

# Física

## Eletricidade e Magnetismo II

Carlos Jacinto de Oliveira  
Antonio Carlos Santana dos Santos



Geografia



História



Educação  
Física



Química



Ciências  
Biológicas



Artes  
Plásticas



Computação



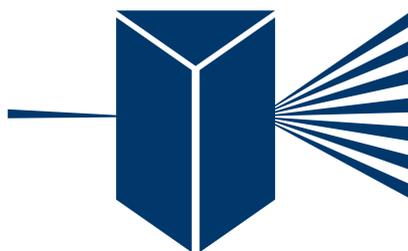
Física



Matemática



Pedagogia



# Física

## Eletricidade e Magnetismo II

Carlos Jacinto de Oliveira  
Antonio Carlos Santana dos Santos

Fortaleza



2015



Geografia



História



Educação  
Física



Química



Ciências  
Biológicas



Artes  
Plásticas



Computação



Física



Matemática



Pedagogia

Copyright © 2015. Todos os direitos reservados desta edição à UAB/UECE. Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, dos autores.

Editora Filiada à



**Presidenta da República**

Dilma Vana Rousseff

**Ministro da Educação**

Renato Janine Ribeiro

**Presidente da CAPES**

Carlos Afonso Nobre

**Diretor de Educação a Distância da CAPES**

Jean Marc Georges Mutzig

**Governador do Estado do Ceará**

Camilo Sobreira de Santana

**Reitor da Universidade Estadual do Ceará**

José Jackson Coelho Sampaio

**Vice-Reitor**

Hidelbrando dos Santos Soares

**Pró-Reitor de Pós-Graduação**

Jefferson Teixeira de Souza

**Coordenador da SATE e UAB/UECE**

Francisco Fábio Castelo Branco

**Coordenadora Adjunta UAB/UECE**

Eloísa Maia Vidal

**Direção do CED/UECE**

José Albio Moreira de Sales

**Coordenação da Licenciatura em Física**

Carlos Jacinto de Oliveira

**Coordenação de Tutoria da**

**Licenciatura em Física**

Emerson Mariano da Silva

**Editor da EdUECE**

Erasmus Miessa Ruiz

**Coordenadora Editorial**

Rocylânia Isídio de Oliveira

**Projeto Gráfico e Capa**

Roberto Santos

**Diagramador**

Francisco Oliveira

**Revisão Ortográfica**

Fernanda Ribeiro

**Conselho Editorial**

Antônio Luciano Pontes

Eduardo Diatáhy Bezerra de Menezes

Emanuel Ângelo da Rocha Fragoso

Francisco Horácio da Silva Frota

Francisco José Camelo Parente

Gisafran Nazareno Mota Jucá

José Ferreira Nunes

Liduína Farias Almeida da Costa

Lucili Grangeiro Cortez

Luiz Cruz Lima

Manfredo Ramos

Marcelo Gurgel Carlos da Silva

Marcony Silva Cunha

Maria do Socorro Ferreira Osterne

Maria Salette Bessa Jorge

Silvia Maria Nóbrega-Therrien

**Conselho Consultivo**

Antônio Torres Montenegro (UFPE)

Eliane P. Zamith Brito (FGV)

Homero Santiago (USP)

Ieda Maria Alves (USP)

Manuel Domingos Neto (UFF)

Maria do Socorro Silva Aragão (UFC)

Maria Lírida Callou de Araújo e Mendonça (UNIFOR)

Pierre Salama (Universidade de Paris VIII)

Romeu Gomes (FIOCRUZ)

Túlio Batista Franco (UFF)



Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE  
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará  
CEP: 60714-903 – Fone: (85) 3101-9893  
Internet: [www.uece.br](http://www.uece.br) – E-mail: [eduece@uece.br](mailto:eduece@uece.br)  
Secretaria de Apoio às Tecnologias Educacionais  
Fone: (85) 3101-9962

# Sumário

<b>Apresentação</b> .....	5
<b>Parte 5 – Magnetismo</b> .....	7
<b>Capítulo 9 – O Campo Magnético</b> .....	9
9.1 O magnetismo .....	9
9.2 O campo magnético .....	11
9.3 Fluxo magnético .....	13
9.4 Força magnética sobre uma carga elétrica .....	14
9.5 Força magnética sobre uma corrente elétrica .....	15
9.6 Torque sobre uma espira de corrente .....	16
9.7 O efeito Hall .....	18
9.8 Trajetória de uma carga num campo magnético uniforme .....	22
9.9 A descoberta do elétron .....	23
<b>Capítulo 10 – A Lei de Ampère</b> .....	31
10.1 A Lei de Ampère .....	31
10.2 Campo de um fio retilíneo longo .....	33
10.3 Campo de um cilindro longo .....	33
10.4 Interação magnética entre fios condutores paralelos .....	34
10.5 Campo magnético de um solenoide .....	35
10.6 A lei de Biot-Savart .....	37
<b>Parte 6 – Indução Eletromagnética</b> .....	45
<b>Capítulo 11 – A Lei de Faraday</b> .....	47
11.1 A descoberta de Faraday e Henry .....	47
11.2 A lei da indução eletromagnética de Faraday .....	49
11.3 Campo magnético dependente do tempo .....	49
<b>Capítulo 12 – Indutância</b> .....	53
12.1 Indutância .....	53
12.2 Indutância de um solenoide .....	54
12.3 Circuito rl .....	55
12.4 Energia de um campo magnético .....	57
12.5 Circuito LC .....	58
12.5 Circuito rlc .....	59
12.6 Frequência natural .....	60

<b>Parte 7 – Magnetização da Matéria</b> .....	67
<b>Capítulo 13 – Propriedades Magnéticas da Matéria</b> .....	69
13.1 Dipólos magnéticos.....	69
13.2 Magnetização e intensidade magnética .....	71
13.3 Substâncias magnéticas .....	75
<b>Parte 8 – O Eletromagnetismo</b> .....	79
<b>Capítulo 14 - As Equações de Maxwell</b> .....	81
14.1 As quatro leis fundamentais do eletromagnetismo .....	81
14.2 Breve histórico das Equações de Maxwell.....	82
14.3 Ondas Eletromagnéticas .....	84
14.4 Espectro Eletromagnético .....	85

# Apresentação

Nesta obra, o tema Eletricidade e Magnetismo foi desenvolvido em dois módulos – Eletricidade e Magnetismo 1 e Eletricidade e Magnetismo 2. Estes módulos são dirigidos aos alunos do Curso de Graduação em Física da modalidade Licenciatura a Distância, ofertado pelo Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, dentro do Programa da Universidade Aberta do Brasil.

O principal objetivo destes módulos é estruturar nos alunos uma base sólida dos conceitos, princípios e leis que regem o tema Eletricidade e Magnetismo, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral, de modo a capacitar o estudante para solucionar problemas simples sobre o tema. Teorias consolidadas e modernas, aplicações práticas, inserções históricas e sugestões de leituras complementares e de aprofundamento marcam o seu desenvolvimento, com uma pedagogia voltada para o estudo a distância.

Os módulos foram desenvolvidos em quatro Unidades cada um. Os assuntos abordados no módulo de Eletricidade e Magnetismo 1 são: Carga Elétrica e Lei de Coulomb na Unidade 1; Campo Elétrico e Lei de Gauss na Unidade 2; Potencial Elétrico, Capacitores e Dielétricos na Unidade 3; e Corrente Elétrica, Resistência Elétrica e Circuitos de Corrente Contínua na Unidade 4. Neste módulo de Eletricidade e Magnetismos 2 são abordados: O Campo Magnético e A Lei de Ampère na Unidade 5; A Lei de Faraday e Indutância na Unidade 6; Propriedades Magnéticas da Matéria na Unidade 7; e As Equações de Maxwell na Unidade 8.

Os autores esperam que esta edição de Eletricidade e magnetismo 2 possa contribuir efetivamente com o aprimoramento do Ensino da Física.

Os autores



**PARTE**

**5**

# **Magnetismo**



## O Campo Magnético

A eletricidade e o magnetismo têm algo em comum, a carga elétrica. Cargas elétricas em repouso levam aos conceitos e definições da eletricidade estática, enquanto que cargas elétricas em movimento levam aos conceitos e definições do magnetismo.

O estudo do magnetismo será iniciado neste capítulo, abordando os conceitos, definições e teorias que envolvem o campo magnético.

### 9.1 O magnetismo

A eletricidade e o magnetismo já são conhecidos pela a humanidade há muito tempo. Uma prova disso é a bateria de Bagdá mostrada na Figura 9.1, para a eletricidade e a bússola chinesa mostrada na Figura 9.2, para o magnetismo.

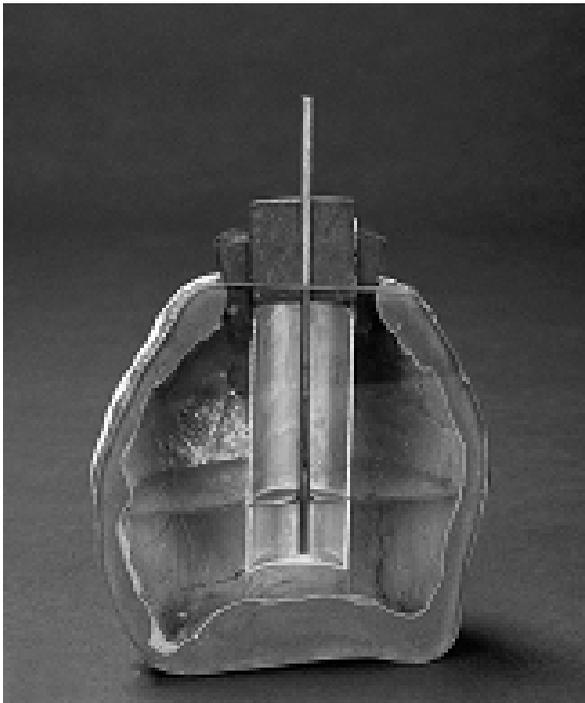


Figura 9.1 – Bateria de Bagdá

Fonte: Eletricidade e Magnetismo – De Gilbert à Faraday e Maxwell, por Victor O. Rivelles, Convite a Física, 22/08/2007, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, <http://www.fma.if.usp.br/~rivelles>



Figura 9.2 – Bússola chinesa teve sua origem na China do século IV a.C. Eram compostas por um prato quadrangular representando a Terra. O “indicador” (objeto que indica a direção), com forma de concha, era de pedra imantada e a base (prato), de bronze. Um círculo no centro do prato representava o céu e a base quadrada, a terra.

Fonte: [http://www.museotec.org.br/previewmuseologico/a\\_bussola.htm](http://www.museotec.org.br/previewmuseologico/a_bussola.htm).

Já em torno do ano 121 dC, se conhecia que algumas pedras rochosas da região da Magnésia (localizada na Turquia de hoje) atraíam pedaços de ferro. Mais tarde, observou-se que alguns outros materiais conseguiam atrair também pedaços de ferro, e a esta propriedade desses materiais foi denominada magnetismo.

Mas somente em 1600, com os estudos do inglês William Gilbert, foi que a humanidade teve uma compreensão sistemática da eletricidade e do magnetismo. Hoje, sabe-se que a magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), chamadas também de ímãs (ímãs naturais) era uma daquelas pequenas pedras encontradas na natureza.

Quando um pedaço de ferro é aproximado a qualquer uma das duas extremidades de um ímã natural em forma de barra, ele é atraído pelo ímã. Mesmo com a atração em qualquer uma das duas extremidades do ímã, elas possuem propriedades magnéticas opostas. Isto pode ser facilmente verificado quando dois ímãs em forma de barra são aproximados. Se duas extremidades se atraem, virando uma das extremidades e aproximando novamente os ímãs, verifica-se que as duas extremidades próximas, agora, se repelem, como é mostrado no esquema da Figura 9.3. Estas duas extremidades são denominadas de pólo norte (N) e de pólo sul (S) do ímã, que por convenção, é chamado de pólo norte da agulha de uma bússola o pólo que aponta para o norte geográfico da Terra, que na realidade é o pólo sul magnético, pois a Terra também é um grande ímã natural.

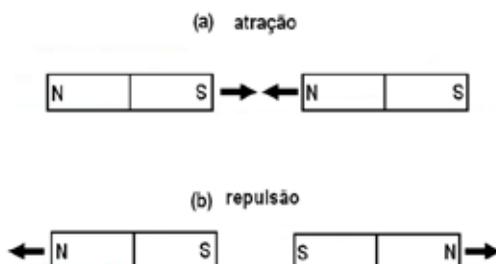


Figura 9.3 – Dois ímãs em forma de barra (a) se atraindo e (b) se repelindo. Pólos de nomes contrários se atraem, enquanto pólos de mesmo nome se repelem.

Em 1820, o dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) descobriu que o magnetismo não se restringia somente aos ímãs de rochas naturais, quando percebeu que a agulha de uma bússola sofria deflexão quando ele ligava ou desligava uma bateria que alimentava um circuito próximo à bússola (Figura 9.4). Ele descobriu que a corrente elétrica é a relação entre a eletricidade e o magnetismo. Inicia aí o eletromagnetismo.

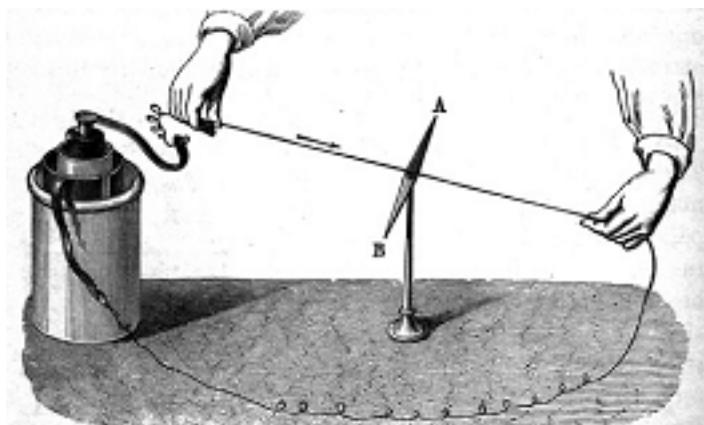


Figura 9.4 – Bateria alimentando um circuito simples com uma corrente elétrica que deflete a agulha de uma bússola.

Fonte: Eletricidade e Magnetismo – De Gilbert à Faraday e Maxwell, por Victor O. Rivelles, Convite a Física, 22/08/2007, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, <http://www.fma.if.usp.br/~rivelles>.

## 9.2 O campo magnético

Uma região do espaço em torno de um ímã ou de um condutor percorrido por uma corrente elétrica tem suas características alteradas de modo a ocorrer o fenômeno do magnetismo. Diz-se, portanto, que nesta região existe um campo magnético.

A descoberta de Oersted levou ao conhecimento de que cargas elétricas em movimento, formando uma corrente elétrica, produzem campos magnéticos em torno de si. Assim, existem os campos magnéticos em torno de ímãs naturais (permanentes), produzidos por correntes elétricas microscópicas no interior dos átomos das moléculas destes ímãs, e os campos magnéticos não-naturais (não-permanentes) produzidos por cargas elétricas em movimento (corrente elétrica) na região em torno destas correntes.

A relação da eletricidade com o magnetismo é muito íntima. Na formulação da eletricidade, a carga elétrica origina um campo elétrico, que se associa um vetor  $\vec{E}$ . Na formulação do magnetismo, também se associa para cada ponto de um campo magnético um vetor  $\vec{B}$ , denominado indução magnética.

Na verdade, existe o vetor indução magnética, representado por  $\vec{H}$ , que está relacionado com a corrente que o produz, enquanto  $\vec{B}$ , função de  $\vec{H}$ , está relacionado com o meio onde atua o campo e do processo de magnetização.

O inglês Michael Faraday (1791-1867) observou que limalhas de ferro espalhadas aleatoriamente em uma folha de papel colocada sobre um ímã em forma de barra se agrupavam imediatamente formando linhas, como as mostradas na Figura 9.5. Isto fez Faraday propor o conceito de linhas de indução magnética, ou linhas de fluxo. Essas linhas permitem estudar a região onde atua o vetor do campo magnético, analogamente às linhas do vetor campo elétrico.

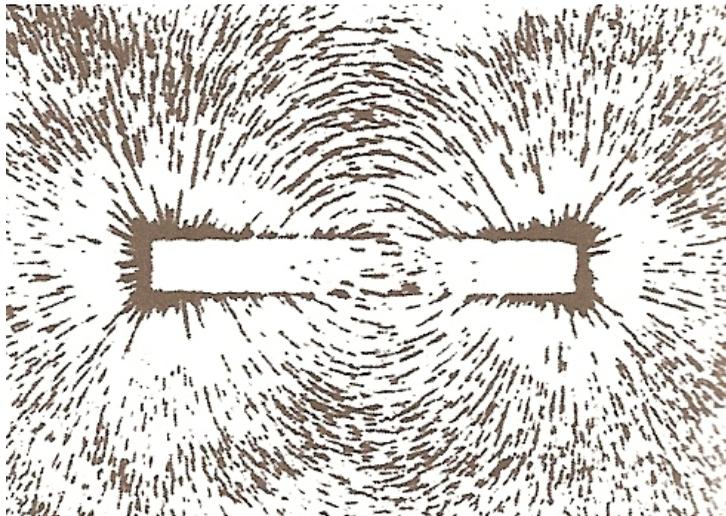


Figura 9.5 – Limalhas de ferro sobre um vidro que por sua vez está sobre um ímã em forma de barra formando as linhas de força do campo magnético do ímã.

Colocando-se uma agulha imantada no campo magnético, ela irá se orientar sempre tangente às linhas de indução do campo que passam pela região onde a agulha imantada está situada. As tangentes dessas linhas imaginárias dão a direção do vetor  $\vec{B}$  na região. O módulo de  $\vec{B}$  num ponto é proporcional à concentração de limalhas de ferro neste ponto, ou seja, o módulo do vetor do campo magnético,  $\vec{B}$ , é proporcional ao número de linhas de indução que atravessam uma superfície perpendicular às linhas, por unidade de área. Isto significa que  $\vec{B}$  é maior onde as linhas são mais próximas e  $\vec{B}$  é menor onde as linhas são mais afastadas. O sentido do vetor do campo magnético segue o das linhas de indução, saindo do pólo norte para o pólo sul, como mostrado na Figura 9.6. A unidade de medida do campo magnético no Sistema Internacional é tesla (T).

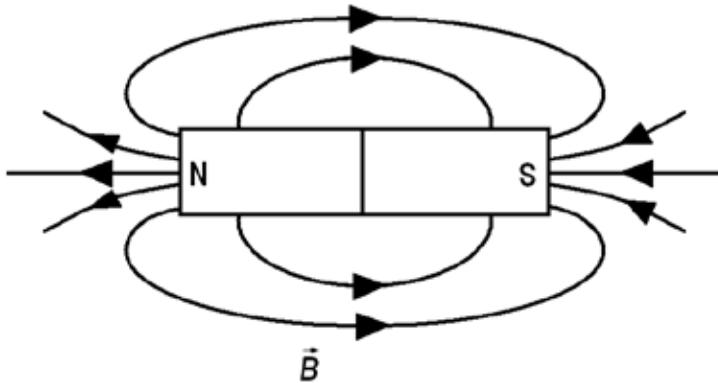


Figura 9.6 – Linhas de indução mostrando o sentido do vetor campo magnético  $\vec{B}$ .

Observa-se, portanto, que o campo magnético em torno de um ímã em forma de barra é variável. No entanto, um ímã natural em forma de ferradura apresenta campo magnético uniforme entre as barras, como pode ser visto na Figura 9.7.

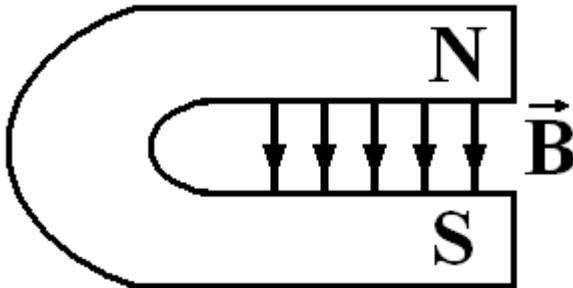


Figura 9.7 – Linhas de indução mostrando o vetor campo magnético  $\vec{B}$  uniforme entre as barras de um ímã em forma de ferradura.

### 9.3 Fluxo magnético

As linhas de indução magnética que atravessam uma superfície perpendicular a elas determinam um fluxo magnético, representado pela letra grega  $\Phi$ , que por definição é:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (9.1)$$

em que  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  é o vetor infinitesimal de superfície e  $\vec{n}$  é um vetor unitário perpendicular ao elemento infinitesimal de área,  $dS$ , como mostrado na Figura 9.8. A unidade de fluxo magnético no Sistema Internacional é weber (Wb).

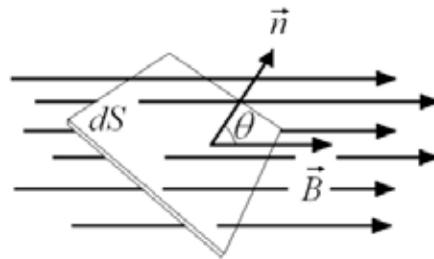


Figura 9.8 – Fluxo do campo magnético  $\vec{B}$  passando através de um elemento infinitesimal de área  $dS$ .

## 9.4 Força magnética sobre uma carga elétrica

Uma carga elétrica em movimento origina um campo magnético no seu entorno e este campo interage magneticamente com qualquer outra carga elétrica em movimento em seu interior. Desta forma, uma região do espaço onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , este exerce uma força sobre uma carga elétrica  $q$  em movimento no seu interior expressa por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (9.2)$$

em que  $\vec{v}$  é o vetor velocidade da carga elétrica  $q$  em movimento no interior de  $\vec{B}$ . O produto entre o vetor  $\vec{v}$  e o vetor  $\vec{B}$  é um produto vetorial, e como tal, a força magnética obedece às regras deste produto como mostra a Figura 9.9.

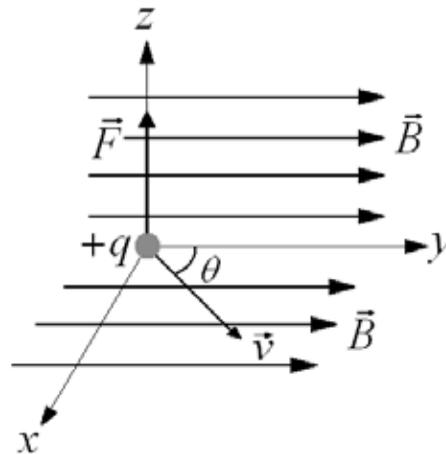


Figura 9.9 – O campo magnético  $\vec{B}$  exerce uma força  $\vec{F}$  sobre uma carga elétrica positiva  $q$  com velocidade  $\vec{v}$ .

Para uma carga elétrica negativa a força magnética tem sentido contrário ao indicado pela regra do produto vetorial.

### 9.5 Força magnética sobre uma corrente elétrica

Como um campo magnético exerce força sobre cargas elétricas em movimento, então um campo magnético também exerce força sobre uma corrente elétrica, já que esta é uma sucessão de cargas elétricas em movimento com uma orientação predominante.

A Figura 9.10 mostra um fio condutor retilíneo de comprimento  $l$  e seção transversal  $A$ , percorrido por uma corrente elétrica  $i$ , no interior de um campo magnético de vetor  $\vec{B}$ .

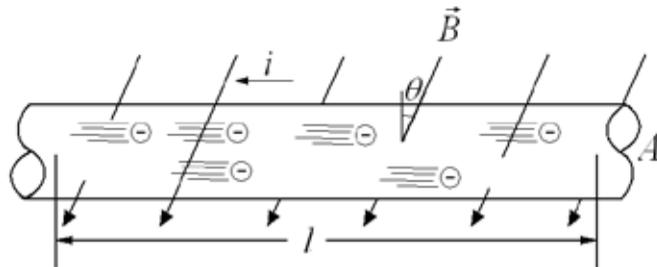


Figura 9.10 – Fio condutor retilíneo de comprimento  $l$  e seção transversal  $A$ , percorrido por uma corrente elétrica  $i$  no interior de campo magnético  $\vec{B}$ , que faz um ângulo  $\theta$  com direção vertical.

As cargas negativas do fio que se deslocam para o lado direito da Figura 9.10 são equivalentes às cargas positivas de mesma magnitude que se deslocam para o lado esquerdo, associadas à corrente elétrica  $i$  transportada pelos elétrons livres (ou de condução). Pela equação 9.2, a força magnética que age sobre um elétron é:

$$\vec{F}_{el\acute{e}tron} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

cuja magnitude é:

$$F_{el\acute{e}tron} = evBsen\theta.$$

Existindo  $N$  destes elétrons no segmento  $l$  do fio, a densidade eletrônica será:

$$n = \frac{N}{lA}. \tag{9.3}$$

Como a densidade de corrente é  $j = nev$ , e ainda  $j = i/A$ , então  $v = il/Ne$ .

Logo:

$$F_{el\acute{e}tron} = (il/N)B.$$

Assim, a força magnética que atua no fio é:

$$F = NF_{el\acute{e}tron} = ilB sen\theta$$

ou

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}, \tag{9.4}$$

em que  $\vec{i}$  é um vetor orientado ao longo do fio retilíneo que aponta no sentido da corrente  $i$ .

Para um segmento elementar  $d\vec{l}$  de um fio longo de formato qualquer percorrido por uma corrente elétrica  $i$ , e no interior de um campo magnético  $\vec{B}$ , como mostra a Figura 9.11, a força magnética que age sobre ele pode ser calculada, por analogia a equação 9.4, por:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (9.5)$$

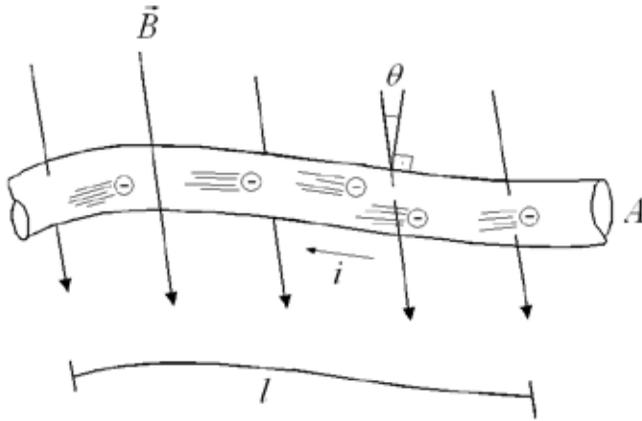


Figura 9.11 – Um fio longo de formato qualquer percorrido por uma corrente elétrica  $i$ , e no interior de um campo magnético  $\vec{B}$ .

## 9.6 Torque sobre uma espira de corrente

Seja uma espira de forma retangular de lados  $a$  e  $b$  colocada num local com ausência de campo gravitacional efetivo e na presença de um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , de modo que um vetor normal a área da espira é paralelo ao campo  $\vec{B}$ , como representada na Figura 9.12. A espira é percorrida por uma corrente elétrica  $i$  no sentido indicado e vinda de dois fios (não mostrados) ligados à espira, que permitem a circulação da corrente. Para que a força magnética atuante nestes fios seja desprezada, os fios são enrolados, um no outro, de modo a formarem duas hélices com a corrente percorrendo em sentidos opostos. A espira está suspensa por um fio presa no seu centro de massa para permitir girar livremente em torno de qualquer eixo que passe seu centro de massa.

Pela equação 9.4, as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  são perpendiculares a cada lado da espira como mostrado na Figura 9.12, de modo que, nessa posição, a espira está em equilíbrio, já que  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$  e estão todas na mesma linha de ação.

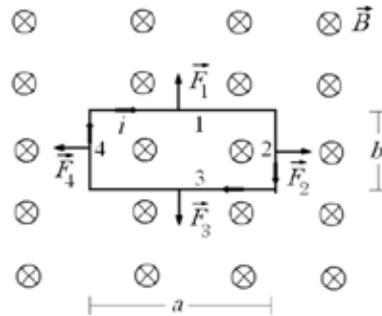


Figura 9.12 – Espira retangular percorrida por uma corrente  $i$  e no interior de um campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

Fora das posições como a apresentada na Figura 9.12, as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  são sempre perpendiculares. Nesta figura, percebe-se que os lados 1 e 3 da espira estão sempre perpendiculares à direção do campo, enquanto que a reta  $nn'$  normal ao plano da espira faz um ângulo genérico  $\theta$  com o vetor  $\vec{B}$ , como mostrado em perfil na Figura 9.13. Assim:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= iaB, \\
 F_2 &= ibB \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = iaB \cos \theta, \\
 F_3 &= iaB, \\
 \text{e } F_4 &= ibB \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = iaB \cos \theta
 \end{aligned}$$

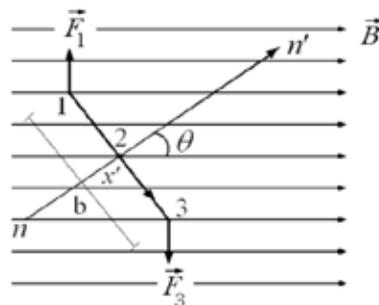


Figura 9.13 – Vista em perfil da espira retangular percorrida por uma corrente  $i$  e no interior de um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  da figura 9.12.

Como  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$  estão na mesma linha de ação, o efeito de translação e de rotação sobre a espira é nulo. Já  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_3$ , mesmo tendo mesma intensidade, mas com sentidos contrários, não atuam na mesma linha de ação, portanto, produzem um torque de magnitude dada por:

$$\tau = 2 (iaB) (b/2) \operatorname{sen}\theta = iaB \operatorname{sen}\theta. \tag{9.6}$$

Para uma bobina de  $N$  espiras, o torque que atua sobre ela é:

$$\tau_{\text{bobina}} = NiAB \operatorname{sen}\theta. \tag{9.7}$$

O torque produzido sobre espiras de corrente é o princípio básico de funcionamento dos motores elétricos. Este resultado é o mesmo para qualquer forma de espira.

O comportamento de uma espira em buscar a orientação de um campo magnético é semelhante ao de uma agulha imantada de uma bússola. Na realidade, espiras de corrente, barras imantadas e agulhas imantadas de bússola apresentam o mesmo fenômeno magnético, de modo que a face de uma espira se comporta como pólo norte e a outra como pólo sul.

Assim, espiras de corrente podem ser consideradas como dipolos magnéticos, tomando, na equação 9.7,  $\mu = NiA$ , como a magnitude do vetor momento de dipolo magnético, cuja direção e sentido são dados pela regra do produto vetorial. Portanto, a equação 9.7 pode ser escrita como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (9.8)$$

A energia potencial magnética correspondente a uma posição qualquer do eixo do dipolo é definida como sendo igual ao trabalho que o agente externo deve realizar para girar o dipolo da posição de energia igual a zero ( $\theta=0$ ) até a posição correspondente ao valor dado por  $\theta$ , isto é,

$$U = \int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} NIAB \sin\theta d\theta = \mu B \int_{90^\circ}^{\theta} \sin\theta d\theta = -\mu B \cos\theta,$$

ou

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (9.9)$$

## 9.7 O efeito Hall

Os portadores de cargas nos condutores metálicos são elétrons. Em outras substâncias, como em eletrólitos e em condutores gasosos, os portadores de carga podem ser íons negativos ou positivos. Daí a necessidade de se manter a convenção para o sentido da corrente elétrica, pois as cargas de sinais contrários se movem, sob um mesmo campo elétrico, em direções opostas. Para efeitos externos, uma carga positiva movendo-se numa certa direção é praticamente equivalente a uma carga negativa que se move na direção oposta. Então, por simplicidade e consistência matemática, foi suposto que todos os portadores de carga são positivos e o sentido de seus movimentos é o sentido desta corrente elétrica convencional. Se os portadores forem negativos, seu movimento real terá um sentido oposto ao indicado para a corrente. No entanto, existe a possibilidade de portadores de carga de sinais contrários produzirem efeitos externos diferentes, que neste caso, a convenção para a corrente elétrica é abandonada e leva-se em conta a situação real existente.

Em 1979, antes da descoberta do elétron, Edwin Herbert Hall idealizou um experimento que permite descobrir o sinal dos portadores de carga de um condutor. Este experimento, com suas peculiaridades, ficou conhecido como efeito Hall.

A Figura 9.14 mostra um esquema do experimento de Hall. É um circuito simples onde uma tira metálica, de espessura  $h$ , largura  $d$  e comprimento  $l$ , é percorrida longitudinalmente por uma corrente  $i$ , no sentido convencional, sendo em (a) portadores de carga positivos e em (b) negativos. A tira encontra-se num campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, conforme indicado, que exerce força magnética  $\vec{F}_m$  sobre os portadores de carga, que tendem a se deslocarem no sentido desta força magnética ao mesmo tempo em que se deslocam longitudinalmente na tira. Caso os portadores sejam positivos, como em (a), o potencial do ponto  $b$  será maior do que do ponto  $a$ . Se os portadores forem negativos, como em (b), o potencial do ponto  $b$  é menor do que o do ponto  $a$ . Assim, o sinal dos portadores de carga fica determinado pelo sinal da diferença do potencial de Hall,  $V_{ab}$ . A razão entre a diferença de potencial média de Hall e a corrente é conhecida como resistência Hall, que é uma característica do material.

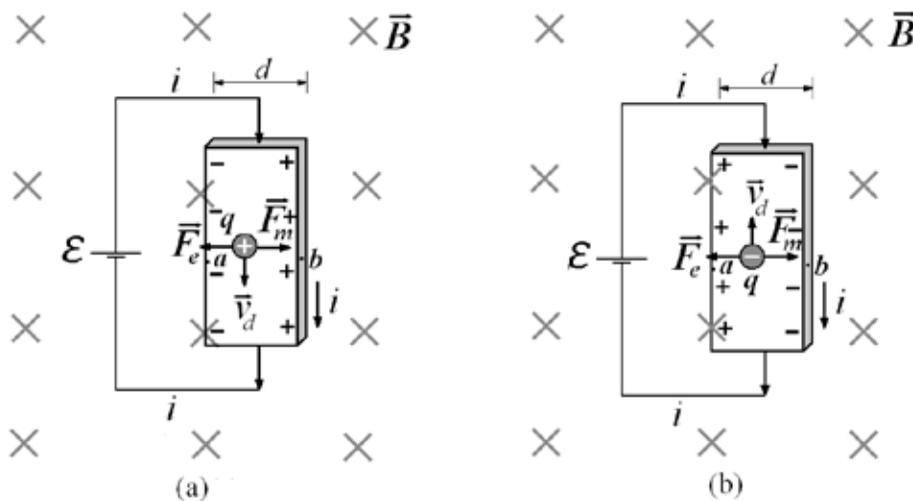


Figura 9.14 – Esquema do experimento de Hall. Em (a) os portadores de carga são positivos e em (b) os portadores de carga são negativos. Ambos se deslocam com uma velocidade de arrasto  $\vec{v}_d$ .

A medida que os portadores de carga se acumulam num lado da tira, eles criam um campo elétrico de um lado para o outro (no sentido da carga positiva para a carga negativa), chamado de campo elétrico de Hall ( $\vec{E}_H$ ), de modo que a força resultante em cada instante é dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m, \tag{9.10}$$

em que  $\vec{F}_e = q\vec{E}_H$  é a força elétrica que atua nos portadores de carga com carga  $q$ , enquanto  $\vec{F}_m = q\vec{v}_d \times \vec{B}$  é a força magnética atuante nos mesmos portadores. A expressão 9.10 é conhecida como Força de Lorentz.

O campo elétrico de Hall, que cresce à medida que aumenta o acúmulo de portadores de carga num lado da tira, se opõe a este acúmulo, de forma que, em algum momento, ele cessa quando a força elétrica atingir valor igual ao da força magnética. Isto é:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \text{ ou } q\vec{E}_H + q\vec{v}_d \times \vec{B} = 0$$

de onde se tira que:

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_d \times \vec{B}. \quad (9.11)$$

Observa-se na equação 9.11 que, uma vez conhecidos  $\vec{E}_H$  e  $\vec{B}$ , a velocidade de arrasto  $-\vec{v}_d$  dos portadores de carga pode ser calculado tanto em módulo quanto em sentido, o que dá imediatamente o sinal dos portadores de carga.

O módulo da velocidade de arrasto  $v_d$  dos portadores de carga pode ser calculado em função da densidade de corrente  $j$ . A Figura 9.15 mostra um segmento de um fio metálico de comprimento  $l$  e área da seção transversal  $A$ , onde os portadores de carga (elétrons) têm uma velocidade de arrasto de módulo  $v_d$ .

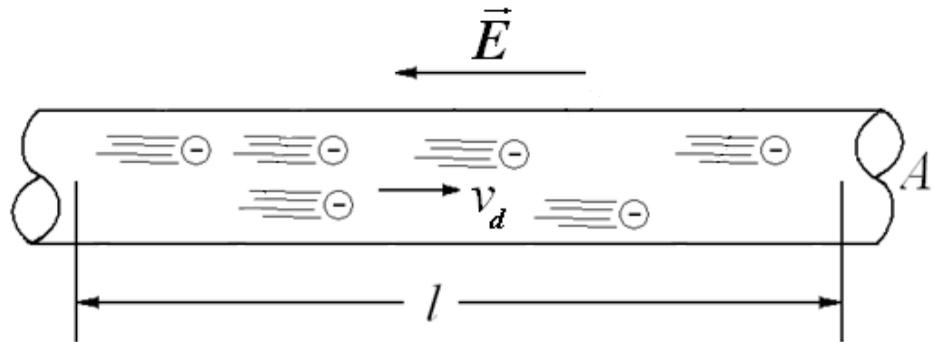


Figura 9.15 – Segmento de um fio metálico mostrando os portadores de carga.

O número de elétrons do fio é  $nAl$ , onde  $n$  é o número de elétrons de condução por unidade de volume e  $Al$  é o volume do fio. No tempo  $t=l/v_d$  uma carga  $q=(nAl)e$  atravessa o comprimento  $l$  do fio. Obtém-se então:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nAle}{l/v_d} = nAev_d \therefore v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne},$$

Onde  $j = iA$  é a densidade de corrente. Assim, pode-se escrever o campo elétrico Hall como:

$$E_H = \frac{jB}{ne}. \quad (9.12)$$

O efeito Hall pode ser usado para determinar a densidade dos portadores de carga em condutores e semicondutores, tanto dos elétrons que são negativos como dos “buracos” que são positivos. Este efeito se tornou uma ferramenta muito útil em laboratórios de física em todo o mundo.

Hall realizou suas experiências em temperatura ambiente, com campos magnéticos moderados, de menos de 1 T (Um tesla). No final dos anos 1970, pesquisadores fizeram muitas experiências do efeito Hall em semicondutores usados na indústria eletrônica, mas desta feita em temperaturas extremamente baixas (próximas do zero absoluto) e em campos magnéticos muito potentes (próximo de 30 T). Nestas condições, o físico alemão Klaus Von Klitzing descobriu, em 1980, que a resistência de Hall não variava de forma linear, mas “em saltos”, em função da intensidade do campo magnético (figura 9.16). Os saltos ocorriam em valores da resistência de Hall que não dependiam das propriedades do material, mas sim de uma combinação de constantes físicas fundamentais divididas por um inteiro. Isto significava que a resistência de Hall era quantizada. Nos valores quantizados da resistência Hall, a resistência ôhmica normal desaparece e o material se torna em uma espécie de supercondutor. Por esta descoberta, chamada de efeito Hall quântico inteiro, Von Klitzing recebeu o prêmio Nobel em 1985.

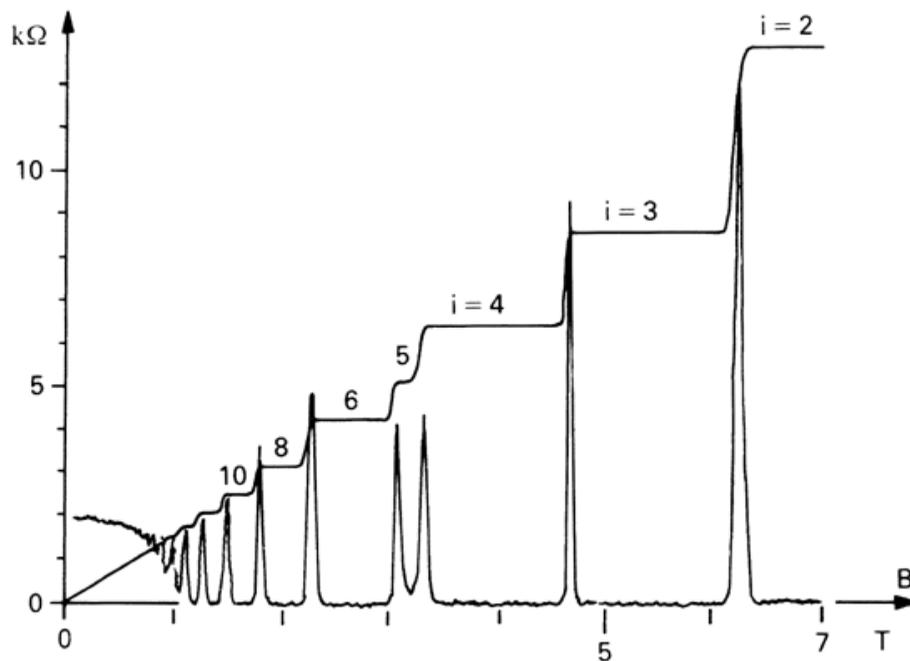


Figura 9.16 - A resistência de Hall varia em saltos em função da intensidade do campo magnético  $\vec{B}$ .

## 9.8 Trajetória de uma carga num campo magnético uniforme

Seja uma carga elétrica negativa  $-q$  com velocidade  $\vec{v}$  numa região do espaço onde atua um campo magnético  $\vec{B}$ , perpendicular ao  $\vec{v}$ , como mostra o esquema da Figura 9.17.

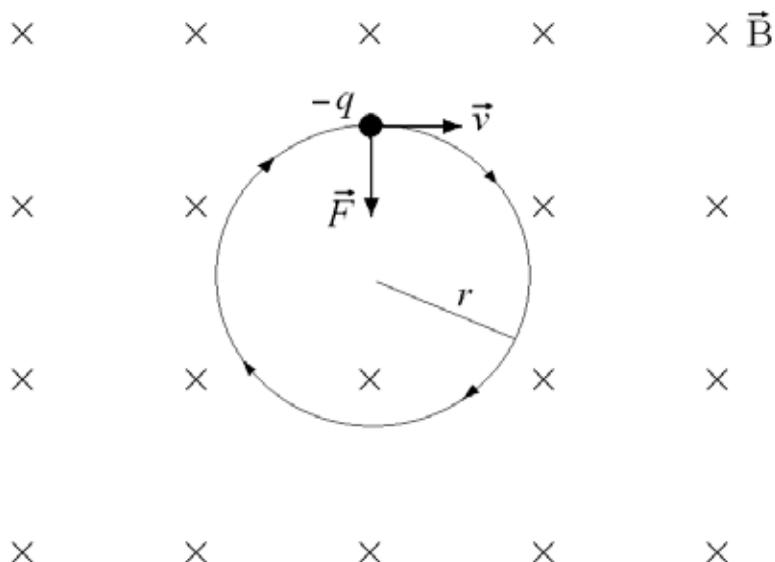


Figura 9.17 – Esquema de uma carga elétrica negativa  $-q$  com velocidade  $\vec{v}$  numa região do espaço onde atua um campo magnético  $\vec{B}$ , perpendicular ao  $\vec{v}$ .

Nesta configuração, a força magnética atuante na carga elétrica devido ao campo  $\vec{B}$ , dado pela equação 9.2, tem intensidade  $F = qvB$ . Esta força tende a desviar a carga lateralmente, de forma que, atuando como força centrípeta, resulta numa trajetória circular. Portanto, pela segunda lei de Newton,

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (9.13)$$

de onde se obtém para o raio do círculo:

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad (9.14)$$

Calculando o valor de  $v/r$ , a velocidade angular  $\omega$ , medida em  $rad/s$ , pode ser obtida. Isto é:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (9.15)$$

A frequência  $\nu$  (medida em rotações por segundo), que caracteriza a partícula, é então dada por:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (9.16)$$

## 9.9 A descoberta do elétron

Em 1897, Joseph John Thomson (1856–1940) fez uma experiência que corresponde efetivamente à descoberta do elétron como uma partícula fundamental. O experimento ocorreu no Laboratório Cavendish, em Cambridge na Inglaterra. Naquela época Thomson estudava o comportamento dos raios catódicos, influenciado pelo trabalho de Maxwell e o descobrimento dos raios X. Apesar do experimento de Thomson, existe evidência publicada de que o alemão E. Weichert tenha descoberto o elétron alguns meses antes.

A experiência de Thomson consistiu em medir a razão entre a carga e de elétron e sua massa  $m$ , observando a deflexão deste quando submetido à ação simultânea de campos elétricos e magnéticos.

A Figura 9.18 mostra um esquema representativo da experiência de Thomson, onde elétrons são lançados em um tubo, com velocidade  $\vec{v}$  numa região onde coexistem um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$ , perpendiculares entre si. Dependendo do valor de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , a deflexão, ou não sofrida, pelos elétrons pode ser observada pela posição da mancha luminosa deixada pelo impacto dos elétrons numa tela fluorescente.

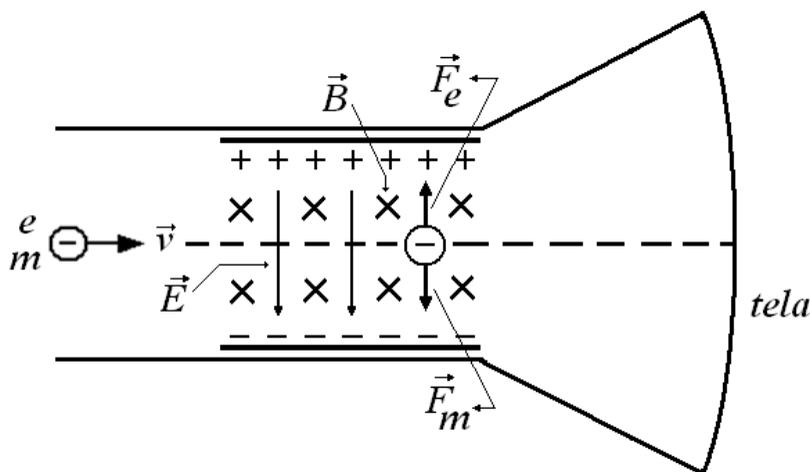


Figura 9.18 – Esquema representativo da experiência de Thomson, onde elétrons são lançados no tubo com velocidade  $\vec{v}$  numa região onde coexistem um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  perpendiculares entre si.

A razão entre a carga e a massa do elétron que penetra no tubo é calculada através de parâmetros controlados experimentalmente, ajustados de tal forma que o feixe permaneça em linha reta, isto é, de forma que a força elétrica equilibre a força magnética. Thomson utilizou então a equação de Lorentz para encontrar a relação entre  $e$  e  $m$ .

A força total atuante sobre o elétron é:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Observando a Figura 9.18 percebe-se que a tendência do campo elétrico é desviar a partícula para cima, enquanto que o campo magnético tende a desviar a partícula para baixo. Para que estas forças se anulem, deve-se ter:

$$eE = evB$$

ou

$$E = vB. \quad (9.17)$$

A equação 9.16 diz então que para uma dada velocidade  $v$  do elétron, resultante de sua aceleração por um potencial  $V$ , a condição de desvio nulo pode ser obtida ajustando-se os valores de  $E$  e  $B$ . Assim,

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

que de 9.16, obtém-se

$$eV = \frac{1}{2}m \frac{E^2}{B^2}$$

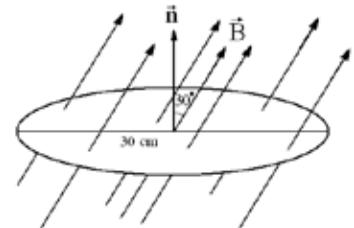
$$\therefore \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}. \quad (9.18)$$

O valor encontrado por Thomson para  $e/m$  foi  $1,7 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ , que é muito próximo do valor de  $1,758 \times 10^{11} \text{ C/kg}$  encontrado atualmente. Pela descoberta do elétron em 1897, Thomson ganhou o Prêmio Nobel de Física de 1906.

## Atividades propostas



- Determinar o fluxo magnético através de uma espira circular de 30cm de diâmetro cuja normal faz um ângulo de  $30^\circ$  com um campo magnético uniforme de intensidade  $0,8 \text{ Wbm}^2$ , como ilustrado na figura.



Resolução:

O fluxo magnético  $\Phi$  é pode ser calculado pela equação 9.1:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS \cos \theta = BS \cos \theta,$$

onde  $\vec{B}$  é o campo magnético uniforme de intensidade  $0,8 \text{ Wb/m}^2$  através da espira circular, que faz um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com o vetor normal,  $\vec{n}$ , à sua superfície  $S$  da espira circular. Assim:

$$\Phi = 0,8 \text{ Wb/m}^2 \times \pi (15 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times 0,86$$

$$\therefore \Phi = 4,9 \times 10^{-2} \text{ Wb}.$$

2. Um elétron move-se ao longo do eixo  $x$  no sentido com uma rapidez de  $1,00 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Há um campo magnético constante de  $2,50 \text{ N/A.m}$  ao longo da direção  $z$ . Calcular o módulo, a direção e o sentido da força magnética atuante no elétron.

Resolução:

A força magnética sobre uma carga pode ser calculada pela equação 9.2,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , então:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(v_x \vec{l} \times B_z \vec{l}_z) = qv_x B_z (\vec{l}_x \times \vec{l}_z) = -qv_x B_z \vec{l}_y \\ \therefore \vec{F} &= -(-1,62 \times 10^{-19} \text{ C})(1,00 \times 10^7 \text{ m/s})(2,5 \text{ N/A.m}) \vec{l}_y \\ \therefore \vec{F} &= (4,00 \times 10^{-12} \text{ N}) \vec{l}_y \end{aligned}$$

3. Um segmento reto de um condutor horizontal de  $15 \text{ cm}$  de comprimento, percorrido por uma corrente de  $75 \text{ A}$ , colocado de modo que a corrente flui ao longo da direção do eixo  $x$ , é colocado num campo magnético  $\vec{B}$  constante orientado verticalmente para cima ao longo do eixo  $z$  e de intensidade  $0,25 \text{ Wb/m}^2$ , como mostrado na figura. Calcular o módulo, a direção e o sentido da força magnética que atua neste segmento do condutor.

Resolução:

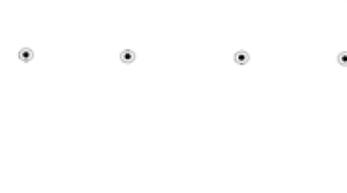
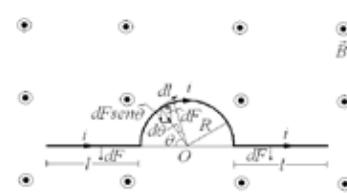
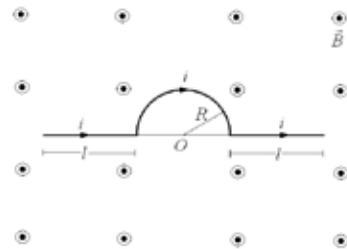
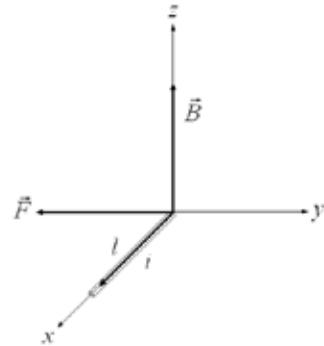
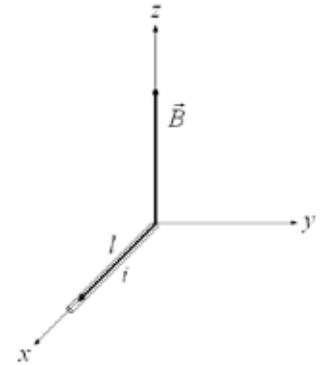
A força magnética  $\vec{F}$  sobre um segmento reto de um condutor pode ser calculada pela equação 9.4,  $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ , onde  $i$  é a corrente elétrica que flui no condutor,  $\vec{l}$  é o vetor que representa o comprimento do segmento e  $\vec{B}$  é o vetor campo magnético. Pelas condições do problema, pode-se escrever  $\vec{l} = (0,15\text{m}) \vec{i}$  e  $\vec{B} = (0,25\text{Wb/m}^2) \vec{z}$ , onde  $\vec{i}$  e  $\vec{z}$  são os vetores unitários nas direções positivas dos eixos  $x$  e  $z$ , do sistema de coordenadas cartesianas destrógiro, respectivamente. Portanto:

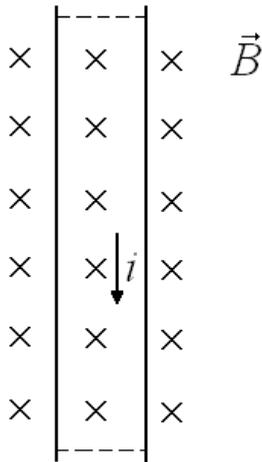
$$\vec{F} = (75\text{A})(0,15\text{m}) \vec{l} \times (0,25\text{Wb/m}^2) \vec{z} \therefore \vec{F} = (2,82\text{N}) \vec{j}, \text{ onde } \vec{j} \text{ é o vetor unitário na direção positiva do eixo } y.$$

4. Um fio disposto na forma mostrada na figura, percorrido por uma corrente  $i$ , é colocado numa região onde atua um campo magnético  $\vec{B}$ , perpendicular ao plano da figura e orientado conforme indicado. Calcular o valor da força que atua sobre o fio.

Resolução:

O elemento infinitesimal da força magnética que atua no fio pode ser calculado pela equação 9.5,  $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$ . Usando a regra da mão direita para o produto vetorial desta equação, o elemento infinitesimal para cada um dos trechos da figura pode ser escrito como mostrado na figura a seguir.





Pela equação 9.4, a força para os trechos retilíneos no lado esquerdo e direito da figura tem módulo  $F_{esq} = F_{dir} = iLB$ , direção vertical e orientação para baixo.

Sobre o trecho circular, o elemento infinitesimal de comprimento  $d\vec{l}$  atua uma força de módulo  $dF_{cir} = iBdl = iB(Rd\theta)$  e direção radial, orientada para o centro da circunferência. Somente a componente vertical desta força contribui para o resultante, já que a componente horizontal cancela a contribuição simétrica. Assim, a força no trecho circular vale:

$$dF_{cir} = \int_0^\pi dF \sin\theta = \int_0^\pi (iBRd\theta) \sin\theta = iBR \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2iBR.$$

Portanto, a força resultante tem módulo  $F = F_{esq} + F_{dir} + F_{cir} = iLB + iLB + 2iLB = 2iB(l + R)$ , direção vertical e sentido para baixo.

5. Uma bobina retangular, com 200 espiras de 30cm por 15cm, é percorrida por uma com uma corrente de 5,0 A. A bobina está mergulhada em um campo magnético uniforme de 0,2 T. Calcular o momento magnético e o torque máximo.

Resolução:

O momento magnético  $\mu$  é dado por  $\mu = NiA$ , onde  $N$  é o número de espiras da bobina,  $i$  é a corrente elétrica que a percorre e  $A$  é a sua área. Assim:

$$\mu = 200 \times 5,0A \times 0,3m \times 0,15m = 45Am^2.$$

O torque numa espira é dado pela equação 9.7,  $\tau_{bobina} = NiAB \sin \theta$ , que será máximo quando  $\theta = 90^\circ$ . Portanto,

$$\tau_{maximo} = 45Am^2 \times 0,2T = 9,0Nm.$$

6. Uma fina tira de cobre com 2,0 cm de largura e 1,0 mm de espessura é disposta no interior de uma região onde existe um campo magnético de 2,0 T, conforme a figura. Calcular a diferença de potencial do efeito Hall quando a tira é percorrida por uma corrente de 200 A. O número de elétrons de condução por unidade de volume do cobre (considerando 1 elétron por átomo) é  $8,4 \times 10^{22}/cm^3$ .

Resolução:

O campo elétrico Hall é dado pela equação 9.12,  $E_H = jB/ne$ .

Como  $E_H = VH/d$  e  $j = i/A = i/(dh)$ , obtém-se:

$$V_H = jBd/ne = iBd/nedh$$

$$\therefore V_H = \frac{iB}{neh},$$

onde  $i$  é a corrente,  $B$  é o campo magnético,  $n$  é número de portadores de carga,  $e$  é a carga do elétron e  $h$  é espessura da fita. Assim:

$$V_H = \frac{200A \times 2,0T}{8,4 \times 10^{28} m^3 \times 1,6 \times 10^{-19} C \times 1,0 \times 10^{-3} m}$$

$$\therefore V_H = 2,2 \times 10^{-5} V = 22 \mu V$$

7. Um elétron com energia cinética de  $10 \text{ eV}$  gira num plano perpendicular a um campo magnético uniforme de  $1,0 \times 10^{-4} T$ . Calcular o raio da órbita do elétron e a frequência com que ele gira.

Resolução:

Uma carga no interior de um campo magnético gira numa órbita circular que pode ser calculada pela equação 9.14,  $r = mv/qB$ . Para calcular  $v$ , toma-se a expressão da energia cinética:  $K = (1/2)mv^2 \therefore v = \sqrt{2K/m}$ , que substituindo em 9.14, obtém-se:

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} \therefore r = \frac{\sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31} kg \times 10 \times 1,6 \times 10^{-19} J}}{1,6 \times 10^{-19} C \times 1,0 \times 10^{-4} T} \cong 0,11 m = 11 cm$$

A frequência de giro do elétron pode ser calculada pela equação 9.16:

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

de onde se obtém:

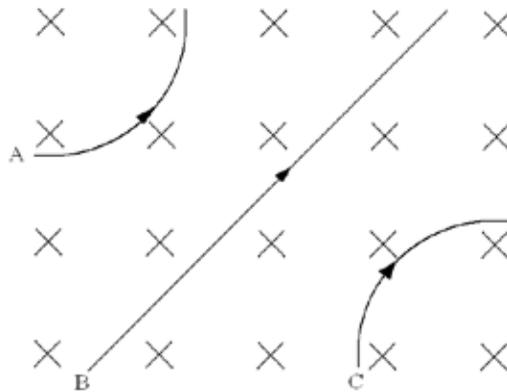
$$v = \frac{1,6 \times 10^{-19} C \times 1,0 \times 10^{-4} T}{2 \times 3,14 \times 9,1 \times 10^{-31} kg} = 2,8 MHz$$

## Atividades de avaliação



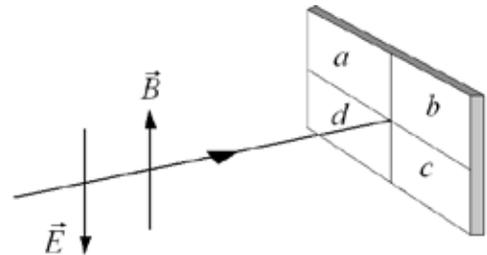
1. O pólo Norte de um ímã reto emite um fluxo magnético de  $0,2 \text{ mWb}$ . Sabendo que área da seção reta do ímã de  $8 \text{ cm}^2$ , calcule o valor do campo magnético do ímã. Admita que o campo seja uniforme.
2. Uma superfície de ferro encontra-se submetida a um campo magnético uniforme de módulo  $1,5 \text{ T}$ . A área da seção reta do ferro é igual a  $20 \text{ cm}^2$ . Calcule o fluxo magnético através do ferro, se as linhas de força (a) forem perpendiculares à superfície do ferro; (b) fizerem um ângulo de  $60^\circ$  com a superfície e (c) fizerem um ângulo de  $0^\circ$  com a superfície.

3. Determine o valor do campo magnético na superfície de uma espira de um dínamo, de seção igual a  $40\text{cm}^2$ , que é atravessada por um fluxo magnético de  $6,4\text{ mWb}$ , sendo as linhas de força perpendiculares à superfície da espira.
4. A figura mostra as trajetórias de três partículas, A, B e C, passando através de um campo magnético. Qual o sinal da carga de cada uma destas partículas?



5. Um fio de  $1,0\text{ m}$  de comprimento, percorrido por uma corrente de  $10\text{ A}$ , faz um ângulo de  $30^\circ$  com a direção do campo magnético uniforme de  $1,5\text{ T}$ . Calcule o módulo, a direção e o sentido da força que atua magnética que atua sobre o fio.

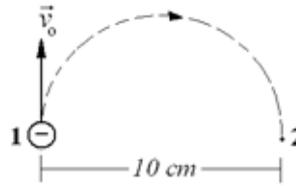
6. A figura mostra um esquema de um feixe de elétrons incidindo horizontalmente no centro de um anteparo disposto frontal e verticalmente. (a) Se for aplicado ao feixe apenas um campo elétrico  $\vec{E}$  como o indicado na figura,



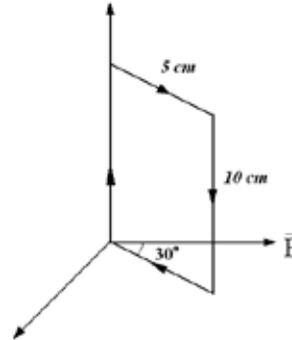
- para que região do anteparo os elétrons seriam desviados? (b) E se fosse aplicado ao feixe apenas um campo magnético  $\vec{B}$  como o indicado, para onde seriam desviados os elétrons? (c) Para que região do anteparo os elétrons seriam desviados se os campos elétricos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  atuarem simultaneamente?

7. Um fio de  $50\text{ cm}$  de comprimento, situado ao longo do eixo dos  $x$ , é percorrido por uma corrente de  $0,50\text{ A}$ , no sentido de  $x$  positivo. Existe um campo magnético dado (em T) por  $\vec{B} = 0,0030\vec{j} + 0,010\vec{k}$ . Determine as componentes da força sobre o fio.

8. A figura mostra um elétron que sai do ponto 1 com uma velocidade inicial de módulo igual a  $10^7 \text{ m/s}$  e atinge o ponto 2, dentro de uma região onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , que faz o elétron descrever a trajetória semicircular. Determine o módulo e a orientação do campo responsável por este movimento do elétron.

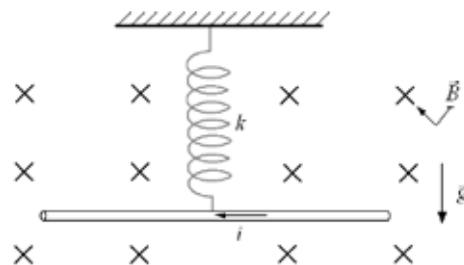


9. A figura representa uma bobina formada por 20 espiras retangulares de  $10 \text{ cm}$  por  $5,0 \text{ cm}$ . A bobina é percorrida por uma corrente de  $0,10 \text{ A}$ , podendo girar em torno de um de seus lados. Qual o torque (em módulo e direção) que atua sobre a bobina, quando ela é colocada com seu plano fazendo  $30^\circ$  com a direção de um campo magnético uniforme de  $0,50 \text{ T}$ ?

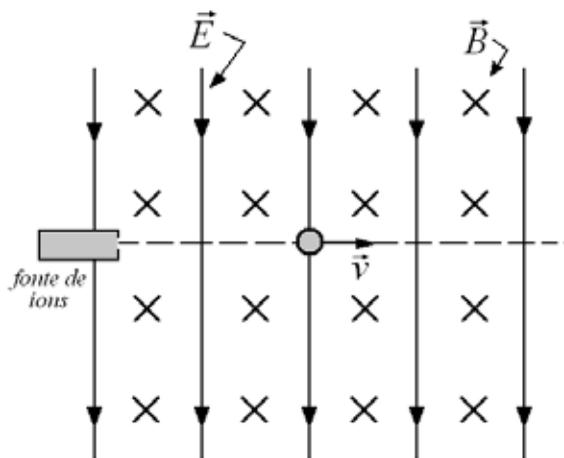


10. Numa experiência do efeito Hall, uma corrente de  $3,0 \text{ A}$ , percorre um condutor de  $1,0 \text{ cm}$  de largura,  $4,0 \text{ cm}$  de comprimento e  $10^{-3} \text{ cm}$  de espessura, produzindo uma voltagem transversal de Hall (através da largura) de  $1,0 \times 10^{-5} \text{ V}$ , quando um campo magnético de  $1,5 \text{ T}$  atravessa perpendicularmente o condutor. Calcule a velocidade de arrastamento dos portadores de carga e o número de portadores de carga por centímetro cúbico.
11. Qual o valor de um campo magnético capaz de fazer um próton com velocidade de  $1,0 \times 10^7 \text{ m/s}$  descrever no espaço uma circunferência do tamanho do equador terrestre?

12. A figura mostra um esquema de um fio de comprimento  $30 \text{ cm}$  e massa  $20 \text{ g}$ , suspenso horizontalmente por meio de uma mola de material dielétrico de constante elástica  $20 \text{ N/m}$ , numa região onde atua um campo magnético uniforme de intensidade  $B=0,1 \text{ T}$  e um campo gravitacional de intensidade  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Determine (a) a força magnética que atua no fio quando uma corrente elétrica de intensidade  $10 \text{ A}$  percorre no sentido indicado na figura e (b) a deformação da mola.



13. A figura mostra um esquema de um dispositivo experimental em um laboratório de Física que possui um emissor de íons positivos a uma velocidade de muito elevada  $\vec{v}$ . Para medir o valor da velocidade dos elétrons, um físico aplicou um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$ , nas direções e sentidos mostrados na figura e intensidades variáveis. O físico verificou que, quando as intensidades dos campos eram  $1,0 \times 10^3 \text{ N/C}$  e  $2,0 \times 10^{-2} \text{ T}$ , os íons atravessavam os dois campos em linha reta, como indicado na figura. Com esses dados determine o valor de  $\vec{v}$ .



## A Lei de Ampère

Fios percorridos por corrente elétrica são fontes de campos magnéticos e objetos que sofrem efeitos de campos magnéticos. Isto é, corrente elétrica gera campo magnético e campo magnético exerce força sobre corrente elétrica.

No capítulo 9, o magnetismo foi abordado se referindo às forças exercidas por campos magnéticos sobre cargas elétricas em movimento. Neste capítulo, a abordagem do magnetismo será focada na produção de campos magnéticos.

### 10.1 A Lei de Ampère

Em experiência, Hans Christian Oersted demonstrou que corrente elétrica produz efeitos magnéticos. Pequenos ímãs em torno de um fio condutor podem ilustrar a experiência de Oersted. A Figura 10.1 mostra o esquema de um fio com ímãs em seu redor, onde em (a) não há corrente no fio e em (b) o fio é percorrido por corrente elétrica. Quando o fio é percorrido por corrente intensa, os ímãs, que antes estavam orientados com o campo magnético terrestre, ficam orientados formando linhas circulares de indução magnética em torno do fio.

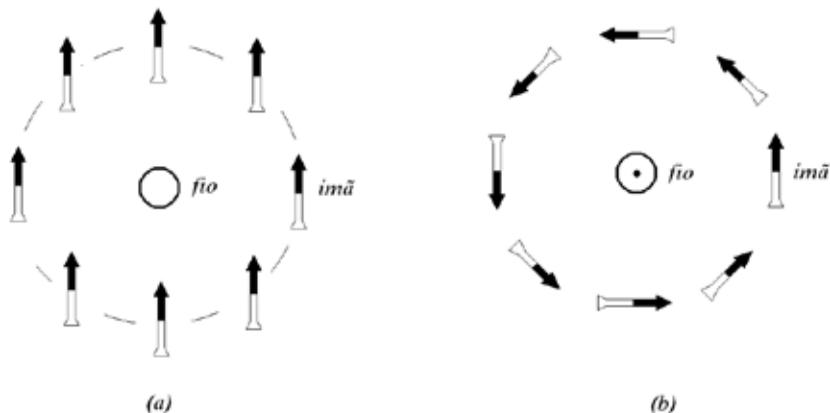


Figura 10.1 – Esquema de um fio com ímãs em seu redor, onde em (a) não há corrente no fio e em (b) o fio é percorrido por corrente elétrica.

Depois que Oersted apresentou seu trabalho em 1820, Ampère realizou várias experiências envolvendo suas idéias, que culminaram com a formalização de uma relação entre o campo magnético  $\vec{B}$  produzido em torno do fio pela corrente elétrica  $i$  e a própria corrente  $i$ . A relação que é conhecida como Lei de Ampère é:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i, \quad (10.1)$$

em que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  é a permeabilidade magnética do vácuo e  $d\vec{l}$  é o elemento de comprimento ao longo de uma linha fechada arbitrária, como mostra a Figura 10.2. A indicação da direção de  $\vec{B}$  pode ser determinada pela regra da mão direita, que diz: "Um fio percorrido por corrente segurado com a mão direita com o polegar apontado no sentido da corrente, produz um campo  $\vec{B}$  no sentido das extremidades dos dedos encurvados em torno do fio".

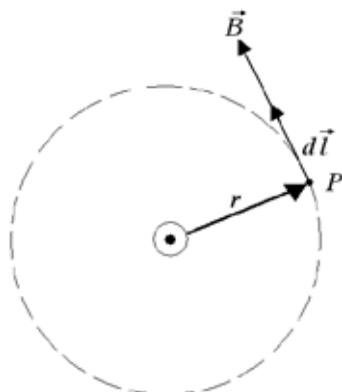


Figura 10.2 – Esquema de um percurso de integração usado na Lei de Ampère. O ponto no centro da figura indica a existência de uma corrente elétrica  $i$  no fio no sentido saindo da página na direção do leitor. Neste caso, o ângulo entre  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  é zero.

A Lei de Ampère é geral, isto é, ela é válida para qualquer tipo de campo magnético, qualquer distribuição de corrente e qualquer caminho de integração, como mostra a Figura 10.3. Ela está para o magnetismo assim como a Lei de Gauss está para a eletrostática, sendo o caminho fechado de integração funcionando como uma superfície gaussiana da eletrostática e, por isso, é chamada de linha amperiana.

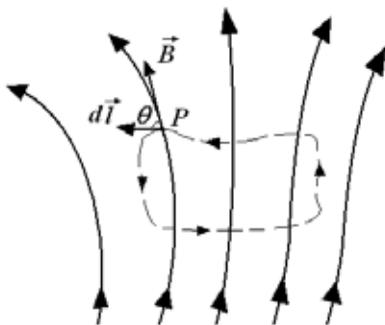


Figura 10.3 – Caminho de integração qualquer (linha amperiana) num campo magnético qualquer.

## 10.2 Campo de um fio retilíneo longo

O campo magnético  $\vec{B}$  de um fio retilíneo longo percorrido por uma corrente  $i$  pode ser calculado usando a Lei de Ampère. Das experiências de Osted já se sabe que as linhas de indução campo são circunferências em planos perpendiculares ao fio. A simetria permite afirmar que o campo tem a mesma intensidade em qualquer ponto da circunferência. É uma simetria axial.

A linha amperiana apropriada para se calcular o valor de  $\vec{B}$  a uma distância  $r$  do fio é uma circunferência de raio  $r$ . Assim, pela figura, o ângulo entre  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  é zero, portanto:

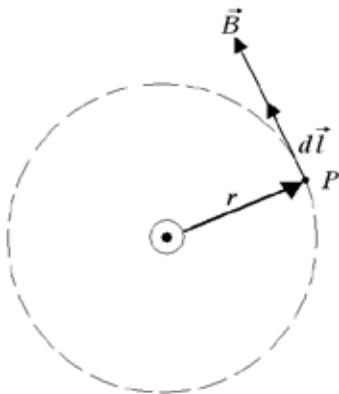


Figura 10.4 – Fio retilíneo longo. O ponto no centro da figura indica uma corrente elétrica  $i$  no fio no sentido saindo da página na direção do leitor. Neste caso, o ângulo entre  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  é zero.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

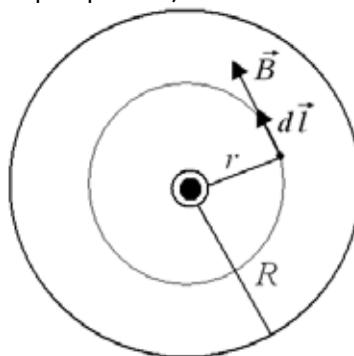
$$\oint B dl = \mu_0 i \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}. \tag{10.2}$$

## 10.3 Campo de um cilindro longo

A Figura 10.5 mostra uma seção reta de um cilindro longo de raio  $R$  percorrido por uma corrente  $i$  distribuída uniformemente em qualquer seção reta. A Lei de Ampère pode ser usada para encontrar uma expressão para o valor de  $\vec{B}$  a uma distância  $r < R$  do centro do cilindro.

Figura 10.5 – Vista frontal da seção reta de um cilindro longo de raio  $R$  percorrido por uma corrente  $i$  distribuída uniformemente.



A simetria cilíndrica sugere uma amperiana circular de raio  $r < R$ , como mostra a Figura 10.5, pois  $\vec{B}$  é tangente a este caminho de integração. Então, da Lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i',$$

com  $i'$  sendo a corrente no interior do cilindro de raio  $r$ , obtém-se:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 i', \quad (10.3)$$

Pela uniformidade da densidade de corrente, obtém-se:

$$J = \frac{i}{\pi R^2} = \frac{i'}{\pi r^2} \Rightarrow i' = \frac{r^2}{R^2} i. \quad (10.4)$$

Substituindo 10.4 em 10.3, obtém-se:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i. \quad (10.5)$$

Observa-se que, de 10.2 e de 10.5, o campo magnético de um cilindro varia com a distância ao eixo conforme o gráfico da Figura 10.6.

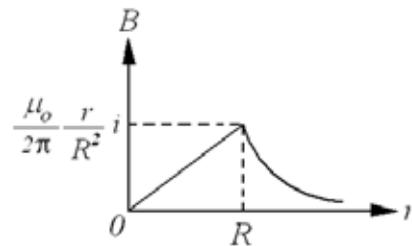


Figura 10.6 – Gráfico de  $B$  em função de  $r$  para um cilindro longo.

## 10.4 Interação magnética entre fios condutores paralelos

A Figura 10.7 mostra um esquema de dois fios condutores, *fio 1* e *fio 2*, longos e paralelos, distantes  $d$  um do outro, que são percorridos pelas correntes  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente.

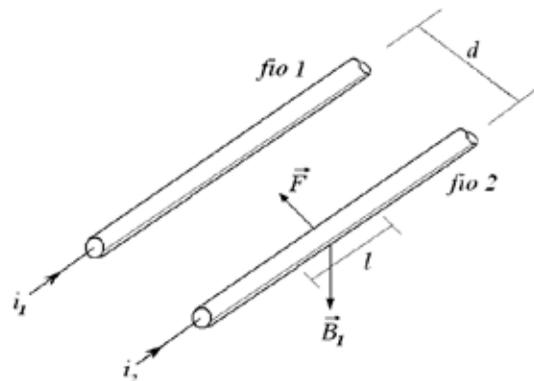


Figura 10.7 – Esquema de dois fios condutores, *fio 1* e *fio 2*, longos e paralelos, distantes  $d$  um do outro, que são percorridos pelas correntes  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente.

O fio 1 cria um campo magnético  $\vec{B}$  de intensidade

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad (10.6)$$

na posição do *fio 2*, que exercerá uma força  $\vec{F}_{12}$ , de acordo com 9.4, de intensidade:

$$F_{12} = i_2 l B_1 = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \left(\frac{i_1 i_2 l}{d}\right) \quad (10.7)$$

sobre o segmento  $l$  do *fio 2*.

De maneira análoga, atuará uma força  $\vec{F}_{21}$  sobre o segmento  $l$  do *fio 1*, de intensidade igual a intensidade de  $\vec{F}_{12}$ , mas com sentido contrário. Portanto, quando as correntes  $i_1$  e  $i_2$  percorrem os fios no mesmo sentido, estes se atraem.

## 10.5 Campo magnético de um solenoide

Solenóide é um fio enrolado em forma de helicóide de passo curto percorrido por uma corrente elétrica, como mostra a Figura 10.8.

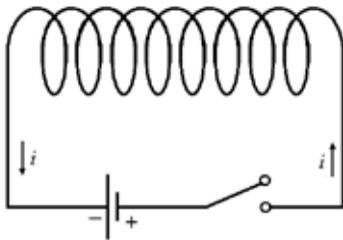


Figura 10.8 – Desenho de um solenoide

O campo magnético produzido pela corrente elétrica que percorre um solenoide, num certo ponto, é a soma vetorial dos campos produzidos por cada espira do solenoide. A Figura 10.9 mostra um esboço das linhas de indução magnética produzidas pela corrente num solenoide de comprimento  $l$ . A Lei de Ampère pode ser aplicada a solenóides para calcular o campo  $\vec{B}$  nas proximidades.

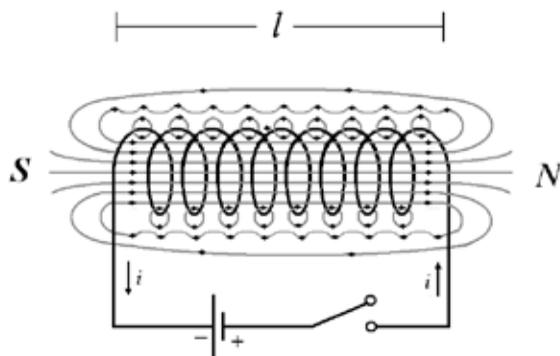


Figura 10.9 – Desenho de um solenoide mostrando um esboço das linhas de indução magnética produzidas pela corrente elétrica  $i$ .

Seja um solenoide de espiras quadradas adjacentes, equivalente a uma distribuição contínua de corrente na superfície de um cilindro de comprimento finito, como representado na Figura 10.10, onde também mostra as linhas de indução devido a corrente  $i$  percorrida nele. Aplicando a Lei de Ampère a este solenoide, com uma amperiana de percurso  $abcd$ , mostrada na Figura 10.10, obtém-se:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i',$$

em que  $i'$  é a corrente que atravessa a área limitada pelo percurso de integração  $abcd$ .

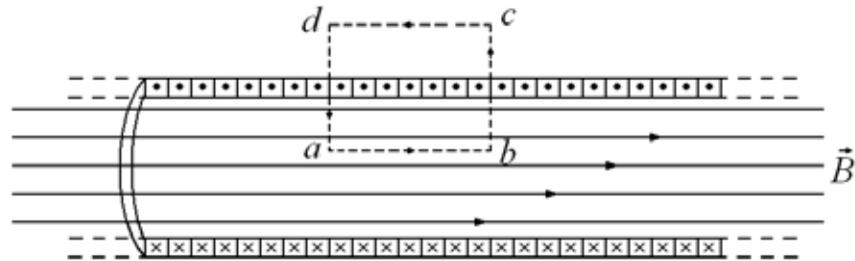


Figura 10.10 – Desenho de uma seção de um solenóide de espiras quadradas adjacentes, equivalente a uma distribuição contínua de corrente na superfície de um cilindro de comprimento finito.

Obtém-se então:

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i',$$

onde

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\overline{ab}, \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,$$

obtendo-se:

$$B\overline{ab} = \mu_0 i'. \quad (10.8)$$

A corrente  $i'$  na equação 10.8 é dada por  $i' = inab$ , com  $n$  sendo o número de espiras por unidade de comprimento e  $i$  a corrente que percorre o solenoide. De onde se obtém:

$$\begin{aligned} B\overline{ab} &= \mu_0 in\overline{ab} \\ \therefore B &= n\mu_0 i. \end{aligned} \quad (10.11)$$

A equação 10.11 fornece então a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  no o interior de um solenoide.

A Lei de Ampère é válida para qualquer distribuição de corrente; no entanto, ela fica restrita às distribuições em que a simetria permite calcular a integral de linha.

## 10.6 A lei de Biot-Savart

Uma alternativa prática que permite calcular o vetor  $\vec{B}$  em qualquer distribuição de corrente é a Lei de Biot-Savart. Ela descreve o vetor  $\vec{B}$  em termos de magnitude e direção de uma fonte de corrente, da distância da fonte de corrente elétrica e a permeabilidade do meio. Esta lei pode ser usada para deduzir a Lei de Ampère, que por sua vez também se deduz a Lei de Biot-Savart. A lei recebe esse nome em homenagem aos físicos franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart. A lei de Biot-Savart e a Força de Lorentz são fundamentais para o eletromagnetismo, tal como a Lei de Coulomb é fundamental para a eletrostática.

Se um elemento infinitesimal de corrente  $i d\vec{l}$  é definido, então um elemento infinitesimal de campo magnético devido ao elemento de corrente é dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}, \quad (10.12)$$

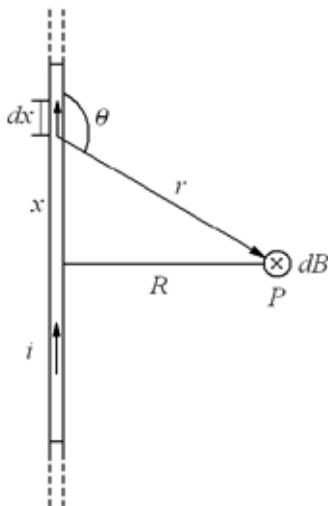
onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio,  $i$  é a corrente elétrica, medida em ampères,  $d\vec{l}$  é o vetor diferencial do comprimento do elemento de corrente e  $\vec{r}$  é o vetor que liga o elemento de corrente até o ponto onde se quer calcular o campo.

O campo resultante  $\vec{B}$  no ponto P de todas as contribuições de  $d\vec{B}$  é dado pela integração da equação 10.12. Isto é:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.. \quad (10.13)$$

A seguir são feitas dois exemplos do cálculo do campo  $\vec{B}$  usando a Lei de Biot-Savart.

(1) Campo  $\vec{B}$  de um fio retilíneo longo percorrido por corrente



A Figura 10.11 mostra o desenho de um plano contendo um fio longo percorrido por uma corrente  $i$ , com um elemento de corrente típico representado por  $d\vec{x}$ , e o ponto P onde se quer calcular o vetor  $\vec{B}$ , no vácuo.

Figura 10.11 – Desenho de um plano contendo um fio longo percorrido por uma corrente  $i$ , com um elemento de corrente típico representado por  $d\vec{x}$ , e o ponto P onde se quer calcular o vetor  $\vec{B}$ , no vácuo.

A contribuição  $d\vec{B}$  no ponto  $P$ , devido ao elemento de corrente, é dada pela equação 10.12, cujo módulo é:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \operatorname{sen}\theta}{r^2}. \quad (10.14)$$

As contribuições  $d\vec{B}$  no ponto  $P$ , devido a todos os elementos de corrente, têm sempre a mesma direção perpendicular ao plano da figura apontando para dentro da página. Assim, a integral vetorial, dada por 10.13, reduz-se a integral escalar:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\theta dx}{r^2}. \quad (10.15)$$

Mas, pela Figura 10.11,  $x$ ,  $r$  e  $\theta$  se relacionam por:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad (10.16a)$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (10.16b)$$

Que substituindo na equação 10.15, obtém-se:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}. \quad (10.17)$$

A equação 10.17 apresenta o mesmo resultado encontrado usando a Lei de Ampère para o campo de um fio longo percorrido por corrente da equação 10.2.

(2) Campo  $\vec{B}$  de uma espira circular percorrida por corrente

A Figura 10.12 mostra um desenho de um corte diametral de espira circular de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $i$ , com um elemento de corrente representado por  $d\vec{l}$ , e o ponto  $P$  onde se quer calcular o vetor  $\vec{B}$ , no vácuo.

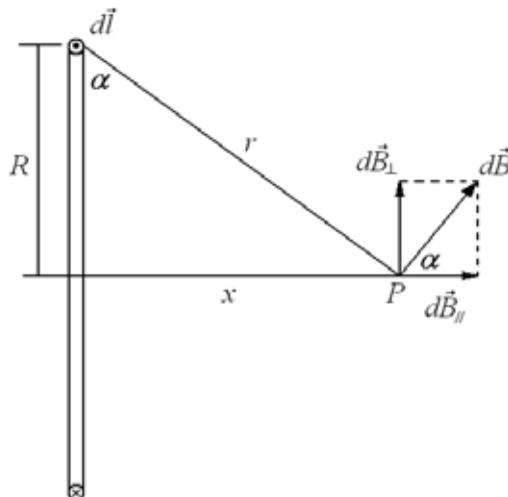


Figura 10.12 – Desenho de um corte diametral de uma espira circular de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $i$ , com um elemento de corrente representado por  $d\vec{l}$ , e o ponto  $P$  onde se quer calcular o vetor  $\vec{B}$ , no vácuo.

Observa-se na Figura 10.12 que o vetor  $d\vec{l}$  do elemento de corrente da parte superior da espira aponta na direção perpendicular da página. O ângulo  $\theta$ , que não aparece na figura, entre os vetores  $d\vec{l}$  e  $\vec{r}$  é, portanto,  $90^\circ$ , e o plano por eles formado é ortogonal ao plano da página. A contribuição  $d\vec{B}$  devido a este elemento de corrente é perpendicular a este plano, estando contida no plano da página perpendicularmente ao vetor  $\vec{r}$ .

Decompondo o vetor  $d\vec{B}$  em duas componentes, uma,  $d\vec{B}_{\parallel}$ , paralela ao eixo da espira, e a outra,  $d\vec{B}_{\perp}$ , perpendicular ao eixo, percebe-se que somente  $d\vec{B}_{\parallel}$  contribui para o campo magnético total  $\vec{B}$  no ponto P, já que devido a simetria da espira em relação ao ponto P, as componentes  $d\vec{B}_{\perp}$  devidas a todos os elementos de corrente do anel, apontam igualmente em todas as direções do plano perpendicular ao eixo da espira, tendo, portanto, uma soma nula. O mesmo não ocorre às componentes  $d\vec{B}_{\parallel}$ , que apontam todas no mesmo sentido do eixo da espira e que podem, portanto, ser somadas escalarmente.

Assim,

$$B = \int dB_{\parallel}$$

em que a integral vetorial se reduziu a uma simples integral de linha ao longo de todos os elementos de corrente.

Pela Lei de Biot-Savart aplicada ao elemento de corrente da figura 10.12, tem-se:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dl \sin 90^\circ}{r^2}.$$

Mas como  $dB_{\parallel} = dB \cos \alpha$ , obtém-se:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_o i \cos \alpha dl}{4\pi r^2}$$

Pode ser observado na figura 10.12 que  $r$ ,  $\alpha$  e  $x$  se relacionam por:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Portanto,

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_o i R}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} dl,$$

que integrando, obtém-se:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_o i R}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int dl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_o i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (10.18)$$

O resultado apresentado na equação 10.18 pode ser ainda visto de outra maneira. Se se considerar  $x \gg R$ , isto é, para pontos muito longe da espira,  $R^2$  pode ser desprezado frente a  $x^2$ , e assim a equação 10.18 se reduz a:

$$B = \frac{\mu_o i R^2}{2x^3}. \quad (10.19)$$

Se, na equação 10.19, for introduzida a área  $A = \pi R^2$  da espira e no lugar dela colar-se uma bobina com  $N$  espiras, obtém-se:

$$B = \frac{\mu_o (NiA)}{2\pi x^3} = \frac{\mu_o \mu}{2\pi x^3}, \quad (10.20)$$

onde  $\mu$  é o momento de dipolo magnético da espira.

Então, foram mostradas, duas maneiras deferentes, que uma espira de corrente se comporta como um dipolo magnético. A primeira, que resultou na equação 9.8, foi quando uma bobina de espiras colocada num campo magnético externo sofre a ação de um torque  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ . A segunda, quando uma bobina dá origem a um campo magnético que, para pontos externos do seu eixo, é dado pela equação 10.20.

## Exercícios resolvidos

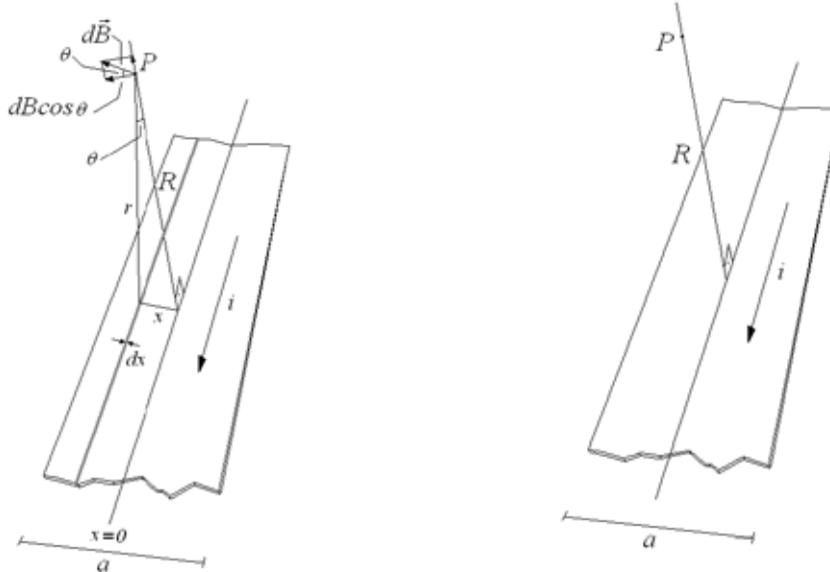
1. A figura mostra uma tira plana de cobre, de largura  $\alpha$  e espessura desprezível, percorrida por uma corrente  $i$ . Calcular o valor do campo magnético num ponto  $P$ , situado sobre uma perpendicular à linha mediana da tira e separado desta por uma distância  $R$ .

### Resolução:

A tira será considerada como estando dividida, no sentido do seu comprimento num grande número de pedaços infinitesimais de largura  $dx$ , cada uma dos quais pode ser considerado como sendo um fio que transporta uma corrente  $di$  dada por  $i(dx/da)$ . A contribuição  $dB$ , no ponto  $P$ , do elemento indicado na figura é dada por:

$$dB = \frac{\mu_o di}{2\pi r} = \frac{\mu_o i(dx/da)}{2\pi R \sec \theta},$$

onde:  $\cos \theta = R/r \therefore r = R/(\cos \theta = R \sec \theta)$ .



Nota-se que somente a componente horizontal  $dB \cos \theta$ , do vetor  $d\vec{B}$ , contribui para o campo magnético total, pois a componente vertical é compensada pela contribuição do elemento simetricamente disposto em relação ao meio da tira. Assim, o valor de  $B$  no ponto  $P$  é dado pela integral:

$$B = \int dB \cos \theta = \int \frac{\mu_0 i (dx/da)}{2\pi R \sec \theta} \cos \theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi a R} \int \frac{dx}{\sec^2 \theta}.$$

Nota-se também que as variáveis  $x$  e  $\theta$  se relacionam por  $x = R \operatorname{tg} \theta$ , de onde se tira que  $dx = R \sec^2 \theta d\theta$ .

Como os limites de integração na variável  $\theta$  são  $\pm \operatorname{tg}^{-1}(a/2R)$ , pode-se eliminar  $dx$  na integral de  $B$ , obtendo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \int_{-\operatorname{tg}^{-1}(a/2R)}^{+\operatorname{tg}^{-1}(a/2R)} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right)$$

Para pontos muito distantes da tira de cobre,  $a/2R$  é um ângulo muito pequeno, de tal modo que  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right) \cong \left(\frac{a}{2R}\right)$ . Assim, obtém-se o resultado:

$$B \cong \frac{\mu_0 i}{\pi a} \left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}.$$

2. Dois fios paralelos separados pela distância  $d$ , são percorridos, em sentidos opostos, pela mesma corrente  $i$ . Calcular o valor do campo magnético num ponto  $P$  situado entre os dois fios.

**Resolução:**

Para este problema, considera-se a seguinte figura:

Os campos  $\vec{B}_a$  e  $\vec{B}_b$  são devidos, respectivamente, às correntes  $i_a$  e  $i_b$  e possuem o mesmo sentido no ponto P. Cada um deles pode ser obtido pela equação 10.2,  $B = (\mu_0 i) / 2\pi r$ . Assim:

$$B = B_a + B_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

3. Um solenoide tem comprimento de 1,0 m e diâmetro médio de 3,0 cm. Ele é composto de um enrolamento de 5 camadas superpostas com 850 espiras cada uma, percorridas pela corrente de 5A. (a) Calcular o valor de B no centro do solenóide e (b) calcular o valor de fluxo magnético  $\Phi_B$  em uma seção reta localizada no centro do solenóide.

**Resolução:**

a) O valor de B pode ser calculado pela equação 10.11,  $B = \mu_0 ni$ . Assim:

$$B = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/(A.m)})(5,0 \text{ A})$$

(5 × 850 espiras/m)

$$\therefore \mathbf{B = 2,7 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2 = 2,7 \times 10^{-2} \text{ T.}}$$

b) Em todos os pontos em que  $\vec{B}$  é constante na seção, tem-se:

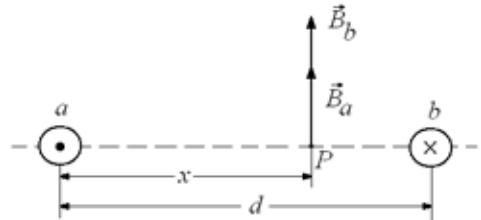
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA,$$

onde A é o valor efetivo da área da seção reta que se supõe ser a área de um círculo de diâmetro igual ao diâmetro médio das espiras. Então:

$$A = \pi[(3,0/2) \times 10^{-2} \text{ m}]^2 = 7,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Assim:

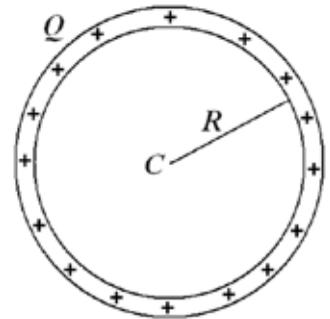
$$\Phi_B = BA = 2,7 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2 \times 7,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,9 \times 10^{-5} \text{ Wb}.$$



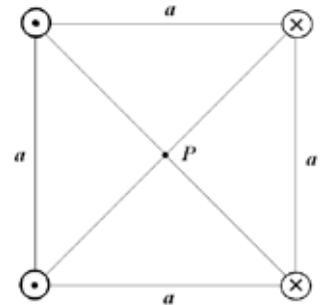
## Atividades de avaliação



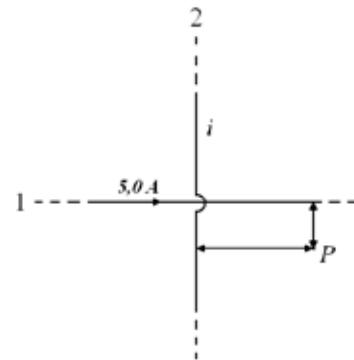
1. A hipótese de que um campo magnético tem origem em cargas elétricas em movimento ficou evidenciada em 1991 quando um fino anel de raio R foi eletrizado com uma carga Q e posto a girar em rápida rotação em torno de um eixo passando pelo seu centro C. Esta experiência permitiu detectar e medir o campo magnético gerado no centro do anel eletrizado, como mostra o esquema da figura. (a) Para uma carga  $Q = 1,5 \times 10^{-8} \text{ C}$ , um raio de  $R = 5,0 \text{ cm}$  e uma rotação do anel de 120 rot/s, determine a intensidade da corrente elétrica equivalente a carga Q e o módulo do campo magnético gerado.



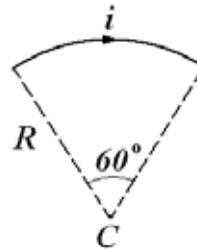
- Um fio de cobre de  $0,25\text{ cm}$  de diâmetro pode transportar uma corrente de  $50\text{ A}$ , sem perigo de superaquecimento. Calcule o módulo do campo magnético  $\vec{B}$  na superfície do fio para esta corrente.
- Uma carga puntiforme  $+q$  com velocidade  $v$  se desloca a uma distância  $d$  de um longo fio retilíneo perpendicularmente ao eixo do fio, que é percorrido por uma corrente  $i$ . Determine a direção e o módulo da força atuando sobre a carga, se esta estiver se deslocando na direção do fio.
- Quatro longos fios de cobre são dispostos paralelamente entre si como mostrados na figura. Cada um deles é percorrido por uma corrente de  $20\text{ A}$ , no sentido indicado. Sendo  $a = 20\text{ cm}$ , calcule o módulo, direção e sentido do vetor  $\vec{B}$  no ponto  $P$  localizado no centro do quadrado.



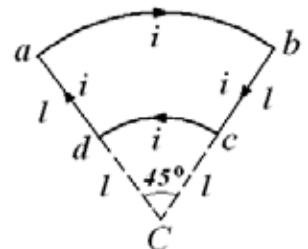
- A figura mostra um esquema de dois fios, 1 e 2, longos e retilíneos no ar. O fio 1 é percorrido por uma corrente de  $5,0\text{ A}$  e o fio 2 é percorrido por uma corrente  $i$ . Para que o campo magnético resultante, devido aos fios, seja nulo no ponto  $P$ , qual deve ser o sentido e o valor da corrente  $i$  no fio 2?
- Um solenoide no ar é percorrido por uma corrente de intensidade  $3,0\text{ A}$ , que estabelece em seu interior um campo magnético de intensidade  $2,0 \times 10^{-3}\text{ T}$ . Sendo o comprimento do solenoide igual a  $15\text{ cm}$ , determine o número  $n$  de espiras por unidade de comprimento e o número total  $N$  de espiras nele.



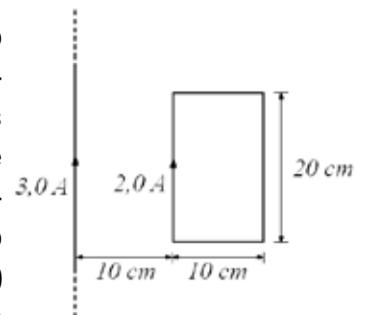
- A figura mostra um esquema de um fio condutor na forma de um arco de circunferência de raio  $R$ , com ângulo central de  $60^\circ$ . Sendo o fio percorrido por uma corrente  $i$ , determine o módulo do campo magnético em  $C$ .



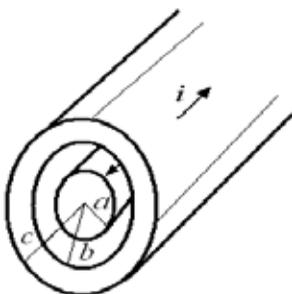
- A figura mostra um esquema de um fio metálico, dobrado nos pontos  $a, b, c$  e  $d$ , formando um circuito percorrido por uma corrente  $i$ . Determine o módulo do campo magnético no centro  $C$  estabelecido (a) pelos trechos  $ab$  e  $cd$  e (b) pelo circuito  $abcd$  como um todo.



- A figura mostra um esquema de uma espira retangular percorrida por uma corrente de  $2,0\text{ A}$ , colocada nas proximidades de um fio retilíneo e longo percorrido por uma corrente de  $3,0\text{ A}$ . Determine o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante que o fio exerce sobre a espira.



- A figura mostra um desenho de um longo cabo coaxial constituído por dois condutores concêntricos, cujas dimensões estão indicadas. Os condutores são percorridos por uma corrente de mesma intensidade  $i$  e em sentidos opostos. Calcule o campo magnético num ponto (a) dentro do condutor interno, distando  $r < a$  do seu centro, (b) dentro do condutor externo em  $b < r < c$  e (c) fora do cabo, em  $r > c$ .

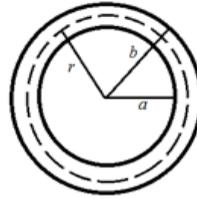


11. A figura mostra um desenho de uma seção reta de um cilindro oco de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , que transporta uma corrente elétrica  $i$  uniformemente distribuída ao longo da seção reta.

(a) Mostre que o campo magnético, para pontos  $a < r < b$ , é dado por:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi (b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}.$$

(b) Faça um gráfico que descreva o comportamento de  $B(r)$ .



**PARTE**

**6**

# **Indução Eletromagnética**



## A Lei de Faraday

O fenômeno da corrente elétrica originar campo magnético foi descoberto por Oersted e sistematizado por Ampère, na década de 1820. Na década de 1830, Faraday e Henry descobriram um fenômeno inverso ao descoberto por Oersted e Ampère. Eles descobriram, independentemente um do outro, que um campo magnético pode criar uma corrente elétrica, denominada *corrente elétrica induzida*, cujo efeito ficou conhecido como *indução eletromagnética*.

Neste capítulo, serão abordadas os conceitos, definições e as leis que regem a indução eletromagnética.

### 11.1 A descoberta de Faraday e Henry

Seja um experimento em que uma bobina tem seus terminais ligados a um indicador de corrente elétrica (galvanômetro), e um ímã em forma de barra que pode se movimentar para frente e para trás, ao longo da reta que passa pelo centro da seção reta transversal, como mostra o esquema da Figura 11.1.

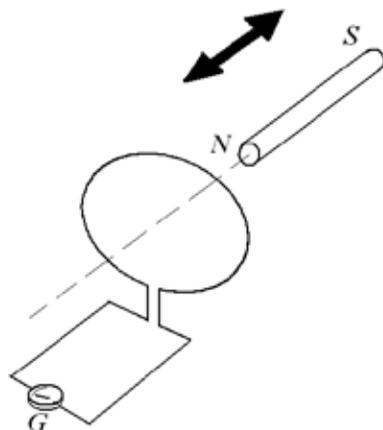


Figura 11.1 – Esquema de uma bobina com os terminais ligados a galvanômetro,  $G$ , e um ímã em forma de barra que pode se movimentar para frente e para trás, ao longo da reta que passa pelo centro da seção reta transversal.

A experiência mostra que quando o ímã se movimenta para frente e para trás na direção indicada na figura, o ponteiro do galvanômetro deflete indicando que, em consonância com esse movimento do ímã, surge uma corrente elétrica na bobina, que anteriormente não existia, já que não há aparentemente nenhuma força eletromotriz. Observa-se neste experimento que o ponteiro do galvanômetro só é defletido quando há movimento relativo entre o ímã e a bobina, um na direção do outro.

O mesmo fenômeno ocorre quando o ímã é substituído por um circuito elétrico simples com uma bobina e sua chave é ligada ou desligada, como mostra a Figura 11.2. Neste caso não é necessário haver movimento relativo das bobinas, uma na direção da outra, para que ocorra a deflexão do ponteiro do galvanômetro. A experiência mostra que o importante para a produção deste efeito não é a intensidade da corrente gerada pela força eletromotriz  $\mathcal{E}$ , mas sim a rapidez com que esta intensidade de corrente varia no tempo.

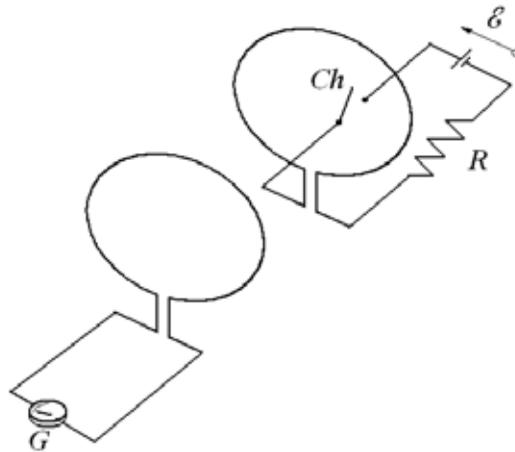


Figura 11.2 – Esquema de dois circuitos com bobinas. O ponteiro do galvanômetro G sofre deflexão instantânea quando a chave, *Ch*, é ligada ou desligada. Não há movimento relativo algum entre as bobinas.

Assim, a corrente elétrica que surge na bobina, indicada pelo galvanômetro, é chamada de corrente induzida que é criada pela existência de uma força eletromotriz induzida. Ao efeito observado denominou-se indução eletromagnética.

A descoberta de Faraday e Henry consiste em se fazer variar o fluxo magnético,  $\Phi_B$ , através de uma bobina. Isto é, variar a quantidade de linhas de indução do campo magnético  $\vec{B}$  que atravessam uma bobina.

## 11.2 A lei da indução eletromagnética de Faraday

A percepção de Faraday de que a grandeza relevante na indução era a variação do fluxo magnético  $\Phi_B$ , o permitiu enunciar uma importante lei que leva o seu nome. A Lei de Faraday diz que “a força eletromotriz induzida,  $\varepsilon_i$ , num circuito é igual à taxa de variação do fluxo magnético através do circuito com o sinal trocado”. Se a taxa de variação do fluxo for medido em weber/segundo (Wb/s) a força eletromotriz induzida,  $\varepsilon_i$ , será expressa em volts (V). Esta lei pode ser expressa matematicamente por:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (11.1)$$

O sinal negativo de (11.1) se refere ao sentido da força eletromotriz induzida, que pode ser explicado pelo princípio da conservação da energia, na forma do que se denomina de Lei de Lenz. Em 1834, Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865) enunciou: “A corrente induzida surgirá com um sentido tal que ela se oporá à variação que a produziu.”

Para uma bobina com  $N$  espiras, a Lei de Faraday pode ser expressa por:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} (N\Phi_B), \quad (11.2)$$

onde o termo  $N\Phi_B$  é chamado de elo de fluxo.

## 11.3 Campo magnético dependente do tempo

As forças eletromotrizes induzidas não são devidas somente a movimentos relativos macroscópicos de ímãs e bobinas. Elas são devidas também a campos magnéticos que dependem do tempo, pois se uma espira condutora for colocada num campo magnético que varie com o tempo, o fluxo através dela variará surgindo uma força eletromotriz que colocará os portadores de carga em movimento ordenado, isto é, surgirá uma corrente na espira.

Microscopicamente, o que ocorre é que a variação do fluxo do vetor  $\vec{B}$  variável no tempo produz um campo elétrico induzido  $\vec{E}$  em todos os pontos da espira, que são tão reais quanto os campos produzidos por cargas em repouso. Estes campos  $\vec{E}$  também exercem sobre uma carga teste  $q$  uma força elétrica  $\vec{F}$  igual a  $q\vec{E}$ .

Assim, a Lei de Faraday pode ser formulada como: “Um campo magnético variável com o tempo dá origem a um campo elétrico. Isto permite escrever a Lei de Faraday expressa pela equação (11.1) como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (11.3)$$

## Exercício resolvido

1. No centro de um solenoide longo de  $3,0 \text{ cm}$  de diâmetro, com 200 espiras por centímetro e percorrido por uma corrente de  $1,5 \text{ A}$ , é colocada uma bobina, de  $2,0 \text{ cm}$  de diâmetro e enrolamento compacto de 100 espiras, de modo que o seu eixo seja paralelo  $\vec{B}$  no interior do solenoide. A corrente do solenoide é anulada, sendo, então, durante  $0,050 \text{ s}$ , aumentada linearmente até  $1,5 \text{ A}$  na outra direção. Qual é o valor da força eletromotriz que aparece na bobina, enquanto a corrente está variando?

### Resolução:

A força eletromotriz  $\varepsilon$  induzida na bobina é calculada pela lei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{N\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

onde  $N$  é o número de espira da bobina,  $\Delta\Phi_B$  é a variação do fluxo magnético no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

O valor do campo magnético  $\vec{B}$  no centro do solenóide pode ser calculado pela equação 10.12,  $B = \mu_0 ni$ , onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $n$  é o número de espiras por unidade de comprimento e  $i$  é a corrente elétrica no solenoide. Então:

$$B = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m})(200 \times 10^2 \text{ m}^{-1})(1,5 \text{ A}) = 3,8 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2.$$

A área da bobina é dada por:

$$A = \pi d^2/4 = 3,14 \times (3,0 \times 10^{-2})^2 / 4 = 3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

O fluxo através de cada espira varia de um valor inicial de:

$$(\Phi_B)_{\text{inicial}} = BA = (3,8 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2)(3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

até um valor final de:

$$(\Phi_B)_{\text{final}} = -1,2 \times 10^{-5} \text{ Wb},$$

num intervalo de tempo  $\Delta t = 0,050 \text{ s}$ .

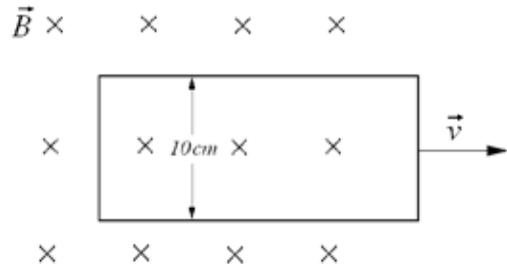
Assim:

$$\varepsilon = -\frac{(100)(2,4 \times 10^{-5} \text{ Wb})}{0,050 \text{ s}} = -4,8 \times 10^{-2} \text{ V} = -48 \text{ mV}$$

Atividades de avaliação

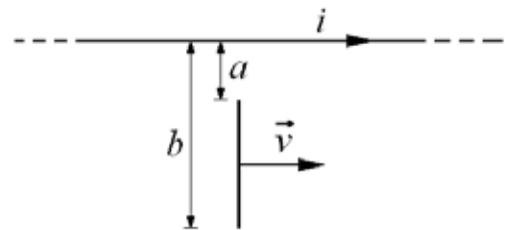


1. A figura representa uma espira retangular que está sendo puxada com uma velocidade  $v = 6,0 \text{ m/s}$ , emergindo de um campo magnético  $B = 0,50 \text{ T}$ . Determine a força eletromotriz induzida na espira e a intensidade da corrente elétrica induzida que circula na espira, sabendo que a resistência elétrica é de  $0,40 \Omega$ .

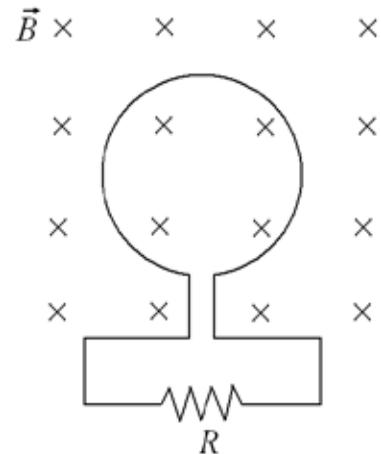


2. Uma espira circular de raio  $r$  é colocada num campo magnético uniforme de intensidade  $0,80 \text{ T}$ , perpendicular ao plano da espira. (a) Se raio da espira encolher a uma taxa constante de  $80 \text{ cm/s}$ , qual será a força eletromotriz induzida na espira. (b) A que taxa constante a área da espira teria de encolher para induzir a mesma força eletromotriz?

3. A figura mostra um desenho de uma haste de cobre que se move com uma velocidade  $v$  paralela a um longo fio retilíneo percorrido por uma corrente  $i$ . Calcule o valor da força eletromotriz induzida na haste, supondo para isso que  $v = 5,0 \text{ m/s}$ ,  $i = 100 \text{ A}$ ,  $a = 1,0 \text{ cm}$  e  $b = 20 \text{ cm}$ .



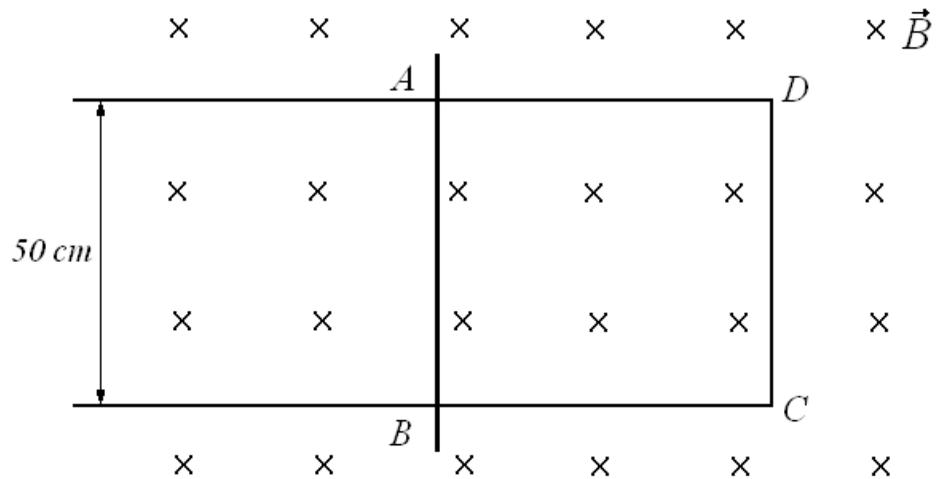
4. A figura mostra um desenho de um circuito onde parte dele é uma espira circular que está no interior de um campo magnético perpendicular ao seu plano e no sentido indicado. Se o fluxo magnético através da espira variar segundo a função  $\Phi_B = 6t^2 + 7t + 1$ , onde  $\Phi_B$  está em miliwebers e  $t$  em segundos, qual será (a) o valor da força eletromotriz induzida na espira para  $t = 2 \text{ s}$  e (b) o sentido da corrente através do resistor  $R$ .



5. Um solenoide longo, de raio  $r = 25 \text{ cm}$  e  $n = 100$  espiras por unidade de comprimento é percorrido por uma corrente inicial  $i_0 = 10 \text{ A}$ . Uma única espira metálica de diâmetro  $D = 10 \text{ cm}$  é colocada em torno do solenóide, coincidindo os eixos de ambos. A corrente no solenoide é reduzida uniformemente até  $i = 0,50 \text{ A}$  durante um período  $T = 0,010 \text{ s}$ . Qual é a força eletromotriz induzida na espira em torno do solenoide, enquanto a corrente está variando?

6. Uma espira circular de raio  $r = 10 \text{ cm}$  é feita de fio resistência  $R = 10 \Omega$  e está imersa num campo magnético uniforme  $\vec{B}$  perpendicular ao plano da mesma. A que taxa constante deve  $B$  aumentar de modo que haja uma corrente estacionária  $i = 0,010 \text{ A}$  no circuito? Qual a potência dissipada na resistência?

7. A figura mostra, em esquema, uma haste condutora  $AB$  em contato com dois trilhos paralelos  $AD$  e  $BC$ , separados por uma distância de  $5,0\text{ cm}$ , formando o circuito  $ABCD$  de resistência elétrica, suposta constante, igual a  $0,4\ \Omega$ , onde existe um campo magnético uniforme de  $1,0\text{ T}$  perpendicular ao plano dos trilhos. (a) qual devem ser o valor e o sentido da força eletromotriz induzida na haste quando ela é movida para a direita com velocidade constante de  $8,0\text{ m/s}$ ? (b) Qual é o valor da força  $\vec{F}$  necessária para manter a haste em movimento? (c) Compare a potência mecânica produzida pela força  $\vec{F}$  com a taxa de dissipação de energia térmica no circuito.



## Indutância

Quando uma bobina percorrida por corrente está próxima de outra, ela produz um fluxo magnético  $\Phi_B$  na outra, e havendo variação do fluxo devido a alterações na corrente, por exemplo, surge nela uma força eletromotriz induzida.

Para ocorrer o efeito da indução não é necessário ter duas bobinas. O efeito também acontece somente em uma bobina quando há variação na corrente que a percorre. Neste caso, o efeito é chamado de autoindução, e a força eletromotriz a ele associada de força eletromotriz autoinduzida, que obviamente obedece à Lei de Faraday.

### 12.1 Indutância

A Lei de Faraday aplicada a uma bobina de espiras bem juntas devido à presença da corrente elétrica pode ser escrita como:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}, \quad (12.1)$$

onde os elos de fluxo,  $N\Phi_B$ , são a grandeza importante relacionada com o efeito da indução.

Desde que não haja materiais magnéticos na vizinhança da bobina, a grandeza elos de fluxos é proporcional à corrente elétrica que percorre a bobina. Isto é:

$$N\Phi_B = Li, \quad (12.2)$$

onde  $L$  é a constante de proporcionalidade, que é denominada de indutância da bobina.

De (12.1) e (12.2) pode-se escrever:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}, \quad (12.3)$$

que escrita na forma:

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt} \quad (12.4)$$

define a grandeza indutância para qualquer bobina.

A equação (12.4) que define a indutância é o análogo da equação  $C=qV$  que define a capacitância. Assim, o dispositivo capacitor da eletricidade, que tem a grandeza capacitância como característica, tem como análogo no magnetismo o dispositivo indutor cuja grandeza característica é a indutância.

O campo magnético presente no indutor é a sua característica fundamental correspondendo ao campo elétrico num capacitor. O símbolo de um indutor é . A unidade de indutância no SI é o Henry que corresponde a volt x segundo / ampère.

O sentido de uma força eletromotriz autoinduzida pode ser obtido a partir da Lei de Lenz. A Figura 12.1 mostra esquematicamente esta situação.

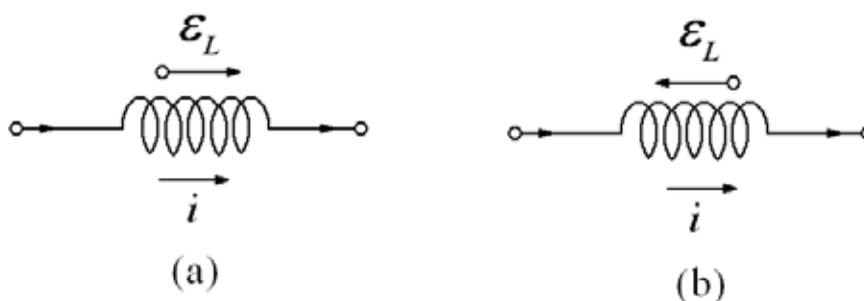


Figura 12.1 – Em (a) a corrente está diminuindo e em (b) a corrente está aumentando.

## 12.2 Indutância de um solenoide

A indutância, ou a autoindutância  $L$  correspondente a um comprimento  $l$  de um solenoide longo próximo ao centro pode ser calculado a partir da relação (12.2) usada para uma bobina de espiras bem juntas sem nenhum material magnético próximo. Nestas condições, a indutância da bobina é dada por:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}. \quad (12.5)$$

Para o comprimento  $l$  do solenoide o fluxo total que o atravessa é:

$$N\Phi_B = (nl)(BA), \quad (12.6)$$

onde  $n$  é o número de espiras por unidade de comprimento,  $A$  é a área da seção reta e  $B$  é a intensidade do campo magnético no interior do solenoide. Como o valor de  $B$  num solenoide é  $B = \mu_0 ni$ , obtém-se:

$$L = \mu_0 n^2 lA. \quad (12.7)$$

A equação (12.7) mostra que a indutância de um solenoide é proporcional ao seu volume,  $lA$ , e ao quadrado do número de espiras por unidade de comprimento, todos geométricos, como no caso elétrico de um capacitor de placas paralelas.

## 12.3 Circuito rl

A Figura 12.2 mostra um esquema de um circuito de uma única malha que contém um resistor  $R$  e um indutor  $L$ . Um circuito deste tipo é chamado de circuito RL.

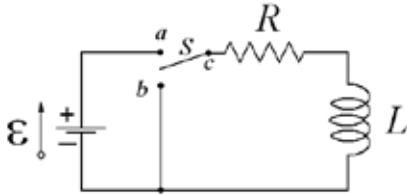


Figura 12.2 – Um circuito RL

Quando o indutor  $L$  da Figura 12.2 não está presente e a chave  $S$  é ligada ao ponto  $a$ , o circuito se torna um circuito simples. Neste caso, a corrente no resistor  $R$  aumenta rapidamente de zero até o valor final máximo,  $\mathcal{E}/R$ , estabelecido pela Lei de Ohm.

Quando o indutor  $L$  está presente e a chave  $S$  é ligada ao ponto  $a$ , o circuito da Figura 12.2 é simplesmente igual ao da Figura 12.3.

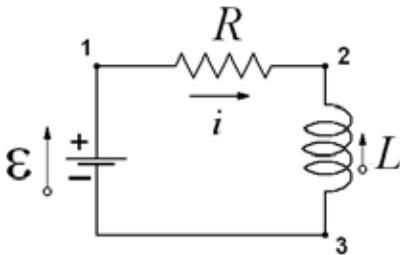


Figura 12.3 – O circuito RL equivalente ao da figura 12.2 com a chave S ligada em a.

Neste caso, aparece uma força eletromotriz autoinduzida  $\mathcal{E}_L$  que pela Lei de Lenz se opõe ao aumento da corrente. Isto significa que sua polaridade é oposta à polaridade da bateria. Portanto, o resistor fica submetido a duas forças eletromotrices, uma constante e igual a  $\mathcal{E}$ , devida à bateria, e a outra variável e igual a  $-Ldi/dt$ , devida à autoindução, que enquanto estiver presente a corrente no resistor será menor do que  $\mathcal{E}/R$ . Com o passar do tempo, a corrente aumenta cada vez mais lentamente, tornando a força eletromotriz autoinduzida cada vez menor, até a corrente chegar ao valor  $\mathcal{E}/R$ , numa aproximação assintótica. Isto resulta num atraso para o equilíbrio ser estabelecido.

A lei das malhas aplicada ao circuito da Figura 12.3, partindo do ponto 1 e o percorrendo no sentido horário, que foi o sentido escolhido para a corrente, obtém-se:

$$-iR - L \frac{di}{dt} + \varepsilon = 0$$

ou

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon. \quad (12.8)$$

A solução da equação diferencial (12.8) é:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (12.9)$$

É conveniente escrever a equação (12.9) na forma:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}). \quad (12.10)$$

onde:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (12.11)$$

é chamada de constante de tempo indutiva, cujo significado físico pode ser obtido substituindo  $t$  por  $\tau_L = L/R$  na equação (12.10), encontrando o valor correspondente para:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) = (1 - 0,37) \frac{\varepsilon}{R} = 0,63 \frac{\varepsilon}{R}, \quad (12.2)$$

que é o tempo que a corrente no circuito gasta para atingir 63% do valor final de equilíbrio. A Figura 12.4 mostra o gráfico da variação da corrente em função do tempo.

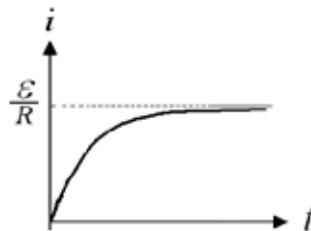


Figura 12.4 - Gráfico da variação da corrente em função do tempo.

Se após a corrente atingir o valor de equilíbrio  $\varepsilon/R$  a chave  $S$  do circuito da Figura 12.2 for ligada na posição  $b$ , antes mesmo de se interromper a ligação no ponto  $\alpha$ , o efeito é como se a bateria fosse removida subitamente do circuito. Assim, usando a equação (12.8) obtém-se:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (12.13)$$

cuja solução é:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{L}}. \quad (12.14)$$

## 12.4 Energia de um campo magnético

Analogamente ao campo elétrico, a energia pode também ser armazenada num campo magnético. Retomando o circuito da Figura 12.3:

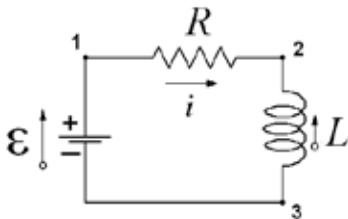


Figura 12.3 – O circuito RL equivalente ao da figura 12.2 com a chave  $S$  ligada em  $a$ .

e a equação (12.8) do circuito:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon, \quad (12.8)$$

que mesmo sendo decorrente da lei das malhas, nada mais é do que a aplicação do princípio da conservação de energia, pode-se multiplicar a corrente  $i$  a ela para obter:

$$\varepsilon i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \quad (12.15)$$

cujo primeiro membro dá a taxa com que a força eletromotriz  $\varepsilon$  transfere energia para o circuito; o primeiro termo do segundo membro representa a taxa de produção de calor pelo efeito Joule no resistor. Assim, a energia que não aparece sob forma de calor deve ser armazenada no campo magnético, portanto, o segundo termo do segundo membro deve ser igual à taxa com que a energia é acumulada no campo magnético. Isto é:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (12.16)$$

Reescrevendo (12.16) na forma  $dU_B = Lidi$  e integrando, obtém-se:

$$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2, \quad (12.17)$$

que é o valor da energia acumulada no indutor  $L$  percorrido pela corrente  $i$ .

A densidade de energia no campo magnético pode então ser calculada por:

$$u_B = \frac{U_B}{Al}, \quad (12.18)$$

onde  $Al$  é o volume do dispositivo indutor, sendo  $A$  a área da seção transversal e  $l$  o comprimento. De modo que, por (12.17), obtém-se:

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al},$$

que por (12.7) e (10.11), obtém-se:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o}, \quad (12.19)$$

O resultado dado por (12.19), embora tenha sido usado para valores de um solenoide, é válido para qualquer campo magnético  $\vec{B}$ .

## 12.5 Circuito LC

A Figura 12.5 mostra um esquema de um circuito que quando a chave  $S$  está ligada no ponto  $a$ , tem-se um circuito  $RC$ , como mostrado na Figura 12.6, que iniciará o carregamento do capacitor  $C$  até atingir o potencial  $V = q/C$ , cuja carga é  $q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$ . Quando o capacitor  $C$  estiver carregado, desliga-se a chave  $S$  de  $a$  e liga-se no ponto  $c$ , obtendo-se um circuito de malha única contendo um capacitor  $C$  e um indutor  $L$ , como mostrado na Figura 12.7. Um circuito deste tipo é chamado de circuito  $LC$ .

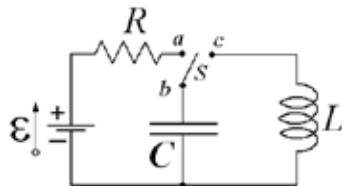


Figura 12.5 - Um circuito LC

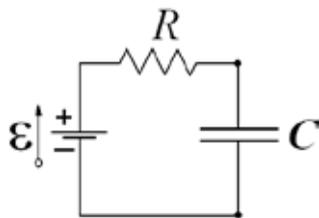


Figura 12.6 - Um circuito RC

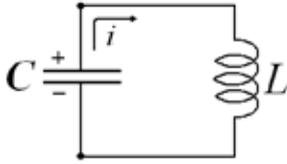


Figura 12.7 - Um circuito LC

Quando o indutor é ligado, surge uma corrente no circuito que transferirá a energia acumulada  $(1/2)CV^2$  no capacitor para o indutor até atingir um ponto máximo quando toda a energia do capacitor tiver sido transferida para o indutor. A partir daí, a energia acumulada no indutor se transferirá para o capacitor, através do surgimento de uma corrente contrária à corrente inicial até se anular quando a carga no capacitor for máxima, e a corrente será máxima quando a carga no capacitor for nula.

Na realidade, há uma resistência no circuito da Figura 12.7 que exerce o mesmo papel do atrito num sistema massa-mola, que dissipará a energia através do efeito Joule. Portanto, de fato tem-se um circuito  $RLC$ .

## 12.5 Circuito RLC

A Figura 12.8 mostra um esquema simples de um circuito  $RLC$ .

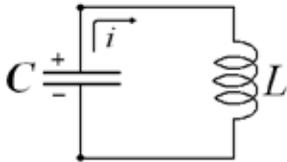


Figura 12.7 – Um circuito RLC

A equação que descreve o comportamento do circuito  $RLC$  pode ser encontrada de maneira semelhante à equação do circuito  $RL$ , bastando substituir na equação (12.8) a força eletromotriz  $\varepsilon$  da bateria pelo potencial  $V$  nos terminais do capacitor  $C$ . Isto é:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V. \quad (12.20)$$

Mas como a corrente  $i$ , num instante qualquer, pode ser escrita como:

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d(CV)}{dt} = -C \frac{dV}{dt} \quad (12.21)$$

de onde obtém-se:

$$\frac{di}{dt} = -C \frac{d^2V}{dt^2}. \quad (12.22)$$

Assim, de (12.21) e (12.22) obtém-se para (12.20) a equação diferencial que descreve o comportamento do potencial nas placas do capacitor, que é:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{LC} = 0 \quad (12.23)$$

A solução da equação (12.23) deve satisfazer duas propriedades: (1) deve ser oscilatória, e (2) deve ter um fator de amortecimento. Uma solução particular que satisfaz estas condições é:

$$V(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t). \quad (12.24)$$

Da equação (12.21), obtém-se:

$$i(t) = AC\omega [\text{sen}(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \cos(\omega t)] e^{-\alpha t}. \quad (12.25)$$

Para encontrar as constantes  $\alpha$  e  $\omega$ , substitui-se (12.24) em (12.23), obtendo-se:

$$\alpha = R/2L \quad (12.26)$$

e

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (12.27)$$

Um caso particular importante é aquele em que a oscilação é fracamente amortecida. Isso acontece quando a resistência tem um valor muito pequeno, ou seja:  $\alpha\omega = 0$  ou  $\omega \gg \alpha$ . Nesta condição a equação (12.25) se torna:

$$i(t) = AC\omega e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega t). \quad (11.28)$$

Pode ser verificado que no instante  $t=0$ , tem-se o valor máximo de  $V(t)$ , que é  $A$ , e o valor mínimo, que é zero, para  $i(t)$ . E no instante  $t=\pi/2\omega=1/4f = T/4$ , onde  $f$  é a frequência e  $T$  é o período de oscilação,  $V(t)$  tem o valor mínimo, que é zero, e  $i(t)$  tem o valor máximo, que é  $AC\omega$ . Portanto,  $V(t)$  e  $i(t)$  estão defasadas de  $\pi/2$ , de modo que quando  $V(t)$  é máximo, toda a energia está acumulada no capacitor e quando  $i(t)$  é máxima, toda a energia está acumulada no indutor. Portanto, a cada  $1/4$  de período, a energia passa de um dispositivo para o outro.

## 12.6 Frequência natural

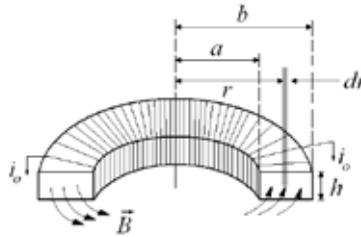
O circuito  $RLC$  oscila com a frequência dada pela equação (12.27). Quando  $R$  aproxima-se de zero, o circuito  $RLC$  apresenta um comportamento semelhante ao de um circuito  $LC$ . No limite, quando  $R=0$ , a frequência  $\omega$  é denominada de  $\omega_0$ , dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0, \quad (12.29)$$

que é frequência natural de um circuito  $RLC$ , isto é, a frequência do circuito  $LC$  correspondente.

## Exercício resolvido

1. A figura mostra um desenho de toroide de seção retangular. Obtenha sua indutância para  $N = 1000$ ,  $a = 5,0 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  e  $h = 1,0 \text{ cm}$ .



### Resolução:

Observa-se na figura que as linhas de  $\vec{B}$  do toroide formam círculos concêntricos.

Então, aplicando a lei de Ampère para o percurso circular de raio  $r$ , obtém-se:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\therefore B(2\pi r) = \mu_0 i_0 N \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}$$

onde  $N$  é o número de espiras e  $i_0$  é a corrente que percorre o enrolamento do toroide.

O fluxo  $\Phi_B$  através de uma seção reta do toróide é dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b (B)(h dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 i_0 N h}{2\pi r} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\therefore \Phi_B = \frac{\mu_0 i_0 N h}{2\pi r} \ln \frac{b}{a}$$

A indutância pode ser calculada pela equação 12.5:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i_0} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Que substituindo os valores, obtém-se:

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m}) (10^3)^2 (1,0 \times 10^{-2} \text{ m})}{2\pi} \ln \frac{10 \times 10^{-2} \text{ m}}{5 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\therefore L = 1,4 \times 10^{-3} \text{ Wb/A.m} = 1,4 \text{ mH}$$

2. A indutância de um solenoide é  $50 \text{ H}$  e sua resistência elétrica é  $30 \Omega$ . Quanto tempo levará para que a corrente atinja à metade do valor final de equilíbrio quando o solenoide é ligado a uma bateria de  $100 \text{ V}$ .

### Resolução:

Esta é uma situação de um circuito  $RL$ , cuja corrente é dada pela equação 12.10,  $i = (\varepsilon/R)(1 - e^{-t/L})$ , que tem valor de equilíbrio igual a  $\varepsilon/R$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Para que a corrente atinja à metade do valor de equilíbrio, pode-se escrever a equação 12.10 como:

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t_0/\tau_L}),$$

$t_0$  é o tempo para que a corrente atinja a metade do valor de equilíbrio. Assim,

$$\begin{aligned} 1/2 &= 1 - e^{-t_0/\tau_L} \\ \therefore e^{-t_0/\tau_L} &= 1/2 \\ \therefore \ln e^{-t_0/\tau_L} &= \ln 1/2 \\ \therefore -t_0/\tau_L &= \ln 1 - \ln 2 \\ \therefore t_0 &= \tau_L \ln 2 = 0,69\tau_L. \end{aligned}$$

Como  $\tau_L = L/R$ , obtém-se:

$$t_0 = 0,69 \frac{50H}{30\Omega} = 1,2s.$$

3. Calcular o valor da energia acumulada no campo magnético de uma bobina de indutância  $5,0 H$  e resistência igual a  $20 \Omega$  submetida a uma tensão elétrica de  $100 V$  após a corrente atingir o seu valor máximo  $\varepsilon R$ .

**Resolução:**

Pelos dados, a corrente máxima é:

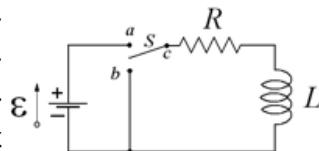
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100V}{20\Omega} = 5,0A.$$

O valor da energia acumulada pode ser obtido pela equação 12.17,  
 $U_B = \frac{1}{2} Li^2$ .

Assim,

$$U_B = \frac{1}{2} \times 5,0H \times (5,0A)^2 = 63J$$

4. Liga-se a chave  $S$  ao ponto  $a$  do circuito  $RL$  mostrado na figura, de modo que os extremos da ligação em série do indutor de  $3,0 H$  com o resistor de  $10 \Omega$  é submetida a uma força eletromotriz de  $3,0 V$ . (a) Calcular a potência instantânea fornecida pela bateria  $0,30 s$  (igual a uma constante de tempo) após a ligação do circuito. (b) Calcular a potência instantânea dissipada sob a forma de calor no resistor. (c) Calcular o valor instantâneo da taxa de acumulação de energia no campo magnético.



**Resolução:**

(a) A corrente no circuito  $RL$  é dada pela equação 12.10,

$$i = (\varepsilon/R) (1 - e^{-t/\tau_L})$$

Para  $t = \tau_L = 0,30 \text{ s}$ , obtém-se:

$$i = \left(\frac{3,0V}{10\Omega}\right)(1 - e^{-1}) = 0,189A.$$

Assim, a potência instantânea fornecida pela bateria é:

$$P_\varepsilon = \varepsilon i = 3,0V \times 0,189A = 0,567W.$$

(b) A potência dissipada sob a forma de calor no resistor é:

$$P_R = Ri^2 = 10\Omega \times 0,189A = 0,357W.$$

(c) Para o cálculo da taxa de acumulação de energia no campo magnético é necessário derivar a equação da corrente em relação ao tempo.

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (\varepsilon/R) (1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\varepsilon}{R} \frac{R}{L} e^{-t/\tau_L} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-t/\tau_L},$$

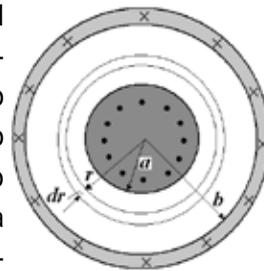
que para  $t = \tau_L$ , obtém-se:

$$\frac{di}{dt} = \frac{3,0V}{3,0H} e^{-1} = 0,37A/s.$$

Assim:

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = 3,0H \times 0,189A \times 0,37A/s = 0,210W.$$

5. A figura mostra um desenho em corte transversal de um cabo coaxial longo constituído por dois cilindros concêntricos de raios iguais a  $a$  e  $b$ . O cilindro condutor interno transporta uma corrente  $i$ , sendo o circuito fechado pelo retorno da mesma corrente do cilindro externo. Calcular (a) a energia armazenada no campo magnético existente entre os dois cilindros, para um comprimento  $l$  do cabo coaxial e (b) a indutância de um comprimento  $l$  do cabo.



**Resolução:**

A aplicação da lei de Ampère,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$ , para pontos do espaço entre os dois condutores, leva a

$$B \times 2\pi r = \mu_0 i \therefore B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Para pontos fora do condutor externo, a lei de Ampère leva a

$$B \times 2\pi r = \mu_o \times 0 \therefore B = 0.$$

Para pontos entre no interior dos dois condutores também existe campos magnéticos que, que embora possam ser calculados pela lei de Ampère, serão ignorados, pois será suposto que as dimensões do cabo são escolhidas de modo que a quase totalidade da energia magnética se encontra armazenada no espaço entre os condutores.

Então, a densidade de energia para pontos situados entre os dois condutores pode ser calculada pela equação 12.19,

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} = \frac{1}{2\mu_o} \left( \frac{\mu_o i}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_o i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Para um elemento de volume  $dV$  constituído pela casca cilíndrica de comprimento  $l$ , compreendida entre os raios  $r$  e  $r + dr$ , a energia nela contida é:

$$dU_B = u_B dV = \frac{\mu_o i^2}{8\pi^2 r^2} \times 2\pi r l \times dr = \frac{\mu_o i^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

$$\therefore U_B = \int dU_B = \frac{\mu_o i^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o i^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

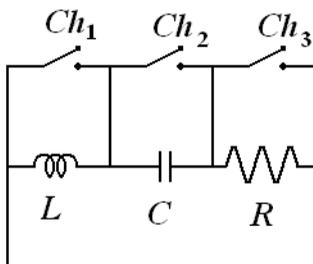
A indutância pode ser calculada pela equação 12.17,

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 \therefore L = \frac{2U}{i^2} = \frac{\mu_o l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

## Atividades de avaliação



1. A indutância de uma bobina formada por 400 espiras bem juntas é igual a  $8 \text{ mH}$ . Qual é o valor do fluxo magnético através da bobina quando ela é percorrida por uma corrente de  $5,0 \times 10^{-3} \text{ A}$ ?
2. Um indutor de  $10 \text{ H}$  é percorrido por uma corrente constante de  $2,0 \text{ A}$ . O que deve ser feito para aparecer no circuito uma força eletromotriz autoinduzida de  $100 \text{ V}$ ?
3. Um solenoide de  $2,0 \text{ m}$  de comprimento e  $4,0 \text{ cm}$  de diâmetro é constituído por uma única camada de espiras de fio de cobre de diâmetro igual a  $0,25 \text{ cm}$ . Qual o valor da indutância por unidade de comprimento na sua região central?
4. A corrente num circuito  $LR$  atinge um terço de seu valor de equilíbrio em  $5,0 \text{ s}$ . Qual é o valor da constante de tempo indutiva?
5. Quantas vezes maior do que a constante de tempo é o tempo decorrido, após a ligação da bateria, para corrente, num circuito  $LR$ , atingir 99,9% do valor de equilíbrio?



6. Aplica-se subitamente uma diferença de potencial de  $50\text{ V}$  aos extremos de uma bobina com  $L = 50\text{ mH}$  e  $R = 180\ \Omega$ . Qual é a taxa de crescimento da corrente após  $0,001\text{ s}$ ?
7. Um anel de madeira de seção reta quadrada tem raios interno e externo, respectivamente iguais a  $10\text{ cm}$  e  $12\text{ cm}$ . Enrola-se nele uma camada de espiras de fio de cobre de diâmetro  $0,1\text{ cm}$  e resistência por unidade de comprimento  $524\ \Omega/\text{m}$ . (a) Qual o valor da indutância do toroide assim formado? (b) Qual a sua constante de tempo indutiva? Desprezar a espessura do enrolamento.
8. Uma bobina de  $2,0\text{ H}$  de indutância e  $10\ \Omega$  de resistência é ligada instantaneamente a uma bateria de  $100\text{ V}$  e resistência interna desprezível. (a) Qual o valor da constante de equilíbrio? (b) Qual o valor da energia acumulada no campo magnético, quando esse valor da corrente já foi praticamente atingido?
9. Qual é a densidade do campo magnético perto do centro do solenoide do problema 11.6?
10. Um campo elétrico uniforme de  $10^5\text{ V/m}$  e um campo magnético uniforme de  $1,0\text{ T}$ , são considerados relativamente intensos, mas mesmo assim podem ser corretamente obtidos em laboratório. Compare os valores das energias necessárias para estabelecer estes campos num cabo de  $10\text{ cm}$  de aresta.
11. Uma espira de  $5,0\text{ cm}$  de raio é percorrida por uma corrente de  $100\text{ A}$ . Qual o valor da densidade de energia magnética no centro da espira?
12. Num circuito  $LC$  oscilante,  $L = 1,1\text{ mH}$  e  $C = 4,0\ \mu\text{F}$ . A carga máxima em  $C$  é  $3,0\ \mu\text{C}$ . Calcule: (a) a energia total máxima acumulada. (b) a corrente máxima que pode circular.
13. Seja um circuito elétrico como o esquematizado na figura. Quando a chave  $Ch_1$  está fechada e as outras duas chaves estão abertas, a constante de tempo vale  $\tau_C$ . Quando a chave  $Ch_2$  está fechada e as outras duas chaves estão abertas, o circuito possui uma constante de tempo  $\tau_L$ . Mostre que quando a chave  $Ch_3$  está fechada e as outras duas chaves estão abertas, o circuito oscila com um período  $T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$ .



**PARTE**

**7**

# **Magnetização da Matéria**



# Propriedades Magnéticas da Matéria

Núcleos de ferro em indutores e transformadores têm sido muito usados tecnologicamente, pois variações significativas em suas características são extremamente importantes para as aplicações tecnológicas.

O uso de materiais magnéticos em dispositivos de comunicação, em memórias de computadores, circuitos lógicos e em aplicações de interruptores de alta velocidade é muito comum. Portanto, é importante entender os princípios básicos que governam a interação de campos magnéticos com a matéria.

O grau de complexidade da teoria geral das propriedades magnéticas da matéria é grande para este nível de estudo, pois uma compreensão básica das interações magnéticas de muitas substâncias depende de conhecimentos da mecânica quântica de átomos e moléculas cuja matemática é complexa. No entanto, muito do comportamento observado das substâncias magnéticas pode ser entendido estudando-se os efeitos de correntes que circulam dentro de átomos ao criarem momentos magnéticos atômicos e considerando-se a interação destes momentos atômicos entre si e com campos magnéticos aplicados externamente.

## 13.1 Dipólos magnéticos

Caracterizado pelo seu momento de dipolo elétrico  $\vec{p}$ , um dipolo elétrico é formado por duas cargas elétricas de mesmo módulo e sinais opostos, portanto, uma carga elétrica isolada é a estrutura mais simples existente na eletricidade. No magnetismo, a estrutura mais simples que existe é o dipolo magnético, que é caracterizado pelo seu momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$ , não existindo, portanto, polos magnéticos isolados.

Exemplos de dipolos magnéticos são uma espira de corrente, uma barra imantada e um solenoide de comprimento finito. Os polos norte destas estruturas, ou seja, os polos do quais emergem as linhas de  $\vec{B}$ , podem ser identificados suspendendo-as como agulhas imantadas e observando qual

das extremidades aponta para o Norte. O valor de seus momentos de dipolo pode ser medido colocando-as no interior de um campo magnético externo  $\vec{B}$  e medindo o valor do torque  $\tau$  que sobre elas atuam. O vetor  $\vec{\mu}$  pode então ser obtido pela equação:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (13.1)$$

O elétron possui um momento magnético intrínseco associado ao seu spin. Uma espira com uma corrente elétrica também possui um momento magnético com direção perpendicular ao plano da espira e sentido dado pela regra da mão direita, como mostrado na Figura 13.1.

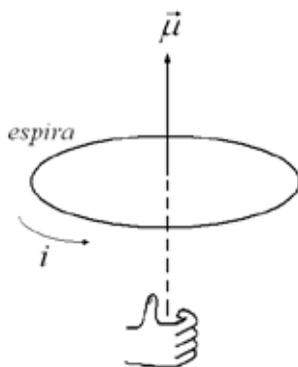


Figura 13.1 – O vetor momento magnético de uma espira de corrente.

A Figura 13.2 mostra um elétron numa órbita atômica. O elétron tem um momento magnético orbital perpendicular ao plano da espira, mas com sentido contrário àquele dado pela regra da mão direita.

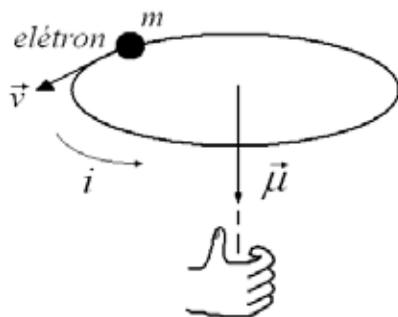


Figura 13.2 – O vetor momento magnético de um elétron numa órbita atômica.

A lei de Gauss do magnetismo é uma das quatro equações da teoria do eletromagnetismo de Maxwell. Representada pela equação (13.2) que iguala a zero o fluxo  $\Phi_B$  através de qualquer superfície fechada, esta lei é uma maneira formal de enunciar a conclusão tirada de experimentos magnéticos de que não existem pólos magnéticos isolados.

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (13.2)$$

## 13.2 Magnetização e intensidade magnética

Materiais magnetizáveis atuam como fonte de campos magnéticos porque cada átomo da substância possui momento magnético. Estes momentos magnéticos atômicos originam-se nos circuitos de corrente associados ao movimento dos elétrons dentro dos átomos e nos spins dos elétrons carregados negativamente que dão a cada elétron um momento magnético de spin intrínseco.

O momento magnético resultante associado ao material surge como resultado de dois efeitos competitivos: (1) da tendência dos momentos magnéticos atômicos se alinharem no mesmo sentido do campo aplicado ou dos campos moleculares do próprio material, e (2) da tendência da agitação térmica aleatória de quebrar os momentos alinhados e de produzir uma distribuição completamente aleatória de magnetização atômica correspondente ao momento magnético total zero. O efeito alinhante do campo aplicado é proporcional ao campo e independente da temperatura, enquanto que o efeito aleatório da agitação térmica é proporcional à temperatura e independente do campo aplicado. A Figura 13.3 mostra um esquema destes efeitos.

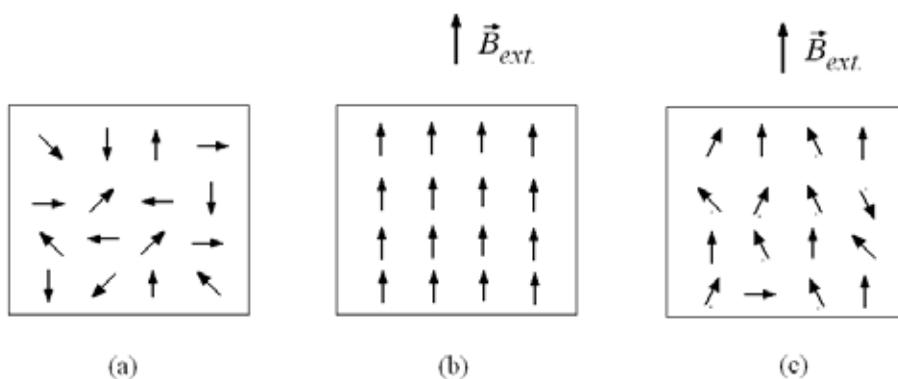


Figura 13.3 – (a) Alinhamento aleatório dos momentos magnéticos atômicos devido à agitação térmica; (b) alinhamento magnético completo devido a um forte campo externo, com agitação térmica desprezível e (c) alinhamento magnético parcial com as tendências concorrentes (1) do campo externo que provoca o alinhamento e (2) da agitação térmica desalinhante.

Como os campos magnéticos são causados por correntes, o campo magnético causado pelos momentos magnéticos atômicos de substâncias magnetizáveis é relacionado às correntes eletrônicas circulantes que fluem dentro dos átomos da substância, como pode ser visto na ilustração da Figura 13.4, onde cada célula representa esquematicamente o volume ocupado por um único átomo.

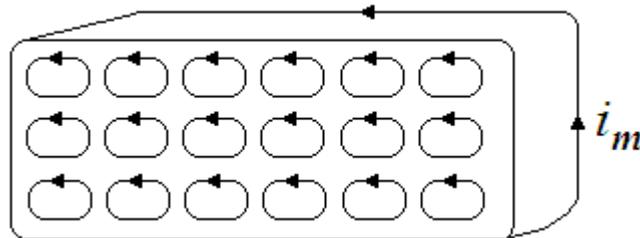


Figura 13.4 – Pode ser observado que as correntes circulantes atômicas internas nas superfícies internas se cancelam, levando a um efeito magnético resultante atribuível a uma corrente de magnetização de superfície circulante que flui em torno da superfície

Pode ser observado nesta figura que o sentido da circulação da corrente eletrônica em cada célula é oposto ao da célula vizinha, havendo assim cancelamento de corrente com a célula vizinha ao longo de cada fronteira interna e, portanto, seus efeitos na contribuição a uma distribuição de corrente total, anulam-se mutuamente. No entanto, não há cancelamento de correntes atômicas na superfície do material. Deste modo elas contribuem para uma corrente de magnetização de superfície  $i_m$  que flui pela superfície externa da substância no sentido indicado na figura. A corrente de magnetização superficial é então a fonte do campo magnético da amostra, que é um campo dipolar magnético surgido de um momento dipolar  $p_m$  dado por:

$$p_m = i_m A, \quad (13.3)$$

onde  $A$  é a área seccional.

Pode ser observado ainda que a intensidade da corrente de magnetização superficial,  $i_m$ , é igual a intensidade da corrente atômica em cada célula, no entanto, o momento dipolar individual  $dp_m$  associado a cada célula é:

$$dp_m = i_m dA \quad (13.4)$$

que integrando sobre toda a amostra da substância chega-se a ao momento dipolar total dado por (13.3).

Do mesmo modo que a intensidade do campo elétrico de um dielétrico polarizado pode ser descrito por um vetor de polarização representando o momento dipolar elétrico por unidade de volume, pode-se expressar o campo

magnético de uma substância magnetizada em termos de um vetor de magnetização  $\vec{M}$  que é relacionado ao momento dipolar magnético  $d\vec{p}_m$  que surge de um elemento de volume  $dV$  do material, dado por:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{p}_m}{dV}, \quad (13.5)$$

de modo que o momento dipolar da amostra pode ser escrito como:

$$\vec{p}_m = \int_V \vec{M} dV, \quad (13.6)$$

onde a integral é realizada sobre o volume total  $V$  da amostra magnetizada.

A intensidade da corrente de magnetização da amostra pode ser escrita em função do vetor de magnetização como:

$$i_m = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l}, \quad (13.7)$$

onde a integral é realizado sobre o contorno  $C$  da amostra.

Observa-se em (13.6) que os vetores  $\vec{M}$  e  $\vec{p}_m$  têm a mesma direção e sentido, o que faz os vetores  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  serem sempre paralelos. Desta maneira, aplicando-se a lei de Ampère para a amostra, obtém-se:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o i_t + \mu_o (i_c + i_m), \quad (13.8)$$

onde  $i_t$  é a corrente total que circula no contorno  $C$ ,  $i_c$  é a corrente que se origina do fluxo de cargas móveis compreendido no contorno  $C$  e  $i_m$  é a corrente de magnetização.

Substituindo (13.7) em (13.8), obtém-se:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o i_c + \mu_o \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (13.9)$$

$$\therefore \oint_C \left( \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = i_c \quad (13.10)$$

$$\text{ou} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_c, \quad (13.11)$$

$$\text{onde} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \quad (13.12)$$

é referido como intensidade magnética.

De (13.12),  $\vec{B}$  pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \quad (13.13)$$

Como normalmente a magnetização resultante do material é excitada pelo efeito magnético de uma distribuição de corrente real, é razoável supor que haja algum relacionamento entre a magnetização do material e a intensidade magnética  $\vec{H}$ . Na situação mais simples, esta relação seria uma proporcionalidade direta da forma:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (13.14)$$

onde  $\chi_m$  é uma quantidade constante independente de  $\vec{H}$ . De fato, muitas substâncias magnetizáveis comportam-se deste modo, pelo menos para valores de intensidade magnética que não sejam excessivamente grandes. Diz-se que tais substâncias exibem comportamento magnético linear e são sempre chamadas de materiais magnéticos lineares. A constante de proporcionalidade  $\chi_m$  é geralmente referida como susceptibilidade magnética do material. Em muitas situações, é possível calcular a susceptibilidade magnética a partir das propriedades magnéticas fundamentais dos átomos da substância e assim prever sua dependência em relação à temperatura, composição e outros parâmetros físicos.

Usando (13.14) em (13.13), obtém-se:

$$\vec{B} = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H}, \quad (13.15)$$

onde a quantidade

$$\mu = \mu_o (1 + \chi_m) \quad (13.16)$$

é chamada de permeabilidade magnética do material. De (13.16) é definida permeabilidade relativa  $K_m$  como a razão entre a permeabilidade magnética do material  $\mu$  e a permeabilidade do espaço livre  $\mu_o$ , ou seja:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_o} = (1 + \chi_m). \quad (13.17)$$

Em substâncias permanentemente magnetizáveis (permeabilidade alta), como o ferro, o níquel e o cobalto, dificilmente possuem comportamento linear entre a intensidade magnética e a magnetização. Suas susceptibilidades dependem do campo mesmo para valores bem pequenos de  $H$  e de influências magnéticas anteriores que a amostra possa ter sofrido. Estas substâncias onde os dipolos magnéticos atômicos tendem não apenas a se alinhar em resposta a campos magnéticos aplicados externamente, mas também alinhar-se entre si, são chamadas de ferromagnéticas.

Outras substâncias apresentam susceptibilidade magnética positiva bem pequena, nas quais cada momento magnético atômico tende a se alinhar paralelamente ao campo externo aplicado sem influência significativa com outro, são chamadas de paramagnéticas.

E em outras substâncias com suscetibilidade magnética negativa (correspondendo à permeabilidade relativa menor que um), em que os momentos magnéticos atômicos tendem a se alinhar no sentido oposto àquele do campo aplicado externamente, são referidas como diamagnéticas.

### 13.3 Substâncias magnéticas

Vários são os efeitos magnéticos existentes em qualquer substância. Alguns deles, individualmente, podem levar a substância a ter características diamagnéticas, enquanto que outros podem dar contribuições paramagnéticas. A suscetibilidade magnética total da substância e a suscetibilidade resultante dão caráter paramagnético ou diamagnético à substância, dependendo da importância relativa dos efeitos magnéticos numa determinada substância. Portanto, será aqui considerado o mais importante destes efeitos sob um aspecto mais geral.

Para dar uma idéia do que acontece com as substâncias ditas magnéticas, apresenta-se a seguir uma breve explicação, numa visão clássica, dos três tipos básicos de magnetismo: o ferromagnetismo, o paramagnetismo e o diamagnetismo.

#### 13.3.1 O Ferromagnetismo

O magnetismo comumente conhecido na vida diária das pessoas é o ferromagnetismo. Nas substâncias ferromagnéticas tais como o ferro, o níquel e o cobalto, existem interações entre os momentos magnéticos dos átomos vizinhos que são tão fortes que os momentos magnéticos podem se alinhar com pouca ou nenhuma assistência de campos aplicados externamente.

Os materiais ferromagnéticos exibem permeabilidades magnéticas muito grandes e podem também, de um modo geral, ser magnetizados permanentemente. Como os momentos atômicos são quase completamente alinhados, mesmo por campos externos relativamente fracos, o valor de saturação da magnetização é atingido realmente a valores pequenos de intensidade magnética, e a magnetização não é uma função linear do campo aplicado  $\vec{H}$ . Como conseqüência, a suscetibilidade de substâncias ferromagnéticas não é constante. Ela varia com a intensidade de  $\vec{H}$ .

O ferromagnetismo é uma propriedade que depende da temperatura. Para cada substância ferromagnética existe uma temperatura, chamada de temperatura de Curie, acima da qual a substância se torna para paramagnética.

### 13.3.2 O Paramagnetismo

Nas substâncias chamadas paramagnéticas, os átomos possuem momentos dipolares magnéticos resultantes permanentes que, em geral são os que mais contribuem à suscetibilidade magnética. Estes momentos atômicos que tendem a se alinhar no sentido do campo aplicado, por sofrerem ação de forças magnética, a magnetização resultante também se alinham neste sentido. Mas, ao mesmo tempo, a energia térmica aleatória dos átomos da substância tende a destruir este alinhamento e produzir um arranjo completamente desordenado de momentos atômicos que somam zero ao momento magnético total. Há, portanto, uma competição entre os efeitos alinhantes do campo externo aplicado e o efeito desordenante da energia térmica interna da substância. Em geral, o resultado desta competição é um alinhamento parcial dos momentos cuja extensão depende da intensidade do campo e da temperatura.

### 13.3.3 O Diamagnetismo

Em 1846, Michael Faraday cunhou o termo diamagnetismo, numa contraposição às substâncias paramagnéticas, para as substâncias que se comportavam como o bismuto que ao ser colocado próximo de um pólo de um ímã bastante forte era repellido por ele.

O diamagnetismo está associado aos momentos magnéticos orbitais dos elétrons nos átomos que constituem a substância em questão. Por isso, está presente em todas as substâncias embora, na maioria, com uma intensidade tão pequena que sua presença é eclipsada por outros comportamentos. Nos supercondutores, parece que o diamagnetismo é suficientemente intenso para que o campo magnético resultante no interior da amostra seja nulo.

Em muitas substâncias, as correntes circulantes devidas aos elétrons atômicos individuais dão origem ao momento magnético orbital total nulo. Isto ocorre porque, embora os elétrons individuais possam ter valores não decrescentes de momento angular, existem pares de elétrons com momentos angulares iguais e opostos, resultando a um momento angular total nulo, e conseqüentemente, a um momento magnético resultante também nulo. Os momentos magnéticos do spin resultante também podem ser emparelhados e somando zero também.

Embora os átomos destas substâncias tenham momento magnético nulo na ausência de campos externos, quando um campo magnético é aplicado, o fluxo magnético variante que ele produz pode interagir com os circuitos de corrente circulante associados aos elétrons atômicos de tal modo que um momento magnético induzido pode surgir. De acordo com a lei de Lenz, o sentido deste momento magnético deve ser oposto àquele do campo magnético aplicado e, portanto, este efeito leva a uma suscetibilidade magnética fraca.

## Exercício resolvido

1. Como é possível medir o valor de  $\mu$  de uma barra imantada?

### Resolução:

Cola-se a barra imantada num campo magnético uniforme, de modo que o momento magnético  $\vec{\mu}$  faça um ângulo  $\theta$  com  $\vec{B}$ . O módulo do torque que atua sobre a barra será dado por  $\tau = \mu B \sin\theta$ , de modo que  $\mu$  pode ser calculado, uma vez conhecendo os valores de  $\tau$ ,  $B$  e  $\theta$ .

2. Seja um elétron percorrendo uma trajetória circular de raio  $r$  em um átomo, que se comporta como uma pequena espira de corrente com um momento de dipolo magnético orbital  $\mu_l$ . Obter uma relação entre  $\mu_l$  e o momento angular orbital  $L_l$ .

### Resolução:

A força resultante atuante como força centrípeta no elétron na trajetória circular é a força elétrica dada pela lei de Coulomb. Ou seja, de:

$$F = ma$$

obtém-se:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \therefore v \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}$$

Assim, a velocidade angular,  $\omega = v/r$ , será:

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3}}$$

A corrente correspondente ao movimento orbital do elétron é igual à carga que passa num ponto fixo por unidade de tempo, ou seja:

$$i = \frac{e}{t} = e \times \frac{1}{t} = e \cdot v = e \cdot \frac{\omega}{2\pi} = e \left( \frac{\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3}}}{2\pi} \right) = \sqrt{\frac{e^4}{16\pi^3 \epsilon_0 mr^3}}$$

Como o momento de dipolo magnético de uma espira de corrente é dado por  $\mu = NiA$ , então, o momento de dipolo magnético orbital  $\mu_l$  do movimento orbital do elétron é obtido substituindo-se  $N = 1$  e  $A = \pi r^2$ , ou seja:

Já o vetor momento angular orbital é dado por  $\vec{L}l = \vec{r} \times \vec{p}$ , cujo módulo é:

$$L_l = rmv$$

$$\therefore Ll = r \times m \times \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = \sqrt{\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0}}$$

Comparando

$$\mu_l = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi\epsilon_0 m}}$$

com

$$L_l = \sqrt{\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0}}$$

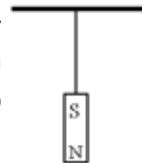
obtem-se

$$\mu_l = L_l \left( \frac{e}{2m} \right).$$

### Atividades de avaliação



1. O momento de dipolo de uma pequena espira de corrente é de  $2,0 \times 10^{-4} \text{ A.m}^2$ . Qual é o campo magnético, devido ao dipolo, sobre o eixo do dipolo e a 8,0 cm da espira?
2. A figura mostra um desenho de imã suspenso por um fio. Ao se aplicar um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  orientado paralelamente ao solo, mostre qual será a orientação resultante do fio no imã.
3. Calcule (a) a intensidade do campo elétrico  $\vec{E}$  e (b) a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  num ponto distante 1,0 Angstrom de um próton ao longo da direção do seu spin. O momento magnético do próton é igual a  $1,4 \times 10^{-26} \text{ A.m}^2$ .
4. Mostre que, classicamente, o momento magnético de uma partícula positiva em rotação aponta sempre na mesma direção do seu momento angular.
5. Um elétron tem um momento angular de spin  $L = 0,53 \times 10^{-34} \text{ J.s}$  e um momento magnético  $\mu = 9,3 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$ . Compare  $\mu L$  e  $e/m$  para o elétron.



**PARTE**

**8**

# **0 Eletromagnetismo**



# As Equações de Maxwell

A unificação da eletricidade com magnetismo e a óptica em uma só teoria – o eletromagnetismo – foi proposta por James Clerk Maxwell em 1865, na qual determina a velocidade da luz no vácuo em termos da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética.

A teoria está baseada nas propriedades matemáticas da lei de Gauss para a eletricidade, da lei de Gauss para o magnetismo, da lei de Faraday e da lei de Ampère.

Devido o elevado grau da matemática do cálculo vetorial para este nível de ensino, será aqui apresentada apenas uma discussão qualitativa do que ficou conhecido com as equações de Maxwell.

## 14.1 As quatro leis fundamentais do eletromagnetismo

As partículas que compõem a matéria estão sujeitas a uma interação eletromagnética, associada à carga elétrica  $q$ . Tal interação é descrita por um campo eletromagnético caracterizado pelo vetor campo elétrico  $\vec{E}$ , determinado pela posição da carga através da lei de Gauss para a eletricidade:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (14.1)$$

e pelo vetor campo magnético  $\vec{B}$ , determinado pelo movimento da carga através da lei de Gauss do magnetismo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (14.2)$$

resultando na força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (14.3)$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  se relacionam através da lei de Faraday-Henry:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (14.4)$$

e da lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \left( i + \epsilon_o \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right). \quad (14.5)$$

Estas quatro leis expressas pelas equações (14.1), (14.2), (14.4) e (14.5) são a síntese do eletromagnetismo e são conhecidas como Equações de Maxwell. Estas equações representam de fato a maioria das interações eletromagnéticas entre grandes agrupamentos de cargas elétricas, como nas antenas de rádio e televisão, circuitos elétricos, em feixes de átomos ou moléculas ionizadas. No entanto, interações eletromagnéticas entre partículas fundamentais da natureza, com altas energias, não são descritas por elas. Para estas partículas, as interações são tratadas pelas leis da mecânica quântica.

## 14.2 Breve histórico das Equações de Maxwell

As quatro equações de Maxwell expressam (1) como cargas elétricas produzem campos elétricos – lei de Gauss para a eletricidade, (2) a ausência experimental de cargas magnéticas – lei de Gauss para o magnetismo, (3) como corrente elétrica produz campo magnético – lei de Ampère, e (4) como variações de campo magnético produzem campos elétricos – lei da indução de Faraday.

Maxwell, em 1864, foi o primeiro a apresentar as quatro equações juntas e perceber que era necessária uma correção na lei de Ampère para contemplar que alterações no campo elétrico atuam como correntes elétricas produzindo campos magnéticos.

Em 1865, Maxwell tinha sua teoria do eletromagnetismo formulada em termos de vinte equações com vinte variáveis. Estas equações eram:

- Lei de Ampère corrigida – uma equação com três componentes;
- Lei de Gauss para a carga – uma equação;
- Relação entre densidade de corrente total e densidade de deslocamento – três equações;
- Relação entre campo magnético e vetor potencial, que implica na ausência de carga magnética – uma equação com três componentes;
- Relação entre campo elétrico e os potenciais escalar e vetorial, que implicam na lei de Faraday – uma equação com componentes;
- Relação entre campo elétrico e campo de deslocamento – uma equação de três componentes;
- Lei de Ohm relacionando intensidade de corrente e campo elétrico – uma equação com três componentes;
- Equação de continuidade relacionando intensidade de corrente e densidade de carga – uma equação.

Em 1884, Oliver Heaviside e Willard Gibbs usaram o cálculo vetorial no sistema original das equações de Maxwell e apresentaram uma nova representação mais simples e condensada para estas equações. Esta nova formulação possuía uma matemática simétrica que permitia perceber as simetrias físicas embutidas nelas, cuja notação inspiraria diretamente o desenvolvimento posterior da física fundamental.

Maxwell propôs que a luz era uma onda eletromagnética e sua velocidade seria deduzida das equações como:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (14.6)$$

Em 1865, Maxwell escreveu:

“Esta velocidade é tão próxima da velocidade da luz que parece que temos fortes motivos para concluir que a luz em si (incluindo calor radiante, e outras radiações do tipo) é uma perturbação eletromagnética na forma de ondas propagadas através do campo eletromagnético de acordo com as leis eletromagnéticas.”

Na verdade, Michael Faraday postulou uma descrição similar da luz em 1846, mas não foi capaz de dar uma descrição quantitativa ou prever a velocidade.

Maxwell estava correto em sua hipótese, embora ele não tenha vivido o suficiente para ver sua comprovação por Heinrich Hertz em 1888. A explicação quantitativa da luz como onda eletromagnética é considerada um dos grandes triunfos da física do século XIX.

Albert Abraham Michelson e Edward Morley fizeram um experimento que anulava por completo a hipótese da mudança da velocidade da luz devido ao movimento hipotético da Terra através do éter.

Lorentz e outros procuraram explicações alternativas que culminaria na teoria de Albert Einstein da relatividade especial, que postulava a ausência de qualquer referencial absoluto e a invariância das equações de Maxwell em todos os referenciais. Além disso, serviu como base para muitos desenvolvimentos futuros na física, tais como a relatividade restrita, a unificação entre o campo magnético e o campo elétrico como uma única quantidade tensorial, e a Teoria de Kaluza-Klein da unificação do eletromagnetismo com a gravidade e a relatividade geral. Kaluza e Klein demonstraram na década de 1920 que as equações de Maxwell podem ser deduzidas ao se estender a relatividade geral a cinco dimensões. Esta estratégia de se usar dimensões maiores para unificar diferentes forças é uma área de interesse ativo na pesquisa da física de partículas.

### 14.3 Ondas Eletromagnéticas

Os trabalhos com o eletromagnetismo tiveram seu ápice com as equações de Maxwell, que tiveram como principal consequência a previsão da existência das ondas eletromagnéticas. Maxwell mostrou que os campos elétrico e magnético variáveis satisfazem uma equação que descreve o movimento ondulatório, que se propaga com velocidade definida  $v$  e sem distorção ao longo de um eixo  $x$ , da forma:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2}. \quad (14.7)$$

que mais tarde Heinrich Hertz (1857-1894) demonstrou que um campo eletromagnético variável se propaga no vácuo. Hoje essas ondas são largamente conhecidas e utilizadas na ciência e na tecnologia.

As equações de Maxwell para o campo eletromagnético no vácuo, isto é, numa região onde não há cargas livres nem correntes, admitem, como solução especial, um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  perpendiculares entre si e que se propagam ao longo de uma direção perpendicular a ambos. Colocando o eixo  $y$  paralelamente ao campo  $\vec{E}$  e orientando o eixo  $z$  paralelamente ao campo  $\vec{B}$ , tem-se, para esse caso especial,  $E_x = 0, E_y = E, E_z = 0$  e  $B_x = 0, B_y = 0, B_z = B$ . Nestas condições, os campos elétrico e magnético satisfazem a equação de onda 14.7. Ou seja:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 E}{dx^2} \quad (14.8)$$

e

$$\frac{d^2 B}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 B}{dx^2}, \quad (14.9)$$

que indicam que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  se propagam na direção do eixo  $x$  com velocidade  $c$ . Como consequência, os campos elétrico e magnético podem ser expressos por  $E = E(x-ct)$  e  $B = B(x-ct)$  e correspondem a uma onda eletromagnética plana.

Considerando, em particular, o caso das ondas harmônicas de frequência  $\nu = \omega/2\pi$  e comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , tem-se:

$$E = E_0 \text{sen}k(x-ct) \quad (14.10)$$

e

$$B = B_0 \text{sen}k(x-ct) \quad (14.11)$$

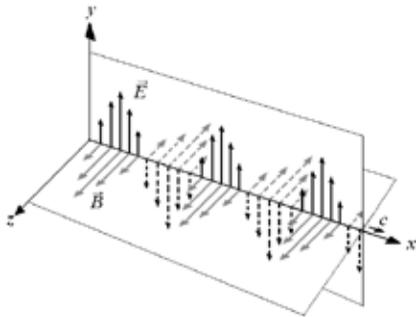
As constantes  $E_0$  e  $B_0$  não são independentes. Pelas equações de Maxwell elas se relacionam da forma:

$$E_0 = cB_0 \quad (14.12)$$

Esta relação entre as amplitudes implica que os valores instantâneos dos campos também se relacionam por:

$$E_o = cB \tag{14.13}$$

A onda eletromagnética descrita pelas equações 14.10 e 14.11 está representada a Figura 14.1.

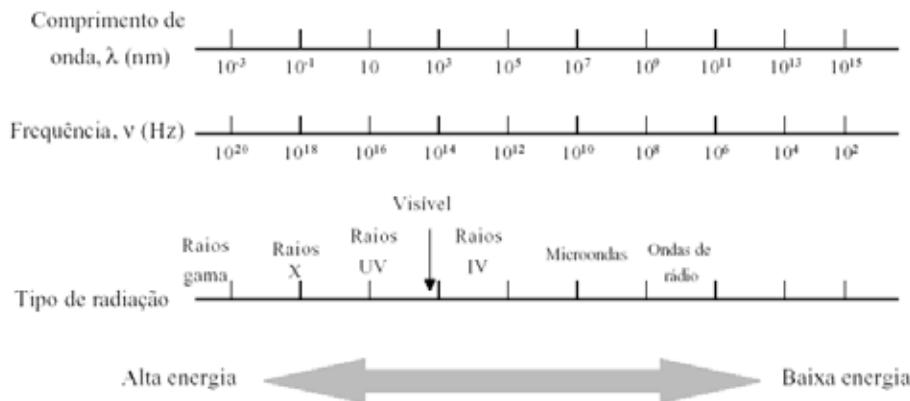


**Figura 14.1** – Campos elétrico e magnético de uma onda eletromagnética plana que se propaga no sentido positivo do eixo x.

### 14.4 Espectro Eletromagnético

As ondas eletromagnéticas cobrem um amplo intervalo de frequências, ou comprimentos de onda, e, por conveniência, podem ser classificadas de acordo com a sua fonte principal e com o seu efeito mais importante ao interagir com a matéria. A classificação não possui limites bem definidos, pois diferentes fontes podem produzir ondas cujos intervalos de frequência se sobrepõem.

A Figura 14.2 mostra, em resumo, a classificação habitual do espectro eletromagnético.



**Figura 14.2** - Classificação habitual do espectro eletromagnético.

## Referências



ALONSO, M; FINN, E. J.: **FÍSICA**, Addison-Wesley iberoamericana España, S.A., Madri, 1999.

MCKELVEY, J. P., GROTCHE, H.: **FÍSICA**, v. 3, Editora Harper & Row do Brasil LTDA, São Paulo, 1979.

HALLIDAY, D. RESNICK, R., KRANE, K. S.: **FÍSICA**, v. 3, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, 1996.

McCLELLAND, John A. The Physics Teacher -- December 1999 -- Volume 37, Issue 9, pp. 516.

SERWAY & JEWETT. Physics for Scientist and Engineers, 6th Ed.

## Sobre os autores

**Antonio Carlos Santana dos Santos** Possui graduação em Licenciatura em Ciências pela Universidade Estadual do Ceará (1995), graduação em Licenciatura em Ciências com Habilitação Plena em Física pela Universidade Estadual do Ceará (1997) , mestrado em Física pela Universidade Federal do Ceará (2001) e doutorado em Física pela Universidade Federal do Ceará (2005). Atualmente é professor assistente da Universidade Estadual do Ceará. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física de Nuvens e Modelagem Numérica da Atmosfera.



Física

Fiel a sua missão de interiorizar o ensino superior no estado Ceará, a UECE, como uma instituição que participa do Sistema Universidade Aberta do Brasil, vem ampliando a oferta de cursos de graduação e pós-graduação na modalidade de educação a distância, e gerando experiências e possibilidades inovadoras com uso das novas plataformas tecnológicas decorrentes da popularização da internet, funcionamento do cinturão digital e massificação dos computadores pessoais.

Comprometida com a formação de professores em todos os níveis e a qualificação dos servidores públicos para bem servir ao Estado, os cursos da UAB/UECE atendem aos padrões de qualidade estabelecidos pelos normativos legais do Governo Federal e se articulam com as demandas de desenvolvimento das regiões do Ceará.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

