neste caso teríamos um número decimal exato como quociente), 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e, portanto, obrigatoriamente teremos a repetição dos algarismos no quociente. O número formado pelos algarismos que se repetem é chamado de período da dízima periódica.

Observemos que quando formos determinar a representação decimal do número racional a/b (com b > 0), dividindo o numerador a pelo denominador b, os únicos restos possíveis para essa divisão são 0 (nesse caso teremos um número decimal exato), 1, 2, 3, 4,..., b-1 e, então, obrigatoriamente teremos um número decimal exato ou uma dízima periódica.

Essas observações nos levam à seguinte proposição.

Proposição 1. A representação decimal de um número racional ou é um número decimal exato ou uma dízima periódica.

É importante mencionarmos que a recíproca da proposição 1, que será enunciada na proposição 2, também é verdadeira e, portanto, os números racionais ficam caracterizados como aqueles números que possuem representação decimal exata ou de dízima periódica.

Proposição 2. Todo número com representação decimal finita ou periódica pode ser representado na forma a/b, em que a e b são números inteiros, com b > 0.

b) Transformando números decimais em frações

De acordo com a proposição 2, todo número decimal exato e toda dízima periódica podem ser transformados em frações do tipo a/b, com b > 0.

No caso dos números decimais exatos, o numerador da fração será o número decimal sem a vírgula e o denominador será uma potência de 10, cujo expoente será a quantidade de algarismos da parte fracionária do número decimal.

Exemplo 21. A fração decimal que representa o número decimal 0,32 terá como numerador o número 032, ou, simplesmente, 32 e como denominador o número 100, uma vez que 100 = 102.

Exemplo 22. A fração decimal que representa o número decimal 3,257 terá como numerador o número 3257, e como denominador o número 1000, uma vez que 1000 = 103.

Observamos que para os números decimais dos exemplos 21 e 22 existem outras frações que representam esses números. Basta que tomemos frações que lhes sejam equivalentes. Assim, o número 0,32 também pode ser representado pelas frações 320/1000 ou 16/50 ou 8/25. Essa última sendo chamada de fração irredutível pois não existe um fator comum ao numerador e ao denominador.

No caso das dízimas periódicas, o processo é um pouco mais bem elaborado.

Por exemplo,

Exemplo 23. A fração que representa a dízima periódica 0,33... é 1/3. Isso pode ser visto procedendo-se segundo o seguinte algoritmo:

(i) $x = 0{,}333...$

(ii) $10x = 3{,}333...$

(iii) $(10x - x) = (3{,}333... - 0{,}333...)$

(iv) $9x = 3$

(v) $x = 3/9 = 1/3$.

Exemplo 24. Outra maneira de vermos essa transformação seria pensarmos assim:

(i) $x = 0{,}333...$

(ii) $10x = 3{,}333... = 3 + 0{,}333... = 3 + x$

(iii) $9x = 3$

(iv) $x = 3/9 = 1/3$.

Exemplo 25. A fração que representa a dízima periódica 0,353535... é 35/99. Isso pode ser visto procedendo-se segundo o seguinte algoritmo:

(i) $x = 0{,}353535...$

(ii) $10x = 3{,}535353...$

(iii) $100x = 35{,}353535...$

(iv) $(100x - x) = (35{,}353535... - 0{,}353535...)$

(v) $99x = 35$

(vi) $x = 35/99$.

Exemplo 26. Procedendo como no exemplo 24, temos o seguinte:

(i) $x = 0{,}353535...$

(ii) $10x = 3{,}535353...$

(iii) $100x = 35{,}353535... = 35 + x$

(iv) $99x = 35$

(v) $x = 35/99$.

Exemplo 27. A dízima periódica 0,566... pode ser representada pela fração 51/90, como podemos ver no que segue:

(i) $x = 0{,}5666...$

(ii) $10x = 5{,}666... = 5 + 0{,}666...$

(iii) $100x = 56{,}666... = 56 + (10x - 5)$

(iv) $100x - 10x = 56 - 5 = 51$

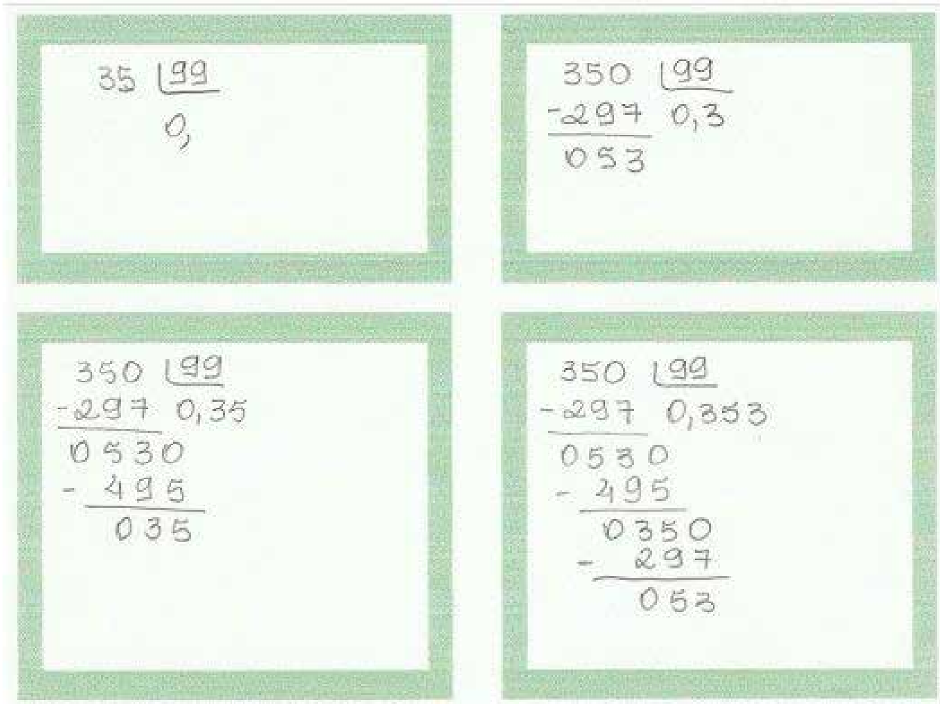
(v) $90x = 51$

(vi) $x = 51/90$.

Os quadros a seguir nos mostram as divisões de 35 por 99 e de 51 por 90.

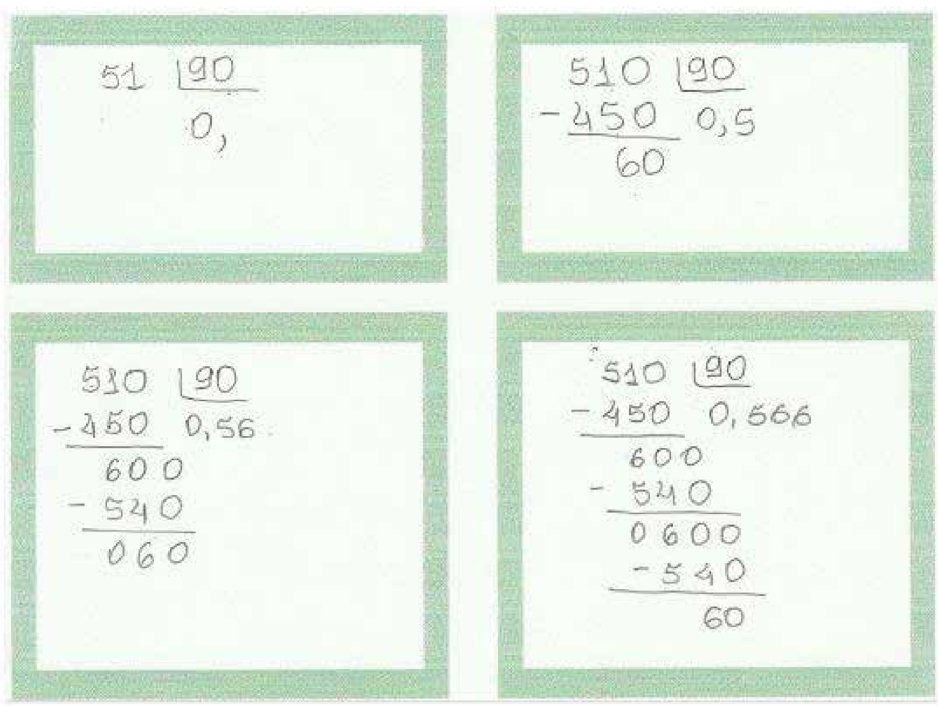
Quadro 3

Divisão de 35 por 99



Quadro 4

Divisão de 51 por 90



Para refletir

1. Determine a forma decimal dos números racionais:
a) 3/4.
b) 34/5.
c) 3/11.
d) 9/7.

2. Represente na forma fracionária os números:
a) 3,25323232... (período 32).
b) 0,176 (decimal exato).
c) 9,103222... (período 2).

3. Determine a soma 2,878787... + 3,9191...

3. Os números irracionais

Vimos que os números racionais possuem representação decimal finita, na forma de número decimal exato, ou representação decimal infinita, na forma de dízimas periódicas. Entretanto, é possível construirmos um número com representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 28. O número com representação decimal, ou simplesmente, o número decimal 0,12122122212222..., no qual temos, após a vírgula, uma sequência de algarismos 1 e 2 formada da maneira explicada a seguir, é um número decimal não exato, que não é uma dízima periódica: (i) inicialmente, temos um algarismo 1 seguido de um algarismo 2; (ii) em seguida, temos um algarismo 1 seguido de dois algarismos 2; (iii) depois, um algarismo 1 seguido de três algarismos 2; (iv) depois, um algarismo 1 seguido de quatro algarismos 2; e assim por diante.

Exemplo 29. O número decimal 23,12131415..., no qual após a vírgula temos em sequência os números 12, 13, 14, 15 e assim por diante, é um número decimal infinito que não é dízima periódica.

Dentre esses números com representação decimal infinita e não periódica, um dos mais conhecidos é o número π, cuja representação decimal é 3,141592... As reticências, aqui, indicam que a representação continua indefinidamente, sendo que de uma forma totalmente desordenada.

Quadro 5

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DO NÚMERO π
3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089 986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196
4428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609...

Os números cuja representação decimal não é exata e não é uma dízima periódica são chamados de números irracionais.

$\sqrt{2}$ é um número irracional. Outro número irracional bastante conhecido nosso é $\sqrt{2}$.Esse símbolo representa a raiz quadrada[6] positiva de 2 e pode ser obtido como a medida da diagonal de um quadrado de lados 1. De fato, denotando por d a diagonal do quadrado de lados 1, pelo teorema de Pitágoras, temos que: $d_2 = 12 + 12$; ou seja, $d_2 = 2$; ou seja $d = \sqrt{2}$.

A demonstração da irracionalidade de , por ser mais fácil, será provada no que segue.

Proposição 3. O número é um número irracional.

Prova

Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Isto é, suponha que possamos escrever $\sqrt{2} = m/n$, em que m e n são números inteiros, com $n > 0$, e tais que a fração m/n seja irredutível.

Da igualdade $\sqrt{2} = m/n$, segue que $(m/n)^2 = 2$; donde se conclui que $m^2 = 2n^2$. Dessa última igualdade, segue que 2 é um divisor de m^2 e, consequentemente, um divisor de m. Assim, $m = 2x$ e, portanto, $2n^2 = (2x)^2$, o que nos dá, a igualdade $2n^2 = 4x^2$, ou ainda, $n^2 = 2x^2$. De novo, temos que 2 é divisor de n^2 e, consequentemente, de n. Isso contraria o fato de a fração m/n ser irredutível.

Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

Provando o resultado

Na demonstração da proposição 3, anterior, usamos o fato de que se p é um número primo que divide n^2, então p divide n. Esse resultado é consequência de um resultado mais geral que será provado no lema seguinte.

Lema 4. Se a e b são números inteiros e p é um número primo que é divisor de ab e não é divisor de a, então p é divisor de b.

Prova

Como p é primo e não é divisor de a, o máximo divisor comum entre p e a é 1. Assim, existem inteiros m e n, tais que $mp + na = 1$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por b, obtemos $b = bmp + nab$. Como p é divisor de bmp e p é divisor de ab (por hipótese), temos que p é divisor de b.

Provando o resultado

Assim, como já era do conhecimento dos gregos antigos da época de Pitágoras, os números que chamamos de irracionais, realmente, existem.

[6]Uma raiz quadrada de um número racional positivo a é qualquer número b, tal que $b^2 = a$. Todo número racional positivo a possui duas raízes quadradas: uma positiva, indicada por $\sqrt{a}$, e outra negativa, indicada por $-\sqrt{a}$. Assim, por exemplo, o número racional 4 possui duas raízes quadradas: uma positiva, $\sqrt{4}$, e outra negativa, $-\sqrt{4}$. Observemos que = 2 e - = -2.

3.1. Números reais

Vimos que os números racionais, de certa forma, apresentam uma insuficiência ou deficiência em relação às representações decimais possíveis de serem construídas com os algarismos de 0 a 9. Nem toda representação decimal infinita corresponde a um número racional.

Isso sugere a existência de outra categoria de números, que aceitamos como tais, e chamamos de números irracionais.

Na realidade, chamando tais representações de números, estamos aceitando a existência de novos números sem qualquer prova deste fato.

A prova de que tais números existem só foi concretizada mediante a demonstração de que, que é a medida da diagonal de um quadrado de lados medindo 1 unidade, não é um número racional.

Como isso, postulamos a existência de um conjunto numérico contendo os números racionais e os irracionais: o conjunto dos números reais.

Assim, podemos dizer que número real é todo número que é racional ou irracional. São números reais, entre outros:

i) 2 e 3, por serem números naturais;

ii) -2, 0 e 5, por serem números inteiros;

iii) 3/4 e -2/8, por serem números racionais;

iv) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π, por serem números irracionais.

Assim, o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais. Denotando o conjunto dos números irracionais por Qc e o conjunto dos números reais por R, temos que R = Q $\cup$ Qc.

Embora possa parecer o contrário, mesmo sendo ambos os conjuntos infinitos, em um sentido que será explicado posteriormente, existem mais números irracionais do que números irracionais.

Atividades de avaliação

1. Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional, de maneira semelhante ao que foi feito no texto para $\sqrt{2}$.
2. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.
3. A soma de dois números racionais é sempre um número racional. Mostre por meio de exemplos que é possível que a soma de dois números irracionais seja um número racional. Dê exemplos mostrando que a soma de dois números irracionais pode ser um número irracional.
4. O produto de dois números racionais é sempre um número racional. Mostre por meio de exemplos que é possível que o produto de dois números irracionais seja um número racional. Dê exemplos mostrando que o produto de dois números irracionais pode ser um número irracional.
5. Mostre que se p é primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.
6. Um número natural a é dito um quadrado perfeito se, e somente se, existe um número natural b, tal que $b^2 = a$. Mostre que se o número natural a não for quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é irracional.
7. Mostre que a soma de um número racional com um número irracional é sempre irracional.
8. Mostre que o produto de um número racional por um número irracional é, sempre, um número irracional.

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para licenciatura.** São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números.** Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise,** v.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: SBM/CNPq, 1976.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Números reais.** Tópicos de Matemática Elementar, v.1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Introdução à Análise.** Tópicos de Matemática Elementar, v.3. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Números racionais, reais e complexos.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

Capítulo 2

Conjuntos finitos e conjuntos enumeráveis

Objetivos

- Estudar os conjuntos finitos e os conjuntos infinitos enumeráveis.
- Definir o número de elementos de um conjunto finito e o equivalente desse número para os conjuntos enumeráveis: a cardinalidade de um conjunto.
- Ver que o principal exemplo de conjunto enumerável é o conjunto dos números naturais e que os conjuntos N, Z e Q, possuem a mesma cardinalidade.

Introdução

No capítulo anterior, estudamos os números naturais dando ênfase ao seu aspecto ordinal. Nesta unidade associaremos os números naturais com a quantidade de elementos de um determinado conjunto, abordando, assim, seu aspecto cardinal.

Iniciaremos nosso estudo com a definição de conjunto finito a partir do conjunto In, formado por todos os números naturais desde 1 até n. Em seguida, apresentaremos o conceito de número de elementos de um conjunto finito, ou seja, abordaremos o aspecto cardinal dos números naturais a partir da contagem dos elementos de conjuntos finitos. Por fim, generalizaremos essa ideia de número de elementos para os conjuntos infinitos enumeráveis, chegando ao conceito de cardinalidade de um conjunto qualquer, a partir da noção de equivalência de conjuntos, introduzida por Cantor.

1. Conjuntos finitos

No que foi feito anteriormente, os números naturais foram construídos a partir dos axiomas de Peano e, valendo-nos dessa axiomatização, notadamente, do axioma conhecido como princípio da indução finita (PIF), vimos que é possível definir as operações de adição e de multiplicação com todas as suas propriedades, que assumiremos como conhecidas.

Para cada número natural n, é possível construirmos o conjunto de todos os números naturais menores do que ou iguais a n, o qual será denotado por In.

Para cada número natural n, denotaremos por In o conjunto {1, 2, 3,..., n}.

Assim, para cada número natural n, denotaremos por In o conjunto In = {1, 2, 3,..., n}.

De posse dessa notação, definiremos conjuntos finitos como segue.

De posse dessa notação, definiremos conjuntos finitos como segue. Inicialmente, lembramos que uma função $f: A \longrightarrow B$ é dita injetora, se "dados x, y $\in$ A, com $x \neq y$, temos $f(x) \neq f(y)$"; e é dita sobrejetora, se "dado y $\in$ B, existe x $\in$ A, tal que f(x) = y".

Definição

Um conjunto X é dito finito, se X é vazio ou se, para algum n $\in$ N, existe uma função $f: In \longrightarrow X$, que é injetora e sobrejetora.

Uma função que é injetora e sobrejetora é dita uma função bijetora ou uma bijeção.

Se X é vazio, dizemos que X é finito com 0 (zero) elementos, ou que X possui (ou tem) zero elementos, ou, ainda, que **o número de elementos de X** é zero.

Se, para algum n $\in$ N, existe uma bijeção $f: In \longrightarrow X$, dizemos que X é finito com n elementos, ou que **o número de elementos de X** é n, ou que X possui (ou tem) n elementos.

Observemos que estamos associando ao 0 (zero) e aos números naturais a ideia de quantidade, resultante de uma contagem.

O número de elementos do conjunto X será indicado por n(X). Assim, escreveremos n(X) = p para significar que o conjunto X possui p elementos ou que o número de elementos do conjunto X é p, o que dá no mesmo.

O número de elementos do conjunto X será indicado por n(X).

Exemplo 1. Se a é o conjunto das vogais, então A é finito com 5 elementos. De fato, a função $f: I5 \longrightarrow A$, dada por f(1) = a, f(2) = e, f(3) = i, f(4) = o e f(5) = u, é injetora e sobrejetora, ou seja, é uma bijeção de I5 em A.

Exemplo 2. Se B = {N, S, L, O} é o conjunto dos pontos cardeais, norte (N), sul (S), leste (L) e oeste (O), então a função $f: I4 \longrightarrow B$, dada por f(1) = N, f(2) = S, f(3) = L e f(4) = O, é uma bijeção de I4 em B e, portanto, B é finito e possui 4 elementos.

Exemplo 3. Cada conjunto In é finito e possui n elementos, uma vez que a função $f: In \longrightarrow In$, dada por f(x) = x, é uma bijeção.

Exemplo 4. O conjunto C, dos dias da semana cujos nomes começam com a letra b, é finito com 0 (zero) elementos. De fato, como os nomes dos dias da semana são domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira e sábado, o nome de nenhum deles começa com a letra b. Logo, o conjunto C é vazio, possuindo, portanto, zero elementos.

Uma bijeção $f: In \longrightarrow X$ pode ser vista como uma contagem dos elementos de X, uma vez que a bijeção escolhida não é o importante, basta que provemos sua existência para que possamos dizer que o conjunto X é finito com n elementos. Assim, a ordem dada aos elementos de X não interessa. No caso do exemplo 03 anterior, podemos tomar, por exemplo, a bijeção $g: In \longrightarrow In$, dada por $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4, \ldots, g(n) = 1$, que teria o mesmo efeito.

Para refletir

1. Mostre que se X e Y são conjuntos não vazios e se existe uma bijeção de X em Y, então X é finito se, e somente se, Y é finito.
2. Defina todas as bijeções de I5 em A, para o caso do conjunto A do exemplo 1.
3. Defina todas as bijeções de I4 em B, no caso em que B é o conjunto do exemplo 2.

1.1. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito

É intuitivo que um conjunto com 3 elementos não pode e não terá, nunca, 4 elementos. Em outras palavras, se existir uma bijeção $f: I3 \longrightarrow X$ não poderá existir uma bijeção $g: I4 \longrightarrow X$. Em outras palavras, o número de elementos é uma propriedade bem definida de cada conjunto finito.

Mostraremos esse fato, provando que se $f: In \longrightarrow X$ e $g: Im \longrightarrow X$ são duas bijeções, então n = m.

Obteremos que n = m, como consequência do resultado mais geral, apresentado na proposição seguinte.

Os números n e m devem ser iguais, mas as bijeções f e g podem ser diferentes.

Proposição 4

Se $A \subset In$ e A $\emptyset$ e se $f: In \longrightarrow A$ é uma bijeção, então A = In.

Prova. Demonstraremos o resultado por indução sobre o número n.

Se n = 1, então In = I1 = {1} e, como $A \neq \emptyset$ e $A \subset In$, devemos ter A = I1 = In.

Suponha que o resultado seja válido para n=k, isto é, suponha que se $A \neq \emptyset$, $A \subset In$, e se existe uma bijeção f, $f: Ik \longrightarrow A$, então A = Ik.

Para n = k + 1, seja $A \neq \emptyset$, $A \subset Ik$, e $f: Ik + 1 \longrightarrow A$, uma bijeção. Vamos mostrar que A = Ik + 1.

Sejam a = f(k + 1) e B = A – {a}.

Se a = k + 1, a restrição de f ao conjunto Ik, indicada por : $Ik \longrightarrow B$ e definida por (x) = f(x), é uma bijeção. Desde que $B \neq \emptyset$ e $B \subset Ik$, por hipótese de indução, devemos ter a igualdade B = Ik.

Como $A = B \cup \{a\}$, devemos ter $A = Ik \cup \{k + 1\} = Ik + 1$, mostrando o resultado.

Se $a \neq k + 1$, seja $b \in Ik + 1$, tal que f(b) = k + 1.

Defina : $Ik + 1 \longrightarrow A$, por =

Assim, : $Ik + 1 \longrightarrow A$ é uma bijeção tal que f(k + 1) = k + 1, recaindo no caso anterior, em que a = k + 1.

Logo, A = Ik + 1.

Provando o resultado.

Como consequência da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário

Se f: Im $\longrightarrow$ In é uma bijeção, então m = n.

Prova. Observemos inicialmente que se f: Im $\longrightarrow$ In é uma bijeção, então f-1: In $\longrightarrow$ Im, definida por "f-1(y) = x se, e somente se f(x) = y", também é uma bijeção.

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que m   n e, consequentemente, Im $\subset$ In.

De acordo com a proposição, como Im $\neq \varnothing$, Im $\subset$ In e existe uma bijeção

f: Im $\longrightarrow$ In, segue que Im = In e, obviamente, m = n.

Provando o resultado.

Usando esse corolário, podemos concluir que o número de elementos de um conjunto finito X é definido sem ambiguidade.

O número de elementos de um conjunto finito X é definido sem ambiguidade.

De fato, se X é vazio, e somente nessa situação, o número de elementos de X é zero.

Se X é finito e não vazio, sejam f: In $\longrightarrow$ X e g: Im $\longrightarrow$ X duas bijeções.

Como sabemos g - 1: X $\longrightarrow$ Im também é uma bijeção e, portanto, g - 1of: In $\longrightarrow$ Im é uma bijeção.

Pelo corolário, m = n, provando que não existe ambiguidade no conceito de número de elementos de um conjunto finito, ou seja, provando a proposição seguinte.

Proposição 4

Se f: Im $\longrightarrow$ X e f: In $\longrightarrow$ X são duas bijeções, então m = n, ou seja, o número de elementos de um conjunto foi definido sem ambiguidade.

Para refletir

1. Seja g: X $\longrightarrow$ Y uma bijeção. Mostre que a função g-1: Y $\longrightarrow$ X, dada por "g-1(y) = x se, e somente se g(x) = y", também é bijeção.
2. Mostre que se X é um conjunto finito e Y é um subconjunto de X, então não pode existir uma bijeção f: X $\longrightarrow$ Y. O lema a seguir afirma que todo subconjunto de In é finito e possui, no máximo, n elementos.

Lema

Seja X $\subset$ In para algum n $\in$ N. Então X é finito e o número de elementos de X é menor do que ou igual a n.

Prova. Provaremos o resultado por indução sobre n.

Se $n = 1$, os únicos subconjuntos de $I1$ são $\varnothing$ e $I1$, que são finitos com 0 e 1 elementos, respectivamente. Provando o resultado.

Suponha que o resultado seja válido para $n = k$.

Isto é suponha que se $X \subset Ik$, então X é finito e o número de elementos de X é menor do que ou igual a n.

Para $n = k + 1$, seja $X \subset Ik+1$.

Se $X \subset Ik$, então, por hipótese de indução, X é finito e o número de elementos de X é menor do que ou igual a k que, por sua vez, é menor do que ou igual a $k + 1$. Provando o resultado.

Se $X \not\subset Ik$, então $k + 1 \in X$ e, nestas condições $X - \{k + 1\} \subset Ik$.

Por hipótese de indução, $A = X - \{k + 1\}$ é finito e o número de elementos de A é menor do que ou igual a k.

Assim, existem $p \in N$, com $p \quad k$, e $f: Ip \longrightarrow A$, uma bijeção.

A partir de f definiremos uma bijeção $g: Ip+1 \longrightarrow X$, como segue.

Façamos $g(x) = f(x)$, se $x \in A$ e $g(p + 1) = k + 1$.

Assim, $g: Ip+\rightarrow X$ é uma bijeção e, portanto, X é finito, com $p + 1$ elementos, e, desde que $p \quad k$, segue que $p + 1 \leq k + 1$.

Portanto, para $n = k + 1$, todo subconjunto de In é finito com número de elementos menor do que ou igual a $k + 1$.

Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Provando o lema.

Tomando como base o lema anterior, vamos mostrar que todo subconjunto de um conjunto finito é finito e seu número de elementos não ultrapassa o número de elementos do conjunto.

Denotando por Y o conjunto finito e por X um subconjunto de Y, temos que existem $p \in N$ e uma função $f: Ip \longrightarrow Y$, que é uma bijeção.

Dado $X \subset Y$, tomemos o conjunto $f - 1(X)$, que está contido em Ip.

Pelo lema, $f\text{-}1(X)$ é finito e seu número de elementos é menor do que p.

Denotando por q ($q \leq p$) o número de elementos de $f - 1(x)$, existe uma bijeção $g: Iq \longrightarrow f - 1(X)$.

A função fog: $Iq \longrightarrow X$, definida por $fog(x) = f(g(x))$, é uma bijeção e, portanto, X é finito com q elementos, com $q \leq p$.

Isso prova a proposição seguinte.

Proposição 5

Todo subconjunto de um conjunto finito é finito e seu número de elementos não ultrapassa o número de elementos do conjunto.

Para ilustrar o que foi feito

Tomemos para Y o conjunto {r, s, t, u, v, x, y, z}, que é finito com 8 elementos, e para X o conjunto {t, u, v, x}, que é um subconjunto de Y. Como Y possui 8 elementos, existe uma bijeção f: I8 $\longrightarrow$ Y. Digamos que f(1) = r, f(2) = s, f(3) = t, f(4) = n, f(5) = o, f(6) = x, f(7) = y e f(8) = z.

O conjunto f-1(X) é dado por f-1(X) = { 3, 4, 5, 6 }.

Como f - 1(x) tem 4 elementos, a função g: I4 $\longrightarrow$ f - 1(X), dada por g(n) = n + 2, ou seja, g(1) = 3, g(2) = 4, g(3) = 5 e g(4) = 6 é uma bijeção de I4 em f - 1(X).

Assim fog: I4 $\longrightarrow$ X, seria dada por:

fog(1) = f(g(1)) = f(3) = t;

fog(2) = f(g(2)) = f(4) = n;

fog(3) = f(g(3)) = f(5) = v;

fog(4) = f(g(4))= f(6) = x.

Mostrando que fog é uma bijeção de I4 em X e que, consequentemente, X é finito com 4 elementos.

Para refletir

1. Repita o quadro Para ilustrar o que foi feito para dois outros exemplos de conjunto Y.
2. Exercício. Verifique, por meio de exemplos, que não pode existir uma função injetora f: X $\longrightarrow$ Y de um conjunto infinito X em um conjunto finito Y.
3. Exercício. Verifique, por meio de exemplos, que não pode existir uma função sobrejetora f: X $\longrightarrow$ Y de um conjunto finito X em um conjunto infinito Y.

1.2. A adição de números naturais

Os resultados a seguir estão relacionados coma a adição de números naturais. Iniciaremos com casos particulares para, em seguida, passarmos ao caso geral.

Exemplo 5. Sejam A = {a, e, i, o} e B = {1, 2, 3, 4, 5} dois conjuntos disjuntos com quatro e cinco elementos, respectivamente. O conjunto união de A com B, ou seja, o conjunto A$\cup$B dado por A$\cup$B = {a, e, i, o, 1, 2, 3, 4, 5} é um conjunto finito com nove elementos: os quatro de A e os cinco de B.

Exemplo 6. Sejam A = {a, b, c} e B = {d, e, g, h} dois conjuntos disjuntos com três e quatro elementos, respectivamente. O conjunto A $\cup$ B, ou seja, o conjunto união de A com B é dado por A $\cup$ B = {a, b, c, d, e, g, h} e é um conjunto finito com sete elementos: os três de A e os quatro de B.

Exemplo 7. Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {7, 8, 9, 10} e C = {11, 12}, conjuntos dois a dois disjuntos, isto é, conjuntos tais que quaisquer dois deles não possuem elementos em comum. O conjunto união de A com B e com C é dado por $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e possui doze elementos: os seis de A, os quatro de B e os dois de C.

O número de elementos do conjunto união de dois conjuntos finitos e disjuntos é a soma dos números de elementos desses conjuntos.

Exemplo 8. Sejam A = {4, 5, 6, 7 8} e B = {7, 8, 9, 10} conjuntos com 5 e 4 elementos, respectivamente. O conjunto união de A com B é dado por $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e possui sete elementos. Observemos que ele possui os cinco elementos de A e os quatro elementos de B, mas não possui nove elementos, uma vez que A e B possuem os elementos 7 e 8 em comum e, que, não podem ser contados duas vezes na união.

Esses exemplos nos permitem conjecturar que o número de elementos do conjunto união de dois ou mais conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, é a soma dos números de elementos dos conjuntos envolvidos nessa união. Essa é exatamente a ideia de juntar (e contar) associada à adição de números naturais.

Generalizando o que foi feito anteriormente, temos a seguinte proposição.

Proposição

Se X e Y são conjuntos finitos e disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então o conjunto $X \cup Y$ é finito e possui m + n elementos.

Prova. Para mostramos a proposição, basta que exibamos uma bijeção

$h: I_{m+n} \longrightarrow X \cup Y$.

Como X e Y são finitos com m e n elementos, respectivamente, existem bijeções $f: I_m \longrightarrow X$ e $g: I_n \longrightarrow Y$. Defina $h: I_{m+n} \longrightarrow X \cup Y$ por: $h(x) = f(x)$, se $1 \leq x \leq m$; e $h(m + x) = g(x)$, se $1 \leq x \leq n$.

Vamos mostrar que $h: I_{m+n} \longrightarrow X \cup Y$ é, realmente, uma bijeção.

Inicialmente, mostraremos que h é sobrejetora.

Seja $y \in X \cup Y$. Assim, $y \in X$ ou $y \in Y$, mas não pertence a ambos.

Se $x \in X$, como f é sobrejetora, existe $i \in I_m$, com $1 \leq i \leq m$, tal que $f(i) = x$ e, consequentemente, $h(i) = f(i)$.

Se $x \in Y$, como g é sobrejetora, existe $i \in I_n$, com $1 \leq i \leq n$, tal que $g(i) = x$ e, consequentemente, $h(m + i) = g(i)$.

Assim, h é sobrejetora.

Mostraremos, agora, a injetividade de h.

Sejam $u, v \in I_{m+n}$ e suponha que $h(u) = h(v)$.

Estudaremos 4 casos:

$1 \leq u, v \leq m$;

$m + 1 \leq u, v \leq m + n$;

$1 \leq u \leq m$ e $m + 1 \leq v \leq m + n$;

$1 \leq v \leq m$ e $m + 1 \leq u \leq m + n$.

Caso (i): $1 \leq u, v \leq m$.

Neste caso, temos que $h(u) = f(u)$ e $h(v) = f(v)$. Como, por hipótese, $h(u) = h(v)$, temos $f(u) = f(v)$ e, portanto, $u = v$, pois f é uma bijeção. Mostrando que h é injetora.

Caso (ii): $m + 1 \leq u, v \leq m + n$.

Neste caso, temos que $h(u) = g(u - m)$ e $h(v) = g(v - m)$. Como estamos supondo que $h(u) = h(v)$, temos $g(u - m) = g(v - m)$ e, como g é uma bijeção, $u - m = v - m$. Assim, $u = v$. Mostrando que, também neste caso, h é injetora.

Caso (iii): $1 \leq u \leq m$ e $m + 1 \leq v \leq m + n$.

Neste caso, temos que $h(u) = f(u) \in X$ e $h(v) = f(v) \in Y$ e, portanto, não podemos ter a igualdade $h(u) = h(v)$. Logo, esse caso não pode acontecer.

Caso (iv): $1 \leq v \leq m$ e $m + 1 \leq u \leq m + n$.

Neste caso, temos que $h(v) = f(v) \in X$ e $h(u) = g(u) \in Y$ e, portanto, não podemos ter a igualdade $h(u) = h(v)$. Logo, esse caso também não pode acontecer.

Isso mostra que h é injetora.

Como $f\colon Im{+}n \longrightarrow X \cup Y$ é injetora e sobrejetora, f é uma bijeção e, portanto, $X \cup Y$ possui m+n elementos.

Provando o resultado.

Para ilustrar o que foi feito

Tomemos para X o conjunto {t, u, v, x}, que é finito com 4 elementos, e para Y o conjunto {q, r, s}, que é um conjunto finito com 3 elementos.

Assim, existem bijeções $f\colon I4 \longrightarrow X$ e $g\colon I3 \longrightarrow Y$.

Digamos que f e g sejam tais que $f(1) = t$, $f(2) = u$, $f(3) = v$ e $f(4) = x$; e $g(1) = q$, $g(2) = r$ e $g(3) = s$.

A bijeção $h\colon I4 + 3 \longrightarrow X \cup Y$ será dada por:

$h(1) = f(1) = t$;

$h(2) = f(2) = u$;

$h(3) = f(3) = v$;

$h(4) = f(4) = x$;

$h(5) = h(4 + 1) = g(1) = q$;

$h(6) = h(4 + 2) = g(2) = r$; e

$h(7) = h(4 + 3) = g(3) = s$.

Observemos que é impossível à função h ser igual à função f e à função g, ao mesmo tempo.

O resultado a seguir é uma generalização da proposição anterior para o caso de três conjuntos.

Corolário

Se X, Y e V são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, com m, n e p elementos, respectivamente, então o conjunto $X \cup Y \cup V$ é finito e possui m + n + p elementos.

Prova. Para mostrarmos o corolário, é só ajustarmos a função h, para o caso de 3 funções: uma de Im em X; outra de In em Y; e outra de Ip em V.

Provando o resultado.

Para refletir

1. Exercício. Repita o quadro Para ilustrar o que foi feito para dois outros exemplos de conjuntos X e Y e de bijeções f e g.
2. Exercício. Exemplifique como seria a demonstração do corolário 08, no caso de 3 conjuntos dois a dois disjuntos.
3. Exercício. Exemplifique como seria a demonstração do corolário 08, no caso de 4 conjuntos dois a dois disjuntos.

Por indução, é possível mostrarmos que o corolário 08 também se aplica a qualquer quantidade finita de conjuntos finitos, dois a dois disjuntos.

No exemplo 8, vimos que para os conjuntos A = {4, 5, 6, 7 8} e B = {7, 8, 9, 10} a proposição 05 não se aplica. O número de elementos de $A \cup B$ não é igual à soma entre o número de elementos de A e o número de elementos de B. Isso ocorre porque os conjuntos A e B não são disjuntos. Eles possuem dois elementos em comum e, por isso, o número de elementos de $A \cup B$ não é 5 + 4, sendo igual a (5 + 4) – 2.

No exemplo, quando fazemos 5 + 4, estamos contando duas vezes os elementos 7 e 8: uma vez no cinco, quando contamos os elementos de A; e outra vez no quatro, quando contamos os elementos de B.

Isso pode ser corrigido se transformarmos o conjunto $A \cup B$ na união de três conjuntos, dois a dois disjuntos, quais sejam A - B, $A \cap B$ e B - A.

Observemos que, no exemplo, A - B = {4, 5, 6}, $A \cap B$ = {7, 8} e B - A = {9, 10}.

Assim, $A \cup B$ = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} = $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ e, portanto, o número de elementos de $A \cup B$, que é 7, pode ser obtido como o resultado da adição 3 + 2 + 2, cujas parcelas são os números de elementos dos conjuntos (A - B), $(A \cap B)$ e (B - A), respectivamente.

Observemos ainda que o número de elementos de A - B é igual à diferença entre o número de elementos de A e o número de elementos de $A \cap B$. Em símbolos, temos

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$.

De maneira semelhante, podemos generalizar esse resultado para conjuntos quaisquer, conforme afirma a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser feita a partir do corolário 2 anterior, observando que os conjuntos A - B, B - A e $A \cap B$ são finitos e dois a dois disjuntos.

Proposição 7

Dados os conjuntos finitos A e B, o número de elementos de $A \cup B$ é dado por $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Por indução, é possível mostrar que esse resultado se generaliza para uma quantidade finita de conjuntos finitos, conforme sugerimos nos exercícios.

1.3. A multiplicação de números naturais

Os resultados a seguir estão relacionados com a multiplicação de números naturais. Como no caso da adição, também iniciaremos com alguns exemplos que ilustram a relação entre a multiplicação de números inteiros e o produto cartesiano de conjuntos. Em seguida, passaremos para o caso geral.

Exemplo 9. Sejam A = {4, 5, 6} e B = {a, b} conjuntos com 3 e 2 elementos, respectivamente. O produto cartesiano de A por B é A × B = {(4, a), (4, b), (5, a), (5, b), (6, a), (6, b)}. Observemos que o conjunto A × B possui 6 elementos, e 6 = 3 × 2 é o produto entre o número de elementos de A, que é 3, e o número de elementos de B, que é 2.

Exemplo 10. Sejam A = {a, b} e B = {4, 5, 6} conjuntos com 2 e 3 elementos, respectivamente. O conjunto A × B é dado por A × B = {(a, 4), (a, 5), (a, 6), (b, 4), (b, 5), (b, 6)} e possui 6 elementos.

Exemplo 11. Se $A = \varnothing$ e B é um conjunto finito qualquer, então $A \times B = \varnothing$ e, também nestas condições, vale o produto $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

Os exemplos anteriores sugerem que para conjuntos A e B finitos, o número de elementos de A × B é igual ao produto entre o número de elementos de A e o número de elementos de B. Além disso, sugere ainda que vale a propriedade comutativa da multiplicação de números inteiros.

O que foi feito anteriormente será formalizado no que segue.

Proposição 8

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios com m e n elementos, respectivamente. O número de elementos de $A \times B$, o produto cartesiano de A por B, pode ser obtido pela igualdade $n(A \times B) = mn$.

Prova. A prova desta proposição será feita por indução sobre o número de elementos do conjunto B.

Assim, iniciaremos com um conjunto A, não vazio, finito com m elementos, digamos A = {a1, a2, a3, ..., am}, e B = {b1, b2, b3, ..., bn} um conjunto não vazio, finito, com n elementos.

Para n = 1, seja B = {b1} = {b} um conjunto com 1 elemento.

Cada bijeção f: Im $\longrightarrow$ A define uma bijeção f': Im $\longrightarrow$ $A \times B$, dada por f'(i) = (f(i), b), para cada $i \in$ Im.

Assim, o conjunto $A \times B$ possui m elementos.

E como $m = m \times 1$, vale o resultado.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para n = k - 1, isto é, suponha que se B é um conjunto com k - 1 elementos, então o número de elementos do conjunto $A \times B$ é $m \times (k - 1)$.

Para n = k, sejam B = {b1, b2, b3, ..., bk} e C um subconjunto de B com k - 1 elementos. Podemos, sem perda de generalidade e reenumerando os elementos de B, se for o caso, supor que o conjunto C é dado por C = {b1, b2, b3, ..., bk - 1}.

Assim, $B = C \cup \{bk\}$ e, consequentemente,

$A \times B = A \times (C \cup \{bk\}) = A \times C \cup A \times \{bk\}$.

Como os conjuntos $A \times C$ e $A \times \{bk\}$ são disjuntos, temos que

$n(A \times B) = n(A \times C) + n(A \times \{bk\})$.

Por hipótese de indução, temos que $n(A \times C) = mx(k - 1)$; e pelo que foi feito para n = 1, temos que $n(A \times \{bk\}) = m \, x \, 1$. Daí, segue que vale a igualdade

$n(A \times B) = n(A \times C) + n(A \times \{bk\}) = mx(k - 1) + mx1 = mx(k - 1 + 1) = mxk$.

Provando o resultado.

Para refletir

1. Exercício. Faça a demonstração da proposição 9.
2. Exercício. Enuncie e demonstre para o caso de três conjuntos o correspondente da proposição 9.
3. Exercício. Mostre que a função f' mencionada na prova da proposição 10 é, realmente, uma bijeção.

1.4 Conjuntos infinitos

Os conjuntos que não são finitos são ditos conjuntos infinitos. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição

Seja X um conjunto. Dizemos que X é infinito se $X \neq \emptyset$ e se não existe uma bijeção $f: I_m \longrightarrow X$, qualquer que seja $m \in N$.

Exemplo 12: O conjunto N dos números naturais é infinito. De fato, tomemos uma função $f: I_n \longrightarrow N$, para algum $n \in N$, e consideremos o número natural $y = f(1) + f(2) +...+ f(n)$. Temos que $y > f(i)$, qualquer que seja $i = 1, 2, 3, ..., n$ e, consequentemente, $y \notin Im(f)$. Assim f não é uma bijeção e, portanto, N é infinito.

Exemplo 13: Foi mostrado na proposição 04 que todo subconjunto de um conjunto finito é finito. Assim, como N é um conjunto infinito, qualquer conjunto que contenha N também será infinito. Logo, o conjunto Z, dos números inteiros, e o conjunto Q, dos números racionais, são ambos infinitos.

O resultado a seguir nos permite mostrar, por exemplo, que o conjunto dos números pares, entre outros subconjuntos de N, é infinito.

Proposição 9

Sejam X um conjunto não vazio e Y um subconjunto próprio de X. Se existe uma bijeção $f: X \longrightarrow Y$, então X é infinito.

Prova. Sejam X um conjunto não vazio, Y um subconjunto próprio de X, isto é, um subconjunto de X, não vazio e diferente de X, e $f: X \longrightarrow Y$ uma bijeção.

Suponha que X é finito.

Pelo que já foi feito anteriormente, Y é finito e o número de elementos de Y é menor do que o número de elementos de X.

Denotando por m e n o número de elementos de X e de Y, respectivamente, temos $n < m$.

Assim, existem bijeções $g: I_n \longrightarrow Y$ e $h: I_m \longrightarrow X$.

Como $f: X \longrightarrow Y$ é uma bijeção, a função g-1ofoh: $I_m \longrightarrow I_n$ é uma bijeção, o que é absurdo.

Como a única suposição adicional que fizemos foi "X ser finito", essa é a hipótese que não é verdadeira, consequentemente, X é infinito.

Provando o resultado.

O que acabamos de provar pode ser traduzido como "não existe bijeção de um conjunto finito em um seu subconjunto próprio" ou ainda "só pode existir bijeção de um conjunto X em um seu subconjunto próprio, se X for infinito".

Com esse resultado, podemos ampliar o nosso "leque" de conjuntos infinitos.

Exemplo 14. O conjunto P, dos números naturais pares, é um conjunto infinito. De fato, P é subconjunto próprio de N e a função f: N $\longrightarrow$ P, dada por f(n) = 2n, é uma bijeção.

Exemplo 15. O conjunto dos números naturais ímpares é um conjunto infinito. De fato, denotando por I o subconjunto dos números naturais ímpares, temos que I é subconjunto próprio de N e a função f: N $\longrightarrow$ I, dada por f(n) = 2n - 1, é uma bijeção.

Exemplo 16. O conjunto 3N, dos números naturais múltiplos de 3, é um conjunto infinito, pois 3N é subconjunto próprio de N e a função f: N $\longrightarrow$ 3N, dada por f(n) = 2n - 1, é uma bijeção.

1.5. Conjuntos limitados

Outro conceito bastante importante no estudo dos conjuntos finitos é o de subconjunto limitado de números naturais.

Intuitivamente, temos a ideia do que venha a ser um conjunto limitado.

Exemplo 17. O conjunto P, dos números naturais pares não é limitado, pois é sempre possível encontrar um número par maior do que qualquer número dado.

Exemplo 18. O conjunto dos números naturais pares menores do que 18, ou seja, o conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16} é limitado; limitado, por exemplo, pelo número 20. Todos os números do conjunto A são menores do que 20, estando entre 1 e 20.

Exemplo 19. O conjunto B, dos divisores naturais de 10, é um conjunto limitado. De fato, B = {1, 2, 5, 10} é limitado pelo número 10.

Intuitivamente, ainda, podemos concluir que todo conjunto limitado deve ser, obrigatoriamente, finito; enquanto, qualquer conjunto não limitado deve ser, necessariamente, infinito. Os conjuntos que não são limitados são ditos ilimitados.

Mais precisamente, temos as seguintes definições.

Definição

Um conjunto $X \subset N$ é dito limitado, se X é não vazio e se existe $c \in N$, tal que $x \leq c$, para todo $x \in X$.

O número natural c, na definição anterior, é chamado de cota superior ou limite superior para o conjunto X.

É importante observarmos que se c é uma cota superior ou limite superior para X, então qualquer número maior do que c também será uma cota superior para X.

O resultado a seguir, que será apresentado sem demonstração, caracteriza definitivamente os subconjuntos finitos de N.

Proposição 10

Seja X um subconjunto não vazio de N. As três afirmações a seguir são equivalentes:

(i) X é finito;

(ii) X é limitado;

(iii) X possui maior elemento.

Uma demonstração completa da equivalência entre os itens dessa proposição pode ser feita utilizando o Princípio da Boa Ordenação (PBO) que é equivalente ao Princípio da Indução Finita (PIF) e pode ser enunciado como segue.

Proposição 11

Princípio da Boa Ordenação (PBO). Todo subconjunto não vazio de números naturais possui menor elemento. Ou, simbolicamente, se $X \subset N$ e $X \neq \emptyset$, então $\exists$ x0 $\in$ X, tal que x0 $\leq$ x, $\forall$ x $\in$ X.

Entretanto, partes da demonstração podem ser feitas de forma até simples, utilizando o que já conhecemos. Por exemplo, para mostrarmos que se X é finito não vazio, então X é limitado, basta que escrevamos os elementos de X como x_1, x_2, ..., xn e observarmos que $x_1 + x_2 + x_3 + ... +$ xn é uma cota superior de X, uma vez que é maior do x_i, para todo i = 1, 2, ..., n. Consequentemente, X é limitado.

Para mostrarmos que se X possui maior elemento, então X é finito, basta observarmos que denotando por p o maior elemento de X, temos que $X \subset$ Ip e, consequentemente, X é finito por ser subconjunto de um conjunto finito.

2. Conjuntos enumeráveis

Diferentemente do que podemos pensar, podemos estender a ideia de número de elementos para os conjuntos infinitos. Esta extensão dá origem ao conceito de cardinalidade de um conjunto que, no caso dos conjuntos infinitos, coincide com o número de elementos do conjunto.

Esta ideia nos permite perceber que existem vários tipos de infinito, fato este sistematizado pelo matemático alemão George Cantor que mostrou que existem vários tipos de infinito, dentre os quais o mais elementar ou “menor” é o infinito dos números naturais.

Iniciaremos este estudo a definição de equivalência de conjuntos.

Definição

Dizemos que os conjuntos X e Y são equivalentes se são ambos vazios ou se existe f: $X \longrightarrow Y$ uma bijeção.

Lembremos que já foi mostrado, para o caso de conjuntos finitos não vazios, que somente existe uma bijeção de X em Y se X e Y possuírem a mesma quantidade de elementos. Assim, no caso de conjuntos finitos não vazios, dizemos que X e Y são equivalentes se ambos possuírem a mesma quantidade de elementos.

Definição

Dizemos que os conjuntos X e Y possuem a mesma cardinalidade, se são equivalentes.

Vamos agora estudar os conjuntos que são equivalentes ao conjunto dos números naturais. Esses conjuntos são chamados de conjuntos enumeráveis e a eles está associada a menor categoria de infinito, de acordo com a classificação de Cantor.

Mais precisamente temos a definição seguinte.

Definição

Dizemos que o conjunto X é enumerável se X é finito ou se existe uma bijeção f: $N \longrightarrow X$.

Exemplo 20. O conjunto dos números naturais é enumerável, pois a função f: $N \longrightarrow N$, dada por $f(x) = x$, para todo x, $x \in N$, é uma bijeção.

Exemplo 21. O conjunto P, dos números naturais pares, é enumerável, pois a função f: $N \longrightarrow P$, dada por $f(x) = 2x$, para todo x, $x \in N$, é uma bijeção.

Exemplo 22. O conjunto Z, dos números inteiros, é enumerável. A função f: $N \longrightarrow Z$, dada por $f(x) = n$, se $x = 2n$, e $f(x) = - n + 1$, se $x = 2n – 1$, é uma bijeção.

Para refletir

1. Exercício. Mostre que a função f: $N \rightarrow Z$, dada por $f(x) = n$, se $x=2n$, e $f(x)=-n+1$, se $x = 2n – 1$, é uma bijeção.
2. Exercício. Mostre que o conjunto dos números ímpares é enumerável.
3. Exercício. Mostre que o conjunto dos múltiplos de 2 e 3 ao mesmo tempo é um conjunto enumerável.

Vimos que a união de dois conjuntos finitos é ainda um conjunto não finito. E o que ocorre quando fazemos a união de dois conjuntos enumeráveis.

Será que obteremos um conjunto enumerável? A resposta é sim e sua demonstração será feita posteriormente. Por enquanto, nos contentaremos com a proposição seguinte.

Proposição 12

Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O conjunto união $X \cup Y$ é um conjunto enumerável.

Como consequência dessa proposição, temos que a união de 3 conjuntos enumeráveis é, ainda, um conjunto enumerável. Na realidade, podemos mostrar por indução que a união de qualquer quantidade finita de conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Outro resultado importante sobre os conjuntos enumeráveis afirma que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Esse resultado pode ser obtido como consequência da seguinte proposição.

Proposição 13

Todo subconjunto X do conjunto dos números naturais é enumerável. Em símbolos, se $X \subset N$, então X é enumerável.

Prova

Seja $X \subset N$, um subconjunto do conjunto dos números naturais.

Se X é finito, então X é enumerável.

Se X não é finito, vamos definir uma função $f: N \longrightarrow X$, como segue.

Pelo Princípio da Boa Ordenação (PBO), X possui menor elemento, digamos x1. Façamos f(1) = x1.

Seja X2 = X – {x1}.

Novamente, usando o PBO, tomamos x2, o menor elemento de X2 e fazemos f(2) = x2.

Supondo escolhidos f(1) = x1 < f(2) = x2 < ... < f(n) = xn, podemos fazer f(n + 1) = xn+1, em que xn+1 é o menor elemento de Xn+1, em que Xn+1 = X – {x1, x2, x3, ... , xn}.

Tal elemento existe, uma vez que X é infinito e, portanto, Xn+1 é diferente do vazio e, pelo PBO, possui menor elemento.

Provando o resultado.

Para ilustrar o que foi feito

Ilustraremos o que foi feito na demonstração da proposição anterior, para o subconjunto X de N, dado por

X = {51, 57, 71, 77, 91, 97, 111, 117, 131, 137,...}.

Observemos inicialmente como é feita a construção de X, ou seja, como é feita a escolha dos elementos de X: o algarismo das unidades ou é 1 ou é 7; e os números que são elementos de X contém uma quantidade ímpar de dezenas, a partir do 5 (inclusive). Assim, $211 \in X$, pois o algarismo das unidades é 1 e o número possui 21 dezenas.

Vamos definir uma função $f: N \longrightarrow X$, como na demonstração da proposição.

O menor elemento de X é 51. Assim, definimos $f(1) = 51$.

Tomamos agora o conjunto $X2 = X - \{51\}$.

O menor elemento de X2 é 57 e, portanto, devemos fazer $f(2) = 57$.

Passamos, então, ao conjunto $X3 = X - \{51, 57\}$.

O menor elemento de X3 é 71, e fazemos, então, $f(3) = 71$.

E assim por diante.

Para determinarmos f(31), por exemplo, procedemos como segue:

desde que 31 é ímpar, o algarismo das unidades de f(31) é 1;

além disso, f(31) possui 31 + 4 = 35 dezenas;

assim, $f(31) = 351$;

$f(32) = 357$.

Se quisermos determinar a lei de formação de f, para sabermos a imagem de qualquer natural dado, podemos pensar da seguinte forma:

(i) cada número ímpar e seu sucessor são tais que suas imagens possuem a mesma quantidade de dezenas;

(ii) o algarismo das unidades da imagem de um número ímpar será, sempre, 1;

(iii) o algarismo das unidades da imagem de um número par será, sempre, 7;

(iv) o número de dezenas da imagem de um número ímpar n será $n + 4$;

(v) o número de dezenas da imagem de um número par n será $n -1 + 4$;

Como dissemos, como consequência dessa proposição, temos o seguinte corolário.

Corolário

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Outro resultado bastante interessante sobre os conjuntos enumeráveis e que apresentaremos sem demonstração é a proposição seguinte.

Proposição 14

Todo conjunto infinito X possui um subconjunto infinito enumerável.

Para refletir

1. Tome alguns subconjuntos enumeráveis de N para exemplificar concretamente o corolário anterior.
2. Mostre que se f: X → Y é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.
3. Mostre que se f: X → Y é sobrejetora e X é enumerável, então Y é enumerável.

2.1. A enumerabilidade de Q

Para quem já se surpreendeu com o fato de Z e N possuírem a mesma cardinalidade, ou seja, a "mesma quantidade de elementos", finalizaremos esta Unidade mostrando um resultado mais surpreendente ainda: a enumerabilidade do conjunto dos números racionais. Ou seja, mostraremos que Q, Z e N possuem a mesma cardinalidade, o mesmo "número de elementos". Serão apresentadas duas demonstrações: uma direta e outra como consequência de um resultado mais geral e mais surpreendente ainda.

Inicialmente, vamos observar que é possível uma distribuição dos números racionais não negativos, escritos na forma de fração, de acordo com a soma entre seu numerador e seu denominador, como no quadro a seguir.

Quadro 5

DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS										
Soma	**Frações**									
1	0/1									
2	0/2	1/1								
3	0/3	½	2/1							
4	0/4	1/3	2/2	3/1						
5	0/5	¼	2/3	3/2	4/1					
6	0/6	1/5	2/4	3/3	4/2	5/1				
7	0/7	1/6	2/5	3/4	4/3	5/2	6/1			
8	0/8	1/7	2/6	3/5	4/4	5/3	6/2	7/1		
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	
⋮	...									

Podemos, aproveitando os elementos das linhas e colunas do quadro e denotando por Q' o conjunto de todos os elementos do quadro, definir uma função f: N ⟶ Q' como segue: definimos f(1) como o primeiro elemento da primeira linha; f(2), como o primeiro elemento da segunda linha; f(3), como o segundo elemento da segunda linha; e assim por diante, linha por linha, até esgotar todos os elementos de cada linha, de acordo com a ordem que ocupam na linha. Observe que, f é uma bijeção de N em Q" e, portanto, Q' é um conjunto enumerável.

Considerando as classes de equivalência das frações de Q', podemos perceber que o conjunto Q+, dos racionais não negativos, é subconjunto de Q' e, como tal, é um conjunto enumerável.

De maneira semelhante, mostramos que Q^- é enumerável e, desde que $Q = Q^+ \cup Q^-$ e a união de conjuntos enumeráveis é enumerável, temos que o conjunto Q, dos números racionais, é enumerável.

Outra demonstração de que o conjunto dos números racionais é enumerável pode ser obtida, como se segue.

Inicialmente, observamos que $X = \{2^n 3^m \,;\, n, m \in N\}$ é um conjunto enumerável, uma vez que $X \subset N$, N é enumerável, e todo subconjunto de N é enumerável, conforme foi provado anteriormente.

Sabendo que X é enumerável, podemos provar que N X N, o produto cartesiano de N por N, é enumerável. De fato, temos o seguinte lema.

Lema

O conjunto N X N é um conjunto enumerável.

Prova

Seja f: $N \times N \longrightarrow X$, dada por f(n,m) = 2n3m.

Temos que f é injetora, devido à unicidade da decomposição em fatores primos, e f é sobrejetora, pois dado $y \in X$, temos que y = 2a3b, para certos números naturais a e b. Assim, temos que f(a,b) = 2a3b = y.

Logo, f é uma bijeção e N X N é enumerável.

Provando o resultado.

Usaremos o lema anterior para provar a seguinte proposição.

Proposição 15

Se A e B são conjuntos enumeráveis, então A X B, o produto cartesiano de A por B, é enumerável.

Prova

De acordo com o lema anterior, o conjunto N X N é enumerável e, portanto, basta exibirmos uma bijeção f: $N \times N \longrightarrow A \times B$.

Como A e B são enumeráveis, existem bijeções g: $N \longrightarrow A$ e h: $N \longrightarrow B$.

Definamos f: $N \times N \longrightarrow A \times B$, como segue: dado $(m,n) \in NXN$, f(m,n) = (g(m), h(n)).

A função f é, obviamente, uma bijeção.

Logo A X B é enumerável.

Provando o resultado.

Para refletir

1. Mostre que é bijeção a função $f: N \times N \to A \times B$, dada por $f(m,n) = (g(m), h(n))$, em que $g: N \to A$ e $h: N \to B$ são bijeções.

Como consequência dessa proposição, podemos obter que o conjunto Q é enumerável, uma vez que é subconjunto de Z X Z que, de acordo com a proposição, é enumerável.

Síntese do Capítulo

Neste capítulo, você aprendeu os seguintes resultados:

- Os conjuntos podem ser classificados em conjuntos finitos e conjuntos infinitos.
- Conjuntos finitos são aqueles que possuem uma quantidade finita de elementos.
- Os elementos de um conjunto finito não vazio podem ser contados a partir dos conjuntos $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.
- Se existe uma bijeção de I_n em um conjunto X, dizemos que X é finito, com n elementos.
- O número de elementos é uma propriedade bem definida dos conjuntos finitos.
- Todo subconjunto de um conjunto finito é finito e o número de elementos de cada subconjunto é menor do que ou igual ao número de elementos do conjunto que o contém.
- O número de elementos do conjunto união de dois conjuntos finitos e não vazios é menor do que ou igual à soma entre os números de elementos de cada conjunto, valendo a igualdade se, e somente se, os conjuntos forem disjuntos.
- O número de elementos do produto cartesiano de dois conjuntos finitos e não vazios é igual ao produto entre os números de elementos de cada conjunto.
- Os conjuntos N, Z e Q são infinitos.
- Um conjunto, subconjunto de N, é limitado quando existe um número real maior do que ou igual a todo elemento do conjunto.
- Todo conjunto limitado é finito e vice-versa, o que caracteriza os conjuntos finitos.
- Todo subconjunto não vazio de N possui um menor elemento. Este resultado é conhecido como o Princípio da Boa Ordenação (PBO).
- O Princípio da Boa Ordenação é equivalente ao Princípio da Indução Finita (PIF).
- Dois conjuntos são ditos equivalentes se ambos são vazios ou se é possível definir uma bijeção entre eles.

- Dois conjuntos equivalentes são ditos possuírem a mesma cardinalidade.
- Dois conjuntos finitos são equivalentes se, e somente se, possuem a mesma quantidade de elementos.
- Os conjuntos equivalentes ao conjunto N, dos números naturais, são ditos enumeráveis.
- O conjunto união de dois conjuntos enumeráveis é, ainda, enumerável.
- O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.
- Os conjuntos N, Z e Q são enumeráveis.

Atividades de avaliação

1. Verifique, por meio de exemplos, que se X e Y são conjuntos finitos e se $f: X \longrightarrow Y$ é uma função injetora, então o número de elementos de X deve ser menor do que ou igual ao número de elementos de Y.

2. Mostre que não pode existir uma função injetora $f: X \longrightarrow Y$ de um conjunto infinito X em um conjunto finito Y.

3. Sejam X e Y conjuntos finitos e $f: X \longrightarrow Y$ uma função. Mostre que se f é uma função injetora, então o número de elementos de X não pode ser maior do que o número de elementos de Y.

4. Verifique, por meio de exemplos, que se X e Y são conjuntos finitos e $f: X \longrightarrow Y$ é uma função sobrejetora, então o número de elementos de Y não pode ser maior do que o número de elementos de X.

5. Mostre que não pode existir uma função sobrejetora $f: X \longrightarrow Y$ de um conjunto finito X em um conjunto infinito Y.

6. Mostre que se X e Y são conjuntos finitos e $f: X \longrightarrow Y$ é uma função sobrejetora, então o número de elementos de Y não pode ser maior do que o número de elementos de X.

7. Sejam N o conjunto dos números naturais e P o conjunto dos números pares. Mostre que a função $f: N \longrightarrow P$, dada por $f(n) = 2n$, é uma bijeção. Compare o resultado com o exercício 05, ao longo do texto.

Leituras, filmes e sites

Recomendamos a leitura das notas históricas do livro de Geraldo Ávila, Análise Matemática para licenciatura (São Paulo: Edgard Blücher, 2005).

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para licenciatura.** São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números.** Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise,** v.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: SBM/CNPq, 1976.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Números reais.** Tópicos de Matemática Elementar, v.1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Introdução à Análise.** Tópicos de Matemática Elementar, v.3. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Números racionais, reais e complexos.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006

Capítulo 3

Números reais

Objetivos

- Apresentar o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo, o que faz com que cada ponto de uma reta, a reta numérica real, possa ser associado a um número real e vice-versa.
- As operações de adição e de multiplicação no conjunto dos números reais serão definidas como extensão das operações de mesmo nome no conjunto dos números racionais.

Introdução

No capítulo anterior, vimos a existência de números que possuem representação decimal infinita, mas não periódica, e chamamos esses números de números irracionais. Vimos que um desses números está associado à medida da diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade de comprimento. De fato, pelo teorema de Pitágoras, denotando por d essa diagonal, temos que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Assim, $d = \sqrt{2}$ e foi mostrado no capítulo anterior que esse número não é racional. Nesta Unidade, ampliaremos o conjunto dos números racionais, a partir de sua união com os irracionais, obtendo um novo campo numérico, chamado de campo dos números reais. Aceitaremos que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo e mostraremos algumas de suas principais propriedades.

1. A reta numérica real

É possível representarmos os números racionais como pontos de uma reta, como veremos no que segue.

Inicialmente, traçamos uma reta r e escolhemos dois de seus pontos. Associando a esses pontos os números inteiros 0 e 1, obtemos nosso segmento unitário que chamaremos de u e que será nossa unidade de medida.

Fig.1

Tomando o segmento u como unidade de medida, podemos marcar os números naturais 2, 3, 4, e assim por diante; e os números inteiros -1, -2, -3, e assim por diante.

Devemos observar que a escolha do 1, tomado mais à direita do que o 0 é totalmente arbitrária.

Fig.2

A partir de subdivisões do segmento unitário, podemos marcar números racionais como 2/3, 3/2, -1/4, -3/4, -5/3, etc.

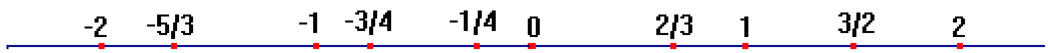


Fig.3

Seguindo essa mesma ideia de subdivisão da unidade, podemos representar na reta r todos os números racionais.

O leitor menos atento poderia ser levado a acreditar que essa associação esgota todos os pontos da reta, mas isso não é verdade.

Apesar de denso na reta, no sentido que dado qualquer ponto P da reta é possível encontrar um número racional tão próximo de P, quanto queiramos, após associarmos a cada número racional um ponto distinto da reta, ainda sobrarão pontos da reta que não correspondem a nenhum número. Como exemplo, podemos observar a marcação do número na reta numérica, que se encontra na figura a seguir.

O conjunto Q, dos números racionais, é denso na reta.

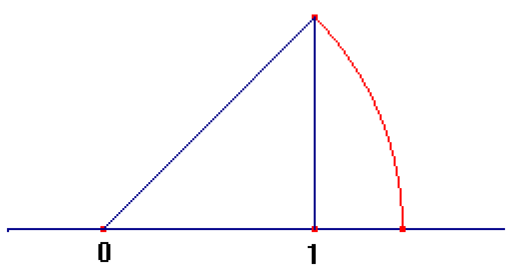


Fig.4

Como vimos na Unidade anterior, o número é irracional e, assim, existem pontos na reta que não estão associados a números racionais.

Essa é uma deficiência dos números racionais, que está associada ao fato de os números racionais não serem um corpo completo, e será suplantada pelo conjunto dos números reais.

Para refletir

Marque na reta numérica os números irracionais $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

2. A incompletude de Q

Mostraremos aqui a principal consequência da incompletude de Q, ou melhor, o que significa essa incompletude. Para tanto, nos utilizaremos dos fatos que enunciaremos a seguir.

Vimos, na unidade anterior, a definição de conjunto limitado para o caso de subconjuntos dos números naturais. Vamos agora estender este conceito para subconjuntos dos números racionais. Temos, inicialmente, as definições de limitado superiormente e de limitado inferiormente.

Cota superior. Dado A um subconjunto não vazio de Q, dizemos que $y \in Q$ é uma cota superior de A se, e somente se, a y, qualquer que seja o elemento a de A.

Exemplo 1. Se $A = \{a \in Q \,;\, 0 \leq a \leq 1\}$, então 1 é cota superior de A. Além disso, todo número racional y maior do que ou igual a 1 é, também, cota superior de A.

Exemplo 2. Se $B = \{b \in Q \,;\, b < 5\}$, então 5 e qualquer número maior do que 5 é cota superior de B. Além disso, nenhum outro número além desses será cota superior de B.

Exemplo 3. O conjunto N, dos números naturais, não possui cota superior em Q. Isso significa que, dado qualquer número racional y, é sempre possível encontrar um número natural ny maior do que y. Essa é a propriedade arquimediana de Q e dizemos, por isso, que o corpo Q é um corpo arquimediano. O número ny encontrado pode variar com y.

A propriedade arquimediana de Q afirma que dado um número racional é sempre possível encontrar um número natural maior do que o racional dado.

Exemplo 4. O conjunto $C = \{2n \,;\, n \in N\}$ não possui cota superior em Q. De fato, qualquer cota superior de C, se existir, será um número positivo. Mas, se y é um número racional positivo, então, para n > , teremos que 2n > y e, portanto, y não será cota superior de C.

De maneira semelhante, temos o conceito de cota inferior, como veremos a seguir.

Cota inferior. Dado A um subconjunto não vazio de Q, dizemos que $y \in Q$ é uma cota inferior de A se, e somente se, $y \leq a$, qualquer que seja o elemento a de A.

Exemplo 5. Se $A = \{a \in Q \,;\, 0 \leq a \leq 1\}$, então 0 é cota inferior de A. Além disso, todo número racional y, menor do que ou igual a 0 também é cota inferior de A.

Exemplo 6. Se $B = \{b \in Q \,;\, b > 5\}$, então 5 e qualquer número menor do que 5 é cota inferior de B. Além disso, nenhum outro número além desses será cota inferior de B.

Exemplo 7. O conjunto N, dos números naturais, possui cota inferior em Q. O número 1 é cota inferior de N.

Exemplo 8. Se A é um subconjunto finito e não vazio de Q, então o menor elemento de A é uma cota inferior de A.

Observemos inicialmente que se y é cota superior de A, então qualquer número racional maior do que ou igual a y é, também, cota superior de A. Assim, se A possui cota superior, então possui infinitas cotas superiores. Valendo resultado semelhante para as cotas inferiores. Ou seja, se y é cota inferior de A, então qualquer número racional menor do que ou igual a y é, também, cota inferior de A. Assim, se A possui cota inferior, então possui infinitas cotas inferiores.

O fato de existirem subconjuntos de Q que não possuem cota superior ou cota inferior nos permite classificar todos os subconjuntos não vazios de Q em conjuntos limitados superiormente ou ilimitados (não limitados) superiormente e limitados inferiormente ou ilimitados (não limitados) inferiormente. Mais precisamente, temos as seguintes definições.

Definição

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado superiormente, se A possui cota superior. Caso contrário, se A não é limitado superiormente, dizemos que A é ilimitado superiormente.

Definição

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado inferiormente, se A possui cota inferior. Caso contrário, se A não é limitado inferiormente, dizemos que A é ilimitado inferiormente.

Não podemos confundir conjunto limitado superiormente ou limitado inferiormente com conjunto finito. No exemplo logo a seguir, temos um conjunto infinito, mas que é limitado tanto superior quanto inferiormente.

Exemplo 9. O conjunto D = {1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ..., (1/2)n, ...} é infinito, mas é limitado superiormente. O número 1 e, consequentemente, qualquer número maior do que ou igual a 1 é cota superior de D. Além disso, o número 0, e todos os números racionais menores do que 0, é cota inferior de D.

Exemplo 10. O conjunto E = {(-2)n ; $n \in N$} não é limitado superiormente nem inferiormente.

Um conjunto que é limitado superior e inferiormente é dito um conjunto limitado.

Exemplo 11. O conjunto do exemplo 09 é limitado.

Exemplo 12. O conjunto dos divisores inteiros de 1260 é um conjunto limitado, uma vez que possui maior e menor elemento.

Como podemos perceber do que foi feito anteriormente, existem alguns subconjuntos de Q que são limitados superiormente e inferiormente; outros são limitados somente inferiormente ou somente superiormente; e outros não são limitados nem superiormente nem inferiormente. Os subconjuntos de Q que são limitados inferior e superiormente são ditos conjuntos limitados. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição. Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado, se A é limitado superiormente e inferiormente.

Exemplo 13. O conjunto $\{(-1/2)^n \,;\, n \in N\}$ é limitado. Denotando por x um elemento do conjunto, temos que $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

Exemplo 14. O conjunto $X = \{x \in Q \,;\, x > 0,\ 4 \leq x^2 \leq 9\}$ é limitado. Se x é um elemento de X, isto é, se $x \in X$, então $2 \leq x \leq 3$, pois, caso contrário, (1) se $x < 2$, temos $x^2 < 4$; (2) se $x > 3$, temos $x^2 > 9$.

Exemplo 15. O conjunto $X = \{x \in Q \,;\, x > 0,\ 2 \leq x^2 \leq 5\}$ é limitado. Se x é um elemento de X, isto é, se $x \in X$, então $1 \leq x \leq 3$, pois, caso contrário, (1) se $x < 1$, temos $x^2 < 1$; (2) se $x > 3$, temos $x^2 > 9$.

Observe que, no exemplo 14, a cota inferior que apresentamos foi a maior possível, dentro do conjunto dos números racionais; enquanto no exemplo 15, os números 1,3 ou 1,31 ou 1,4 ou 1,4142 ou 1,41421, todos, são cotas inferiores e, ainda, é possível encontrar outras cotas inferiores maiores do que essas. Assim, limitados ao conjunto Q dos números racionais, podemos falar na maior das cotas inferiores para o conjunto do exemplo 14, mas não podemos falar na maior das cotas inferiores para o conjunto do exemplo 15.

O comentário anterior nos leva às seguintes definições.

Definição

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que $y \in Q$ é supremo de A se, e somente se, y é cota superior de A e y é menor do que ou igual a qualquer outra cota superior de A.

Definição

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que $y \in Q$ é ínfimo de A se, e somente se, y é cota inferior de A e y é maior do que ou igual a qualquer outra cota inferior de A.

Observamos que, de acordo com a definição e com o que foi feito anteriormente, o ínfimo e o supremo de um conjunto podem ou não existirem. Mas, se existirem, eles são únicos e serão denotados por infA e supA, respectivamente.

Proposição 16

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Se existe o supremo de A, então ele é único.

Prova

Sejam x e y supremos de A. Por definição de supremo, x e y são cotas superiores de A.

Por ser supremo, x é menor do que ou igual a qualquer outra cota superior de A. Assim, $x \leq y$.

De maneira semelhante, por ser supremo, y é menor do que ou igual a qualquer outra cota superior de A. Assim, $y \leq x$.

De $x \leq y$ e $y \leq x$, segue que $x = y$.

Provando o resultado.

Proposição 17

Seja $A \subset Q$, $A \neq \varnothing$. Se existe o ínfimo de A, então ele é único.

Prova

Sejam x e y ínfimos de A. Por definição de ínfimo, x e y são cotas inferiores de A.

Por ser ínfimo, x é maior do que ou igual a qualquer outra cota inferior de A. Assim, $x \geq y$.

De maneira semelhante, por ser ínfimo, y é maior do que ou igual a qualquer outra cota inferior de A. Assim, $y \geq x$.

De $x \geq y$ e $y \geq x$, segue que $x = y$.

Provando o resultado.

Exemplo 16. Se $A = \{x \in Q \ ; 0 \leq x \leq 4\}$, então supA = 4 e infA = 0. Observemos que, neste caso, temos que $\text{infA} \in A$ e $\text{supA} \in A$.

Exemplo 17. Se $B = \{x \in Q \ ; 5 < x\}$, então infB = 5 e B não possui supremo. Neste caso, temos que $\text{infB} \notin B$.

Exemplo 18. Se $C = \{x \in Q \ ; 5 \quad x < 9\}$, então infC = 5 e supC = 9. Neste caso, temos que $\text{infC} \in C$ e $\text{supC} \notin C$.

Vamos tomar como base o conjunto $C = \{x \in Q \ ; 5 \leq x < 9\}$ e mostrar que, realmente, infC = 5 e supC = 9.

Observemos, inicialmente, que 5 é cota inferior de C, pois, se $x \in C$, então $5 \leq x$; e que 9 é cota superior de C, pois, $x \in C$, então $x < 9 \leq 9$.

Por outro lado, seja $y \in Q$ e suponha que y é cota inferior de C.

Como $5 \in C$, devemos ter $y \leq 5$ e, portanto, infC =5.

Seja, agora, $y \in Q$ e suponha que y é cota superior de C.

Assim, devemos ter $x \leq y$, qualquer que seja o elemento x de C.

Suponha que seja $y < 9$ e considere o número $\frac{y+9}{2}$.

Esse é um número racional, pois é o quociente entre dois números racionais, maior do que y (e, portanto, maior do que 5) e menor do que 9. Portanto, $\frac{y+9}{2} \in C$, contrariando o fato de y ser cota superior de C.

Logo, supC = 9, provando o que queríamos.

Para refletir

1. Mostre que: se x e y são números racionais, com x < y, então é um número racional, maior do que x e menor do que y.
2. Mostre que: se A = {x ∈ Q ; 0 ≤ x ≤ 4}, então supA = 4 e infA = 0.
3. Mostre que: se B = {x ∈ Q ; 5 < x}, então infB = 5.

3. Os números reais: um corpo ordenado completo

Aceitaremos como postulado que o conjunto R dos números reais é um corpo ordenado completo, ou seja, aceitaremos que R é um corpo ordenado que possui a seguinte propriedade:

Postulado de Dedekind. Todo subconjunto de R, limitado inferiormente, possui ínfimo.

3.1. O corpo dos números reais

Dizer que R é um corpo significa dizer que em R estão definidas duas operações: adição e multiplicação, que possuem as propriedades enumeradas a seguir.

Propriedades da adição. A adição em R é uma operação binária que associa a cada par ordenado (a, b) de elementos de R o número real a + b, chamado de soma de a com b, e possui as seguintes propriedades:

A1: Associativa

Dados a, b e c, números reais, temos que a + (b + c) = (a + b) + c.

A2: Comutativa

Dados a e b, números reais, temos que a + b = b + a.

A3: Elemento neutro

Existe, em R, um número real 0 (zero) tal que 0 + a = a + 0 = a, qualquer que seja o número real a.

A4: Elemento simétrico

Para cada número real a, existe um número real –a, chamado de simétrico de a, tal que a + (-a) = (-a) + a = 0.

Além dessas propriedades, assumiremos o postulado que segue.

Postulado da adição. A adição de números reais quando restrita ao conjunto dos números racionais, coincide com a adição de Q.

Propriedades da multiplicação. A multiplicação é uma operação binária em R, que associa a cada par ordenado (a, b) de elementos de R, o elemento a × b de R, chamado de produto de a por b, e possui as seguintes propriedades:

M1: Associativa

Dados a, b e c, números reais, temos que a × (b × c) = (a × b) × c.

A2: Comutativa

Dados a e b, números reais, temos que a × b = b × a.

A3: Elemento neutro

Existe, em R, um número real 1 (um) tal que 1 × a = a × 0 = a, qualquer que seja o número real a.

A4: Elemento inverso (ou simétrico multiplicativo)

Para cada número real a, com a $\neq$ 0, existe um número real 1/a ou a-1, chamado de inverso de a, tal que a × (1/a) = (1/a) × a = 1.

Além dessas propriedades, assumiremos o postulado que segue.

Postulado da multiplicação. A multiplicação de números reais quando restrita ao conjunto dos números racionais, coincide com a multiplicação de Q.

Assumindo os postulados listados anteriormente, é possível mostramos os resultados a seguir.

Proposição XX.

3.2. R é um corpo ordenado

Dizer que R é um corpo ordenado significa dizer que em R é possível destacar um subconjunto R+ – cujos elementos são chamados de números reais positivos – tal que:

Axioma 1. A soma e o produto de dois números reais positivos é, ainda, um número real positivo.

Em símbolos: $\forall$ x, y $\in$ R, x+y $\in$ R e xy $\in$ R.

Axioma 2. Um número real qualquer ou é igual a zero, ou é positivo, ou o seu simétrico é positivo.

Em símbolos: $\forall$ x $\in$ R, x = 0 ou x $\in$ R ou –x $\in$ R.

Os elementos do conjunto R-, definido por R- = {-x; x $\in$ R+}, são chamados de números reais negativos.

Portanto, de acordo com o axioma O2, se x $\in$ R, então x = 0, ou x $\in$ R+, ou x $\in$ R- e, consequentemente, R = R-$\cup${0}$\cup$R+.

Como primeira consequência dos axiomas O1 e O2 e do fato de R ser um corpo, temos os seguintes resultados.

Proposição 18

O quadrado de qualquer número real não nulo é um número real positivo. Ou em símbolos, $\forall$ x $\in$ R, x2 $\in$ R+.

Prova.

Seja x $\in$ R e suponha x   0.

Se x $\in$ R+, então, pelo axioma O1, temos que x2 = x.x $\in$ R+.

Se –x $\in$ R+, então, pelo axioma O1, temos que x2 = (-x)(-x) $\in$ R+.

Provando o resultado.

Outra consequência imediata dos axiomas de ordem é a proposição seguinte.

Proposição 19

O número real -1 não é o quadrado de nenhum número real.

Prova.

Como 1 = 1.1 = 12, temos que 1 é positivo.

Assim, pelo axioma O2, devemos ter que -1 $\notin$ R+, ou seja, -1 é negativo.

Pela proposição anterior, não podemos ter -1 = x2, para nenhum x $\in$ R.

Provando o resultado.

Capítulo 4

O conceito de sequência de números reais

Objetivo

- Estudar um dos conceitos mais importantes da Matemática: o conceito de limite que, apesar de sua importância e de já estar presente nos estudos de Zenão, por volta de 330 a.C., somente passou a ser definido de forma rigorosa e precisa pelos matemáticos do século XIX. Como veremos, o conceito de limite está associado com a ideia intuitiva de "estar tão próximo quanto se queira", ou seja, a distância para um número dado tende a zero.

Esse conceito será apresentado a partir da ideia de convergência de sequências de números reais e, para tanto, começaremos definindo o que vem a ser uma sequência de números reais.

1. O conceito de sequência de números reais

Nosso primeiro contato com as sequências numéricas se dá já no ensino fundamental quando somos levados a descobrir leis de formação que nos permitam determinar os termos seguintes de sequências cujos primeiros termos se encontram explicitados. Posteriormente, tomamos contato com as progressões, aritméticas ou geométricas, finitas ou infinitas. Intuitivamente, uma sequência de números reais é uma lista infinita e ordenada de números reais. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 1

Uma sequência de números reais ou, simplesmente, uma sequência é uma função $x: N \longrightarrow R$ que, a cada número natural n, associa o número real x(n), indicado por x_n e chamado de n-ésimo termo da sequência.

A sequência $x: N \longrightarrow R$ será indicada por (x1, x2, x3,..., xn,...) ou, abreviadamente, por (xn)n$\in$N ou, ainda, por (xn).

Exemplo 1. A sequência $x: N \longrightarrow R$, em que x(n) = xn = (1/2)n é indicada por (1/2, 1/4, 1/8, 1/16,...).

Exemplo 2. A sequência indicada por (0, 1, 0, 1,...) corresponde à função x: N $\longrightarrow$ R, dada por x(n) = 0, se n é ímpar; e x(n) = 1, se n é par.

A lei de formação da função x pode ser outra, diferente dessa.

Exemplo 3. A sequência x: N $\longrightarrow$ R, em que x(n) = 1/n é indicada por (1, 1/2, 1/3, 1/4,...)

Exemplo 4. A sequência (sen $\frac{nr}{2}$)n∈N é indicada por (1,0,-1,0,1,0,-1,0,...).

É importante observarmos que uma sequência de números reais é uma listagem infinita e ordenada de números reais que não pode ser confundida com o conjunto imagem da função x: N $\longrightarrow$ R. O conjunto imagem ou conjunto de valores da sequência pode ser um conjunto finito, como no caso das sequências dos exemplos 2 e 4 ou um conjunto infinito, como nos exemplos 1 e 3.

É possível que o conjunto de valores de uma sequência seja um conjunto unitário. Temos, portanto, a seguinte definição.

Definição 2. Dizemos que a sequência (xn)n∈N é uma sequência constante se, e somente se, xn = xm, quaisquer que sejam os números naturais m e n.

Exemplo 5. A sequência (xn)n∈N, indicada por (0, 0, 0, ...) é uma sequência constante.

Exemplo 6. A sequência (xn)n∈N, em que xn = cos2(n), ∀ n∈N, é uma sequência constante e igual a 1.

Sequências limitadas e sequências ilimitadas. Observemos que as sequências dos seis exemplos apresentados até agora são tais que seus valores formam um conjunto limitado, mesmo quando infinitos. De fato, todos os valores da sequência do exemplo 1 pertencem ao intervalo [0,1].

1.1 Alguns exemplos de sequência

Exemplo 1. A sequência (2, 3, 5, 7, 11, ...) é a sequência dos números primos. Como bem sabemos não existe uma fórmula que nos permita determinar o termo geral dessa sequência, embora todos os seus termos estejam bem definidos.

Exemplo 2. Os termos da sequência $(x_n)_{n\in N}$, em que xn é o resto da divisão de n por 4, são (1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, ...).

Exemplo 3. A sequência (0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...) é a sequência cujo termo geral pode ser obtido em função de n por xn = 1 – 1/n, n∈ N.

2. Convergência de sequências

Algumas sequências merecem especial destaque pelo comportamento dos valores dos seus termos xn, a medida que tomamos n cada vez maiores. Vamos observar o comportamento de algumas sequências, com relação a esse aspecto.

Exemplo 1. A sequência $(x_n)_{n\in N}$, em que $x_n = 1$, para todo n. Essa é a sequência (1, 1, 1, 1, ...) e corresponde à função constante e igual a 1. Neste caso, temos que $x_1 = 1$, $x_{10} = 1$, $x_{100} = 1$, $x_{1000} = 1$ etc. Como se percebe, a medida que n vai crescendo, o valor de x_n não se altera, permanecendo sempre igual a 1.

Exemplo 2. A sequência $(x_n)_{n\in N}$, em que $x_n = (-1)n$, para todo n. Temos que (x_n) é a sequência (-1, 1, -1, 1,...). Observemos que $x_n = -1$, sempre que n for ímpar; enquanto, $x_n = 1$, para n par. Isso pode ser visto se lembrarmos que os números ímpares podem ser escrito na forma 2k+1, para k = 1, 2, 3,..., e, assim, $x_{2k} = (-1)^{2k} = [(-1)^2]^k = (1)^k = 1$; enquanto os números pares podem ser escritos na forma 2k, para k = 1, 2, 3,..., e, assim, $x_{2k+1} = (-1)2^{k+1} = (-1)^{2k}(-1)^1 = [(-1)^2]^k(-1) = 1^k(-1) = -1$. Portanto, a medida que os valores de n crescem, os valores x_n da sequência ficam oscilando entre -1 e 1.

Exemplo 3. A sequência $(x_n)_{n\in N}$, com $xn = (1/2)^n$, para todo n. Temos que (x_n) é a sequência (1/2, 1/4, 1/8, ...). Notemos que, a medida que n cresce, o valor de x_n é sempre positivo, mas vai se aproximando de zero sem, no entanto, nunca ser zero. Os quadros a seguir nos permite induzir tal afirmação.

Quadro: 6

ALGUNS TERMOS DA SEQUÊNCIA (X_N), COM $X_N = (1/2)^N$						
n	2^n	x_n		n	2^n	x_n
1	2	0,5		7	128	0,0078125
2	4	0,25		8	256	0,00390625
3	8	0,125		9	512	0,001953125
4	16	0,0625		10	1024	0,000976563
5	32	0,03125		20	1048576	0,000000953674
6	64	0,015625		30	1073741824	0,000000000931323

Dos exemplos anteriores, podemos tirar algumas conclusões, como as que apresentamos a seguir.

Na sequência $(x_n)_{n\in N}$, com $x_n = (1/2)^n$, para todo n, temos que para n suficientemente grande, o valor de x_n é sempre positivo e vai se tornando cada vez mais próximo de zero sem, no entanto, nunca ser zero. Por exemplo, para n = 10, a diferença entre x10 e 0 é menor do que 1/1000; para n = 20, a diferença entre x20 e 0 é menor do que 1/1000000. Assim, embora nenhum dos termos da sequência seja zero, a diferença entre x_n e 0, para n suficientemente grande, é tão pequena quanto quisermos.

Dizemos, por isso, que a sequência (xn) converge para 0. Simbolicamente, escrevemos $\lim_{n \to \infty} xn = 0$, que se lê: "o limite de xis ene quando n tende ao infinito é igual a zero", para indicar que a partir de certa ordem os valores dos termos da sequência (x_n) estão tão próximos de 0 quanto se deseje, ou seja, que a diferença entre o valor do termo da sequência e zero é menor do que qualquer quantidade positiva previamente determinada.

Na sequência $(y_n) = (1)$, para n suficientemente grande, ou seja, a partir de certa ordem, os valores dos termos da sequência são todos iguais a 1. Na realidade, todos os termos da sequência em questão são iguais a 1. Observemos que para a sequência na qual os dez primeiros termos são 0 e os demais são 1, ou seja, para a sequência (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,...), também podemos afirmar que para n suficientemente grande, os valores dos termos da sequência são todos iguais a 1. Na realidade, essa igualdade já vale a partir do décimo primeiro termo. Também poderíamos fazer essa mesma afirmação — para n suficientemente grande, os valores dos termos da sequência são todos iguais a 1 — para uma sequência em que os 100 primeiros termos fossem diferentes de 1 e, daí em diante, todos os demais termos fossem iguais a 1.

Neste caso, também dizemos que a sequência (y_n) converge para 1 e, simbolicamente, escrevemos $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$, que se lê: “o limite de ipsilon ene quando n tende ao infinito é igual a um”, para indicar que a partir de certa ordem os valores dos termos da sequência (y_n) estão tão próximos de 1 quanto se deseje, ou seja, que a diferença entre o valor do termo da sequência e um é menor do que qualquer quantidade positiva previamente determinada.

Sobre os autores

Cleiton Batista Vasconcelos: possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1980) e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1983). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática. Trabalha com Avaliação de Livros Didáticos e Laboratório de Matemática.

Manoel Américo Rocha: é Mestre, título obtido na Universidade Federal do Ceará em 1980, Bacharel em Matemática pela UFC em 1972. Especialização em Metodologia de Ensino Superior Área de conhecimento Matemática pela UFC em 1975. Larga experiência em docência superior na UFC, UECE, UNIFOR, UVA, UNICE E FANOR. Especialidade: Cálculo Diferencial integral. Matemática Financeira.

Matemática

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.

Lumen ad viam
Universidade Estadual do Ceará
UAB Universidade Aberta do Brasil
CAPES